॥ श्रीमद्भास्कराचार्यकृत बीजगणिताचें ॥

॥ सोपपत्तिक भाषांतर ॥

॥ श्रीगणेशायनमः ॥

श्रीभास्कराचार्यकृत

बीजगणिताचें सोपपत्तिक भाषांतर.

हा ग्रंथ

विनायक पांडुरंगशास्त्री खानापूरकर,

यांनीं तयार करून

गोब्राह्मण प्रतिपालक श्रीमंत सर गंगाधरराव पटवर्धन ऊर्फ
बाळासाहेब मिरजकर जहागिरदार यांच्या पूर्ण मद-
तीनें पुणें, पेठ शनवार मेहुणपुरा, घर नंबर ४४९
येथील दत्तात्रय गणेश खांडेकर, यांच्या
" लॉ प्रिंटिंग " प्रेसमध्यें छापवून
संस्थान औंध येथें प्रसिद्ध
केला आहे.

शके १८३४ सन १९१३.

किंमत २ रुपये.

हा ग्रंथ

गोब्राह्मण प्रतिपालक श्रीमंत सर गंगाधरराव
पटवर्धन ऊर्फ बाळासाहेब मिरजकर
जहागीरदार

यांस

ग्रंथकर्त्यानें

त्यांची विद्याभिरुचि, उद्योगप्रियता, ग्रंथकर्तृ-
सहानुभूति, औदार्य इत्यादि गुणांच्या
अभिनंदनार्थ अत्यादरपूर्वक
अर्पण केला आहे.

ग्रंथकर्ता.

OPINIONS.

I am glad to find that Mr. Vinayak Shastri Khanapurkar is engaged in translating Sanskrit Mathematical and Astronomical works into Marathi, and that he has been promised patronage, though not yet to the extent he requires or deserves, by some gentlemen. Mr. Vinayak Shastri is a Hindu Jyotishi and has studied English Mathematical works under the late Professor Chhatre. He is therefore well qualified to undertake such translations, and I have no doubt that if properly encouraged, he will do good service in the line he has chosen for himself. I have gone through the important portions of his translation of Bhaskaracharya's Algebra and have found them both accurate and interesting. The work has been previously translated, but none has attempted to give the reasons for the rules enunciated by the Acharya. The original is not a treatise on Algebra in the sense in which we understand the title now. The work is written for the purpose of learning by heart, and so contains only the rules for the solutions of Algebraic questions. Mr. Vinayak Shastri has attempted, and so far as I can judge, successfully to find out the reasons for these rules, and it is this circumstance that gives special interest to his translation.

One is sometimes surprised to find, in the works of Bhaskaracharya, rules, which, comparatively speaking, have been but recently discovered in Europe, and the task of finding out the reasons for such rules, without resorting to the methods since discovered, is not an easy one. Mr. Vinayak Shastri's labours, therefore, fully deserve to be encouraged and patronised, and I trust that they will be so patronised, not only by those who have promised patronage, but by the public generally.

POONA,
20th Feb. 1892. (Sd.) BAL GANGADHAR TILAK.

I have read Mr. Vinayak Shastri Khanapurkar's translation of Bhaskaracharya's Bijaganita, and found that it is a successful attempt. The book will be found useful, not only for the Joshis who have to study Algebra in Marathi, but also for students in High Schools. The translation is only as close as is required by the nature of the subject and will be easily intelligible to the general reader even if read by itself.

But the most interesting feature of the work is the author's attempt to supply the theoretical portion which was altogether wanting in the original. The rules as they stand in the text are merely empirical and are like spells to be used to call up certain results. But now that the theory is supplied, they become conclusions that can be arrived at by the rigid methods of Mathematical reasoning. The theories at present inserted in the book are not mere translations or transcriptions, but have been discovered or at least re-discovered for himself, by the learned Shastri, and as such reflect much credit on him.

If as liberally patronised by the public as he deserves, he seems to be the proper man to present us with a series of Mathematical works in Marathi.

POONA, 5-3-1892. (Sd.) VISHNU BALVANT GOKHALE, M. A.
Mathematical Teacher,
Native Institution, Poona.

S. S. HIGH SCHOOL, AUNDH.
17th November, 1912.

The well-known learned gentleman, Pandit Vinayak Shastri Khanapurkar, has this year brought forward his translation of Bhaskaracharya's Bijganitam, and I have a great pleasure in saying that it is not a mere translation,—it is what it ought to be. The original is a collection of important rules and clever artifices used in solving questions in the then existing Bij or Algebra; while our learned Shastri has supplied the translation with theories of his own to prove the veracity of the rules. And this his labour has made the book as good as any recent one on the subject; for it is supposed that rules without theories give rise to cramming. Whatever might have been the intention of the Acharya in not giving the reasons for his rules then, it is quite necessary in these days to prove a proposition by clear theories. Our Shastri's theories are in no way inferior, either in accuracy or in generality, to those found in any renowned book on Algebra at present.

Bhaskaracharya's Bijganit is not what we understand by the word Algebra at present. Bij was then meant to give aid in solving difficult Arithmetical problems and hence the greater portion of the book treats of questions in equations of one or more unknowns. Many of the questions have innumerable answers.

Bhaskaracharya says that he learned Bij from his father and that there were three great works on the subject at his time; but that instead of making a pupil go through any such bulky volume, he had written this little book to enable him to solve questions in higher Mathematics. Some of the rules are quite surprising and the most wonderful thing is that Acharya's कुट्टक or चक्री is nowhere found in modern Algebra.

In short, I am of opinion that this translation will be very useful both to the teacher and the students of Algebra in spite of all the modern text books on the subject.

N. V. GOLIVADEKAR,
Mathematical teacher,
S. S. High School, Aundh.

प्रस्तावना.

आपल्या हिंदुस्थानामध्यें भास्कराचार्य या नांवाचे नामांकित ज्योतिषी होऊन गेले. यांचा जन्म शके १०३६ मध्यें झाला. यांनीं सिद्धांतशिरोमणी नामक ग्रंथ केलेला आहे त्यांपैकीं बीजगणित नांवाचा एक भाग आहे. त्याचें हें भाषांतर आहे. यामध्यें धनर्णषड्विध, शून्यषड्विध, अनेकवर्णषड्विध, करणीषड्विध, कुट्टकप्रकरण, वर्गप्रकृति, चक्रवाल, एकवर्णसमीकरण, एकवर्णमध्यमाहरण, अनेकवर्णसमीकरण, अनेकवर्णमध्यमाहरण आणि भावित अशीं अतिमहत्वाचीं व विशेष उपयोगाचीं प्रकरणें आहेत.

ब्रह्मबीज, श्रीधरबीज व पद्मनाभबीज असे तीन ग्रंथ बीजगणितावर फारच विस्तृत आहेत. आचार्यांनीं त्या ग्रंथांतील सर्व विस्तार टाकून देऊन सारभूत हें बीज तयार केलें आहे. कारण बीजगणिताचा कांहीं अंत नाहीं, ह्मणून "दुस्तरः स्तोकबुद्धीनां शास्त्रविस्तारवारिधिः अथवा शास्त्रविस्तृत्या किं कार्यं सुधियामपि" या न्यायानें जर शास्त्राचा विस्तार करावा तर शास्त्रविस्ताररूपसमुद्र हा मंदबुद्धिलोकांस दुस्तर होईल व बुद्धिमान लोकांस तर शास्त्रविस्ताराची मुळींच जरूर नाहीं. शिवाय "उपदेशलवं शास्त्रं कुरुते धीमतो यतः ॥ तत्तु प्राप्यैव विस्तारं स्वयमेवोपगच्छति ॥ जले तैलं खले गुह्यं पात्रे दानं मनागपि ॥ प्राज्ञे शास्त्रं स्वयं याति विस्तारं वस्तुशक्तितः" ह्मणजे ज्यामध्यें उपदेशाचा लव आहे असें शास्त्र बुद्धिवानास प्राप्त झालें असतां तें स्वतःच विस्तारास जातें. जसें जलामध्यें तेलाचा एक बिंदु टाकिला असतां तो स्वशक्तीनेंच विस्तारास जातो, खलाचे ठिकाणीं गुह्य व पात्रीं दान विस्तारास जातें, तसेंच प्राज्ञाच्या ठिकाणीं शास्त्र हें वस्तुशक्तीनेंच विस्तारास जातें. करितां शास्त्रलाघव करणें हेंच उत्तम होय. असें मनांत आणूनच आचार्यांनीं पूर्वग्रंथांतील विस्तार टाकून देऊन हें बीजगणित तयार केलें आहे. हल्लीं जीं बीजगणितावर पुस्तकें आहेत त्यांतील सर्व मूळ तत्वें या आचार्यकृत बीजगणितांत आहेत. आचार्यकालापासून ८०० वर्षांच्या अवधींत हल्लींच्या बीजगणितामध्यें पुष्कळ नवीन भर पडणें साहजिक आहे. तथापि आचार्यांचे कुट्टक प्रकरणांतील वल्ली, वर्गप्रकृति, चक्रवाल, प्रस्तुत भाषांतरांतील २०।२१ पानांतील आचार्यांचे नियम, करणीच्या वर्गमूळासंबंधीं कांहीं नियम हल्लींच्या पुस्तकांत आढळत नाहींत. ही गोष्ट आचार्यकृत बीजगणितास विशेष भूषणास्पद आहे. हें तज्ज्ञ वांचकांच्या लक्ष्यांत सहज येईल.

हा ग्रंथ तयार करून बरींच वर्षें झालीं. परंतु छापविण्याचा खर्च करणारा कोणी माणूस न मिळाल्यामुळें आजपर्यंत तसाच राहिला होता. हल्लीं वाचकांच्या सुदैवयोगानें हें पुस्तक छापण्याचे कामीं श्रीमंत सर बाळासाहेब मिरजकर जहागीरदार यांनीं पूर्ण मदत केल्यामुळें हें पुस्तक प्रसिद्ध झालें. यामुळें मी श्रीमंतांचा फार फार आभारी आहें. वाचकलोकही श्रीमंतांच्या औदार्याविषयीं धन्यवाद गातील यांत बिलकूल शंका नाहीं.

ग्रंथकर्ता.

अनुक्रमणिका.

॥ श्रीगणेशायनमः ॥

बीजगणित.

श्लोक :—उत्पादकं यत् प्रवदंति बुद्धेरधिष्ठितं सत्पुरुषेण सांख्याः ॥
व्यक्तस्य कृत्स्नस्य तदेकबीजमव्यक्तमीशं गणितं च वंदे ॥१॥

अर्थः—ज्याला गणकवर्य बुद्धीचे उत्पादक व सत्पुरुषानें अधिष्ठित असें ह्मणतात, व जें संपूर्ण व्यक्ताचें मुख्यतत्त्व अशा अव्यक्त, ईश व गणिताधिष्ठातृ दैवत्य, यांप्रत नमस्कार करितों.

श्लोक—पूर्वं प्रोक्तं व्यक्तमव्यक्तबीजं प्रायः प्रश्ना नो विनाऽव्यक्त युक्त्या ।
ज्ञातुं शक्या मंदधीभिर्नितांतं यस्मात्तस्माद्वच्मि बीजक्रियां च ॥ २ ॥

अर्थः—पूर्वी लीलावतीनामक अध्यायामध्यें ज्याचें अव्यक्त बीज आहे असें व्यक्त गणित सांगितलें. आतां मंदबुद्धि लोकांस अव्यक्त गणिताच्या युक्तीवांचून प्रश्नोत्तरें काढण्यास अशक्यता असल्यामुळें बीजक्रिया सांगतों.

सूत्रं :—योगे युतिःस्यात् क्षययोः स्वयोर्वा धनर्णयोरंतरमेव योगः ॥

अर्थः—दोन धन संख्यांची बेरीज करावयाची असल्यास त्यांचा योग करावा, ह्मणजे धनात्मक बेरीज होईल. व दोन ऋण संख्यांची बेरीज करावयाची असल्यास त्यांचा योग करावा, ह्मणजे ऋणात्मक बेरीज होईल ; आणि एक धनसंख्या व एक ऋणसंख्या अशा दोन संख्यांची बेरीज करावयाची असल्यास त्यांचें अंतर करावें. म्हणजे तें अंतर धनसंख्येपैकीं असल्यास बेरीज धन समजावी. व तें अंतर ऋणसंख्येपैकीं असल्यास बेरीज ऋण समजावी.

उदाहरणः—रूपत्रयं रूप चतुष्टयं च क्षयं धनं वा सहितं वदाशु ।
स्वर्ण क्षयस्वं च पृथक् पृथङ् मे धनर्णयोः संकलनामवैषि ॥

अर्थः—तुला धन व ऋण संख्यांची बेरीज करितां येत असल्यास ऋण ३ व ऋण ४ ; धन ३ व धन ४ ; धन ३ व ऋण ४; आणि ऋण ३ व धन ४ यांच्या पृथक् पृथक् बेरजा सांग ?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$$\left.\begin{array}{r} (-३)+(-४) = -७ \\ ३+४ = ७ \\ ३+(-४) = -१ \\ -३+४ = १ \end{array}\right\} \text{हीं उत्तरें.}$$

सूत्रंः-संशोध्यमानं स्वमृणत्वमेति स्वत्वं क्षयस्तद्युतिरुक्तवच्च ॥

अर्थः—कोणत्याही संख्येंतून जी संख्या वजा करावयाची असेल ती धन असल्यास ऋण, व ऋण असल्यास धन समजून त्या दोन संख्यांची बेरीज करावी, म्हणजे त्यांची वजाबाकी होईल.

उदाहरणः—त्रयात् द्वयं स्वात् स्वमृणादृणं च व्यस्तं च संशोध्य वदाशु शेषं ॥

अर्थः—धन ३ संख्येंतून धन २ ; ऋण ३ संख्येंतून ऋण २ ; धन २ संख्येंतून धन ३ ; व ऋण २ संख्येंतून ऋण ३ वजा करून पृथक् पृथक् शिल्लक सांग ?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$$\left.\begin{array}{r} ३-२ = १ \\ (-३)-(-२) = -१ \\ २-३ = -१ \\ (-२)-(-३) = १ \end{array}\right\} \text{हीं उत्तरें.}$$

सूत्रंः—स्वयोरस्वयोः स्वं वधः स्वर्णघाते क्षयो
भागहारेपि चैवं निरुक्तम् ॥

अर्थः—दोन धन संख्यांचा गुणाकार धन येतो; दोन ऋण संख्यांचा गुणाकार धन येतो; आणि एक धन संख्या व दुसरी ऋण संख्या यांचा गुणाकार ऋण येतो. याचप्रमाणें भागाकारामध्येंही समजावें.

उदाहरणः—धनं धनेनर्णमृणेन निघ्नं द्वयं त्रयेण स्वमृणेन किंस्यात्।
रूपाष्टकं रूप चतुष्टयेन धनं धनेनर्णमृणेन भक्तम्॥
ऋणं धनेन स्वमृणेन किंस्यात् द्रुतं वदेदं यदि बोबुधीषि॥

अर्थः—धन २ व धन ३; ऋण २ व ऋण ३; आणि धन २ व ऋण ३ यांचा गुणाकार पृथक् पृथक् सांग?

धन ८ या संख्येस धन ४ या संख्येनें; ऋण ८ या संख्येस ऋण ४ या संख्येनें; ऋण ८ या संख्येस धन ४ या संख्येनें; आणि धन ८ या संख्येस ऋण ४ या संख्येनें भागिलें असतां भागाकार काय येईल तें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\left.\begin{array}{r} २ \times ३ = ६ \\ (-२) \times (-३) = ६ \\ २ \times (-३) = -६ \end{array}\right\} \text{हीं उत्तरें.}$$

$$\left.\begin{array}{r} ८ \div ४ = २ \\ (-८) \div (-४) = २ \\ (-८) \div ४ = -२ \\ ८ \div (-४) = -२ \end{array}\right\} \text{हीं उत्तरें.}$$

सूत्रः—कृतिः स्वर्णयोः स्वं स्वमूले धनर्णे न मूलं क्षयस्याऽस्ति तस्याऽकृतित्वात्॥

अर्थः—धन संख्येचा किंवा ऋण संख्येचा वर्ग धन होतो. धन संख्येचें वर्गमूळ धन किंवा ऋण असतें. ऋण संख्येचें वर्गमूळ निघत नाहीं. कारण ऋणसंख्या ही वर्गसंख्या कधीं नसते.

उदाहरणः-धनस्य रूप त्रितयस्य वर्ग क्षयस्य च ब्रूहि सखे ममाशु ।

अर्थः—धन ३ या संख्येचा व ऋण ३ या संख्येचा वर्ग काय तो सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

३ × ३ = ९ हें उत्तर. (– ३) × (– ३) = ९ हें उत्तर.

उदाहरणः—धनात्मकानामधनात्मकानां मूलं नवानां च
पृथग् वदाशु ॥

अर्थः—धन ९ या संख्येचें व ऋण ९ या संख्येचें वर्गमूळ काय ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$\sqrt{९}$ = ३ हें उत्तर.

$\sqrt{-९}$ या संख्येचें मूळ निघत नाहीं—हें उत्तर.

याप्रमाणें बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार, वर्ग व वर्गमूळ या धनर्णषड्विधाचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

सूत्रं:—खयोगे वियोगे धनर्णं तथैव च्युतं शून्यतस्तद्विपर्यासमेति ॥

अर्थ :—शून्यामध्यें कोणतीही संख्या मिळविली तर त्या संख्येस विकार होत नाहीं; कोणत्याही संख्येंतून शून्य वजा केलें असतां त्या संख्येस विकार होत नाहीं; आणि शून्यांतून कोणतीही संख्या वजा केली तर त्या संख्येस फक्त धन—ऋणाचें वैपरीत्य येतें.

उदाहरण :—रूपत्रयं स्वं क्षयगं च खं च किंस्यात् खयुक्तं
वद खाच्च्युतं च ॥

अर्थ :—धन ३, ऋण ३ आणि शून्य या संख्येमध्यें शून्य मिळविलें असतां त्यांची पृथक् पृथक् बेरीज काय होईल ती सांग ? आणि शून्यामधून धन ३ व ऋण ३ वजा करून शेष सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\left.\begin{array}{r} ३ + ० = ३ \\ -३ + ० = -३ \\ ० + ० = ० \\ ० - ३ = -३ \\ ० - (-३) = ३ \end{array}\right\} \text{हीं उत्तरें.}$$

सूत्रं :—वधादौ वियत् खस्य खं खेन घाते खहारो भवेत् खेन भक्तश्च राशिः ॥

अर्थ :—शून्यास कोणत्याही संख्येनें गुणिलें किंवा भागिलें तर शून्य होतें; कोणत्याही संख्येस शून्यानें गुणिलें तर शून्य होतें; आणि कोणत्याही संख्येस शून्यानें भागिलें तर भागाकार शून्य येतो असें नाहीं, तर भागाकार खहरराशीच समजावा. व शून्याचें मूळ व वर्ग शून्य होतो.

उदाहरण :–द्विघ्नं त्रिहृत् खं खहृतं त्रयं च शून्यस्य वर्गं वदमे पदं च॥

अर्थ :—शून्यास २ या संख्येनें गुणिलें, शून्यास ३ या संख्येनें भागिलें, ३ या संख्येस शून्यानें भागिलें, शून्याचा वर्ग केला, व शून्याचें मूळ काढलें तर उत्तर काय?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\left.\begin{array}{l} २ \times ० = ० \\ ० \div ३ = ० \\ ३ \div ० = \frac{३}{०} \\ (०)^२ = ० \\ \sqrt{०} = ० \end{array}\right\} \text{हीं उत्तरें.}$$

श्लोक :–अस्मिन् विकारः खहरे न राशावपि प्रविष्टेष्वपि निसृतेषु॥ बहुष्वपिस्याल्लयसृष्टिकाले नंते च्युते भूतगणेषु यद्वत् ॥

अर्थ :—प्रलयकालीं संपूर्ण भूतगण अनंत परमेश्वराचे ठायीं प्रवेश करितात व सृष्टिकालीं संपूर्ण भूतगण अनंत परमेश्वरापासून निघतात, यामुळें अनंतास विकार होत नाहीं, ह्मणजे अनंतास स्थूलत्व किंवा लघुत्व जसें येत नाहीं, तसेंच खहर राशीमध्यें कितीहीं संख्या मिळविल्या किंवा वजा केल्या तरी त्या खहर राशीस विकार होत नाहीं, ह्मणजे खहरराशी न्यूनाधिक होत नाहीं.

याप्रमाणें शून्यषड्विधाचें भाषांतर संपलें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

सूत्रं :—यावत्तावत्कालको नीलको न्यो वर्णः पीतो लोहित श्वेतदाद्याः॥ अव्यक्तानां कल्पिता मान संज्ञास्तत्संख्यानं कर्तुमाचार्य-वर्यैः॥

अर्थ :—कोणत्याही उदाहरणांतील अज्ञातराशीची गणना करण्याकरितां मराठी भाषेमध्यें जीं बीजगणितावर पुस्तकें आहेत, त्यांमध्यें क्ष, य, ज्ञ, इत्यादि वर्ण जशीं मानें कल्पितात, तशीं संस्कृत ग्रंथांमध्यें यावत्तावत्, कालक, नीलक, पीत, लोहित, हरीतक, मेचक, इत्यादि अव्यक्तमानें कल्पितात.

सूत्रंः-योगोंतरं तेषु समानजात्योर्विभिन्नजात्योश्च पृथक् स्थितिश्च॥

अर्थ :—अव्यक्त मानांची बेरीज किंवा वजाबाकी करणें झाल्यास समान जातींचीच होते. भिन्न जातीच्या अव्यक्त मानांची बेरीज किंवा वजाबाकी असल्यास त्यांची पृथक् स्थिति राहते.

उदाहरण :—स्वमव्यक्तमेकं सखे सैकरूपं स्वमव्यक्तयुग्मं विरूपाष्टकं च॥ युतौ पक्षयो रेतयोः किं धनर्णे विपर्यस्यचैक्ये भवेत् किं वदाशु॥

अर्थः—या + १ या संख्येमध्यें २या – ८ ही संख्या; – या – १ या संख्येमध्यें – २ या + ८ ही संख्या मिळविली तर बेरीज काय होईल?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

(या + १) + (२या – ८) = ३या – ७.
(–या – १) + (–२या + ८) = –३या + ७.
} हें उत्तर.

उदाहरणंः—धनाव्यक्तवर्गत्रयं सैकरूपं क्षयाव्यक्तयुग्मेन युक्तं च किं स्यात् ॥ धनाव्यक्तयुग्माष्टणाव्यक्तषट्कं सरूपाष्टकं प्रोह्य शेषं वदाशु ॥

अर्थः— ३ या^{2} + १ या संख्येमध्यें – २या ही संख्या मिळविली तर बेरीज काय? आणि २ या या संख्येंतून – ६या + ८ ही संख्या वजा करून बाकी काय?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

(३या^{2} + १) + (– २या) = ३या^{2} – २या + १
(२या) – (– ६या + ८) = ८या – ८
} हें उत्तर.

सूत्रं—स्याद्रूपवर्णाभिहतौ तु वर्णो द्वित्र्यादिकानां सम जातिकानां ॥ वधे तु तद्वर्गघनादयः स्युस्तद्भावितंचासमजातिघाते ॥ भागादिकं रूपवदेव शेषं व्यक्ते यदुक्तं गणिते तदत्र ॥

अर्थः— रूप (व्यक्त संख्या) आणि अव्यक्त संख्या यांचा गुणाकार अव्यक्त येतो. दोन समजाती अव्यक्तांचा गुणाकार केला तर त्या अव्यक्ताचा वर्ग होतो. तीन इत्यादि समजाती अव्यक्तांचा गुणाकार केला तर त्या अव्यक्ताचा घन इत्यादि होतो. भिन्न जातीय अव्यक्तांच्या गुणाकारास भावित असें म्हणतात. या ठिकाणीं भागाकारादिकांची पद्धति व्यक्तपद्धतीप्रमाणेंच समजावी.

सूत्रंः—गुण्यः पृथक् गुणकखंडसमो निवेश्यस्तैः खंडकैः क्रमहतः सहितो यथोक्त्या ॥ अव्यक्तवर्गकरणीगुणनासु चिंत्यो व्यक्तोक्तखंडगुणनाविधिरेवमत्र ॥

अर्थ :—गुणकामध्यें जितकीं खंडें असतील, तत्तुल्यस्थानीं गुण्य पृथक् पृथक् मांडावा, नंतर गुणक खंडांनीं क्रमानें पृथक् मांडलेल्या गुण्यांस गुणावें आणि त्यांची बेरीज करावी, ह्मणजे गुणाकार होतो. याप्रमाणें अव्यक्त, वर्ग, करणी यांच्या गुणाकाराची पद्धति समजावी. ही रीत लीलावतींतील खंडगुणनासारखीच आहे.

उदाहरणं :—यावत्तावत्पंचकं व्येकरूपं यावत्तावद्भिस्त्रिभिः सद्विरूपैः ॥ संगुण्यद्राक् ब्रूहि गुण्यं गुणं वा व्यस्तं स्वर्णं कल्पयित्वा च विद्वन् ॥

अर्थ :—५या − १ या संख्येस ३या + २ या संख्येनें व − ५या + १ या संख्येस ३या + २ या संख्येनें गुणून गुणाकार सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

गुण खंड	३या	५या − १	गुण्यः
गुण खंड	२	५या − १	गुण्यः

(५या − १) × ३या = १५या^{२} − ३या

(५या − १) × २ = १०या − २

∴ (१५या^{२} − ३या) + (१०या − २) =

१५या^{२} + ७या − २ हें उत्तर.

(− ५या + १) × ३या = − १५या^{२} + ३या

(− ५या + १) × २ = − १०या + २

∴ (− १५या^{२} + ३या) + (− १०या + २) =

− १५या^{२} − ७या + २ हें उत्तर.

सूत्रं :—भाज्याच्छेदः शुध्यति प्रच्युतः सन् स्वेषु स्वेषु स्थानकेषु क्रमेण ॥ यैर्यैर्वर्णैः संगुणो यैश्च रूपैर्भागाहारे लब्धयस्ताः स्युरत्र ॥

अर्थ :—भाजकास ज्या अव्यक्त वर्णांनीं व रूपांनीं गुणिलें असतां भाज्य शुद्ध होतो, त्या अव्यक्त वर्णांस व रूपांस **भागाकारलब्धि** असें ह्मणतात.

उदाहरणं :—रूपैः षड्भिर्वर्जितानां चतुर्णामव्यक्तानां ब्रूहि वर्गं सखे मे ॥

अर्थ :— ४या – ६ या संख्येचा वर्ग काय ?

$(४या - ६)^{२} = १६याँ - ४८या + ३६$ हें उत्तर.

सूत्रं :—कृतिभ्य आदाय पदानि तेषां द्वयोर्द्वयोश्चाभिहतिं द्विनिघ्नीं ॥ शेषात्त्यजेद्रूपपदं गृहीत्वा चेत्संति रूपाणि तथैव शेषम्॥

अर्थ :—वर्गसंख्येचें मूळ काढावयाचें असल्यास प्रथमतः ज्या ज्या पदांचीं मूळें निघतील तीं काढावीं. नंतर दोन दोन मूळांचा गुणाकार करून त्याची दुप्पट अवशिष्ट पदांमध्यें वजा करावी. या पद्धतीनें शून्य शेष होईपर्यंत केलें असतां वर्गमूळ येतें.

उदाहरणं :—यावत्तावत्कालकनीलकवर्णास्त्रिपंचसप्तधनं ॥ द्वित्र्येकामितैः क्षयगैः सहिता रहिताः कति स्युस्ते ॥

अर्थ :— ३या + ५का + ७नी

या संख्येंत – २या – ३का – नी ही संख्या मिळवून व वजा करून उत्तर सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

३या + ५का + ७नी

–२या – ३का – नी

या + २का + ६नी हें उत्तर.

$$
\begin{array}{l}
३या + ५का + ७नी \\
-२या - ३का - \;\; नी \\
+ \quad\; + \quad\; + \\
\hline
५या + ८का + ८नी
\end{array}
\quad \text{हें उत्तर.}
$$

उदाहरणं :—यावत्तावत्त्रयमृणमृणं कालकौ नीलकः स्वं रूपेणाढ्या द्विगुणितमितैस्तैतु तैरेव निघ्नाः ॥ किं स्यात्तेषां गुणनजफलं गुण्यभक्तं च किंस्यात् गुण्यस्याथ प्रकथय कृतिं मूलमस्याः कृतेश्च ॥

अर्थ :— $-$ ३या $-$ २का $+$ नी $+$ १ या संख्येस $-$ ६या $-$ ४का $+$ २नी $+$ २ या संख्येनें गुणून गुणाकार काय? व आलेल्या गुणाकारास गुण्यानें भागून भागाकार काय? आणि गुण्याचा वर्ग करून पुनः त्याचें मूळ काढून दाखीव?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

($-$ ३या $-$ २का $+$ नी $+$ १) $\times$ ($-$ ६या) $=$

१८या^{२} $+$ १२याका $-$ ६यानी $-$ ६या

हा गुणाकार गुणकाच्या पहिल्या खंडानें गुण्यास गुणून आला.

($-$ ३या $-$ २का $+$ नी $+$ १) $\times$ ($-$ ४का) $=$

१२याका $+$ ८का^{२} $-$ ४कानी $-$ ४का

हा दुसऱ्या खंडाचा गुणाकार झाला.

($-$ ३या $-$ २का $+$ नी $+$ १) $\times$ २नी $=$

$-$ ६यानी $-$ ४कानी $+$ २नी^{२} $+$ २नी

हा तृतीय खंडाचा गुणाकार झाला.

($-$ ३या $-$ २का $+$ नी $+$ १) $\times$ २ $=$

$-$ ६या $-$ ४का $+$ २नी $+$ २

हा चतुर्थ खंडाचा गुणाकार झाला.

१८या^{2} + १२याका − ६यानी − ६या
१२याका + ८का^{2} − ४कानी − ४का
− ६यानी − ४कानी + २नी^{2} + २नी
− ६या − ४का + २ नी + २

१८या^{2} + ८का^{2} + २नी^{2} + २४याका − १२यानी − ८कानी
− १२या − ८का + ४नी + २ हें उत्तर.

ही चारी खंड गुणाकारांची बेरीज झाली.

आतां भागाकाराचें उत्तर काढूं.

(१८या^{2} + ८का^{2} + २नी^{2} + २४याका − १२यानी
− ८कानी − १२या − ८का + ४ नी + २) ÷
(− ३या − २का + नी + १) =
− ६या − ४का + २नी + २ हें उत्तर.

(− ३या − २का + नी + १)^{2} =
९या^{2} + ४का^{2} + नी^{2} + १२याका − ६यानी
− ४कानी − ६या − ४का + २नी + १ हें उत्तर.

$\sqrt{\begin{array}{l}\text{९या}^{2} + \text{४का}^{2} + \text{नी}^{2} + \text{१२याका} - \text{६यानी} \\ - \text{४कानी} - \text{६या} - \text{४का} + \text{२नी} + \text{१}\end{array}}$
= − ३या − २का + नी + १ हें उत्तर.

याप्रमाणें अनेकवर्णषड्विध संपलें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

करणीषड्विध.

सूत्रं :—योगं करण्योर्महतीं प्रकल्प्य वधस्य मूलं द्विगुणं लघुं च ॥ योगांतरे रूपवदेतयोस्तः वर्गेण वर्गं गुणयेत् भजेच्च ॥ लघ्व्या हृतायास्तु पदं महत्याः सैकं निरेकं स्वहतं लघुघ्नं ॥ योगांतरे स्तः क्रमशस्तयोर्वा पृथक् स्थितिः स्याद्यदि नास्ति मूलं ॥

अर्थ :—वर्गमूळामध्यें जी संख्या असते तीस **करणी** असें ह्मणतात. जसें $\sqrt{क्ष}$ ही करणी होय. अशा दोन संख्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी करावयाची असल्यास त्या दोन करणींची बेरीज व्यक्त संख्येप्रमाणें करावी व तीस **महती** हें नांव द्यावें. आणि व्यक्त संख्येप्रमाणें त्या दोन करणींच्या गुणाकाराच्या वर्गमूळाच्या दुप्पटीस **लघु** हें नांव द्यावें. नंतर महतीसंज्ञक व लघुसंज्ञक यांची बेरीज किंवा वजाबाकी केली असतां इष्ट दोन करणीपदांची बेरीज किंवा वजाबाकी होते.

कोणत्याही करणी संख्येस व्यक्त संख्येनें गुणावयाचें किंवा भागावयाचें असल्यास त्या व्यक्त संख्येचा वर्ग करून गुणावें किंवा भागावें.

इष्ट दोन करणी पदांची बेरीज किंवा वजाबाकी करण्याची दुसरी रीति.

दोन करणीमध्यें संख्येनें जी मोठी असेल तीस दुसऱ्या लहान करणीनें व्यक्त संख्येप्रमाणें भागावें; आणि जो भागाकार येईल त्याचें वर्गमूळ काढून त्यामध्यें एक मिळवावा किंवा वजाबाकी करावयाची असल्यास एक वजा करावा. नंतर आलेल्या संख्येचा वर्ग करून त्यास लहान करणीनें गुणावें; ह्मणजे बेरीज किंवा

वजाबाकी होते. येथें ज्या ठिकाणीं वर्गमूळ काढावयास सांगितलें आहे, तें निघत नसल्यास इष्ट दोन करणींची पृथक् स्थिति मांडावी.

उदाहरणं :— द्विकाष्टमित्योस्त्रिभसंख्ययोश्च योगांतरे ब्रूहि सखे करण्योः ॥ त्रिसप्तमित्योश्च चिरं विचिंत्य चेत्षड्विधं वेत्सि सखे करण्याः ॥

अर्थ :—करणी २ व करणी ८ यांची, करणी ३ व करणी २७ यांची आणि करणी ३ व करणी ७ यांची बेरीज व वजाबाकी सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\sqrt{क्ष} \pm \sqrt{य} = \sqrt{(क्ष + य) \pm २\sqrt{क्षय}}$$

हें पहिल्या रीतीचें स्वरूप आहे ; ह्मणून यामध्यें इष्ट किंमती ठेऊन

$$\sqrt{८} \pm \sqrt{२} = \sqrt{(८ + २) \pm २\sqrt{८ \times २}}$$

$$= \sqrt{१० \pm ८}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \sqrt{८} + \sqrt{२} &= \sqrt{१८} \\ \sqrt{८} - \sqrt{२} &= \sqrt{२} \end{aligned}\right\} \text{ हें उत्तर.}$$

हेंच उत्तर दुसऱ्या रीतीनें काढूं.

$$\sqrt{क्ष} \pm \sqrt{य} = \sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{क्ष}{य}} \pm १\right)^२ \times य}$$

हें दुसऱ्या रीतीचें स्वरूप आहे; ह्मणून यामध्यें इष्ट किंमती ठेवून

$$\sqrt{८} \pm \sqrt{२} = \sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{८}{२}} \pm १\right)^२ \times २}$$

$$= \sqrt{(२ \pm १)^२ \times २}$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l}\sqrt{८} + \sqrt{२} = \sqrt{१८} \\ \sqrt{८} - \sqrt{२} = \sqrt{२}\end{array}\right\}$$ हें उत्तर.

याचप्रमाणें दुसऱ्या दोन्ही उदाहरणांमध्यें क्रिया करून

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{२७} + \sqrt{३} = \sqrt{४८} \\ \sqrt{२७} - \sqrt{३} = \sqrt{१२}\end{array}\right\}$$ हें उत्तर.

$$\sqrt{७} + \sqrt{३}\text{; व } \sqrt{७} - \sqrt{३}$$

यामध्यें मूळ निघत नसल्यामुळें पृथक् स्थिति हेंच उत्तर.

उदाहरणं :—द्वित्र्यष्टसंख्यागुणकः करण्यो गुण्यस्त्रिसंख्या च सपंचरूपा ॥ वधं प्रचक्ष्वाशु विपंचरूपे गुणेथवा त्र्यर्कमिते करण्यः ॥

अर्थ :—करणी २, करणी ३ व करणी ८ या संख्येनें करणी ३ व रूप ५ या संख्येस गुणून गुणाकार काय? व करणी ३ व रूप ५ या संख्येस करणी ३, करणी १२ आणि ऋणरूपें ५ या संख्येनें गुणून गुणाकार काय तो सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$(\sqrt{२} + \sqrt{३} + \sqrt{८}) \times (\sqrt{३} + \sqrt{२५})$$

$$= (\sqrt{२} + \sqrt{३} + २\sqrt{२}) \times (\sqrt{३} + \sqrt{२५})$$

$$= (३\sqrt{२} + \sqrt{३}) \times (\sqrt{३} + \sqrt{२५}) =$$

$$(\sqrt{१८} + \sqrt{३}) \times (\sqrt{३} + \sqrt{२५}) =$$

$$\sqrt{४५०} + \sqrt{७५} + \sqrt{५४} + ३$$ हें उत्तर.

$$(\sqrt{३}+\sqrt{१२}-९)\times(\sqrt{३}+९)=$$
$$(\sqrt{३}+२\sqrt{३}-\sqrt{२९})\times(\sqrt{३}+\sqrt{२९})=$$
$$(३\sqrt{३}-\sqrt{२९})\times(\sqrt{३}+\sqrt{२५})=$$
$$(\sqrt{२७}-\sqrt{२९})\times(\sqrt{३}+\sqrt{२९})=$$
$$\sqrt{८१}+\sqrt{६७९}-\sqrt{७९}-\sqrt{६२५}=$$
$$९+\sqrt{२२९\times ३}-\sqrt{२९\times ३}-२५=$$
$$१९\sqrt{३}-५\sqrt{३}-१६=१०\sqrt{३}-१६$$
$$=\sqrt{३००}-१६$$ हें उत्तर.

सूत्रं :—क्षयो भवेच्च क्षयरूपवर्गश्चेत्साध्यतेऽसौ करणीत्वहेतोः ॥ ऋणात्मिकायाश्च तथा करण्या मूलं क्षयोरूपविधानहेतोः ॥

अर्थ :—मागें क्षय संख्येचा वर्ग धन होतो व ऋण संख्येचें मूळ निघत नाहीं असें सांगितलें आहे, परंतु करणी करण्याकरितां जर ऋणरूपांचा वर्ग करावयाचा असेल, तर ती वर्ग-विशिष्ट-करणी-ऋणच समजावी व ऋण करणीचें वर्गमूळ निघून तें ऋणच समजावें.

जसें : $-९=-\sqrt{२९}$ व $-\sqrt{६२९}=-२५$.

सूत्रं :—धनर्णताव्यत्ययमीप्सितायाश्छेदे करण्या असकृत विधाय ॥ तादृक् च्छिदा भाज्यहरौ निहन्यादेकैव यावत् करणी हरे स्यात् ॥ भाज्यास्तया भाज्यगताः करण्यो लब्धाः करण्यो यदि योगजास्युः ॥ विश्लेषसूत्रेण पृथक् च कार्या यथा तथा प्रश्नुरभीप्सिताः स्युः ॥

अर्थ :—भागाकार करण्याकरितां जे भाज्य व भाजक दिले असतात त्या दोघांस, दिलेल्या भाजकांतील कोणत्याही एका करणीचें चिन्ह पालटून त्या भाजकानें गुणावें व असें दिलेल्या भाजकामध्यें

एक करणी राहीपर्यंत करावें. नंतर त्या करणीनें भाज्यास भागिलें असतां करणीचा भागाकार होतो. जर भागाकारामध्यें कांहीं योगज करणी आल्या तर त्यांचें विश्लेष सूत्रानें पृथक्करण करावें ह्मणजे भागाकारांतील इष्ट करणी येतील.

उदाहरण :— $\sqrt{१५} + \sqrt{१०} + \sqrt{२१} + \sqrt{१४}$ या संख्येस $\sqrt{७} + \sqrt{५}$ यानें भागून भागाकार काय ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\frac{\sqrt{१५} + \sqrt{१०} + \sqrt{२१} + \sqrt{१४}}{\sqrt{७} + \sqrt{५}} \times \frac{\sqrt{७} - \sqrt{५}}{\sqrt{७} - \sqrt{५}}$$

$$= \frac{\sqrt{१०५} + \sqrt{७०} + \sqrt{१४७} + \sqrt{९८} - \sqrt{७५} - \sqrt{५०} - \sqrt{१०५} - \sqrt{७०}}{७ - ५}$$

$$= \frac{\sqrt{१४७} + \sqrt{९८} - \sqrt{७५} - \sqrt{५०}}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{४९ \times ३} + \sqrt{४९ \times २} - \sqrt{२५ \times ३} - \sqrt{२५ \times २}}{२}$$

$$= \frac{७\sqrt{३} + ७\sqrt{२} - ५\sqrt{३} - ५\sqrt{२}}{२}$$

$$= \frac{२\sqrt{३} + २\sqrt{२}}{२} = \sqrt{३} + \sqrt{२}$$ हें उत्तर.

विश्लेष सूत्रं :—वर्गेण योगकरणी विहृता विशुद्धेत्खंडानि तत्कृतिपदस्य यथेप्सितानि ॥ कृत्वां तदीयकृतयः खलु पूर्वलब्ध्या क्षुण्णा भवन्ति पृथगेव मिमाः करण्यः ॥

अर्थ :—योगज करणींतील संख्येस ज्या वर्ग संख्येनें भागिलें असतां भागाकार निःशेष येईल, त्या वर्ग संख्येनें भागावें आणि भागाकार पृथक् मांडावा. नंतर वर्ग संख्येचें वर्गमूळ काढून त्याचीं इष्ट खंडें करून त्यांचे वर्ग करावेत. नंतर त्या वर्गांस पृथक् मांडलेल्या भागाकारानें गुणावें ह्मणजे योगज करणीच्या पृथक् करणी होतात.

जसें $\sqrt{१८}$ ही योगज करणी आहे, तेव्हां १८ या संख्येस ९ या वर्गसंख्येनें भागून भागाकार २ आला. आतां ९ या वर्गसंख्येचें मूळ ३ आहे व त्याचीं २ व १ अशीं खंडें केलीं. नंतर त्या खंडाचे वर्ग ४ व १ हे झाले. यांस पूर्वी आलेल्या भागाकारानें ह्मणजे २ या संख्येनें गुणिलें तेव्हां ८ व २ या पृथक् करणी झाल्या.

$\therefore \sqrt{१८} = \sqrt{८} + \sqrt{२}$ हें उत्तर.

उदाहरणं :—द्विकत्रिपंचप्रमिताः करण्यस्तासां कृतिं द्वित्रिक संख्ययोश्च ॥ षट्पंचकद्वित्रिकसंमितानां पृथक् पृथक् मे कथयाशु विद्वन् ॥ अष्टादशाष्टद्विकसंमितानां कृतीकृतानां च सखे पदानि ॥

अर्थ :—$\sqrt{२} + \sqrt{३} + \sqrt{५}$; $\sqrt{२} + \sqrt{३}$; $\sqrt{६} + \sqrt{९} + \sqrt{२} + \sqrt{३}$; आणि $\sqrt{१८} + \sqrt{८} + \sqrt{२}$ या संख्यांचे वर्ग पृथक् पृथक् करून सांग? आणि जे वर्ग येतील त्यांचीं वर्गमूळें सांग?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$(\sqrt{२} + \sqrt{३} + \sqrt{५})^{२} = १० + \sqrt{२४} + \sqrt{४०} + \sqrt{६०}$ हें उत्तर.

$(\sqrt{२}+\sqrt{३})^{२}=५+\sqrt{२४}$ हें उत्तर.

$(\sqrt{६}+\sqrt{५}+\sqrt{२}+\sqrt{३})^{२}=१६+\sqrt{१२०}$
$+\sqrt{४८}+\sqrt{७२}+\sqrt{४०}+\sqrt{६०}+\sqrt{२४}$ हें उ०

$(\sqrt{१८}+\sqrt{८}+\sqrt{२})^{२}=(३\sqrt{२}+२\sqrt{२}+\sqrt{२})^{२}$
$=(६\sqrt{२})^{२}=(\sqrt{७२})^{२}=७२$ हें उत्तर.

आलेल्या वर्गांचीं मूळें पुढें काढून दाखविलीं आहेत.

सूत्रं :—वर्गे करण्या यदिवा करण्योस्तुल्यानि रूपाण्यथ वा बहूनां ॥ विशोधयेद्रूपकृतेः पदेन शेषस्य रूपाणि युतोनितानि ॥ पृथक् तदर्धे करणीद्वयं स्यान्मूलेथ बव्हीकरणी तयोर्या ॥ रूपाणि तान्येव मतोपि भूयः शेषाः करण्यो यदि संति वर्गे ॥

अर्थ :—वर्गसंख्या दिली असतां तिचें मूळ काढावयाचें असल्यास प्रथमतः वर्गसंख्येमध्यें जीं रूपें असतील त्यांचा वर्ग करून त्यामध्यें वर्ग संख्येतील एक करणी-तुल्य-रूपें किंवा करणीद्वय-तुल्य-रूपें किंवा करणीत्रय इत्यादि तुल्य-रूपें वजा करून शेषाचें मूळ काढावें. नंतर तें वर्गमूळ वर्ग संख्येंतील रूपांमध्यें मिळवावें व वजा करावें आणि त्यांची निम्पट केली असतां इष्ट वर्गमूळांतील दोन करणी येतात. जर वर्गसंख्येमध्यें रूपवर्गांत वजा करून अवशिष्ट करणी राहिल्या तर, आलेल्या दोन करणींपैकीं जी मोठी असेल व क्वचित् उदाहरणीं जी लहान असेल ती वर्गसंख्येंतील रूपें कल्पना करून पूर्ववत् अन्य करणी तयार कराव्या.

उदाहरणं :— $१०+\sqrt{२४}+\sqrt{४०}+\sqrt{६०}$ या संख्येचें मूळ काढणें आहे.

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

दिलेल्या वर्गसंख्येमध्यें रूपें १० आहेत. यांचा वर्ग १०० झाला. यांमध्यें करणी-द्वयतुल्यरूपें २४ + ४० हीं वजा करून शेष ३६ राहिलें, याचें मूळ ६ आलें. हें १० रूपांमध्यें मिळवून व वजा करून १६ व ४ झाले. यांची अर्धे ८ व २ या करणी वर्गमुळांतील झाल्या, परंतु रूपवर्गामध्यें करणी वजा करून वर्गसंख्येमध्यें ६० ही करणी शिल्लक राहिलेली आहे, कारितां आलेल्या दोन करणींपैकीं २ ही करणी इष्टवर्गमूळांतील धरून ८ ही करणीरूपें कल्पना करून पूर्वपद्धतीनें ८ याचा वर्ग ६४ यांतून ६० वजा करून शेष ४ याचें मूळ २, हें ८ रूपामध्यें मिळवून व वजा करून १० व ६ आले व यांची अर्धे ५ व ३, या दोन इष्टवर्गमूळांतील करणी झाल्या व पूर्वीं आणलेली एक करणी मिळून

$\sqrt{२} + \sqrt{३} + \sqrt{५}$ हें मूळ झालें.

$$\therefore \sqrt{१० + \sqrt{२४} + \sqrt{४०} + \sqrt{६०}} =$$

$\sqrt{२} + \sqrt{३} + \sqrt{५}$ हें उत्तर.

