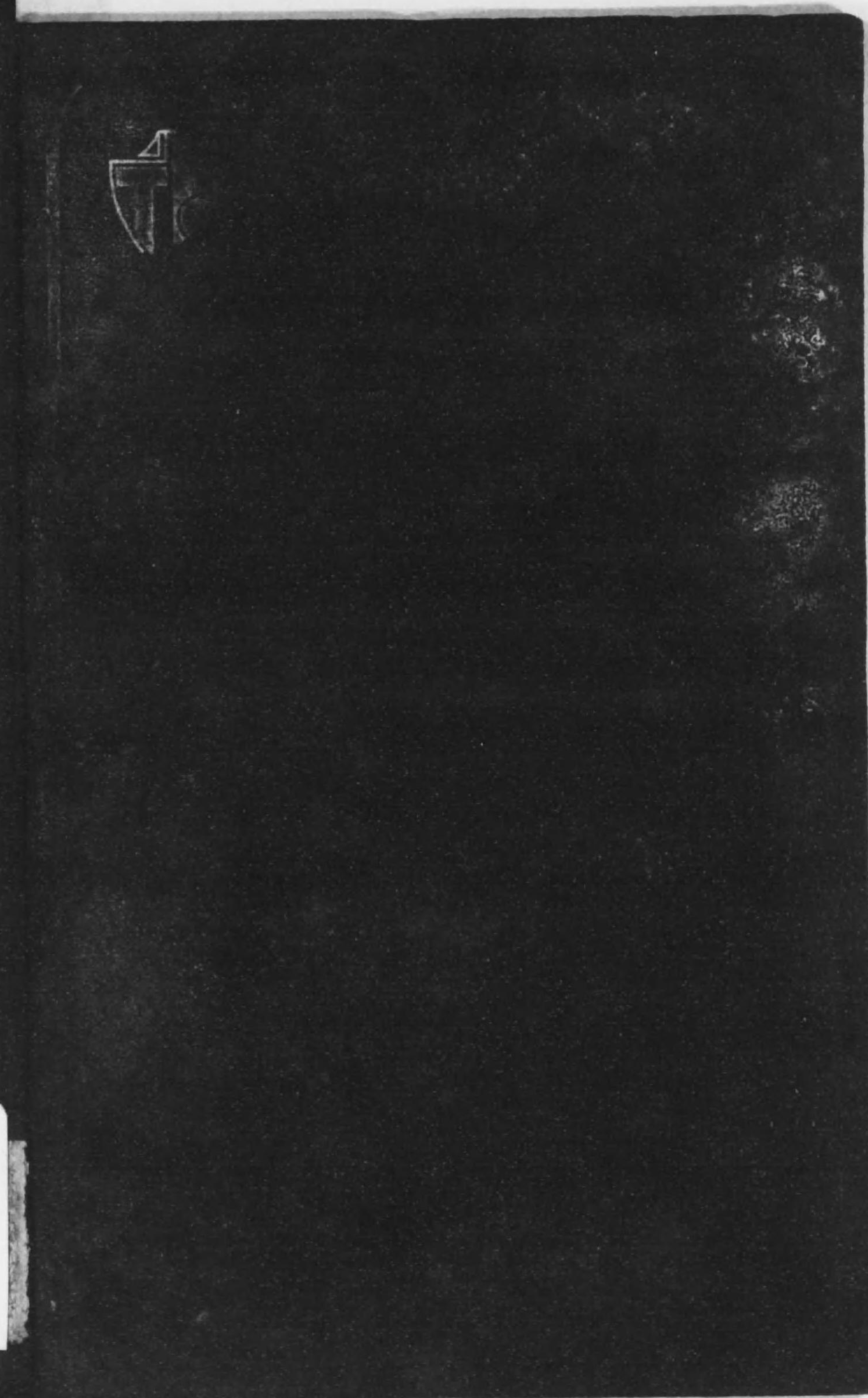
始



高等
解析幾何學

東京高等工學校編

東京 有文閣 發行

目　次

第一章　點及直線

第二章　座標ノ變換

第三章　圓

第四章 楕圓

第五章 双曲線

第六章 拋物線

第七章 二次曲線

附 錄

第一章 空間幾何學

第二章 立體解析幾何學

解析幾何學

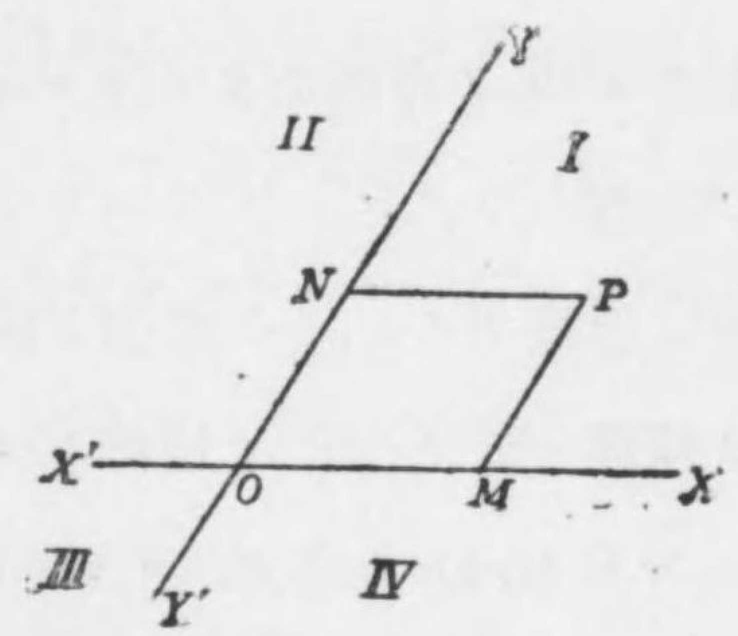
第一章

點及直線

1. 平行座標.

一ツノ平面上ニ於テ任意ノ相交ハル直線 XX′, YY′ ヲ引キ, ソノ交點ヲ O トス. 然ル時ハ此平面上ノ任意ノ一點 P ノ位置ヲ決定セントニハ, 先ヅ P ヨリ此二直線ニ平行ナル直線 PM, PN ヲ引キ, ソノ XX′, YY′ ト交ル點 M, N ノ位置ヲ決定セバ可ナリ. 何トナレバモシ M, N 二點ヲ知ラバ, コレラヲ通シテ夫々 YY′, XX′ ニ平行線ヲ引キソノ交點トシテ P 點ヲ唯一ニ決定シ得可ケレバナリ.

第一圖



扨一直線上ニ於ケル點ノ位置ヲ決定セントスルトキ，例ヘバ XX′, YY′ 上ニ於ケルM, N ノ位置ヲ云ヒ表ハスニハ便宜上此**二直線ノ交點 O ヲ共通ノ原點トシ 且兩直線上ニ於テ同一ノ長サノ單位ヲ用フルモノトス**

今考フル處ノ平面ヲ第一圖ノ紙面ナリト假定セバ，通常 XX′ ハ右ヨリ左ノ方向ニ引キ YY′ ハ上ヨリ下ニ向テ引ク，前者ニアリテハ X′X ノ向キヲ正トシ，後者ニアリテハ Y′Y ノ向キヲ正ト定ム． 而シテ此符號ノ定メ方ハ XX′, YY′ ノミナラズ此等ニ平行ナル他ノ直線上ニ於テモ通用スルモノトス． 例ヘバ MP ハ正ニシテ PM ハ負ナリ．

直線 XX′ 上ニ於ケル M ノ座標ヲ x トシ，YY′ 上ニ於ケル N ノ座標ヲ y トスルトキハ，此平面上ニ於ケル P ノ位置ハコノ x ト y トニヨリテ全ク決定セラル．x ヲ P 點ノ**横線**トイヒ，y ヲ**縦線**ト云フ． 兩者ヲ總稱シテ P 點ノ**座標**ト云フ． P ノ座標ガ x 及ビ y ナルコトヲ表ハスニハ P (x, y) ト書ク，コヽニ括弧內ニ於テハ常ニ横線ヲ先ニシ縦線ヲ後ニス． 又直線 XX′ ヲ **x** 軸，YY′ ヲ **y** 軸ト稱シ，總稱シテ**座標軸**ト云ヒ，ソノ交點 O ヲ座標ノ**原點**ト云フ．

座標ノ兩軸ノ正ノ方向ガ挾ム角即チ ∠XOY ヲ指シテ單ニ座標軸ノ間ノ角ト稱シ，通常 ω ナル文字ヲ以テ之ヲ表ハス． ω ガ直角ナル時ハ其軸ヲ**直交軸**ト云ヒ，然ラザルトキハ**斜交軸**ト云フ． 而シテ直交軸ヲ用ヒタル時ハ一點ノ座標ヲ特ニ**直角座標**ト稱スルコトアリ．

XX′, YY′ ハ平面ヲ四ツノ部分ニ分ツ． 今角 XOY, YOX′, X′OY′, Y′OX ノ內部ヲ夫々 I, II, III, IV ト名付クルトキハ，點 P ガ此等ノ何レカノ中ニアルトキ，ソノ横線及ビ縦線ノ取ル符號ハ次ノ如シ

		I	II	III	IV
横線	x	+	−	−	+
縦線	y	+	+	−	−

斯ノ如ク二ツノ固定セル軸ヲ考ヘ之ニ平行ナル直線ニヨリテ一點ノ位置ヲ定ムル方法ヲ **平行座標** ノ方法ト云フ． 或ハ考案者でかるとノ名ヲ冠シテ**かるてしあん座標**トモ呼ブコトアリ．

2. 二點間ノ距離．

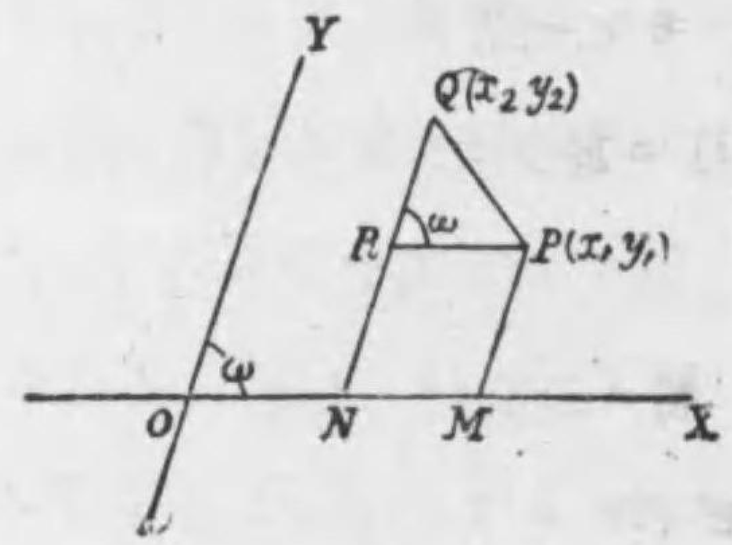
二ツノ與ヘラレタル點ヲ P(x_1, y_1) 及ビ Q(x_2, y_2) トス．P 及ビ Q ヨリ y 軸ニ平行ニ直線 PM 及ビ QN ヲ引キ，x 軸ト夫々 M 及ビ N ニ於テ交ラシメバ

$$OM = x_1 \qquad MP = y_1$$

$$ON = x_2 \qquad NQ = y_2$$

ナリ. 又 P ヨリ x 軸ニ平行ニ直線 PR ヲ引キ, QN ト R ニ於テ交ラシメバ

第二圖



$$PR = MN = x_2 - x_1$$

$$RQ = y_2 - y_1$$

ナリ.

今 $\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{RQ}$ ヲ以テ各其絕對値ヲ示スモノトセバ, 三角法ニ於テ知レル如ク

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 - 2\overline{PR}.\overline{RQ}\cos\angle PRQ$$

ナル關係アリ. 而シテコヽニ PR ト RQ トガ同ジ符號ヲ有スル如キ圖形ナル時ハ $\angle PRQ = 180° - \omega$ ニシテ相異ナル符號ヲ有スル如キ場合ニハ $\angle PRQ = \omega$ トナルガ故ニ, 何レニシテモ

$$\overline{PR}.\overline{RQ}\cos\angle PRQ = -(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega$$

ナリ. 故ニ常ニ

$$\overline{PQ}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega$$

從テ

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega} \quad (1)$$

ヲ得. 此結果ハ P ト Q トノ位置ノ如何ニ關ラズ常ニ眞ナリ.

モシ一點 $P(x_1, y_1)$ ノ原點ヨリノ距離ヲ求メント欲セバ (1) ニ於テ $x_2 = 0, y_2 = 0$ ト置クベシ, 即チ

$$\overline{PO} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1 \cos\omega}. \quad (2)$$

特ニ直交軸ノ場合ニ於テハ $\cos\omega = 0$ ナルヲ以テ (1) 及ビ (2) ハ下ノ如ク簡單ニナルベシ,

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad (5)$$

$$\overline{PO} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}. \quad (4)$$

【例】 軸ノ間ノ角ガ 60° ナル時, 二點 (5, 6), (−3, 2) ノ間ノ距離ヲ求ム.

(1) ニヨリテ $\sqrt{\{5-(-3)\}^2 + (6-2)^2 + 2\{5-(-3)\}(6-2)\cos 60°}$

$$= \sqrt{8^2 + 4^2 + 2.8.4.\tfrac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{64 + 16 + 32}$$

$$= \sqrt{112}.$$

3. 二點間ヲ與ヘラレタル比ニ分ツ點.

$P(x_1, y_1)$ 及ビ $Q(x_2, y_2)$ ヲ與ヘラレタル二點トシ, 直線 PQ 上ニ一點 $R(x, y$ ヲ取リ

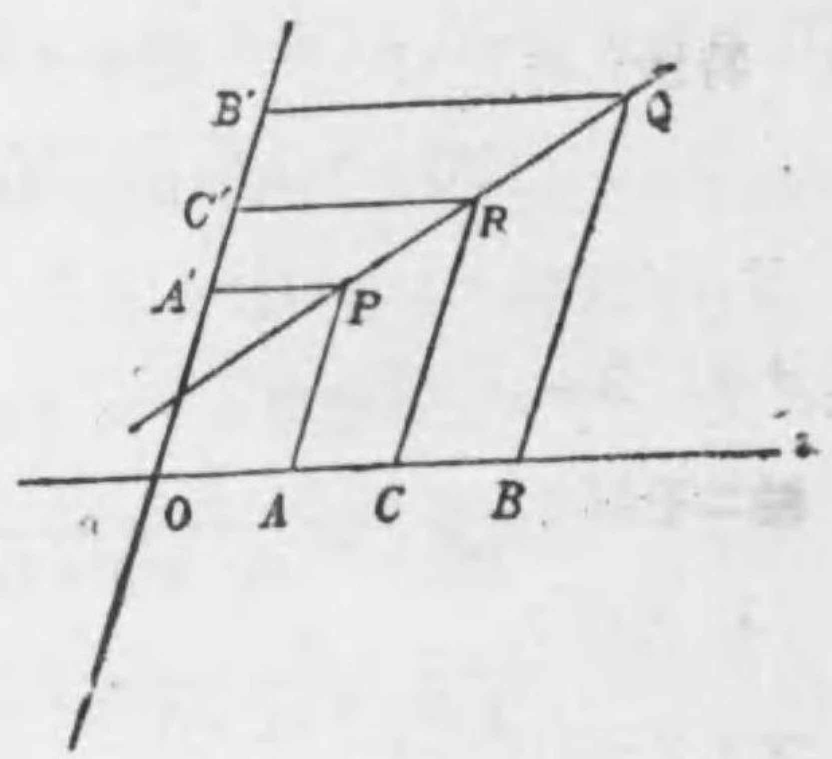
$$\frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n} = \lambda$$

ナラシメントス. コヽニ $\frac{m}{n} = \lambda$ ハ與ヘラレタル比ニシ

テ, R ガ P ト Q トノ間ニアル時ハ PR ト RQ トハ同ジ方向ヲ有スルヲ以テ其ノ比ハ正ナリトシ, 然ラザル時ハ負トスベシ.

今求ムル處ノ點 R ヲ得タリトシ, P, Q, R ヨリ夫々 y 軸及ビ x 軸ニ平行ナル直線ヲ引キ, x 軸及ビ y 軸ト交ハル點ヲ夫々 A, B, C 及ビ A′, B′, C′ トス. 然ルトキハ

第三圖



$$\frac{PR}{RQ}=\frac{AC}{CB}=\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{m}{n}=\lambda. \qquad (1)$$

故ニ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{m}{n}\lambda \qquad (2)$$

ニシテ, 之ヨリ

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (3)$$

ヲ得ベシ.

モシ直線 PQ ガ y 軸又ハ x 軸ニ平行ナルトキハ, A, B, C 又ハ A′, B′, C′ ハ合シテ一點トナルニヨリ, (1) 及ビ (2) ハ意味ヲ有セザル事トナレドモ, 此場合ニ於テハ實際ノ結果ハ明カニ

$$x=x_1=x_2$$

又ハ

$$y=y_1=y_2$$

ナルベキニヨリ, (3) ハナホ眞ナリトイフヲ得ベシ.

特別ノ場合トシテ R ヲ PQ ノ中點トスレバソノ座標ハ

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

ナリ. **スベテ此等ノ式ハ軸ノ間ノ角ニ無關係ニシテ直交軸ニモ斜交軸ニモ通用スルモノナリ.**

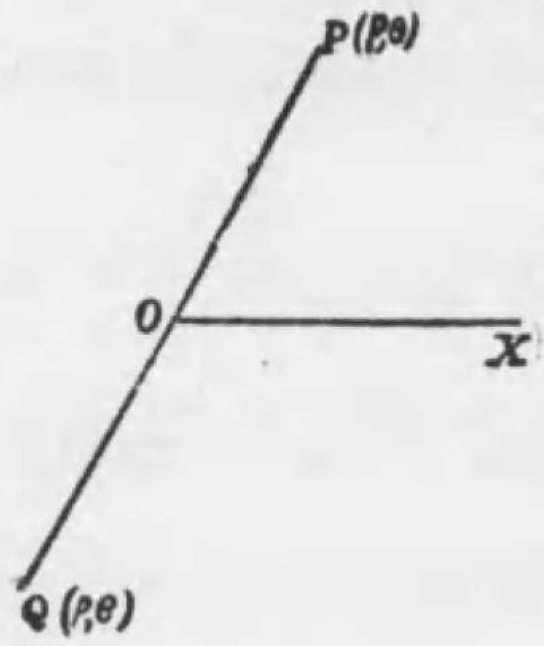
λ ノ種々ノ値ト之ニ對應スル R 點ノ位置トノ關係ニツイテハ第 4 節ニ於ケルト同樣ノ吟味ヲ試ムルコトヲ得.

