Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 10

Schemata

Definition 10.1. Ein *Schema* ist ein beringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ derart, dass es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ gibt, für die die $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ affine Schemata sind.

Lemma 10.2. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $P \in X$ ein Punkt. Dann gibt es zu jeder offenen Umgebung $P \in U$ eine offene affine Umgebung $P \in V \subseteq U$.*

Beweis. Es sei
$$P \in W = \operatorname{Spec}(R)$$
eine offene affine Umgebung von P. Dann ist $P \in U \cap W \subseteq \operatorname{Spek}(R)$ eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spek}(R)$ und damit von der Form $U \cap W = D(\mathfrak{a})$ mit einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$. Wegen $D(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$ ist
$$P \in D(f) \subseteq D(\mathfrak{a}) \subseteq U$$
für ein f und $D(f)$ ist affin nach Lemma 9.13. □

Lemma 10.3. *Eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ eines Schemas $(X, \mathcal{O}_X)$ besitzt eine Überdeckung mit affinen offenen Mengen und ist somit selbst ein Schema.*

Beweis. Als offene Teilmengen eines beringten Raumes ist U ebenfalls ein beringter Raum. Die Existenz der affinen Überdeckung folgt unmittelbar aus Lemma 10.2. □

Definition 10.4. Eine offene Teilmenge $U \subseteq X = \operatorname{Spek}(R)$ eines affinen Schemas X nennt man ein *quasiaffines Schema*.

Definition 10.5. Zu einem lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ nennt man
$$\operatorname{Spek}(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$$
das *punktierte Spektrum* von R.

Als beringte Räume kann man Schemata grundsätzlich entlang offener Teilmengen im Sinne von Lemma 7.10 miteinander verkleben. Wir geben dafür zwei Beispiele.

Beispiel 10.6. Wir betrachten die affine Gerade zweifach, also $U = \mathbb{A}^1_K = \operatorname{Spek}(K[S])$ und $V = \mathbb{A}^1_K = \operatorname{Spek}(K[T])$ mit den offenen Teilmengen $U' = \mathbb{A}^1_K \setminus \{(S)\} = \operatorname{Spek}(K[S, S^{-1}]) \subset \mathbb{A}^1_K$ und $V' = \mathbb{A}^1_K \setminus \{(T)\} = \operatorname{Spek}(K[T, T^{-1}]) \subset \mathbb{A}^1_K$. Wir betrachten den Isomorphismus

$$\varphi \colon U' \longrightarrow V',$$

der durch $S \mapsto T$ festgelegt ist und wir wollen U und V im Sinne von Lemma 7.10 miteinander verkleben. Das sich ergebende Gebilde X ist ein Schema, das man die in einem Punkt verdoppelte Gerade nennt. Die beiden durch (S) bzw. (T) gegebenen Punkte auf X nennen wir P bzw. Q. Es liegt das kommutative Diagramm (von Restriktionshomomorphismen)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = K[S] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(V, \mathcal{O}_X) = K[S] & \longrightarrow & \Gamma(U', \mathcal{O}_X) = K[S, S^{-1}] \end{array}$$

vor, wobei wir die Identifizierung $S = T$ vorgenommen haben. Aus der Garbenbedingung folgt

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \;=\; K[S]$$

und die globalen Funktionen haben in P und in Q den gleichen Wert. Mit einer ähnlichen Überlegung lässt sich zeigen, dass die Halme $\mathcal{O}_{X,P} = \mathcal{O}_{X,Q} = K[S]_{(S)}$ übereinstimmen (alles spielt sich im Funktionenkörper $K(S)$ ab).

Beispiel 10.7. Wir betrachten die affine Gerade zweifach, also $U = \mathbb{A}^1_K = \operatorname{Spek}(K[S])$ und $V = \mathbb{A}^1_K = \operatorname{Spek}(K[T])$ mit den offenen Teilmengen $U' = \mathbb{A}^1_K \setminus \{(S)\} = \operatorname{Spek}(K[S, S^{-1}]) \subset \mathbb{A}^1_K$ und $V' = \mathbb{A}^1_K \setminus \{(T)\} = \operatorname{Spek}(K[T, T^{-1}]) \subset \mathbb{A}^1_K$. Wir betrachten den Isomorphismus

$$\varphi \colon U' \longrightarrow V',$$

der durch $S \mapsto T^{-1}$ festgelegt ist und wir wollen U und V im Sinne von Lemma 7.10 miteinander verkleben. Das sich ergebende Gebilde $X = \mathbb{P}^1_K$ ist ein Modell für die projektive Gerade über K. Die beiden durch (S) bzw. (T) gegebenen Punkte auf X nennen wir P bzw. Q. Wenn bei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ (mit der metrischen Topologie) eine Folge in U' gegen $P \in U$ konvergiert, so divergiert sie in V bestimmt gegen unendlich.