अशींच बाकीचीं उत्तरें काढावीत.

सूत्रं :—ऋणात्मिकाचेत् करणी कृतौस्यात् धनात्मिकां तां परिकल्प्य साध्ये ॥ मूले करण्यो रनयो रभीष्टा क्षयात्मिकैका सुधिया वगम्यां ॥

अर्थ :—वर्गसंख्येमध्यें ऋण-करणी असल्यास ती धनकरणी आहे, अशी कल्पना करून वर्गमूळ काढावें ; आणि वर्गमूळामध्यें ज्या दोन करणी येतील, त्यांपैकीं कोणतीहि एक करणी ऋण धरावी, ह्मणजे इष्ट वर्गमूळ येतें.

वर्गसंख्येमध्यें दोन तीन इत्यादि ऋण-करणी असल्यास मूळामध्यें एक, दोन, तीन इत्यादि ऋण करणी युक्तीनें धराव्या.

वर्गसंख्येमध्यें सर्वच धन-करणी असल्यास मूळामध्यें सर्वच धन-करणी किंवा ऋण करणी धराव्या.

उदाहरणं :—द्विकात्रिपंचप्रमिताः करण्यः स्वस्वर्णगा व्यस्त धनर्णगा वा ॥ तासां कृतिं ब्रूहि कृतेः पदं च चेत् षड्विधं वेत्सि सखे करण्याः ॥

अर्थ :- $\sqrt{२}+\sqrt{३}-\sqrt{५}$ आणि $-\sqrt{२}-\sqrt{३}+\sqrt{५}$ या संख्येचें वर्ग सांग? व ज्या वर्गसंख्या येतील त्यांचीं मूळें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$(\sqrt{२}+\sqrt{३}-\sqrt{५})^२ = १० + \sqrt{२४}$$
$-\sqrt{४०}-\sqrt{६०}$ हें उत्तर.

$$(-\sqrt{२}-\sqrt{३}+\sqrt{५})^२ = १० + \sqrt{२४}$$
$-\sqrt{४०}-\sqrt{६०}$ हें उत्तर.

$$\sqrt{१० + \sqrt{२४} - \sqrt{४०} - \sqrt{६०}} = \pm\sqrt{२} \pm \sqrt{३} \mp \sqrt{५}$$
हें उत्तर.

सूत्रं :—एकादिसंकलितमितकरणीखंडानि वर्गराशौस्युः ॥ वर्गे करणीत्रितये करणीद्वितयस्य तुल्यरूपाणि ॥ करणीषट्के तिसृणां दशसु चतसृणां तिथिषु च पंचानां ॥ रूपकृतेः प्रोह्य पदं ग्राह्यं चेदन्यथा न सत् क्वापि ॥ उत्तत्स्यमानयैवं मूलकरण्याल्पया चतुर्गुणया ॥ तासामपवर्तः स्याद्रूपकृतेर्या विशोध्याः स्युः ॥ अपवर्तादपि लब्धा मूलकरण्यो भवंति ताश्चापि ॥ शेष विधिना न यदि ता भवंति मूलं तदा तद सत् ॥

अर्थ :—दोन करणीपदांचा वर्ग केला तर वर्गसंख्येमध्यें १ करणीपद येतें. ३ करणीपदांचा वर्ग केला तर वर्गसंख्येमध्यें १ + २ ह्मणजे ३ करणीपदें येतात. ४ करणीपदांचा वर्ग केला तर वर्गसंख्येमध्यें १ + २ + ३ म्हणजे ६ करणीपदें येतात. ५ करणीपदांचा वर्ग केला तर वर्गसंख्येमध्यें १ + २ + ३ + ४ ह्मणजे १० करणीपदें येतात. याप्रमाणें पुढेंही समजावें. यावरून वर्गसंख्या दिली असतां मूळामध्यें करणीपदें किती येतील हें सहजच लक्ष्यांत येणारें आहे.

मागें वर्गमूळ काढण्याच्या रीतीमध्यें रूप-वर्गांतून करणीतुल्य-रूपें वजा करावयास सांगितलें आहे, त्याविषयीं असा नियम समजावा कीं, करणी-त्रयात्मक वर्गसंख्या असेल तर रूपवर्गामध्यें करणीद्वयतुल्यरूपें वजा करावीं. करणीषट्कात्मक वर्गसंख्या असेल तर रूपवर्गामध्यें करणीत्रयतुल्यरूपें वजा करावीं. करणी दशात्मक वर्गसंख्या असेल तर करणीचतुष्टयतुल्यरूपें वजा करावीं. पंचदश-करण्यात्मक वर्गसंख्या असेल तर करणीपंचकतुल्यरूपें वजा करावीं. इत्यादि पुढेंहि समजावें.

वरील नियमाप्रमाणें रूप वर्गांतून करणीतुल्यरूपें वजा करून जी शिल्लक राहील, तिचें वर्गमूळ निघत नसल्यास उदाहरण खोटें आहे असें समजावें. वर्गमूळ निघत असल्यास अवशिष्ट सर्व क्रिया करून इष्ट वर्गमूळाचें उत्तर काढावें. आणि दिलेलें उदाहरण खरें आहे किंवा खोटें आहे याची तपासणी खालीं दिलेल्या पद्धतीनें करावी. ती अशी :—

उत्तर काढून वर्गमूळामध्यें ज्या करणी आल्या असतील त्यांतील जी लघु करणी असेल तत्तुल्यरूपांची चौपट करून अथवा क्वचित् उदाहरणीं महाकरणी तुल्यरूपांची चौपट करून जी संख्या

होईल तिनें पूर्वी रूपवर्गामध्यें जीं जीं करणीतुल्यरूपें वजा केलीं आहेत त्या त्या शोध्यकरणीतुल्यरूपांस भागिलें, असतां भाग तुटला पाहिजे. व पृथक् पृथक् जे भागाकार येतील तत्तुल्य करण्या जर उत्तर काढून आलेल्या वर्गमूळामध्यें असतील तर तें उदाहरण खरें आहे, नसतील तर उदाहरण खोटें आहे असें समजावें.

खिलोदाहरण :—वर्गे यत्र करण्यो दंतैः सिद्धैर्गजैर्मिता विद्वन् ॥ रूपैर्दशभि रुपेताः किं मूलं ब्रूहि तस्य स्यात् ॥

अर्थ :— $१० + \sqrt{३२} + \sqrt{२४} + \sqrt{८}$

या संख्येचें वर्गमूळ काय ?

उत्तरानिष्काशनक्रिया.

दिलेल्या वर्गसंख्येमध्यें तीन करणीपदें आहेत ह्मणून रूपें १० याचा वर्ग १०० यांमध्यें करणीद्वयतुल्यरूपें ३२ + २४ ह्मणजे ५६ वजा करून बाकी ४४ राहिली. इचें मूळ निवत नाहीं. अथवा रूपवर्ग १०० यांतून ३२ + ८ अथवा २४ + ८ वजा करून बाकी ६० अथवा ६८ राहते. ह्यांचेंही मूळ निघत नाहीं. सबब, हें उदाहरण खोटें आहे.

उदाहरणं :—वर्गे यत्र करण्यस्तिथिविश्वहुताशनैश्चतुर्गुणितैः ॥ तुल्या दशरूपाढ्याः किं मूलं ब्रूहि तस्य स्यात् ॥

अर्थ :— $१० + \sqrt{६०} + \sqrt{५२} + \sqrt{१२}$

या वर्गसंख्येचें मूळ सांग ?

उत्तरानिष्काशनक्रिया.

रूपें १० यांचा वर्ग १०० यांतून करणीद्वयतुल्यरूपें ५२ + १२ ह्मणजे ६४ ही वजा करून शेष ३६, याचें मूळ ६ हें १० मध्यें मिळवून व वजा करून १६ व ४ यांचीं अर्धे ८ व २ झालीं.

यांपैकीं २ ही करणी इष्ट मूळापैकीं धरून ८ हीं रूपें कल्पिलीं. यांचा वर्ग ६४ यांतून ६० वजा करून शेष ४, याचें मूळ २ हें ८ रूपांमध्यें मिळवून व वजा करून १० व ६ यांचीं अर्धें ५ व ३ आलीं म्हणून $\sqrt{२} + \sqrt{३} + \sqrt{५}$ हें इष्ट वर्गमूळ झालें, परंतु हें खोटें आहे. कारण, आलेल्या इष्ट वर्गमूळामध्यें लघु करणी २ आहे. याची चौपट ८ झाली. या संख्येनें शोध्य करणी ज्या ६० ५२, १२ यांस भागिलें असतां भाग तुटत नाहीं. खरें उदाहरण असतें तर भाग तुटला पाहिजे होता.

उदाहरणं :—अष्टौषट्पंचाशत् षष्टिः करणी त्रयं कृतौ यत्र ॥ रूपैर्दशभि रूपेतं किं मूलं ब्रूहि तस्य स्यात् ॥

अर्थ :— $१० + \sqrt{८} + \sqrt{५६} + \sqrt{६०}$ या वर्गसंख्येचें मूळ सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

रूपें १० यांच्या वर्गामध्यें ८ + ५६ वजा करून व बाकीची सर्व क्रिया करून $\sqrt{२} + \sqrt{३} + \sqrt{५}$ हें इष्ट वर्गमूळ आलें. परंतु हें खोटें आहे. कारण, आलेल्या उत्तरामध्यें लघुकरणी २, याची चौपट ८ या संख्येनें, ८ व ५६ यांस भागिलें असतां १ व ७ या करणी येतात. ह्या उत्तरामध्यें नाहींत. उदाहरण खरें असतें तर १ व ७ या करणी उत्तरामध्यें आल्या असत्या.

उदाहरणं :—चतुर्गुणाः सूर्यतिथीषुरुद्रनागर्तवो यत्र कृतौ करण्यः ॥ सविश्वरूपा वद तत्पदं ते यद्यस्ति बीजे पटुताभिमानः ॥

अर्थ :— $१३ + \sqrt{४८} + \sqrt{६०} + \sqrt{२०} + \sqrt{४४} + \sqrt{३२} + \sqrt{२४}$ या वर्गसंख्येचें मूळ सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या उदाहरणांत ६ करणी असल्यामुळें रूपें १३ यांच्या वर्गामध्यें क्रमानें करणीत्रयतुल्यरूपें वजा करून शेषाचें मूळ निघत नाहीं; ह्मणून हें उदाहरण खोटें आहे.

उदाहरणं:—चत्वारिंशदशीतिद्विशतीतुल्याः करण्यश्चेत् ॥ सप्तदशरूपयुक्ता यत्र कृतौ तत्र किं पदं ब्रूहि ॥

अर्थ:— $\sqrt{२००} + \sqrt{८०} + \sqrt{४०} + १७$ या वर्गसंख्येचें मूळ सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

रूपें १७ यांचा वर्ग २८९. यामध्यें २०० + ८० वजा करून शेष ९ याचें मूळ ३ आलें. हें १७ रूपामध्यें मिळवून व वजा करून २० व १४ यांचीं अर्धें १० व ७ हीं झालीं. यांपैकीं १० ही मूळ करणी धरून ७ हीं रूपें कल्पिलीं. यांचा वर्ग ४९ यांतून ४० वजा करून, ९ याचें मूळ ३ हें ७ मध्यें मिळवून व वजा करून १० व ४ यांचीं अर्धें ५ व २ झालीं ह्मणून इष्टवर्गमूळ $\sqrt{२} + \sqrt{५} + \sqrt{१०}$ हें उत्तर झालें. हें उत्तर खरें आहे. कारण, आलेल्या उत्तरामध्यें महाकरणी १० आहे. हिच्या चौपटी ४० नें शोध्यकरणी ज्या २०० व ८० यांस भागिलें असतां भाग तुटतो व भागाकार ५ व २ हे येतात व याच करणी उत्तरांत आहेत ह्मणून खरें उदाहरण आहे.

याप्रमाणें करणीषड्विधाचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

॥ श्रीगणेशायनमः ॥

कुट्टक—प्रकरण.

श्लोक :—भाज्यो हारः क्षेपकश्चापवर्त्यः केनाप्यादौ संभवे कुट्टकार्थं ॥ येन च्छिन्नौ भाज्यहारौ न तेन क्षेपश्चैतद्दुष्टमुद्दिष्टमेव ॥

अर्थ :—ज्या संख्येस अमुक संख्येनें गुणून जो गुणाकार येईल, त्यामध्यें अमुक संख्या मिळविली किंवा वजा केली, व अमुक संख्येनें भागिलें तर भागाकार निःशेष येतो (पूर्ण संख्यात्मक भागाकार येतो, शिल्लक रहात नाहीं) अशी संख्या कोणती ती सांग? अशा प्रकारच्या उदाहरणास **कुट्टक** असें ह्मणतात.

वरील प्रकारच्या उदाहरणामध्यें जी गुणक संख्या असते तिला **भाज्य** असें ह्मणतात. जी भाजक संख्या असते, तिला **हार** असें ह्मणतात व जी मिळवावयाची किंवा वजा करावयाची संख्या असते, तिला **क्षेपक** असें ह्मणतात.

कुट्टकाचें उदाहरण सोडविण्यास सोपें पडण्याकरितां **प्रथमतः** भाज्य, हार आणि क्षेपक या तिन्नांस कोणत्याही एखाद्या संख्येनें संक्षेप जाण्याचा संभव असल्यास, तिनें संक्षेप देऊन यथोक्त क्रिया करावी.

कुट्टकाच्या उदाहरणांतील **भाज्य** आणि **हार** या दोघांस ज्या संख्येनें संक्षेप जाईल, तिनें **क्षेपकासहि** संक्षेप गेला पाहिजे. जर संक्षेप न गेला तर तें उदाहरण खोटें आहे, असें निर्विवाद समजावें.

उपपत्ति—

$$\frac{\text{अक्ष} + \text{ब}}{\text{क}} = \text{प}.$$

या समीकरणामध्यें अ, ब, क ह्यांच्या किंमती माहित आहेत ब, प हा पूर्ण संख्यात्मक आहे असें दिलें आहे. तेव्हां हें **कुट्टक-समीकरण** झालें; अ, ब, क हे क्रमानें **भाज्य, क्षेपक व हार** आहेत, असें झालें.

आतां या समीकरणाच्या दोन्ही पक्षांस (पेट्यास) कनें गुणून

$$\text{अक्ष} + \text{ब} = \text{कप}$$

असें समीकरणाचें स्वरूप झालें.

आतां यांतील प्रत्येक पदास कोणत्याही संख्येनें अपवर्त (संक्षेप) दिला असतां समीकरणत्वहानि होणार नाहीं. हें उघड आहे.

∴ **भाज्योहार** इत्यादि अर्ध श्लोकाची सिद्धि झाली.

उत्तरार्धाची उपपत्तिः—

$$\frac{\text{६०क्ष} + \text{१८}}{\text{२५}} = \text{प}$$

यांतील क्ष आणि प ह्या पूर्ण संख्या आहेत असें दिलें आहे, असें समजा.

आतां या समीकरणाच्या उभयपक्षांस २५ नीं गुणून

$$\text{६०क्ष} + \text{१८} = \text{२५प}$$

स्थलांतर करून

$$६०क्ष - २९प = -१८$$

उभयपक्षांस ५ नीं भागून

$$१२क्ष - ५प = -\frac{१८}{५}$$

यांतील पूर्वपक्ष पूर्ण संख्यात्मक झाला व उत्तरपक्ष अपूर्ण संख्यात्मक झाला व पूर्ण संख्येबरोबर अपूर्ण संख्या असणें हें असंभवनीय आहे. कारितां दिलेलें समीकरण खोटें आहे, हें उघड झालें.

∴ **उत्तरार्धसिद्धि झाली.**

श्लोक :—परस्परं भाजितयोर्यंयोर्यः शेषस्तयोः स्याद पवर्तनं सः ॥ तेना पवर्तेन विभाजितौ यौ तौ भाज्यहारौ दृढसंज्ञितौ स्तः ॥

अर्थ :—पूर्वीच्या श्लोकामध्यें भाज्य, हार व क्षेपक यांस संभव असल्यास संक्षेप द्यावा असें सांगितलें त्यास, व भाज्य व हार यांस कोणत्या महत्तम संख्येनें संक्षेप जातो, हें पाहण्याची रीति प्रस्तुत श्लोकांत दिली आहे, ती अशी :—

प्रथमतः भाज्यास हारानें भागावें, भागून जी शिल्लक उरेल तिनें पुनः हारास भागावें, भागून जी शिल्लक उरेल, तिनें पूर्वीच्या शिल्लकेस भागावें. या पद्धतीनें शून्य शिल्लक राहीपर्यंत पुनः पुनः क्रिया करावी. अखेरीस शून्य शेषाच्या पूर्वीचें जें शेष असेल, ती संक्षेपाची महत्तम संख्या समजावी. त्या महत्तम संक्षेपसंख्येनें भाज्य, हार व क्षेपक यांस भागिलें असतां ज्या लब्धी येतील, त्यांस क्रमानें दृढभाज्य, दृढहार व दृढक्षेपक असें ह्मणतात.

जसें :—२२१ भाज्य व १९५ हार यांस कोणत्या महत्तम संख्येनें संक्षेप जातो हें पाहूं.

```
१९५ ) २२१ ( १
      १९५
      ————
       २६ ) १९५ ( ७
            १८२
            ————
             १३ ) २६ ( २
                  २६
                  ——
                   ०
```

येथें शून्य शेषाच्या पूर्वींचें शेष १३ हें आहे; ह्मणून १३ या संख्येनें (ज्याला दृढभाजक असें ह्मणतात, त्यानें) भाज्य व हार यांस संक्षेप जातो.

उपपत्ति.

व्याख्या :—विवक्षित अनेक संख्यांपैकीं प्रत्येकीस निःशेष भागणाऱ्या ज्या संख्या असतील त्यांतील सर्वांत मोठ्या संख्येस त्यांचा **महत्तम साधारणभाजक** किंवा **दृढभाजक** ह्मणतात. जसें :— २४ व ३६ या संख्यांस निःशेष भागणाऱ्या संख्या २, ३, ४, ६ आणि १२ या आहेत. यांमध्यें मोठी संख्या १२ ही आहे; ह्मणून २४ व ३६ यांचा दृढभाजक १२ हा होय.

सिद्धांत १. जर एक संख्या दुसऱ्या संख्येस निःशेष भागिते, तर ती दुसरीच्या कोणत्याहि पूर्णपटींस निःशेष भागील. जसें :—८ ही संख्या ५६ या संख्येला निःशेष भागिते ह्मणून ती ५६ च्या कोणत्याही पटीला निःशेष भागील.

सिद्धांत २. जर एक संख्या दुसऱ्या दोन संख्यांस निःशेष भागिते तर ती त्या दोन संख्यांच्या बेरजेस आणि वजाबाकीसही निःशेष भागील. जसें :— ८ ही संख्या ५६ व १९२ या प्रत्येक संख्येस निःशेष भागिते ह्मणून ती त्यांच्या बेरजेला आणि वजाबाकीलाही निःशेष भागील.

सिद्धांत ३. जी संख्या एखाद्या भागाकाराच्या उदाहरणांतील भाज्यभाजकांस निःशेष भागिते ती त्या उदाहरणांतील बाकीसही निःशेष भागिते.

सिद्धांत ४. जी संख्या एखाद्या भागाकाराच्या उदाहरणांतील भाजक व बाकी ह्यांस निःशेष भागिते ती त्या उदाहरणांतील भाज्यासही निःशेष भागिते.

या चार सिद्धांतांपैकीं पहिले दोन सिद्धांत सहज लक्षांत येण्यासारखे आहेत, व यांच्या सहाय्यानें पुढील दोन्ही सिद्धांत सिद्ध करितां येतात.

आतां दोन संख्यांचा दृढभाजक हा त्यांपैकीं लहान संख्येपेक्षां मोठा असणार नाहीं, ह्मणजे तीच संख्या किंवा तिच्यापेक्षां लहान असेल, हें दृढभाजकाच्या लक्षणांवरून सिद्ध आहे.

आतां लहान संख्याच दृढभाजक आहे कीं काय हें समजण्याकरितां तिनें मोठीस भागून पाहणें अवश्य आहे. भाग तुटल्यास तोच दृढभाजक होईल. भाग न तुटल्यास विवक्षित दोन संख्यांचा दृढभाजक (सिद्धांत ३ प्रमाणें) राहिलेल्या बाकीसही निःशेष भागील, ह्मणून बाकीपेक्षांही तो मोठा असणार नाहीं. ही बाकीच दृढभाजक आहे कीं काय हें समजण्याकरितां तिनें विवक्षित दोन संख्यांस ह्मणजे वरील भाज्यभाजकांस भागून पाहणें प्राप्त आहे. परंतु तिनें एकट्या

भाजकास भाग तुटला असतां (सिद्धांत ४ प्रमाणें) भाज्यास तुटेलच. ह्मणून त्या बाकीनें भाजकास ह्मणजे लहान संख्येस भागून पाहणें सोईचें होय. भाग तुटल्यास ही पहिली बाकीच विवक्षित संख्यांचा दृढभाजक होईल. भाग न तुटून बाकी राहिल्यास (सि. ३ प्र.) तो दृढभाजक या दुसऱ्या बाकीसही निःशेष भागील. ह्मणून तिजपेक्षां मोठा असणार नाहीं. याप्रमाणेंच पुढें विचार करीत गेलें असतां स्पष्ट दिसून येईल कीं, ज्या बाकीनें भाग तुटेल तीच विवक्षित दोन संख्यांचा दृढभाजक होईल. ह्मणून दिलेल्या श्लोकाची सिद्धि झाली.

श्लोक :–मिथो भजेत्तौ दृढभाज्यहारौ यावद्विभाज्ये भवतीह रूपं ॥ फलान्यधोधस्त दधो निवेश्यः क्षेपस्तथांते ख मुपांतिमेन ॥ स्वोर्ध्वे हतेंत्येन युते तदंत्यं त्यजेन्मुहुः स्यादिति राशियुग्मं ॥ ऊर्ध्वो विभाज्येन दृढेन तष्टः फलं गुणःस्यादपरो हरेण ॥

अर्थ :–कुट्टकाच्या उदाहरणांतील पूर्वीं सांगितल्याप्रमाणें तयार केलेले दृढभाज्य व दृढहार यांणीं परस्परांस भागावें; व ही भजनक्रिया भाज्यामध्यें एक शेष राहीपर्यंत करावी. परस्परांस भागून ज्या ज्या लब्धी येतील त्या सर्व क्रमानें एकाखालीं एक अशा मांडून त्यांचेखालीं दृढक्षेपक मांडावा व क्षेपकाखालीं शून्य मांडावें. याप्रमाणें जी ऊर्ध्वाधर पंक्ति तयार होते, तिला वल्ली ह्मणण्याचा परिपाठ आहे. नंतर त्या वल्लींतील खालच्या उपांतिमानें त्याच्या वरच्या अंकास गुणून आलेल्या गुणाकारामध्यें अंतिमांक मिळवावा. नंतर अंतिमांक पुसून टाकून जो नूतन उपांतिमांक असेल त्यानें आपल्या वरच्या अंकास गुणून जो गुणाकार येईल त्यामध्यें अंतिमांक मिळवावा. पुनः अंतिमांक पुसून टाकून उपांतिमांकानें वरच्या अंकास गुणून अंतिमांक मिळवावा. याप्रमाणें दोन राशि होईपर्यंत क्रिया

करावी. नंतर आलेल्या दोन राशींपैकीं ऊर्ध्वराशीला भाज्यानें भागून जी शिल्लक राहील ती **लब्धी** समजावी. व अधोराशीस हारानें भागून जी शिल्लक राहील तो **गुण** समजावा, ह्मणजे प्रश्नांतील **उत्तर** समजावें.

जसें :—ज्या संख्येस १०० नीं गुणून आलेल्या गुणाकारामध्यें ९० मिळविले आणि ६३ नीं भागिलें तर भागाकार पूर्ण धनसंख्यात्मक येतो, ह्मणजे शिल्लक रहात नाहीं, अशी संख्या कोणती ती सांग ?

या कुट्टकाच्या उदाहरणामध्यें १०० हा **भाज्य**, ९० हा **क्षेपक** व ६३ हा **हार**, या तिघांस संक्षेप जात नाहीं.

आतां रीतींत सांगितल्याप्रमाणें **वल्ली** तयार करूं.

```
६३ ) १०० ( १
      ६३
     ----
      ३७ ) ६३ ( १
           ३७
          ----
           २६ ) ३७ ( १
                २६
               ----
                ११ ) २६ ( २
                     २२
                    ----
                      ४ ) ११ ( २
                           ८
                          ---
                           ३ ) ४ ( १
                               ३
                              ---
                               १ ) ३ ( ३
                                   ३
                                  ---
                                   ०
```

परस्पर भाज्यहारभजनानें क्रमानें १, १, १, २, २, १, या लब्धी आल्या. ह्या ऊर्ध्वाधरक्रमानें मांडून खालीं क्षेपक मांडून त्याचे खालीं शून्य मांडून तयार झाली ती वल्ली ही आहे. आतां या वल्लींत उपांतिमांक ९० आहे. ह्यानें त्याच्या वरच्या अंकास ह्मणजे १ स गुणून अंतिमांक ० मिळवून व पुसून टाकून वल्लीचें स्वरूप असें राहिलें.

१
१
१
२
२
१
९०
०

१ । १ । १ । २ । २ । ९० । ९०

पुनः यामध्यें उपांतिमांक ९० यानें वरील अंक २ यास गुणून अंतिमांक ९० मिळवून व टाकून देऊन वल्लीचें असें स्वरूप राहिलें.

१ । १ । १ । २ । ३ × ९० । ९०

पुनः यामध्यें उपांतिमांक ३ × ९० यानें वरील अंक २ यास गुणून अंतिमांक ९० मिळवून व टाकून वल्लीचें असें स्वरूप राहिलें.

१ । १ । १ । ७ × ९० । ३ × ९०

पुनः राहिलेल्या वल्लींतील उपांतिमांक ७ × ९० यानें वरील अंक १ यास गुणून व अंतिमांक ३ × ९० मिळवून पश्चात् अंतिमांकाचा त्याग करून वल्लीचें स्वरूप असें राहिलें.

१ । १ । १० × ९० । ७ × ९०

पुनः राहिलेल्या वल्लींतील उपांतिमांक १० × ९० यानें वरील अंक १ यास गुणून व अंतिमांक ७ × ९० मिळवून पश्चात् अंतिमांकाचा त्याग करून वल्लीचें स्वरूप असें राहिलें.

१ । १७ × ९० । १० × ९०

पुनः राहिलेल्या या वल्लींतील उपांतिमांक १७ × ९० यानें वरील अंक १ यास गुणून व अंतिमांक १० × ९० मिळवून पश्चात् अंतिमांकाचा त्याग करून वल्लीचें स्वरूप असें राहिलें.

२७ × ९० । १७ × ९०

याप्रमाणें वल्लीमध्यें दोन राशी उत्पन्न झाल्या. यांपैकीं ऊर्ध्वराशि २७×९० ह्मणजे २४३० यास भाज्य १०० यानें भागून शिल्लक ३० राहिली, ही लब्धि झाली. व अधोराशि १७×९० ह्मणजे १५३० यास हार ६३ यानें भागून शिल्लक १८ राहिली हा गुण झाला. गुण जो येईल, तें प्रश्नाचें उत्तर समजावें, असें रीतीमध्यें सांगितलें आहे, ह्मणून १८ हें उत्तर झालें.

उपपत्ति :—

दिलेल्या प्रश्नाचें उत्तर क्ष आहे असें धरूं. व क्षला १०० नीं गुणून आलेल्या गुणाकारामध्यें ९० मिळवून ६३ या संख्येनें भागून भागाकार पूर्णांकात्मक य आला अशी कल्पना करून

$$\frac{१००क्ष + ९०}{६३} = य$$

असें समीकरण तयार झालें.

$$\therefore य = क्ष + \frac{३७क्ष + ९०}{६३} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

ज्याअर्थी या समीकरणामध्यें य आणि क्ष हे पूर्णांकात्मक आहेत, त्याअर्थी $\frac{३७क्ष + ९०}{६३}$ हें स्वरूप पूर्णांकात्मकच असलें पाहिजे, करितां या स्वरूपाबरोबर अ पूर्णांकात्मक संख्या आहे, अशी कल्पना करून

$$\frac{३७क्ष + ९०}{६३} = अ$$

हें समीकरण तयार झालें.

$$\therefore क्ष = \frac{६३अ - ९०}{३७}$$

$$\therefore क्ष = अ + \frac{२६अ - ९०}{३७} \text{..........................} (२)$$

ज्याअर्थी या समीकरणामध्यें क्ष आणि अ हे पूर्णांकात्मक आहेत, त्याअर्थी $\frac{२६अ - ९०}{३७}$ हेंहि स्वरूप पूर्णांकात्मकच असलें पाहिजे. करितां या स्वरूपाबरोबर ब पूर्णांकात्मक संख्या आहे, अशी कल्पना करून

$$\frac{२६अ - ९०}{३७} = ब$$

असें समीकरण तयार झालें.

$$\therefore २६अ - ९० = ३७ब$$

$$२६अ = ३७ब + ९०$$

$$\therefore अ = \frac{३७ब + ९०}{२६}$$

$$\therefore अ = ब + \frac{११ब + ९०}{२६} \text{..........................} (३)$$

ज्याअर्थी अ आणि ब हे पूर्णांकात्मक आहेत त्याअर्थी $\frac{११ब + ९०}{२६}$ हेंहि स्वरूप पूर्णांकात्मकच असलें पाहिजे. करितां याबरोबर क पूर्णांकात्मकच संख्या आहे, अशी कल्पना करून

$$\frac{११ब + ९०}{२६} = क$$

अविसमीकरण तयार झालें.

$$\therefore \text{ ११ब} + \text{९०} = \text{२६क}$$

$$\therefore \text{ ब} = \frac{\text{२६क} - \text{९०}}{\text{११}}$$

$$\therefore \text{ ब} = \text{२क} + \frac{\text{४क} - \text{९०}}{\text{११}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{४})$$

यांतील $\frac{\text{४क} - \text{९०}}{\text{११}} = \text{ड}$ धरून

$$\text{४क} - \text{९०} = \text{११ड}$$

$$\therefore \text{ ४क} = \text{११ड} + \text{९०}$$

$$\therefore \text{ क} = \frac{\text{११ड} + \text{९०}}{\text{४}}$$

$$\therefore \text{ क} = \text{२ड} + \frac{\text{३ड} + \text{९०}}{\text{४}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{५})$$

यांतील $\frac{\text{३ड} + \text{९०}}{\text{४}} = \text{इ}$ धरून

$$\text{३ड} + \text{९०} = \text{४इ}$$

$$\therefore \text{ ३ड} = \text{४इ} - \text{९०}$$

$$\therefore \text{ ड} = \frac{\text{४इ} - \text{९०}}{\text{३}}$$

$$\therefore \text{ ड} = \text{इ} + \frac{\text{इ} - \text{९०}}{\text{३}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{६})$$

यांतील $\frac{\text{इ} - \text{९०}}{\text{३}} = \text{न}$ धरून

$$\text{इ} - \text{९०} = \text{३न}$$

$$\therefore \text{इ} = ३\text{न} + ९० \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (७)$$

या समीकरणांतील पदास छेद नसल्यामुळें येथें न ची कोणतीही पूर्णसंख्यात्मक इष्ट किंमत धरून इ इत्यादिकांच्या किंमती काढतां येतील.

आतां वल्लीचें स्वरूप वगैरे ध्यानांत येण्याकरितां मागील ७ समीकरणें क्रमानें मांडून व सातव्या समीकरणामध्यें न ची किंमत शून्य धरून बाकींच्या किंमती ज्या येतील त्या मांडून दाखवितों.

वल्ली.		वल्ल्यंक.
$\text{य} = १\text{क्ष} + \dfrac{२७\text{क्ष} + ९०}{६३}$	$= २७ \times ९०$;	१
$\text{क्ष} = १\text{अ} + \dfrac{२६\text{अ} - ९०}{२७}$	$= १७ \times ९०$;	१
$\text{अ} = १\text{ब} + \dfrac{११\text{ब} + ९०}{२६}$	$= १० \times ९०$;	१
$\text{ब} = २\text{क} + \dfrac{४\text{क} - ९०}{११}$	$= ७ \times ९०$;	२
$\text{क} = २\text{ड} + \dfrac{३\text{ड} + ९०}{४}$	$= ३ \times ९०$;	२
$\text{ड} = १\text{इ} + \dfrac{\text{इ} - ९०}{३}$	$= १ \times ९०$;	१
$\text{इ} = ३\text{न} + ९०$	$= ९०$;	९०
		०

आतां न ची किंमत शून्य न धरितां न च्या रूपामध्यें सर्वांच्या किंमती आणून दाखवितों.

$$इ = ३न + ९०$$
$$\therefore ड = ४न + ९०$$
$$\therefore क = ११न + ३ \times ९०$$
$$\therefore ब = २६न + ७ \times ९०$$
$$\therefore अ = ३७न + १० \times ९०$$
$$\therefore क्ष = ६३न + १७ \times ९०$$
$$\therefore य = १००न + २७ \times ९०$$

येथें क्ष च्या किंमतीस **गुणसंज्ञा** व य च्या किंमतीस **लब्धिसंज्ञा** आहे असें समजावें.

$$\text{आतां}\quad क्ष = ६३न + १५३०$$
$$य = १००न + २४३०$$

या ठिकाणीं न ची धनपूर्णांकात्मक कोणतीहि किंमत धरली असतां उत्तर धनात्मक येईल, हें उघड आहे. परंतु न ची किंमत ऋण-संख्यात्मक कोठपर्यंत धरली असतां लब्धी व गुण हे धन येतील, हें पाहणें आहे, करितां

$$\frac{१५३०}{६३} = २४\frac{१८}{६३}$$

$$\frac{२४३०}{१००} = २४\frac{३०}{१००}$$

असें आहे म्हणून न ची किंमत ऋण २४ पर्यंत कोणतीहि धरली

असतां उत्तर धन येईल, हें स्पष्ट झालें, ह्मणून − २४ ही न ची किंमत धरून

$$\left.\begin{array}{l} \text{गुण} = १८ \\ \text{लब्धि} = ३० \end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

याप्रमाणेंच − २३, − २२, − २१ इत्यादि किंमती न ला देऊन अनेक उत्तरें येतील.

∴ इष्टश्लोकसिद्धि झाली.

श्लोक :—एवं तदैवात्र यदा समास्ताः स्युर्लब्धयश्चे द्विषमा-स्तदानीं ॥ यथागतौ लब्धिगुणौ विशोध्यौ स्वतक्षणाच्छेषमितौ-तु तौ स्तः ॥

अर्थ :— ज्यावेळीं वल्लीमध्यें समसंख्यांक लब्धि येतात, त्यावेळीं पूर्वीं सांगितलेल्या रीतीप्रमाणें जे लब्धिगुण येतात ते बरोबर असतात. व ज्यावेळीं वल्लीमध्यें विषम लब्धि येतात त्यावेळीं पूर्वींच्या रीतीनें आलेले लब्धि गुण हे स्वतक्षणापासून (भाज्यहारा-पासून) क्रमानें वजा केले असतां खरे लब्धिगुण येतात.

उपपत्ति :—

$$\frac{६०\text{क्ष} + ३}{१३} = \text{य} \therefore \text{य} = ४\text{क्ष} + \frac{८\text{क्ष} + ३}{१३}$$

$$\frac{८\text{क्ष} + ३}{१३} = \text{अ} \therefore \text{क्ष} = \text{अ} + \frac{५\text{अ} - ३}{८}$$

$$\frac{५\text{अ} - ३}{८} = \text{ब} \therefore \text{अ} = \text{ब} + \frac{३\text{ब} + ३}{५}$$

$$\frac{३\text{ब} + ३}{५} = \text{क} \therefore \text{ब} = \text{क} + \frac{२\text{क} - ३}{३}$$

$$\frac{९क - ३}{३} = ड \therefore क = ड + \frac{ड + ३}{२}$$

$$\frac{ड + ३}{२} = इ \therefore ड = २इ - ३$$

$$\therefore क्ष = १३इ - १५$$

$$य = ६०इ - ६९$$

येथें जर इ ची किंमत १ धरली तर ऋण किंमती येतात, करितां इची किंमत २ धरून

$$क्ष = १३ \times २ - १५ = ११$$

$$\therefore क्ष = १३ + १३ - १५ = ११$$

$$\therefore क्ष = १३ - (१५ - १३) = ११$$

$$य = ६० \times २ - ६९ = ५१$$

$$\therefore य = ६० - (६९ - ६०) = ५१$$

∴ श्लोकसिद्धि झाली.

श्लोक :—भवति कुट्टविधेर्युतिभाज्ययोः समपवर्तितयोरथवा गुणः ॥ भवति यो युतिभाजकयोः पुनः स च भवेदपवर्तनसंगुणः ॥

अर्थ :—कुट्टकाच्या उदाहरणांतील भाज्य व क्षेप या दोघांस कोणत्याही संख्येनें संक्षेप देऊन पूर्वींच्या रीतीनें लब्धि व गुण तयार केले असतां गुण बरोबर येतो, लब्धि बरोबर येत नाहीं. भाज्य व क्षेप यांस ज्या संख्येनें संक्षेप दिला असेल त्या अपवर्तनांकानें आलेल्या लब्धीस गुणिलें असतां लब्धि बरोबर येते.

कुट्टकाच्या उदाहरणांतील क्षेप व हार या दोघांस कोणत्याही संख्येनें संक्षेप देऊन पूर्वीच्या रीतीनें लब्धि व गुण तयार केले असतां त्यांपैकीं लब्धि बरोबर येते. गुण बरोबर येत नाहीं. हार व क्षेप यांस ज्या संख्येनें संक्षेप दिला असेल त्या अपवर्तनांकानें गुणास गुणिलें असतां गुण बरोबर येतो.

उपपत्ति :—

$$\frac{\text{भाज्य} \times \text{गुण} + \text{क्षेप}}{\text{हार}} = \text{लब्धि}$$

यांतील उभयपक्षांस हारानें गुणून

$$\text{भाज्य} \times \text{गुण} + \text{क्षेप} = \text{लब्धि} \times \text{हार}$$

उभयपक्षांस अपवर्तनांकानें भागून

$$\frac{\text{भाज्य} \times \text{गुण} + \text{क्षेप}}{\text{अपवर्तनांक}} = \frac{\text{लब्धि} \times \text{हार}}{\text{अपवर्तनांक}}$$

आद्याक्षरचिन्हितसमीकरण करून

$$\frac{\text{भा. गु} + \text{क्षे}}{\text{अ}} = \frac{\text{ल. हा}}{\text{अ}}$$

$$\therefore \frac{\frac{\text{भा}}{\text{अ}}\ \text{गु} + \frac{\text{क्षे}}{\text{अ}}}{\text{हा}} = \frac{\text{ल}}{\text{अ}} = \text{ल}'$$

या समीकरणावरून सहज लक्ष्यांत येईल कीं, भाज्य व क्षेप यांस संक्षेप दिला असतां गुण बरोबर येईल व लब्धि बरोबर येणार नाहीं. ती बरोबर येण्याकरितां आलेल्या लब्धीस अपवर्तनांकानें गुणिलें पाहिजे.

पूर्वीच्या आद्याक्षरचिन्हित समीकरणापासून

$$\frac{\text{भा.}\,\frac{\text{गु}}{\text{अ}} + \frac{\text{क्षे}}{\text{अ}}}{\frac{\text{हा}}{\text{अ}}} = \text{ल}$$

या समीकरणावरून असें दिसून येईल कीं, क्षेपक व हार यांस संक्षेप देऊन पूर्वीप्रमाणें लब्धि गुण तयार केले तर लब्धि बरोबर येईल व आलेल्या गुणास अपवर्तनांकानें गुणिलें असतां गुण बरोबर येईल; ह्मणून श्लोकसिद्धि झाली.

श्लोक :—योगजे तक्षणाच्छुद्धे गुणाप्तीस्तो वियोगजे ॥ धनभाज्योद्भवे तद्वत् भवेता मृणभाज्यजे ॥

अर्थ :—धनक्षेपापासून जे लब्धिगुण येतात ते क्रमानें भाज्य व हार यांमध्यें वजा केले असतां ते लब्धिगुण त्याच ऋण क्षेपापासून उत्पन्न होतात. व धनभाज्यापासून जे लब्धिगुण येतात ते क्रमानें भाज्यहारामध्यें वजा केले असतां ते लब्धिगुण त्याच ऋणभाज्यापासून उत्पन्न होतात.

उपपत्ति.

उदाहरणामध्यें ऋण-क्षेप किंवा ऋण-भाज्य असल्यास मागें केल्याप्रमाणें बीजप्रक्रिया करून पाहिली असतां ऋणसंख्यात्मक उत्तरें येतात, तीं धनसंख्यात्मक येण्याकरितां आलेले लब्धिगुण, भाज्यहारांतून क्रमानें वजा करावेत, असें सांगितलें आहे. ह्मणून श्लोकसिद्धि झाली.

श्लोक :—गुणलब्ध्योः समं ग्राह्यं धीमता तक्षणे फलं ॥

अर्थ :—मागें कुट्टकाच्या रीतीमध्यें वल्लीपासून दोन राशि

उत्पन्न करून ऊर्ध्वराशीस भाज्यानें भागावें व अधोराशीस हारानें भागावें असें सांगितलें आहे, त्या ठिकाणीं भाज्यहारानें भागीत असतां लब्धी ज्या घ्यावयाच्या त्या सारख्या घ्याव्यात, भिन्न घेऊं नयेत.

उपपत्ति.

$$\frac{५क्ष + २३}{३} = य \therefore य = क्ष + \frac{२क्ष + २३}{३}$$

$$\frac{२क्ष + २३}{३} = अ \therefore क्ष = अ + \frac{अ - २३}{२}$$

$$\frac{अ - २३}{२} = ब \therefore अ = २ब + २३$$

$$\therefore य = ५ब + ४६$$

$$\text{आणि} \quad क्ष = ३ब + २३$$

येथें ४६ यास ५ नीं भागून भागाकार ९ येतो व २३ स ३ नीं भागून भागाकार ७ येतो. ९ व ७ अशा भिन्न लब्धि घेतल्या असतां एकाच वेळेस बच्या भिन्न किंमती घेतल्यासारखें होतें. करितां बची किंमत एकच ९ किंवा ७ धरणें अवश्य आहे. उभयत्र ९ किंमत धरणें येथें संभवत नाहीं. सबब, बची किंमत ७च उभयत्र धरली पाहिजे. म्हणून श्लोकसिद्धि झाली.

श्लोक :—हरतष्टे धनक्षेपे गुणलब्धी तु पूर्ववत् ॥ क्षेपत्तक्षण लाभाढ्या लब्धिःशुद्धौ तु वर्जिता ॥

अर्थ :—ज्या उदाहरणीं क्षेप हारापेक्षां जास्त असेल, तेथें क्षेपास हारानें भागून जें शेष राहील त्यास क्षेप कल्पना करून

पूर्ववत् लब्धिगुण साधावेत. त्यांतील गुण बरोबर येईल व क्षेपास हारानें भागून जो भागाकार आला असेल तो आलेल्या लब्धीमध्यें मिळविला असतां लब्धी बरोबर येते. जर ऋण क्षेप असेल तर वजा केला असतां लब्धी बरोबर येते.

उपपत्ति.

$$\frac{\text{५क्ष} \pm \text{२३}}{\text{३}} = \text{य} \therefore \frac{\text{५क्ष}}{\text{३}} \pm \text{७} \pm \frac{\text{२}}{\text{३}} = \text{य}$$

$$\therefore \frac{\text{५क्ष} \pm \text{२}}{\text{३}} = \text{य} \mp \text{७} \quad \text{येथें} \quad \text{य} \mp \text{७} = \text{च} \quad \text{धरून}$$

$$\frac{\text{५क्ष} \pm \text{२}}{\text{३}} = \text{च}$$

हें कुट्टकांतर झालें. ह्यांत गुण अविकृत आहे व लब्धि मात्र विकृत आहे ती :–

$$\text{य} = \text{च} \pm \text{७}$$

ह्या समीकरणानें बरोबर येईल. ह्मणून इष्टश्लोकसिद्धि झाली.

श्लोक :--अथवा भागहारेण तष्टयोः क्षेपभाज्ययोः ॥ गुणः प्राग्वत्ततो लब्धिर्भाज्याद्धतयुतोद्धृतात् ॥

अर्थ :–कुट्टकाच्या उदाहरणांतील भाज्यास हारानें भागून जी शिल्लक उरेल तो भाज्य, व क्षेपास हारानें भागून जी शिल्लक उरेल तो क्षेप अशी कल्पना करून पूर्ववत् लब्धि गुण तयार केले असतां गुण मात्र बरोबर येतो. लब्धि बरोबर येत नाहीं. ती लब्धी आलेल्या गुणास दिलेल्या भाज्यानें गुणून, दिलेला क्षेप मिळवून व हारानें भागून काढावी ह्मणजे बरोबर येते.

उपपत्ति.

$$\frac{९क्ष + २३}{३} = य \quad \therefore क्ष + \frac{२क्ष}{३} + ७ + \frac{२}{३} = य$$

$$\therefore \frac{२क्ष + २}{३} + क्ष + ७ = य \; \therefore \frac{२क्ष + २}{३} = य - क्ष - ७$$

येथें $य - क्ष - ७ = ल$ धरून

$$\frac{२क्ष + २}{३} = ल$$

हें कुट्टकांतर झालें. ह्यामध्यें गुण अविकृत असल्यामुळें बरोबर येईल. व गुण समजल्यामुळें

$$\frac{९क्ष + २३}{३} = य$$

या समीकरणानें लब्धि बरोबर येईल हें उघड आहे. ह्मणून इष्टश्लोकसिद्धि झाली.

श्लोक :—क्षेपाभावोऽथवा यत्र क्षेपः शुद्ध्येद्धरोत्धृतः ॥ ज्ञेयः शून्यं गुणस्तत्र क्षेपो हारहृतः फलं ॥

अर्थ :—ज्या उदाहरणामध्यें क्षेपक शून्य आहे अथवा हारानें क्षेपास भागिलें असतां भाग बरोबर तुटतो असा क्षेप आहे, त्या ठिकाणीं गुण शून्य धरावा आणि हारानें क्षेपास भागून जें येईल ती लब्धि समजावी.