4. 極座標.

平面上ニ於ケル一點ノ位置ヲ決定スル方法トシテハ平行座標ノ他ニナホ種々ノ法アリ. 其一トシテコヽニ更ニ極座標ナルモノヲ說カントス.

今 OX ヲ平面上ニ於ケル一ツノ半直線トシ, O ヲ其端トス. 然ルトキハソノ平面上ノ任意ノ一點 P ノ位置ハ O ト P トヲ結ビ付クル線分 OP ノ長サ及ビ OP ガ OX トナス角 XOP ノ大サニヨリテ決定セラルベシ. 通

第四圖



常 OP ノ長サヲ ρ ニテ表ハシ, 之ヲ P 點ノ**動徑**ト云ヒ, $\angle XOP$ ヲ θ ニテ表ハシ, 之ヲ P ノ**傾角**ト云フ. 兩者ヲ總稱シテ P ノ**極座標**ト云ヒ, P ノ極座標ガ ρ, θ ナルコトヲ示スニハ $P(\rho, \theta)$ ト書ク.

而シテコヽニ用ヒタル OX ナル半直線ヲ**原線**ト云ヒ, O ヲ**極**ト稱ス.

傾角 θ ノ大サハ常ニ OX ヨリ計ルコトヽシ, OX ヨリ時計ノ針ノ進行ト逆ノ向キニ計レルモノヲ正トシ, 然ラザル向キニ計レルモノヲ負ト定ム. 而シテ其絶對値ニハ制限ヲ付セズ, 四直角以上ニ至ルモ妨ナシトス.

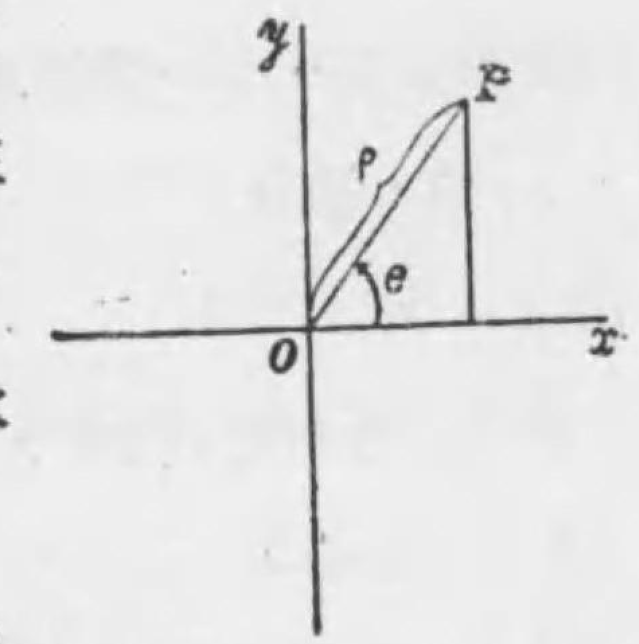
動徑 ρ ニモ正負ノ符號ヲ附スルコトヲ得. ソノ定メ方ハ, $\angle XOP$ ガ丁度傾角 θ ノ示ス角ニ等シキ時半直線 OP ノ方向ヲ P ノ正ノ方向トシ, 之ニ反シテ PO ヲ O ヲ越エテ延長シタル OQ ノ方向ヲ負ト定ム. 即チ ρ ノ正負ハソレ自身ニテ定マルモノニ非ズ, 之ニ伴フ θ ニヨリテ定マルモノニシテ, モシ $\angle XOQ$ ヲ θ トセバ, 其時ニハ OQ ノ方向ヲ正トシ OP ノ方向ヲ負トスベキナリ. 例ヘバ第四圖ニ於テ $OP=OQ=2$, $\angle XOP=30°$ トセバ

P ノ極座標ハ (2,30°), (−2, 210°). (2, −150°), 等ト云フヲ得ベク, Q ノ極座標ハ (2, 210°), (2, −150°), (−2, 30°) 等ト云フヲ得ベシ.

然レドモ特ニ必要ナキ時ハ ρ ヲ正トシテ, θ ヲ 0° ト 360° トノ間又ハ −180° ト 180° トノ間ニ取ルヲ通常トス.

5. 直角座標ト極座標トノ關係.

第五圖



直交軸ニ關シ一點 P ノ座標ヲ (x, y) ナリトス. 今其原點ヲ一ツノ極座標ノ極トシ x 軸ノ正ノ部分ヲ原線トセル同一點 P ノ極座標ヲ (ρ, θ) トセバ, 常ニ次ノ關係アリ.

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \pm\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(1) ヨリシテ P ノ極座標ヲ知ラバ直チニソノ直角座標ヲ求ムルコトヲ得ベク, 又 (2) ヨリシテ P ノ直角座標ヲ知ラバ其極座標ヲ求ムルコトヲ得ベシ. 但シ後者ノ場合

ニ於テハ ρ 及ビ θ ノ種々ノ値ヲ得可キヲ以テ, x 及ビ y ノ符號ニ注目シ P 點ノ存在スル象限ヲ考ヘテ適當ナル ρ 及ビ θ ノ一組ヲ選定スベシ. 例ヘバ $(-1, -1)$ ナル直角座標ヲ有スル點ノ極座標ヲ求ムレバ

$$\rho=\pm\sqrt{2}, \qquad \theta=45^\circ+n.180^\circ$$

ヲ得, コヽニ n ハ任意ノ整數ナリ. 然ルニ今考フル處ノ點ハ x 及ビ y ガ共ニ負ナルヲ以テ第三象限ニアリ. 故ニ n ヲ奇數トセルトキハ ρ ノ正號ヲ取ルベク, n ヲ偶數トセルトキハ ρ ハ負號ヲ取ラザル可ラズ. モシ ρ ヲ正トシ, 角ノ範圍ヲ 0° ト 360° トノ間ニ限ラバ, 求ムル極座標ハ $(\sqrt{2}, 225^\circ)$ ナリ.

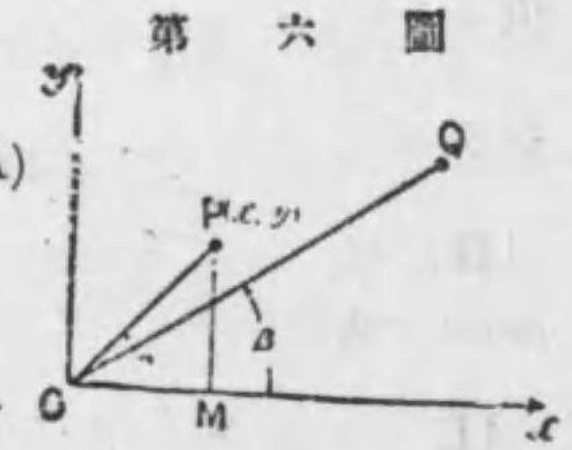
6. 二元一次方程式ト直線.

I. $\quad y=mx \qquad (1)$

コノ方程式ニ適スル二點 (クハシクイヘバコノ方程式ニ適スル二組ノ値テ坐標トスル二點) ヲ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ トスレバ

$$\left.\begin{aligned} y_1&=mx_1 \qquad \therefore\ m=\frac{y_1}{x_1} \\ y_2&=mx_2 \qquad \therefore\ m=\frac{y_2}{x_2} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(A)$$

第六圖



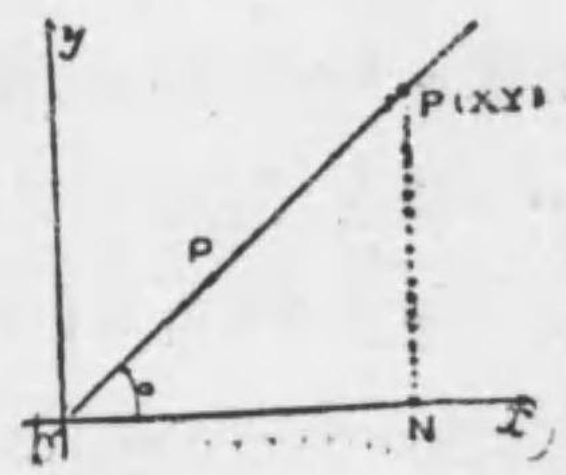
然ルニ P, Q ヲ圖示シ, OP, OQ ガ x 軸ノ正方向トナス角ヲ夫々 α, β デ表ハスコトニセバ,

圖及ビ (A) ヨリ,

$$\left.\begin{aligned} \tan\alpha&=\frac{y_1}{x_1}=m \\ \tan\beta&=\frac{y_2}{x_2}=m \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &\therefore\ \tan\alpha=\tan\beta \\ &\therefore\ \alpha=\beta. \end{aligned}$$

故ニ OP, OQ ハ重ナリ, 從テ O, P, Q ハ同一直線上ニアル, 即チ方程式 (1) ニ適スル點ハ皆 O ヲ通ル一直線上ニアル.

第七圖



次ニ OP 上ニ任意ノ一點 $P_1(X, Y)$ ヲトレバ

$$\frac{P_1N}{ON}=\frac{Y}{X}=\tan\alpha=m.$$

$$\therefore \qquad Y=mX$$

即チ OP 上ノ點 (X, Y) ハ皆方程式 (1) ニ適ス. 故ニ幾何學的ニハ「方程式 (1) ハ原點ヲ通リ, x 軸ノ正方向ト角 α (コヽニ $\tan\alpha=m$) ヲナス所ノ直線ヲ表ハス」ト解釋シテヨイ.

〔註〕 點 (X, Y) ガ直線 $y=mx$ 上ニアルトイフコトト, X, Y ガ方程式 $y=mx$ ヲ滿足スルトイフコトハ相對應スル事柄デアル.

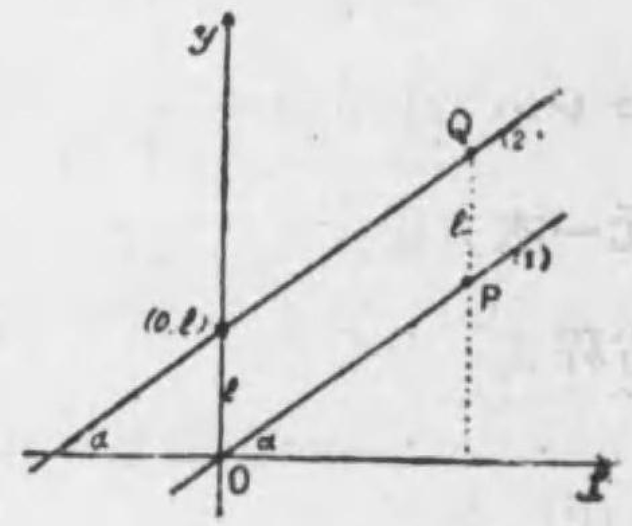
II. $\quad y=mx+b \qquad (2)$

コレヲ (1) ト比較スルニ, 同ジ x ノ値ニ對シテノ y ノ値

ハ (2) ノ方ガ (1) ノ方ヨリモ常ニ b ダケ大ナルヲ知ル.

故ニ (2) ハ (1) ニ平行ナル直線ヲ表ハス. [(2) ニ適スル點ハ凡テ直線 (1) ヨリ一定ノ距離ニアルカラ, ソノ軌跡ハ平行線ニナル] 即チ方程式 (2) ハ y 軸上ノ點 $(0, b)$ ヲ通リ, x 軸ノ正方向ト角 α ヲナス直線ヲ表ハス. 此ニ m ハ角係數又ハ勾配 (slope) ト稱セラル.

第八圖



問題

(1) 次ノ方程式ガ表ハス直線ヲ圖示セヨ.

(a) $y=2x$, (b) $y=-3x$, (c) $y=-\frac{1}{3}x$,

(d) $y=3x+4$, (e) $y=2x-3$, (f) $y=-\frac{2}{3}x+1$.

(2) 次ノ直線ハ夫々 x 軸ノ正方向ト如何ナル角ヲナスカ.

(a) $y=x$, (b) $y=-x$. (c) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$,

(d) $y-\sqrt{3}x+3=0$.

III. $ax+by=c$ (3)

(i) $b\neq 0$ トシ, b デワレバ

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b} \qquad (3)'$$

コレハ (2) ト同形ナレバ直線ヲ表ハス. 而シテ (3) ハ二元一次方程式ノ一般形ナレバ, 吾々ハ一般ニ「二元一次方程式ハ直線ヲ表ハス」トイヒ得ル.

(ii) $b=0$ ナルトキハ, $ax=c$, ∴ $x=\frac{c}{a}=\text{const}=k$, コノトキ $m=-\frac{a}{b}=-\frac{a}{0}\infty$, 即チ $\tan\alpha=\infty$, ∴ $\alpha=90^\circ$.

故ニ $x=k$ ハ y 軸ニ平行ナル直線ヲ表ハス.

(iii) $a=0$ ナルトキハ $by=c$, ∴ $y=k$.

コノトキ $m=-\frac{a}{b}=-\frac{0}{b}=0$, 即チ $\tan\alpha=0$. ∴ $\alpha=0$.

故ニ $y=k$ ハ x 軸ニ平行ナル直線ヲ表ハス.

IV. $\frac{x}{h}+\frac{y}{k}=1$ (4)

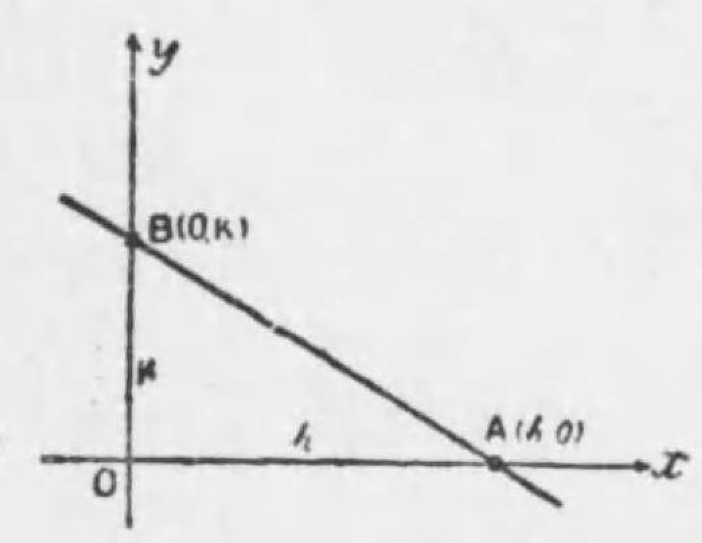
コレモ二元一次方程式デアルカラ直線ヲ表ハス. 而シテ

$y=0$ トスレバ $x=h$,

$x=0$ トスレバ $y=k$.

故ニ (4) ハ $A(h, 0)$, $B(0, k)$ ヲ通ル直線ヲ表ハス.

第九圖



【註】 h, k ヲ夫々軸上ノ截部 (intercept) トイフ.

問 題

(3) 次ノ直線ヲ圖示セヨ.

(a) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, (b) $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$, (c) $x=3$,

(d) $y=-1$.

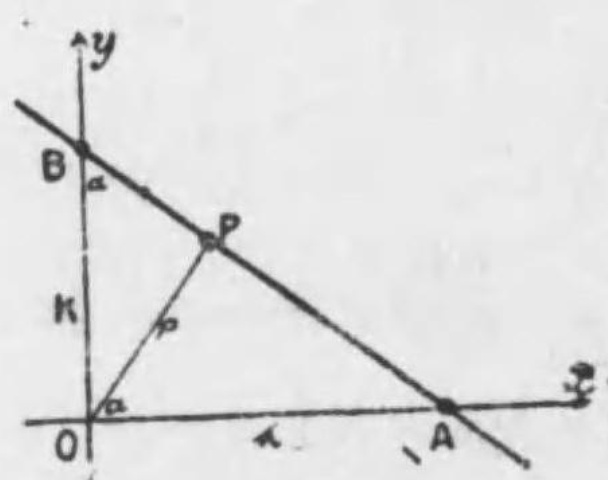
(4) x, y 兩軸上ニ於ケル截部ガ夫々次ノヤウナル直線ノ方程式ヲ求ム.

(a) 3, 2 (b) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ (c) $-2, 3$

(d) 0 3, 1.4

V. (i) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ (5)

第 十 圖



直線 AB ノ方程式ヲ

$$\frac{x}{h}+\frac{y}{k}=1 \qquad \text{(A)}$$

トスレバ, $OA=h$, $OB=k$.

又 O ヨリ AB ヘノ垂線ヲ OP トシ, $OP=p$, $\angle POA=\alpha$ トセバ, $\frac{p}{h}=\cos\alpha$, $\frac{p}{k}=\sin\alpha$. コレヨリ得ル h, k ノ値ヲ (A) ニ代入スレバ

$$\frac{x}{p}\cos\alpha+\frac{y}{p}\sin\alpha=1$$

分母ヲ拂ヘバ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \qquad (5)$$

コレハ (A) ノ變形デアルカラ矢張リ直線 AB ヲ表ハス方程式ノ一種デアル.

例 直線ノ方程式ガ $x\cos 30°+y\sin 30°=4$ ナルトキハ, 原點ヨリ此直線マデノ距離 $p=4$ ナルヲ知ル.