Es liegt das kommutative Diagramm (von Restriktionshomomorphismen)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\left(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}\right) & \longrightarrow & \Gamma\left(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}\right) = K[S] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma\left(V, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}\right) = K[T] = K[S^{-1}] & \longrightarrow & \Gamma\left(U', \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}\right) = K[S, S^{-1}] \end{array}$$

vor, wobei wir die Identifizierung $S = T^{-1}$ vorgenommen haben. Aus der Garbenbedingung folgt

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \;=\; K,$$

da nur die konstanten Funktionen sowohl in $K[S]$ als auch in $K[S^{-1}]$ sind (es wird der Durchschnitt im Funktionenkörper $K(S)$ genommen). Es ist $\mathcal{O}_{X,P} = K[S]_{(S)}$ und $\mathcal{O}_{X,Q} = K[S^{-1}]_{(S^{-1})}$.

Morphismen von Schemata

Definition 10.8. Ein *Schemamorphismus*

$$\varphi\colon\ X \longrightarrow Y$$

zwischen Schemata X und Y ist ein Morphismus der lokal beringten Räume.

Wir wollen zuerst die zu einem Ringhomomorphismus $\theta\colon\ R \to S$ gehörende Spektrumsabbildung

$$\operatorname{Spek}(S) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

zu einem Schemamorphismus machen. Dies ergibt sich als Spezialfall des folgenden Satzes.

Satz 10.9. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum und $Y = \operatorname{Spek}(R)$ ein affines Schema. Dann gibt es zu jedem Ringhomomorphismus $\theta\colon\ R \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ einen eindeutig bestimmten Morphismus lokal beringter Räume $X \to Y$, der θ als globalen Homomorphismus besitzt.*

Beweis. Wegen Lemma 7.18 muss

$$\varphi(x) = \left\{ f \in R \mid x \notin X_{\theta(f)} \right\} = (\rho_x \circ \theta)^{-1}(\mathfrak{m}_x)$$

für jeden Punkt $x \in X$ sein, wobei $\rho_x\colon\ \Gamma(X, \mathcal{O}) \to \mathcal{O}_{X,x}$ den Restriktionshomomorphismus in den Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ und $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ das maximale Ideal bezeichnet. Dadurch ist wiederum eine stetige Abbildung festgelegt, da sie ja

$$\varphi^{-1}(D(f)) = X_{\theta(f)}$$

erfüllt, die $D(f)$ nach Proposition 8.4 (8) eine Basis bilden und da die $X_{\theta(f)}$ nach Lemma 7.16 offen sind. Zu jedem $f \in R$ liegen die Ringhomomorphismen

$$R \xrightarrow{\theta} \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(X_{\theta(f)}, \mathcal{O}_X)$$

vor, wobei $\theta(f)$ rechts zu einer Einheit wird. Nach Satz 15.13 (Kommutative Algebra) gibt es daher einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$R_f \longrightarrow \Gamma(X_{\theta(f)}, \mathcal{O}_X),$$

der mit diesem Ringhomomorphismus verträglich ist. Durch die Garbeneigenschaft ist daher auch ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus

$$\Gamma(D(\mathfrak{a}), \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(D(\mathfrak{a})), \mathcal{O}_X)$$

für jede offene Menge $D(\mathfrak{a})$ festgelegt. Es gilt nämlich mit $D(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ die Beziehung

$$\Gamma(D(\mathfrak{a}), \mathcal{O}_Y) = \left\{ (s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} R_{f_i} \mid s_i = s_j \text{ in } R_{f_i f_j} \right\}$$

und

$$\Gamma(\varphi^{-1}(D(\mathfrak{a})), \mathcal{O}_X) = \left\{ (t_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \Gamma(X_{\theta(f_i)}, \mathcal{O}_X) \mid t_i = t_j \text{ in } \Gamma(X_{\theta(f_i f_j)}, \mathcal{O}_X) \right\}.$$

Da wir rechts auf den R_{f_i} bzw. $R_{f_i f_j}$ wohldefinierte Ringhomomorphismen haben, und da dabei die Gleichungen berücksichtigt werden, ergibt sich ein Ringhomomorphismus von oben nach unten. Diese Festlegungen liefern in der Tat einen Morphismus lokal beringter Räume. □

Korollar 10.10. *Es seien R und S kommutative Ringe und $\theta \colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Schemamorphismus* $\operatorname{Spek}(S) \to \operatorname{Spek}(R)$, *der θ als globalen Homomorphismus besitzt. Topologisch handelt es sich um die Spektrumsabbildung.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 10.9. Die Überlegung zu Beginn des Beweises von diesem Satz zeigt, dass es sich um die Spektrumsabbildung handelt. □

Korollar 10.11. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum. Dann gibt es einen kanonischen Morphismus lokal beringter Räume $X \to \operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$. Dabei wird ein Punkt $x \in X$ auf die Charakteristik seines Restekörpers $\kappa(x)$ abgebildet.*

Beweis. Der kanonische Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

legt nach Satz 10.9 einen eindeutig bestimmten Morphismus lokal beringter Räume

$$X \longrightarrow \operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$$

fest. □

Korollar 10.12. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum. Dann definiert jede globale Funktion $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ einen eindeutig bestimmten Morphismus lokal beringter Räume $X \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$, wobei die Variable (der affinen Geraden) auf f abgebildet wird. Wenn $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ eine K-Algebra über einem Körper K ist, so definiert f auch einen Morphismus lokal beringter Räume $X \to \mathbb{A}^1_K$. Dabei wird ein Punkt $x \in X$ auf den Kern des Ringhomomorphismus*

$$K[T] \longrightarrow \kappa(x),\, T \longmapsto f(x),$$

abgebildet.