उपपत्ति.

$$\frac{५क्ष + ०}{१३} = य$$

येथें $क्ष = ०$ धरिलें असतां दोष येत नाहीं व

$$\frac{५क्ष + ६५}{१३} = य$$

या समीकरणामध्येंही क्ष ची किंमत शून्य धरिली असतां चालते. ह्मणून इष्टश्लोकसिद्धि झाली.

श्लोक :-इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते ते वा भवेतां बहुधा गुणाप्ती ॥

अर्थ :—कोणत्याही इष्ट संख्येनें हार व भाज्य ह्यांस गुणून जे गुणाकार येतील ते पृथक् क्रमानें आलेल्या गुणलब्धीमध्यें मिळविले असतां अन्य गुणलब्धी तयार होतात. ह्याप्रमाणें अनंत उत्तरें काढतां येतात.

उपपत्ति.

वल्लीची उपपत्ति मागें दिली आहे, त्यामध्येंच ह्या श्लोकाची उपपत्ति अंतर्भूत झाली आहे, ह्मणून पुनः येथें देत नाहीं व सहज कळण्याजोगीं आहे.

उदाहरणं :-एकविंशतियुतं शतद्वयं यद्गुणं गणक पंचषष्टियुक् ॥ पंचवर्जितशतद्वयोद्धृतं शुद्धिमेति गुणकं वदाशु तम् ॥

अर्थ :— २२१ ह्या संख्येला ज्या संख्येनें गुणिलें, ६५ मिळविलें आणि १९५ नीं भागिलें असतां भागाकार धनपूर्णांकात्मक येतो, तर ती गुणक संख्या कोणती ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

वरील उदाहरणांतील भाज्यादिकांस १३ या संख्येनें संक्षेप देऊन भाज्य १७, क्षेप ५ व हार १५ हे दृढसंज्ञक झाले. यांपासून वल्ली १ । ७ । ५ । ० उत्पन्न करून राशिद्वय ४० । ३५ तयार झाले. यांतील ऊर्ध्वराशीस भाज्य १७ यानें भागून शिल्लक ६ राहिली,

ह्मणून ६ ही लब्धि झाली, व अधोराशीस हार १९ यानें भागून शेष ५ हा गुण झाला. येथें इष्ट १ यानें स्वस्वहर १७ व १५ यांस गुणून आलेल्या लब्धिगुणामध्यें क्रमानें मिळवून अन्य लब्धिगुण २३ । २० इत्यादि अनेक उत्तरें समजावीं.

उदाहरणं :—शतं हतं येन युतं नवत्या विवर्जितं वा विहृतं त्रिषष्ट्या ॥ निरग्रकं स्यात् वद मे गुणं तं स्पष्टं पटीयान् यदि कुट्टकेऽसि ॥

अर्थ :–१०० या संख्येस ज्या संख्येनें गुणिलें, ९० मिळविले किंवा वजा केले आणि ६३ यांनीं भागिलें असतां भागाकार निःशेष येतो, तर तो गुणक कोणता हें सांग?

हें उदाहरण मागें सोडविलें आहे.

उदाहरणं :—यद्गुणा क्षयगषष्टि रान्विता वर्जिता च यदि वा त्रिभिस्ततः ॥ स्यात्त्रयोदशहृता निरग्रका तं गुणं गणक मे पृथक् वद ॥

अर्थ :—समीकरणपद्धतीनें— $\dfrac{(-६०)क्ष \pm ३}{१३} = य$

या समीकरणांतील क्ष व य ह्यांच्या धनपूर्णांकात्मक किंमती काय?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

४, १, १, १, १, ३, ० या वल्लीपासून राशिद्वय ६९, १९ स्वहारतष्ट ९, २ आणि लब्धि विषम असल्यामुळें स्वहार शुद्ध ५१, ११ हे लब्धिगुण धनभाज्य व धनक्षेप असतां झाले व ऋण-भाज्य व धनक्षेप असतां लब्धिगुण ९, २ आणि ऋणभाज्य व ऋणक्षेप असतां लब्धिगुण ५१, ११ यांत लब्धि ऋण येते.

श्लोक :— अष्टादशगुणाः केन दशाढ्या वा दशोनिताः ॥ शुद्धं भागं प्रयच्छंति क्षयगैका दशोद्धृताः ॥

अर्थ :—ज्या संख्येस १८ नीं गुणून १० मिळवून किंवा वजा करून ऋण ११ या संख्येनें भागिलें असतां निःशेष भागाकार येतो, तर ती संख्या कोणती हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

१, १, १, १, १०, ० या वल्लीपासून राशिद्वय ५०, ३० यांपासून लब्धिगुण १४ । ८ यांत लब्धि मात्र ऋण येते. आणि ऋणक्षेपकालीं आलेले लब्धिगुण तक्षणात् शोधन करून ४।३ हे लब्धिगुण झालें. ह्यांत लब्धि ऋण समजावी.

वरील दोन तीन उदाहरणांवरून असें दिसून येतें कीं, कुट्टकाच्या उदाहरणांतील गुण मात्र धनपूर्णांकात्मक असला पाहिजे. लब्धि ऋणपूर्णांकात्मक आली तरी हरकत नाहीं.

श्लोक :—येन संगुणिताः पंच त्रयोविंशतिसंयुताः ॥ वर्जिता वा त्रिभिर्भक्ता निरग्राः स्युः सकोगुणः ॥

अर्थ :— $\dfrac{५ क्ष \pm २३}{३} = य$

यांतील क्ष व य ह्यांच्या किंमती सांग ?

धनक्षेपकालीं $\left.\begin{array}{l} क्ष = २ \\ य = ११ \end{array}\right\}$ हें उत्तर.

ऋणक्षेपकालीं $\left.\begin{array}{l} क्ष = १ \\ य = -६ \end{array}\right\}$ हें उत्तर.

श्लोक :—येन पंच गुणिताः खसंयुताः पंचषष्टिसहिताश्च तेऽथवा ॥ स्यु स्त्रयोदशहृता निरग्रका स्तंगुणं गणक कीर्तयाशु मे ॥

अर्थ :— $\dfrac{५ क्ष + ०}{१३} = य$ आणि $\dfrac{५ क्ष + ६५}{१३} = य$

या दोन समीकरणांतील क्ष, य ह्यांच्या किंमती सांग ?

'क्षेपाभावोऽथवा यत्रेति' या सूत्रानें

$$\left.\begin{array}{r}\text{प्रथमोदाहरणीं } \text{क्ष} = ० \\ \text{य} = ० \end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{द्वितीयोदाहरणीं } \text{क्ष} = ० \\ \text{य} = ९ \end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

श्लोकः—क्षेपं विशुद्धिं परिकल्प्य रूपं पृथक् पृथक् ये गुणकारलब्धी ॥ अभीप्सितक्षेपविशुद्धिनिघ्ने स्वहारतष्टे भवतस्तयो स्ते ॥

अर्थः—कुट्टकामध्यें एकसंख्याक धनक्षेप किंवा एकसंख्याक ऋणक्षेप कल्पना करून त्या एक क्षेपावरून पृथक् लब्धिगुण तयार करावेत. नंतर आपल्यास ज्या इष्ट क्षेपावर लब्धिगुण न्यावयाचे असतील त्या इष्टक्षेपानें एक क्षेपावरून तयार केलेल्या लब्धिगुणांस गुणावें आणि क्रमानें भाज्य व हार यांनीं शेषित केले असतां इष्टक्षेपाचे लब्धिगुण तयार होतात.

$$\text{जसें :-}\ \frac{१७\text{क्ष} + १}{१५} = \text{य}$$

ह्या उदाहरणांमध्यें गुणलब्धि गुण ७, लब्धि ८ हे आहेत. ह्यांस पंच ५ क्षेपावर नेणें आहे, ह्मणून ७ × ५ = ३५ यांस १५नीं भागून शेष ५ राहिले, हा पंचक्षेपी गुण झाला व ८ × ५ = ४० यांस १७नीं भागून शिल्लक ६ राहिली, ही पंचक्षेपी लब्धि झाली. ह्याप्रमाणें कोणत्याहि क्षेपाचे लब्धिगुण तयार करितां येतील.

उपपत्ति.

$$\frac{१७\text{क्ष} + १, २, ३, ४, ५, \text{इत्यादि}}{१५} = \text{य}$$

$$\therefore\ \text{य} = \text{क्ष} + \frac{\text{२क्ष} + \text{१, २, ३, ४, इत्यादि}}{\text{१५}}$$

यांतील शेषाबरोबर अ धरून

$$\text{क्ष} = \text{७अ} + \frac{\text{अ} - \text{१, २, ३, ४, इत्यादि}}{\text{२}}$$

यांतील शेषाबरोबर फ धरून

$$\text{अ} = \text{२फ} + \text{१, २, ३, ४ इत्यादि.}$$

$$\therefore\ \text{क्ष (गुण)} = \text{१५फ} + \text{७, १४, २१, २८, इत्यादि}$$

$$\text{य (लब्धि)} = \text{१७फ} + \text{८, १६, २४, ३२, इत्यादि}$$

म्हणून इष्टश्लोकसिद्धि झाली.

श्लोक :–कल्प्याथशुद्धिर्विकलावशेषं षष्टिश्च भाज्यः कुदिनानि हारः ॥ तज्जं फलं स्यु विकला गुणस्तु लिप्ताग्रमस्माच्च कलालवाग्रं ॥ एवं तदूर्ध्वं च तथाधिमासावमाग्रकाभ्यां दिवसा रवीन्द्वोः ॥

अर्थ :—ग्रहाच्या विकलावशेषापासून ग्रह व अहर्गण तयार करण्याची रीति येथें सांगितली आहे ती अशी :—

भाज्य ६०, ऋणक्षेप विकलाशेष, आणि कल्पकुदिन (कल्पांतील सौरदिन) हार ह्या कुट्टकावरून जी लब्धि येईल, त्या ग्रहाच्या विकला होतील व गुण जो येईल तें कलाशेष होईल.

भाज्य ६०, ऋणक्षेप कलाशेष आणि कुदिनें हार ह्या कुट्टकापासून जी लब्धि येईल, त्या ग्रहाच्या कला होतील व गुण येईल, तें अंशशेष होईल.

भाज्य ३०, अंशशेष हा ऋणक्षेप आणि कुदिनें हार ह्या कुट्टकावर जो गुण येईल तें राशिशेष होईल व लब्धि जी येईल ते ग्रहाचे अंश होतील.

भाज्य १२, ऋणक्षेप राशिशेष व कुदिनें हार ह्या कुट्टकापासून लब्धि ह्या राशि होतील व गुण भगणशेष येईल.

भाज्य कल्पग्रहभगण, ऋणक्षेप भगणशेष व कुदिनें हार ह्यांपासून जी लब्धि ते ग्रहाचें भगण व गुण हा अहर्गण होईल.

भाज्य कल्पाधिमास, ऋणक्षेप अधिमासशेष आणि कल्पसौरदिवस हार ह्यांपासून कुट्टकानें जो गुण येईल ते गतरविदिवस होतील.

भाज्य कल्पावम, ऋणक्षेप अवमशेष आणि कल्पचंद्रदिवस हार ह्या कुट्टकानें जो गुण ते गतचांद्रदिवस होतील.

उपपत्ति.

कल्पकुदिन = कु ; कल्पभगण = भ ; इष्टकुदिन = इ ; ग्रहभगण = भा ; ह्याप्रमाणें संज्ञांची कल्पना करून

कु : इ : : भ : भा इत्यादि

$$\therefore \frac{\text{भ} \times \text{इ}}{\text{कु}} = \text{भा} + \frac{\text{भा. शेष}}{\text{कु}} \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\frac{\text{भा. शेष} \times १२}{\text{कु}} = \text{रा} + \frac{\text{रा. शेष}}{\text{कु}} \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

$$\frac{\text{रा. शेष} \times ३०}{\text{कु}} = \text{अं} + \frac{\text{अं. शेष}}{\text{कु}} \ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

$$\frac{\text{अं. शेष} \times ६०}{\text{कु}} = \text{क} + \frac{\text{क. शेष}}{\text{कु}} \ldots\ldots\ldots\ldots (४)$$

$$\frac{\text{क. शेष} \times ६०}{\text{कु}} = \text{वि} + \frac{\text{वि. शेष}}{\text{कु}} \ldots\ldots\ldots\ldots (५)$$

समीकरण (५) पासून $\text{वि} = \frac{\text{क. शे.} \times ६० - \text{विकलाशेष}}{\text{कु}}$

समीकरण (४) पासून $क = \frac{\text{अंशशे.} \times ६० - \text{कलाशेष}}{\text{कु}}$

समीकरण (३) पासून $अ = \frac{\text{रा. शे.} \times ३० - \text{अंशशेष}}{\text{कु}}$

समीकरण (२) पासून $\text{रा.} = \frac{\text{भा. शे.} \times १२ - \text{राशिशेष}}{\text{कु}}$

समीकरण (१) पासून $\text{ग्रहभगण} = \frac{\text{भ.} \times \text{इ} - \text{भा. शेष}}{\text{कु}}$

$$\frac{\text{कल्परविदिन}}{\text{इष्टरविदिन}} = \frac{\text{कल्पाधिमास}}{\text{इष्टाधिमासादि}}$$

$$\therefore \frac{\text{कल्पाधिमास} \times \text{इष्टरविदिवस}}{\text{कल्परविदिन}} = \text{इष्टाधिमास} + \frac{\text{अधिमासशेष}}{\text{कल्परविदिन}}$$

$$\therefore \frac{\text{कल्पाधिमास} \times \text{इ. र. दि.} - \text{अधिशेष}}{\text{कल्परविदिन}} = \text{इष्टाधिमास}$$

याच पद्धतीनें.

$$\frac{\text{कल्पावम} \times \text{इ. चांद्र}}{\text{कल्प चांद्र}} = \text{अवम} + \frac{\text{अ. शे.}}{\text{क. चां.}}$$

$$\therefore \frac{\text{क. अ.} \times \text{इ. चां.} - \text{अ. शे.}}{\text{क. चां.}} = \text{अवम}$$

याप्रमाणें सर्व श्लोकाची उपपत्ति झाली.

श्लोक :—एकोहरश्चेद्गुणकौ विभिन्नौ तदा गुणैक्यं परिकल्प्य भाज्यं ॥ अग्रैक्यमग्रं कृत उक्तवद्यः संश्लिष्टसंज्ञः स्फुटकुट्टकोसौ ॥

अर्थ :—एक भाज्य असून गुणक भिन्न असल्यास गुणकांच्या बेरजेला भाज्य कल्पना करावी आणि भिन्न शेषांच्या बेरजेला ऋणक्षेप

कल्पना करावी. नंतर त्यापासून जो गुण येईल, त्यास संश्लिष्टसंज्ञक-स्फुट कुट्टक ह्मणतात.

उदाहरणं :—कः पंचनिघ्नो विहृत स्त्रिषष्ट्या सप्तावशेषोथ स एव राशिः ॥ दशाहतः स्यात् विहृत स्त्रिषष्ट्या चतुर्दशाग्रो वद राशिमेनं ॥

अर्थ :—ज्या राशीस ५ नीं गुणून, ६३ नीं भागिलें असतां ७ शिल्लक राहते व त्याच राशीस १० नी गुणून, ६३ नीं भागिलें असतां शिल्लक १४ राहते, तर तो राशि कोणता ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें गुणक ५ व १० हे आहेत. यांची बेरीज १५ झाली. ह्मणून १५ स भाज्यकल्पना करूं. व भिन्न शिल्लका ७ व १४ आहेत. ह्यांची बेरीज २१ ह्यास ऋणक्षेप कल्पना करून पूर्ववत् वल्ली वगैरे सर्व क्रिया करून लब्धि ३ व गुण १४ हा इष्टराशि झाला. हें उत्तर.

उपपत्ति.

$$\frac{५ क्ष}{६३} = य + \frac{७}{६३} \;;\; \frac{१० क्ष}{६३} = प + \frac{१४}{६३}$$

ह्या दोन समीकरणांची बेरीज करून

$$\frac{५ क्ष}{६३} + \frac{१० क्ष}{६३} = य + प + \frac{७}{६३} + \frac{१४}{६३}$$

$$\therefore \frac{५ क्ष + १० क्ष}{६३} = य + प + \frac{७ + १४}{६३}$$

$$\therefore \frac{१५ क्ष}{६३} - \frac{२१}{६३} = य + प$$

$$\therefore \frac{१९क्ष - २१}{६३} = य + प = म \quad \therefore \frac{१९क्ष - २१}{६३} = म$$

हें कुट्टकान्तर झालें. ह्यापासून क्ष ची जी किंमत येईल तोच इष्टराशी होईल, हें उघड आहे, ह्मणून श्लोकसिद्धि झाली.

याप्रमाणें कुट्टक-प्रकरणाचें सोपपत्तिक भाषांतर समाप्त झालें.

वर्गप्रकृति.

सूत्रं :--इष्टं ऱ्हस्वं तस्य वर्गः प्रकृत्या क्षुण्णो युक्तो वर्जितो वा स येन ॥ मूलं दद्यात् क्षेपकं तं धनर्णं मूलं तच्च ज्येष्ठमूलं वदंति ॥

अर्थ :— $अ.क्ष^२ \pm ब = य^२$

अशा समीकरणामध्यें क्ष या इष्ट संख्येस ऱ्हस्व किंवा कनिष्ठ असें ह्मणतात. ब यास क्षेपक, आणि अ यास प्रकृति व य यास ज्येष्ठमूळ असें ह्मणतात. या संज्ञांवरून वरील समीकरणाचें स्वरूप $प्र.ऱ्हे^२ \pm क्षे = ज्ये^२$ ह्याप्रमाणें होतें.

सूत्रं :-ऱ्हस्वज्येष्ठक्षेपकान्न्यस्य तेषां ता नन्यान्वाधो निवेश्य क्रमेण ॥ साध्यान्येभ्यो भावनाभिर्बहूनि मूलान्येषां भावना प्रोच्यते तः ॥ वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलघ्वो स्तदैक्यं ऱ्हस्वं लघ्वो राहतिश्च प्रकृत्या ॥ क्षुण्णा ज्येष्ठाभ्यासयुक् ज्येष्ठमूलं तत्राभ्यासः क्षेपयोः क्षेपकः स्यात् ॥

अर्थ :—$अ क्ष^२ \pm ब = य^२$

या समीकरणामध्यें क्ष आणि य यांच्या अनेक किंमती येतात, त्या काढण्याच्या रीति या प्रकरणामध्यें दिल्या आहेत.

प्रथमतः ऱ्हस्व, ज्येष्ठ आणि क्षेपक हे क्रमानें मांडावे. नंतर त्यांच्याखालीं तेच ऱ्हस्व, ज्येष्ठ, क्षेपक मांडावे किंवा अन्य मांडावे आणि त्या दोन पंक्तीपासून भावनेच्या सहाय्यानें नवीन ऱ्हस्व, ज्येष्ठ व क्षेपक तयार करितां येतात. ती भावना (पद्धति) अशी :— दोन पंक्तीमधील ज्येष्ठ आणि लघु यांचा वज्राभ्यास (तिर्यक् गुणन) करावा आणि जे दोन वज्राभ्यास येतील त्यांची बेरीज केली असतां नवीन ऱ्हस्व तयार होतें, आणि दोन्ही पंक्तींतील लघु व प्रकृति या तिघांच्या गुणाकारामध्यें उभय पंक्तींतील ज्येष्ठांचा गुणाकार मिळवावा म्हणजे नवीन ज्येष्ठ तयार होईल. आणि उभय पंक्तींतील क्षेपकांचा गुणाकार हा नवीन क्षेपक होईल.

उपपत्ति.

$$\text{अ क्ष}^2 \pm \text{ब} = \text{य}^2$$

$$\therefore \quad \pm \text{ब} = \text{य}^2 - \text{अ क्ष}^2$$

दोन्ही पक्षांचा वर्ग करून

$$\text{ब}^2 = \text{य}^4 - २\,\text{अ क्ष}^2\,\text{य}^2 + \text{अ}^2\,\text{क्ष}^4$$

दोन्ही पक्षांमध्यें ४ अ क्ष^2 य^2 मिळवून

$$\text{ब}^2 + ४\,\text{अ क्ष}^2\,\text{य}^2 = \text{य}^4 + २\,\text{अ क्ष}^2\,\text{य}^2 + \text{अ}^2\,\text{क्ष}^4$$

$$\therefore \text{ब}^2 + ४\,\text{अ क्ष}^2\,\text{य}^2 = (\text{य}^2 + \text{अ क्ष}^2)^2$$

$$\therefore \text{अ}\,(२\,\text{क्ष य})^2 + \text{ब} \times \text{ब} = (\text{य}^2 + \text{अ क्ष}^2)^2$$

$$\therefore \text{प्र}\,(\text{ऱ्ह. ज्ये.} + \text{ऱ्ह. ज्ये.})^2 + \text{क्षे. क्षे} = (\text{ज्ये. ज्ये.} + \text{प्र. ऱ्ह ऱ्ह.})^2$$

म्हणून ऱ्हस्व, ज्येष्ठ आणि क्षेपक यांच्याखालीं तेच ऱ्हस्व, ज्येष्ठ आणि क्षेपक मांडून वज्राभ्यास इत्यादि रीति उपपन्न झाली.

दुसऱ्या रीतीची उपपत्ति.

$$\text{अक्ष}^2 \pm \text{ब} = \text{य}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\text{अम}^2 \pm \text{क} = \text{न}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

या दोन समीकरणांपासून

$$\pm \text{ब} = \text{य}^2 - \text{अक्ष}^2$$

$$\pm \text{क} = \text{न}^2 - \text{अम}^2$$

या दोन्ही समीकरणांचा गुणाकार करून

$$\text{बक} = \text{य}^2\text{न}^2 - \text{अक्ष}^2\text{न}^2 - \text{अम}^2\text{य}^2 + \text{अ}^2\text{म}^2\text{क्ष}^2$$

$$\therefore \text{बक} + \text{अक्ष}^2\text{न}^2 + \text{अम}^2\text{य}^2 = \text{य}^2\text{न}^2 + \text{अ}^2\text{म}^2\text{क्ष}^2$$

उभय पक्षांत (२अक्षमयन) मिळवून

$$\text{बक} + (\text{क्षन} + \text{मय})^2 \times \text{अ} = (\text{यन} + \text{अमक्ष})^2$$

$$\therefore \text{क्षे.क्षे}'. + \text{प्र}(\text{ऱ्ह.ज्ये}'. + \text{ऱ्ह}'.\text{ज्ये},)^2 = (\text{ज्ये.ज्ये}'. + \text{प्र.ऱ्ह.ऱ्ह}'.)^2$$

म्हणून ऱ्हस्व, ज्येष्ठ आणि क्षेपक यांच्या खालीं अन्य ऱ्हस्व, ज्येष्ठ आणि क्षेपक मांडून वज्राभ्यास इत्यादि रीति निघाली.

सूत्रं :—ऱ्हस्वं वज्राभ्यासयोरंतरं वा लघ्वोर्घातो यः प्रकृत्या विनिघ्नः ॥ घातो यश्च ज्येष्ठयोस्तद्वियोगो ज्येष्ठं क्षेपोत्रापि च क्षेपघातः ॥

अर्थ :—पूर्वीं सांगितल्याप्रमाणें मांडलेल्या पंक्तिद्वयामध्यें वज्राभ्यासांचें अंतर केलें असतां ऱ्हस्व नवीन होते व लघुद्वयांच्या गुणाकारास प्रकृतीनें गुणून जी संख्या येईल ती व दोन्ही ज्येष्ठांचा गुणाकार करून जी संख्या येईल, तीं या दोन संख्यांचें अंतर केलें असतां नवीन ज्येष्ठ तयार होतें. व दोन्ही क्षेपांचा गुणाकार हा नवीन क्षेप होतो.

उपपत्ति.

$$अ क्ष^2 \pm ब = य^2 ;\quad अ म^2 \pm क = न^2$$

या दोन समीकरणांपासून

$$ब क = य^2 न^2 - अ क्ष^2 न^2 - अ म^2 य^2 + अ^2 म^2 क्ष^2$$

उभयपक्षांत (२ अ क्ष म य न) वजा करून

$$ब क + अ (क्ष न + म य)^2 = (य न + अ म क्ष)^2$$

$$\therefore क्षे . क्षे' + प्र . (ऱ्ह . ज्ये' . - ऱ्ह' . ज्ये .)^2 = (ज्ये . ज्ये' . - प्र . ऱ्ह . ऱ्ह' .)^2$$

ह्मणून इष्टरीति उत्पन्न झाली.

सूत्रं :— इष्टवर्गहृतः क्षेपः क्षेपः स्यादिष्टभाजिते ॥ मूले ते स्तोऽथवा क्षेपः क्षुण्णः क्षुण्णेथवा पदे ॥

अर्थ :—इष्टसंख्येच्या वर्गानें क्षेपास भागून नवीन क्षेपक तयार केला असता इष्टसंख्येनें ज्येष्ठांस भागिलें असतां नवीन ऱ्हस्व ज्येष्ठ तयार होतात.

उपपत्ति.

$$अ क्ष^2 + ब = य^2$$

$$\frac{अ क्ष^2}{न^2} + \frac{ब}{न^2} = \frac{य^2}{न^2}$$

$$\therefore अ \left(\frac{क्ष}{न} \right)^2 + \frac{ब}{न^2} = \left(\frac{य}{न} \right)^2$$

ह्मणून इष्टसिद्धि झाली.

आणि इष्टसंख्येच्या वर्गानें क्षेपास गुणून नवीन क्षेपक तयार केला तर इष्टसंख्येनें ऱ्हस्व ज्येष्ठांस गुणिलें असतां नवीन ऱ्हस्व ज्येष्ठ होतात.

उपपत्ति.

$$\text{अ}\,\text{क्ष}^2 + \text{ब} = \text{य}^2$$

या समीकरणाच्या दोन्ही पक्षांस न^2 या संख्येनें गुणून

$$\text{अ}\,\text{क्ष}^2\,\text{न}^2 + \text{ब}\,\text{न}^2 = \text{य}^2\,\text{न}^2$$

$$\therefore \text{अ}\,(\text{क्ष}\,\text{न})^2 + \text{ब}\,\text{न}^2 = (\text{य}\,\text{न})^2$$

ह्मणून इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रं :—इष्टवर्गप्रकृत्योर्यत् विवरं तेनवा भजेत् ॥ द्विघ्नमिष्टं कनिष्ठं तत्पदं स्यादेकसंयुतौ ॥ ततो ज्येष्ठमिहानन्त्यं भावनातस्तथेष्टतः ॥

अर्थ :—इष्टसंख्येचा वर्ग व प्रकृति यांच्या अंतरानें द्विगुणित इष्टास भागिलें असतां एक १ क्षेपकालीं ऱ्हस्व होतें व त्यांपासून ज्येष्ठ आणावें. व आलेल्या ऱ्हस्व, ज्येष्ठ क्षेपकांपासून भावनेच्या योगानें व इष्ट कल्पनेच्या योगानें अनंत ऱ्हस्व, ज्येष्ठ, क्षेपक येतील.

उपपत्ति.

$$\text{अ} = \text{प्रकृति};\ \text{व}\ \ \text{म} = \text{इष्ट धरून}$$

$$(\text{अ} + \text{म}^2)^2 = \text{अ}^2 + 2\,\text{अ}\,\text{म}^2 + \text{म}^4$$

$$\therefore \text{अ}^2 - 2\,\text{अ}\,\text{म}^2 + \text{म}^4 + 4\,\text{अ}\,\text{म}^2 = (\text{अ} + \text{म}^2)^2$$

$$\therefore (\text{अ} - \text{म}^2)^2 + 4\,\text{अ}\,\text{म}^2 = (\text{अ} + \text{म}^2)^2$$

उभय पक्षांस $(\text{अ} - \text{म}^2)^2$ यानें भागून

$$1 + \frac{4\,\text{अ}\,\text{म}^2}{(\text{अ} - \text{म}^2)^2} = \frac{(\text{अ} + \text{म}^2)^2}{(\text{अ} - \text{म}^2)^2}$$

$$\therefore \text{अ}\left(\frac{2\,\text{म}}{\text{अ} - \text{म}^2}\right)^2 = \left(\frac{\text{अ} + \text{म}^2}{\text{अ} - \text{म}^2}\right)^2$$

$$\therefore \text{प}\left(\frac{२\ \text{इष्ट}}{\text{प्र} - \text{इ}^{२}}\right)^{२} = (\text{ज्येष्ठ})^{२}$$

ह्मणून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरण :--को वर्गोष्टहतः सैकः कृतिः स्यात् गणकोच्यतां ॥ एकादशगुणः को वा वर्गः सैकः कृतिः सखे ॥

अर्थ :–अशी संख्या कोणती आहे ? कीं त्या संख्येच्या वर्गास ८ नीं गुणून १ मिळविला असतां वर्गराशि होतो.

दुसरें उदाहरणः—ज्या संख्येच्या वर्गास ११नीं गुणून एक मिळविला असतां वर्गराशि होतो, ती संख्या कोणती ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

इष्ट १ = ऱ्हस्व ; प्रकृति = ८ ; क्षेपक १ आणि ज्येष्ठ = ३.

ऱ्ह.	ज्ये.	क्षे.	
१	३	१	एक पंक्ती.
१	३	१	दुसरी पंक्ती.

या उभय पंक्तींतील ज्येष्ठ लघूंचा वज्राभ्यास करून त्यांची बेरीज १ × ३ + ३ × १ = ६ हें ऱ्हस्व झालें व ज्येष्ठांचा गुणाकार ३ × ३ = ९ यामध्यें लघूंच्या गुणाकाराची आठपट मिळविली तेव्हां १७ हें ज्येष्ठ झालें. याचप्रमाणें अन्य उत्तरें काढावींत.

∴ १. ६. ३५ इत्यादि उत्तरें.

व दुसऱ्या उदाहरणाचीं उत्तरें ३....इत्यादि समजावीं.

याप्रमाणें वर्गप्रकृतीचें भाषांतर संपलें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

चक्रवालाख्यवर्गप्रकृति.

सूत्रं :—ऱ्हस्वज्येष्ठपदक्षेपान् भाज्यप्रक्षेपभाजकान् ॥ कृत्वा कल्प्यो गुणस्तत्र यथा प्रकृतितश्च्युते ॥ गुणवर्गे प्रकृत्योने-थवाल्पं शेषकं तथा ॥ तत्तु क्षेपहृतं क्षेपो व्यस्तः प्रकृतितश्च्युते ॥ गुणलब्धिः पदं ऱ्हस्वं ततो ज्येष्ठ मतोऽसकृत् ॥ त्यक्त्वा पूर्वपद क्षेपांश्चक्रवालमिदं जगुः ॥ चतुर्ह्येकयुतावेव माभिन्ने भवतः पदे ॥ चतुर्द्विक्षेपमूलाभ्यां रूपक्षेपार्थभावना ॥

अर्थ :—ऱ्हस्व, ज्येष्ठ आणि क्षेपक यांस क्रमानें भाज्य, क्षेप व भाजक अशी कल्पना करून त्यांपासून कुट्टकाच्या रीतीनें गुण काढावा. तो अशा तऱ्हेचा असावा कीं, गुणाचा वर्ग प्रकृतीपासून वजा केला किंवा गुणवर्गामध्यें प्रकृति वजा केली तर अल्पशेष राहील.

नंतर त्या अल्प शेषास क्षेपानें भागिलें असतां नूतन क्षेपक तयार होतो. जर गुणवर्ग प्रकृतीपासून वजा करून अल्प शेष राहिलें असेल तर नूतन तयार झालेला क्षेपक विपरीत (धन असेल तर ऋण व ऋण असेल तर धन) असा समजावा. व कुट्टकानें जी लब्धि येईल तें नवीन ऱ्हस्व होईल. नंतर आलेल्या ऱ्हस्व क्षेपकांपासून नवीन ज्येष्ठ तयार करावें.

याच पद्धतीनें पूर्वीचें ऱ्हस्व, ज्येष्ठ आणि क्षेपक टाकून नवीन तयार केलेल्या ऱ्हस्व, ज्येष्ठ आणि क्षेपक यांपासून अन्य ऱ्हस्वादि उत्पन्न करावेत. यांस चक्रवाल असें ह्मणतात.

याप्रमाणें एक, दोन, चार इत्यादि कोणत्याहि क्षेपीं ऱ्हस्वादि अभिन्न (पूर्णांकात्मक) येतात.

दोन, चार इत्यादि क्षेपांपासून एक क्षेपावर जर आणावयाचें

असल्यास भावनेच्या सहाय्यानें किंवा अन्य रीतीनें ऱ्हस्वादिक आणावींत.

उपपत्ति.

प्रथमतः माहित असलेल्या कनिष्ठ, ज्येष्ठ, क्षेपकांपासून नवीन जें कनिष्ठ उत्पन्न होणार तें $\left(\frac{\text{क. इ} + \text{ज्ये}}{\text{क्षे}}\right)$ हें धरिलें. तेव्हां असें धरिल्यानें $\left(\frac{\text{क. इ} + \text{ज्ये}}{\text{क्षे}}\right)$ यास कुट्टकाचें स्वरूप आल्यामुळें ज्ञात जे कनिष्ठ, ज्येष्ठ, क्षेपक यांस क्रमानें भाज्य, क्षेपक व भाजक धरून यांपासून कुट्टक पद्धतीनें जो गुण येईल ती इ ची किंमत निघेल व लब्धि जी येईल तें नवीन कनिष्ठ होईल.

आतां या कनिष्ठापासून कोणता क्षेपक धरिला असतां ज्येष्ठ बरोबर निघेल तें पाहूं.

$$\text{प्र}\left(\frac{\text{क. इ} + \text{ज्ये}}{\text{क्षे}}\right)^2 = \frac{\text{प्र}\left(\text{क}^2\text{इ}^2 + \text{ज्ये}^2 + 2\,\text{कइज्ये}\right)}{\text{क्षे}^2}$$

$$= \frac{\text{प्रक}^2\text{इ}^2 + \text{प्रज्ये}^2 + 2\,\text{प्र. क. इ. ज्ये.}}{\text{क्षे}^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

आतां $\text{प्र. क}^2 + \text{क्षे} = \text{ज्ये}^2$

यांतील उभय पक्षांस (प्र) नें गुणून

$\text{प्र. ज्ये}^2 = \text{प्र}^2\text{क}^2 + \text{प्र.क्षे.}$

ही (प्र. ज्ये^2) ची किंमत (१) मध्यें ठेऊन

$$\text{प्र}\left(\frac{\text{क. इ} + \text{ज्ये}}{\text{क्षे}}\right)^2 = \frac{\text{प्रक}^2\text{इ}^2 + \text{प्र}^2\text{क}^2 + \text{प्रक्षे} + 2\,\text{प्रकइज्ये}}{\text{क्षे}^2}$$

आतां यामध्यें $\left(\frac{-प्र क^2 इ^2 - प्र क्षे + इ^2 ज्ये^2}{क्षे^2}\right)$

हा क्षेपक जर मिळविला तर

वर्गमूळ निघून ज्येष्ठ $\left(\frac{प्र.\ क + इ\ ज्ये}{क्षे}\right)$ असें येतें. कारितां

$$नूतन\ क्षेपक = \frac{-प्र क^2 इ^2 - प्र क्षे + इ^2 ज्ये^2}{क्षे^2}$$

$$= \frac{इ^2 (ज्ये^2 - प्र क^2) - प्र क्षे}{क्षे^2}$$

यांत $प्र क^2 + क्षे = ज्ये^2 \therefore क्षे = ज्ये^2 - प्र क^2$

हीं किंमत ठेऊन

$$नूतन\ क्षेपक = \frac{इ^2 क्षे - प्र क्षे}{क्षे^2} = \frac{इ^2 - प्र}{क्षे}$$

$$\therefore प्र \left(\frac{क.\ इ + ज्ये}{क्षे}\right)^2 + \frac{इ^2 - प्र}{क्षे} = \left(\frac{प्र क + इ\ ज्ये}{क्षे}\right)^2$$

म्हणून सर्व इष्टसिद्धि झाली.

दुसऱ्या तऱ्हेनें उपपत्ति.

	क.	ज्ये.	क्षे.
प्रथम पंक्ति.	१	इ	$इ^2 - प्र$
द्वितीय पंक्ति.	क	ज्ये	क्षे

या पंक्तिद्वयांतील ज्येष्ठ, कनिष्ठांचा वज्राभ्यास वगैरे पूर्वी सांगितल्या-
प्रमाणें करून

नवीन ऱ्हस्व = क. इ + ज्ये

,, ज्येष्ठ = प्र क + इ ज्ये.

,, क्षेपक = $इ^{२}$ क्षे –. प्र. क्षे.

आतां या नवीन आलेल्या क्षेपास क्षे या संख्येच्या वर्गानें जर भागिलें तर ऱ्हस्व, ज्येष्ठांस क्षे या संख्येनें भागिलें पाहिजे.

$$\therefore \text{ नवीन ऱ्हस्व} = \frac{\text{क इ + ज्ये.}}{\text{क्षे}}$$

$$,,\ \text{ज्येष्ठ} = \frac{\text{प्र क + इ ज्ये.}}{\text{क्षे}}$$

$$,,\ \text{क्षेप} = \frac{\text{इ}^{२} - \text{प्र}}{\text{क्षे}}$$

$$\therefore \text{प्र}\left(\frac{\text{क इ + ज्ये.}}{\text{क्षे}}\right)^{२} + \frac{\text{इ}^{२} - \text{प्र}}{\text{क्षे}} = \left(\frac{\text{प्र क + इ ज्ये}}{\text{क्षे}}\right)^{२}$$

ह्मणून दिलेली रीति उपपन्न झाली.

उदाहरणं :—का सप्तषष्टिगुणिता कृतिरेकयुक्ता का चैकषष्टिनिहता च सखे सरूपा ॥ स्यान्मूलदा यदि कृतिप्रकृतिर्नितांतं त्वच्चेतसि प्रवद तात ततालतावत् ॥

अर्थ :—ज्या संख्येच्या वर्गास ६७ या संख्येनें गुणून एक मिळविला तर तो वर्गराशि होतो, तर ती संख्या कोणती ? आणि ज्या संख्येच्या वर्गास ६१ या संख्येनें गुणून एक मिळविला तर तो वर्गराशि होतो, तर ती संख्या कोणती ?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

पहिल्या उदाहरणीं क. १ ज्येष्ठ ८, क्षे. (–३) ह्या कल्पित ऱ्हस्वादिकापासून कुट्टकानें लब्धि – ९ व गुण ७ आहे, ह्मणून ९

हे नवीन ऱ्हस्व व यांपासून क्षेपक ६ व ज्येष्ठ ४१ ह्या आलेल्या ऱ्हस्वादिपासून पुनः कुट्टकानें लब्धिगुण ११।९ ह्मणून नूतन ऱ्हस्व ११, ज्येष्ठ ९० व क्षेपक (–७) तयार झाले. यांपासून पुनः कुट्टकादि करून नूतन ऱ्हस्व –२७, ज्येष्ठ २२१ व क्षेपक –२ तयार झाले. यांपासून वज्राभ्यासादि क्रिया करून ऱ्हस्व ११९३४, ज्येष्ठ ९७६८४ व क्षेपक ४ तयार झाले. आतां इष्ट २ याच्या वर्गानें क्षेपास भागून व ऱ्हस्व, ज्येष्ठांस २ नें भागून ऱ्हस्व ५९६७, ज्येष्ठ ४८८४२ व क्षेपक १ हें उत्तर.

दुसऱ्या उदाहरणामध्यें क. १, ज्ये. ८ व क्षे. ३ या कल्पित ऱ्हस्वादिकांपासून कुट्टकादि क्रिया करून क. ५, ज्ये. ३९ व क्षे. –४ हे तयार झाले. आतां २ इष्टसंख्येच्या वर्गानें क्षेपास भागून व २ नें ऱ्हस्व ज्येष्ठास भागून क. $\frac{५}{२}$, ज्ये. $\frac{३९}{२}$ क्षे. (–१) तयार झाले. यांपासून वज्राभ्यासादि क्रिया करून क. $\frac{१९५}{२}$, ज्ये. $\frac{१५२३}{२}$ व क्षे. १ हें उत्तर.

सूत्रं :—रूपशुद्धौ खिलोदिष्टं वर्गयोगो गुणो न चेत् ॥ अखिले कृतिमूलाभ्यां द्विधारूपं विभाजितं ॥ द्विधा ऱ्हस्वपदं ज्येष्ठं ततो रूपविशोधने ॥ पूर्ववत् वा प्रसाध्येते पदे रूपविशोधने ॥

अर्थ :—ज्या उदाहरणामध्यें ऋणक्षेप १ आहे, त्यांतील प्रकृति ही दोन वर्गराशींची बेरीज नसेल तर तें उदाहरण खोटें आहे, असें समजावें. आणि उदाहरण खरें आहे असें झाल्यास त्यांतील ऱ्हस्व काढणें तें असें :—

प्रकृतीमध्यें जे दोन वर्गराशी असतील त्यांचीं मूळें काढून त्या दोन मूळांनीं १ या संख्येस भागिलें असतां पृथक् दोन ऱ्हस्वें येतील व त्यांपासून ज्येष्ठ निघतील. अथवा अशा उदाहरणीं पूर्वी सांगितल्या पद्धतीनें ऱ्हस्वादि आणावें.

उपपत्ति.

$$प्र क्ष^2 - १ = य^2 \quad \therefore \quad प्र क्ष^2 = य^2 + १$$

$$\therefore प्र = \frac{य^2 + १}{क्ष^2} \quad \therefore \quad प्र = \frac{य^2}{क्ष^2} + \frac{१}{क्ष^2}$$

$$\therefore प्र = \left(\frac{य}{क्ष}\right)^2 + \left(\frac{१}{क्ष}\right)^2$$

ह्मणून ऋण १ क्षेप असतां प्रकृति ही दोन वर्गराशींच्या बेरजेबरोबर असते, हें सिद्ध झालें.

$$प्र \left(\frac{१}{\frac{य}{क्ष}}\right)^2 - १ = प्र \left(\frac{क्ष}{य}\right)^2 - १ = \frac{प्र क्ष^2 - य^2}{य^2}$$

यांत पूर्वी सिद्ध केलेली $प्र = \left(\frac{य}{क्ष}\right)^2 + \left(\frac{१}{क्ष}\right)^2$ ही किंमत ठेऊन

$$प्र \left(\frac{१}{\frac{य}{क्ष}}\right)^2 - १ = \frac{क्ष^2 \left\{\left(\frac{य}{क्ष}\right)^2 + \left(\frac{१}{क्ष}\right)^2\right\} - य^2}{य^2}$$

$$= \frac{य^2 + १ - य^2}{य^2} = \frac{१}{य^2}$$

$$\therefore प्र \left(\frac{१}{\frac{य}{क्ष}}\right)^2 - १ = \left(\frac{१}{य}\right)^2$$

ह्मणून दिलेली रीति सिद्ध झाली.

उदाहरणं :—त्रयोदशगुणो वर्गो निरेकः कः कृतिर्भवेत् ॥ कोवाष्टगुणितो वर्गो निरेको मूलदो भवेत् ॥

अर्थ :—ज्या संख्येच्या वर्गास १३ नीं गुणून १ वजा केला तर तो वर्गराशि असतो, तेन्हां ती संख्या सांग? व ज्या संख्येच्या

वर्गास ८ नीं गुणून १ वजा केला असतां वर्गराशि होतो, तर ती संख्या कोणती ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

पहिल्या उदाहरणामध्यें प्रकृति १३ ही ४ व ९ या वर्गराशींची बेरीज आहे, ह्मणून यांच्या मूळांनीं १ या संख्येस भागिलें तेव्हां $\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{3}$ हीं ऱ्हस्वें झालीं. यांपासून ज्येष्ठ $\frac{3}{2}$ व $\frac{3}{2}$ हें उत्तर.

दुसऱ्या उदाहरणीं ८ प्रकृती ही ४ व ४ या वर्गराशींची बेरीज आहे, ह्मणून यांपासून पूर्वरीतीनें ऱ्हस्व $\frac{1}{2}$ व ज्येष्ठ १ आलें. हें उत्तर.

उदाहरणं :-को वर्गः षड्गुणस्त्र्याढ्यो द्वादशाढ्योथवा कृतिः॥ युतो वा पंचसप्तत्या त्रिसप्तत्या वा कृतिर्भवेत् ॥

अर्थ :—ज्या संख्येच्या वर्गास ६ नीं गुणून ३ किंवा १२ किंवा ७९ अथवा ३०० मिळविलें असतां वर्गराशि होतो, तर त्या संख्या कोणत्या ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क. १, ज्ये. ३ व क्षे. ३ यांपासून **क्षुण्णः क्षुण्णे तदा पदे** या सूत्रानें इष्ट २ धरून क. २, ज्ये. ६ व क्षे. १२ आले. इष्ट ५ धरून क. ९, ज्ये. १९ व क्षे. ७५ आले व इष्ट १० धरून क. १०, ज्ये. ३० व क्षे. ३०० हीं उत्तरें.

सूत्रं :-स्वबुद्ध्यैव पदे ज्ञेये बहुक्षेपविशोधने॥ तयोर्भावनयाऽनत्यं रूपक्षेप पदात्तथा॥ वर्गच्छिन्ने गुणे ऱ्हस्वं तत्पदेन विभाजयेत्॥

अर्थ :—कोणत्याही धन, ऋण-क्षेपोदाहरणीं प्रथमतः स्वबुद्धीनें ऱ्हस्व, ज्येष्ठ साधून अन्य रूप क्षेपापासून उत्पन्न झालेल्या ऱ्हस्वादिकांशीं भावनेच्या साधनानें अनेक उत्तरें येतील.

ज्या उदाहरणीं प्रकृतीस एखाद्या संख्येच्या वर्गानें भागून भागाकार जो येईल तीच प्रकृति मानून ऱ्हस्व, ज्येष्ठ साधिलें असतां आलेल्या ऱ्हस्वास, ज्या संख्येच्या वर्गानें पूर्वी प्रकृतीस भागिलें आहे त्या वर्गराशीच्या मूळानें भागावें, म्हणजे इष्ट ऱ्हस्व होते व ज्येष्ठ आलेले तेंच कायम समजावें.