(ii) $ax+by=c$ ヲ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ナル形ニ直スコト. コノ二方程式ガ同一ノ直線ヲ表ハスタメニハ, 係數ガ比例スベキヲ以テ次式ガ成立スル,

$$\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{c}{p}$$

從テ $$\frac{a^2}{\cos^2\alpha}=\frac{b^2}{\sin^2\alpha}=\frac{c^2}{p^2}=\frac{a^2+b_2}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=a^2+b^2,$$

$$\therefore \quad \frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{c}{p}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\therefore \quad \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad p=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

故ニ原式ノ兩邊ヲ $\sqrt{a^2+b^2}$ ヲニテ割レバヨイ,

即チ $$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

即チ $$\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (c>0)$$

但シ $p>0$ ナレバ，原式ニ於テハ $c>0$ ナルモノト假定ス．若シ原式ニ於テ $c<0$ ナラバ，兩邊ニ -1 ヲ掛ケテ後，上ノ方法ヲ用フルモノトスル．

例 原點ヨリ $4x-3y-7=0$ マデノ距離ヲ求ム．原式ヲ書キカヘバ $4x-3y=7$, $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$ デアレバ

$$\frac{4x-3y}{5}=\frac{7}{5}, \quad \therefore \ p=\frac{7}{5}.$$

問　　題

(5) $x\cos 20^\circ+y\sin 20^\circ=3$ ヲ圖示シ，且ツ此直線ト原點トノ距離ヲ求ム．

(6) 原點ヨリ次ノ各直線ヘノ距離ヲ求メヨ．

(a) $3x+2y=6$,　　(b) $2x-3y=-6$,

(c) $x-\sqrt{3}\,y+10=0$.

7. 定點ヲ通ル直線ノ方程式

(i) 一定點 (x_1, y_1) ヲ通ルモノ．

求ムル直線ノ方程式ハ

$$y=mx+b \qquad \text{(A)}$$

ナル形ヲナスモノトス．コレガ點 (x_1, y_1) ヲ通ルナラバ，（即チ代數的ニ x_1, y_1 ハ方程式 (A) ニ適スル一組ノ値ナラバ）

$$y_1=mx_1+b \qquad \text{(B)}$$

コレヨリ得ル b ヲ始メノ式ニ代入シ變形スレバ，

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad (6)\ (\text{公式})$$

ヲ得，コレハ點 (x_1, y_1) ヲ通ル直線ノ方程式デアル．

例 點 $(3, -2)$ ヲ通リ，角係數ガ $\frac{2}{3}$ ナル直線ノ方程式ヲ作ルコト．

解． 求ムル方程式ハ (6) ヨリ次ノ如シ，

$$y+2=\frac{2}{3}(x-3),$$

即チ　　$2x-3y=12$.

(ii) 二定點 (x_1, y_1), (x_2, y_2) ヲ通ルモノ．

(x_1, y_1) ヲ通ル直線ノ方程式ハ，

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \text{(A)}$$

コレガ (x_2, y_2) ヲ通過スルナラバ，

$$y_2-y_1=m(x_2-x_1) \qquad \text{(B)}$$

(A) (B) ヨリ m ヲ消去スレバ，求ムル方程式トシテ次式ヲ得

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (7)\ (\text{公式})$$

例 二點 $(3, 5)$, $(-1, 2)$ ヲ通ル直線ノ方程式ハ

$$\frac{y-5}{2-5}=\frac{x-3}{-1-3}, \quad \text{即チ} \quad 3x-4y=-11.$$

問　　題

(7) 次ノ如キ直線ノ方程式ヲ作レ.

(a) x 軸ト $30°$ ヲナシ, $(4, 3)$ ヲ通ルモノ,

(b) $(2, 1)$, $(3, -2)$ ヲ通ル直線,

(c) y 軸上ノ截部ガ 3 デ x 軸ト $45°$ ヲナスモノ,

(d) x 軸上ノ截部ガ 2 デ, 角係數ガ -1 ナル直線.

(8) $\mathrm{A}\,(-1, 2)$, $\mathrm{B}\,(-4, -3)$, $\mathrm{C}\,(3, -2)$ ヲ頂點トスル三角形ノ三邊ノ方程式ヲ作レ.

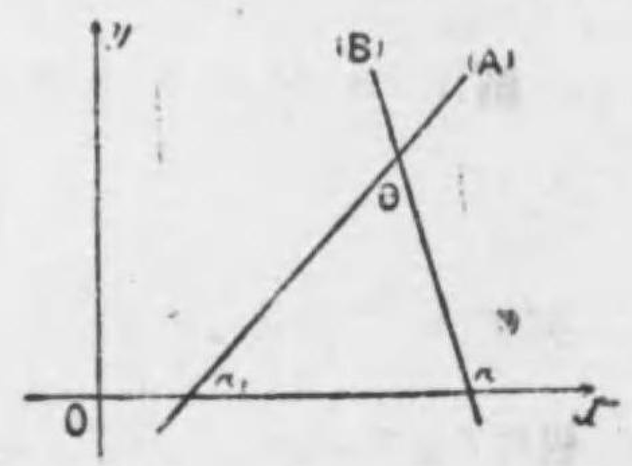
8. 二直線ノ交角.

二直線ノ方程式ヲ

$$\left.\begin{array}{l} y=m_1x+b_1\ldots\ldots(\mathrm{A}) \\ y=m_2x+b_2\ldots\ldots(\mathrm{B}) \end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l} m_1=\tan\alpha_1 \\ m_2=\tan\alpha_2 \end{array}\right\},$$

トス. 又二直線ノ交角ヲ θ トス.

第十一圖



然ルトキハ

$$\theta=\alpha_2-\alpha_1$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\tan(\alpha_2-\alpha_1)$$

$$=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_2\tan\alpha_1}=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1},$$

即チ
$$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}\qquad(8)$$

コレヨリ θ ヲ求メ得.

系 1. $m_2=m_1$ ナラバ $\alpha_2=\alpha_1$ デ二直線ハ平行,

$$m_2m_1=-1,\quad 即チ\quad m_1=\frac{-1}{m_2}$$

ナラバ $\tan\theta=\infty$. 從テ $\theta=90°$ デ二直線ハ直交ス.

系 2. $\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ ax+by=c' \end{array}\right\}$ ハ平行　$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ bx-ay=c' \end{array}\right\}$ ハ垂線.

問　　題

(9) 二直線 $3x+5y+15=0$, $5x-3y=0$ ハ互ニ直交スルコトヲ示セヨ.

(10) $x+3y=2$ ト $x-2y=1$ トノナス角ヲ求メヨ.

(11) $2x-3y=4$ ト $4x-6y=5$ トハ平行ナルコトヲ示セヨ.

例 1. 點 (α, β) ヲ通リ, 直線 $ax+by=c$ ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求ム.

解. $ax+by=c$ ニ平行ナル直線ノ方程式ノ形ハ

$$ax+by=c'\qquad(\mathrm{A})$$

デアル. コレガ (α, β) ヲ通ルナラバ　($x=\alpha$, $y=\beta$ ハ (A) ノ根デアルカラ),

$$a\alpha+2\beta=c'\qquad(\mathrm{B})$$

故ニ此 (B) ヨリ得ル c' ノ値ヲ (A) ニ代入スレバ求ムル方程式トシテ

$$ax+by=a\alpha+b\beta$$

ヲ得.

例 2. (α, β) ヲ通リ, 直線 $ax+by=c$ ニ ⊥ナル直線ノ方程式ヲ作レ.

解. 與ヘラレタル直線ニ於テハ $m=-\dfrac{a}{b}$,

故ニ與ヘラレタル直線ニ垂直ナル直線ノ角係數ハ $\dfrac{b}{a}$, 故ニ (α, β) ヲ通リ, $ax+by=c$ ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ

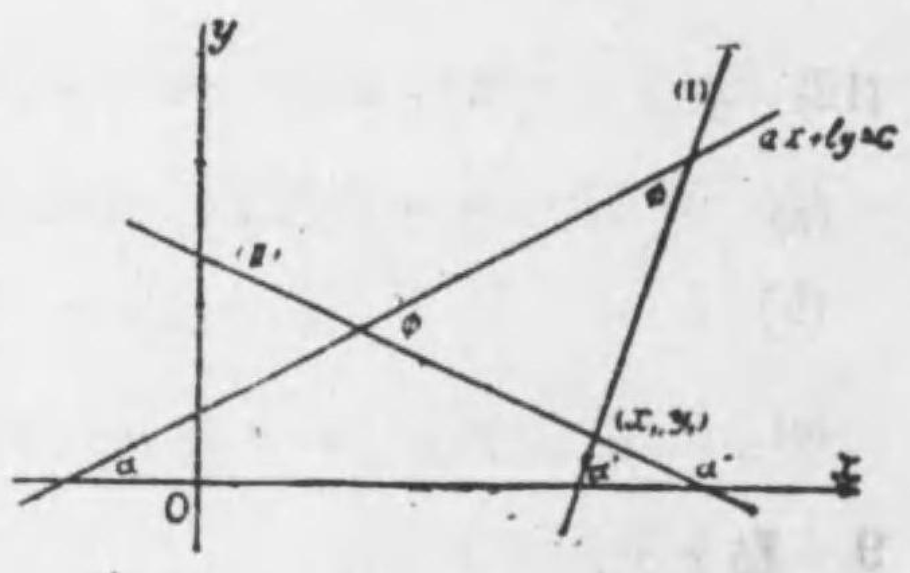
$$y-\beta=\frac{b}{a}(x-\alpha)$$

即チ

$$bx-ay=b\alpha-a\beta.$$

例 3. (x_1, y_1) ヲ通リ, 直線 $ax-by=c$ ト角 α ヲナス直線線ノ方程式ヲ求ム.

第十二圖



解. 所求ノ方程式ノ形ヲ

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

トスレバ, 所求ノ直線ハ (I) (II) ノ二ツアル.

(I) ニ對シテハ

$$\alpha'=\alpha+\phi,$$

$$\therefore \quad m'=\tan\alpha'=\tan(\alpha+\phi)$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\phi}{1-\tan\alpha\tan\phi}=\frac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}.$$

此ニ

$$m=-\frac{a}{b}.$$

(II) ニ對シテハ

$$\alpha''=\alpha+(180^\circ-\phi)$$

$$\therefore \quad m''=\tan\alpha''=\tan[\alpha+(180^\circ-\phi)]=\frac{\tan\alpha-\tan\phi}{1+\tan\alpha\ \mathrm{ton}\ \phi}$$

$$=\frac{m-\tan\phi}{1+m\tan\phi}.$$

故ニ所求ノ方程式ハ

$$y-y_1=\frac{m\pm\tan\phi}{1\mp m\tan\phi}(x-x_1).$$

問　　題

(12) 次ノヤウナ直線ノ方程式ヲ作レ;

(a) (3, 2) ヲ通リ, $25+3y+1=0$ ニ平行ナル直線,

(b) (−2, −1) ヲ通リ $2x+y=2$ ニ垂直ナル直線,

(c) (3, 2) ヲ通リ $2x+y=4$ ト 45° ヲナス直線.

9. 點ト直線トノ距離.

I. 點 $Q(x_1, y_1)$ ヨリ直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 　(A)

ヘノ距離.

AB ヲ與ヘラレタル直線トス. Q ヲ通リ AB ニ平行線

A'B' ヲ引ケバソノ方程式ハ

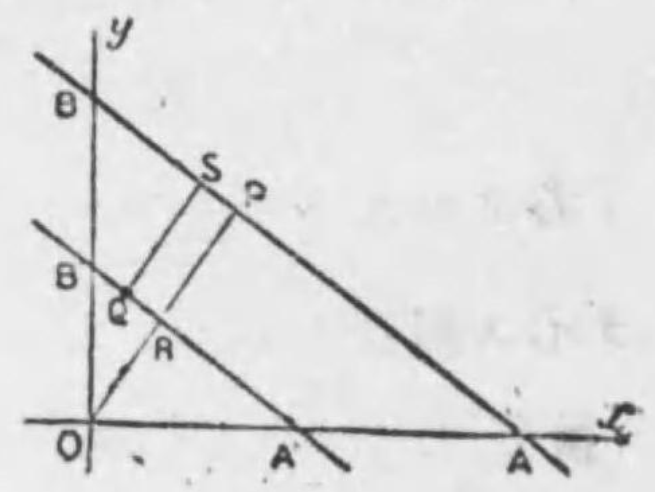
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=OR \qquad \text{(B)}$$

$Q(x_1, y_1)$ ハコノ上ノ點ナレバ

$$x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha=OR \qquad \text{(C)}$$

$$\therefore \quad QS=OP-OR=p-(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha)$$

第 十 三 圖



即チ

$$QS=p-(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha) \qquad \text{(D)}$$

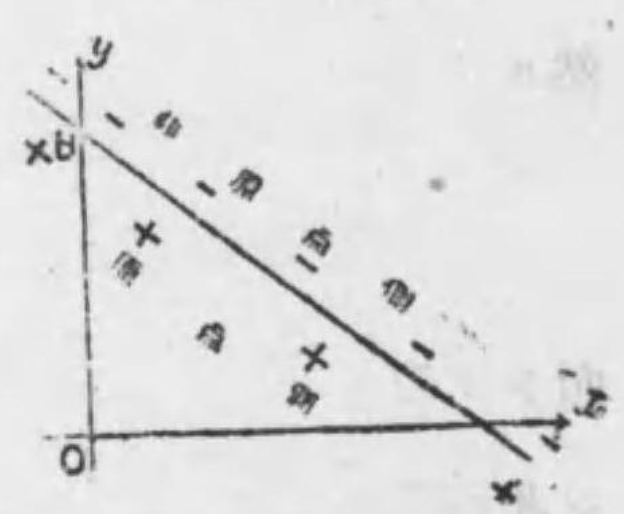
若シ (D) ガ負値ヲ與ヘルナラバ, ソノ絶對値ヲトル. 而シテ (D) ガ負値ヲ與フルハ點 Q ガ直線 AB ニ對シ原點ト反對ノ側ニアルコトヲ示スモノデアル.

II. $Q(x_1, y_1)$ ヨリ $ax+by=c$ ヘノ距離.

$\sqrt{a^2+b^2}$ デ原式ヲワレバ

$$\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (c>O)$$

第 十 四 圖

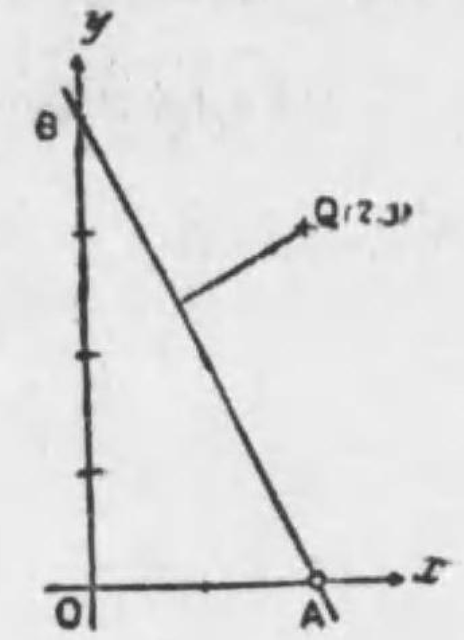


故ニ求ムル距離ハ

$$\frac{c-(ax_1+by_1)}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

若シコレガ負値ヲ與フルナラバ, 點 (x_1, y_1) ハ原直線ニ對シテ原點ト反對ノ側 (非原點側又ハ負側トイフ) ニアルノデ, 距離 (p) トシテハ絶對値ヲトル. 依テ

第 十 五 圖



$$p=\left|\frac{c-(ax_1+by_1)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

ト考フルガヨイ. 但シ | | ハ絶對値ヲ示ス記號デアル.

例 1. (2, 3) ヨリ $2x+y-4=0$ ヘノ距離.

解.

$$p=\left|\frac{4-(2\times2+3)}{\sqrt{2^2+1^2}}\right|=\left|\frac{-3}{\sqrt{5}}\right|=\frac{3}{\sqrt{5}},$$

コノトキ絶對値記號 | | 內ハ負デアルカラ (2, 3) ハ $2x+y-4=0$ ニ對シ非原點側ニアヲ知ル.

例 2. (−2, 3) ヨリ $4x-3y=-12$ ヘノ距離.

解. 右邊ガ正ナルヤウニ原式ヲ書キカヘバ

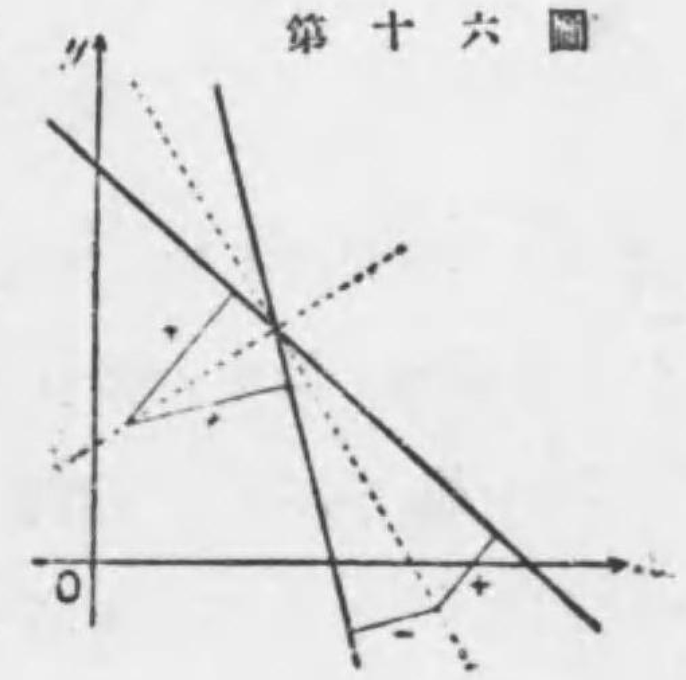
$$-4x+3y=12,$$

然ルトキハ

$$p=\left|\frac{12-[-4\times(-2)+3\times3]}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}\right|=|-1|=1,$$

而シテ點 (−2, 3) ハ原線ニ對シ非原點側ニアルヲ知ル.