Beweis. Das Ringelement $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ definiert einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[T] \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, nämlich den Einsetzungshomomorphismus. Nach Satz 10.9 gibt es dazu einen eindeutig bestimmten Morphismus lokal beringter Räume

$$(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \operatorname{Spek}(\mathbb{Z}[T]) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}.$$

Der Zusatz ergibt sich entsprechend. □

Korollar 10.13. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum. Dann definiert jedes Funktionstupel $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ einen eindeutig bestimmten*

Morphismus lokal beringter Räume $X \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$*, wobei die Variable* T_i *(des affinen Raumes) auf* f_i *abgebildet wird. Wenn* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ *eine* R*-Algebra über einem kommutativen Ring* R *ist, so definieren die* $f_1, \ldots, f_n$ *auch einen Morphismus lokal beringter Räume* $X \to \mathbb{A}^n_R$*. Dabei wird ein Punkt* $x \in X$ *auf den Kern des Ringhomomorphismus*

$$R[T_1, \ldots, T_n] \longrightarrow \kappa(x),\, T_i \longmapsto f_i(x),$$

abgebildet.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.3. □

Ein Morphismus in einen affinen Raum ist also nichts anderes als ein Tupel von globalen Funktionen.

Wenn

$$\varphi\colon\ X \longrightarrow Y$$

ein Morphismus ist, so ist für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ auch die induzierte Abbildung

$$\varphi^{-1}(V) \longrightarrow V$$

ein Morphismus. Wenn V zusätzlich affin ist, so wird ein solcher Morphismus lokal (bezogen auf Y) wegen Satz 10.9 durch einen Ringhomomorphismus gegeben. Dies bedeutet, dass ein Schemamorphismus $\varphi\colon X \to Y$ mit Hilfe einer affinen Überdeckung

$$Y = \bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spek}(R_i)$$

im Wesentlichen durch die Ringhomomorphismen

$$R_i \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(V_i), \mathcal{O}_X)$$

bestimmt ist.

Schema über Basisschema

Bei einer kommutativen K-Algebra A über einem Körper K ist durch den kanonischen Ringhomomorphismus $K \to A$ eine kanonische Spektrumsabbildung

$$\operatorname{Spek}(A) \longrightarrow \operatorname{Spek}(K)$$

festgelegt, die ja topologisch einfach die konstante Abbildung ist, die aber dennoch festlegt, wie die Konstanten aus K zu interpretieren sind. Im Kontext von Schemata wird die Rolle eines Grundringes von einem Basisschema übernommen.

Definition 10.14. Ein Schema X zusammen mit einem fixierten Morphismus $p\colon X \to S$ zu einem weiteren Schema S heißt ein *Schema über* S. Dabei heißt S das *Basisschema*.

Häufig ist das Basisschema einfach das Spektrum eines Körpers. Wegen Korollar 10.11 ist jedes Schema in eindeutiger Weise ein Schema über Spek $(\mathbb{Z})$. Bei einem Schema über Spek (R) spricht man auch von einem Schema über R. Die Rolle von Algebrahomomorphismen wird durch Morphismen übernommen, die mit der Basis verträglich sind.

Definition 10.15. Es seien X und Y Schemata über dem Basisschema S. Ein Schemamorphismus $\varphi\colon X \to Y$ heißt *Schemamorphismus über S*, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 10.16. Ein Schemamorphismus $\varphi\colon X \to Y$ heißt *von endlichem Typ*, wenn es eine affine offene Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ derart gibt, dass es endliche affine Überdeckungen

$$\varphi^{-1}(V_i) = \bigcup_{i \in I_j} U_i$$

gibt so, dass zu jedem $i \in I_j$ die Ringhomomorphismen

$$\Gamma(V_j, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$$

von endlichem Typ sind.

Einbettungen

Definition 10.17. Ein Schemamorphismus $f\colon Y \to X$ heißt *offene Einbettung*, wenn f einen Isomorphismus mit einer offenen Teilmenge von X induziert.

Definition 10.18. Ein Schemamorphismus $f\colon Y \to X$ heißt *abgeschlossene Einbettung*, wenn das Bild $f(Y)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X ist, ein Homöomorphismus $Y \to f(Y)$ vorliegt und der zugehörige Garbenhomomorphismus $\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ surjektiv ist.

Definition 10.19. Ein Schemamorphismus $f\colon Y \to X$ heißt *Einbettung*, wenn es eine Faktorisierung

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X$$

mit einer offenen Einbettung g und einer abgeschlossenen Einbettung h gibt.

Abbildungsverzeichnis