उपपत्ति.

$$\text{या}^2 \cdot \text{का} = \text{प्रकृति} \quad \text{धरून} \quad (\text{या}^2 \cdot \text{का})\,\text{क}^2 + 1 = \text{ज्ये}^2.$$

$$\therefore \left(\frac{\text{या}^2\,\text{का}}{\text{या}^2}\right)\text{क}^2\,\text{या}^2 + 1 = \text{ज्ये}^2$$

यांत $\text{क}^2 \cdot \text{या}^2 = \text{क}'^2$ धरून $\text{का} \cdot \text{क}'^2 = \text{ज्ये}^2 - 1$. यावरून जें ऱ्हस्व येईल तें (क') ची किंमत येईल. यांपासून (क) ची किंमत काढणें झाल्यास

$$\text{क}^2 \cdot \text{या}^2 = \text{क}'^2 \quad \therefore \quad \text{क} \cdot \text{या} = \text{क}' \quad \therefore \text{क} = \frac{\text{क}'}{\text{या}}$$

∴ इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणं :—द्वात्रिंशद्गुणितो वर्गः कः सैको मूलदो वद ॥

अर्थ :—ज्या संख्येच्या वर्गास ३२ नीं गुणून १ मिळविला तर मूळ निघतें, अशी संख्या सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या उदाहरणीं प्रकृति ३२ आहे. तिला १६ या वर्गसंख्येनें भागून लब्धि २ आली. ही प्रकृति मानून ऱ्ह. २, ज्ये. ३ व क्षेप १ आहे. आतां ३२ या प्रकृतीचे ऱ्हस्व आणण्याकरितां वर्गसंख्या १६ याचें मूळ ४, ह्या संख्येनें आलेल्या ऱ्हस्वास भागून इष्ट ऱ्हस्व $\frac{1}{2}$, ज्ये. ३ व क्षे १ हें उत्तर.

सूत्रं :—इष्टभक्तो द्विधाक्षेपः इष्टोनाढ्यो दलीकृतः ॥ गुणमूल हृतश्चाद्यो ऱ्हस्वज्येष्ठे क्रमात् पदे ॥

अर्थ :—ज्या उदाहरणामध्यें वर्गराशिरूपात्मक प्रकृति असेल, त्यांतील क्षेपास इष्ट संख्येनें भागून भागाकार दोन ठिकाणीं मांडावा. त्यांतील एका ठिकाणीं इष्ट संख्या वजा करावी व दुसऱ्या ठिकाणीं मिळवावी. नंतर त्या उभयतांचें अर्ध करावें, आणि प्रथमास प्रकृतीच्या मूळानें भागिलें असतां क्रमानें ऱ्हस्व, ज्येष्ठ पदें तयार होतात.

उपपत्ति.

$$\text{का}^2\cdot\text{क्ष}^2+\text{क्षे}=\text{य}^2$$

$$\therefore\ \text{क्षे}=\text{य}^2-\text{का}^2\text{क्ष}^2$$

$$=\text{य}^2-(\text{काक्ष})^2$$

$$=(\text{य}+\text{काक्ष})(\text{य}-\text{काक्ष})$$

आतां $\text{य}-\text{काक्ष}=\text{इष्ट}$ धरून

$$\text{क्षे}=(\text{य}+\text{काक्ष})\,\text{इ}.$$

$$\therefore\ \text{य}+\text{काक्ष}=\frac{\text{क्षे}}{\text{इ}}\quad\therefore\ 2\,\text{य}=\frac{\text{क्षे}}{\text{इ}}+\text{इ}$$

$$\therefore\ \text{य}=\frac{\frac{\text{क्षे}}{\text{इ}}+\text{इ}}{2}=\text{ज्येष्ठ}$$

आणि $2\,\text{काक्ष}=\frac{\text{क्षे}}{\text{इ}}-\text{इ}$

$$\therefore\ \text{क्ष}=\frac{\frac{\text{क्षे}}{\text{इ}}-\text{इ}}{2\,\text{का}}=\text{ऱ्हस्व}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणं :—का कृतिर्नवभिः क्षुण्णा द्विपंचाशद्युता कृतिः ॥ को वा चतुर्गुणो वर्ग स्त्रयस्त्रिंशद्युतः कृतिः ॥

अर्थ :—ज्या संख्येच्या वर्गास ९नीं गुणून ५२ मिळविलें असतां वर्गराशि होतो, तर ती संख्या काय?

ज्या संख्येच्या वर्गास ४ नीं गुणून ३३ मिळविले असतां वर्गराशि होतो, तर ती संख्या कोणती?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

पहिल्या उदाहरणीं इष्ट २ धरून

$$\text{ऱ्हस्व} = \frac{\frac{\text{क्षे}}{\text{इ}} - \text{इ}}{२ - \text{का}}$$ यांत इष्टाची किंमत ठेऊन

$$\text{ऱ्हस्व} = \frac{\frac{५२}{२} - २}{२ - \sqrt{९}} = \frac{२४}{६}$$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore \text{ऱ्हस्व} = ४ \\ \therefore \text{ज्येष्ठ} = १४ \end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

दुसऱ्या उदाहरणीं इष्ट १ धरून

$$\left.\begin{array}{l} \text{ऱ्हस्व} = ८ \\ \text{ज्येष्ठ} = १७ \end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

उदाहरणं :—त्रयोदशगुणो वर्गस्त्रयोदशविवर्जितः ॥ त्रयोदशयुतो वा स्यात् वर्ग एव निगद्यताम् ॥

अर्थ :—ज्या संख्येच्या वर्गास १३ नीं गुणून १३ वजा केले किंवा मिळविले असतां वर्गराशि होतो, तर ती संख्या कोणती हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क. १ ज्ये. ० क्षे. (− १३)

क. $\frac{३}{२}$ ज्ये. $\frac{११}{२}$ क्षे. १

यांची वज्राभ्यासादि क्रिया करून

क. $\frac{११}{२}$ ज्ये. $\frac{३९}{२}$ क्षे. (− १३) हें उत्तर.

आतां दुसऱ्या उदाहरणीं

क. $\frac{११}{२}$ ज्ये. $\frac{३९}{२}$ क्षे. (− १३)

क. $\frac{१}{२}$ ज्ये. $\frac{३}{२}$ क्षे. (− १)

यांची वज्राभ्यासादि क्रिया करून

क. $\frac{३}{२}$ ज्ये. $\frac{१३}{२}$ क्षे. १३ हें उत्तर.

उदाहरणं :—ऋणगैः पंचभिः क्षुण्णः को वर्गः सैकविंशतिः ॥ वर्गःस्याद्वद चेद्वेत्सि क्षयगप्रकृतौ विधिं ॥

ज्या संख्येच्या वर्गास (− ५) या संख्येनें गुणून २१ मिळविले असतां वर्गराशी होतो, तर ती संख्या काय?

क. १, ज्ये. ४, क्षे. २१ हें उत्तर.

श्लोक :—उक्तं बीजोपयोगीदं संक्षिप्तं गणितं किल ॥ अतो बीजं प्रवक्ष्यामि गणकानंदकारकं ॥

अर्थ :—याप्रमाणें बीजगणितास उपयुक्त असें संक्षिप्त गणित सांगितलें. आतां यापुढें गणकाला आनंदकारक असें बीजगणित सांगूं.

याप्रमाणें चक्रवालाचें भाषांतर संपलें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

॥ श्रीगणेशायनमः ॥

एकवर्ण समीकरण प्रकरण.

श्लोक :—यावत्तावत् कल्प्यमव्यक्तराशेर्मानं तस्मिन् कुर्वतो द्दिष्टमेव ॥ तुल्यौ पक्षौ साधनीयौ प्रयत्नात् त्यक्त्वा क्षिप्त्वा वापि संगुण्य भक्त्वा ॥ एकाव्यक्तं शोधये दन्यपक्षाद्रूपाण्य न्यस्येतरस्माच्च पक्षात् ॥ शेषाव्यक्तेनोद्धरे द्रूपशेषं व्यक्तं मानं जायतेऽव्यक्तराशेः ॥ अव्यक्तानां द्व्यादिकानामपीह यावत्तावद्व्यादिनिघ्नं हृतं वा ॥ युक्तोनं वा कल्पयेदात्मबुद्ध्या मानं क्वापि व्यक्तमेवं विदित्वा ॥

अर्थ :—प्रथम पृच्छकानें विचारलेल्या उदाहरणामध्यें जो अव्यक्त राशि असेल, त्याचें मान यावत्तावत् (क्ष इत्यादि वर्णांपैकीं एखादा वर्ण) आहे असें कल्पावें. नंतर त्याला उद्देशून उदाहरणामध्यें सांगितलेली गुणनभजनादि सर्व क्रिया करून हरप्रयत्नानें दोन समानपक्ष (पटे) तयार करावे. दोन्ही पक्ष्यांतील राशींचे छेद नाहींतसे करणें इत्यादि क्रियासौलभ्यास्तव कोणत्याही इष्ट संख्येनें उभयपक्षांस गुणिलें किंवा भागिलें, अथवा इष्ट संख्या उभयपक्षांत मिळविली किंवा वजा केली असतां पक्षसमताभंग होत नाहीं, असें समजावें. याप्रमाणें तयार केलेल्या दोन पक्षांपैकीं एका पक्षांतील अव्यक्त संख्या दुसऱ्या पक्षांतून शोधावी (वजा करावी) व दुसऱ्या पक्षांतील रूपें (व्यक्त संख्या) पहिल्या पक्षांतून वजा करावी; नंतर अव्यक्त शेषानें ह्मणजे अव्यक्ताच्या गुणकानें रूपशेषांस भागिलें असतां अव्यक्त राशीचें व्यक्तमान निघतें. जर एखाद्या उदाहरणामध्यें दोन तीन अव्यक्त राशि असतील, तर त्यांपैकीं एक अव्यक्त राशि क्ष आहे अशी कल्पना करून इतर अव्यक्तांचीं मानें, क्ष ला दोन

इत्यादि एखाद्या व्यक्त संख्येनें गुणून, भागून किंवा एखादी व्यक्त संख्या मिळवून अथवा वजा करून स्वबुद्धीनें कल्पावी.

श्लोकः—एकस्य रूपत्रिशती षडश्वा अश्वा दशान्यस्यतु तुल्यमौल्याः ॥ ऋणं तथा रूपशतं च यस्य तौ तुल्यवित्तौ च किमश्व मूल्यं ॥

अर्थः—एका मनुष्याजवळ ३०० रुपये व ६ अश्व आहेत. आणि दुसऱ्याजवळ १० अश्व आहेत व त्याला १०० रुपये ऋण आहे, व दोघांपाशीं असलेल्या अश्वांपैकीं प्रत्येक अश्वाची किंमत एकच आहे, आणि ते दोघे समधन आहेत, तर अश्वमूल्य काय?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

प्रथम क्ष = अश्वमूल्य कल्पिलें.

∴ ६ क्ष + ३०० = एका मनुष्याचें धन.

व १० × क्ष − १०० = दुसऱ्याचें धन झालें.

आतां दोघांचें धन सम आहे, असें उदाहरणामध्यें सांगितलें आहे म्हणून

$$६ क्ष + ३०० = १० क्ष − १००$$

समशोधन करून

$$४ क्ष = ४०० \quad ∴ क्ष = १०० \quad \text{हें उत्तर.}$$

श्लोकः—यदाद्यवित्तस्य दलं द्वियुक्तं तत्तुल्यवित्तो यदि वा द्वितीयः ॥ आद्यो धनेन त्रिगुणोऽन्यतो वा पृथक् पृथक् मे वद वाजिमौल्यं ॥

अर्थः—एका मनुष्यापाशीं ६ अश्व व ३०० रुपये आहेत, व दुसऱ्याजवळ १० अश्व असून त्याला १०० रुपये ऋण आहे. त्यांतील पहिल्याच्या धनाच्या अर्धांत २ मिळविले असतां जें धन येईल, तें दुसऱ्याजवळ असलेल्या धनाशीं सम होत आहे; किंवा

दुसऱ्या जवळच्या धनाची तिप्पट ही पहिल्याच्या धनाशीं सम होत आहे, तर अश्वमूल्य काय ?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

प्रथमतः $\quad \text{क्ष} = \text{अश्वमूल्य धरिलें}$

$\therefore\ ६\,\text{क्ष} + ३०० = \text{एकाचें धन.}$

व $१०\,\text{क्ष} - १०० = \text{दुसऱ्याचें धन झालें.}$

आतां उदाहरणांत सांगितल्यावरून

$$\frac{६\,\text{क्ष} + ३००}{२} + २ = १०\,\text{क्ष} - १००$$

$$\therefore\ ३\,\text{क्ष} + १५० + २ = १०\,\text{क्ष} - १००$$

समशोधन करून $\quad ७\,\text{क्ष} = २५२$

$$\therefore\quad \text{क्ष} = ३६ \text{ हें उत्तर.}$$

द्वितीयप्रश्नोत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$\text{क्ष} = \text{अश्वमूल्य धरिलें}$

$\therefore\ ६\,\text{क्ष} + ३०० = \text{एकाचें धन.}$

व $१०\,\text{क्ष} - १०० = \text{दुसऱ्याचें धन झालें.}$

आतां उदाहरणांत सांगितल्यावरून

$$६\,\text{क्ष} + ३०० = ३\,(१०\,\text{क्ष} - १००)$$

$$\therefore\ \text{क्ष} = २५ \quad \text{हें उत्तर.}$$

श्लोक :—माणिक्यामलनीलमौक्तिकमितिः पंचाष्ट सप्तक्रमादेकस्याऽन्यतरस्य सप्त नव षट् तद्रत्नसंख्या सखे ॥ रूपाणां नवति र्द्विषष्टिरनयोस्तौ तुल्यवित्तौ तथा बीजज्ञ प्रतिरत्नजानि सुमते मौल्यानि शीघ्रं वद ॥

अर्थ :—एका मनुष्याजवळ ५ माणिक्य, ८ नील, ७ मौक्तिक व ९० रुपये आहेत; व दुसऱ्याजवळ ७ माणिक्य, ९ नील,

६ मौक्तिक व ६२ रुपये आहेत, आणि ते दोघे समधन आहेत, तर प्रत्येक रत्नाची किंमत काय?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

३ क्ष = एका माणिक्याची किंमत,

२ क्ष = एका नीळाची किंमत,

व क्ष = एका मौक्तिकाची किंमत.

याप्रमाणें कल्पना करून

१५ क्ष = पांच माणिक्यांची किंमत,

१६ क्ष = आठ नीलांची किंमत,

व ७ क्ष = सात मौक्तिकांची किंमत झाली.

∴ १५ क्ष + १६ क्ष + ७ क्ष + ९० = एकाचें धन.

आणि २१ क्ष = सात माणिक्यांची किंमत,

१८ क्ष = नऊ नीलांची किंमत,

व ६ क्ष = सहा मौक्तिकांची किंमत.

∴ २१ क्ष + १८ क्ष + ६ क्ष + ६२ = दुसऱ्याचें धन.

आतां उदाहरणांत सांगितल्यावरून

१५ क्ष + १६ क्ष + ७ क्ष + ९० = २१ क्ष + १८ क्ष + ६ क्ष + ६२

समशोधन करून ७ क्ष = २८ ∴ क्ष = ४

∴ ३ क्ष = १२ ही एका माणिक्याची किंमत.
२ क्ष = ८ ही एका नीलाची किंमत. } हें उत्तर.
क्ष = ४ ही एका मौक्तिकाची किंमत.

अथवा क्ष = एका माणिक्याची किंमत;

$\frac{५}{१०}$ = एका नीळाची किंमत;

३ = एका मौक्तिकाची किंमत.

याप्रमाणें कल्पना करून पूर्ववत् सर्व क्रिया केली असतां

क्ष = १३ येतात.

∴ १३ = माणिक्यमौल्य, ९ = नीलमौल्य, ३ = मौक्तिकमौल्य. } हें उत्तर.

याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक :—एको ब्रवीति मम देहि शतं धनेन त्वत्तो भवामि हि सखे द्विगुणस्ततोऽन्यः ॥ ब्रूते दशार्पयसि चेन्मम षड्गुणोऽहं त्वत्तस्तयोर्वद धने मम किं प्रमाणे ॥

अर्थ :—एक मनुष्य दुसऱ्यास ह्मणतो कीं, तुझ्याजवळ जें धन आहे, त्यांतील १०० रुपये मला दिलेस तर मी तुझ्या दुप्पट होईन, व दुसरा पहिल्यास म्हणतो कीं, तूं जर मला १० रुपये देशील तर मी तुझ्या सहापट होईन, तर प्रत्येकाचें धन काय?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

२ क्ष − १०० = एकाचें धन,

व क्ष + १०० = दुसऱ्याचें धन.

याप्रमाणें उदाहरणांतील एक आलाप (अट) जुळेल अशीं दोघांचीं धनें कल्पिलीं.

आतां दुसऱ्या आलापावरून

क्ष + १०० + १० = ६ (२ क्ष − १०० − १०)

∴ क्ष + ११० = १२ क्ष − ६६०

समशोधन करून ११ क्ष = ७७० ∴ क्ष = ७०

ही किंमत आरंभीं धरलेल्या प्रत्येकाच्या धनामध्यें ठेऊन

$$\left.\begin{array}{r} \text{४०} = \text{एकाचें धन} \\ \text{व}\ \ \text{१७०} = \text{दुसऱ्याचें धन.} \end{array}\right\}\ \text{हें उत्तर.}$$

आतां हेंच उदाहरण प्रश्नांतील दुसरा आलाप जुळेल अशीं धनें कल्पून सोडवूं.

क्ष + १० = एकाचें धन

व ६ क्ष – १० = दुसऱ्याचें धन कल्पून

पहिल्या आलापावरून

क्ष + १० + १०० = २ (६ क्ष – १० – १००)

∴ क्ष + ११० = १२ क्ष – २२०

समशोधन करून ११क्ष = ३३० ∴ क्ष = ३०

ही किंमत आरंभीं धरलेल्या धनामध्यें ठेऊन

$$\left.\begin{array}{r} \text{४०} = \text{एकाचें धन} \\ \text{१७०} = \text{दुसऱ्याचें धन} \end{array}\right\}\ \text{हें उत्तर.}$$

श्लोक :--माणिक्याष्टकमिंद्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतं । यत्ते कर्णविभूषणे समधनं क्रीतं त्वदर्थे मया ॥ तद्रत्नत्रयमौल्य-संयुतिमिति स्त्र्यूनं शतार्धं प्रिये । मूल्यं ब्रूहि पृथक् यदीह गणिते कल्पाऽसि कल्याणिनि ॥

अर्थ :—एक गृहस्थ आपल्या प्रियेस ह्मणतो, कीं मी तुझ्या कर्णविभूषणाकरितां ८ माणिक्यें, १० नील व १०० मुक्ताफलें अशीं विकत घेतलीं आहेत. त्यांमध्यें ८ माणिक्यांची जी किंमत आहे तितकीच १० नीलांची आहे व तितकीच १०० मुक्ताफलांची किंमत आहे व एक माणिक्य, एक नील व एक मुक्ताफल या तीन रत्नांची किंमत ४७ रुपये आहे, तर एकेक रत्नाची किंमत काय आहे ती सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क्ष = आठ माणिक्यांची किंमत धरून

$\frac{क्ष}{८}$ = एका माणिक्याची किंमत.

$\frac{क्ष}{१०}$ = एका नीलाची किंमत;

व $\frac{क्ष}{१००}$ = एका मुक्ताफळाची किंमत झाली.

आतां उदाहरणामध्यें सांगितल्यावरून

$$\frac{क्ष}{८}+\frac{क्ष}{१०}+\frac{क्ष}{१००}=४७$$

समच्छेद करून $\frac{२५ क्ष + २० क्ष + २ क्ष}{२००} = ४७$

उभय पक्षांस २०० नीं गुणून

२५ क्ष + २० क्ष + २ क्ष = ९४००

∴ क्ष = २००.

$$\left.\begin{array}{ll} ∴ & \text{एका माणिक्याची किंमत २५} \\ & \text{एका नीलाची किंमत २०} \\ \text{व} & \text{एका मुक्ताफलाची किंमत २} \end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

श्लोक :—पंचांशोऽलिकुलात्कदंबमगमत्त्र्यंशः शिलींध्रं तयोर्विश्लेष स्त्रिगुणो मृगाक्षि कुटजं दोलायमानोऽपरः ॥ कांते केतकिमालतीपरिमलप्राप्तैककालप्रियादूताहूत इतस्ततो भ्रमति खे भृंगोलिसंख्यां वद ॥

अर्थ :—एक भ्रमरसमुदाय होता. त्यांतून त्याचा एकपंचमांश कदंब-पुष्पावर गेला, एक तृतीयांश शिलींध्र-पुष्पावर गेला,

आणि कदंब-पुष्पावर गेलेली भ्रमरसंख्या व शिलींध्र पुष्पावर गेलेली भ्रमरसंख्या यांच्या अंतराच्या तिप्पट इतके भ्रमर कुटज-पुष्पावर गेले. आणि केतक–पुष्प व मालती–पुष्प यांचे जे परिमल हेंच कोणी एक युगवत् प्राप्त झालेले दोन प्रियादूत यांनीं बोलावलेला एक भ्रमर दोलायमान होत्साता आकाशामध्यें इकडे तिकडे फिरत आहे, तर त्या भ्रमर–समुदायामध्यें भ्रमर किती आहेत तें सांग?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

क्ष = भ्रमरसंख्या धरून

$\frac{क्ष}{५}$ = कदंबगत भ्रमरसंख्या;

$\frac{क्ष}{३}$ = शिलींध्रगत भ्रमरसंख्या;

व $३\left(\frac{क्ष}{३}-\frac{क्ष}{५}\right)$ = कुटजगत भ्रमरसंख्या.

$$\therefore \frac{क्ष}{५}+\frac{क्ष}{३}+३\left(\frac{क्ष}{३}-\frac{क्ष}{५}\right)+१=क्ष$$

$\therefore$ क्ष = १५ हें उत्तर.

श्लोक :-पंचकशतदत्तधनात् फलस्य वर्गं विशोध्य परिशिष्टं ॥ दत्तं दशकशतेन तुल्यः कालः फलं च तयोः ॥

अर्थ :—दरमहा दर शेंकडा ५ रुपये व्याजाप्रमाणें कांहीं द्रव्य दिलें; त्याचें कांहीं दिवसांनीं जें व्याज आलें त्याचा वर्ग मूल द्रव्यांतून वजा करून बाकीची रक्कम पुनः दरमहा दर शेंकडा १० रुपये व्याजाप्रमाणें दिली; तिचें पहिल्या व्याजाइतकें व्याज येण्यास पहिल्या काला इतकाच काल लागला, तर दोहोंवेळचीं मूल द्रव्यें काय?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

प्रथम मूल धन क्ष हें ५ महिनेपर्यंत व्याजीं लाविलें असें कल्पून

१ महिना : ५ रुपये व्याज :: ५ महिने
१०० रुपये : :: क्ष रुपये

या पंचराशिकावरून ५ महिन्यांत क्ष रुपयांचें व्याज $\frac{क्ष}{४}$ झालें.

$$\therefore \text{द्वितीय मूल धन} = क्ष - \left(\frac{क्ष}{४}\right)^{२}$$

$$\therefore \text{द्वितीय मूल धन} = \frac{१६क्ष - क्ष^{२}}{१६}$$

आतां १ महिना : १० रुपये व्याज :: ५ महिने
१०० रुपये : :: $\frac{१६ क्ष - क्ष^{२}}{१६}$

या पंचराशिकावरून ५ महिन्यांत द्वितीय मूल धनाचें व्याज $\frac{१६ क्ष - क्ष^{२}}{३२}$ इतकें झालें.

$$\therefore \frac{१६ क्ष - क्ष^{२}}{३२} = \frac{क्ष}{४}$$

उभय पक्षांस क्ष नें भागून

$$\frac{१६ - क्ष}{३२} = \frac{१}{४} \quad \therefore १६ - क्ष = ८$$

$$\therefore क्ष = ८$$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore \text{प्रथम मूळ धन} = ८ \\ \text{व द्वितीय मूल धन} = ४ \end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

श्लोक :—पंचकशतदत्तधनात् फलं द्विनिघ्नं विशोध्य परिशिष्टं ॥ दत्तं दशकशतेन तुल्यः कालः फलं च तयोः ॥

अर्थ :—दरमहा दर शेंकडा ५ रुपये व्याजाप्रमाणें कांहीं रुपये व्याजीं लाविलें. त्यांचें कांहीं दिवसांनीं जें व्याज आलें, त्याची दुप्पट मूल रकमेंतून वजा करून बाकी रक्कम पुनः दरमहा दर शेंकडा १० रुपये व्याजाप्रमाणें दिली. तिचें पहिल्या इतकेंच व्याज येण्यास पहिल्या इतका काळ लागला. तर दोहोंवेळचीं मूल धनें काय ?

या प्रश्नाचें उत्तर मागच्या उदाहरणाच्या पद्धतीनें काढावें.

श्लोक :—एककशतदत्तधनात् फलस्य वर्गं विशोध्य परिशिष्टं ॥ पंचकशतेन दत्तं तुल्यः कालः फलं च तयोः ॥

अर्थ :—दरमहा दर शेंकडा एक रुपया व्याजाप्रमाणें कांहीं रुपये दिले ; त्यांचें कांहीं दिवसांनीं जें व्याज आलें, त्याचा वर्ग मूल रकमेंतून वजा करून बाकी रक्कम दरमहा दर शेंकडा ५ रुपये व्याजानें दिली. तिचें पहिल्या इतकेंच व्याज येण्यास पहिल्या इतका काळ लागला, तर दोहोंवेळचीं मूल धनें काय ?

या प्रश्नाचें उत्तर मागील दोन उदाहरणांच्या पद्धतीनें काढावें.

श्लोक :—माणिक्याष्टकमिंद्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतं सद्वज्राणि च पंच रत्नवणिजां येषां चतुर्णां धनं ॥ संगस्नेहवशेन ते निजधनाद्दत्वैकमेकं मिथो जाता स्तुल्य धनाः पृथक् वद सखे तद्रत्नमौल्यानि मे ॥

अर्थ :—एका शहरामध्यें रत्नांचा व्यापार करणारे असे चार वैश्य होते. त्यांपैकीं एकाजवळ ८ माणिक्यें, दुसऱ्याजवळ १० नील, तिसऱ्याजवळ १०० मुक्ताफळें व चवथ्याजवळ ५ वज्रें होतीं. पुढें प्रत्येकानें आपआपल्या रत्नांपैकीं एकेक रत्न परस्परांस देऊन ते सर्व समधनी झाले, तर प्रत्येक रत्नाची किंमत काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

प्रत्येकानें आपआपल्या रत्नांपैकीं एकेक रत्न परस्परांस दिल्यामुळें

एकाजवळ धन = ५ मा. + १ नी. + १ मु. + १ व.

दुसऱ्याजवळ धन = १ मा. + ७ नी. + १ मु. + १ व.

तिसऱ्याजवळ धन = १ मा. + १ नी. + ९७ मु. + १ व.

चवथ्याजवळ धन = १ मा. + १ नी. + १ मु. + २ व.

आतां हीं चौघांचीं धनें समान आहेत ह्मणून प्रत्येकाच्या धनांतून १ मा; १ नी; १ मु; आणि १ व. अशीं रत्नें वजा केलीं असतां बाकी रत्नें समानच होतील, हें उघड आहे.

∴ ४ मा. = ६ नी. = ९६ मु. = १ व.

यावरून सहज कळून येईल कीं, ४ माणिक्यांची जी किंमत आहे, तितकीच ६ नीलांची, तितकीच ९६ मुक्ताफलांची व तितकीच एका वज्राची आहे. करितां एक वज्राची किंमत ९६ रुपये आहे, असें मानिलें तर

४ मा. = ९६ ; ६ नी. = ९६ ; ९६ मु. = ९६ आणि १ व. = ९६.

अशा किंमती आल्यावरून

एक माणिक्याची किंमत	२४	हें उत्तर.
एक नीलाची किंमत	१६	
एक मुक्ताफलाची किंमत	१	
एक वज्राची किंमत	९६	

याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक :—पंचकशतेन दत्तं मूलं सकलांतरं गते वर्षे ॥ द्विगुणं षोडशहीनं लब्धं किं मूल माचक्ष्व ॥

अर्थ :—दरमहा दर शेंकडा ५ रुपये व्याजानें कांहीं रुपये दिले. पुढें एक वर्षानें व्याज व मुद्दल मिळून जी रक्कम झाली ती मूलधनाच्या दुप्पटींहून १६ नें कमी आहे, तर मूलधन काय?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क्ष = मूलधन धरून

१ महिना : ५ रुपये व्याज :: १२ महिने
१०० रुपये : :: क्ष रुपये

या पंचराशिकावरून क्ष रुपयांचें १२ महिन्यांचें व्याज $\frac{\text{३ क्ष}}{\text{५}}$ झालें. $\therefore \text{क्ष} + \frac{\text{३ क्ष}}{\text{५}} = \text{२ क्ष} - \text{१६}$

$\therefore \text{५क्ष} + \text{३क्ष} = \text{१०क्ष} - \text{८०}$

$\therefore \text{क्ष} = \text{४०}$ हें उत्तर.

श्लोक :—यत्पंचकद्विकचतुष्कशतेन दत्तं खंडैस्त्रिभिर्नवतियुक्त्रिशती धनं तत् ॥ मासेषु सप्तदशपंचसु तुल्यमाप्तं खंडत्रयेपि सकलां वद खंडसंख्याम् ॥

अर्थ :—एका गृहस्थानें ३९० रुपयांचीं तीन खंडें करून त्यांतील पहिलें खंड दरमहा दर शेंकडा ५ रुपये व्याजानें दिलें. दुसरें खंड दरमहा दर शेंकडा २ रुपये व्याजानें दिलें व तिसरें खंड दरमहा दर शेंकडा ४ रुपये व्याजानें दिलें. पुढें ७ महिन्यांनीं पहिल्या खंडाचें जें सव्याज मूलधन झालें, तितकेंच दुसऱ्या खंडाचें १० महिन्यानीं सव्याज मूलधन झालें; व तितकेंच तिसऱ्या खंडाचें ५ महिन्यांनीं सव्याज मूलधन झालें, तर त्या तिन्ही खंडांच्या संख्या काय हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क्ष = सव्याज मूलधन धरून

१ महिना : ५ रुपये व्याज :: ७ महिने
१०० रुपये : :: १०० रुपये

या पंचराशिकावरून ७ महिन्यांत ३५ रुपये व्याज झालें. ह्मणून सव्याज मूलधन १०० + ३५ ह्मणजे १३५ रुपये झालें.

∴ सव्याज मूलधन : मूलधन :: सव्याज मूलधन
१३५ : १०० :: क्ष

या त्रैराशिकावरून $\frac{२०क्ष}{२७}$ हें प्रथम खंड झालें.

आतां १ महिना : २ रुपये व्याज :: १० महिने
१०० रुपये : :: १०० रुपये

या पंचराशिकावरून १० महिन्यांमध्यें २० रुपये व्याज झालें. ह्मणून सव्याज मूलधन १०० + २० ह्मणजे १२० रुपये झालें.

∴ सव्याज मूलधन : मूलधन :: सव्याज मूलधन
१२० : १०० :: क्ष

या त्रैराशिकावरून $\frac{५क्ष}{६}$ हें द्वितीय खंड झालें.

आणि १ महिना : ४ रुपये व्याज :: ५ महिने
१०० रुपये : :: १०० रुपये

या पंचराशिकावरून ५ महिन्यांमध्यें २० रुपये व्याज झालें. ह्मणून सव्याज मूलधन १०० + २० ह्मणजे १२० रुपये झालें. यापासून पूर्ववत् $\frac{५क्ष}{६}$ हें तृतीय खंड झालें.

आतां तिन्ही खंडांची बेरीज ३९० रुपये आहे, असें उदाहरणांत सांगितल्यावरून

$$\frac{२०क्ष}{२७} + \frac{९क्ष}{६} + \frac{९क्ष}{६} = ३९०\text{ ; छेद निरास करून}$$

$$१२०क्ष + १३९क्ष + १३९क्ष = ३९० \times २७ \times ६$$

$\therefore$ क्ष = १६२ ही किंमत तिन्ही खंडांमध्यें ठेऊन

प्रथम खंड १२० ; द्वितीय खंड १३९ ; तृतीय खंड १३५. हें उत्तर.

श्लोक :—पुरप्रवेशे दशदो द्विसंगुणं विधाय शेषं दशभुक् च निर्गमे ॥ दशौ दशैवं नगरत्रयेऽभवत् त्रिनिघ्नमाद्यं वद तत् कियत्धनं ॥

अर्थ :—कोणी एक गृहस्थ कांहीं रुपये घेऊन व्यापाराकरितां निघाला. त्यास एक शहर लागलें. त्या शहरांत प्रवेश करितांना जकातीबद्दल १० रुपये जकातवाल्यास दिले. पुढें शहरांत जाऊन व्यापार केला, त्यामध्यें त्याचें दुप्पट धन झालें. त्यांपैकीं १० रुपये खाण्यापिण्यास खर्च करून शहरांतून बाहेर निघतांना पुनः जकातीबद्दल १० रुपये देऊन दुसऱ्या शहरीं गेला. तेथेंही पूर्वींच्या शहराप्रमाणें स्थिति झाली. पुढें तिसऱ्या शहरीं गेला. तेथेंहि पूर्ववत् स्थिति होऊन आपल्या गांवीं परत आला, त्यावेळीं मूळधनाच्या तिप्पट धन त्याजवळ झालें, तर मूल धन काय ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क्ष = मूळ धन धरून

क्ष − १० = प्रथम शहरीं जकात दिल्यावरची शिल्लक.

२ क्ष − २० = प्रथम शहरीं व्यापारांत दुप्पट झालेलें धन.

२ क्ष − ३० = प्रथम शहरीं खाण्यास जाऊन शिल्लक.

२ क्ष – ४० = प्रथम शहरीं निघताची जकात देऊन शेष.

२ क्ष – ५० = दुसऱ्या शहरीं जकात देऊन शिल्लक.

४ क्ष – १०० = दुसऱ्या शहरीं व्यापारांत दुप्पट झालेली.

४ क्ष – १२० = दुसऱ्या शहरीं खाण्यास व निघताची जकात देऊन शिल्लक.

४ क्ष – १३० = तिसऱ्या शहरीं जातांना जकात देऊन शिल्लक.

८ क्ष – २८० = तिसऱ्या शहरीं व्यापारांत दुप्पट होऊन खाण्यास खर्च होऊन व निघताची जकात देऊन शिल्लक.

आतां अखेरची शिल्लक मूळधनाच्या तिप्पट आहे म्हणून

८ क्ष – २८० = ३क्ष

∴ क्ष = ५६ हें उत्तर.

श्लोक :—सार्धं तंदुलमानकत्रय महो द्रम्मेण मानाष्टकं मुद्गानां च सखे त्रयोदशमिता एता वणिक्काकिणीः ॥ आदायाऽर्पय तंदुलांशयुगुलं मुद्गैकभागान्वितं क्षिप्रं क्षिप्रभुजो व्रजेमहि यतः सार्थोऽग्रतो यास्यति ॥

अर्थ :—कोणी एक गृहस्थ वाण्याच्या दुकानीं जाऊन त्यास ह्मणतो कीं, अहो तांदुळ व मूग यांचा भाव काय आहे? त्यावर वाण्यानें सांगितलें कीं, एका द्रम्मास (पावलीस) ३॥ शेर तांदुळ व एका द्रम्मास ८ शेर मूग असा भाव आहे. त्यावर त्यानें १३ काकिणी ($\frac{13}{64}$ द्रम्म) वाण्यास देऊन सांगितलें कीं, १३ काकिणी-मध्यें आह्मांस एक भाग मूग व दोन भाग तांदुळ शीघ्र दे; कारण आह्मांस शीघ्र भोजन करून पुढें गेलेल्या सोबत्यांस गांठावयाचें आहे. तेव्हां वाण्यानें त्यास किती शेर मूग व तांदुळ द्यावेत हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

२ क्ष = तंदुलमान शेरात्मक, व क्ष = मूग ; असें धरून

$\frac{७}{२}$ शेर : १ द्रम्म : : २ क्ष शेर.

या त्रैराशिकावरून $\frac{४क्ष}{७}$ हें तंदुलमौल्य झालें.

व ८ शेर : १ द्रम्म : : क्ष

या त्रैराशिकावरून $\frac{क्ष}{८}$ हें मुगाचें मूल्य झालें.

आतां उदाहरणांत सांगितल्यावरून $\frac{४क्ष}{७}+\frac{क्ष}{८}=\frac{१३}{६४}$

छेद निरास करून ३९क्ष × ६४ = १३ × ५६

$\left.\begin{array}{l} \therefore \quad क्ष = \frac{७}{२४} \text{ हें मुगाचें मान.} \\ \therefore \quad २क्ष = \frac{७}{१२} \text{ हें तंदुलमान.} \end{array}\right\}$ हें उत्तर.

**श्लोक :—स्वार्धपंचांशनवमैर्युक्ताः के स्युः समास्त्रयः ॥
अन्यांशद्वयहीना ये षष्टिशेषाश्च तान् वद ॥**

अर्थ :—तीन संख्या अशा आहेत कीं, पहिलीचें अर्ध पहिलींत मिळविलें, दुसरीचा पंचमांश दुसरींत मिळविला व तिसरीचा नवमांश तिसरींत मिळविला असतां, ज्या तीन संख्या येतात, त्या सम होतात. व पहिल्या संख्येंतून दुसरीचा पंचमांश व तिसरीचा नवमांश वजा केला असतां बाकी ६० राहते, व दुसऱ्या संख्येंतून पहिलीचें अर्ध व तिसरीचा नवमांश वजा केला असतां बाकी ६० राहते व तिसऱ्या संख्येंतून पहिलीचें अर्ध व दुसरीचा पंचमांश वजा

केला असतां बाकी ६० च राहते, तर त्या तिन्ही संख्या कोणत्या हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क्ष = सम संख्या धरून. $\text{क्ष} = \text{प्रथम संख्या} + \frac{\text{प्रथम संख्या}}{२}$

$\therefore$ प्रथम संख्या $= \frac{२\text{क्ष}}{३}$ आणि $\text{क्ष} = \text{द्वितीय संख्या} + \frac{\text{द्वितीय संख्या}}{५}$

$\therefore$ द्वितीय संख्या $= \frac{५\text{क्ष}}{६}$

तसेंच $\text{क्ष} = \text{तृतीय संख्या} + \frac{\text{तृतीय संख्या}}{९}$

$\therefore$ तृतीय संख्या $= \frac{९\text{क्ष}}{१०}$ आतां उदाहरणांत सांगितल्यावरून

$$\frac{२\text{क्ष}}{३} - \frac{५\text{क्ष}}{६} \times \frac{१}{५} - \frac{९\text{क्ष}}{१०} \times \frac{१}{९} = ६० \quad \therefore \text{क्ष} = १५०$$

अथवा $\frac{५\text{क्ष}}{६} - \frac{२\text{क्ष}}{३} \times \frac{१}{२} - \frac{९\text{क्ष}}{१०} \times \frac{१}{९} = ६० \therefore \text{क्ष} = १५०$

अथवा $\frac{९\text{क्ष}}{१०} - \frac{\text{क्ष}}{३} - \frac{\text{क्ष}}{६} = ६० \therefore \text{क्ष} = १५०$

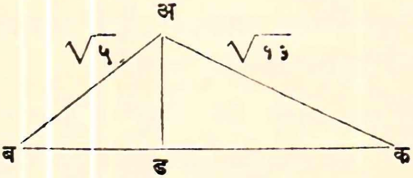
ही किंमत प्रथमादि संख्येमध्यें ठेऊन

प्रथम संख्या १००; द्वितीय संख्या १२५; व तृतीय संख्या १३५. हें उत्तर.

श्लोक :–त्रयोदश तथा पंच करण्यौ भुजयोर्मिती ॥ भूरज्ञाताऽत्र चत्वारः फलं भूमिं वदाशु मे ॥

अर्थ :—एका त्रिकोणाची एक बाजू $\sqrt{१३}$ हस्त आहे व दुसरी बाजू $\sqrt{५}$ हस्त आहे. व त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ ४ हात आहे, तर त्या त्रिकोणाची तिसरी बाजू किती हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.



येथें बक = क्ष ; व अड = ल ; धरून $५ - \text{ल}^{२} = \underline{\text{बड}}^{२}$

$$\therefore \text{ल} = \sqrt{९ - \underline{\text{बड}}^{२}} \qquad = \sqrt{५ - (\text{क्ष} - \underline{\text{डक}})^{२}}$$

$$= \sqrt{५ - \text{क्ष}^{२} - \underline{\text{डक}}^{२} + २\text{क्ष} \times \underline{\text{डक}}^{२}}$$

$$= \sqrt{९ - \text{क्ष}^{२} - (१३ - \text{ल}^{२}) + २\text{क्ष}\sqrt{१३ - \text{ल}^{२}}}$$

उभय पक्षांचे वर्ग करून

$$\text{ल}^{२} = \frac{३६\,\text{क्ष}^{२} - \text{क्ष}^{४} - ६४}{४\,\text{क्ष}^{२}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

आतां लंबास पायाच्या अर्धानें गुणिलें असतां त्रिकोणाचें क्षेत्रफल येतें. या सिद्धांतावरून

$$\text{लं} \times \frac{\text{क्ष}}{२} = ४ \quad \therefore \text{लं} = \frac{८}{\text{क्ष}} \quad \therefore \text{लं}^{२} = \frac{६४}{\text{क्ष}^{२}} \ldots\ldots (२)$$

$$(१) \text{ व } (२) \text{ पासून } \frac{३६\,\text{क्ष}^{२} - \text{क्ष}^{४} - ६४}{४\text{क्ष}^{२}} = \frac{६४}{\text{क्ष}^{२}}$$

छेद नाहींसें करून $\text{क्ष}^{४} - ३६\,\text{क्ष}^{२} = -\,३२०$

उभय पक्षांत १८ चा वर्ग मिळवून

$$क्ष^४ - ३६ क्ष^२ + ३२४ = ४$$

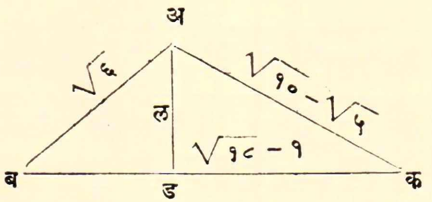
उभय पक्षांचीं वर्गमूळें काढून

$क्ष^२ - १८ = \pm २ \quad \therefore क्ष = ४$ किंवा $\sqrt{२०}$ हें उत्तर.

श्लोक :—दशपंचकरण्यंतरमेको बाहुः परश्च षट् करणी ॥ भूरष्टादश करणी रूपोना लंबमान माचक्ष्व ॥

अर्थ :—त्रिकोणाची एक बाजू $(\sqrt{१०} - \sqrt{५})$ हस्त आहे, दुसरी बाजू $\sqrt{६}$ हस्त आहे व तिसरी बाजू (पाया) $(\sqrt{१८} - १)$ हस्त आहे, तर लंब किती आहे हें सांग?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.



या त्रिकोणामध्यें $अब = \sqrt{६}$;

$अक = \sqrt{१०} - \sqrt{५}$; व $बक = \sqrt{१८} - १$.

हे तीन अवयव दिले आहेत, यांपासून $अड = ल$ ही बाजू काढावयाची आहे; करितां

$डक = क्ष$ धरून; $\quad ल^२ = अक^२ - क्ष^२$

$$\therefore ल^२ = १० + ५ - २\sqrt{५०} - क्ष^२$$

$$\therefore ल^२ = १५ - २\sqrt{५०} - क्ष^२ \quad \text{..................} (१)$$

आतां $\quad ल^२ = अब^२ - बड^२$

$$= ६ - (\sqrt{१८} - १ - क्ष)^२.$$

$= -१३ + २\sqrt{१८} - क्ष^२ + २\sqrt{१८} \times क्ष - २क्ष \ldots (२)$

समीकरण (१) व (२) यांपासून

$१५ - २\sqrt{५०} - क्ष^२ = -१३ + २\sqrt{१८} - क्ष^२ + २क्ष\sqrt{१८} - २क्ष$

समशोधन करून

$$क्ष(२ - २\sqrt{१८}) = -२८ + २\sqrt{१८} + २\sqrt{५०}$$
$$= -२८ + ६\sqrt{२} + १०\sqrt{२}$$
$$= -२८ + १६\sqrt{२}$$
$$\therefore क्ष = \frac{-२८ + १६\sqrt{२}}{२ - २\sqrt{१८}}$$
$$= \frac{(२ - २\sqrt{१८})(२\sqrt{२} - २)}{२ - २\sqrt{१८}}$$
$$= २\sqrt{२} - २$$

ही क्ष ची किंमत (१) मध्यें ठेऊन

$$ल^२ = १५ - २\sqrt{५०} - ८ - ४ + ८\sqrt{२}$$
$$= ३ - २\sqrt{२५ \times २} + ८\sqrt{२}$$
$$= ३ - १०\sqrt{२} + ८\sqrt{२}$$
$$= ३ - २\sqrt{२}$$
$$\therefore ल = \sqrt{३ - २\sqrt{२}}$$ हें उत्तर.

श्लोक :-असमानसमच्छेदान् राशींस्तांश्चतुरो वद ॥ यदैक्यं यद्घनैक्यं वा येषां वर्गैक्यसंमितम् ॥

अर्थः—ज्या चार राशि समान नसून समच्छेद आहेत व ज्यांची बेरीज त्यांच्या वर्गैक्याबरोबर आहे, तर ते चार राशि कोणते हें सांग ? आणि ज्या चार राशि समान नसून समच्छेद आहेत, व

ज्यांच्या घनांची बेरीज, त्यांच्या वर्गैक्याबरोबर आहे, तर ते चार राशि कोणते हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क्ष = प्रथम राशि; २क्ष = द्वितीय राशि; ३क्ष = तृतीय राशि व ४क्ष = चतुर्थराशि धरून

पहिल्या उदाहरणांत सांगितल्यावरून

$$क्ष + २क्ष + ३क्ष + ४क्ष = क्ष^{२} + ४क्ष^{२} + ९क्ष^{२} + १६क्ष^{२}$$

उभय पक्षांस क्ष नें भागून १० = ३०क्ष.

$$\therefore \quad क्ष = \frac{१}{३};\ २क्ष = \frac{२}{३};\ ३क्ष = \frac{३}{३};$$

$$४क्ष = \frac{४}{३};$$ हें उत्तर.

आतां दुसऱ्या उदाहरणांत सांगितल्यावरून

$$(क्ष)^{३} + (२क्ष)^{३} + (३क्ष)^{३} + (४क्ष)^{३}$$

$$= क्ष^{२} + ४क्ष^{२} + ९क्ष^{२} + १६क्ष^{२}.$$

$$\therefore \quad क्ष = \frac{३}{१०};\ २क्ष = \frac{६}{१०};\ ३क्ष = \frac{९}{१०};$$

$$४क्ष = \frac{१२}{१०}$$ हें उत्तर.