第 十 六 圖



10. 二直線ノナス角ノ二等分線.

二直線ノ方程式ヲ

$$ax+by=c, \quad a_1x+b_1y=c_1$$

トス．點 (x, x) ヨリ二直線ヘノ距離ハ夫々

$$\frac{c-(ax+by)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{c_1-(a_1x+b_1y)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}, \quad (c>0, \quad c_1>0)$$

デアル．而シテ點 (x, y) ガ原點ヲ含ム角內ニアレバ，コノ二ツノ値ハ同號デアル．故ニ點 (x, y) ガ原點ヲ含ム角ノ二等分線上ノ點ナルコトヲ示ス式ハ

$$\frac{c-(ax+by)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{c_1-(a_1x+b_1y)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}, \quad (c>0, \ c_1>0)$$

デアル，依テコレハ原點ヲ含ム角ノ二等分線ノ方程式デアル．

點 (x, y) ガ原點ヲ含マヌ角ノ二等分線上ノ點ナラバ，上ニ示セル二ツノ値ハ異號デアル，依テソノ二等分線ノ方程式ハ

$$\frac{c-(ax+by)}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{c_1-(a_1x+b_1y)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \quad (c>0, \ c_1>0)$$

デアル．

問　　題

(13) 原點，$(1, 2)$，$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ ヨリ直線 $4x-3y-2=0$ ヘノ各垂線ノ長サヲ求メヨ．

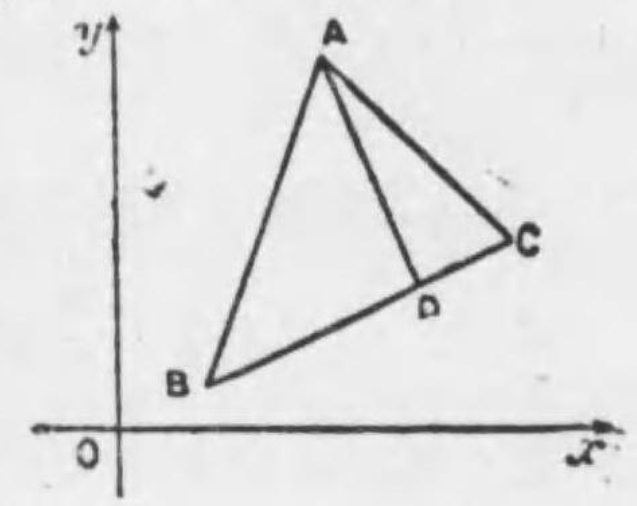
(14) 點 $(2, 3)$ ヨリ直線 $3y-2x=12$ ヘノ距離ヲ求メヨ．

(15) 二直線 $3x+2y=6$, $3x-2y=3$ ノ交角ノ二等分線ヲ求ム．

(16) 點 (x_1, y_1) ヨリ直線 $y+3x=0$ ヘノ距離ヲ求ム．

11. △ノ面積．

第十七圖



頂點ヲ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ トスレバ，邊 BC ノ方程式ハ

$$(y_2-y_3)x-(x_2-x_3)y=x_3y_2-x_2y_3.$$

$A(x_1, y_1)$ ヨリ此 BC ヘノ垂線 AD ノ長サヲ h トセバ，

$$h=\left|\frac{x_3, y_2-x_2y_3-(y_2-y_3)x_1+(x_2-x_3)y_1}{\sqrt{(y_2-y_3)^2+(x_2+x_3)^2}}\right|$$

又 BC ノ長サヲ b トセバ

$$b=\sqrt{x_2-x_3)^2+(y_2-_{23})^2}.$$

$$\therefore \quad \triangle=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{1}\left|x_3y_2-x_2y_3-(y_2-y_3)x_1+(x_2-x_3)y_1\right|.$$

註 コレヲ行列式ヲ用ヒテ表ハセバ

$$\triangle=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

系． 三點ガ一直線上ニアルコトノ條件ハ $\triangle=0$ デアル．何トナレバ，三點ガ一線上ニアレバ，ソノ三點ヲ

頂點トスル △ ノ面積ハ 0 トナルカラデアル.

別解. B, C ヲ通ル直線 BC 上ニ點 A(x_1, y_1) ガアルナラバ

$$(y_2-y_3)x_1-(x_2-x_3)y_1=x_3y_2-x_2y_3$$

即チ

$$x_3y_2-x_2y_3-(y_2-y_3)x_1+(x_2-x_3)y_1=0$$

コレハ △=0 ヲ表ハスモノデアル.

12. 二直線ノ交點ヲ過ル直線ノ方程式.

解 1. 二直線ノ方程式ヲ聯立スルモノトシテ解ケバ交點ノ座標ガ求メラル. ソレヲ (x_1, y_1) トセバ, 求ムル直線ノ方程式ハ

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

解 2. 二直線ノ方程式ヲ

$$ax+by+c=0,\quad a'x+b'y+c'=0 \qquad \text{(A)}$$

トスレバ

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0 \qquad \text{(B)}$$

ハ最初ノ二直線ノ交點ヲ過ル直線ノ方程式デアル. 何トナレバ, (A) ノ共通根 [(A ノ交點ノ座標] ハ (B) ニモ適ス, 即チ (A) ノ交點ハ (B) ノ上ニアルカラデアル.

例. $(2, -1)$ ト $3x+4y+2=0,\ x+3y-5=0$ ノ交點トヲ通ル直線ノ方程式ヲ求ム.

解. 二直線ノ交點ヲ通ル直線ノ方程式ハ

$$3x+4y+2+k(x+3y-5)=0$$

デアル. コレガ $(2, -1)$ ヲ通ルトキハ

$$3\times2+4\times(-1)+2+k[2+3\times(-1)-5]=0,$$

$$\therefore \qquad k=\frac{2}{3}.$$

故ニ求スル方程式ハ

$$3x+4y+2+\frac{2}{3}(x+3y-5)=0,$$

即チ

$$11x+18y=4.$$

13. 三直線ガ同一點ヲ過ルコトノ條件.

解 1. 三直線ヲ

$$\left.\begin{array}{lr} a_1x+b_1y+c_1=0 & \text{(A)} \\ a_2x+b_2y+c_2=0 & \text{(B)} \\ a_3x+b_3y+c_3=0 & \text{(C)} \end{array}\right\}$$

トス. 今

$$l(a_1x+b_1y+c_1)+m(a_2x+b_2y+c_2)+n(a_3x+b_3y+c_3)=0 \qquad \text{(D)}$$

ガ x, y ノ値ニカカハラズ成立スル樣ナ常數 l, m, n ヲエラビ得ルナラバ, (A) (B) (C) ハ同一點ヲ通ル. 何トナレバ (A), (B), (D) ガ成立スルナラバ (C) モ成立スル. 即チ (A) (B) ノ交點ガ同時ニ (C) ヲ滿足スルコトニナル. 故ニ三直線ハ同一點ヲ共有ス.

解 2. (A) (B) ノ交點ハ

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

デアル. コレガ (C) ヲ滿足スレバヨイカラ, コレヲ (C) ニ代入スル. 然ルトキハ, 所求條件トシテ次式ヲ得.

$$a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0.$$

若シ行列式用フレバ次ノ如クニナル.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

例. 三直線ヲ $2x+y-4=0,\ -2x+y=0,\ x-y+1=0$ トス. 今 $l=1$, $m=3$, $n=4$ イスレバ, (D) 式ハ成立スル. 即チ

$$(2x+y-4)+3(-2x+y)+4(x-y+1)=0$$

故ニ上ノ三直線ハ同一點ニ會ス.

問 題

(17) (1, 3), (−3, 1), (2, −3) ヲ頂點トスル △ ノ面積ヲ求ム.

(18) $7x+4y-2=0$ ト $3x+y=8$ トノ交點ヲ通リ, 且ツ點 (3, 2) ヲ通ル直線ノ方程式ヲ問フ.

(19) $5x+3y=5$, $2x-y-1=0$ ノ交點ヲ通リ, $3x-2y=10$ ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求ム.

(20) 次ノ三直線ガ同一ノ點ヲ通ルコトヲ示セヨ.

$$2x+y-4=0,\ x-2y+5=0,\ 3x-y+1=0.$$

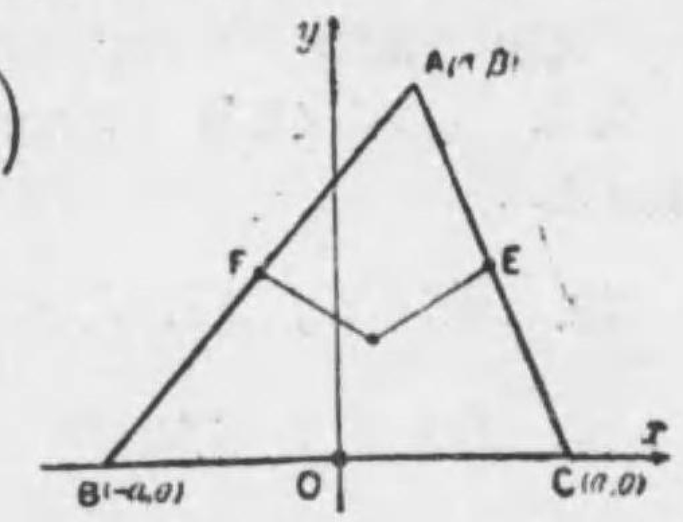
14. 初等幾何ヘノ應用.

例 1. △ABC ノ各邊ノ垂直二等分線ハ同一點ヲ通ル.

解. BC ノ中點ヲ原點ニトリ, BC ヲ x 軸ニトル.

$A(\alpha, \beta)$, $B(-a, o)$, $C(a, o)$ トスレバ

第十八圖



$$E\left(\frac{\alpha+a}{2},\ \frac{\beta}{2}\right),\ F\left(\frac{\alpha-a}{2},\ \frac{\beta}{2}\right)$$

デアル. AB ノ方程式ハ

$$y=\frac{\beta}{\alpha+a}(x-\alpha)+\beta,$$

故ニ F ニ於テ AB ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ

$$y-\frac{\beta}{2}=-\frac{\alpha+a}{\beta}\left(x-\frac{\alpha-a}{2}\right) \qquad (1)$$

デアル. コレニ於テ a ヲ $-a$ ニカヘバ, E ニ於ケル AC ノ垂線ノ方程式トシテ次式ヲ得.

$$y-\frac{\beta}{2}=-\frac{\alpha-a}{\beta}\left(x-\frac{\alpha+a}{2}\right) \qquad (2)$$

(1) (2) ヨリ y ヲ消去スレバヲ

$$x=0 \qquad (3)$$

ヲ得. 即チ (1) (2) ノ交點ハ y 軸上ニアルヲ知ル, 從テ三ツノ垂線ハ同一點ニ會スルヲ知ル.

註 軌跡ト方程式. ココニ或條件ヲモツ一群ノ點ニヨリテ滿足セラルルヤウナ方程式

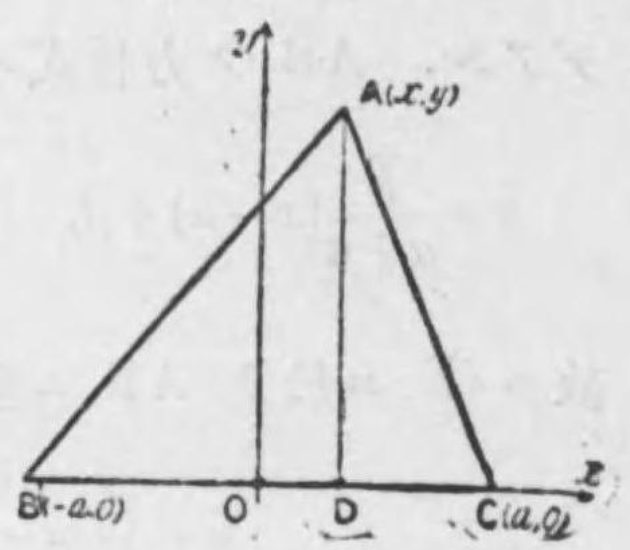
$$f(x, y)=0 \qquad (1)$$

第十九圖

ガアルトスル. 然ルトキハソレ等ノ點ヲ結ビ付ケテ生ズル線 L 上ノ點ハ, 一般ニ方程式 (1) ヲ滿足スル. コノトキ $f(x, y)=0$ ニ適スルヤウナ條件ヲモツ點ノ軌跡ハ $f(x, y)=0$ ガ表ハス線デ, $f(x, y)=0$ ハソノ軌跡ノ方程式デアルト稱セラル.

例 2. △ABC ノ底邊 BC 及ビ他ノ二邊ノ平方ノ差ヲ與ヘ, 頂點ノ軌跡ヲ求ム.

第二十圖



解. $BC=2a$, $AB^2-AC^2=d^2$ トス. BC ヲ x 軸ニ BC ノ中點ヲ原點ニトル. 然ルトキハ $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$. 今 $A(x, y)$ トスレバ

$$AB^2=(x+a)^2+y^2, \quad AC^2=(x-a)^2+y^2,$$

$$\therefore \qquad [(x+a)^2+y^2]-[(x-a)^2+y^2]=d^2,$$

即チ
$$x=\frac{d^2}{4a}.$$

コレハ頂點 A ノ滿足スル條件デアルカラ, 頂點ノ軌跡ヲ表ハス方程式デアル. 而シテコレハ底邊 BC ニ垂直ナル直線ヲ表ハス.

問題

(21) 三角形ノ三垂線ハ同一點ニ出會フトヲ證セヨ.

(22) 三角形ノ三中線ハ同一點ニ會ス.

第二章

座標ノ變換

15. 座標ノ變換.

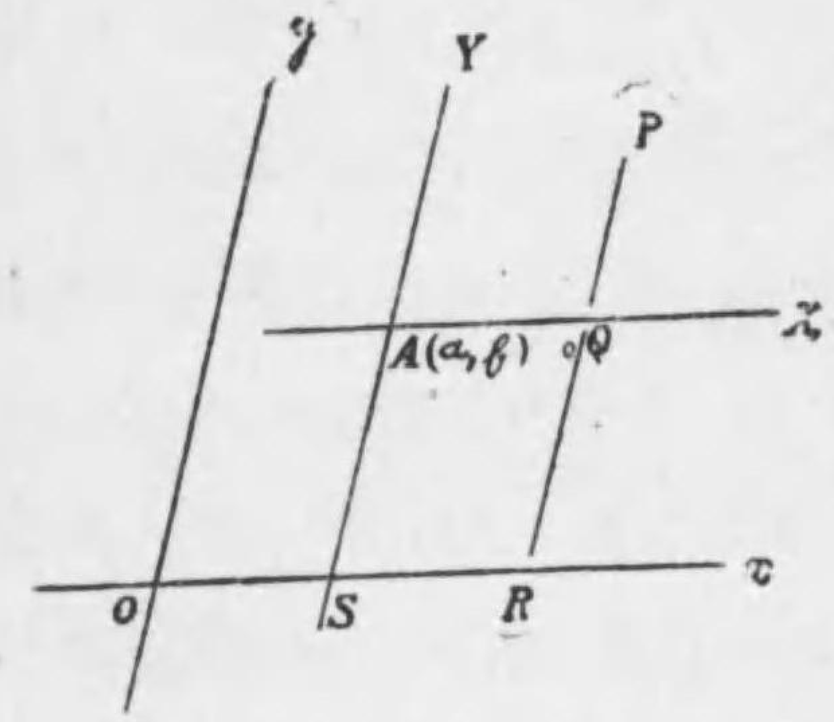
同一ノ點ノ平行座標ニテモ其軸ノ位置及ビ軸ノ間ノ角ニヨリテ種種ノ値ヲ取ルベク，又平行座標ト極座標トノ如キハモトヨリ全然ソノ種類ヲ異ニス．故ニ平面上ノ一點ノ座標ハ座標系ノ種類ニヨリテ各相異ナル値ヲ有スルモノナリ．本章ニ於テハソレラノ相互ノ間ニ存スル關係ヲ述ベントス，即チ一ノ與ヘラレタル座標系ニ關シテ或ル一點ノ座標ヲ知リタルトキ，他ノ與ヘラレタル座標系ニ關スル同一點ノ座標ヲ求ムルコト是ナリ．コノ事柄ヲ稱シテ**座標ノ變換**ト云フ． 第 5 節ニ述タルコトハ矢張一種ノ變換ナルガ，本章ニ於テハ專ラ一ノ平行座標ヨリ他ノ一ノ平行座標ニ移ル場合ヲ考ヘントス．

16 平行移動.

