Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 21

Aufgabe 21.1. Beschreibe das Spektrum eines diskreten Bewertungsringes.

Aufgabe 21.2. Sei R ein diskreter Bewertungsring und sei $\mathfrak{m} = (\pi)$. Es sei $K = R/(\pi)$ der Restklassenkörper von R. Zeige, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen R-Modulisomorphismus

$$(\pi^n)/(\pi^{n+1}) \longrightarrow K$$

gibt.

Aufgabe 21.3. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen R und Q gibt.

Aufgabe 21.4. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Charakterisiere die endlich erzeugten R-Untermoduln von Q. Auf welche Form kann man ein Erzeugendensystem bringen?

Aufgabe 21.5. Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $f \in K[X]$, $f \neq 0$, und $a \in K$. Zeige, dass die folgenden „Ordnungen“ von f an der Stelle a übereinstimmen.

(1) Die Verschwindungsordnung von f an der Stelle a, also die maximale Ordnung einer formalen Ableitung mit $f^{(k)}(a) = 0$.
(2) Der Exponent des Linearfaktors $X - a$ in der Zerlegung von f.
(3) Die Ordnung von f an der Lokalisierung $K[X]_{(X-a)}$ von $K[X]$ am maximalen Ideal $(X - a)$.

Aufgabe 21.6. Sei K ein Körper und $K(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über K. Finde einen diskreten Bewertungsring $R \subset K(T)$ mit $Q(R) = K(T)$ und mit $R \cap K[T] = K$.

Aufgabe 21.7. Beweise für einen diskreten Bewertungsring die Eigenschaften der Ordnung, die in Lemma 21.7 formuliert sind.

Aufgabe 21.8. Sei p eine fixierte Primzahl. Zu jeder ganzen Zahl $n \neq 0$ bezeichne $\nu_p(n)$ den Exponenten, mit dem die Primzahl p in der Primfaktorzerlegung von n vorkommt.

a) Zeige: die Abbildung $\nu_p : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ ist surjektiv.

b) Zeige: es gilt $\nu_p(nm) = \nu_p(n) + \nu_p(m)$.

c) Finde eine Fortsetzung $\nu_p : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ der gegebenen Abbildung, die ein Gruppenhomomorphismus ist (wobei $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation und $\mathbb{Z}$ mit der Addition versehen ist).

d) Beschreibe den Kern des unter c) beschriebenen Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 21.9.*

Sei K ein Körper und sei

$$\nu\colon\ (K^\times, \cdot, 1) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, 0)$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\nu(f+g) \geq \min\{\nu(f), \nu(g)\}$ für alle $f, g \in K^\times$. Zeige, dass

$$R = \left\{ f \in K^\times \mid \nu(f) \geq 0 \right\} \cup \{0\}$$

ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 21.10.*

Es sei $P \in C = V(F) \subset \mathbb{A}^2_K$ ein glatter Punkt einer ebenen irreduziblen Kurve. Zeige, dass der zugehörige lokale Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 21.11. Es sei $V = V(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_K$ der Einheitskreis über einem Körper K und es sei $P = (a, b) \in V$ ein Punkt.

(1) Zeige, dass der lokale Ring R von V im Punkt P ein diskreter Bewertungsring ist.
(2) Folgere, dass der Koordinatenring $K[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ normal ist (man kann K algebraisch abgeschlossen annehmen).
(3) Zeige, dass $K[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ nicht faktoriell ist.
(4) Bestimme die Ordnung von X und von $Y - 1$ im lokalen Ring zum Punkt $(0, 1)$.

Aufgabe 21.12. Sei K ein Körper. Eine *Potenzreihe in einer Variablen* über K ist ein formaler Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + \ldots \text{ mit } a_i \in K .$$

Es kann hier also unendlich viele von 0 verschiedene Koeffizienten a_i geben. Definiere eine Ringstruktur auf der Menge aller Potenzreihen, die die Ringstruktur auf dem Polynomring in einer Variablen fortsetzt. Zeige, dass dieser Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

Ein Modul, der außer 0 keine Torsionselemente enthält, heißt *torsionsfrei*.

Aufgabe 21.13. Zeige, dass ein torsionsfreier endlich erzeugter Modul M über einem diskreten Bewertungsring frei ist.

Abbildungsverzeichnis