श्लोक :—त्र्यस्रक्षेत्रस्य यस्य स्यात् फलं कर्णेन संमितं ॥ दोः कोटिश्रुतिघातेन समं यस्य च तद्वद ॥

अर्थः—ज्या काटकोन त्रिकोणाचें क्षेत्रफल त्याच्या कर्णाबरोबर असतें, तर त्यांतील तिन्ही बाजूंचीं मानें सांग ? आणि ज्या काटकोन त्रिकोणाचें क्षेत्रफल, त्याच्या तिन्ही बाजूंच्या गुणाकाराबरोबर असतें, त्याच्या तिन्ही बाजूंचीं मानें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

३क्ष = भुज, व ४क्ष = कोटि धरून ५क्ष = कर्ण.

या त्रिकोणाचें क्षेत्रफल = $\frac{३क्ष \times ४क्ष}{२}$ व हें कर्णाबरोबर आहे असें उदाहरणांत सांगितल्यामुळें

$$\frac{३क्ष \times ४क्ष}{२} = ५क्ष \qquad \therefore १२क्ष^{२} = १०क्ष$$

उभयपक्षांस क्षनें भागून

$$१२क्ष = १० \quad \therefore क्ष = \frac{५}{६}$$

ही किंमत भुजकोटिमध्यें ठेऊन

भुज = $\frac{५}{२}$; कोटि = $\frac{१०}{३}$; कर्ण = $\frac{२५}{६}$ हें उत्तर.

आतां दुसऱ्या उदाहरणामध्यें सांगितल्यावरून

$$३क्ष \times ४क्ष \times ५क्ष = \frac{३क्ष \times ४क्ष}{२} \quad \therefore \quad क्ष = \frac{१}{१०}$$

ही किंमत भुजकोटिमध्यें ठेऊन

भुज = $\frac{३}{१०}$; कोटि = $\frac{२}{५}$; कर्ण = $\frac{१}{२}$ हें उत्तर.

श्लोक :—युतौ वर्गांतरे वर्गौ ययोर्घाते घनो भवेत् ॥ तौ राशी शीघ्र माचक्ष्व दक्षोसि गणिते यदि ॥

अर्थः—ज्या दोन संख्यांची बेरीज केली असतां वर्गराशि होतो व वजाबाकी केली असतां वर्गराशि होतो व गुणाकार केला असतां घनराशि होतो, तर त्या दोन संख्या कोणत्या हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

४क्ष^{2} = एक संख्या, व ५क्ष^{2} = द्वितीय संख्या धरली. अशा संख्या कल्पिल्यामुळें त्यांची बेरीज किंवा अंतर केलें असतां सहज वर्गराशि होतो.

आतां त्या दोन संख्यांचा गुणाकार केला असतां घनराशि होतो असें प्रश्नामध्यें सांगितलें आहे ह्मणून त्यांचा गुणाकार (१०क्ष)^{3} ह्या इष्ट संख्येबरोबर आहे असें मानिलें.

∴ ४क्ष^{2} × ५क्ष^{2} = (१०क्ष)^{3}

∴ २०क्ष^{4} = १०००क्ष^{3}.

उभयपक्षांस क्ष^{3}नें भागून

२०क्ष = १००० ∴ क्ष = ५०.

ही किंमत आरंभीं कल्पिलेल्या संख्यांमध्यें ठेऊन

१००० एक संख्या, १२५०० द्वितीय संख्या हें उत्तर.

श्लोकः—घनैक्यं जायते वर्गो वर्गैक्यं च ययोर्घनः ॥ तौ चेद्वेत्सि तदाऽहं त्वां मन्ये बीजविदांवरं ॥

अर्थ :—ज्या दोन संख्यांच्या घनांची बेरीज वर्गराशि होतो, व त्याच दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज घनराशि होतो, तर त्या दोन संख्या कोणत्या ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क्ष^{2} = एकसंख्या,

व २क्ष^{2} = दुसरी संख्या धरून त्यांच्या घनांची बेरीज, वर्गराशि सहज होतो.

आतां त्या दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज घनराशि होतो असें प्रश्नामध्यें सांगितलें आहे; ह्मणून

वर्गैक्य = $(\text{५क्ष})^3$ असें इष्ट मानून

$$(\text{क्ष}^2)^2 + (\text{२क्ष}^2)^2 = (\text{५क्ष})^3.$$

$$\therefore \quad \text{क्ष}^4 + \text{४क्ष}^4 = \text{१२५ क्ष}^3.$$

$$\therefore \quad \text{५क्ष}^4 = \text{१२५ क्ष}^3.$$

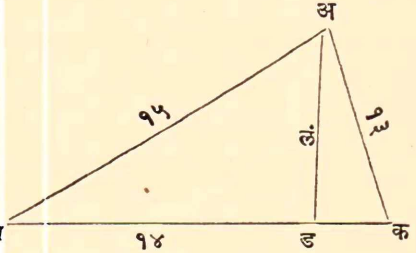
उभय पक्षांस ५क्ष^3 नें भागून

$$\text{क्ष} = \text{२५}$$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore \quad \text{क्ष}^2 = \text{६२५ प्रथम संख्या} \\ \quad \text{२क्ष}^2 = \text{१२५० द्वितीय संख्या} \end{array}\right\} \text{ हें उत्तर.}$$

श्लोक :—यत्र त्र्यस्रे क्षेत्रे धात्री मनुसंमिता सखे बाहू ॥
एकः पंचदशाऽन्य स्त्रयोदश वदाऽवलंबकं तत्र ॥

अर्थ :—एका त्रिकोणाचा पाया १४ हात आहे, एक भुज १५ हात, व दुसरा भुज १३ हात आहे, तर त्या त्रिकोणाचें लंब प्रमाण काय?



या त्रिकोणामध्यें अब = १५; अक = १३; व बक = १४ अशीं बाजूंचीं मानें दिलीं आहेत; यांवरून अड = ल काढणें आहे, करितां डक = क्ष धरून $\text{अब}^2 - \text{बड}^2 = \text{ल}^2$

$$\text{२२५} - (\text{१४} - \text{क्ष})^2 = \text{ल}^2$$

$$\therefore \quad \text{२९} - \text{क्ष}^2 + \text{२८क्ष} = \text{ल}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{१})$$

आणि

$$\text{अक}^2 - \text{डक}^2 = \text{ल}^2$$

$$\therefore \quad \text{१६९} - \text{क्ष}^2 = \text{ल}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{२})$$

आतां (१) व (२) पासून

$$२९ - क्ष^2 + २८क्ष = १६९ - क्ष^2$$

$$\therefore \quad क्ष = ५$$

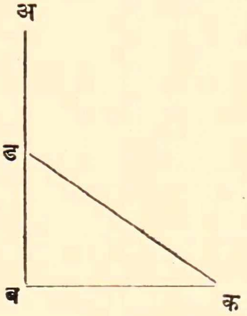
ही किंमत (२) मध्यें ठेऊन

लंब = १२ हें उत्तर.

श्लोकः—यदि समभुवि वेणु र्द्वित्रिपाणिप्रमाणो गणक पवनवेगा देकदेशे स भग्नः ॥ भुवि नृपमितहस्ते ष्वंग लग्नं तदग्रं कथय कतिषु मूला देष भग्नः करेषु ॥

अर्थः—सपाट जमिनीवर ३२ हात उंचीचा एक वेळू उभा होता; तो वाऱ्याच्या सपाट्यानें मध्यें मोडून त्याचें अग्र, जमिनीवर वेळूच्या मूळापासून १६ हातांवर लागलें, तर तो किती हात उंचीवर मोडला हें सांग?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.



या आकृतीमध्यें अब हा वेळू; ड ही वेळू मोडलेली जागा; आणि बक हें वेळूच्या मूळापासून अग्राचें अंतर;

येथें डब = क्ष धरून

$$डब^2 + बक^2 = डक^2$$

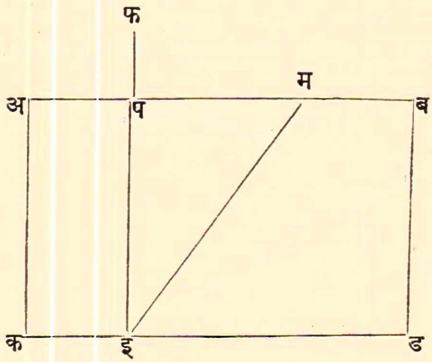
$$\therefore \quad क्ष^2 + (१६)^2 = (३२ - क्ष)^2$$

$$\therefore \quad क्ष = १२ \quad \text{हें उत्तर.}$$

श्लोकः—चक्रक्रौंचाकुलितसलिले क्वापि दृष्टं तडागे। तोयादूर्ध्वं कमलकलिकाग्रं वितस्तिप्रमाणं॥ मंदं मंदं चलित मनिलेनाहतं हस्तयुग्मं। तस्मिन् मग्नं गणक कथय क्षिप्र मंभः प्रमाणं॥

अर्थः—चक्रवाक व जलवक यांनीं युक्त असें एक तळें होतें; त्यामध्यें कमळाच्या कळीचें अग्र पाण्याच्या सपाटीवर $\frac{१}{२}$ हात उंच होतें. तें वाऱ्यानें जलपृष्ठावर स्वस्थानापासून २ हात अंतरावर बुडालें असें पाहिलें, तर त्या तळ्यांत पाणी किती ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.



या आकृतीमध्यें अबकड हें तळें, ईफ हें कमळाचें झाड, अब हें पाण्याचें पृष्ठ, प हें स्थळ, कमलाचा दांडा जलपृष्ठावर ज्या ठिकाणीं लागला आहे तें, आणि म हें कळी बुडालेलें स्थळ आहे.

येथें पफ = $\frac{१}{२}$ हात; पम = २ हात, व इफ = इम असें दिलेलें आहे, यांवरून पइ हें जलप्रमाण काढणें आहे, करितां

$$\text{क्ष} = \text{पइ जलप्रमाण धरून} \quad \text{पइ}^2 + \text{पम} = \text{इम}^2$$

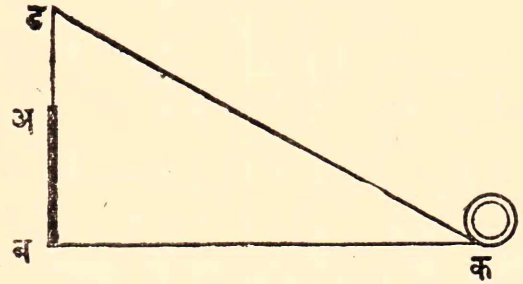
$$\therefore \text{क्ष}^2 + (२)^2 = (\text{क्ष} + \tfrac{१}{२})^2$$

$$\therefore \qquad \text{क्ष} = \tfrac{१५}{४} \text{ हें उत्तर.}$$

श्लोक :—वृक्षाद्धस्तशतोच्छ्रयाच्छतयुगे वापीं कपिः कोप्यगा-दुत्तीर्याथ परो द्रुतं श्रुतिपथात् प्रोड्डीय किंचित् द्रुमात् ॥ जातैवं समता तयोर्यदि गतावुड्डीय मानं कियद्विद्वंश्चेत्सुपरिश्रमोस्ति गणिते क्षिप्रं तदाचक्ष्व मे ॥

अर्थ :—शंभर हात उंचीच्या वृक्षाग्रावर दोन वानर बसले होते, त्यांपैकीं एक वानर वृक्षावरूनच उतरून वृक्षमूलापासून २०० हात अंतरावर एक विहीर होती, तीवर आला; व दुसरा वानर किंचित् वर उड्डाण करून कर्णमार्गानें त्याच विहिरीवर आला. त्यामध्यें दोघांस सारखेंच अंतर चालावें लागलें, तर दुसऱ्या कपीनें किती हस्ताचें उड्डाण करून कर्णमार्गानें गेला हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.



येथें अब १०० हात उंचीचा वृक्ष, बक हें वृक्षमूलापासून विहिरीचें २०० हात अंतर व अड हें वानराचें उड्डाण क्ष कल्पून

$$(\text{अब} + \text{अड})^2 + \text{बक}^2 = \text{डक}^2$$

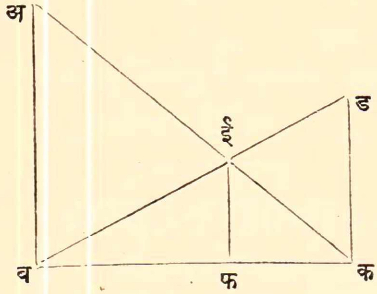
$$\therefore (१०० + \text{क्ष})^2 + (२००)^2 = (३०० - \text{क्ष})^2$$

$\therefore$ क्ष = ५० हात उड्डाण हें उत्तर.

श्लोक :—पंचदशदशकरोच्छ्रायवेण्वोरज्ञातमध्यभूमिकयोः ॥ इतरेतरमूलाग्रगसूत्रयुतेर्लंबमानमाचक्ष्व ॥

अर्थ :—१५ हात उंचीचा एक वेळु, व दुसरा १० हात उंचीचा वेळु असे आहेत. त्यांतील एकाच्या अग्रापासून दुसऱ्याच्या मूळापर्यंत एक सूत्र, व दुसऱ्याच्या अग्रापासून पहिल्याच्या मूळापर्यंत एक सूत्र अशीं दोन सूत्रें बांधिलीं असतां त्यांची युति ज्या ठिकाणीं होईल त्यापासून भूमीवर टाकलेल्या लंबाचें मान काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.



या आकृतीमध्यें अब हा १५ हात उंचीचा वेळु; डक हा १० हात उंचीचा वेळु; अक आणि बड हीं अग्रमूलगत दोन सूत्रें बांधलेलीं आहेत. यांचा संयोग ई ह्या स्थानीं झाला. यापासून ईफ हा लंब भूमीवर टाकला आहे.

येथें ईफ = ल; बफ = म; फक = प; आणि बक = भ अशीं नांवें देऊं.

आतां अबक आणि ईफक हे दोनी त्रिकोण सरूप आहेत म्हणून

$$\frac{१५}{भ} = \frac{ल}{प}$$

$$\therefore \qquad प = \frac{ल \times भ}{१५} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

आणि बडक व ईबफ हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत ह्मणून

$$\frac{१०}{भ} = \frac{ल}{म}$$

$$\therefore \qquad म = \frac{भ \times ल}{१०} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

समीकरण (१) व (२) पासून

$$प + म = \frac{भ \times ल}{१५} + \frac{भ \times ल}{१०}$$

$$\therefore \quad भ = \frac{भ \times ल}{१५} + \frac{भ \times ल}{१०}$$

उभय पक्षांस भ नें भागून

$$१ = \frac{ल}{१५} + \frac{ल}{१०}$$

$\therefore$ ल = ६ हें उत्तर

याप्रमाणें एकवर्ण समीकरण प्रकरणाचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

मध्यमाहरण प्रकरण.

श्लोक :—अव्यक्त वर्गादि यदावशेषं पक्षौ तदेष्टेन निहत्य किंचित् ॥ क्षेप्यं तयोर्येन पदप्रदः स्यादव्यक्तपक्षस्यपदेन भूयः ॥ व्यक्तस्य पक्षस्य समक्रियैवमव्यक्तमानं खलु लभ्यते तत् ॥ न निर्वहश्चेत् घनवर्गवर्गेऽथैवं तदा ज्ञेयमिदं स्वबुध्या ॥ अव्यक्त मूलर्णगरूपतोल्पं व्यक्तस्य पक्षस्य पदं यदि स्यात् ॥ ऋणं धनं तच्च विधाय साध्य मव्यक्तमानं द्विविधं क्वचित्स्यात् ॥

अर्थ :—समीकरण सोडवितां सोडवितां एका पक्षामध्यें अव्यक्त वर्गादि येऊन दुसऱ्या पक्षांत केवल संख्या येईल तर पहिल्या पक्षाचें बरोबर मूल निघेल अशा इष्ट संख्येनें उभय पक्षांस गुणावें किंवा भागावें किंवा इष्ट संख्या मिळवावी. नंतर उभय पक्षांचें मूल काढून जें समीकरणं तयार होईल, त्यापासून अव्यक्ताची किंमत निघेल.

कित्येक घनसमीकरणें व चतुर्घात समीकरणें असतात अशा ठिकाणीं कांहीं केल्यानें मूल निघत नाहीं, तर स्वबुद्धीनेंच अव्यक्ताची किंमत काढावी.

अव्यक्त पक्षाच्या मूलामध्यें जीं ऋण रूपें (व्यक्तसंख्या) असतील त्यापेक्षां व्यक्तपक्षाच्या मूलामध्यें रूपें कमी असतील तर तीं ऋण व धन कल्पना करून अव्यक्ताच्या दोन किंमती काढाव्या. अशीं दोन उत्तरें कित्येक उदाहरणामध्यें येण्याचा संभव असतो.

श्रीधराचार्यांचा श्लोक :—चतुराहतवर्गसमै रूपैः पक्षद्वयं गुणयेत् ॥ अव्यक्तवर्गरूपै र्युक्तौ पक्षौ ततो मूलं ॥

अर्थ :—$\text{अक्ष}^{२} + \text{बक्ष} = \text{क}$

अशा प्रकारच्या वर्गसमीकरणामध्यें अव्यक्तपक्षाचें बरोबर मूल निघण्याकरितां अव्यक्तवर्गाच्या गुणकाच्या चौपटीनें उभय पक्षांस गुणावें. नंतर उभय पक्षांमध्यें अव्यक्ताच्या गुणकाचा वर्ग मिळवावा. अशी कृति केल्यानें बरोबर मूल निघतें. जसें:—

$\text{अक्ष}^{२} + \text{बक्ष} = \text{क}$

या समीकरणांतील उभय पक्षांस अव्यक्त वर्गाच्या ($\text{क्ष}^{२}$) गुणकाच्या (अ) चौपटीनें म्हणजे ४ अनें गुणून

$४\,\text{अ}^{२}\,\text{क्ष}^{२} + ४\,\text{अबक्ष} = ४\,\text{अक}$ यामध्यें अव्यक्ताच्या गुणकाचा वर्ग म्हणजे $\text{ब}^{२}$ मिळवून.

$४\,\text{अ}^{२}\,\text{क्ष}^{२} + ४\,\text{अबक्ष} + \text{ब}^{२} = ४\,\text{अक} + \text{ब}^{२}$. उभय पक्षांचीं मूळें काढून

$२\,\text{अक्ष} + \text{ब} = \sqrt{४\,\text{अक} + \text{ब}^{२}}$

यांतून क्ष ची किंमत काढतां येईल,

श्लोक—अलिकुलदलमूलं मालतीं यात मष्टौ निखिलनवमभागाश्चालिनी भृंगमेकं ॥ निशिपरिमललुब्धं पद्ममध्ये निरुद्धं प्रतिरणति रणंतं ब्रूहि कांतेऽलिसंख्यां—

अर्थ :—एका ठिकाणीं भ्रमरसमूह होता. त्यापैकीं निम्याच्या वर्गमूलात्मकसंख्या इतके भ्रमर व भ्रमरसमूहाचा $\frac{८}{९}$ इतके भ्रमर मालती वृक्षाकडे गेले व त्या ठिकाणीं दोन भ्रमर शिल्लक राहिले. तर त्या समूहामध्यें भ्रमर किती होते तें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$२\,\text{क्ष}^{२} =$ भ्रमरसंख्या धरा.

$$\therefore\ \sqrt{\frac{२\,\text{क्ष}^{२}}{२}} + \frac{८ + २\,\text{क्ष}^{२}}{९} + २ = २\,\text{क्ष}^{२}$$

$$\therefore\ \text{क्ष} + \frac{१६\,\text{क्ष}^{२}}{९} + २ = २\,\text{क्ष}^{२}$$

उभयपक्षांस ९ नीं गुणून

$$९\,\text{क्ष} + १६\,\text{क्ष}^{२} + १८ = १८\,\text{क्ष}^{२}$$

स्थलांतर करून

$$१८ क्ष^२ - १६ क्ष^२ - ९ क्ष = १८$$

$$\therefore \quad २ क्ष^२ - ९ क्ष = १८$$

उभयपक्षांस ८ नीं गुणून

$$१६ क्ष^२ - ७२ क्ष = १४४$$

उभयपक्षांत ८१ मिळवून

$$१६ क्ष^२ - ७२ क्ष + ८१ = १४४ + ८१$$

उभयपक्षांचीं वर्गमूलें काढून

$$४ क्ष - ९ = १५ \therefore ४ क्ष = २४$$

$\therefore$ क्ष $= ६ \therefore २$ क्ष$^२ = ७२$ ही भ्रमरसंख्या हें उत्तर.

श्लोक :—पार्थः कर्णवधाय मार्गणगणं क्रुद्धो रणे संदधे तस्यार्धेन निवार्य तच्छरगणं मूलैश्चतुर्भिर्हयान् ॥ शल्यं षड्भिरथेषुभिस्त्रिभिरपिच्छत्रं ध्वजं कार्मुकं चिच्छेदास्य शिरः शरेण कति ते यानर्जुनः संदधे ॥

अर्थ :—अर्जुन आणि कर्ण या दोघांचें युद्ध होत असतां अर्जुनानें जे बाण सोडिले, त्यांपैकीं निम्या बाणांनीं कर्णानें सोडलेल्या बाणांचें निवारण केलें. वर्गमूलाच्या चौपट बाणांनीं कर्णाच्या घोड्यांस मारिलें सहा बाणांनीं कर्णाच्या शल्यनामक सारथ्यास मारिलें, तीन बाणांनीं कर्णाच्या छत्रध्वजकार्मुकांचा फडशा पाडिला आणि एका बाणानें कर्णाचा शिरच्छेद केला, तर अर्जुनानें किती बाण सोडिले तें सांग ?

उत्तरानिष्काशनक्रिया.

क्ष^२ = बाणसंख्या धर.

$$\therefore \frac{क्ष^२}{२} + ४ क्ष + १० = क्ष^२$$

समच्छेद करून

$$क्ष^२ + ८ क्ष + २० = २ क्ष^२$$

स्थलांतर करून

$$२ क्ष^२ - क्ष^२ - ८ क्ष = २० \quad \therefore \quad क्ष^२ - ८ क्ष = २०$$

दोन्ही पेऱ्यांत १६ मिळवून

$$क्ष^२ - ८ क्ष + १६ = ३६$$

उभमपक्षांचीं वर्गमूलें काढून

$$क्ष - ४ = ६ \quad \therefore \quad क्ष = १०$$

$\therefore$ क्ष$^२ = १००$ बाणसंख्या हें उत्तर

श्लोकः—व्येकस्य गच्छस्य दलं किलादिरादेर्दलं तत्प्रचयः फलं च ॥ चयादिगच्छाभिहतिः स्वसप्तभागाधिका ब्रूहि चयादिगच्छान् ॥

अर्थः—ज्या श्रेढींतील गच्छांत एक कमी करून अर्ध केलें असतां आदि होतो, व आदीचें अर्ध केलें असतां चय येतो, आणि गच्छ, आदि व चय यांच्या गुणाकारामध्यें स्वकीय (गुणाकाराचाच) सप्तमांश मिळविला असतां सर्वधन येतें, तर त्या श्रेढींतील गच्छ, चय, आदि हें सांग ?

$$\text{क्ष} = \text{गच्छ} \quad \text{धरून}$$

उदाहरणांत सांगितल्याप्रमाणें

$$\frac{\text{क्ष} - १}{२} = \text{आदि}; \quad \frac{\text{क्ष} - १}{४} = \text{चय}$$

$$\frac{\text{क्ष} - १}{४} \times \frac{\text{क्ष} - १}{२} \times \text{क्ष} + \frac{\frac{\text{क्ष} - १}{४} \cdot \frac{\text{क्ष} - १}{२} \cdot \text{क्ष}}{७} = \text{सर्वधन}$$

$$\therefore \frac{\text{क्ष}^२ + १ - २\text{क्ष}}{८} \cdot \text{क्ष} + \frac{\frac{\text{क्ष}^२ + १ - २\text{क्ष}}{८} \cdot \text{क्ष}}{७} = \text{सर्वधन}$$

$$\frac{\text{क्ष}^३ + \text{क्ष} - २\text{क्ष}^२}{८} + \frac{\text{क्ष}^३ + \text{क्ष} - २\text{क्ष}}{५६} = \text{सर्वधन}\ldots\ldots\ldots\ldots(१)$$

समच्छेद करून

$$\frac{८\text{क्ष}^३ + ८\text{क्ष} - १६\text{क्ष}^२}{५६} = \text{सर्वधन}$$

$$\therefore \frac{\text{क्ष}^३ + \text{क्ष} - २\text{क्ष}^२}{७} = \text{सर्वधन} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

आतां (गच्छ − १) चय + आदि = अंत्यधन ह्या सारणीवरून

$$(\text{क्ष} - १) \frac{\text{क्ष} - १}{४} + \frac{\text{क्ष} - १}{२} = \text{अंत्यधन}$$

$$\frac{\text{क्ष}^२ - २\text{क्ष} + १}{४} + \frac{\text{क्ष} - १}{२} = \text{अंत्यधन}$$

$$\frac{क्ष^{२} - २क्ष + १ + २क्ष - २}{४} = \text{अंत्यधन}$$

$$\therefore \frac{क्ष^{२} - १}{४} = \text{अंत्यधन.}$$

आणि $\frac{\text{अंत्यधन} + \text{आदि}}{२} = \text{मध्यधन}$

ह्या सारणीवरून

$$\frac{\frac{क्ष^{२} - १}{४} + \frac{क्ष - १}{२}}{२} = \text{मध्यधन}$$

$$\frac{क्ष^{२} - १ + २क्ष - २}{८} = \text{मध्यधन}$$

$$\therefore \frac{क्ष^{२} + २क्ष - ३}{८} = \text{मध्यधन}$$

आणि मध्यधन $\times$ गच्छ = सर्वधन

या सारणी वरून

$$\frac{क्ष^{२} + २\ क्ष - ३}{८} \times क्ष = \text{सर्वधन}$$

$$\therefore \frac{क्ष^{३} + २\ क्ष^{२} - ३\ क्ष}{८} = \text{सर्वधन} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

आतां (२) व (३) हीं सर्वधनें समान आहेत म्हणून

$$\frac{क्ष^{३} + २\ क्ष^{२} - ३\ क्ष}{८} = \frac{क्ष^{३} + क्ष - २\ क्ष^{२}}{७}$$

उभयपक्षांस क्ष नें भागून

$$\frac{क्ष^{२} + २\ क्ष - ३}{८} = \frac{क्ष^{२} + १ - २\ क्ष}{७}$$

$$\therefore \quad ७\ क्ष^{२} + १४\ क्ष - २१ = ८\ क्ष^{२} + ८ - १६\ क्ष$$

स्थलांतर करून

$क्ष^{२} - ३०\ क्ष = -२९$

दोनी पेक्ष्यांत १५ चा वर्ग मिळवून

$$क्ष^2 - ३० क्ष + २२५ = - २९ + २२५$$
$$= १९६$$

उभयपक्षांचीं मूळें काढून

$क्ष - १५ = १४ \quad \therefore \quad क्ष = २९$

$$\therefore \left.\begin{array}{r} गच्छ = २९ \\ आदि = १४ \\ चय = \ \ ७ \end{array}\right\}$$ हें उत्तर

श्लोकः—कः खेन विहृतो राशिः कोट्या युक्तोऽथवोनितः ॥ वर्गितः स्वपदेनाढ्यः खगुणोनर्वतिर्भवेत् ॥

अर्थः—ज्या संख्येस शून्यानें भागिलें, कोटिसंख्या मिळविली किंवा वजा केली, वर्ग केला, स्ववर्गमूळ मिळविलें आणि शून्यानें गुणिलें तर ९० संख्या होते, अशी संख्या कोणती ती सांग ?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

क्ष = संख्या धरिली

$$\therefore \left(\frac{क्ष}{०} \pm १००००००० \right)^2 = \frac{क्ष^2}{०}$$

कारण खहरराशींमध्यें कोणती ही संख्या मिळविली किंवा वजा केली असतां खहर राशीस विकार होत नाहीं असें मागें सांगितलें आहे.

$$आतां \ \left(\frac{क्ष^2}{०} + \frac{क्ष}{०} \right) \times ० = ९०$$

शून्याचा संक्षेप देऊन

$$क्ष^2 + क्ष = ९०$$

उभयपक्षांस ४ नीं गुणून व एक मिळवून

$$४क्ष^2 + ४क्ष + १ = (४(९०) + १) = ३६१$$

दोन्ही पेट्यांचीं वर्गमूळें काढून

$$२क्ष + १ = १९$$
$$\therefore \quad क्ष = ९ \quad \text{हें उत्तर.}$$

श्लोकः—कः स्वार्धसहितो राशिः खगुणो वर्गितो युतः ॥ स्वपदाभ्यां खभक्तश्च जातः पंचदशोच्यतां ॥

अर्थः—ज्या संख्येस स्वकीय अर्ध मिळविलें, शून्यानें गुणिलें, वर्ग केला, स्वीय वर्गमूलाची दुप्पट मिळविली, आणि शून्यानें भागिलें तर १५ येतात अशी संख्या सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क्ष = संख्या धर.

$$\therefore \frac{\left\{\left(क्ष + \frac{क्ष}{२}\right) \times ० \right\}^{२} + २\left(क्ष + \frac{क्ष}{२}\right) \times ०}{०} = १५$$

येथें शून्याचा संक्षेप देऊन

$$\frac{९ क्ष^{२}}{४} + ३क्ष = १५$$

$$९क्ष^{२} + १२क्ष = ६०$$

उभयपक्षांस ४ नीं गुणून व १६ मिळवून

$$३६क्ष^{२} + ४८क्ष + १६ = २५६$$

वर्गमूळें काढून

$$६क्ष + ४ = १६$$

$$\therefore \quad क्ष = २ \text{ हें उत्तर.}$$

श्लोकः—राशिर्द्वादशनिघ्नो राशिघनाढ्यश्च कः समा यस्य ॥ राशिकृतिः षड्गुणिता पंचत्रिंशद्युता विद्वन् ॥

अर्थः—समीकरणरूपानें

$$१२क्ष + क्ष^{३} = ६क्ष^{२} + ३५$$

या समीकरणांतील क्षची किंमत काय ?

दिलेल्या समीकरणामध्यें स्थलांतर करून

$$क्ष^{३} - ६ क्ष^{२} + १२ क्ष = ३५$$

उभयपक्षांत ८ वजा करून व घनमूल काढून

$$क्ष - २ = ३ \quad \therefore \quad क्ष = ५ \text{ हें उत्तर}$$

श्लोकः—को राशिर्द्विशतीक्षुण्णो राशिवर्गयुतो हतः ॥ द्वाभ्यां तेनोनितो राशिवर्गवर्गोऽयुतं भवेत् ॥ रूपोनं वद तं राशिं वेत्सि बीजक्रियां यदि ॥

अर्थः—समीकरण रूपानें.

$$क्ष^{४} - २\left(२०० क्ष + क्ष^{२}\right) = १०००० - १$$

या समीकरणांतील क्ष ची किंमत सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

दिलेल्या समीकरणावरून

$क्ष^4 - ४०० क्ष - २ क्ष^2 = ९९९९$

उभयपक्षांमध्यें $४ क्ष^2 + ४०० क्ष + १$ ही संख्या मिळवून

$$क्ष^4 + २ क्ष^2 + १ = ४ क्ष^2 + ४०० क्ष + १००००$$

उभयपक्षांचीं वर्गमूलें काढून

$$क्ष^2 + १ = २ क्ष + १००$$

स्थलांतर करून

$$क्ष^2 - २क्ष = ९९$$

दोन्ही पेक्ष्यांत एक मिळवून व वर्गमूलें काढून

$क्ष - १ = १०$ $\therefore$ $क्ष = ११$ हें उत्तर.

श्लोकः-वनांतराले प्लवगाष्टभागः संवर्गितो वल्गति जातरागः॥ फूत्कारनादप्रतिनादहृष्टा दृष्टा गिरौ द्वादश ते कियंतः॥

अर्थः—एका अरण्यामध्यें कांहीं वानर होते. त्यांपैकीं अष्टमांशाच्या वर्गसंख्येइतके वानर आनंदानें शब्द करीत होते व त्यांच्या फूत्काराच्या प्रतिध्वनीनें आनंदित असे १२ वानर पर्वतावर पाहिले. तर ते सर्व वानर किती होते तें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क्ष = वानरसंख्या धरा.

$$\therefore \left(\frac{क्ष}{८}\right)^2 + १२ = क्ष$$

$$\frac{क्ष^2}{६४} + १२ = क्ष$$

समच्छेद करून

$क्ष^2 + ७६८ = ६४ क्ष$

स्थलांतर करून

$क्ष^2 - ६४ क्ष = - ७६८$

दोन्ही पेक्ष्यांत ३२ चा वर्ग मिळवून

$क्ष^2 - ६४ क्ष + १०२४ = - ७६८ + १०२४$

दोन्ही पक्षांचीं मूलें काढून

$क्ष - ३२ = \pm १६$

$\therefore$ क्ष = ४८ हें उत्तर.

अथवा क्ष = १६ हें उत्तर.

श्लोकः--यूथात्पंचाशकस्त्र्यूनो वर्गितो गव्हरं गतः॥ दृष्टः शाखामृगः शाखामारूढो वद ते कति॥

अर्थः—एके ठिकाणीं वानरसमूह होता. त्यांपैकीं $\left(\frac{\text{वानरसमूह}}{५}-३\right)^२$ इतके वानर गुहेमध्यें गेले व एक वानर झाडावर चढला. तर सर्व वानर किती होते तें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क्ष = वानरसंख्या धरा.

$$\left(\frac{क्ष}{५}-३\right)^२+१=क्ष$$

$$\frac{क्ष^२}{२५}+९-\frac{६\,क्ष}{५}+१=क्ष$$

समच्छेद करून

$$क्ष^२+२२५-३०\,क्ष+२५=२५\,क्ष$$

स्थलांतर करून

$$क्ष^२-५५\,क्ष=-२५०$$

उभयपक्षांस ४ नीं गुणून व ५५ चा वर्ग ३०२५ मिळवून

$$४\,क्ष^२-२२०\,क्ष+३०२५=-१०००+३०२५$$

उभयपक्षांचीं वर्गमूलें काढून

$$२\,क्ष-५५=४५$$

$\therefore$ क्ष = ५० हें उत्तर.

श्लोकः--कर्णस्य त्रिलवेनोना द्वादशांगुलशंकुभा॥ चतुर्दशांगुला जाता गणक ब्रूहि तां द्रुतं॥

अर्थः—बारा अंगुलें शंकूच्या छायेंतून छायाकर्णाचा तृतीयांश वजा केला असतां १४ अंगुलें शिल्लक राहतात. तर द्वादशांगुलशंकूची छाया किती अंगुलें आहे तें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क्ष = छाया धरली

$\therefore$ $शंकु^२+छाया^२=छायाकर्ण^२$

यासारणी वरून

$$१४४ + \text{क्ष}^{२} = \text{छायाकर्ण}^{२}$$

$$\therefore \quad \text{छायाकर्ण} = \sqrt{१४४ + \text{क्ष}^{२}}$$

आतां उदाहरणांत सांगितल्यावरून

$$\text{क्ष} - \frac{\sqrt{१४४ + \text{क्ष}^{२}}}{३} = १४$$

समच्छेद करून

$$३\text{क्ष} - \sqrt{१४४ + \text{क्ष}^{२}} = ४२$$

स्थलांतर करून

$$३\,\text{क्ष} - ४२ = \sqrt{१४४ + \text{क्ष}^{२}}$$

उभयपक्षांचे वर्ग करून

$$९\,\text{क्ष}^{२} + १७६४ - २५२\,\text{क्ष} = १४४ + \text{क्ष}^{२}$$

स्थलांतर करून

$$८\,\text{क्ष}^{२} - २५२\,\text{क्ष} = -१६२०.$$

उभयपक्षांस २ नीं गुणून ६३ चा वर्ग ३९६९ मिळवून व वर्ग-मूळें काढून

$$४\,\text{क्ष} - ६३ = २७$$

$$\therefore \quad ४\,\text{क्ष} = ९०$$

$$\therefore \quad \text{क्ष} = \frac{४५}{२} \text{ हें उत्तर.}$$

श्लोकः—चत्वारो राशयः के ते मूलदा ये द्विसंयुताः ॥ द्वयोर्द्वयोर्यथासन्नघाताश्चाष्टादशान्विताः ॥ मूलदाः सर्वमूलैक्यादेकादशयुतात् पदं ॥ त्रयोदश सखे जातं बीजज्ञ वद तान् मम ॥

अर्थः—चार राशि (संख्या) आहेत. त्या अशा कीं, त्या प्रत्येकांत जर दोन दोन मिळविले तर वर्गमूल निघतें व क्रमानें दोन दोन राशींचा गुणाकार करून १८ मिळविले असतां वर्गमूळें बरोबर निघतात. व त्या सर्व (७) वर्गमूळांचा योग करून ११ मिळविले असतां जी संख्या होईल तिचें वर्गमूळ १३ येतें. तर ते चार राशी कोणते ते सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{क्ष}^{२} - २ = \text{प्रथमराशि}$$

$$\text{क्ष}^{२} + ६\,\text{क्ष} + ७ = \text{द्वितीयराशि}$$

$क्ष^{2} + १२ क्ष + ३४ =$ तृतीयराशि

$क्ष^{2} + १८ क्ष + ७९ =$ चतुर्थराशि

याप्रमाणें विचारलेल्या चार राशि आहेत अशी कल्पना करून उदाहरणांत सांगितल्याप्रमाणें वर्गमूळें काढूं.

(१) कल्पिलेल्या प्रथम राशीमध्यें दोन मिळवून वर्गमूळ (क्ष) आलें.

(२) कल्पिलेल्या दुसऱ्या राशीमध्यें दोन मिळवून वर्गमूळ (क्ष + ३) आलें.

(३) तिसऱ्या राशीमध्यें दोन मिळवून वर्गमूळ (क्ष + ६) आलें.

(४) चवथ्यावरून वर्गमूळ (क्ष + ९) आलें.

(५) प्रथमराशि व द्वितीयराशि यांचा गुणाकार करून १८ मिळवून वर्गमूळ $क्ष^{2} + ३ क्ष - २$ आलें.

(६) द्वितीयराशि व तृतीयराशि यांच्या गुणाकारांत १८ मिळवून वर्गमूळ काढून $क्ष^{2} + ९ क्ष + १६$ आलें.

(७) तृतीयराशि व चतुर्थराशि यांच्या गुणाकारांत १८ मिळवून वर्गमूळ $क्ष^{2} + १५ क्ष + ५२$ आलें.

आतां आणलेल्या सात वर्गमूळांची बेरीज $३ क्ष^{2} + ३१ क्ष + ८४$ ही झाली. या बेरजेमध्यें ११ मिळविले असतां जी संख्या येईल तिचें वर्गमूळ १३ आहे असें उदाहरणांत सांगितलें आहे म्हणून

$३ क्ष^{2} + ३१ क्ष + ८४ + ११ = १६९$

स्थलांतर करून

$३ क्ष^{2} + ३१ क्ष = ७४$

उभयपक्षांस १२ नी गुणून व ३१ चा वर्ग मिळवून

$३६ क्ष^{2} + ३७२ क्ष + ९६१ = ८८८ + ९६१$

उभयपपक्षांचीं वर्गमूळें काढून

$६ क्ष + ३१ = ४३ \quad \therefore \quad क्ष = २$

$$\therefore \left.\begin{array}{r} \text{प्रथमराशि} = २ \\ \text{द्वितीयराशि} = २३ \\ \text{तृतीयराशि} = ६२ \\ \text{चतुर्थराशि} = ११९ \end{array}\right\} \text{हें उत्तर}$$

श्लोकः—राशिक्षेपाद्वधक्षेपो यद्गुणस्तत्पदोत्तरं ॥ अव्यक्तराशयः कल्प्या वर्गिताः क्षेपवर्जिताः ॥

अर्थ :—पूर्वींच्या उदाहरणामध्यें ज्या राशि कल्पना केल्या आहेत, त्यांविषयीं रीति या श्लोकांत दिली आहे ती अशीः— राशीला मिळवि-

ण्याची जी संख्या २ सांगितली आहे तिला राशिक्षेप म्हणावें. व राशींच्या गुणाकारामध्यें मिळविण्याची जी संख्या १८ सांगितली आहे तिला वधक्षेप असें म्हणावें.

वधक्षेपास राशिक्षेपानें भागून जो भागाकार येईल त्याचें मूल काढावें, नंतर त्या वर्गमूल संख्येनें अधिक अधिक अशा चार मूल संख्येंचे वर्ग करून क्षेप २ कमी करावा. म्हणजे कल्पित अव्यक्त राशि येतात.

जसें वधक्षेपास राशिक्षेपानें भागून भागाकार $\frac{१८}{२} = ९$ आला. याचें वर्गमूळ ३ आहे.

$\therefore$ प्रथमराशि $= (\text{क्ष}^{२}) - २ = \text{क्ष}^{२} - २.$

द्वितीयराशि $= (\text{क्ष} + ३)^{२} - २ = \text{क्ष}^{२} + ६\,\text{क्ष} + ७.$

तृतीयराशि $= (\text{क्ष} + ३ + ३)^{२} - २ = \text{क्ष}^{२} + १२\,\text{क्ष} + ३४.$

चतुर्थराशि $= (\text{क्ष} + ३ + ३ + ३)^{२} - २ = \text{क्ष}^{२} + १८\,\text{क्ष} + ७९.$

याचप्रमाणें पूर्वींच्या उदाहरणामध्यें राशिकल्पना केलेली आहे.

आतां या दिलेल्या रीतीची उपपत्ति देऊं.

प्रथमराशि + राशिक्षेप = प्रथममूल^{२}

$\therefore$ प्रथमराशि = प्र. मू^{२} − रा. क्षे........................(१)

द्वितीयराशि + राशिक्षेप = द्वितीयमूल^{२}

$\therefore$ द्वितीयराशि = द्वि. मू^{२} − रा. क्षे......................(२)

(१) व (२) या समीकरणांवरून.

प्रथमराशि × द्वितीयराशि = (प्र. मू^{२} − क्षे) (द्वि. मू^{२} − क्षे)

$\therefore$ राशिवध = प्र. मू^{२} × द्वि. मू^{२} − द्वि. मू^{२} × क्षे − प्र. मू^{२} × क्षे + क्षे^{२}

= प्र. मू^{२} × द्वि. मू^{२} − क्षे (द्वि. मू^{२} + प्र. मू^{२}) + क्षे^{२}

= प्र. मू^{२} × द्वि. मू^{२} − (द्वि. मू − प्र. मू)^{२} क्षे + क्षे^{२} − २ द्वि. मू. × प्र. मू × क्षे.

उभयपक्षामध्यें क्षे (द्वि. मू − प्र. मू)^{२} मिळविले असतां बरोबर वर्गमूल निघते व राशिवधांत १८ मिळविले तर वर्गमूल निघतें असें उदाहरणांत सागितलें आहे, म्हणून

क्षे (द्वि. मू − प्र. मू)^{२} = १८

$\therefore$ द्वि. मू − प्र. मू $= \sqrt{\frac{१८}{\text{क्षे}}}$

$$\therefore \quad \text{मूलांतर} = \sqrt{\frac{१८}{२}} = ३$$

यावरून असें सिद्ध झालें कीं, पहिल्या व दुसऱ्या मूलामध्यें अंतर **३ चें** आहे. याचप्रमाणें दुसऱ्या आणि तिसऱ्या मूलामध्यें आणि तिसऱ्या व चवथ्या मूलामध्यें अंतर ३ चें आहे असें सिद्ध करितां येईल. म्हणून

क्ष = प्रथममूल धरलें तर

क्ष + ३ = द्वितीयमूल.

क्ष + ६ = तृतीयमूल.

क्ष + ९ = चतुर्थमूल येतें.

ह्या किंमती (१) (२) इत्यादिकांमध्यें ठेविल्या असतां कल्पितराशी येतील हें उघड आहे.

श्लोकः—क्षेत्रे तिथिनखैस्तुल्ये दोःकोटी तत्र का श्रुतिः ॥ उपपत्तिश्च रूढस्य गणितस्याथकथ्यतां ॥

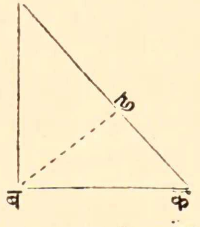
अर्थ :—एका काटकोण त्रिकोणांतील भुज १५ व कोटी २० आहे, तर **कर्ण** किती हें सांग ? हें उदाहरण भुज^२ + कोटि^{२} = कर्ण^२ या सारणीवरून सुटेल हें प्रसिद्धच आहे. या प्रसिद्ध सारणीची उपपत्ति बीजक्रियेनें दाखवा ?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$$(१५)^२ + (२०)^२ = \text{कर्ण}^२$$

$$\therefore \text{कर्ण} = \sqrt{२२५ + ४००} = २५ \text{ हें उत्तर.}$$

उपपत्तीकरितां आकृति.



या आकृतीमध्यें अबक हा काटकोण त्रिकोण आहे. अब = भुज, बक = कोटि, अक = कर्ण, बड हा लंब अक या कर्णावर काढिला आहे.

आतां अडब व बअक हे दोन्ही त्रिकोण सरूप आहेत कारण दोन्ही त्रिकोणांचे परस्पर तिन्ही कोन समान आहेत म्हणून

$$\frac{\text{कर्ण}}{\text{भुज}} = \frac{\text{भुज}}{\text{अड}}$$

$$\therefore \quad \text{अड} = \frac{\text{भुज}^{२}}{\text{कर्ण}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

आणि बडक व अबक हे दोन्ही त्रिकोण सरूप आहेत म्हणून

$$\frac{\text{कर्ण}}{\text{कोटि}} = \frac{\text{कोटि}}{\text{डक}}$$

$$\therefore \quad \text{डक} = \frac{\text{कोटि}^{२}}{\text{कर्ण}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

(१) व (२) या समीकरणावरून

$$\text{अड} + \text{डक} = \frac{\text{भुज}^{२}}{\text{कर्ण}} + \frac{\text{कोटि}^{२}}{\text{कर्ण}}$$

$$\text{अड} + \text{डक} = \text{कर्ण}$$

$$\therefore \quad \text{कर्ण} = \frac{\text{भुज}^{२} + \text{कोटि}^{२}}{\text{कर्ण}}$$

$$\therefore \quad \text{कर्ण}^{२} = \text{भुज}^{२} + \text{कोटि}^{२}.$$

∴ इष्टसिद्धी झाली.