一點 A ヲ過ギリ與ヘラレタル座標系ノ x 軸ニ平行ナル直線ヲ引キ，之ヲ新ラシキ X 軸トシ，又 A ヲ過ギリ y 軸ニ平行ナル直線ヲ引キ，之ヲ新ラシキ Y 軸トシ，A

ヲ新ラシキ座標ノ原點トス．又 X 及ビ Y 軸ノ正ノ方向ハ x 及ビ y 軸ノ正ノ方向ト同一ナリトス．

第二十一圖



新軸ノ原點 A ノ舊軸ニ關シテノ座標ヲ (a, b) トシ，一點 P ノ新舊兩座標ヲ夫夫 (X, Y) 及ビ (x, y) トス．然ルトキハ (x, y) ヨリ (X, Y) ニ移ルコトハ，恰カモ座標軸ノ方向ヲ常ニ舊軸ノ方向ニ平行ニ保チツヽ唯ソノ原點ヲ O ヨリ A マデ移動セシメタルコトニ當ルヲ以テ，此變換ヲ稱シテ**平行移動**ト云フ．

P ヨリ y 軸ニ平行ナル直線ヲ引キ，x 軸及ビ X 軸ト交ハル點ヲ夫々 R 及ビ Q トシ，Y 軸ト x 軸トノ交點ヲ S トセヨ，

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{CR} = \mathrm{OS} + \mathrm{SR} \\ &= \mathrm{OS} + \mathrm{AQ} \\ &= a + \mathrm{X}, \\ y &= \mathrm{RP} = \mathrm{RQ} + \mathrm{QP} \\ &= \mathrm{SA} + \mathrm{QP} \end{aligned}$$

$$=b+\mathrm{Y}.$$

即テ
$$\left.\begin{aligned} x&=\mathrm{X}+a \\ y&=\mathrm{Y}+b \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ニシテ，換言スレバ
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{X}&=x-a \\ \mathrm{Y}&=y-b \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ナリ．此等ハ直交軸ニモ斜交軸ニモ通用ス．

新軸ニ關シテ舊軸ノ原點ノ座標ハ $(-a, -b)$ ナリ故ニ (2) ハ内容ニ於テ (1) ト同一ナリ．

コヽニハ新舊ノ座標ヲ區別センガタメニコトサラ前者ヲ表ハスニ X, Y ヲ用ヒタレドモ，既ニ變換ヲ終リテ後最早混雑スル恐ナキ時ハ之ヲ通常ノ x, y ニ書キ直シテ可ナリ．

〔例〕 一ノ座標軸ニ關シ $x^2+y^2-6x-4y-18=0$ ナル方程式アリ．今平行移動ニヨリ原點ヲ (3, 2) ニ移サバ，此方程式ハ如何ニ變ズルカ，

(1) ニヨリ $\quad x=\mathrm{X}+3, \quad y=\mathrm{Y}+2$

ナル關係アリ，之ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入スルトキハ

$$(\mathrm{X}+3)^2+(\mathrm{Y}+2)^2-6(\mathrm{X}+3)-4(\mathrm{Y}+2)-18=\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-31=0$$

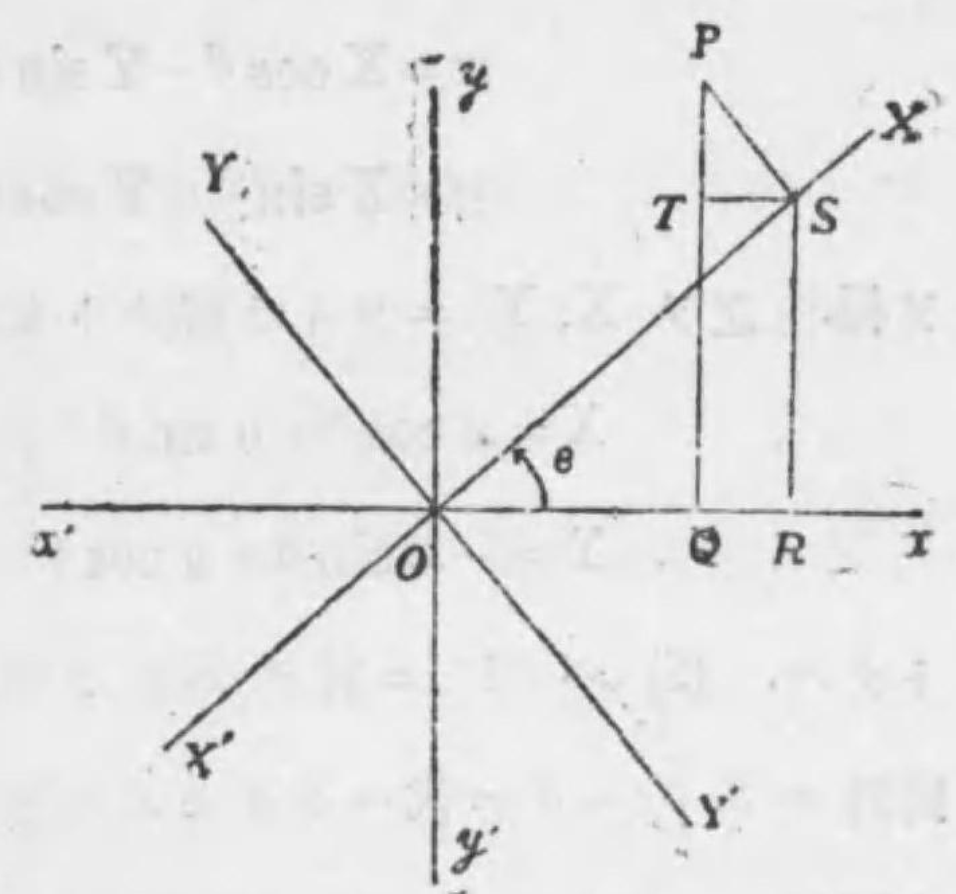
故ニ求ムル處ノ式ハ $\quad x^2+y^2=31 \quad$ ナリ．

17. 直交軸ノ回轉．

與ヘラレタル直交軸ヲ $\mathrm{O}x, \mathrm{O}y$ トシ，新直交軸ヲ OX, OY トシ原點 O ハ共通ナリトス．又 X 軸ノ正ノ方向

ト x 軸ノ正ノ方向トガナス角ヲ後者ノ方ヨリ計リテ θ ナリトシ，一點 P ノ新舊ノ座標ヲ夫々 (X, Y), (x, y) トス．此場合ノ變換ハ丁度座標軸ヲ直交セルマヽニテ原點ノ回リニ θ ナル角丈回轉セルコトニ當ル．因テ之ヲ直交軸ノ回轉ト稱ス．扨 P ヨリ x 軸及ビ X 軸ニ夫々垂線ヲ下シ其足ヲ Q 及ビ S トシ，更ニ S ヨリ PQ 及ビ x 軸ニ夫々垂線ヲ下シ其足ヲ T 及ビ R トセヨ．

第二十二圖



$$\begin{aligned} x=\mathrm{OQ}&=\mathrm{OR}-\mathrm{QR} \\ &=\mathrm{OR}-\mathrm{TS}, \\ y=\mathrm{QP}&=\mathrm{QT}+\mathrm{TP} \\ &=\mathrm{RS}+\mathrm{TP}. \end{aligned}$$

然ルニ
$$\begin{aligned} \mathrm{OR}&=\mathrm{OS}\cos\theta=\mathrm{X}\cos\theta, \\ \mathrm{RS}&=\mathrm{OS}\sin\theta=\mathrm{X}\sin\theta. \end{aligned}$$

又 ∠TPS ハ明カニ θ ニ等シキヲ以テ

$$TS=ST\sin\theta=Y\sin\theta,$$
$$TP=SP\cos\theta=Y\cos\theta.$$

故ニ結局

$$\left.\begin{aligned} x&=\mathbf{X}\cos\theta-\mathbf{Y}\sin\theta \\ y&=\mathbf{X}\sin\theta+\mathbf{Y}\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ヲ得. 之ヲ X, Y ニツイテ解クトキハ

$$\left.\begin{aligned} X&=x\cos\theta+y\sin\theta \\ Y&=-x\sin\theta+y\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

トナル. (2) ハ (1) ニ於テ $x. y$ ヲ夫々 X, Y ト交換シ, 同時ニ θ ヲ $-\theta$ ニ代ヘタルモノニ當ル, 蓋シ新軸ヲ $-\theta$ 丈回轉セバマタモトノ舊軸ヲ得可ケレバナリ.

今 (1) 或ハ (2) ニ於テ兩邊ヲ自乘シテ相加フレバ

$$x^2+y^2=X^2+Y^2$$

ナル關係ヲ得. 即チ x^2+y^2 ナル式ハ直交軸ノ回轉ニヨリテソノ値ヲ變ゼザルモノナリ. 此事ハ x^2+y^2 ガ一點 (x, y) ノ原點ヨリノ距離ノ自乘ヲアラハスコトヲ思ハバソノ當然ナルヲ知ルベシ.

【例】 直交軸ヲ原點ノ回リニ 45。回轉スルトキ, $x^2-y^2=0$ ナル方程式ハ如何ニ變ズルカ.

(1) ニ於テ $\theta=45°$ ト置カバ

$$x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \qquad y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$

之ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入シテ

$$\frac{(X-Y)^2}{2}-\frac{(X+Y)^2}{2}=-2XY=0$$

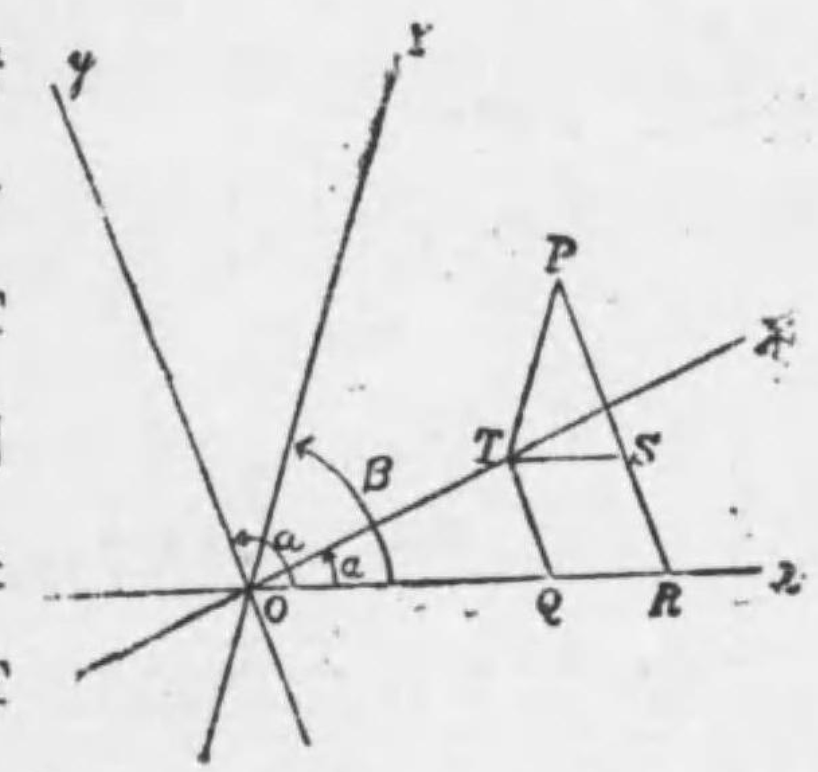
ヲ得. 即チ求ムル式ハ $xy=0$ ナリ

18. 一般ノ變換

Ox, Oy ヲ一ノ座標軸トシ, 軸ノ間ノ角ヲ ω トス. 又 OX, OY ヲ, 之ト原點ヲ同ジクスル, 他ノ一ノ座標軸トシ, OX 及ビ OY ガ Ox トナス角ヲ, 共ニ Ox ノ方ヨリ計リテ, 夫々 α 及ビ β トス. 即チ新ラシキ軸ノ間ノ角ハ $\beta-\alpha$ ナリ。

今一點 P ノ舊軸ニ關スル座標ヲ (x, y) トシ, 新軸ニ關スルモノヲ (X, Y) トス.

第二十三圖



P ヲ過ギリ OY ニ平行ナル直線ガ OX ト交ル點ヲ T トシ, P 及ビ T ヨリ Oy ニ平行線ヲ引キ, Ox ト交ル點ヲ夫夫 R 及ビ Q トス. 又 T ヨリ Ox ニ平行線ヲ引キ PR ト交ル點ヲ S トセヨ.

$$\angle OTQ=\omega-\alpha, \qquad \angle OQT=180°-\omega,$$

$$\angle \mathrm{TPS}=\omega-\beta, \qquad \angle \mathrm{TSP}=180^\circ-\omega,$$

$$\angle \mathrm{STP}=\beta$$

ナルコト明カナリ. 因リテ

$$x=\mathrm{OR}=\mathrm{OQ}+\mathrm{QR}=\mathrm{OQ}+\mathrm{TS}$$

$$=\mathrm{OT}\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin(180^\circ-\omega)}+\mathrm{TP}\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin(180^\circ-\omega)}$$

$$=\mathrm{X}\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}+\mathrm{Y}\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega},$$

$$y=\mathrm{RP}=\mathrm{RS}+\mathrm{SP}=\mathrm{QT}+\mathrm{SP}$$

$$=\mathrm{OT}\frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ-\omega)}+\mathrm{TP}\frac{\sin\beta}{\sin(180^\circ-\omega)}$$

$$=\mathrm{X}\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}+\mathrm{Y}\frac{\sin\beta}{\sin\omega}$$

故ニ求ムル變換ノ式ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=\mathbf{X}\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}+\mathbf{Y}\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega} \\ y&=\mathbf{X}\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}+\mathbf{Y}\frac{\sin\beta}{\sin\omega} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ニシテ, モシ之ヲ X, Y ニツイテ解クトキハ

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X}&=x\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}-y\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)} \\ \mathbf{Y}&=-x\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}+y\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ヲ得. (2) ハ (1) ニ於テ x, y ト X, Y トヲ交換スルト同時ニ ω, α, β ノ代リニ夫々 $\beta-\alpha$, $-\alpha$, $\omega-\alpha$ ヲ入レタルモノナルコトニ注意スベシ. 又新軸ノ間ノ角即チ $\beta-\alpha$ ヲ ω' ニテ表ハサバ, (1) 又ハ (2) ヨリ

$$x^2+y^2+xy\cos\omega=\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+2\mathrm{XY}\cos\omega'$$

ナルコトヲ驗證シ得ベシ. 此兩邊ハ一點ヨリ原點マデノ距離ノ自乘ヲ示ス.

前節ニ述タル直交軸ノ回轉ノ場合ノ公式ハ此持別ノ場合トシテ容易ニ誘導スルコトヲ得ベシ. 更ニ他ノ一ノ特別ノ場合トシテ

$$\alpha=0^\circ, \qquad \beta=90^\circ$$

ト置クトキハ, 一ノ斜交軸ヨリ之ト原點及ビ x 軸ヲ共有スル直交軸ニ移ル場合, 又ハソノ反對ノ場合ノ變換式ヲ得ベシ. 即チ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned} x&=\mathbf{X}-\mathbf{Y}\cot\omega \\ y&=\mathbf{Y}\cos x\omega \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X}&=x+y\cos\omega \\ \mathbf{Y}&=x\sin\omega \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

一ノ座標軸ヨリ之ト原點ヲ異ニスル他ノ任意ノ座標軸ニ移ランニハ, 先ヅ最初平行移動ニヨリテ兩方ノ原點ヲ

一致セシメ置キ，次ニ (1) 又ハ (2) ニヨリテ變換ス．此二段ノ手續ヲ組合シテ一般ニ

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathbf{X}\frac{\sin(\omega-a)}{\sin\omega}+\mathbf{Y}\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}+a \\ &= \mathbf{X}y\frac{\mathrm{siu}\, a}{\sin\omega}+\mathbf{Y}\frac{\sin\beta}{\sin\omega}+b \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

又ハ

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X} &= x\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-a)}-y\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin(\beta-a)}+a' \\ \mathbf{Y} &= -x\frac{\sin a}{\sin(\beta-a)}+y\frac{\sin\omega-a)}{\sin(\beta-a)}+b' \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

ノ如キ形ノ變換式ヲ得ベシ．コヽニ (a, b) ハ新原點ノ舊軸ニ關スル座標ニシテ，(a', b') ハ舊原點ノ新軸ニ關スル座標ナリトス．(5) 及ビ (6) ニヨリ，如何ナル座標軸ノ變換ニ際シテモ，x 及ビ y ハ常ニ X 及ビ Y ノ一次式ニヨリテ表ハサレ，又逆ニ X 及ビ Y モ x 及ビ y ノ一次式ニヨリテ表ハキルヽコトヲ知ル．之ニヨリテ次ノ重要ナル定理ヲ得．

x 及ビ y ヨリ成ル有理整式ノ次數ハ座標軸ノ如何ナル變換ニヨリテモ變ズルコトナシ．

何トナレバ，先ヅ次數ガ高クナルコトナキハ上述ノ理ニヨリテ明カナリ．モシ又或ル變換ニヨリテ最高次ノ項

ヲ消去セシメテ式ノ次數ヲ低クスルコトヲ得トセバ，ソレヨリ逆ニ原ノ軸ニ戻ル變換ヲ考フルニ其際次數ハ復舊スベキニヨリ，コヽニ低次ヨリ高次ニ變ル一種ノ變換アルコトヽナル．コレ明カニ不合理ナリ．依テ次數ハ不變ナラザル可ラズ．

此定理アルニヨリ，解析幾何學ニ於テハ x 及ビ y ノ間ノ有理整方程式ニヨリテ表ハサルヽ曲線即チ所謂**代數曲線**ヲ分類スルニ當リソノ次數ニ據ルコトヽシ，一次曲線．二次曲線等ト呼ブ．例ヘバ $ax+by+c=0$ ハ一次曲線，$x^2+y^2=a^2$, $xy=k$ 等ハ二次曲線ヲ表ハスモノナリ．

與ヘラレタル方程式ガ x 及ビ y ニ就テ有理整式ナラザル場合ト雖，モシ之ヲ有理式ニ變化シ得ルトキハ，ソノ次數ニヨリテ之ヲ分類ス．例ヘバ

$$\frac{y}{x}=m \qquad (7), \qquad\qquad y=\sqrt{ax} \qquad (8)$$

ノ如キハ，之ヲ夫々

$$y=mx \qquad (9), \qquad\qquad y^2=ax \qquad (10)$$

ニ變化シテ見テ，ソノ一次又ハ二次曲線ナルコトヲ知ル．

但シ斯ノ如ク變化シテ得ル方程式ノ表ハス曲線ハ一般ニ與ヘラレタルマヽノ方程式ノ表ハスモノト全然同一ニハアラズ，之ヲソノ一部トシテ包含スルヲ普通トス．例ヘバ (7) ニ於テハ原點ハ嚴密ニ云ヘバ軌跡上ノ點ナリ

ト云フヲ得ザレドモ, (9) ニ於テハ明カニソノ上ノ一點ナリ. 又 (10) ノアラハス曲線ハ (8) ノアラハスモノノミナラズ, 更ニ $y=-\sqrt{ax}$ ナル軌跡ヲモソノ中ニ含メリ.

與ヘラレタル方程式ガ x 及ビ y ニツイテノ有理整式ニ變化シ得ザル時, 例ヘバ $y=\sin x$ ノ如キ時ハソノ表ハス曲線ヲ稱シテ**超越曲線**ト云フ. 超越曲線ニハ次數ナルモノナシ.

又極座標ニヨリテ與ヘラレタル曲線ハ之ヲ平行座標ニ變換シタル後上記ノ如ク分類スルモノトス.

問　題

1. 平行移動ニヨリテ原點ヲ (a, b) ニ移サバ, 次ノ方程式ハ如何ナル形ヲ取ルカ.

(i) $x^2-y^2-2ax+2by+a^2-b^2=0$

(ii) $x^2+y^2-2ax-2by-r^2+a^2+b^2=0.$

2. 直交軸ニ關シテ

$$21x^2-10\sqrt{3}\,xy+31y^2=144$$

ナル方程式アリ. 今軸ヲ直交セルマヽ 30° 回轉セバ此方程式ハ如何ニ變ズルカ.

3. 直交軸ニ關シ, 一ノ與ヘラレタル方程式ヲ

$$4xy-3x^2=a^2$$

トス. 今此直交軸ヲ $\tan\theta=2$ ナル如キ角 θ 丈回轉セバ方程式ハ如何ナル形トナルカ.

4. 一ノ座標軸ニ關シテ一點ノ座標ヲ (x, y) トシ, 他ノ一ノ座標軸ニ關シテ同ジ點ノ座標ヲ (x_1, y_1) トス. モシソノ間ニ

$$x=mx_1+ny_1$$

$$y=m_1x_1n_1y_2$$

ナル關係アラバ

$$\frac{m^2+m_1^2-1}{n^2+n_1^2-1}=\frac{mm_1}{nn_1}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

第三章

圓

19. 圓ノ方程式

圓ノ性質ハ初等幾何學ニ於テ既ニ知ラレタル處ナリト雖,コヽニハ一般ニ解析幾何學ニ於テ,或ル曲線ノ性質ヲ如何ニシテ研究スルモノナルカヲ例示センガタメニ,唯「圓トハ平面上ニ方テ一點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ナリ」トイフ定義ノミヲ根據トシテ其諸性質ヲ演繹セントス.但シ初等幾何學ニ於テハ,圓ト云ハバ圓周ノミヲ指サズシテ圓周ニヨリテ包マレタル平面ノ一部分ヲモ合セ考フルガ如キモ,解析幾何學ニ於テハ,單ニ圓ト云ハバ圓周ノミノコトナリト知ルベシ.

今直交軸ニ關シ,圓ノ中心ノ座標ヲ (a, b) トシ,半徑ノ長サヲ r トセバ,此圓上ノ任意ノ一點 (x, y) ヨリ中心マデノ距離ハ r ニ等シキヲ以テ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (1)$$

ナリ. 又逆ニ此關係ヲ滿足スル一點 (x, y) ハ必ズ中心 (a, b) ヨリ r ニ等シキ距離ニアルヲ以テ,今考フル處ノ

圓ノ上ノ一點ナラザル可ラズ. 故ニ (1) ハ此圓ノ方程式ナリ.

特ニ圓ノ中心ガ原點ト一致スルトキハ,其方程式ハ

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (2)$$

トナル. 此式ハ簡單ニシテ取扱ニ便ナルヲ以テ,座標軸ノ取リ方ニ關係ナキ圓ノ諸性質ヲ論ズルトキニ常ニ用ヒラル.

(1) ニヨリテ見レバ,圓ハ二次曲線ナルコトヲ知ル. 然レドモ逆ニ二次曲線ハ常ニ圓ヲ表ハスモノト云フヲ得ズ,現ニ前章ニ於テ知レル如ク二ツノ直線ヲ表ハスコトモアルベシ. 依テ今直交軸ニ關シテ一般ナル二次方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (3)$$

ヲ取リ,之ガ如何ナル場合ニ圓ヲアラハスカヲ考フベシ.

(1) ヲ書キ直ストキハ,

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \qquad (4)$$

トナル. 故ニ (3) ガ (4) ノ如キ形ニナリ得ルタメニハ,先ヅ $a=b\neq0$ ニシテ且 $h=0$ ナルコトヲ要スベシ. コレ必要ナル條件ナリ. モシ又此條件ガ滿足セラルルトキハ,(3) ヲ次ノ如クニ變形シ得. 即チ a ニテ兩邊ヲ割リテ,

$$x^2+y^2+\frac{2g}{a}x+\frac{2f}{a}y+\frac{c}{a}=0,$$

之ヲ括レバ

$$\left(x+\frac{g}{a}\right)^2+\left(y+\frac{f}{a}\right)^2=\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}$$

トナル．コレ即チ中心ガ $\left(-\frac{g}{a},-\frac{f}{a}\right)$ ニアリテ，半徑ガ $\sqrt{\frac{g^2+f^2+ac}{a^2}}$ ナル圓ヲアラハス式ナリ．然レドモコヽニ g^2+f^2-ac ガ零ナルカ，又ハ負ナルトキハ，半徑ノ長サタルベキモノガ零或ハ虛數トナルヲ以テ，コレラヲ除外シ，結局 (3) ガ圓ヲアラハスタメノ條件ハ

$$a=b\neq 0,\quad h=0,\quad g^2+f^2-ac>0$$

ナリト云フコトヲ得．

然レドモ解析幾何學ニ於テハ，代數的計算ノ結果ヲナルベク普遍的ニ解釋センガタメニ，半徑ガ零又ハ虛ナル場合ヲモ許容シテ弘義ニ於ケル圓ト考ヘ，前者ヲ**點圓**，後者ヲ**虛圓**トイフ．カク弘義ニ解スレバ，(3) ガ圓ヲアラハスタメノ條件ハ

$$a=b\neq 0,\quad h=0$$

ナリ．依テ圓ノ一般ナル方程式ヲ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \tag{5}$$

ナリトスルコトヲ得ベシ．コヽニイフ g, f, c ハ (3) ニ於テハ $\frac{g}{a}$, $\frac{f}{a}$, $\frac{c}{a}$ ニ當ル．

座標軸ノ間ノ角ヲ ω トスルトキハ，直交軸ノ場合ト同樣ノ考ヘニヨリ，(a, b) ヲ中心トシ，r ヲ半徑トスル圓ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\omega=r^2$$

即チ

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2-2(a+b\cos\omega)x-2(b+a\cos\omega)y$$
$$+a^2+b^2+2ab\cos\omega-r^2=0$$

ナルコトヲ知ルベシ．

以後特別ニ斷リナキトキハ，軸ハススベテ直交軸トシ，圓ハ常ニ實圓ナルモノト定メ置クベシ．

20. 切　線．

圓ノ上ニアル二ツノ相異リタル點ヲ P, Q トシ，直線 PQ ヲ引キ，次ニ P ヲ固定シ Q ヲ此圓ニ沿フテ限リナク P ニ近ヅカシメタルトキ，直線 PQ ガ或ル一定ノ直線ニ限リナク近ヅクトキハ，コノ一定ノ直線ヲ名ケテ P 點ニ於ケル圓ノ**切線**トイヒ，P ヲソノ**切點**ト云フ．

原點ヲ中心トシ，半徑ガ r ナル圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2=r^2 \tag{1}$$

ナリ．今此圓周上ニ相異レル二點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ヲ取ラバ，直線 PQ ノ方程式ハ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (2)$$

ニシテ，コヽニ

$$x_1^2+y_1^2=r^2, \qquad x_2^2+y_2^2=r^2 \qquad (3)$$

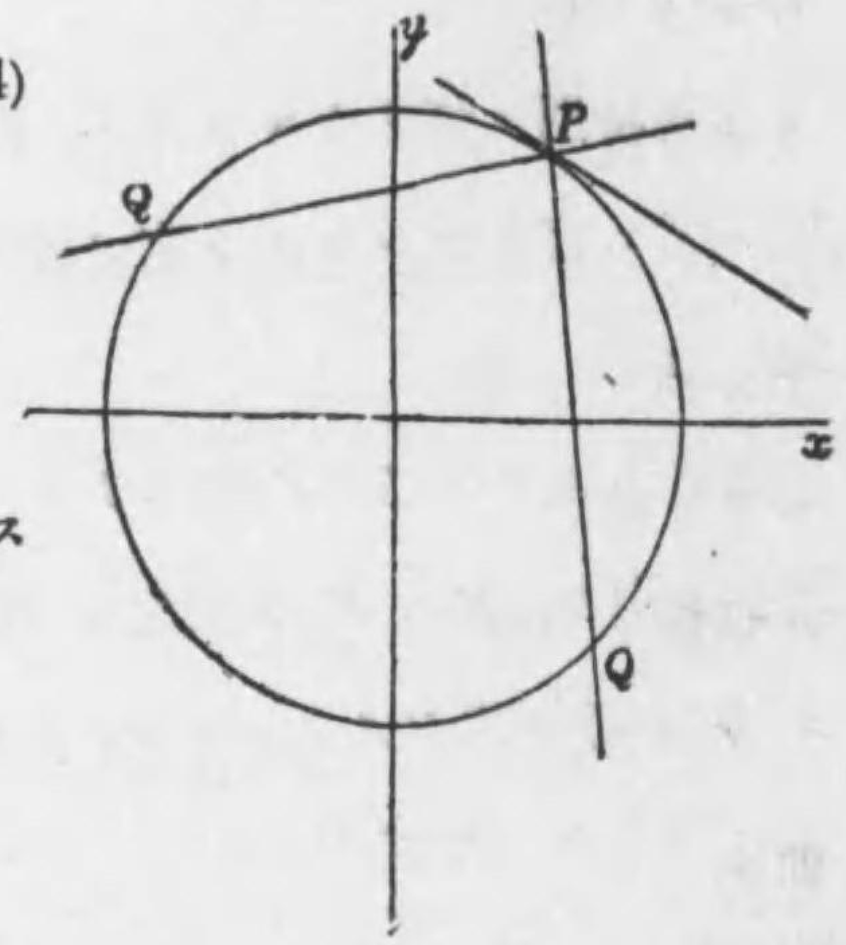
ナル關係アリ．(3) ノ兩式ヲ邊々相減ジテ，

$$(x_2^2-x_1^2)+y_2^2-y_1^2=0$$

從テ $$(x_2+x_1)(x_2-x_1)=-y_2+y_1)(y_2-y_1)$$

トナル．モシコヽニ

第二十四圖



$x_2-x_1\neq 0,\ \ y_2+y_1\neq 0$ (4)

ナリトセバ，

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$$

ヲ得．之ヲ (2) ニ代入スルトキハ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$$

トナル．因テ分母ヲ拂ヒテ一邊ニ集メテ，

$$(x_1+x_2)(x-x_1)+(y_1+y_2)(y-y_1)=0 \qquad (5)$$

ヲ得．コレ即チ二點 P, Q ガ共ニ圓 (1) ノ上ニアリトイフコトヲ考ニ入レタルトキノ直線 PQ ノ方程式ナリ．コ

コニハ (5) ハ (4) ナル假定ノ下ニ作リタレドモ，實ハコノ式ハ x_1+x_2 ト y_1+y_2 トガ同時ニ零ナラザル限リ，即チ PQ ガ圓ノ直徑ナラザル限リ，常ニ直線 PQ ノ方程式ナリ．何トナレバ (5) ハ x 及ビ y ニツイテノ一次式ニシテ，x, y ノ代リニ x_1, y_1 ヲ入ルヽモ，x_2, y_2 ヲ入ルヽモ常ニ滿足セラルレバナリ．

扨 (5) ニ於テ，Q ガ圓ニ沿フテ漸次ニ P ニ限リナク近ヅキタル場合ヲ考フルニ，此時 x_2, y_2 ハ夫々 x_1, y_1 ニ限リナク近ヅクニヨリ，(5) ハ畢竟

$$2x_1(x-x_1)+2y_1(y-y_1)=0$$

ナル形ニ限リナク近ヅクベシ．此式ハ P ノ座標ノミニヨリテ確定セルモノニシテ，即チ定義ニヨリ，P ニ於ケル切線ヲアラハスモノナラザル可ラズ．之ヲ書キ直サバ，

$$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$$

即チ

$$x_1x+y_1y=r^2 \qquad (6)$$

此ヲ圓上ノ一點ニ於ケル切線ノ公式トス．

モシ圓ノ方程式ガ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ナル形ニテ與ヘラルヽトキ，ソノ圓上ノ一點 P(x_1, y_1) ニ

於ケル切線ノ方程式ヲ求メント欲セバ，先ヅ座標軸ノ平行移動ニヨリ，原點ヲ圓ノ中心 (a, b) ニ移ストキハ，圓ノ式ハ

$$X^2+Y^2=r^2$$

ナル形トナリ，P ノ座標ハ (x_1-a, y_1-b) トナル．コヽニ於テ (6) ニヨリテ，求ムル切線ノ新軸ニ關シテノ方程式ハ

$$(x_1-a)X+(y_1-b)Y=r^2$$

ナルヲ知ル．之ヲ元ノ軸ニ戻ストキハ

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2 \qquad (7)$$

ヲ得．

又モシ圓ノ方程式ガ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

ナル形ニテ與ヘラルヽトキ，其上ノ一點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メンニハ，此圓ノ方程式ヲ書キ直シテ

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

トナシ，公式 (7) ヲ應用スルコトニヨリ，求ムル切線ノ方程式ハ

$$(x_1+g)(x+g)+(y_1+f)(y+f)=g^2+f^2-c$$

即チ

$$x_1x+y_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0 \qquad (8)$$

トナル．

21. 法線．

圓ノ上ニアル一點 P ヲ通ジ，コノ點ニ於ケル圓ノ切線ニ垂直ナル直線ヲ P 點ニ於ケル圓ノ**法線**ト云ヒ，P ヲソノ足ト云フ，

與ヘラレタル圓ノ方程式ヲ

$$(x-a)^2+y-b)^2=r^2 \qquad (1)$$

トセバ，ソノ上ノ一點 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル法線ハ，先ヅソノ點自身ヲ過ルニヨリ，

$$\lambda(x-x_1)+\mu y-y_1)=0 \qquad (2)$$

ナル形ノ方程式ヲ有セザル可ラズ．而シテ又 P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2 \qquad (3)$$

ニシテ，(2) ト (3) トハ互ニ垂直ナラザル可ラザルニヨリ，

$$\lambda(x_1-a)+\mu(y_1-b)=0 \qquad (4)$$

ナル關係アリ．λ ト μ トハ同時ニ零ナルコト能ハザルモノナレバ，(2) ト (4) ヨリ λ, μ ヲ消去スルコトニヨリ，

$$(y_1-b)(x-x_1)-(x_1-a)(y-y_1)=0$$

或ハ書キ直シテ,

$$(y_1-b)(x-a)-(x_1-a)(y-b)=0 \tag{5}$$

ヲ得. (5) ハ即チ二點 (a, b), (x_1, y_1) ヲ過ル直線ノ方程式ニ他ナラズ. 故ニ圓ニ於テハ, 凡テノ法線ハ皆中心ヲ過ギルモノニシテ, 換言スレバ, 直徑ヲ双方ニ引キ延バシタル直線ノ別名ニ過ギズ.

22. 圓ト直トノ交點.

圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2 \tag{1}$$

トシ, 其上ニアル一點 $P(x_1, y_1)$ ヲ過ル直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=\rho \tag{2}$$

トス. コヽニ θ ハソノ直線ガ x 軸トナス角, ρ ハ P ヨリソノ直線上ノ一點マデノ P ヨリノ距離ニシテ, x 軸ト θ ノ角ヲナス方向ヲ正トシテ計レルモノナリ.

今 (1) ト (2) トノ交點ニ對應スル ρ ノ値ヲ求メンニハ, 先ヅ (2) ヨリ

$$x=x_1+\rho\cos\theta,\quad y=y_1+\rho\sin\theta$$

ヲ出シ, 之ヲ (1) ニ入レテ

$$(x_1+\rho\cos\theta)^2+(y_1+\rho\sin\theta)^2=r^2$$

即チ

$$\rho^2+2(x_1\cos\theta+y_1\sin\theta)\rho+x_1^2+y_1^2-r^2=0 \tag{3}$$

ナル方程式ヲ作リ, 之ヲ解キテ ρ ヲ求ムベシ. 然ルニ (x_1, y_1) ハ圓 (1) ノ上ノ點ナルヲ以テ, 此方程式ニ於ケル ρ ヲ含マザル項ハ零トナル, 從テ (3) ハ

$$\rho\{\rho+2(x_1\cos\theta+y_1\sin\theta\}=0$$

トナリ, 其一根ハ明カニ零ナリ, 蓋シ P 點自身ガ交點ノ一ツナレバナリ.

他ノ一根ハ一般ニ零ニアラズ. 之ニ對スル交點ヲ Q ト名ヅクベシ. 然レドモモシ θ ナル角ヲ適當ニ選ビテ

$$x_1\cos\theta+y_1\sin\theta=0 \tag{4}$$

ナラシムルトキハ, 此根モ亦零トナリ, Q ハ P ト一致スベシ. 而シテコノ場合ニ直線 (2) ハ P ニ於ケル切線トナルヲ見ル. 實際 (2) ト (4) ヨリ θ ヲ消去スルトキハ

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0$$

即チ

$$x_1x+y_1y=r^2$$

トナリ, 前ニ得タル切線ノ式ト一致ス.

初等幾何學ニ於テハ, 圓ノ切線ハ圓ト唯一點ニ於テ交ハルモノナリト稱スレドモ, 解析幾何學ニ於テハ以上ノ理由ニヨリ, 切線ハ圓ト相重レル二點ニ於テ交ハルモノト稱スベシ.

更ニ一般ニ圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \tag{5}$$

トシ，平面上任意ノ一點 $P(x_1, y_1)$ ヲ過ル直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=\rho \tag{6}$$

トシ，P ヨリコノ直線ト圓トノ交點マデノ距離 ρ ヲ求メントト欲セバ，前ノ如ク (6) ヨリ x 及ビ x ヲ出シテ (5) ニ入レ，ρ ニ關スル二次方程式

$$(x_1+\rho\cos\theta)^2+(y_1+\rho\sin\theta)^2+2g(x_1+\rho\cos\theta)$$
$$+2f(y_1+\rho\sin\theta)+c=0$$

即チ

$$\rho^2+2\{(x_1+g)\cos\theta+(y_1+f)\sin\theta\}\rho+x_1^2+y_1^2$$
$$+2gx_1+2fy_1+c=0 \tag{7}$$

ヲ作リ，之ヲ解ケバ可ナリ.