श्लोकः—भुजात् त्र्यूनात्पदं व्येकं कोटिकर्णांतरं सखे॥ यत्र तत्र वद क्षेत्रे दोः कोटिश्रवणान् मम ॥

अर्थः—ज्या काटकोण त्रिकोणांतील भुजांतून ३ वजा केले, वर्गमूल काढिलें व एक कमी केला असतां कोटि व कर्ण यांचें अंतर येतें, तर भुज, कोटि व कर्ण किती तें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\sqrt{\text{भुज} - ३} - १ = \text{कोटिकर्णांतर}$$

या दिलेल्या समीकरणामध्यें कोटिकर्णांतराबरोबर इष्ट संख्या २ धरून

$$\sqrt{\text{भुज} - ३} - १ = २$$

$$\therefore \quad \sqrt{\text{भुज} - ३} = ३$$

$$\therefore \quad \text{भुज} = १२$$

$$\therefore \quad \text{भुज}^{२} = १४४ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\text{कर्ण} - \text{कोटि} = २ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

$$भुज^2 = कर्ण^2 - कोटि^2$$

$$\therefore \quad भुज^2 = (क - को)(क + को)$$

यांत (१) व (२) मधील किंमती ठेऊन

$$१४४ = २ (क + को)$$

$$\therefore \quad क + को = ७२ \ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

(२) व (३) पासून

$$२ \text{ कर्ण} = ७४ + २$$

$$\therefore \left.\begin{array}{r} कर्ण = ३७ \\ कोटि = ३५ \\ भुज = १२ \end{array}\right\} \text{ हें उत्तर}$$

याप्रमाणें इष्टवशेकरून अनंत उत्तरें येतील.

श्लोक-वर्गयोगस्य यद्राश्योर्युतिवर्गस्य चांतरं ॥ द्विघ्नघात-समानं स्यात् द्वयोरव्यक्तयोर्यथा ॥

अर्थ—दोन राशींच्या वर्गांचा योग व त्याच दोन राशींच्या योगाचा वर्ग यांचें अंतर हें, त्याच दोन राशींच्या गुणाकराच्या दुपटी-बरोबर असतें. जसें दोन अव्यक्तांचें असतें तसें.

उपपत्ति.

$$क्ष^2 + य^2 - (क्ष + य)^2 =$$

$$क्ष^2 + य^2 - क्ष^2 - २ क्ष य - य^2 = - २ क्षय$$

चिन्हें पालटून

$$(क्ष + य)^2 - (क्ष^2 + य^2) = २ क्षय.$$

$\therefore$ इष्ट सिद्धि झाली.

श्लोक-चतुर्गुणस्य घातस्य युतिवर्गस्य चांतरं ॥ राश्यंतर कृतेस्तुल्यं द्वयोरव्यक्तयोर्यथा ॥

अर्थ—दोन अव्यक्तराशीप्रमाणें दोन व्यक्तराशींच्या बेरजेचा वर्ग व त्याच दोन राशींच्या गुणाकाराची चौपट त्यांचें अंतर हें, त्याच दोन राशींच्या अंतराच्या वर्गाबरोबर असतें.

उपपत्ति.

$$(अ + ब)^2 - ४ अब =$$

$$अ^2 + ब^2 + २ अब - ४ अब =$$

$$अ^2 + ब^2 - २ अब = (अ - ब)^2.$$

श्लोक–वर्गयोश्चांतरं राश्योर्योगांतरहतेः समं ॥

अर्थ—दोनराशींच्या वर्गांचें अंतर हें, त्याच दोन राशींचा योग व अंतर यांच्या गुणाकाराबरोबर असतें.

उपपत्ति.

$$(अ + ब)(अ - ब) =$$

$$अ^{२} + अब - अब - ब^{२} = अ^{२} - ब^{२}.$$

श्लोक–चत्वारिंश द्युतिर्येषां दोःकोटिश्रवसां वद ॥ भुजकोटिवधो येषु शतं विंशतिसंयुतं ॥

अर्थ—भुज, कोटि व कर्ण यांची बेरीज ४० आहे व भुजकोटींचा गुणाकार १२० आहे. तर भुज, कोटी व कर्ण हे पृथक् पृथक् सांग ?

उत्तरानिष्काशनक्रिया.

क्ष = कर्ण धरा.

$$भुज + कोटि + कर्ण = ४०$$

$$\therefore \quad भुज + कोटि = ४० - क्ष$$

$$भु^{२} + को^{२} + २\,भु.\,को. = १६०० + क्ष^{२} - ८०\,क्ष$$

यांत $भु^{२} + को^{२} = क्ष^{२}$ ही किंमत ठेऊन

$$क्ष^{२} + २\,भु.\,को = १६०० + क्ष^{२} - ८०\,क्ष$$

$$\therefore \quad ८०\,क्ष = १६०० - २\,भु.\,को$$

यांत भु. को = १२० ही किंमत ठेऊन

$$८०\,क्ष = १६०० - २४०$$

$$\therefore \quad क्ष = १७$$

$$\therefore \quad भु + को = २३ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

आतां $(भु - को)^{२} = (भु + को)^{२} - ४\,भु.\,को$

यांत भु + को = २३ व भु. को = १२०

ह्या किंमती ठेऊन

$$(भु - को)^{२} = ५२९ - ४ \times १२०$$

$$\therefore \quad भु - को = ७ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

आतां (१) व (२) पासून

भुज = १५ व कोटि = ८ हें उत्तर.

श्लोक—योगो दोःकोटिकर्णानां षट्पंचाशत् वधस्तथा ॥ षट्शती सप्तभिः क्षुण्णा येषां तान् मे पृथक् वद ॥

अर्थ—भुज + कोटि + कर्ण = ५६ आणि भुज × कोटि × कर्ण = ४२०० हीं दोन समीकरणें दिलीं आहेत तर भुजादिकांच्या किमती सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$भु + को + क = ५६ \quad \text{......}(१)$$
$$भु \times को \times क = ४२०० \quad \text{......}(२)$$
$$भु^२ + को^२ = क^२ \quad \text{......}(३)$$

समीकरण (१) वरून

$$भु + को = ५६ - क \quad \text{......}(४)$$

समीकरण (२) वरून

$$भु \times को = \frac{४२००}{क} \quad \text{......}(५)$$

आतां $(भु + को)^२ - (भु^२ + को^२) = २ \, भु. \, को$

या सारणीमध्यें वरील (३), (४), (५) पैकीं किंमती ठेऊन

$$(५६ - क)^२ - क^२ = २ \times \frac{४२००}{क}$$
$$\therefore \quad ३१३६ + क^२ - ११२क - क^२ = \frac{८४००}{क}$$
$$\therefore \quad ३१३६ - ११२क = \frac{८४००}{क}$$

समच्छेद करून

$$३१३६क - ११२क^२ = ८४००$$

११२ चा संक्षेप देऊन व स्थलांतर करून

$$क^२ - २८क = - ७५$$

उभयपक्षांत १९६ मिळवून

$$क^२ - २८क + १९६ = १२१$$

वर्गमूळें काढून

$$क - १४ = ११$$
$$\therefore \quad कर्ण = २५$$

ही किंमत (४) मध्यें ठेऊन

$$भु + को = ३१ \quad \text{......}(६)$$

(५) मध्यें कर्णाची किंमत ठेऊन

$$भु. \, को = १६८ \quad \text{......}(७)$$

आतां $(भु - को)^२ = (भु + को)^२ - ४ \, भु. \, को.$ या सारणीमध्यें (६) व (७) पैकीं किंमती ठेऊन

$$(भु - को)^२ = (३१)^२ - ४ \times १६८$$
$$\therefore \quad भु - को = १७ \quad \text{......}(८)$$

(६) व (८) यापासून

भुज = २४ व कोटि = ७ हें उत्तर.

याप्रमाणें मध्यमाहरणप्रकरणाचें भाषांतर संपलें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

अनेकवर्णसमीकरणप्रकरण.

श्लोक–आद्यं वर्णं शोधयेदन्यपक्षादन्यान् रूपाण्यन्यतश्चाद्यभक्ते। पक्षेऽन्यस्मिन्नाद्यवर्णोन्मितिः स्याद्वर्णस्यैकस्योन्मितीनां बहुत्वे ॥ समीकृतच्छेदगमे तु ताभ्यस्तदन्यवर्णोन्मितयः प्रसाध्याः ॥ अंत्योन्मितौ कुट्टविधेर्गुणाप्ती ते भाज्यतद्भाजकवर्णमाने ॥ अन्येऽपि भाज्ये यदि सन्ति वर्णास्तन्मानमिष्टं परिकल्प्य साध्ये ॥ विलोमकोत्थापनतोन्यवर्णमानानि भिन्नं यदि मानमेवं ॥ भूयः कार्यः कुट्टकोत्रांत्यवर्णं तेनोत्थाप्योत्थापयेद्व्यस्तमाद्यात् ॥

अर्थ—ज्या उदाहरणामध्यें बहुत अव्यक्तराशी आहेत, त्यांत अव्यक्तराशींचीं मानें या, का, नी, क्ष, य, ज इत्यादि धरून उदाहरणांत सांगितल्या प्रमाणें क्रिया करून जितकीं समीकरणें तयार होतील तितकीं तयार करावीं. नंतर समीकरणांच्या एका पक्षांतील आद्यवर्णात्मकसंख्या दुसऱ्या पक्षांतील सजातीय संख्येमध्यें वजा करावी. व दुसऱ्या पक्षांतील अन्यवर्णात्मक संख्या व रूपें (केवल संख्या) हीं पहिल्या पक्षांतील सजातीय संख्येमध्यें वजा करावीं. नंतर आद्यवर्णात्मक संख्येच्या गुणकानें दुसऱ्या पक्षास भागिलें असतां आद्यवर्णाची उन्मिती म्हणजे मान येतें.

आतां एकाच वर्णाच्या उन्मिती जर बहुत आल्या तर त्या उन्मितीपासून समीकरणें तयार करून त्यांपासून अन्य वर्णांच्या उन्मिती काढाव्या. व असें एका वर्णाची एकच उन्मिती येईपर्यंत क्रिया करावी. या अंत्य उन्मितीमध्यें जर व्यक्त संख्या असेल तर अन्य वर्णांच्या व्यक्त किंमती निघतील हें स्पष्ट आहे.

अंत्य उन्मितीमध्येंच अव्यक्त असल्यास त्या अव्यक्ताची किंमत मागें सांगितलेल्या कुट्टकाच्या रीतीनें काढावी. नंतर त्यापासून अन्य अव्यक्तांच्या किंमती निघतील.

अंत्य उन्मितीमध्यें एकापेक्षां जास्त अव्यक्तें असतील तर त्यांच्या व्यक्त इष्ट किंमती धरून कुट्टक करावें.

उत्थापनानें (किंमती ठेऊन) अन्यवर्णाची किंमत अपूर्ण संख्यात्मक येत असल्यास त्या ठिकाणीं पुनः कुट्टकानें किंमती काढून अन्यवर्णाच्या व्यक्त किंमती काढाव्या.

श्लोकः—माणिक्यामलनीलमौक्तिकमितिः पंचाष्टसप्त क्रमादेकस्यान्यतरस्य सप्तनवषट् तद्रत्नसंख्या सखे ॥ रूपाणां नवतिर्द्विषष्टिरनयोस्तौतुल्यवित्तौ तथा बीजज्ञ प्रतिरत्नजातिसुमते मौल्यानि शीघ्रं वद ॥

अर्थः—एके ठिकाणीं दोन व्यापारी होते. त्यांपैकीं एकाजवळ ५ माणिक्य, ८ नील, ७ मौक्तिक, व ९० रुपये होते. व दुसऱ्याजवळ ७ माणिक्य, ९ नील, ६ मौक्तिक, आणि ६२ रुपये होते. त्यांनीं आपआपलीं रत्नें विकलीं तेव्हां ते दोघे समधन झाले, तर रत्नांच्या किंमती काय ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = एका माणिक्याची किंमत.

का = एका नीलाची किंमत.

नी = एका मौक्तिकाची किंमत.

याप्रमाणें किंमती धरून

५ या + ८ का + ७ नी + ९० = एकाचें द्रव्य.

७ या + ९ का + ६ नी + ६२ = दुसऱ्याचें द्रव्य.

हीं दोघांचीं द्रव्यें समान आहेत असें उदाहरणामध्यें सांगितलें आहे म्हणून

५ या + ८ का + ७ नी + ९० = ७ या + ९ का + ६ नी + ६२

स्थलांतर करून व समशोधन करून

$$\text{२ या} = -\text{का} + \text{नी} + \text{२८}$$

$$\therefore \quad \text{या} = \frac{-\text{का} + \text{नी} + \text{२८}}{\text{२}}$$

यांत नी = १ इष्टसंख्या धरून

$$\text{या} = \frac{-\text{का} + \text{२९}}{\text{२}}$$

या समीकरणामध्यें कुट्टकाचें स्वरूप आल्यामुळें कुट्टकाच्या रीतीनें लब्धिगुण १४।१ आले म्हणून

$$\left.\begin{array}{l}\text{या} = \text{१४}\\ \text{का} = \text{१}\\ \text{नी} = \text{१}\end{array}\right\}\ \text{हें उत्तर.}$$

अथवा कुट्टकानें लब्धिगुण ३।१३

$$\therefore \left.\begin{aligned} \text{या} &= १३ \\ \text{का} &= ३ \\ \text{नी} &= १ \end{aligned}\right\} \text{ हें उत्तर.}$$

अथवा लब्धिगुण ५।१२

$$\therefore \left.\begin{aligned} \text{या} &= १२ \\ \text{का} &= ५ \\ \text{नी} &= १ \end{aligned}\right\} \text{ हें उत्तर.}$$

इत्यादि अनेक उत्तरें कुट्टकानें येतील.

श्लोकः—**एको ब्रवीति मम देहि शतं धनेन त्वत्तो भवामि हि सखे द्विगुणस्ततोन्यः ॥ ब्रूते दशार्पयसि चेन्मम षड्गुणोहं त्वत्त स्तयोर्वद धने मम किंप्रमाणे ॥**

अर्थः—एक दुसऱ्यास म्हणतो कीं, जर तूं मला १०० रुपये दिलेस, तर तुझ्याजवळच्या रुपयांच्या दुप्पट रुपये माझ्याजवळ होतील. व दुसरा पहिल्यास म्हणतो कीं, तूं जर मला १० रुपये दिलेस तर तुझ्या सहापट रुपये मजजवळ होतील. तर दोघांजवळ रुपये किती आहेत तें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = एकाचे रुपये.

का = दुसऱ्याचे रुपये धरून

$$\text{या} + १०० = २ (\text{का} - १००)$$

$$\therefore \text{या} = २ \text{ का} - ३००$$

$$६ (\text{या} - १०) = \text{का} + १०$$

$$\therefore ६ \text{ या} - ६० = \text{का} + १०$$

$$\therefore \text{या} = \frac{\text{का} + ७०}{६}$$

एकाच अव्यक्ताच्या दोन उन्मितींचें साम्य करून

$$२ \text{ का} - ३०० = \frac{\text{का} + ७०}{६}$$

समच्छेद करून

$$१२ \text{ का} - १८०० = \text{का} + ७०$$

$$\therefore ११ \text{ का} = १८७०$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{का} = १७० \\ \text{आणि या} = ४० \end{array}\right\} \quad \text{हें उत्तर.}$$

श्लोक :—अश्वाः पंचगुणांगमंगलमिता येषां चतुर्णां धनान्युष्ट्राश्च द्विमुनिश्रुतिक्षितिमिता अष्टद्विभूपावकाः ॥ तेषामश्वतरा वृषा मुनिमहीनेत्रेंदुसंख्याः क्रमात्सर्वे तुल्यधनाश्च ते वद सपद्यश्वादिमौल्यानि मे ॥

अर्थ :—एका शहरामध्यें ४ असामी होते. त्यांपैकीं एकाजवळ ५ अश्व, २ उष्ट्र, ८ अश्वतर, आणि ७ वृषभ होते. दुसऱ्याजवळ ३ अश्व, ७ उष्ट्र, २ अश्वतर, व १ वृषभ होता. तिसऱ्याजवळ ६ अश्व, ४ उष्ट्र, १ अश्वतर व २ वृषभ होते. आणि चवथ्याजवळ ८ घोडे, १ उंट, ३ अश्वतर (खेचर), व १ वृषभ होता. सर्वांनीं ते एकाच दरानें विकल्यामुळें सर्व समधन झाले तर अश्वादिकांच्या किंमती काय तें सांग ?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

या = एका अश्वाचें मौल्य.

का = एका उंटाची किंमत.

नी = एका अश्वतराची किंमत.

पी = एका वृषभाची किंमत.

याप्रमाणें किंमती धरून

५ या + २ का + ८ नी + ७ पी = एकाचें धन.

३ या + ७ का + २ नी + १ पी = दुसऱ्याचें धन.

६ या + ४ का + १ नी + २ पी = तिसऱ्याचें धन.

८ या + १ का + ३ नी + १ पी = चवथ्याचें धन.

हीं सर्व धनें समान आहेत म्हणून पहिल्याचें व दुसऱ्याचें साम्य करून

५ या + २ का + ८ नी + ७ पी = ३ या + ७ का + २ नी + पी

$$\therefore \text{या} = \frac{५ \text{ का} - ६ \text{ नी} - ६ \text{ पी}}{२} \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

दुसऱ्याचें व तिसऱ्याचें साम्य करून

३ या + ७ का + २ नी + पी = ६ या + ४ का + नी + २ पी

$$\therefore \text{या} = \frac{३ \text{ का} + \text{नी} - \text{पी}}{३} \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

तिसऱ्याचें व चवथ्याचें साम्य करून

६ या + ४ का + नी + २ पी = ८ या + का + ३ नी + पी

$$\therefore \text{या} = \frac{३ \text{ का} - २ \text{ नी} + १}{२} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

आतां (१) व (२) या समीकरणांपासून

$$\frac{५ \text{ का} - ६ \text{ नी} - ६ \text{ पी}}{२} = \frac{३ \text{ का} + \text{नी} - \text{पी}}{३}$$

समच्छेद करून

$$१५ \text{ का} - १८ \text{ नी} - १८ \text{ पी} = ६ \text{ का} + २ \text{ नी} - २ \text{ पी}$$

$$\therefore \text{का} = \frac{२० \text{ नी} + १६ \text{ पी}}{९} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (४)$$

समीकरण (२) व (३) पासून

$$\frac{३ \text{ का} + \text{नी} - \text{पी}}{३} = \frac{३ \text{ का} - २ \text{ नी} + \text{पी}}{२}$$

समच्छेद करून

$$६ \text{ का} + २ \text{ नी} - २ \text{ पी} = ९ \text{ का} - ६ \text{ नी} + ३ \text{ पी}$$

$$\therefore \text{का} = \frac{८ \text{ नी} - ५ \text{ पी}}{३} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (५)$$

समीकरण (४) व (५) पासून

$$\frac{२० \text{ नी} + १६ \text{ पी}}{९} = \frac{८ \text{ नी} - ५ \text{ पी}}{३}$$

समच्छेद करून

$$६० \text{ नी} + ४८ \text{ पी} = ७२ \text{ नी} - ४५ \text{ पी}$$

$$\therefore \text{नी} = \frac{९३ \text{ पी}}{१२} = \frac{३१ \text{ पी}}{४} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (६)$$

या समीकरणास कुट्टकाचें स्वरूप आल्यामुळें कुट्टकाच्या रीतीनें लब्धिगुण ३१।४ आले म्हणून

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad \text{पी} &= ४ \\ \therefore \quad \text{नी} &= ३१ \\ \therefore \quad \text{का} &= ७६ \\ \therefore \quad \text{या} &= ८५ \end{aligned}\right\} \quad \text{हें उत्तर.}$$

याप्रमाणें अनेक उत्तरें कुट्टकानें येतील.

श्लोकः—त्रिभिः पारावताः पंच पंचभिः सप्त सारसाः ॥ सप्तभिर्नवहंसाश्च नवभिर्बर्हिणां त्रयं ॥ द्रम्मैरवाप्यते द्रम्मशतेन शत मानय ॥ एषां पारावतादीनां विनोदार्थं महीपतेः ॥

अर्थः—बाजारामध्यें ३ द्रम्माला ५ पारावत, ५ द्रम्माला, ७ सारस, ७ द्रम्माला ९ हंस, आणि ९ द्रम्माला ३ मयुर मिळत त. तर १०० द्रम्माला चारी जातीचे १०० पक्षी घ्यावयाचे आहेत, ते किती किती द्रम्माला किती किती पक्षी येतील तें सांग ?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

या = १०० पैकीं पारावतांची किंमत.
का = १०० पैकीं सारसांची किंमत.
नी = १०० पैकीं हंसांची किंमत.
पी = १०० पैकीं मयूरांची किंमत.
याप्रमाणें किंमती धरून
३ द्रम्म : ५ पारावत : : या द्रम्म
या त्रैमाशिकावरून

$$\text{पारावत} = \frac{५ \text{ या}}{३}$$

५ द्रम : ७ सारस : : का
या त्रैराशिकावरून

$$\text{सारस} = \frac{७ \text{ का}}{५}$$

७ द्रम्म : ९ हंस : : नी
या त्रैमाशिकावरून

$$\text{हंस} = \frac{९ \text{ नी}}{७}$$

९ द्रम्म : ३ मयुर : : पी
या त्रैमाशिकावरून

$$\text{मयूर} = \frac{३ \text{ पी}}{९}$$

आतां सर्व पक्ष्यांची बेरीज १०० आहे असें उदाहरणामध्यें सांगितलें म्हणून

$$\frac{५\ या}{३}+\frac{७\ का}{५}+\frac{९\ नी}{७}+\frac{३\ पी}{९}=१००$$

समच्छेद करून

$$\frac{१५७५\ या + १३२३\ का + १२१५\ नी + ३१५\ पी}{९४५}=१००$$

पहिल्या पेस्यांतील अंश व छेद यांस ९ नीं भागून

$$\frac{१७५\ या + १४७\ का + १३५\ नी + ३५\ पी}{१०५}=१००$$

$$\therefore\ या = \frac{-१४७\ का - १३५\ नी - ३५\ पी + १०५००}{१७५}$$

पारावतादि मौल्यांचा योगही १०० आहे ∴

$$या + का + नी + पी = १००$$

$$\therefore\ या = - का - नी - पी = १००$$

$$\therefore\ \frac{-१४७का - १३५नी - ३५पी + १०५००}{१७५} = - का - नी - पी + १००$$

$$-१४७का - १३५नी - ३५पी + १०५०० =$$
$$-१७५का - १७५नी - १७५पी - १७५००$$

समशोधन करून

$$२८\ का = - ४०\ नी - १४०\ पी + ७०००$$

$$\therefore\ का = \frac{-१०\ नी - ३५\ पी + १७५०}{७}$$

ही अंत्य उन्मिति झाली. यामध्यें दोन अव्यक्तें आहेत म्हणून पी = ३३इष्ट धरून

$$का = \frac{-१०\ नी + ५९५}{७}$$

या समीकरणास कुट्टकाचें स्वरूप आल्यामुळें कुट्टकाच्या रीतीनें गुणलब्धि ०।८५ आल्या, म्हणून नी = ० येते. ही किंमत उपयोगाची नाहीं. म्हणून अन्य गुणलब्धी ४९।१५ यावरून

$$\left.\begin{array}{lll} नी = ४९ & \therefore & हंस = ६३ \\ का = १५ & \therefore & सारस = २१ \\ पी = ३३ & \therefore & मयूर = ११ \\ या = ३ & \therefore & पारावत = ५ \end{array}\right\}\ \text{हें उत्तर.}$$

याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक :—षड्भक्तः पंचाग्रः पंचविभक्तो भवेच्चतुष्काग्रः ॥ चतुरुद्धृतस्त्रिकाग्रो द्व्यग्रस्त्रिसमुद्धृतः कःस्यात् ॥

अर्थ :—ज्या राशीस ६ नीं भागिलें असतां ५ शिल्लक राहते, ५ नीं भागिल्यास ४ शिल्लक, ४ नीं भागिल्यास ३ शिल्लक, आणि ३ नीं भागिलें असतां २ शिल्लक राहते, तर तो राशि कोणता आहे हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = राशि धरून

$$\frac{\text{या}}{६} = \text{का} + \frac{५}{६} \therefore \text{या} = ६\,\text{का} + ५ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\frac{\text{या}}{५} = \text{नी} + \frac{४}{५} \therefore \text{या} = ५\,\text{नी} + ४ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

$$\frac{\text{या}}{४} = \text{पी} + \frac{३}{४} \therefore \text{या} = ४\,\text{पी} + ३ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

$$\frac{\text{या}}{३} = \text{लो} + \frac{२}{३} \therefore \text{या} = ३\,\text{लो} + २ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (४)$$

आतां एकाच अव्यक्ताच्या ४ किंमती आल्या म्हणून पहिल्याचें व दुसऱ्याचें साम्य करून

$$६\,\text{का} + ५ = ५\,\text{नी} + ४$$

$$\therefore \text{का} = \frac{५\,\text{नी} - १}{६} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (५)$$

समीकरण (२) व (३) वरून

$$५\,\text{नी} + ४ = ४\,\text{पी} + ३$$

$$\therefore \text{नी} = \frac{४\,\text{पी} - १}{५} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (६)$$

(३) व (४) वरून

$$४\,\text{पी} + ३ = ३\,\text{लो} + २$$

$$\therefore \text{पी} = \frac{३\,\text{लो} - १}{४} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (७)$$

या अंत्योन्मितीपासून कुट्टकाच्या रीतीनें लब्धि २ व गुण ३ आले. यापासून इष्टाहतस्वस्वहरेणयुक्ते इत्यादि रीतीनें इष्टसंख्या ह धरून लब्धि= ३ ह + २ व गुण = ४ ह + ३ आले

$$\therefore \text{लो} = ४\,\text{ह} + ३ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (८)$$

पी = ३ह + २

ही किंमत (६) मध्यें ठेविल्यानें

$$नी = \frac{१२ह + ७}{५}$$

ही (नी) ची किंमत भिन्न (अपूर्णांकात्मक) आल्यामुळें भूयः कार्यः कुट्टकः असें आरंभीं रीतींत सांगितल्यामुळें येथें कुट्टकानें लब्धिगुण ११।४ आले व इष्टाहतस्वस्वहरेण इत्यादि रीतीनें इष्ट (श्वे) धरून

लब्धि = १२ श्वे + ११ = नी

गुण = ५ श्वे + ४ = ह

या किमती मागील समीकरणांमध्यें ठेऊन

लो = २० श्वे + १९

∴ पी = १५ श्वे + १४

नी = १२ श्वे + ११

का = १० श्वे + ९

∴ या = ६० श्वे + ५९

येथें श्वे = ० धरून

या = ५९ हें उत्तर.

श्वे = १ धरून

या = ११९ हें उत्तर.

इत्यादि अनेक उत्तरें येतील.

आर्या—स्युः पंचसप्तनवभिः क्षुण्णेषु हृतेषु केषु विंशत्या ॥ रूपोत्तराणि शेषाण्य वाप्तयश्चापि शेषसमाः.

अर्थ— ज्या तीन संख्यांस क्रमानें ५, ७, ९ या संख्यांनीं गुणून २० नीं भागिलें असतां ज्या लब्धी येतील त्या प्रत्येकींमध्यें एकाचें अंतर राहील व लब्धितुल्य शेष (शिल्लक) राहतील तर त्या तीन संख्या कोणत्या हें सांग ?

उत्तरानिष्काशनक्रिया.

प्रथम का, नी, पी ह्या तीन संख्या आहेत असें धरा. आणि या = प्रथम शेषप्रमाण धरून या + १ = द्वितीयशेष; या + २ = तृतीयशेष.

∴ प्रथमलब्धि = या

द्वितीयलब्धि = या + १

तृतीयलब्धि = या + २

$$\frac{५का}{२०} = या + \frac{या}{२०} \therefore या = \frac{५का}{२१} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(१)$$

$$\frac{७नी}{२०} = या + १ + \frac{या + १}{२०} \therefore या = \frac{७नी - २१}{२१} \quad \ldots\ldots(२)$$

$$\frac{९पी}{२०} = या + २ + \frac{या + २}{२०} \therefore या = \frac{९पी - ४२}{२१} \quad \ldots\ldots(३)$$

आतां (१) व (२) पासून

$$\frac{५का}{२१} = \frac{७नी - २१}{२१}$$

$$\therefore का = \frac{७नी - २१}{५} \quad \ldots\ldots(४)$$

समीकरण (२) व (३) पासून

$$\frac{७नी - २१}{२१} = \frac{९पी - ४२}{२१}$$

$$\therefore \quad नी = \frac{९पी - २१}{७} \quad \ldots\ldots(५)$$

येथें कुट्टकानें लब्धिगुण ६।७ आहे व इष्ट = लो धरून "इष्टाहत स्व स्व हरेण" या रीतीनें

$$लब्धि = ९लो + ६ = नी \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(६)$$
$$गुण = ७लो + ७ = पी \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(७)$$

आतां (६) मधील किंमत (४) मध्यें ठेऊन

$$का = \frac{६३लो + २१}{५}$$

येथें भिन्न (अपूर्णसंख्यात्मक) किंमत आल्यामुळें "भूयः कार्यः कुट्टकः" या रीतीनें पुनः कुट्टकानें लब्धिगुण ४२।३ आले. व इष्ट = ह धरून "इष्टाहतस्वस्वहरेण" या रीतीनें

$$लब्धि = ६३ह + ४२ = का$$
$$गुण = ५ह + ३ = लो$$

या किमती मागील समीकरणांमध्यें व्युत्क्रमानें ठेऊन

$$पी = ३५ह + २८$$
$$नी = ४५ह + ३३$$

$$\text{का} = ६३ह + ४२$$
$$\text{या} = १५ह + १०$$
यांत ह = ० इष्ट धरून

$$\left.\begin{array}{l}\text{का} = ४२\\ \text{नी} = ३३\\ \text{पी} = २८\end{array}\right\} \text{ हें उत्तर.}$$

याप्रमाणें ह बरोबर १·२·३ इत्यादि धरून अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक—एकाग्रो द्विहृतः कः स्यात् द्विकाग्र स्त्रिसमुद्धृतः ॥ त्रिकाग्रः पंचभिर्भक्त स्तद्वदेवाहि लब्धयः ॥

अर्थ—ज्या राशीस २ नें भागिलें असतां शेष १ राहतें; ३ नें भागिलें असतां २ शेष राहतें; आणि ५ नीं भागिलें असतां शेष ३ राहतें. व या कृत्यामध्यें ज्या तीन लब्धि येतील त्यांनाही क्रमानें २।३।५ या संख्यानीं भागिलें असतां १।२।३ अशीं शेषें राहतात तर तो राशि कोणता?

$$\text{या} = \text{इष्टराशि}$$
$$२\text{का} + १ = \text{प्रथमलब्धि}$$
$$३\text{नी} + २ = \text{द्वितीयलब्धि}$$
$$५\text{लो} + ३ = \text{तृतीयलब्धि}$$

याप्रमाणें कल्पना करून

$$\frac{\text{या}}{२} = २\text{का} + १ + \frac{१}{२}$$
$$\therefore \text{या} = ४\text{का} + ३ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$
$$\frac{\text{या}}{३} = ३\text{नी} + २ + \frac{२}{३}$$
$$\therefore \text{या} = ९\text{नी} + ८ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$
$$\frac{\text{या}}{५} = ५\text{लो} + ३ + \frac{३}{५}$$
$$\therefore \text{या} = २५\text{लो} + १८ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

आतां (१) व (२) पासून

$$४\text{का} + ३ = ९\text{नी} + ८$$
$$\therefore \text{का} = \frac{९\text{नी} + ५}{४} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (४)$$

(२) व (३) पासून

$$९\text{नी} + ८ = २५\text{लो} + १८$$
$$\therefore \text{नी} = \frac{२५\text{लो} + १०}{९} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (५)$$

यापासून कुट्टकानें लब्धिगुण १५।५ आले. यापासून इष्ट पी धरून ‘इष्टाहतस्वस्वहरेण’ या रीतीनें

लब्धि = २५पी + १५ = नी ....(६)

गुण = ९पी + ५ = लो ....(७)

आतां (४) मध्यें (६) मधील किंमत ठेऊन

$$का = \frac{२२५पी + १४०}{४}$$

यापासून कुट्टकानें लब्धिगुण २६०।४ आले आणि इष्ट ह धरून इष्टाहतस्वस्वहरेण या रीतीनें

लब्धि = २२५ह + २६० = का

गुण = ४ह + ४ = पी

या किमती मागील समीकरणामध्यें ठेऊन

लो = ३६ह + ४१

नी = १००ह + ११५

का = २२५ह + ४

या = ९००ह + १०४३

येथें ह = ० धरून

या = १०४३ हें उत्तर.

अशीं अनंत उत्तरें येतील.

श्लोक—कौ राशी वद पंचषड्विहृता वेकद्विकाग्रौ ययोर्व्यग्रं त्र्युद्धृत मंतरं नवहृता पंचाग्रका स्याद्युतिः ॥ घातः सप्तहृतः षडग्र इति तौ षट्काष्टकाभ्यां विना विद्वन् कुट्टकवेदिकुंजरघटासंघट्टसिंहोऽसि चेत् ॥

अर्थ—ज्या दोन राशींस ५ व ६ यांनीं भागिलें असतां १ व २ अशीं शेषें राहतात, व त्याच दोन राशींच्या अंतरास ३ नीं भागिलें असतां २ शेष राहतें. त्याच दोन राशींच्या बेरजेस ९ नीं भागिलें असतां ५ शिल्लक राहते, व त्याच दोन राशींच्या गुणाकारास ७ नीं भागिलें असतां ६ शिल्लक राहते. तर अशा दोन राशि ६ व ८ यांवाचून निराळ्या कोणत्या आहेत तें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

५१ = प्रथमराशि.

या = द्वितीयराशि.

याप्रमाणें एक व्यक्त व एक अव्यक्त अशा राशींची कल्पना करून.

$$\frac{या}{६} = का + \frac{२}{६}$$

$\therefore$ या = ६ का + २ ....(१)

उदाहरणांतील दुसऱ्या अटीवरून

$$\frac{६\ का + २ - ५१}{३} = नी + \frac{२}{३}$$

$$\therefore\ का = \frac{३\ नी + ५१}{६} = \frac{नी + १७}{२}$$

येथें कुट्टकानें लब्धिगुण ९।१ आले. इष्ट पी धरून

लब्धि = पी + ९ का ....(२)

गुण = २ पी + १ = नी

आतां (१) मध्यें (२) मधील किंमत ठेऊन

या = ६ पी + ५६ ....(३)

उदाहरणांतील तिसऱ्या आलापा (अटी) वरून

$$\frac{(६\ पी + ५६) + ५१}{९} = लो + \frac{२}{९}$$

$$\therefore\ पी = \frac{९\ लो - १०२}{६} = \frac{३\ लो - ३४}{२}$$

येथें कुट्टकानें लब्धिगुण (− १७) व ० आले. इष्ट ह धरून

लब्धि = ३ ह − १७ = पी ....(४)

गुण = २ ह + ० = लो

समीकरण (३) मध्यें (४) मधील किंमत ठेऊन

या = १८ ह − ४६..(५)

उदाहरणांतील चवथ्या अटीवरून

५१ (१८ ह − ४६) = ९१८ ह − २३४६

$$७\ \Big)\ \begin{array}{l} ९१८\ ह - २३४६ \\ \underline{९१७\ ह - २३४५} \\ \quad ह - १ \end{array}\ \Big(\ १३१\ ह - ३३५$$

या शेषास ७ नी भागून भागाकार श्वे आला व शिल्लक ६ राहिली आहे असें मानून

$$\frac{ह - १}{७} = श्वे + \frac{६}{७}$$

$\therefore$ ह = ७ श्वे + ७

ही किंमत (५) मध्यें ठेऊन

या = १२६ श्वे + ८०

श्वे = ० धरून

या = ८० } हें उत्तर.
प्रथमराशि = ५१ }

याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

श्लोकः--नवभिः सप्तभिः क्षुण्णः को राशि स्त्रिंशता हृतः॥ यदग्रैक्यं फलैस्याढयं भवत् षड्विंशतेर्मितं॥

अर्थः—ज्या राशीस ९ व ७ या संख्यांनीं पृथक् पृथक् गुणून ३० नीं भागिलें असतां ज्या लब्धि व ज्या शिलका राहतील त्या चौघांची बेरीज २६ होते, तर तो राशि कोणता हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = राशि धरून

$$\frac{९ या}{३०} = का + \frac{शे}{३०}$$

$$\frac{७ या}{३०} = का' + \frac{शे'}{३०}$$

या दोन्ही समीकरणांची बेरीज करून

$$\frac{९ या}{३०} + \frac{७ या}{३०} = का + का' + \frac{शे + शे'}{३०}$$

$\therefore$ १६ या = ३० का + ३० का' + शे + शे'

आणि का + का' + शे + शे' = २६

या दोन्ही समीकरणांची वजाबाकी करून

१६ या − २६ = २९ का + २९ का'

$$\therefore \quad या = \frac{२९ (का + का') + २६}{१६}$$

येथें कुट्टकाच्या रीतीनें लब्धिगुण २७।१४ आले.

$\therefore$ या = २७ हें उत्तर.

श्लोकः—कस्त्रिसप्तनवक्षुण्णो राशि स्त्रिंशद्विभाजितः ॥ यदग्रैक्यमपि त्रिंशत्धृतमेकादशाग्रकं ॥

अर्थः—ज्या राशीस ३, ७, ९ या संख्यांनीं पृथक् गुणून जे गुणाकार येतील त्यांस ३० नी भागून ज्या शिलका राहतील त्या शेषांच्या बेरजेसही ३० नीं भागिलें असतां ११ शेष राहील. तर तो राशि कोणता हें सांग ?

उत्तरनिष्कासनक्रिया.

या = राशी धरून

$$\frac{३ \text{ या}}{३०} = \text{ल} + \frac{\text{शे}}{३०}$$

$$\frac{७ \text{ या}}{३०} = \text{ल}' + \frac{\text{शे}'}{३०}$$

$$\frac{९ \text{ या}}{३०} = \text{ल}'' + \frac{\text{शे}''}{३०}$$

या तिन्ही समीकरणावरून

$$१९ \text{ या} = ३० (\text{ल} + \text{ल}' + \text{ल}'') + (\text{शे} + \text{शे}' \text{ शे}'')$$

$$\therefore \text{शे} + \text{शे}' + \text{शे}'' = १९ \text{ या} - ३० (\text{ल} + \text{ल}' + \text{ल}'')$$

$$\text{व} \quad \frac{\text{शे} + \text{शे}' + \text{शे}''}{३०} = \text{का} + \frac{११}{३०}$$

$$\therefore \text{शे} + \text{शे}' + \text{शे}'' = ३० \text{ का} + ११$$

आतां शेषैक्यांच्या किंमतींचें साम्य करून

$$१९ \text{ या} - ३० (\text{ल} + \text{ल}' + \text{ल}'') = ३० \text{ का} + ११$$

$$\therefore \text{या} = \frac{३० (\text{ल} + \text{ल}' + \text{ल}'' + \text{का}) + ११}{१९}$$

$\text{ल} + \text{ल}' + \text{ल}'' + \text{का} = \text{नी}$ धरून

$$\text{या} = \frac{३० \text{ नी} + ११}{१९}$$

येथें कुट्टकानें लब्धिगुण २९।१८ आले म्हणून

या = २९ हें उत्तर.

श्लोकः—कस्त्रयोर्विंशतिक्षुण्णः षष्ट्याशीत्या हृतः पृथक्॥ यदग्रैक्यं शतं दृष्टं कुट्टकज्ञ वदाशु तं॥

अर्थः—ज्या राशीस २३ नी गुणून जो गुणाकार येईल त्यांस ६० व ८० या संख्यांनीं पृथक् भागिलें असतां ज्या शिलका राहतील त्यांची बेरीज १०० होते, तर तो राशि कोणता हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{या} = \text{राशि}$$

व $४० = $ साठांनीं भागून शेष

याप्रमाणें कल्पना करून

$$१०० - ४० = ६० = \text{द्वितीयशेष झालें.}$$

आतां $\dfrac{२३\text{या}}{६०} = \text{का} + \dfrac{४०}{६०}$

$$\therefore \quad \text{या} = \frac{६०\text{का} + ४०}{२३} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(१)$$

आणि $\dfrac{२३\text{या}}{८०} = \text{नी} + \dfrac{६०}{८०}$

$$\therefore \quad \text{या} = \frac{८०\text{नी} + ६०}{२३} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(२)$$

(१) व (२) वरून

$$\frac{६०\text{का} + ४०}{२३} = \frac{८०\text{नी} + ६०}{२३}$$

$$\therefore \quad \text{का} = \frac{८०\text{नी} + २०}{६०} = \frac{४\text{नी} + १}{३}$$

येथें कुट्टकानें लब्धिगुण ३।२ आले. इष्ट पी धरून "इष्टाहतस्वस्वहरेण" या रीतीनें

$$\text{लब्धि} = ४\text{पी} + ३ = \text{का} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(३)$$

$$\text{गुण} = ३\text{पी} + २ = \text{नी}$$

आतां (१) मध्यें (३) मधील किंमत ठेऊन

$$\text{या} = \frac{२४०\text{पी} + २२०}{२३} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(४)$$

ही किंमत अपूर्णांकात्मक आल्यामुळें कुट्टकानें पुनः लब्धिगुण २०।१ आणिले. इष्ट लो धरून 'इष्टाहत' रीतीनें

$$\text{लब्धि} = २४०\text{लो} + २० = \text{या}$$

$$\text{गुण} = २३\text{लो} + १ = \text{पी}$$

येथें लो = ० धरून

या = २० हें उत्तर

लो = १ धरून

या = २६० हें उत्तर.

याप्रमाणें अनेक उत्तरें समजावीं.

श्लोकः—कः पंचगुणितो राशिस्त्रयोदशविभाजितः ॥ यल्लब्धं राशिनायुक्तं त्रिंशज्जातं वदाशु तं ॥

अर्थ—ज्या राशीस ५ नीं गुणून १३ नीं भागिलें असतां जें लब्ध येईल तें राशीमध्यें मिळविलें असतां बेरीज ३० होते तर तो राशि कोणता?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

या = राशी धरून

$$\frac{५या}{१३} + या = ३०$$

$$\therefore\ ५या + १३या = ३९०$$

$$१८या = ३९०$$

$$\therefore\ या = \frac{३९०}{१८} = \frac{६५}{३}$$ हें उत्तर.

हें उदाहरण या प्रकरणांत देण्याची जरूर नव्हती.

श्लोक-षडष्टशतकाः क्रीत्वा समार्घेण फलानि ये ॥ विक्रीय चपुनःशेषमेकैकं पंचभिः पणैः ॥ जाताः समपणा स्तेषां कः क्रयो विक्रयश्च कः ॥

अर्थः—फलांचा व्यापार करणारे तीन गृहस्थ होते त्यांपैकीं एकाजवळ ६ पैसे होते, दुसऱ्याजवळ ८ पैसे होते, आणि तिसऱ्याजवळ १०० पैसे होते. त्यांनीं एकाच दरानें आपआपल्या पैशांचीं फळें विकत घेतलीं; नंतर तीं फळें त्यांनीं एकाच दरानें विकलीं. तेव्हां जे पैसे प्रत्येकास मिळाले ते, व विकून जीं शेषफळें राहिलीं होतीं तीं त्यांनीं ५ पैशांस एक फळ या दरानें विकून जे पैसे आले ते, मिळून प्रत्येकापाशीं सारखे पैसे झाले, तर त्यांनीं कोणत्या दरानें फळें विकत घेतलीं व कोणत्या दरानें विकलीं तें सांग?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

या = क्रय (खरेदीचा दर)

११० = विक्रय (विक्रीचा दर)

या प्रमाणें कल्पना करून त्रैराशिकानें

६ या = पहिल्याच्चीं फळें

८ या = दुसऱ्याचीं फळें

१०० या = तिसऱ्याचीं बळें.

$$\frac{६\ या}{११०} = का + \frac{६\ या - ११०\ का}{११०}$$

∴ का = प्रथम विक्रीचे पैसे आणि

६ या − ११० का = विकून शेषफळें राहिलेलीं

∴ का + ५ (६ या − ११० का) =

३० या − ५४९ = पहिल्याचे सर्व पैसे.

आतां ६ : का :: ८

या त्रैराक्षिकानें लब्धि $\frac{४\ का}{३}$ येते.

$$\therefore \frac{८\ या}{११०} = \frac{४\ का}{३} + \frac{\frac{२४\ या - ४४०\ का}{३}}{११०}$$

$\frac{४\ का}{३}$ = दुसऱ्याचे पहिल्या विक्रीचे पैसे व

$\frac{२४\ या - ४४०\ का}{३}$ = शेषफळें.

$$\therefore \frac{४\ का}{३} + ५\left(\frac{२४\ या - ४४०\ का}{३}\right) =$$

$\frac{१२०\ या - २१९६\ का}{३}$ = दुसऱ्याचे सर्व पैसे.

आतां ६ : का :: १००

या त्रैराशिकानें लब्धि $\frac{५०\ का}{३}$ आली.

$$\therefore \frac{१००\ या}{११०} = \frac{५०\ का}{३} + \frac{\frac{३००\ या - ५५००\ का}{३}}{११०}$$

$$\therefore \frac{५०\ का}{३} + ५\left(\frac{३००\ या - ५५००\ का}{३}\right) =$$

$\frac{१५०० \text{ या} - २७४५० \text{ का}}{३}$ = तिसऱ्याचे सर्व पैसे.

उदाहरणामध्यें तिघांचे पैसे समान आहेत असें सांगितलें आहे म्हणून पहिल्याचे व दुसऱ्याचे पैशांचे साम्य करून

$३० \text{ या} - ५४९ = \frac{१२० \text{ या} - २१९६ \text{ का}}{३}$

$\therefore\ ९० \text{ या} - १६४७ = १२० \text{ या} - २१९६ \text{ का}$

$\therefore\ \text{या} = \frac{५४९ \text{ का}}{३०}$

हीच किंमत दुसऱ्याचे व तिसऱ्याचे पैशांचे साम्य करून येते म्हणून कुट्टकानें का = ३० धरून

या = ५४९ = क्रय
११० = विक्रय } हें उत्तर.

या उदाहरणामध्यें लब्धि (का) ही ऋणशेषात्मक धरलेली आहे म्हणून ती धनशेषात्मक करण्याकरितां कुट्टकानें आलेल्या (का) च्या किंमतीमध्यें १ वजा केला असतां ताळा जुळेल.

याप्रमाणें अनेकवर्णसमीकरणप्रकरणाचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

॥ श्रीगणेशायननमः ॥

अनेकवर्णमध्यमाहरणप्रकरणं.