故ニ一般ニ一ノ直線ト圓トハ二點ニ於テ相交ハルモノナルコトヲ知ル. ソノ交點ヲ Q, R トセヨ，然ラバ PQ 及ビ PR ハ方程式 (7) ノ二根ナルヲ以テ

$$PQ.PR=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c \tag{8}$$

ナリ. 此右邊ニアルモラハ圓ノ方程式 (5) ノ左邊ノ式ニ於テ x, y ニ x_1, y_1 ヲ代入セルモノナレバ，モシ (5) ヲ略記シテ

$$f(x, y)=0$$

トスルナラバ，(8) ハ

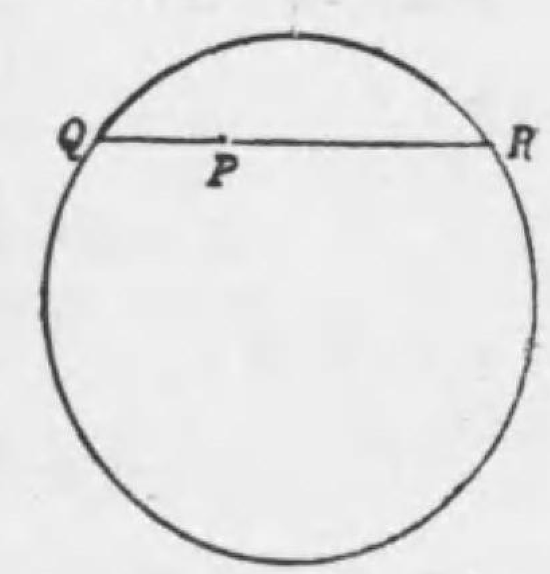
$$PQ.PR=f(x_1, y_1)$$

トスルコトヲ得ベシ. $f(x_1, y_1)$ ヲ圓 (5) ニ關スル P 點ノ冪ト名ヅク. 此値ハ單ニ P ノ座標ニノミ關スルモノニシテ，直線 PQR ノ方向ニハ無關係ナリ. 故ニ，一點 P ヲ過ギリ任意ノ直線ヲ引キ一ノ圓ト Q 及ビ R ニ於テ相交ハラシメバ PQ, PR ナル積ハ一定ナリ.

一點 $P(x_1, y_1)$ ノ冪ハ P ノ位置ニヨリテ正ナルコトアリ負ナルコトアリ又零ナルコトモアルベシ. 依テコヽニ三ツノ場合ヲ區別ス.

(1) $f(x_1, y_1)<0$ ナルトキハ點 P ハ圓ノ**内ニアリ**ト稱ス. 此場合ニハ二次方程式 (7) ニ於テ ρ^2 ノ係數ハ 1 ニシテ常數項ガ負ナルヲ以テ，二根ハ常ニ實ニシテ且ツ反對ノ符號ヲ有ス. 故ニ P ヲ過ル直線ハ必ズ圓ト二ツノ點 Q, R ニ於テ相交リ，且 Q ト R トハ P ノ反對ノ側ニアリ. 從テ Q ト R トハ決シテ重リ合フコトナシ. 故ニ P ヲ過リ如何ナル直線ヲ

第二十五圖



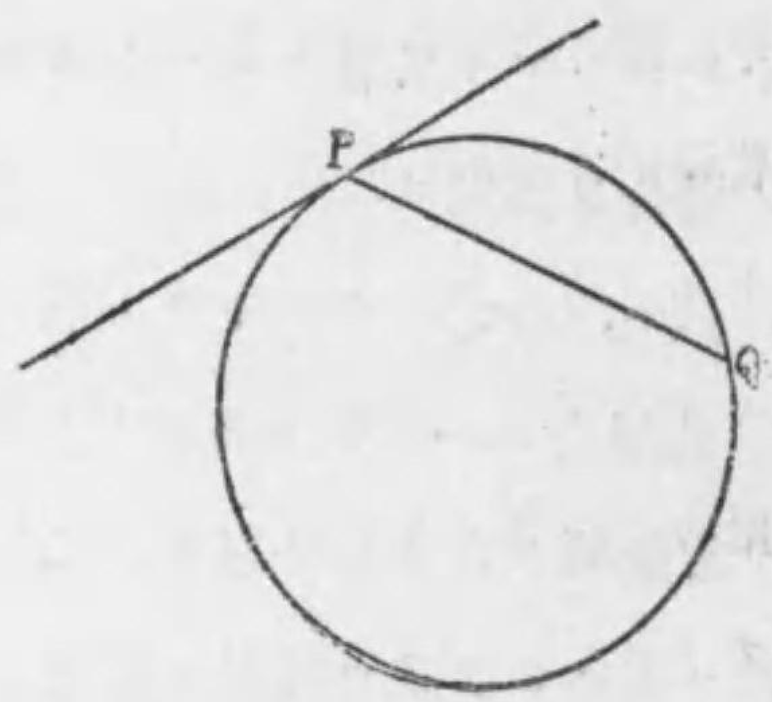
引クモ此圓ノ切線トナルコトナシ.

(2) $f(x_1, y_1)=0$ ナルトキハ即チ點 P ガ圓ノ上ニアル場合ニシテ，既ニ本節ノ冒頭ニ於テ詳論セル場合ト同ジ. 即チ此時ニハ二根ハ常ニ實ニシテ，且ソノ一方ハ必ズ零ナリ. 故ニ交點ノ中一ツハ P 自身ニシテ，他ノ一ツヲ Q トスルナラバ Q ハ一般ニハ P ト異ル. 然レドモアル特別ナル θ ヲ取リ，

$$(x_1+g)\cos\theta+(y_1+f)\sin\theta=0 \qquad (9)$$

ナラシムルトキハ，Qモ亦Pト合シ，直線(6)ハPニ於ケル切線トナル. (6)ト(9)ヨリ θ ヲ消去シテ此切線ノ式ヲ得.

第二十六圖



即チ

$$(x_1+g)(x-x_1)+(y_1+f)(y-y_1)=0$$

ニシテ，畢竟

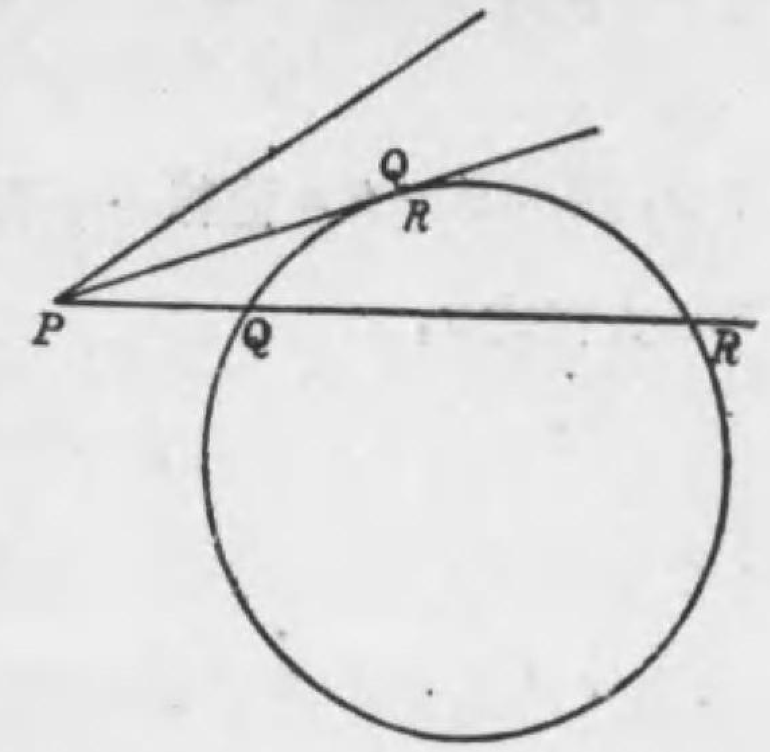
$$x_1x+y_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

トナリ，第 20 節 (8) ト一致ス.

(3) $f(x_1, y_1)>0$ ナルトキハ點 P ハ圓ノ**外ニアリ**ト

稱ス. 此場合ニハ方程式(7)ノ二根ハ，實ニシテ相異ナルコトアリ，實ニシテ相等シキコトアリ，又虛ナルコトアリ. 從テ圓ノ外ニアル一點ヲ過リテ直線ヲ引シトキハ，其直線ハ圓ト相異レル二點ニ於テ交ハルコトアリ，或ハ圓ニ切スルコトアリ，或ハ全ク圓ト相交ラザルコトアリ. 然レドモ，既ニ度々述ベタル如ク成ルベク代數的計算ノ結果ヲ普遍的ニ解釋スルタメニ，後者ノ場合ニ於テモ，相交ラズトイフ代リニ，二ツノ虛點ニ於テ相交ハルトイフ言ヒ表ハシ方ヲ用フルコトアリ. 虛點トハソノ座標ノ一方又ハ兩方ニ虛數ヲ含メルモノニシテ圖ノ上ニハ實在セザル點ナリ.

第二十七圖



然レドモ交點ノ虛實ニ關ハラズ，(8)ニ得タル關係ハ常ニ成立スベシ. 一般ニ一點 P ヨリ圓ニ切線ヲ引キタルトキハ，P ヨリソノ切點マデノ長サハ常ニ P 點ノ冪ノ平方根ニ等シキモノナリ.

23. 直線ガ圓ニ切スル條件.

圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (1)$$

トシ，與ヘラレタル直線ハ y 軸ニ平行ナラザルモノトシ，ソノ方程式ヲ，

$$y=mx+b \qquad (2)$$

トス．

(1) ト (2) ヨリ y ヲ消去シテ得ル x ノ二次方程式

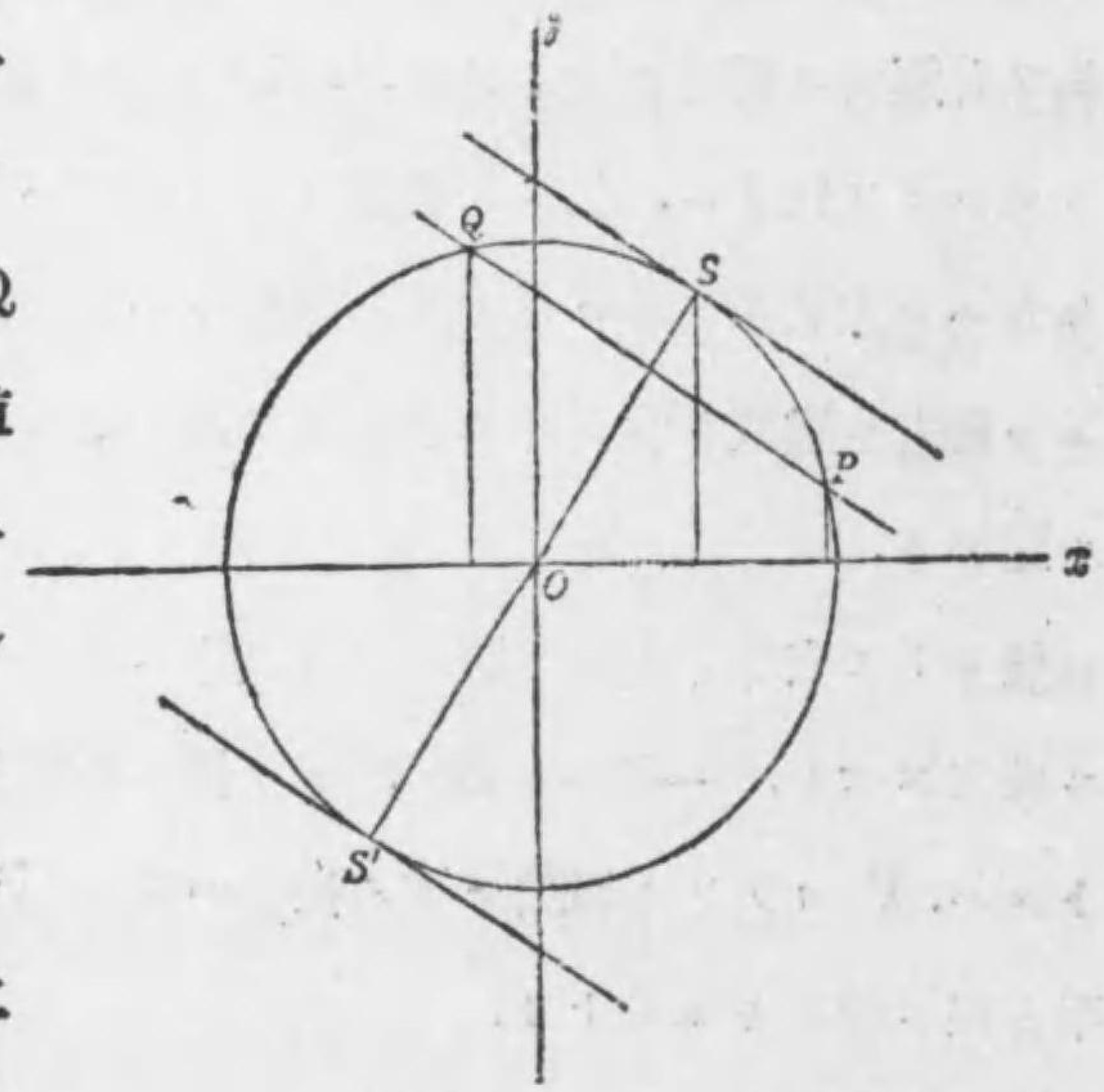
$$x^2+(mx+b)^2=r^2$$

即チ

$$(1+m^2)x^2+2mbx+b^2-r^2=0$$

ノ二根ハ，直線 (2) ト圓 (1) トノ交點 P, Q ノ横線ノ値ナルベキニヨリ，モシ (2) ガ (1) ノ切線ナルトキハ，此二根ハ相等シ

第二十八圖



クナラザル可ラズ．依テ

$$m^2b^2=(1+m^2)(b^2-r^2)$$

即チ

$$b=\pm r\sqrt{1+m^2} \qquad (3)$$

ナル關係アル可キナリ．逆ニ又此關係アルトキハ，(1), (2) ノ二ツノ交點ハ相一致シ，(2) ハ (1) ノ切線トナル．故ニ (3) ハ (2) ガ (1) ニ切スルタメノ必要ニシテ且十分ナル條件ナリ．(3) ヲ (2) ニ代入スレバ

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2} \qquad (4)$$

ヲ得．コレマタ切線ノ一ノ公式ニシテ，切線ガ y 軸ニ平行ナル場合ヲ除クノ他，切點ノ座標ヲ知ラズシテ單ニソノ切線ノ x 軸トナス角ノミヲ知ルトキニ用ヒラル．右邊ノ複號ハ何レヲモ取リ得ルヲ以テ，x 軸ト同一ノ角ヲナス切線ハ二ツアルコトヲ知ルベシ．

モシ與ヘラレタ直線ガ y 軸ニ平行ナルトキハ，ソノ方程式ヲ

$$x=a$$

トス．之ト (1) トノ交點ノ縱線ハ

$$y^2=r^2-a^2$$

ニヨリテ定マル．コノ二根ガ相等シキタメニハ

$$a=\pm r \qquad (5)$$

ナラザル可ラズ．依テ此場合ノ方程式ハ

$$x=\pm r \qquad (6)$$

ナリ．

サテ (3) ニヨリテアラハサルヽ條件ハ，之ヲ書キ直サバ

$$r=\pm\frac{b}{\sqrt{1+m^2}} \qquad (7)$$

ニシテ，コノ右邊ハ丁度原點ヨリ直線 (2) ニ下セル垂線ノ長サナリ．故ニ一ノ直線ガ與ヘラレタル圓ニ切スルタメノ條件ハソノ圓ノ中心ヨリ直線マデノ距離ガ圓ノ半徑ニ等シキコトナリトイフヲ得ベシ．斯ク云ハバ (5) モ亦ソノ中ニ含マル．

此ノ性質ハ圓ノ幾何學的性質ニシテ，座標軸ノ取リ方ニハモトヨリ關係ナキモノナリ．ヨリテ一般ニ圓ヲ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

トシ，直線ヲ

$$c_1x+c_2y+c_3=0$$

トスルナラバ，此直線ガ切線ナルタメノ條件ハ

$$r=\pm\frac{c_1a+c_2b+c_3}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$$

即チ $$r^2(c_1^2+c_2^2)=(c_1a+c_2b+c_3)^2$$

ナルコトヲ知ルベシ．

24. 一點ヨリ引ケル切線.

圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (1)$$

トシ，今與ヘラレタル一點 $P(x_1, y_1)$ ヨリ此圓ニ引ケル切線ノ方程式ヲ求メントス．

求ムル切線ガ y 軸ニ平行ナル場合ハ $x_1=\pm r$ ナルトキニ限リ起ル．今暫ラク之ヲ除外シ，一般ニ求ムル切線ガ x 軸トナス角ノ正切ヲ m トスルトキハ，前節ノ公式ニヨリ，ソノ切線ノ方程式ノ形ハ

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2} \qquad (2)$$

トナルベシ．結局問題ハ此切線ガ與ヘラレタル點 (x_1, y_1) ヲ過ル様ニ m ノ値ヲ定ムルコトニ歸ス．ソレガ爲メニハ m ヲ次ノ方程式ヨリ求ムベシ，即チ

$$y_1=mx_1\pm r\sqrt{1+m^2} \qquad (3)$$

之ヲ變形シテ，

$$(y_1-mx_1)^2=r^2(1+m^2),$$

即チ

$$(x_1^2-r^2)m^2-2x_1y_1m+(y_1^2-r^2)=0 \qquad (4)$$

ヲ得. コヽニ一般ニ $x_1 \neq \pm r$ トセバ, (4) ハ m ニツイテノ二次方程式ニシテ, ソノ判別式ハ

$$4x_1^2y_1^2-4(x_1^2-r^2)(y_1^2-r^2)$$
$$=4r^2(x_1^2+y_1^2-r^2)$$

トナル. コヽニ $x_1^2+y_1^2-r^2$ ハ即チ點 P ノ圓 (1) ニ關スル冪ナルヲ以テ, P ガ圓外ニアルカ, 圓上ニアルカ, 圓内ニアルカニ從テ, 此判別式ハ正ナルカ, 零ニ等シキカ, 或ハ負ナリ, 從テマタ求ムル切線ハ夫々ノ場合ニ於テ, 實ニシテ相異ナル二本ノ直線トナルカ, 實ニシテ相合セル二本ノ直線トナルカ, 或ハ虚ナル二本ノ直線トナルベシ.