श्लोक-वर्गाद्यं चेत्तुल्यशुद्धौ कृतायां पक्षस्यैकस्योक्तव द्वर्गमूलं ॥ वर्गप्रकृत्या परपक्षमूलं तयोः समीकारविधिःपुनश्च ॥ वर्गप्रकृत्या विषयो नचेत्स्यात्तदान्यवर्णस्य कृतेः समं तं ॥ कृत्वापरंपक्षमथान्यमानं कृतिप्रकृत्याद्यमिति स्तथाच ॥ वर्गप्रकृत्या विषयो यथा स्यात्तथा सुधीभिर्बहुधा विचिंत्यं ॥

अर्थ-समीकरणामध्यें समशोधन क्रियाकरून अव्यक्तवर्गादि आल्यास एकापक्षाचें वर्गमूळ मागें सागितल्याप्रमाणें काढावें व दुसऱ्या पक्षाचें मूळ वर्गप्रकृतीच्या पद्धतीनें काढावें. नंतर काढलेल्या मूळाचें साम्य करून त्या समीकरणापासून अव्यक्ताची किंमत काढावी.

दुसऱ्या पक्षामध्यें वर्गप्रकृतीचा विषय नसल्यास तो दुसरा पक्ष अन्य-वर्णाच्या वर्गाबरोबर कल्पना करून वर्गप्रकृतीचा विषय येईल अशी क्रिया करून अव्यक्तमार्गे साधावीत.

श्लोक—बीजं मति विविधवर्णसहायिनी हि मंदावबोधविधये विबुधैर्निजाद्यैः॥ विस्तारिता गणकतामरसांशुमद्भिर्या सैव बीज-गणिताह्वयतामुपेता॥

अर्थ—गणकरूपकमलांस सूर्यासारखे अशा प्राचीन पंडितांनीं मंद-मति लोकांस ज्ञान होण्याकरितां विविधअव्यक्तवर्ण सहाय आहेत अशी जी स्वकीयबुद्धि विस्तारित केली तिलाच हल्लीं बीजगणित असें म्हणतात.

श्लोकः—एकस्य पक्षस्य पदे गृहीते द्वितीयपक्षे यदि रूपयुक्तः॥ अव्यक्तवर्गोऽत्र कृतिप्रकृत्या साध्ये तथा ज्येष्ठकनिष्ठमूले॥ ज्येष्ठं तयोः प्रथमपक्षपदेन तुल्यं कृत्वोक्तवत्प्रथमवर्णमितिः प्रसाध्या॥ ह्रस्वं भवेत्प्रकृतिवर्णमितिः सुधीभिरेवं कृति प्रकृतिरत्र नियोजनीया॥

अर्थः—समीकरणांतील एका पक्षाचें बरोबर मूळ निघून दुसऱ्या पक्षाचें मूळ रूप (केवळ संख्या) युक्त अव्यक्त वर्ग असल्यामुळें निघत नसल्यास वर्गप्रकृतीच्या रीतीनें ज्येष्ठ व कनिष्ठ साधावें. त्यांतील ज्येष्ठ हें प्रथमपक्षाच्या मूळाबरोबर करून त्या समीकरणापासून प्रथमवर्णाचें मान काढावें व कनिष्ठ हें प्रकृतिवर्णाचें मान समजावें. याप्रमाणें वर्गप्रकृतीची योजना करावी.

श्लोक—को राशि र्द्विगुणो राशिवर्गैः षड्भिः समन्वितः॥ मूलदो जायते बीजगणितज्ञ वदाशु तं॥

अर्थः—ज्या राशीच्या दुपटीमध्यें राशिवर्गाची सहापट मिळविली असतां बरोबर वर्गमूळ निघते, तर तो राशि कोणता हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = राशि धरून

$$६ \text{ या}^2 + २ \text{ या} = \text{का}^2$$

उभयपक्षांस ६ नीं गुणून व १ मिळवून

$$३६ \text{ या}^2 + १२ \text{ या} + १ = ६ \text{ का}^2 + १$$

उभयपक्षांचीं वर्गमूळें काढून

$$६ \text{ या} + १ = \sqrt{६ \text{ का}^2 + १}$$

येथें का = २० इष्ट धरून

$$\text{६ या} + \text{१} = \sqrt{\text{६} \times \text{४००} + \text{१}} = \text{४९}$$

$$\therefore \quad \text{या} = \text{८ हें उत्तर.}$$

श्लोक—राशियोगकृति मिश्रा राश्योर्योगघनेन च ॥ द्विघ्नस्य घनयोगस्य सा तुल्या गणकोच्यतां ॥

अर्थः—ज्या दोन राशींच्या बेरजेचा वर्ग त्याच दोन राशींच्या बेरजेच्या घनामध्यें मिळविला असतां जी संख्या येते ती, दोन राशीच्या घनांच्या बेरजेच्या दुपटीबरोबर होते तर त्या दोन संख्या कोणत्या हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या − का = प्रथमराशि आणि

का + या = द्वितीयराशि धरून

$$\{(\text{या} - \text{का}) + (\text{या} + \text{का})\}^{\text{२}} + \{(\text{या} - \text{का}) + (\text{या} + \text{का})\}^{\text{३}}$$
$$= \text{२} \{(\text{या} - \text{का})^{\text{३}} + (\text{या} + \text{का})^{\text{३}}\}$$

$$\therefore \quad \text{८ या}^{\text{३}} + \text{४ या}^{\text{२}} = \text{४ या}^{\text{३}} + \text{१२ या का}^{\text{२}}$$

समशोधन करून

$$\text{४ या}^{\text{३}} + \text{४ या}^{\text{२}} = \text{१२ या का}^{\text{२}}$$

उभयपक्षांस (या) ह्यानें भागून

$$\text{४ या}^{\text{२}} + \text{४ या} = \text{१२ का}^{\text{२}}$$

उभयपक्षांत १ मिळवून वर्गमूळ काढून

$$\text{२ या} + \text{१} = \sqrt{\text{१२ का}^{\text{२}} + \text{१}}$$

$$\text{का} = \text{२ धरून}$$

$$\text{२ या} + \text{१} = \text{७}$$

$$\therefore \quad \text{या} = \text{३}$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} \text{या} - \text{का} = \text{१} \\ \text{या} + \text{का} = \text{५} \end{array}\right\} \text{ हें उत्तर}$$

या प्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

श्लोकः— द्वितीयपक्षे सति संभवे तु कृत्याऽपवर्त्यात्र पदे प्रसाध्ये ॥ ज्येष्ठं कनिष्ठेन तथा निहन्याच्चेद्वर्गवर्गेण कृतोपवर्तः ॥ कनिष्ठवर्गेण तदा निहन्या ज्ज्येष्ठं ततः पूर्ववदवशेषं ॥

अर्थ—समीकरणांतील दुसऱ्या पक्षामध्यें अव्यक्तवर्णानें युक्त असा अव्यक्तवर्ग किंवा अव्यक्तचतुर्घात आल्यास वर्गप्रकृतीचा विषय न आल्यामुळें मूळ काढितां येणार नाहीं. करितां अव्यक्तवर्गानें संक्षेप देऊन वर्गप्रकृतीनें ज्येष्ठ व कनिष्ठ आणावीं व ज्येष्ठास कनिष्ठानें गुणून जो गुणाकर येईल त्यास ज्येष्ठ म्हणावें. व अव्यक्तचतुर्घाताचा संक्षेप देऊन ज्येष्ठ कनिष्ठ आणिल्यास ज्येष्ठाला कनिष्ठवर्गानें गुणून जो गुणाकार येईल त्यास ज्येष्ठ म्हणावें. व शेषक्रिया पूर्वीप्रमाणेंच करावी. याची उपपत्ति स्पष्ट आहे. तथापि पुढील दोन उदाहरणांवरून कळून येईल.

श्लोक—यस्यवर्गकृतिःपंचगुणा वर्गशतोनिता ॥ मूलदा जायते राशिं गणितज्ञ वदाशुतं ॥

अर्थ—ज्याराशीच्या चतुर्घातास ५ नीं गुणिलें आणि त्यांतून राशि वर्गाची १०० पट वजा केली तर वर्गमूळ बरोबर निघते असा राशि कोणता हें सांग?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$$\text{या} = \text{राशि धरून}$$

$$५\ \text{या}^{४} - १००\ \text{या}^{२} = \text{का}^{२}$$

उभयपक्षांचीं वर्गमूळें काढून

$$\sqrt{५\ \text{या}^{४} - १००\ \text{या}^{२}} = \text{का}$$

उभयपक्षांस या ह्यानें भागून

$$\sqrt{\frac{५\ \text{या}^{४} - १००\ \text{या}^{२}}{\text{या}^{२}}} = \frac{\text{का}}{\text{या}}$$

$$\sqrt{५\ \text{या}^{२} - १००} = \frac{\text{का}}{\text{या}}$$

$$\text{या} = १०\ \text{धरून}$$

$$२० = \frac{\text{का}}{१०}$$

$$\therefore\ \text{का} = ४००$$

$$\therefore\ \text{राशि} = १०\ \text{हें उत्तर.}$$

श्लोकः—कयोः स्यादंतरे वर्गौ वर्गयोगो ययोर्घनः ॥ तौ राशी कथयाभिन्नौ बहुधा बीजसत्तम ॥

अर्थ—ज्या दोन राशींचें अंतर केलें असतां बरोबर वर्गमूळ निघतें व त्याच दोन राशींच्या वर्गांची बेरीज केली असतां बरोबर घनमूळ निघतें, तर त्या पूर्णांकात्मक राशी कोणत्या हें सांग?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$$\text{या} = \text{प्रथमराशि}$$

$$\text{का} = \text{द्वितीयराशि धरून}$$

$$\text{का} - \text{या} = \text{नी}^{२} \text{ धरा.}$$

$$\therefore \quad \text{या} = \text{का} - \text{नी}^{२}$$

आणि $(\text{का} - \text{नी}^{२})^{२} + \text{का}^{२} = (\text{नी}^{२})^{३}$ धरा.

$$\therefore \text{का}^{२} + \text{नी}^{४} - २\,\text{का}\,\text{नी}^{२} + \text{का}^{२} = \text{नी}^{६}$$

$$\therefore २\,\text{का}^{२} + \text{नी}^{४} - २\,\text{का}\,\text{नी}^{२} = \text{नी}^{६}$$

$$२\,\text{का}^{२} - २\,\text{का}\,\text{नी}^{२} = \text{नी}^{६} - \text{नी}^{४}$$

उभयपक्षांस २ नीं गुणून नी^{४} मिळवून

$$४\,\text{का}^{२} - ४\,\text{का}\,\text{नी}^{२} + \text{नी}^{४} = २\,\text{नी}^{६} - \text{नी}^{४}$$

$$\therefore \quad २\,\text{का} - \text{नी}^{२} = \sqrt{२\,\text{नी}^{६} - \text{नी}^{४}}$$

उभयपक्षांस नी^{२} नें भागून

$$\frac{२\,\text{का} - \text{नी}^{२}}{\text{नी}^{२}} = \sqrt{\frac{२\,\text{नी}^{६} - \text{नी}^{४}}{\text{नी}^{४}}}$$

$$\therefore \frac{२\,\text{का}}{\text{नी}^{२}} - १ = \sqrt{२\,\text{नी}^{२} - १}$$

नी = ५ इष्ट धरून

$$\frac{२\,\text{का}}{२५} - १ = ७$$

$$\therefore \quad \text{का} = १००$$

$$\therefore \quad \text{या} = १०० - २५ = ७५$$

$$\therefore \left.\begin{array}{r}\text{प्रथमराशि} = ७५ \\ \text{द्वितीयराशि} = १००\end{array}\right\} \quad \text{हें उत्तर.}$$

याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

श्लोकः—साव्यक्तरूपो यदि वर्णवर्गस्तदान्यवर्णस्य कृतेः समं तं॥ कृत्वा पदं तस्य तदन्यपक्षे वर्गप्रकृत्योक्तवदेव मूले॥ कनिष्ठमाद्येन पदेन तुल्यं ज्येष्ठं द्वितीयेन समं विदध्यात्॥

अर्थः—समीकरणाच्या एका पक्षाचें वर्गमूल निघून दुसरा पक्ष अव्यक्तानें व रूपांनीं युक्त असा अव्यक्तवर्गात्मक असल्यामुळें वर्गप्रकृतीचा विषय येत नाहीं, करितां तो पक्ष अन्यवर्णाच्या वर्गाबरोबर कल्पना करून एका पक्षाचें मूळ काढावें व दुसऱ्या पक्षाचें मूल वर्गप्रकृतीनें काढावें. तें ज्येष्ठमूल होईल व कनिष्ठ जें येईल तें प्रथम काढलेल्या वर्गमूळाबरोबर करून अव्यक्ताची किंमत काढावी. याची उपपत्ती उदाहरणावरून स्पष्ट दिसेल.

श्लोकः—त्रिकादिद्व्युत्तरश्रेढ्यां गच्छे क्वापि च यत्फलं ॥ तदेव त्रिगुणं कस्मिन्नन्यगच्छे भवेद्वद ॥

अर्थः—३ आदि २ उत्तर अशा श्रेढींतील ज्या गच्छाच्या सर्व धनाची तिप्पट ही, त्याच श्रेढींतील अन्य गच्छाच्या सर्वधनाबरोबर होते, तर ते दोन्ही गच्छ कोणते हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = प्रथमगच्छ.

का = द्वितीयगच्छ.

व्येकपदघ्नचयोमुखयुक्स्यादित्यादि मागें दिलेल्या सर्वधनाच्या सारणीनें

प्रथम सर्वधन = या^{2} + २ या

द्वितीय सर्वधन = का^{2} + २ का

आतां पहिल्या सर्वधनाच्या तिप्पट दुसरें सर्वधन आहे म्हणून

३ (या^{2} + २ या) = का^{2} + २ का

३ या + ६ या = का^{2} + २ का

उभयपक्षांस ३ नीं गुणून व ९ मिळवून

९ या^{2} + १८ या + ९ = ३ का^{2} + ६ का + ९

उभयपक्षांचीं मूळें काढून

३ या + ३ = $\sqrt{\text{३ का}^2 + \text{६ का} + \text{९}}$

दुसऱ्या पक्षाचें मूल वर्गप्रकृतीनें निघत नाहीं म्हणून

३ का^{2} + ६ का + ९ = नी^{2} धरून

३ का^{2} + ६ का = नी^{2} − ९

उभयपक्षांस ३ नीं गुणून व ९ मिळवून

९ का^{2} + १८ का + ९ = ३ नी^{2} − १८

उभयपक्षांचीं वर्गमूळें काढून

$$३ \text{ का} + ३ = \sqrt{३ \text{ नी}^२ - १८}$$

येथें वर्गप्रकृतीचा विषय आला म्हणून

नी = ९ धरून

$$३ \text{ का} + ३ = \sqrt{३ \times ८१ - १८} = १५$$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore \quad \text{का} = ४ \\ \therefore \quad \text{या} = २ \end{array}\right\} \quad \text{हें उत्तर.}$$

याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

श्लोकः—सरूपके वर्णकृती तु यत्र तत्रेच्छयैकां प्रकृतिं प्रकल्प्य ॥ शेषं ततः क्षेपक मुक्तवच्च मूलं विदध्यादसकृत्समत्वे ॥

अर्थ:—समीकरणांतील एका पक्षाचें वर्गमूळ निघून दुसऱ्या पक्षांमध्यें दोन अव्यक्तांचे वर्ग व रूपें असल्यामुळें वर्गमूल निघणार नाहीं. करितां दोन अव्यक्तांपैकीं कोणत्याही एका अव्यक्ताच्या गुणकास प्रकृति कल्पना करून शेषास क्षेपकल्पना करावी. नंतर वर्गप्रकृतीनें ज्येष्ठ कनिष्ठ साधावें. पुढें समीकरण करण्याचा संभव असल्यास पुनः क्रिया करून उत्तर काढावें.

श्लोकः—तौ राशी वद यत्कृत्योः सप्ताष्टगुणयो र्युतिः ॥ मूलदा स्यात् वियोगस्तु मूलदो रूपसंयुतः ॥

अर्थ:—ज्या दोन राशींच्या वर्गास क्रमानें ७ व ८ यांनीं गुणून आलेल्या गुणाकारांची बेरीज केली असतां वर्गमूल निघतें व त्याच गुणाकारांच्या अंतरांत १ मिळविला असतां वर्गमूळ निघतें, तर त्या दोन राशि कोणत्या हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = प्रथमराशि आणि

का = द्वितीयराशि धरून

$$७ \text{ या}^२ + ८ \text{ का}^२ = \text{नी}^२$$

$$\sqrt{७ \text{ या}^२ + ८ \text{ का}^२} = \text{नी}$$

येथें ७ प्रकृति व ८ का^{२} क्षेप धरून वर्गप्रकृतीनें मूळ साधण्याकरितां

या = २ का इष्ट धरून

$$\sqrt{७ \times ४ \text{ का}^२ + ८ \text{ का}^२} = \text{नी}$$

$$\therefore \quad ६ \text{ का} = \text{नी}$$

आतां २ का हा प्रथम राशि व का हा द्वितीय राशि यापासून उदाहरणांत सांगितल्या प्रमाणें

$$२८ का^2 - ८ का^2 + १ = पी^2$$
$$\therefore \quad २० का^2 + १ = पी^2$$
$$\sqrt{२० का^2 + १} = पी$$
$$का = २ \text{ धरून}$$
$$\sqrt{२० \times ४ + १} = पी$$
$$\therefore \quad पी = ९$$

$$\left.\begin{array}{l}\therefore \quad या = २ का = ४ \text{ हा प्रथमराशी} \\ \quad\; का = २ \text{ हा द्वितीयराशि}\end{array}\right\} \text{ हें उत्तर.}$$

श्लोकः-यथाऽभीष्टराश्योश्च वर्गौ शराष्ट्याहतौ तद्युतिः खाश्विहीना कृतिः स्यात् ॥ शरघ्नैकवर्गो नखघ्नान्यवर्गोनितो भूपयुक्तोपि वर्गोऽ थवास्यात् ॥ तयो स्ते पदे तौ च राशी प्रचक्ष्व पटुत्वेभिमानोऽत्र यद्यास्ति बीजे ॥

अर्थ—ज्या दोन राशींचे वर्गांस क्रमानें ५ व १६ यांनीं गुणून आलेल्या गुणाकारांच्या बेरजेंतून २० वजा केले असतां वर्गराशी होतो, तर त्या दोन राशी कोणत्या हें सांग?

आणि ज्या दोन राशीं पैकीं एका राशीच्या वर्गाच्या पांच पटींतून दुसऱ्या राशीच्या वर्गाची २० पट वजा करून १६ मिळविले असतां वर्गराशि होतो तर त्या दोन राशी कोणत्या हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$या = \text{प्रथमराशि आणि}$$
$$का = \text{द्वितियराशि धरून}$$
$$५ या^2 + १६ का^2 - २० = नी^2$$
$$\sqrt{५ या^2 + १६ का^2 - २०} = नी$$
$$\text{येथें } या = २ का + ३ \text{ इष्टधरून}$$
$$\sqrt{५(२ का + ३)^2 + १६ का^2 - २०} = नी$$
$$\sqrt{३६ का^2 + ६० का + २५} = नी$$
$$\therefore \quad ६ का + ५ = नी$$
$$का = १ \text{ इष्ट धरून}$$

या = ५

अथवा का = २ इष्ट धरून

या = ७

इत्यादि अनेक उत्तरें समजावीं,

दुसऱ्या उदाहरणाची उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = प्रथमराशि आणि

का = द्वितीयराशि धरून

$५ \text{या}^२ - २० \text{का}^२ + १६ = \text{नी}^२$

$\therefore \sqrt{५ \text{या}^२ - २० \text{का}^२ + १६} = \text{नी}^२$

येथें या = ३ का + २

$\sqrt{५ (३ \text{का} + २)^२ - २० \text{का}^२ + १६} = \text{नी}$

$\therefore \sqrt{२५ \text{का}^२ + ६० \text{का} + ३६} = \text{नी}$

$\therefore ५ \text{का} + ६ = \text{नी}$

का = १ धरून

या = ५

अथवा का = २ धरून

या = ८

इत्यादि अनेक उत्तरें समजावीं.

श्लोक:--तावत् क्षेपं क्षेपरूपाणि कृत्वा ऱ्हस्वज्येष्ठे साधनीये यथोक्ते ॥ पूर्वक्षेपे योन्यवर्णस्य वर्गस्तस्यांकघ्नो ज्येष्ठवर्गो विभक्तः॥ रूपैर्निघ्या तत्प्रकत्यातमूलं तद्घ्नः पूर्वक्षेपजो वर्ण एव॥ ज्ञेयं ऱ्हस्वाव्यक्तखंडं पुरोक्तऱ्हस्वं तु स्यात् व्यक्तखंडं तदैक्ये ॥ सरूपके क्षेपकजातिवर्ण एवं स्वकीयं तु कनिष्ठमत्र ॥

अर्थ:—गेल्या श्लोकाच्या दोन उदाहरणांपैकीं पहिल्या उदाहरणामध्यें या = २ का + ३ आणि दुसऱ्या उदाहणामध्यें या = ३ का + २ अशा इष्ट किंमती धरून मूळें काढिलीं आहेत, त्या इष्ट किंमती कशा काढाव्या हें ह्या प्रकृत श्लोकांमध्यें सांगितलें आहे तें असें:—

वर्गमूळामध्यें दोन अव्यक्तें व रूपें अशीं असलीं असतां पहिल्या अव्यक्ताच्या गुणकास प्रकृति कल्पना करून दुसरें अव्यक्त व रूपें यांस

क्षेप कल्पना करावी. नंतर कल्पितक्षेपापैकीं जीं रूपें असतील त्यांस क्षेप मानून पहिल्या कल्पित प्रकृतीवरून यथोक्त रीतीनें ऱ्हस्व व ज्येष्ठ साधावें. आणि आलेल्या ज्येष्ठाचे वर्गास, पूर्वक्षेपांतील अव्यक्तवर्गाच्या गुणकानें गुणावें. नंतर आलेल्या गुणाकारास, रूपांनीं गुणित अशा प्रकृतीनें भागून जो भागाकार येईल त्याचें वर्गमूल काढावें. व त्या वर्गमूळानें पूर्वक्षेपांतील अव्यक्तास गुणिलें असतां मुख्य कनिष्ठाचें एक खंड तयार होईल व प्रकृत साधलेलें ऱ्हस्व हें मुख्य कनिष्ठाचें द्वितीयखंड तयार होईल. ह्याप्रमाणें मुख्य कनिष्ठाची किंमत खंडद्वयात्मक येईल.

जसें पहिल्या उदाहरणामध्यें ५ या^{२} + १६ का^{२} − २० ह्याचें वर्ग-मूल बरोबर निघेल अशी (या) ह्याची काय किंमत धरावी हें पाहणें आहे, करितां प्रथमवर्ण या ह्याचा गुणक ५ ही प्रकृति व १६ का^{२} − २० हा क्षेप कल्पना करून ह्या कल्पित क्षेपांतील रूपें ऋण २० हा क्षेप धरून पूर्वप्रकृति असतां ऱ्हस्व ३ इष्ट धरून ज्येष्ठ आणूं. इष्ट ३ याचा वर्ग ९ यास प्रकृति ५ ह्यानें गुणून ४५ क्षेप ऋण २० वजा करून २५ याचें वर्गमूळ ५ हें ज्येष्ठ झालें. आतां ज्येष्ठ ५ याचा वर्ग २५ त्यांस, पूर्वक्षेपांतील अव्यक्त वर्गाच्या गुणक १६ यानें गुणून गुणाकार ४०० आला. या गुणा-कारास, रूपें २० यानें गुणित प्रकृति ५ म्हणजे १०० ह्यानें भागून भागा-कार ४ याचें मूल २ यानें क्षेपांतील अव्यक्त (का) यास गुणून २ का हें मुख्य कनिष्ठाचें एक खंड झालें व प्रकृत ऱ्हस्व ३ हें द्वितीयखंड झालें. म्हणून

$$या = २ का + ३$$

याचप्रमाणें दुसऱ्या उदाहरणामध्यें ५ या^{२} − २० का^{२} + १६ येथें प्रकृति ५ व क्षेपक − २० का^{२} + १६ आहे. प्रथम ऱ्हस्व २ धरून याचा वर्ग ४ यास ५ नीं गुणून व क्षेप १६ मिळवून ३६ याचें मूळ ६ हें ज्येष्ठ झालें.

$$व \ \frac{(६)^२ \times २०}{१६ \times ५} = ९ \text{ याचें मूल } ३$$

यास (का) नें गुणून ३ का हें मुख्य कनिष्ठाचें प्रथम खंड झालें व प्रकृत ऱ्हस्व हें द्वितीय खंड झालें. म्हणून

$$या = ३ का + २$$

उपपत्ति.

$$(अ + ब)^२ = अ^२ + २ अब + ब^२$$

$\therefore$ मध्यखंड $=$ २ अब

$$\left(\frac{\text{मध्यखंड}}{२}\right)^{२} = \text{अ}^{२}\text{ब}^{२}$$

यावरून असा सिद्धांत निघतो कीं, कोणत्याही वर्गराशींतील मध्यखंडाच्या अर्धाच्या वर्गाबरोबर त्याच वर्गराशींतील आद्य व अंत्य या खंडांचा गुणाकार असतो.

हा सिद्धांत पुढील उपपत्तीस उपयोगी पडणारा आहे, सबब अगोदर देऊन ठेविला.

$\sqrt{५\text{या}^{२} + १६\text{का}^{२} - २०} = \text{नी}$

या पहिल्या उदाहरणांतील समीकरणामध्यें (या) याची (का) च्या स्वरूपानें कोणती किंमत धरिली असतां वर्गमूळ निघतें हें पाहणें आहे. याकरितां प्रथमतः

या $=$ अ का $+$ ब अशी किंमत धरिली असतां मूळ निघते अशी कल्पना करूं.

$\therefore$ $\text{या}^{२} = \text{अ}^{२}\text{का}^{२} + २\,\text{अका}.\text{ब} + \text{ब}^{२}$

उभयपक्षांस ५ नीं गुणून

$५\text{या}^{२} = ५\text{अ}^{२}\text{का}^{२} + ५\cdot२\,\text{अ का ब} + ५\text{ब}^{२}$

उभयपक्षामध्यें $१६\text{का}^{२} - २०$ हा क्षेप मिळवून

$$५\text{या}^{२} + १६\text{का}^{२} - २० = (५\text{अ}^{२}\text{का}^{२} + १६\text{का}^{२}) + ५\times२\,\text{अ का ब} + (५\text{ब}^{२} - २०)$$

येथें ब $=$ ३ धरून

$$\text{वर्गराशि} = (५\text{अ}^{२}\text{का}^{२} + १६\text{का}^{२}) + ५\times२\,\text{अका}\times३ + २५$$

आतां या उपपत्तीच्या आरंभाला दिलेल्या सित्धांतावरून

$$२५(५\text{अ}^{२}\text{का}^{२} + १६\text{का}^{२}) = २५\times९\text{अ}^{२}\text{का}^{२}$$

$$२५\times५\text{अ}^{२}\text{का}^{२} + १६\text{का}^{२}\times२५ = २५\times९\text{अ}^{२}\text{का}^{२}$$

$$\therefore २५\times९\text{अ}^{२}\text{का}^{२} - २५\times५\text{अ}^{२}\text{का}^{२} = १६\text{का}^{२}\times२५$$

$$१००\text{अ}^{२}\text{का}^{२} = १६\text{का}^{२}\times२५$$

$$\text{अ}^{२}\text{का}^{२} = \frac{१६\text{का}^{२}\times२५}{२०\times५}$$

$$\text{अ का} = \sqrt{\frac{\text{क्षेपवर्गांक}\times\text{ज्येष्ठवर्ग}\times\text{का}^{२}}{\text{क्षेपरूपें}\times\text{प्रकृति}}}$$

$\therefore$ अ का = २ का

ही किंमत व ब = ३ ही पूर्वी

ची किंमत या दोन्ही किंमती

या = अ का + ब

ह्या समीकरणामध्यें ठेविल्या असतां

या = २ का + ३

ही किंमत आरंभींच्या समीकरणामध्यें ठेविली असतां वर्गमूळ निघतें. म्हणून सर्व इष्टसिध्दि झाली.

श्लोक-यत्र क्षेपोद्भवे खंडे धनर्णे तत्र दर्शितं ॥ सरूपेणाऽन्यवर्णेन तुल्यं ऱ्हस्वं च ते यदा ॥ धने तत्र च तत्ह्रस्वासिध्या सिध्दिः कथंभवेत् ॥

अर्थ—ज्या क्षेपाध्यें एकधन व एक ऋण अशीं खंडें आहेत त्या उदाहरणामध्यें मागील श्लोकांतील पध्दती उपयुक्त होईल असें दाखविलें परंतु ज्या क्षेपामध्यें दोन्हीं खंडें धन आहेत अशा उदाहरणाची कशी सिध्दि होईल ? हें पुढील दिलेल्या उदाहरणावरून दिसून येईल.

श्लोक-यत्रोदाहरणे कृत्योः पंचाष्टगुणयो र्युतौ ॥ त्र्यधिका विंशति र्युक्ता वर्गःस्या त्तौ वद द्रुतं ॥

अर्थ—ज्या दोन राशींच्या वर्गास क्रमानें ५ व ८ ह्यांनीं गुणून त्यांच्या बेरजेमध्यें २३ मिळविले असतां वर्गराशी होतो तर ते दोन राशी कोणते हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = प्रथमराशि आणि

का = द्वितीयराशि धरून

$$५ या^२ + ८ का^२ + २३ = नी^२$$

का = २ इष्ट धरून

$$५ या^२ + ३२ + २३ = नी^२$$

$$५ या^२ + ५५ = नी^२$$

या = ३ इष्ट धरून

$$४५ + ५५ = नी^२$$

$$\therefore \quad नी = १०$$

$\therefore$ ३ व २ हे राशी

या प्रमाणें इष्ट भिन्न धरून अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक-घनवर्गयुतिर्वर्गो ययो राश्योः प्रजायते ॥ समासोपि ययोर्वर्गस्तौ राशी शीघ्र मानय ॥

अर्थ—ज्या दोन राशीं पैकीं एकाचा घन व एकाचा वर्ग करून बेरीज केली असतां वर्गराशी होतो व त्याच दोन राशींची बेरीज केली असतां वर्गराशी होतो; तर ते दोन राशी कोणते हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{या} = \text{प्रथमराशि आणि}$$

$$\frac{\text{या}^{२} - \text{या}}{२} = \text{द्वितीयराशि धरून}$$

प्रथमराशीचा घन व द्वितीयराशीचा वर्ग करून त्यांची बेरीज केली असतां वर्गराशि होतो हा आलाप म्हणजे उदाहरणांतील एक अट जुळते म्हणून दुसऱ्या आलापावरून

$$\text{या} + \frac{\text{या}^{२} - \text{या}}{२} = \text{पी}^{२}$$

$$\text{या}^{२} + \text{या} = २\,\text{पी}^{२}$$

उभयपक्षांस ४ नी गुणून व १ मिळवून

$$४\,\text{या}^{२} + ४\,\text{या} + १ = ८\,\text{पी}^{२} + १$$

उभयपक्षांचीं मूळें काढून

$$२\,\text{या} + १ = \sqrt{८\,\text{पी}^{२} + १}$$

येथें पी = ६ इष्ट धरून

$$२\,\text{या} + १ = १७$$

$$\therefore \quad \text{या} = ८ \text{ प्रथमराशि}$$

आणि २८ हा द्वितीयराशि हेंउत्तर. याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक-सभाविते वर्णकृती तु यत्र तन्मूलमादाय च शेषकस्य॥ इष्टोत्धृतस्येष्टविवर्जितस्य दलेन तुल्यं हि तदेव कार्य ॥

अर्थ—समीकरणाच्या एका पक्षाचें बरोबर वर्गमूळ निघून दुसऱ्या-पक्षाचें वर्गमूळ बरोबर निघत नसलें, व दुसऱ्यापक्षामध्यें दोन अव्यक्तांचे वर्ग असून भावित (दोन अव्यक्तांचा गुणाकार) असेल तर त्यांतील जेवढें वर्गमूळ निघेल तेवढें काढावें व शेष जें राहील त्यास इष्टानें भागून त्यांतून इष्ट वजा करावें व आलेल्या वजाबाकीचें अर्ध करून तें, जेवढें

वर्गमूळ निघालें असेल त्याबरोबर मांडून समीकरण तयार करावें. नंतर त्यापासून राशीची किंमत काढावी.

याची उपपत्ति पुढील दिलेल्या उदहरणावरून स्पष्ट दिसून येईल.

श्लोक-ययोर्वर्गयुतिर्घातयुता मूलप्रदा भवेत् ॥ तन्मूलगुणितो योगः सरूपश्चाशु तौ वद ॥

अर्थ—ज्या दोन राशींच्या वर्गांची बेरीज, त्याच दोन राशींच्या गुणाकारानें युक्त केली असतां वर्गमूळ निघते, व निघालेल्या वर्गमूळास त्याच दोन राशींच्यां बेरजेनें गुणून १ मिळविला असतां वर्गराशि होतो तर ते दोन राशि कोणते?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = प्रथमराशि आणि

का = द्वितीयराशि धरून

$$\text{या}^2 + \text{का}^2 + \text{याका} = \text{नी}^2$$

उभयपक्षांस ३६ नीं गुणून

$$३६\ \text{या}^2 + ३६\ \text{का}^2 + ३६\ \text{याका} = ३६\ \text{नी}^2$$

उभयपक्षांचीं मूळें काढून

$$\sqrt{३६\ \text{या}^2 + ३६\ \text{का}^2 + ३६\ \text{याका}} = ६\ \text{नी}$$

येथें पूर्व पेटयांतील ६ या + ३ का असें वर्गमूळ काढिलें असतां शेष २७ का^2 राहतें ह्मणून

$$(६\ \text{नी})^2 - (६\ \text{या} + ३\ \text{का})^2 = २७\ \text{का}^2$$

असें समीकरण तयार झालें. यापासून

$$\{६\ \text{नी} + (६\ \text{या} + ३\ \text{का})\} \times \{६\ \text{नी} - (६\ \text{या} + ३\ \text{का})\} = २७\ \text{का}^2$$

येथें $६\ \text{नी} - (६\ \text{या} + ३\ \text{का}) = \text{का}$ इष्ट धरून

$$६\ \text{नी} + (६\ \text{या} + ३\ \text{का}) = \frac{२७\ \text{का}^2}{\text{का}}$$

या दोन समीकरणांवरून

$$२(६\ \text{या} + ३\ \text{का}) = \frac{२७\ \text{का}^2}{\text{का}} - \text{का}$$

$$\therefore\ ६\,\text{या} + ३\,\text{का} = \frac{\frac{२७\,\text{का}^{२}}{\text{का}} - \text{का}}{२}$$

एवढ्या कृत्यावरून मागील सूत्राची उपपत्ति सहज लक्षांत येईल. आतां या अखेरच्या समीकरणावरून

$$\text{या} = \frac{५\,\text{का}}{३}$$ ही प्रथमराशीची

किंमत (का) च्या स्वरूपानें निघाली. आतां $\frac{५\,\text{का}}{३}$ व का या दोन राशी वरून उदाहरणांत दिलेल्या दुसऱ्या अटीवरून

$$\sqrt{\left(\frac{५\,\text{का}}{३}\right)^{२} + \text{का}^{२} + \frac{५\,\text{का}}{३} \times \text{का}\left(\frac{५\,\text{का}}{३} + \text{का}\right)}$$
$$+ १ = \text{पी}^{२}$$

$$\therefore\ \frac{५६\,\text{का}^{२}}{९} + १ = \text{पी}^{२}$$

$$५६\,\text{का}^{२} + ९ = ९\,\text{पी}^{२}$$

उभयपक्षांचीं मूळें काढून

$$\sqrt{५६\,\text{का}^{२} + ९} = ३\,\text{पी}$$

येथें का = ६ इष्ट धरूनें

$$४५ = ३\,\text{पी}$$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned} \text{का} &= ६\ \text{द्वितीयराशि} \\ \frac{५\,\text{का}}{३} &= १०\ \text{प्रथमराशि} \end{aligned}\right\}\ \text{हें उत्तर.}$$

श्लोक– यत्स्यात्सालपवधार्धतो घनपदं यद्वर्गयोगात्पदं ॥ ये योगांतरयोर्द्विकाभ्यधिकयोर्वर्गांतरात्तााष्टकात् ॥ यच्चैतत्पदपंचकं च मिलितं स्याद्वर्गमूलप्रदं ॥ तौ राशी कथयाशु निश्चलमते पक्षाष्टकाभ्यांविना ॥

अर्थ— ज्या दोन लघुबृहद्राशींच्या गुणाकारामध्यें लघुराशि मिळवून अर्ध केलें व त्या अर्धाचें घनमूळ काढिलें, त्याच दोन राशींच्या वर्गांच्या बेरजेचें वर्गमूळ काढिलें, त्याच दोन राशींच्या बेरजेमध्यें २ मिळवून त्याचें वर्गमूळ काढिलें, त्याच दोन राशींच्या अंतरामध्यें २ मिळवून वर्गमूळ

काढिलें, आणि त्याच दोन राशींच्या वर्गांच्या अंतरामध्यें ८ मिळवून वर्गमूळ काढिलें, नंतर या काढिलेल्या पांच मूळांची बेरीज केली असतां वर्गमूळ निघते तर ते दोन राशि ६ व ८ यावांचून अन्य कोणते आहेत तें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$२\,\text{या} = \text{लघुराशि आणि}$$

$$\text{या}^२ - १ = \text{बृहद्राशि धरून}$$

$$\sqrt[३]{\frac{२\,\text{या}\,(\text{या}^२ - १) + २\,\text{या}}{२}} = \text{या} \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\sqrt{(२\,\text{या})^२ + (\text{या}^२ - १)^२} = \text{या}^२ + १ \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

$$\sqrt{२\,\text{या} + \text{या}^२ - १ + २} = \text{या} + १ \ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

$$\sqrt{\text{या}^२ - १ - २\,\text{या} + २} = \text{या} - १ \ldots\ldots\ldots\ldots (४)$$

$$\sqrt{(\text{या}^२ - १)^२ - (२\,\text{या})^२ + ८} = \text{या}^२ - ३ \ldots\ldots\ldots\ldots (५)$$

या पांच मूळांची बेरीज $२\,\text{या}^२ + ३\,\text{या} - २$ होते हा ही वर्गराशि आहे ह्मणून

$$२\,\text{या}^२ + ३\,\text{या} - २ = \text{का}^२$$

उभयपक्षांस ८ नीं गुणून व ९ मिळवून

$$१६\,\text{या}^२ + २४\,\text{या} - १६ + ९ = ८\,\text{का}^२ + ९$$

$$१६\,\text{या}^२ + २४\,\text{या} + ९ = ८\,\text{का}^२ + ९ + १६$$

मूळें काढून

$$४\,\text{या} + ३ = \sqrt{८\,\text{का}^२ + २५}$$

$$\text{का} = ५ \text{ इष्ट धरून}$$

$$४\,\text{या} + ३ = १५$$

$$\therefore\ \text{या} = ३$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} ६ = \text{लघुराशि} \\ ८ = \text{बृहद्राशि} \end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

अथवा का = २० इष्ट धरून

$$४\,\text{या} + ३ = ८१$$

$$\therefore \quad \text{या} = \frac{४१}{२}$$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore \quad ४१ = \text{लघुराशि} \\ \dfrac{१६७७}{४} = \text{बृहद्राशि} \end{array}\right\} \text{ हें उत्तर.}$$

याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

येथें २ या + २ = लघुराशि आणि

या^{२} + २ या = बृहद्राशि

कल्पना करून उक्तक्रिया केली असतां उत्तरें येतात.

अथवा २ या − २ = लघुराशि आणि

या^{२} − २ या = बृहद्राशि

कल्पना करून उक्तक्रिया केली असतां उत्तरें येतात.

श्लोक—एवं सहस्रधा गूढा मूढानां कल्पना यतः॥ क्रियया कल्पनोपायस्तेषामथ च कथ्यते ॥

अर्थ—गेल्या उदारणामध्यें दोन तीन तऱ्हेनें राशि कल्पना करून दाखविल्या आहेत. त्याप्रमाणेंच हजारो प्रकारांनीं राशि कल्पना करितां येतील. परंतु मंदमति लोकांस त्या गूढ वाटतात ह्मणून युक्तीनें राशिकल्पनेचा उपाय सांगतों.

श्लोक—सरूपमव्यक्तमरूपकं वा वियोगमूलं प्रथमं प्रकल्प्य योगांतरक्षेपकभाजिता द्वर्गांतरक्षेपकतः पदं स्यात् ॥ तेनाधिकं-तत्तु वियोगमूलं स्याद्योगमूलं तु तयोस्तु वर्गौ ॥ स्वक्षेपकोनौ हि वियोगयोगौ स्यातां ततः संक्रमणेन राशी ॥

अर्थ—प्रथमतः रूपयुक्त किंवा रूपरहित असें अव्यक्त हें वियोगमूळ (दोन राशींच्या अंतरामध्यें क्षेप मिळवून त्याचें वर्गमूळ) आहे अशी कल्पना करावी. नंतर उदाहरणांत सांगितलेल्या योगांतरक्षेपानें वर्गांतर क्षेपास भागून जो भागाकार येईल त्याचें वर्गमूळ काढावें. आणि तें वर्गमूळ कल्पित वियोगमूळामध्यें मिळविलें असतां योगमूळ (दोन राशींच्या बेरजेमध्यें क्षेप मिळवून त्याचें वर्गमूळ) होतें. नंतर वियोगमूळ व योगमूळ याचे वर्ग करून त्यांतून आपापले क्षेप वजा केले असतां क्रमेण वियोग व योग तयार होतात. नंतर त्या वियोगयोगांपासून संक्रमण गणितानें (दोन राशींचें अंतर व दोन राशींची बेरीज दिली असतां त्या राशी काढणें या गणितास संक्रमण असें म्हणतात.) राशी काढाव्या.

असें या − १ = वियोगमूळ कल्पिलें.

गेल्या उदाहरणामध्यें योग व अंतर यांचा क्षेप २ आहे व वर्गांतर क्षेप ८ आहे म्हणून

$$\text{योगमूळ} = \text{या} - १ + \sqrt{४} = \text{या} + १$$

$$\therefore \text{योग} = (\text{या} + १)^२ - २$$

$$= \text{या}^२ + १ + २\,\text{या} - २ = \text{या}^२ + २\,\text{या} - १$$

$$\text{वियोग} = (\text{या} - १)^२ - २$$

$$= \text{या}^२ + १ - २\,\text{या} - २ = \text{या}^२ - २\,\text{या} - १$$

$$\therefore \text{प्रथमराशि} = \frac{(\text{या}^२ + २\,\text{या} - १) + (\text{या}^२ - २\,\text{या} - १)}{२}$$

$$= \text{या}^२ - १$$

$$\text{द्वितीयराशि} = \frac{(\text{या}^२ + २\,\text{या} - १) - (\text{या}^२ - २\,\text{या} - १)}{२}$$

$$= २\,\text{या}$$

याच दोन राशी आरंभीं उदाहरण सोडवितांना धरल्या आहेत.

उपपत्ति.

$$\left.\begin{aligned} \text{प्रथमराशि} &= \text{प्र} \\ \text{द्वितीयराशि} &= \text{द्वि} \\ \text{क्षेपक} &= \text{क्षे} \end{aligned}\right\} \text{ अशीं नांवें घेऊन}$$

$$\sqrt{\text{प्र} + \text{द्वि} + \text{क्षे}} = \text{या} = \text{योगमूळ}$$

$$\sqrt{\text{प्र} - \text{द्वि} + \text{क्षे}} = \text{का} = \text{वियोगमूळ}$$

$$\therefore \text{प्र} + \text{द्वि} + \text{क्षे} = \text{या}^२$$

$$\therefore \text{प्र} + \text{द्वि} = \text{या}^२ - \text{क्षे} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\text{आणि } \text{प्र} - \text{द्वि} + \text{क्षे} = \text{का}^२$$

$$\therefore \text{प्र} - \text{द्वि} = \text{का}^२ - \text{क्षे} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

समीकरण (१) व (२) पासून

$$(\text{प्र} + \text{द्वि})(\text{प्र} - \text{द्वि}) = (\text{या}^२ - \text{क्षे})(\text{का}^२ - \text{क्षे})$$

$$\therefore \text{प्र}^२ - \text{द्वि}^२ = \text{या}^२\,\text{का}^२ - \text{का}^२\,\text{क्षे} - \text{या}^२\,\text{क्षे} + \text{क्षे}^२$$

हें वर्गांतर झालें. यामध्यें का^{२} क्षे + या^{२} क्षे − २ या. का. क्षे हा क्षेपक मिळविला असतां वर्गमूळ निघतें.

$$\text{वर्गांतरक्षेप} = \text{का}^{२}\,\text{क्षे} + \text{या}^{२}\,\text{क्षे} - \text{२ या का क्षे}$$

उभयपक्षांस योगांतरक्षेपानें भागिलें

$$\therefore\ \frac{\text{वर्गांतरक्षेप}}{\text{योगांतरक्षेप}} = \text{का}^{२} + \text{या}^{२} - \text{२ या का}$$

उभय पक्षांचीं मूळें काढून

$$\sqrt{\frac{\text{वर्गांतरक्षेप}}{\text{योगांतरक्षेप}}} = \text{या} - \text{का}$$

उभयपक्षांत (का) मिळवून

$$\text{वियोगमूळ} + \sqrt{\frac{\text{वर्गांतरक्षेप}}{\text{योगांतरक्षेप}}} = \text{योगमूळ}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

या उपपत्तीवरून असें दिसून येईल कीं, योग व अंतर यांस समान क्षेपक असेल तरच यारीतीनें राशिकल्पना योग्य होईल, अन्यथा होणार नाहीं. व उदाहरणामध्यें जीं पांच मूळें सांगितलीं आहेत त्यांतील अखेरच्या तीन मूळांविषयींच ही रीति सिद्ध होते. पहिल्या दोन मूळाविषयीं सिद्धता होत नाहीं. म्हणून ही रीति विशेष महत्वाची नसल्यामुळें स्वबुद्धीनेंच राशि कल्पना कराव्या हें उत्तम होय.

श्लोक—राश्यो र्योगवियोगकौ त्रिसहितौ वर्गौ भवेतां ययो- र्वर्गैक्यं चतुरूनितं रवियुतं वर्गांतरं स्यात्कृतिः ॥ साल्पं घातदलं घनं पदयुतिस्तेषां द्वियुक्ता कृतिस्तौ राशी वद कोमलामलमते षट्सप्त- हित्वापरौ ॥

अर्थ—ज्या दोन राशींच्या बेरजेमध्यें किंवा अंतरामध्यें ३ मिळविले असतां वर्गमूळ निघतें, त्याच दोन राशींच्या वर्गांच्या बेरजेंतून ४ वजा केले असतां वर्गमूळ निघतें, त्याच दोन राशींच्या वर्गांच्या अंतरामध्यें १२ मिळविले असतां वर्गमूळ निघतें. आणि त्याच दोन राशींच्या गुणाकाराच्या अर्धामध्यें लघुराशि मिळविला असतां घनमूळ निघतें, व निघालेल्या पांच मूळांच्या बेरजेमध्यें २ मिळविलें असतां वर्गमूळ निघतें, तर ते दोन राशि ६ व ७ यावांचून अन्य कोणते आहेत हें सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{या}^{2} - २ = \text{प्रथमराशि आणि}$$

$$२\ \text{या} = \text{द्वितीयराशि धरून}$$

$$\sqrt{\text{या}^{2} - २ + २\ \text{या} + ३} = \text{या} + १$$

$$\sqrt{\text{या}^{2} - २ - २\ \text{या} + ३} = \text{या} - १$$

$$\sqrt{(\text{या}^{2} - २)^{2} + (२\ \text{या})^{2} - ४} = \text{या}^{2}$$

$$\sqrt{(\text{या}^{2} - २)^{2} - (२\ \text{या})^{2} + १२} = \text{या}^{2} - ४$$

$$\sqrt{\frac{(\text{या}^{2} - २) \times २\ \text{या}}{२} + २\ \text{या}} = \text{या}$$

ह्या पांच मूळांची बेरीज $२\ \text{या}^{2} + ३\ \text{या} - ४$ ही आहे. यांत २ मिळविले असतां वर्गराशि होतो म्हणून

$$२\ \text{या}^{2} + ३\ \text{या} - ४ + २ = \text{का}^{2}$$

$$\therefore\quad २\ \text{या}^{2} + ३\ \text{या} = \text{का}^{2} + २$$

उभयपक्षांस ८ नीं गुणून व ९ मिळवून

$$१६\ \text{या}^{2} + २४\ \text{या} + ९ = ८\ \text{का}^{2} + १६ + ९$$

उभयपक्षांचीं मूळें काढून

$$४\ \text{या} + ३ = \sqrt{८\ \text{का}^{2} + २५}$$

येथें का = ५ इष्ट धरून

$$४\ \text{या} + ३ = १५$$

$$\therefore\quad \text{या} = ३$$

$\therefore$ ७ व ६ हे राशि.

अथवा का = १७५ इष्ट धरून

$$४\ \text{या} + ३ = ४९५$$

$$\therefore\quad \text{या} = \frac{४९५ - ३}{४} = १२३$$

$\therefore$ १५१२७ व २४६ राशि हें उत्तर.

या प्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

**आर्या—राश्योर्ययोः कृतियुतिर्वियुती चैकेन संयुते वर्गौ ॥
रहिते वा तौ राशी गणयित्वा कथय यदि वेत्सि ॥**

अर्थ—ज्या दोन राशींच्या वर्गांच्या बेरजेमध्यें व अंतरामध्यें एक मिळविला असतां किंवा एक वजा केला असतां वर्गराशि होतात तर ते दोन राशि कोणते हें सांग ?

उत्तरानिष्काशनक्रिया.

$$४\ या^२ = प्रथमराशि^२\ आणि$$
$$५\ या^२ - १ = द्वितीयराशि^२\ धरून$$
$$२\ या = प्रथमराशि$$
$$\sqrt{५\ या^२ - १} = द्वितीयराशि$$
$$येथें\ या = १\ धरून$$
$$\left.\begin{array}{r} २ = प्रथमराशि \\ २ = द्वितीयराशि \end{array}\right\}\ हेंउत्तर.$$
$$अथवा\ या = १७\ इष्ट\ धरून$$
$$\left.\begin{array}{r} ३४ = प्रथमराशि \\ ३८ = द्वितीयराशि \end{array}\right\}\ हेंउत्तर.$$

इत्यादि अनेक उत्तरें येतील.

आतां दुसऱ्या उदाहरणामध्यें

$$४\ या^२ = प्रथमराशि^२$$
$$५\ या^२ + १ = द्वितीयराशि^२$$

अशी कल्पना राशिसंबंधानें केली असतां उदाहरणांतील दोन्ही आलाप (अटी) जुळतात म्हणून

$$२\ या = प्रथमराशि$$
$$\sqrt{५\ या^२ + १} = द्वितीयराशि$$
$$येथें\ या = ४\ इष्ट\ धरून$$
$$\left.\begin{array}{r} ८ = प्रथमराशि \\ ९ = द्वितीयराशि \end{array}\right\}\ हेंउत्तर.$$
$$अथवा\ या = ७२\ इष्ट\ धरून$$
$$\left.\begin{array}{r} १४४ = प्रथमराशि \\ १६१ = द्वितीयराशि \end{array}\right\}\ हेंउत्तर.$$

इत्यादि अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक — यत्राव्यक्तं सरूपं हि तत्र तन्मानमानयेत् ॥ सरूपस्यान्यवर्णस्य कृत्वा कृत्यादिना समं ॥ राशिं तेन समुत्थाप्य कुर्यात् भूयोपरां क्रियां ॥ सरूपेणान्यवर्णेन कृत्वा पूर्वपदं समं ॥

अर्थ — ज्या उदाहरणामध्यें वर्गराशि रूपयुक्त अव्यक्त आहे तेथें दुसऱ्या रूपयुक्त अव्यक्ताच्या वर्गाबरोबर तो वर्गराशि आहे अशी कल्पना करून अव्यक्ताचें मान आणावें आणि त्या मानापासून पुनः क्रिया करून राशीचें व्यक्तमान साधावें. पुनः क्रिया नसल्यास पूर्वकल्पित वर्गात्मक पद हें रूपयुक्त अन्यवर्णाबरोबर करून म्हणजे आरंभींच्याच समीकरणावरून व्यक्तमान आणावें.

श्लोक — यस्त्रिपंचगुणो राशिः पृथक् सैकः कृतिर्भवेत् ॥ वद तं बीजमध्येऽसि मध्यमाहरणे पटुः ॥

अर्थ — ज्या राशीस पृथक् ३ व ५ यांनीं गुणून एक मिळविला असतां वर्गराशि होतो तर तो राशि कोणता हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = राशि कल्पना करून

$$३ \text{ या} + १ = (३ \text{ नी} + १)^२ \text{ धरून}$$

$$३ \text{ या} + १ = ९ \text{ नी}^२ + १ + ६ \text{ नी}$$

$$\therefore \text{ या} = ३ \text{ नी}^२ + २ \text{ नी}$$

या राशीस ५ नी गुणून १ मिळविला असतां वर्गराशि होतो ह्मणून

$$५ (३ \text{ नी}^२ + २ \text{ नी}) + १ = \text{पी}^२$$

$$१५ \text{ नी}^२ + १० \text{ नी} + १ = \text{पी}^२$$

$$\therefore १५ \text{ नी}^२ + १० \text{ नी} = \text{पी}^२ - १$$

उभयपक्षांस १५ नीं गुणून व २५ मिळवून

$$२२५ \text{ नी}^२ + १५० \text{ नी} + २५ = १५ \text{ पी}^२ - १५ + २५$$

उभयपक्षांचीं मूळें काढून

$$१५ \text{ नी} + ५ = \sqrt{१५ \text{ पी}^२ + १०}$$

येथें पी = ९ इष्ट धरून

$$१५ \text{ नी} + ५ = ३५$$

$$\therefore \text{ नी} = २$$

$$\therefore \text{ या} = १६ \text{ राशि हें उत्तर.}$$

अथवा पी = ७१ इष्ट धरून

या = १००८ राशि हें उत्तर

याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक--को राशिस्त्रिभिरभ्यस्तःसरूपो जायते घनः॥ घनमूळं कृतीभूतं त्र्यभ्यस्तं कृतिरेकयुक्॥

अर्थ—ज्या राशीस ३ नीं गुणून १ मिळविला असतां घनराशि होतो व त्या घनराशीचें घनमूळ काढून त्या घनमूळाच्या वर्गास ३ गुणून १ मिळविला असतां वर्गराशि होतो तर तो राशि कोणता हें सांग?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$$\text{या} = \text{राशि धरून}$$

$$३\,\text{या} + १ = \text{का}^{३}$$

$$\therefore\ \text{या} = \frac{\text{का}^{३} - १}{३}$$

$$\therefore\ ३\left(\sqrt[३]{\frac{\text{का}^{३} - १}{३} \times ३ + १}\right)^{२} + १ = \text{नी}^{२}$$

$$\therefore\ ३\,\text{का}^{२} + १ = \text{नी}^{२}$$

$$\sqrt{३\,\text{का}^{२} + १} = \text{नी}$$

$$\text{येथें का} = ४ \text{ इष्ट धरून}$$

$$\text{नी} = ७$$

$$\therefore\ \text{या} = २१ \text{ राशि हें उत्तर.}$$

इत्यादि अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक—वर्गांतरं कयो राश्योः पृथक् द्वित्रिगुणं त्रियुक्॥ वर्गौ-स्यातां वद क्षिप्रं षट्कपंचकयोरिव॥

अर्थ—ज्या दोन राशींच्या वर्गांचें अंतर पृथक् २ व ३ ह्या संख्यांनीं गुणून ३ मिळविले असतां वर्गराशि होतात, तर ते दोन राशि ६ व ५ यांसारखे अन्य कोणते आहेत तें सांग?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

प्रथमतः या = दोन राशींच्या वर्गांचें अंतर कल्पिलें.

$$\therefore\ \text{या}\ २ + ३ = \text{का}^{२}$$

$$\therefore \quad या = \frac{का^2 - ३}{२}$$

उदाहरणांतील दुसऱ्या आलापावरून

$$\frac{का^2 - ३}{२} \times ३ + ३ = नी^2$$

$$\therefore \frac{३ का^2 - ९ + ६}{२} = नी^2$$

$$३ का^2 - ३ = २ नी^2$$

उभयपक्षांस ३ नीं गुणून

$$९ का^2 = ६ नी^2 + ९$$

$$\therefore \quad ३ का = \sqrt{६ नी^2 + ९}$$

येथें नी = ६ इष्ट धरून

$$३ का = १५$$

$$\therefore \quad का = ५$$

$$\therefore \quad या = ११ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

अथवा नी = ६० इष्ट धरून

$$या = ११९९ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

आतां दोन राशींच्या वर्गांतरास दोन राशींच्या अंतरानें भागिलें असतां त्याच दोन राशींचा योग येतो या प्रसिद्धसिद्धांतावरून

दोन राशींचें अंतर = १ इष्ट कल्पना करून

दोन राशींचा योग = ११

यापासून संक्रमणगणितानें राशि ५ व ६ हें उत्तर,

अथवा दोन राशींचें अंतर = ११ इष्ट धरून

दोन राशींचा योग = $\frac{११९९}{११}$ = १०९

यापासून राशि ६० व ४९ हें उत्तर इत्यादि.

श्लोक—क्वचिदादेः क्वचिन्मध्यात् क्वचिदंत्यात् क्रिया बुधैः ॥
आरभ्यते यथा लघ्वी निर्वहेच्च यथा तथा ॥

अर्थ—एखाद्या उदाहरणामध्यें, आरंभापासून क्वचित् मध्यापासून, क्वचित् अंत्यापासून, ज्या पद्धतीनें थोडक्यांत उदाहरण सुटेल, अशी क्रिया

बीजज्ञपंडित आरंभ करितात. जसें मागच्या उदाहरणामध्यें मध्यापासून क्रियेला आरंभ केला आहे. आरंभापासून राशि कल्पना करून उदाहरण सोडविल्यास अत्यंत विस्तार होतो.

श्लोक— वर्गादेर्यो हरस्तेन गुणितं यदि जायते ॥ अव्यक्तं तत्र-तन्मानमभिन्नं स्याद्यथा तथा ॥ कल्प्योऽन्यवर्णवर्गादिस्तुल्यं शेषं यथोक्तवत् ॥

अर्थ—ज्या ठिकाणीं वर्गादिकाच्या भाजकानें गुणिलेलें अव्यक्त असेल तेथें त्या अव्यक्ताचें मान अभिन्न (निःशेष) येईल अशा अन्य अव्यक्त वर्गादिकाची कल्पना करून शेषक्रिया पूर्वींप्रमाणेंच करावी.

श्लोक — को वर्गश्चतुरूनः सन् सप्तभक्तो विशुध्यति ॥ त्रिंशदूनोऽथवा कस्तं यदि वेत्सि वद द्रुतं ॥

अर्थ--ज्या राशिवर्गांतून ४ वजा करून ७ नीं भागिलें असतां भागाकार पूर्णांकात्मक येतो असा वर्गराशि कोणता हें सांग ?

अथवा ज्या राशिवर्गांतून ३० वजा करून ७ नीं भागिलें असतां भागाकार पूर्णांकात्मक येतो, असा वर्गराशि कोणता हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया (उदाहरण १)

$\text{या}^{२} = $ वर्गराशि धरून

$\dfrac{\text{या}^{२} - ४}{७} = $ का भागाकार धरा.

$\therefore\ \text{या}^{२} = ७\,\text{का} + ४$

येथें मागच्या सूत्राप्रमाणें वर्गाचा भाजक ७ यानें गुणिलेलें अव्यक्त (का) हें आहे.

$\therefore\ \text{का} = ७\,\text{नी}^{२} + ४\,\text{नी}$ इष्ट धरून.

$\text{या}^{२} = ४९\,\text{नी}^{२} + २८\,\text{नी} + ४$

उभयपक्षांचीं मूळें काढून

$\text{या} = ७\,\text{नी} + २$

येथें $\text{नी} = १$ धरून

$\text{या} = ९$

$\therefore\ \text{या}^{२} = ८१$ वर्गराशि हें उत्तर.

अथवा $\text{नी} = २$ धरून

$$\text{या} = १६$$
$$\therefore \quad \text{या}^२ = २५६ \text{ वर्गराशि हें उत्तर.}$$

इत्यादि अनेक उत्तरें येतील.

उत्तरनिष्काशनक्रिया. (उदाहरण २)

$$\text{या}^२ = \text{वर्गराशि धरून}$$
$$\frac{\text{या}^२ - ३०}{७} = \text{का}$$
$$\therefore \quad \text{या}^२ = ७ \text{ का} + ३०$$
$$\text{येथें का} = ७ \text{ नी}^२ + ८ \text{ नी} - २ \text{ इष्ट धरून}$$
$$\text{या}^२ = ४९ \text{ नी}^२ + ५६ \text{ नी} - १४ + ३०$$
$$\therefore \quad \text{या} = ७ \text{ नी} + ४$$
$$\text{येथें नी} = १ \text{ धरून}$$
$$\text{या} = ११$$
$$\therefore \quad \text{या}^२ = १२१ \text{ वर्गराशि हें उत्तर.}$$

इत्यादि अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक—षड्भिरूनो घनः कस्य पंचभक्तो विशुध्यति ॥ तं-वदास्ति तवालंचेदभ्यासो घनकुट्टके ॥

अर्थ—ज्या राशीच्या घनांतून ६ वजा करून ५ नीं भागिलें असतां भागाकार पूर्णांकात्मक येतो, असा राशि कोणता हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{या} = \text{राशि धरून}$$
$$\frac{\text{या}^३ - ६}{५} = \text{का}$$
$$\text{या}^३ = ५ \text{ का} + ६$$
$$\text{येथें का} = २५ \text{ नी}^३ + ९० \text{ नी}^२ + १०८ \text{ नी} + ४२ \text{ इष्ट धरून}$$
$$\text{या}^३ = १२५ \text{ नी}^३ + ४५० \text{ नी}^२ + ५४० \text{ नी} + २१० + ६$$
$$\therefore \quad \text{या} = ५ \text{ नी} + ६$$
$$\text{येथें नी} = १ \text{ धरून}$$
$$\text{या} = ११ \text{ हें उत्तर.}$$
$$\text{नी} = २ \text{ धरून}$$

या = १६ हें उत्तर.

याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक—**यद्वर्गः पंचभिः क्षुण्णः त्रियुक्तः षोडशोद्धृतः ॥ शुद्धिमेति तमाचक्ष्व दक्षोऽसि गणिते यदि ॥**

अर्थ—ज्या संख्येच्या वर्गास ५ नीं गुणून ३ मिळविले आणि १६ नीं भागिलें असतां भागाकार पूर्णांकात्मक येतो तर ती संख्या कोणती हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = संख्या धरून

$$\frac{५\,\text{या}^{२} + ३}{१६} = \text{का}$$

$$\therefore\quad \text{या}^{२} = \frac{१६\,\text{का} - ३}{५}$$

उभयपक्षांस २५ नीं गुणून

$$२५\,\text{या}^{२} = ८०\,\text{का} - १५$$

$$\therefore\quad ५\,\text{या} = \sqrt{८०\,\text{का} - १५}$$

येथें का = २० नी^{२} ± १५ नी + ३ इष्ट धरून

$$५\,\text{या} = \sqrt{१६००\,\text{नी}^{२} \pm १२००\,\text{नी} + २४० - १५}$$

$$\therefore\quad ५\,\text{या} = ४०\,\text{नी} \pm १५$$

$$\therefore\quad \text{या} = ८\,\text{नी} \pm ३$$

येथें नी = १ धरून

या = ११ हें उत्तर अथवा ५ हें उत्तर.

इत्यादि अनेक उत्तरें येतील.

आर्या—**हरभक्ता यस्य कृतिः शुध्यति सोऽपि द्विरूपपदगुणितः ॥ तेनाहतोऽन्यवर्णो रूपपदेनान्वितः कल्प्यः ॥ यदि न पदं रूपाणां क्षिपेद्धरं तेषु हारतष्टेषु ॥ तावद्यावद्वर्गो भवति नचेदेवमपि खिलं तर्हि ॥**

अर्थ—गेल्या तीन श्लोकांतील उदाहरणांमध्यें समीकरणाच्या एका पक्षाचें मूळ निघून दुसऱ्या पक्षाचें मूळ निघण्याकरितां जी खटपट केली आहे ती खटपट न पडावी व एकदम दुसऱ्यापक्षाचें मूळ निघावें याविषयीं रीती येथें दिली आहे ती अशीः—

ज्या संख्येचा वर्ग भाजकानें भागिला असतां निःशेष होतो, त्यासंख्येच्या दुपटीस रूपांच्या मूळानें गुणून जो गुणाकार येईल त्यासही हरानें (भाजकानें) भागिलें असतां भागाकार निःशेष येईल, तर त्या संख्येनें अन्यवर्णास गुणून त्यामध्यें रूपांचें मूळ मिळविलें असतां इष्टमूळ येतें.

जर रूपांचें मूळ बरोबर निघत नसलें तर त्या रूपांस हरानें भागून जी शिल्लक उरेल तीमध्यें हराची कोणतीही एखादी पट मिळवावी कीं, ती पट मिळविल्यानें वर्गराशि होईल. त्यावर्गराशीचें मूळ मिळविलें असतां इष्टमूळ येतें. हराची पट मिळविल्यानें वर्गराशी होत नसल्यास तें उदाहरण खोटें आहे असें समजावें.

जसें मागील तीन श्लोकांपैकीं पहिल्या उदाहरणामध्यें

$$\text{या}^2 = ७\,\text{का} + ४$$

$$\therefore \quad \text{या} = \sqrt{७\,\text{का} + ४}$$

यांतील दुसऱ्या पक्षांचें मूळ (का) हून अन्य अव्यक्ताच्या स्वरूपांत आणणें आहे.

या उदाहरणामध्यें हर ७ आहे व रूपें ४ आहेत, ह्मणून ७ च्या वर्गास हरानें भागिलें असतां निःशेष भागाकार येतो व ७ च्या दुपटीस रूपांचें मूळ २ यांनीं गुणून गुणाकार २८ येतो. यासही हरानें भागिलें असतां शेष राहत नाहीं ह्मणून ७ या संख्येनें अन्यवर्ण (नी) याला गुणून ७ नी झाले. यांत रूपें ४ यांचें मूळ २ मिळविले तेव्हां ७ नी + २ हें दुसऱ्या पक्षाचें मूळ झालें.

$$\therefore \quad \text{या} = ७\,\text{नी} + २$$

आतां दुसऱ्या उदाहरणामध्यें हर ७ आहे व रूपें ३० आहेत ह्मणून ७ च्या वर्गास हरानें भागिलें असतां शेष राहत नाहीं. तसेंच ७ च्या दुपटीस रूपांच्या मूळानें गुणावयाचें, परंतु रूपें ३० असल्यामुळें मूळ निघत नाहीं करितां रूपें ३० यांसही ७ ह्यानें भागून शिल्लक २ राहते. यामध्यें हराची दुप्पट १४ मिळविले असतां १६ हा वर्गराशि होतो. यास रूपें कल्पना करून याचें मूळ ४ हें आलें ह्मणून ७ च्या दुपटीस रूपांच्या मूळानें गुणून गुणाकार ५६ झाला. याला हरानें भागिलें असतां निःशेष भागाकार येतो. करितां ७ ह्यानें अन्यवर्ण (नी) ह्याला गुणून ७ नी आले. यांत रूपांचें मूळ ४ मिळवून ७ नी + ४ हें द्वितीयपक्षांचें मूळ झालें.

$\therefore$ या = ७ नी + ४.

आतां तिसऱ्या उदाहरणामध्यें हर ५ व रूपें ६ आहेत. या उदाहरणांत घनाचा संबंध आहे ह्मणून रूपांचें घनमूळ निघत नाहीं. करितां ६ रूपांस हर ५ यानें भागून शिल्लक १ राहिली. यामध्यें हर ५ याची ४३ पट ह्मणजे २१५ मिळविले असतां २१६ हा घनराशि होतो. याचें घनमूळ ६ हें रूपांचें मूळ झालें. आतां ५ च्या घनास हर ५ यानें भागिलें असतां भागाकार निःशेष येतो व येथें घनाचा संबंध असल्यामुळें हराच्या तिपटीस ह्मणजे ५ × ३ यास रूपांच्या मूळानें ह्मणजे ६ यानें गुणून गुणाकार ९० यास हरानें भागिलें असतां भागाकार निःशेष होतो ह्मणून ५ या संख्येनें अन्यवर्ण नी यास गुणून रूपांचें मूळ ६ मिळवून ५ नी + ६ हें दुसऱ्यापक्षाचें घनमूळ झालें.

$\therefore$ या = ५ नी + ६

आतां चवथ्या उदाहरणामध्यें आलापित हर १६ व रूपें ३ आहेत परंतु गुणनादि क्रिया करून हर ८० व रूपें ऋण १५ आलीं आहेत तीं घेऊन येथें क्रिया केली पाहिजे. ऋणरूपें १५ यांचें वर्गमूळ निघत नाहीं. करितां त्यास हर ८० नें भागून शेष ऋण १५ राहिलें. यामध्यें हराची तिप्पट २४० मिळवून २२५ हा वर्गराशि झाला. याचें मूळ १५ हें रूपांचें मूळ झालें. आतां ४० च्या वर्गास हर ८० नें भागिलें असतां शेष रहात नाहीं व ४० च्या दुपटीस रूपांच्या मूळानें १५ गुणिले असतां ४० × २ × १५ = १२०० हा गुणाकार येतो. यांसही हर ८० नें भागिलें असतां शेष राहत नाहीं. करितां ४० यानें अन्यवर्ण नी यास गुणून रूपमूळ १५ मिळवून ४० नी + १५ हें दुसऱ्या पक्षाचें मूळ झालें.

$\therefore$ ५ या = ४० नी + १५

उपपत्ति.

$$\text{या} = \sqrt{\text{७ का + ४}}$$

असें पहिल्या उदहरणांत समीकरण आहे. त्यास $\sqrt{\text{७ का + ४}}$ याचें मूळ काढणेकरितां

$$\sqrt{\text{७ का + ४}} = \text{नी} \times \text{इष्टांक} + \text{व्यक्त मानूं.}$$

$$\therefore \quad \text{७ का + ४} = \text{नी}^2\,\text{इ}^2 + \text{व्य}^2 + \text{२ नी. इ. व्य.}$$

$$\therefore \quad \text{का} = \frac{\text{नी}^2\,\text{इ}^2 + \text{व्य}^2 + \text{नी. इ. व्य} - \text{४}}{\text{७}}$$

येथें (का) ची किंमत पूर्णांकात्मक येण्याकरितां (इ) ची किंमत अशी धरिली पाहिजे कीं, हर ७ यानें (इ) ला भागिलें असतां शेष राहणार नाहीं. व (२ इ व्य) यासही भागिलें असतां भाग तुटला पाहिजे. व (व्य) ची किंमत उघड दिसत आहे कीं, उदाहरणांतील ४ रूपें यांचें मूळच धरलें पाहिजे. मूळ निघत नसल्यास व्यं ∓ ४ अगर अन्य ३० वगैरे जो अंक असेल यास ७ नें भाग तुटेल अशी (व्य) ची किंमत धरली पाहिजे ह्मणून इष्ट सिद्धि झाली.

आर्या— हत्वा क्षिप्त्वा च पदं यत्राद्यस्येह भवति तत्रापि ॥ आलापित एव हरो रूपाणि तु शोधनादिसिद्धानि ॥

अर्थ—ज्या ठिकाणीं गुणूनक्षेपणादि क्रिया करून पहिल्या पक्षाचें मूळ निघतें, त्या ठिकाणीं दुसऱ्या पक्षाचें मूळ मागील रीतीप्रमाणें काढण्याकरितां शोधनादि सिद्ध हर घेऊं नये. आलापितच हर घ्यावा व रूपें मात्र शोधनादि सिद्ध घ्यावीत. आलापित रूपें घेऊं नयेत.

जसें.-गेल्या उदाहरणांतील अखेरच्या उदाहरणामध्यें $\frac{५ या^२ + ३}{१६} = का$ हें समीकरण आहे. यांत हर आलापित १६ व रूपें ३ आहेत. पुढें याच समीकरणाचें स्वरूप $२५ या^२ = ८० का - १५$ आलें. येथें हर ८० झाला व रूपें ऋण १५ झालीं. येथें आलापित हर १६ व रूपें ऋण १५ घेऊन मागच्या रीतीनें दुसऱ्यापक्षाचें मूळ $८ नी + १$ असें काढिलें.

$$\therefore \quad या\ ५ = ८ नी + १$$

$$\therefore \quad या = \frac{८ नी + १}{५}$$

हें कुट्टकाचें स्वरूप असल्यामुळें कुट्टक रीतीनें लब्धिगुण ५।३ आले.

$$\therefore \quad या = ५$$

इत्यादि अनेक उत्तरें येतील.

येथें भास्कराचार्यांनें आलापितच हर घ्यावा असें सांगितलें, परंतु आलापित हर न घेतां शोधनादि सिद्ध हर ८० ही घेऊन मागें उदाहरण सोडून दाखविलें आहे. करितां आलापित एव असा जो निश्चय सांगितला आहे त्याची जरूरी नाहीं.

याप्रमाणें अनेकवर्णमध्यमाहरणप्रकरणाचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

भावित प्रकरण.

श्लोक—मुक्तवेष्टवर्णं सुधिया परेषां कल्प्यानि मानानि यथेप्सितानि ॥ तथा भवेद्भावितभंग एव स्यादाद्यबीजक्रिययेष्ट सिद्धिः ॥

अर्थ—अनेक अव्यक्तांच्या गुणाकारास भावित असें ह्मणतात. असें भावित ज्या उदाहरणामध्यें असेल तेथें इष्टवर्णास सोडून शेष अव्यक्तांचीं मानें यथेष्ट कल्पून भावित नष्ट झाल्यामुळें एकवर्ण समीकरणक्रियेनें उत्तर निघेल.

श्लोक—चतुस्त्रिगुणयो राश्योः संयुति र्द्वियुता तयोः ॥ राशिघातेन तुल्या स्यात्तौ राशी वेत्सि चेद्वद ॥

अर्थ—ज्या दोन राशींस ४ व ३ ह्या संख्यांनीं गुणून त्यांच्या बेरजेमध्यें २ मिळवून जी संख्या येईल ती, त्याच दोन राशींच्या गुणाकाराबरोबर असते, तर त्या दोन राशि कोणत्या हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = प्रथमराशि आणि

का = द्वितीयराशि धरून

४ या + ३ का + २ = या· का.

येथें का = ५ इष्ट धरून

४ या + ३ × ५ + २ = या × ५

∴ या = १७

∴ १७ व ५ हे राशि. याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक—चत्वारो राशयः के ते यद्योगो नखसंगुणः ॥ सर्वराशिहते स्तुल्यो भावितज्ञ निगद्यतां ॥

अर्थ—ज्या चार राशींच्या बेरजेची २० पट ही त्याच चार राशींच्या गुणाकारा बरोबर होते, तर ते राशि कोणते हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या, ५, ४ व २ असे चार राशी कल्पून

२० (या + ५ + ४ + २) = या × ५ × ४ × २

२० या + १०० + ८० + ४० = ४० या

∴ २० या = २२०

∴ या = ११

∴ ११, ५, ४, २ राशि हें उत्तर.

इत्यादि अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक—यौ राशी किल या च राशिनिहति यौ राशिवर्गौ तथा तेषामैक्यपदं सराशियुगलं जातं त्रयोविंशतिः ॥ पंचाशत्त्रियुताथवा वद कियत्तद्राशियुग्मं पृथक् तच्चाभिन्न मवेहि वत्स गणकः कस्त्वत्समोऽस्ति क्षितौ ॥

अर्थ—जे दोन राशि व त्याच दोन राशींचा जो गुणाकार आणि त्याच दोन राशींचे जे पृथक् वर्ग ह्या सर्वांच्या बेरजेच्या वर्गमूळामध्यें दोन्ही राशि मिळविले असतां २३ अथवा ५३ येतात तर ते दोन राशि पूर्णांकात्मक कोणते हें सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

या = प्रथमराशि आणि

२ = द्वितीयराशि धरून

$$\sqrt{\text{या} + २ + २\,\text{या} + \text{या}^{२} + ४} + \text{या} + २ = २३$$

$$\sqrt{\text{या}^{२} + ३\,\text{या} + ६} = २३ - २ - \text{या}$$

दोन्ही पक्षांचें वर्ग करून

$$\text{या}^{२} + ३\,\text{या} + ६ = ४४१ + \text{या}^{२} - ४२\,\text{या}$$

$$\therefore \quad ४५\,\text{या} = ४३५$$

$$\text{या} = \frac{४३५}{४५} = \frac{२९}{३}$$

हा अपूर्ण राशी आला. करितां

या = प्रथमराशि आणि

३ = द्वितीयराशि धरून

उक्त क्रिया केली असतां

$$\left.\begin{array}{l} ७ = \text{प्रथमराशि} \\ ३ = \text{द्वितीयराशि} \end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

तसेंच दुसऱ्या उदाहरणामध्यें

या = प्रथमराशि आणि

१७ = द्वितीयराशि धरून

उक्त क्रिया केली असतां

११ व १७ राशि हें उत्तर.

श्लोक--भावितं पक्षतोऽभीष्टा त्यक्त्वा वर्णौ सरूपकौ ॥ अन्यतो भावितांकेन ततःपक्षौ विभज्य च ॥ वर्णांकाहतिरूपैक्यं भक्त्वेष्टेनेष्टतत्फले॥ एताभ्यां संयुतावूनौ कर्तव्यौ स्वेच्छया च तौ ॥ वर्णांकौ वर्णयोर्माने ज्ञातव्ये ते विपर्ययात् ॥

अर्थ--समीकरणाच्या एका पक्षामध्यें केवल भावित आणून दुसऱ्या पक्षामध्यें रूपयुक्त पृथक् वर्ण आणावेत. नंतर भावितास एखादा गुणक असल्यास त्यानें उभयपक्षास भागावें. नंतर दुसऱ्या पक्षामध्यें वर्णांस जे पृथक् गुणक असतील त्यांच्या गुणाकारामध्यें त्याच पक्षांतील रूपें मिळवावीं. रूपें मिळवून जी बेरीज होईल तिला इष्ट संख्येनें भागावें. नंतर इष्ट संख्या व आलेला भागाकार या दोघांनीं पृथक् युक्त किंवा रहित असे वर्णांक (वर्णांचे गुणक) यथेच्छ करावेत. असें केल्यानें वर्णांचीं मानें विपर्ययें करून येतात म्हणजे ज्या वर्णाच्या अंकामध्यें युक्त केलें असेल तद्भिन्न वर्णाची किंमत येते. जसें--

$$\text{या}\cdot\text{का} = ४\,\text{या} + ३\,\text{का} + २$$

या समीकरणामध्यें दुसऱ्या पक्षांतील वर्णांक ४ व ३ आहेत. यांचा गुणाकार १२, यांत रूपें २ मिळवून बेरीज १४ झाली. या बेरजेस इष्ट १ धरून त्यानें भागून भागाकार १४ आला. आतां १ व १४ यांनीं वर्णांक ४ व ३ हे युक्त करून ५ व १७ आले.

$$\therefore \left.\begin{array}{l}\text{या} = १७\\ \text{का} = ५\end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

अथवा १।१४ हे ३ व ४ या वर्णांकामध्यें मिळवून ४।१८ आले.

$$\therefore \left.\begin{array}{l}\text{या} = ४\\ \text{का} = १८\end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

अथवा इष्ट २ यानें १४ या बेरजेस भागून भागाकार ७ आला. आतां २ व ७ यांनीं वर्णांक ४।३ हे युक्त केले, तेव्हां ६ व १० आले.

$$\therefore \left.\begin{array}{l}\text{या} = १०\\ \text{का} = ६\end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

अथवा २।७ यांनीं वर्णांक ३।४ युक्त करून ५।११ आले.

$$\therefore \left.\begin{array}{l}\text{या} = ५\\ \text{का} = ११\end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतील.

उपपत्ति.

$\pm$ अ. या $\pm$ ब. का $\pm$ क $=$ या. का.

या समीकरणामध्यें अ, ब, क ह्यांच्या किंमती माहीत असून (या) व (का) ह्या अव्यक्तांच्या किंमती काढावयाच्या आहेत असें समजा.

वरील समीकरणावरून

$$\text{या का} \mp \text{अ या} = \pm \text{ब का} \pm \text{क}$$

$$\therefore \quad \text{या} (\text{का} \mp \text{अ}) = \pm \text{ब का} \pm \text{क}$$

$$\therefore \quad \text{या} = \frac{\pm \text{ब का} \pm \text{क}}{\text{का} \mp \text{अ}}$$

$$\therefore \quad \text{या} = \text{ब} \pm \frac{\text{ब} \times \text{अ} \pm \text{क}}{\text{का} \mp \text{अ}}$$

येथें का $\mp$ अ $=$ इष्ट धरून

$$\text{या} = \text{ब} \pm \frac{\text{ब} \times \text{अ} \pm \text{क}}{\text{इष्ट}}$$

आणि का $=$ इष्ट $\pm$ अ

अथवा आरंभींच्या समीकरणावरून

$$\text{या का} \mp \text{ब का} = \pm \text{अ या} \pm \text{क}$$

$$\text{का} (\text{या} \mp \text{ब}) = \pm \text{अ या} \pm \text{क}$$

$$\therefore \quad \text{का} = \frac{\pm \text{अ या} \pm \text{क}}{\text{या} \mp \text{ब}}$$

$$= \text{अ} \pm \frac{\text{अ} \times \text{ब} \pm \text{क}}{\text{या} \mp \text{ब}}$$

येथें या $\mp$ ब $=$ इष्ट धरून

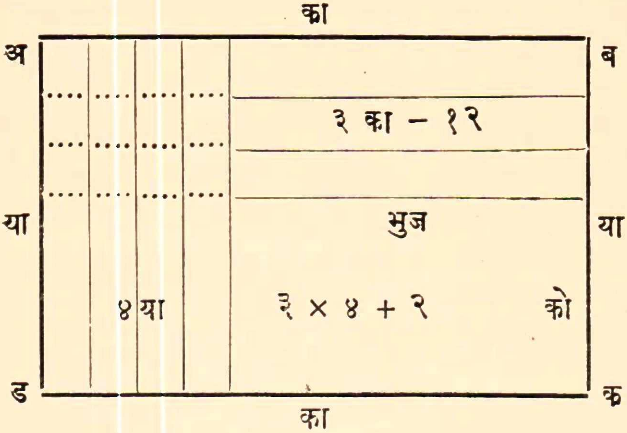
$$\text{का} = \text{अ} \pm \frac{\text{अ} \times \text{ब} \pm \text{क}}{\text{इष्ट}}$$

आणि या $=$ इष्ट $\pm$ ब

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

अथवा दुसऱ्या तऱ्हेनें उपपत्ति.

$$४ \text{ या} + ३ \text{ का} + २ = \text{या. का.}$$



येथें अ ब क ड या क्षेत्राचें फल = या. का.

यामध्यें ४ या संबंधीं क्षेत्रफल पूर्ण दाखवितां आलें. ३ का संबंधीं पूर्ण क्षेत्रफल दाखवितां येत नाहीं. कारण ३ का संबंधीं १२ कोष्टकें ४ या संबंधीं क्षेत्रामध्यें शिरतात. करितां तीं १२ व समीकरणांतील २ रूपें मिळून १४ रूपें अधोगत भुजकोटीच्या क्षेत्रामध्यें असलीं पाहिजेत. तेव्हां त्या क्षेत्राचें फल १४ आहे असें झालें ह्मणून त्या क्षेत्रांतील एकबाजु इष्ट धरली असतां क्षेत्रफल समजल्यामुळें क्षेत्रफल ४ × ३ + २ यास इष्टानें भागिलें असतां दुसरी बाजु निघेल. पुढें त्या बाजू वर्णांकामध्यें मिळविल्या असतां (या) (का) ह्यांच्या किंमती निघतील हें क्षेत्रावरून स्पष्ट दिसून येईल. हें दिक्प्रदर्शन केलें आहे. कारण एकतऱ्हेनें उपपत्ति संपूर्ण दाखविली आहे.

श्लोक--त्रिपंचगुणराशिभ्यां युतो राश्योर्वधः कयोः ॥
द्विषष्टिप्रमितो जात स्तौ राशी वेत्सि चेद्वद ॥

अर्थ-- समीकरणरूपानें

३ या + ५ का + या. का = ६२

यांतील (या) व (का) ह्यांच्या किंमती काय आहेत हें सांग?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

दिलेल्या समीकरणावरून

३ या + ५ का − ६२ = − या. का

∴ या का = − ३ या − ५ का + ६२

येथें वर्णांक – ३ व – ५ हे आहेत. यांचा गुणाकार १५ यांत ६२ मिळवून ७७ झाले. यास इष्ट ७ ह्यानें भागून फल ११ आलें. आतां इष्ट व फल ह्यामध्यें वर्णांक – ३ व – ५ हे मिळवून ४ व ६ आले. ह्मणून

$$\left.\begin{array}{l} \text{या} = ६ \\ \text{का} = ४ \end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

इत्यादि अनेक उत्तरें येतील.

श्लोक-- द्विगुणेन कयो राश्योर्घातेन सदृशं भवेत् ॥ दशेंद्राहत राश्यैक्यं द्व्यूनषष्ठिविवर्जितं ॥

अर्थ-- समीकरण रूपानें

$$२ \text{ या. का} = १० \text{ या} + १४ \text{ का} - ५८$$

ह्या समीकरणांतील या का ह्यांच्या किंमती सांग?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

दिलेल्या समीकरणावरून

$$\text{या का} = ५ \text{ या} + ७ \text{ का} - २९.$$

५ × ७ = ३५ यांत – २९ मिळवून ६ आले. यास इष्ट १ ह्यानें भागून फल ६ आलें. आतां इष्ट व फल यांमध्यें ५ व ७ हे वर्णांक मिळवून ६ व १३ आले.

$$\therefore \left.\begin{array}{l} \text{या} = १३ \\ \text{का} = ६ \end{array}\right\} \text{हें उत्तर.}$$

याप्रमाणें अनेक उत्तरें येतात.

या प्रकरणामध्यें मागें यौराशींकिल याच राशि इत्यादि श्लोकामध्यें जें उदहरण आलें तें ह्या रीतीनेंही सुटतें. तें असे.

त्या उदाहरणामध्यें या, का अशा दोन राशी कल्पना करून उक्त क्रिया केली असतां

$$\text{या. का} = ४७ \text{ या} + ४७ \text{ का} - ५२९$$

असें समीकरण उत्पन्न होतें.

येथें वर्णांक ४७ व ४७ आहेत. त्यांच्या गुणाकारांत रूपें – ५२९ मिळवून १६८० आले. आतां इष्ट ४० ह्यानें भागून फल ४२ आलें. हें इष्ट व फल वर्णांकांतून वजा करून ७ व ५ हे राशि आले. याच पद्धतीनें त्याच श्लोकांतील दुसरेंही उदाहरण सोडवावें.

ह्याप्रमाणें भावित प्रकरणाचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

उपसंहारप्रकरण.

श्लोक--आसीन्महेश्वर इति प्रथितः पृथिव्यामाचार्यवर्य-पदवीं विदुषां प्रयातः ॥ लब्धावबोधकलिकां तत एव चक्रे तज्जेन बीजगणितं लघु भास्करेण ॥

अर्थ--विद्वान् लोकांमध्यें आचार्यवर्य अशा पदवीला प्राप्त झालेला व पृथ्वीमध्यें सर्व प्रसिद्ध असा महेश्वर नामक पंडित होता. त्याचा मुलगा भास्कराचार्य ह्यानें आपल्या बापापासूनच ज्ञानलव संपादन करून हें लघु बीजगणित तयार केलें.

श्लोक--ब्रह्माव्हयश्रीधरपद्मनाभबीजानि यस्मादतिविस्तृतानि ॥ आदाय तत्सार मकारि नूनं सद्युक्तियुक्तं लघु शिष्यतुष्ट्यै ॥

अर्थ--ब्रह्मबीज, श्रीधरबीज व पद्मनाभबीज हे ग्रंथ बीजगणितावर आहेत. परंतु ते अत्यंत विस्तृत असल्यामुळें शिष्यांचा संतोष होण्याकरितां त्याच ग्रंथांतील सार काढून चांगल्या कल्पनांनीं युक्त असें हें लघु बीज तयार केलें.

श्लोक--अत्रानुष्टुप्सहस्रं हि ससूत्रोद्देशके मितिः ॥ क्वचि-त्सूत्रार्थविषयं व्याप्तिं दर्शयितुं क्वचित् ॥ क्वचिच्च कल्पनाभेदं क्वचित् युक्ति मुदाहृतं ॥

अर्थ--या ग्रंथामध्यें सूत्रें (उदाहरण सोडविण्याच्या रीतीचे श्लोक) व उद्देशक (उदाहरणें) मिळून संख्या अनुष्टुप् मानानें हजार आहे. त्यामध्येंच कोठें सूत्रार्थविषय, कोठें व्याप्ति, कोठें कल्पनाभेद व कोठें युक्ति दाखविण्याकरितां ही सांगितलें आहे. ह्यावरून ग्रंथलाघव किती झालें आहे हें सहज ध्यानांत येईल.

श्लोक--नत्युदाहरणांतोऽस्ति स्तोकमुक्तमिदं यतः ॥ दुस्तरः स्तोकबुद्धीनां शास्त्रविस्तारवारिधिः ॥ अथवा शास्त्रविस्तृत्या किं कार्यं सुधियामपि ॥

अर्थ--उदाहरणें अनंत असल्यामुळें त्या मानानें जर शास्त्राचा विस्तार करावा, तर विस्ताररूप समुद्र हा मंदबुद्धीलोकांस दुस्तर होईल.

व बुद्धिमान् लोकांस तर शास्त्रविस्ताराची मुळींच जरूर नाहीं. ह्मणून हें लघु बीज तयार केलें.

श्लोक--उपदेशलवं शास्त्रं कुरुते धीमतो यतः ॥ तत्तु प्राप्यैव विस्तारं स्वयमेवोपगच्छति ॥ जले तैलं खले गुह्यं पात्रे दानमनागपि ॥ प्राज्ञे शास्त्रं स्वयं याति विस्तारं वस्तुशक्तितः ॥

अर्थ--ज्यामध्यें उपदेशाचा लव आहे असें शास्त्र बुद्धिवानास प्राप्त झालें असतां तें स्वतःच विस्तारास जातें.

जसें, जलामध्यें तेलाचा एक बिंदु टाकिला असतां तो स्वशक्तीनेंच विस्तारास जातो, खलाचे ठिकाणीं गुह्य व पात्रीं दान विस्तरास जातें. तसेंच प्राज्ञाच्या ठिकाणीं शास्त्र हें वस्तुशक्तीनेंच विस्तारास जातें. करितां शास्त्रलाघव करणें हें उत्तम होय.

श्लोक--गणकभणितिरम्यं बाललीलावगम्यं सकलगणितसारं सोपपत्तिप्रकारं ॥ इति बहुगुणयुक्तं सर्वदोषैर्विमुक्तं पठ पठ मतिवृध्द्यै लघ्विदं प्रौढिसिध्द्यै ॥

अर्थ--शद्बांनीं रम्य, सहज समजणारें, सकल गणिताचें सार, उपपत्तिप्रकारांनीं युक्त, बहुतगुणांनीं युक्त, व सर्व दोषांनीं रहित असें मीं केलेलें हें लघु बीजगणित, मतिवृद्धीकरितां व प्रौढिसिद्धीकरितां अवश्य पठन करा.

याप्रमाणें संपूर्ण बीजगणिताचें सोपपात्तिक भाषांतर समाप्त झालें.

खानापुरस्थदैवज्ञविनायककृतं खलु ॥

स्फुटभाषांतरमिदं श्रीकृष्णाय समर्पितं ॥

तेन श्रीशः प्रसन्नोस्तु.

विनायकशास्त्री खानापुरकर यांनीं तयार केलेलीं पुस्त[illegible]

१ भास्कराचार्यकृत लीलावतीचें सोपपत्तिक भाषांतर. किंमत रु० २.
२ [illegible]सिद्धांतचूडामणि (संस्कृत श्लोकबद्ध). किंमत ८ आणे
३ [illegible]संमेलन. किंमत ८ आणे.
४ गोलाध्यायपूर्वार्ध. किंमत १ रुपाया.
५ भास्कराचार्यकृत बीजगणिताचें सोपपत्तिक भाषांतर. किंमत २ रुपये.
६ गोलाध्यायउत्तरार्धाचें " " "
७ सूर्यसिद्धांताचें " " "
८ तिथिचिंतामणी पूर्वार्धाचें " " "
९ भुजज्यादिषट्कोत्पत्ति (त्रिकोणमितिपूर्वार्ध)
१० " " " (त्रिकोणमिति उत्तरार्ध).
११ गणित[illegible]चें सोपपत्तिक भाषांतर.
१२ ग्रहवेध[illegible]करण.
१३ सिद्धांतसार (संस्कृत).
१४ अर्धकांड (संस्कृत).
१५ वैनायकीय द्वादशाध्यायी (संस्कृत).

यांपैकीं नंबर ६ पासूनचीं पुस्तकें छापावावयाचीं आहेत. कोणी छापावयास तयार आहे काय ?