トニカク, (4) ノ二根ヲ m_1, m_2 トセヨ, 然ルトキハ此ノ各ハ (3) ノ式ノ複號ノ中ノ何レカヲ取レルモノヲ夫々滿足スベシ. 依テ m_1, m_2 ヲ (2) ニ代入シ, ソレゾレノ場合ニ適當ナル符號ヲ取ルナラバ, 求ムル處ノ切線ノ式ヲ得.

モシ $x_1=r$ 又ハ $x_1=-r$ ナラバ, 一ツノ切線ハ明カニ $x=r$ 又ハ $x=-r$ ナリ. 而シテ此場合ニハ (4) ハ m ニツイテ一次ノ式トナリ, m ノ値一ツヲ定ム. 之ヲ (2) ニ入レテ適當ナル符號ヲ取ヲバ他ノ一ノ切線ヲ得.

【例】 一點 (4, 7) ヨリ圓 $x^2+4^2=1$ ニ引ケル切線ノ方程式ヲ求ム. 半徑 1 ナルヲ以テ求ムル切線ノ方程式ヲ

$$y=mx\pm\sqrt{1+m^2}$$

トスルナラバ, (4, 7) ヲ通ルベキニヨリ

$$7=4m\pm\sqrt{1+m^2}$$

ナラザル可ラズ. 依テ

$$15m^2-56m+48=0$$

ナル方程式ヲ得. 之ヲ解ケバ

$$m=\frac{4}{3} \quad 又ハ \quad \frac{12}{5}$$

トナル. 之ヲ自乘セザル前ノ方程式ニ入レテ試ムルニ, $\frac{4}{3}$ ハ正號ノ場合, $\frac{12}{5}$ ハ負ノ場合ニ於テ之ヲ滿足ス. 依テ求ムル切線ノ方程式ハ

$$y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$$
$$y=\frac{12}{5}x-\frac{13}{5}$$

ノ二ツナリ.

然レドモ既ニ m_1, m_2 ヲ得タル後ハ必ズシモ溯リテ (2) ニ代入スルヲ要セズ. 寧ロ與ヘラレタル點 (x_1, y_1) ヲ過ギリ, x 軸トナス角ノ正切ガ m_1, m_2 ナル直線トシテ, 直チニ次ノ如クニ求ムル切線ノ方程式ヲ作ルヲ便ナリトス.

$$\begin{aligned} y-y_1&=m_1(x-x_1) \\ y-y_1&=m_2(x-x_1) \end{aligned} \qquad (5)$$

例ヘバ, 上記ノ例ナラバ

$$y-7=\frac{4}{3}(x-4)$$

$$y-7=\frac{12}{5}(x-4)$$

トスルガ如シ.

(5) ノ表ハス二ツノ方程式ハ, 之ヲ各一邊ニ集メテ後, 相乘ジテ一ツノ式ニマトムルトキハ

$$\{y-y_1-m_1(x-x_1)\}\{y-y_1-m_2(x-x_1)\}=0$$

即チ

$$(y-y_1)^2-(m_1+m_2)(x-x_1)(y-y_1)+m_1m_2(x-x_1)^2=0.$$

コヽニ m_1+m_2, m_1m_2 ノ値ヲ方程式 (4) ノ係數ニヨリテ表ハシテ代入スルトキハ

$$(x_1^2-r^2)(y-y_1)^2-2x_1y_1(x-x_1)(y-y_1)$$
$$+(y_1^2-r^2)(x-x_1)^2=0. \qquad (6)$$

コレ求ムル切線ノ方程式ナリ. 更ニ他ノ形ニ變形スル爲メニ (6) ニ於テソノ中央項ヲ右邊ニ移シ, 且兩邊ニ

$$y_1^2(y-y_1)^2+x_1^2(x-x_1)^2$$

ヲ加フレバ

$$(x_1^2+y_1^2-r^2)\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}$$
$$=\{x_1(x-x_1)+y_1(x-y_1)\}^2. \qquad (7)$$

サテ $x_1^2+y_1^2-r^2$, $x_1x+y_1y-r^2$ ヲ夫々 u, v, w ニテ表ハ

サバ, (7) ハ

$$u(u+v-2w)=(w-u)^2$$

トナル, コレヲ計算シテ

$$uv=w^2$$

即チ

$$(x_1^2+y_1^2-r^2)(x^2+y^2-r^2)=(x_1x+y_1y-r^2)^2 \qquad (8)$$

ヲ得. 是即求ムル切線ノ方程式ノ他ノ形ナリ.

扨テ特別ノ場合トシテ $x_1=\pm r$ ナルトキハ, (4), (5) ニヨリテ, 求ムル切線ノ方程式ハ

$$x\mp r=0$$

及ビ
$$y-y_1=\pm\frac{y_1^2-r^2}{2ry_1}(x\mp r)$$

トナル. ト之ヲマター一ツニマトムレバ,

$$\mp 2ry_1(x\mp r)(y-y_1)+(y_1^2-r^2)(x\mp r)^2=0$$

ニシテ, 丁度 (6) ニ於テ $x_1=\pm r$ ト置キタルモノニ當ル. 之ヨリ順次ニ變化スレバ矢張 (8) ニ於テ $x_1=\pm r$ ト置キタルモノヲ得ベシ. サレバ (8) ハスベテノ場合ヲ通ジテ用ヒラルヽモノナリ. (6) 及ビ (8) ハ屢々應用セラル.

前ニ擧ゲタル例 (24項) ニ公式 (8) ヲ應用スルトキハ

$$64(x^2+y^2-1)=(4x+7y-1)^2$$

即チ
$$48x^2-56xy+15y^2+8x+14y-63=0$$

ヲ得. 之ヲ分解セバ

$$(4x-3y+5)(12x-5y-13)=0$$

トナル.

圓ノ方程式ヲ一般ニ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

トシ, 一點 $P(x_1, y_1)$ ヨリ之ニ引ケル切線ノ方程式ヲ求メンニハ, 先ヅ平行移動ニヨリテ原點ヲ (a, b) ニ移シ, 圓ノ方程式ヲ

$$X^2+Y^2=r^2$$

トナシ, P ノ座標ヲ (x_1-a, y_1-b) トシ, コヽニ於テ (8) ヲ應用シテ, 求ムル切線ノ新軸ニ關シテノ方程式

$$\{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2\}(X^2+Y^2-r^2)$$
$$=\{(x_1-a)X+(y_1-b)Y-r^2\}^2$$

ヲ得. 更ニ之ヲ元ノ軸ニ戻ストキハ

$$\{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2\}\{(x-a)^2+(y-b)^2-r^2\}$$
$$=\{(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)-r^2\}^2 \quad (9)$$

トナル.

25. 三點ヲ過ル圓.

直交軸ニ關シテ與ヘラレタル三ツノ相異レル實點ヲ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ トシ, 此三點ヲ過ルベキ圓ヲ

求メントス.

圓ノ方程式ハ一般ニ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad (1)$$

ト置クコトヲ得ベク, 之ガ與ヘラレタル三點ヲ過ルモノトセバ, g, f, c ハ次ノ方程式ヲ同時ニ滿足スベキナリ,

$$\begin{aligned} &x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \\ &x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0 \quad (2) \\ &x_3^2+y_3^2+2gx_3+2fy_3+c=0 \end{aligned}$$

此三ツノ方程式ハ g, f, c ニ關シテ聯立一次方程式ナレバ, 係數ノ行列式

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ガ零ナラザル限リ, 即チ幾何學的ニ云ハヾ三點 P, Q, R ガ一直線上ニアラザル限リ, 必ズ確定セル一組ノ實根ヲ有スベシ. 而シテソノ根ヲ (1) ノ g, f, c ノ處ニ代入スルトキハ, 求ムル圓ノ方程式ヲ得. ソノ圓ハ必ズ實圓ナルベシ, 之ヲ證明スルニハ,

$$g^2+f^2-c>0$$

ナルコトヲ示セバヨシ. 然ルニ (2) ノ第一式ヨリシテ

$$(x_1+g)^2+(y_1+f)^2=g^2+f^2-c$$

ヲ得ルニヨリ，g^2+f^2-c ハ負ナルコトナシ．モシ又之ガ零ナラバ左邊ノ各項ガ別々ニ零ナヲザル可ラザルニヨリ，$g=-x_1, f=-y_1$ ヲ得．然ルニ同様ニ (2) ノ第二式ヲ取扱ヘバマタ $g=-x_2, f=-y_2$ ヲモ得ベキニヨリ P, Q ハ同一ノ點トナリ，假定ニ反ス．故ニ結局 g^2+f^2-c ハ正ナヲザル可ラズ．

故ニ一直線上ニアラザル三ツノ相異レル點ヲ過ル圓ハ常ニ一ツアリ，且一ツニ限ル．ソノ方程式ハ，(1) 及ビ (2) ヨリ g, f, c ヲ消去スルコトニヨリ求メラル．即チ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

今コヽニ於テ

$$x_1^2+y_1^2=p, \quad x_2^2+y_2^2=q, \quad x_3^2+y_3^2=r, \quad \begin{vmatrix} p & y_1 & 1 \\ q & y_2 & 1 \\ r & y_3 & 1 \end{vmatrix}=A,$$

$$\begin{vmatrix} p & x_1 & 1 \\ q & x_2 & 1 \\ r & x_3 & 1 \end{vmatrix}=B, \quad \begin{vmatrix} p & x_1 & y_1 \\ q & x_2 & y_2 \\ r & x_3 & y_3 \end{vmatrix}=C, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=D$$

ト置カバ，(3) ハ

$$D(x^2+y^2)-Ax+By-C=0$$

トナル．

モシ P, Q, R ノ三點ガ一直線上ニアルトキハ，D=0 ナルヲ以テ，(3) ハ

$$-Ax+By-C=0 \qquad (4)$$

トナリ，コヽニ A 及ビ B ハ決シテ同時ニ零トナルコトナシ．

故ニ (4) ハ x 及ビ y ニツイテノ一次式ニシテ一ノ直線ヲアラハス．而シテ此ガ三點 P, Q, R ヲ過ルベキコトハ (3) ノ形ヨリシテ明カナリ．

次ニ四ツノ相異レル點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$ ガ同一圓周上ニアリトセバ，ソノ座標ノ間ニハ，(3) ニヨリテ，次ノ關係アルベシ，

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 3 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

逆ニ四ツノ相異レル點ノ間ニ (5) ナル關係ガ成立スルトキハ，ソレラノ點ハ同一圓周上ニアルカ，又ハ一直線上ニアルベシ．

26. 二點ヲ過ギル圓.

直交軸ニ關シテ相異レル二定點ヲ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ トス. 今 P 及ビ Q ヲ通ズル一ツノ圓ノ方程式ヲ

$$S=0$$

トシ, P 及ビ Q ヲ結ビ付クル直線ノ方程式ヲ

$$T=0$$

トセヨ. 然ルトキハ P, Q 二點ヲ通ズル圓ノ方程式ハ必ズ

$$S-kT=0 \qquad (1)$$

ナル形ニヨリテ表ハスコトヲ得ベシ, コヽニ k ハ適當ナル常數ヲ示ス.

何トナレバ, (1) ニ於テ x^2 ト y^2 トノ係數ハ S ニ於ケルママナレバ互ニ相等シカルベク, 又 xy ノ項ハ存在セザルヲ以テ, (1) ハ一ノ圓ヲアラハスベシ. 而シテ P 及ビ Q ノ座標ハ同時ニ $S=0$, $T=0$ ヲ滿足スルヲ以テ又 (1) ヲモ滿足ス. 即チ (1) ハ P ト Q トヲ過ル圓ナリ. 扨一般ニ P 及ビ Q ヲ通ズル圓ハ直線 PQ 上ニアラサル他ノ一點 P ヲ通ゼシムルコトニヨリテ確定ス. 然ルニ k ヲ適當ニ定ムルトキハ, 常ニ (1) ヲシテ與ヘラレタル $R(x_3, y_3)$ ヲ通ゼシムルコトヲ得ベシ. 何トナレバ, R ハ直線 PQ 上ニアラザルヲ以テ, ソノ座標ヲ T ノ中ニ入レテ得ル値ハ零ニアラズ, 依テ之ヲ T′ トシ, 又ソノ座標ヲ S ニ入レタルモノヲ S′ トスルトキハ,

$$S'-kT'=0$$

ナル様ニ k ヲ定メ得レバナリ.

故ニ (1) ハ P, Q 二點ヲ過ル任意ノ圓ヲアラハシ得ル方程式ナリ.

サテ線分 PQ ヲ直徑トスル圓ノ方程式ヲ考フルニ, 明ラカニ

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4},$$

即チ $\quad x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0$

ナリ, 之ヲ $S=0$ ニ取リ, 又 P, Q 二點ヲ過ル直線ノ方程式

$$(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+x_1y_2-x_2y_1=0$$

ヲ $T=0$ ニ取ルトキハ, **一般ニ P ト Q トヲ過ル圓ノ方程式ハ**

$$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2$$
$$-k\{(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+x_1y_2-x_2y_1\}=0$$

ニヨリテ表ハサル, コヽニ k ハ一ノ常數ナリ.

又 P, Q ヲ過ル二ツノ相異レル圓ノ方程式ヲ

$$S_1=0, \qquad S_2=0$$

トスルナラバ P, Q 二點ヲ過ル任意ノ他ノ圓ノ方程式ハ

$$mS_1+nS_2=0 \qquad (2)$$

ナル形ニヨリテ表ハスコトヲ得, コヽニ m, n ハ何レモ常數ナリトス. 此ヲ證明スルニハ上ニ (1) ニ對シテ用ヒタルト同様ノ論法ニヨルコトヲ得ベシ.

m 又ハ n ノ何レカヾ零ナルトキハ (2) ハ元ノ二ツノ圓ノ中ノ何レカト一致ス. ソノ他ノ場合ニハ (2) ノアラハス圓ハ單ニ m ト n トノ比ノミニヨリテ決定セラルヽニヨリ, (2) ノ代リニ或ハ

$$S_1+kS_2=0$$

トシ, コヽニ k ヲ一ツノ常數トスルモ可ナリ.

(2) 又ハ (3) ニ於テ, m, n 或ハ k ノ特別ノ値ニ對シテハ丁度二次ノ項 x^2 及ビ y^2 ガ消去スルコトアルベシ. ソノ時ニ限リ (2) 又ハ (3) ハ一ノ直線ヲアラハスコトヽナル.

問　題

此處ニ揭グル問題ニ於テ座標軸ヲ明記セザルモノハスベテ直交軸ナリト考ヘテ解クベシ.

1. 原點ニ於テ x 軸又ハ y 軸ニ切シ, 半徑 r ナル圓ノ方程式ヲ求ム.

2. x 軸ト y 軸トニ切シ, 半徑 r ナル圓ノ方程式ヲ求ム.

3. 直線 $y=mx+n$ ニ平行ニシテ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ切スル直線ノ方程式ヲ求ム.

4. 點 $(-3, 8)$ ヨリ圓 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ ニ引ケル二ツノ切線ノ方程式ヲ求ム.

5 x 軸ト 45° ノ角ヲナシ, 圓 $(x-1)^2+(y-3)^2=18$ ニ切スル直線ノ方程式, 及ビソノ切點ノ座標ヲ求ム.

6. 直線 $3x+4y-5=0$ ハ圓 $(x-)^2+(y-6)^2=25$ ニ切スルコトヲ證明シ, 且ソノ切點ノ座標ヲ求メヨ.

7. 圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ノ上ニアル二點 $P(x_1 y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ヲ結ビ付クル直線ノ方程式ハ

$$(x-x_2)(x_1+x_2+2g)+(y-y_1)(y_1+y_2+2f)=0$$

又ハ

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=x^2+y^2+2gx+2fy+c$$

ニヨリテ表ハサルヽコトヲ證明シ, 之ヨリシテ P ニ於ケル切線ノ方程式ヲ導ケ.

8. 二點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ヲ直徑ノ兩端トスル圓ノ

方程式ハ

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

ナルコトヲ示セ.

9. 二定點ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求ム.

10. 二ツノ圓 $x^2+y^2=10$, $x^2+y^2-5x+y+4=0$ ノ交點ト, 點 (2, 3) トヲ通ズル圓ノ方程式ヲ求ム.

11. 一ノ三角形ガモシ或ル圓ニ關スル極三角形ト見做シ得ルナラバ, ソノ圓ノ中心ハ三角形ノ垂心ナルベキコトヲ證明セヨ.

12. $x^2+y^2-2kx+c=0$ ニ於テ, c ヲ一定數トシ, k ヲ種々ノ値ニ變ズルトキ, 此方程式ノアラハス圓ノ一群ハ悉ク或ル定マレル一ツノ實又ハ虚ナル點ヲ過ルコトヲ示セ.

カクノ如ク二ツノ定レル實又ハ虚ナル點ヲ過ル圓ノ一群ヲ總稱シテ**圓束**ト云フ.

13. 正三角形 ABC ノ頂點 A ヲ原點ニ, AB ノ方向ヲ x 軸ノ正ノ方向ニトリタル直交軸ニ關シコノ三角形ノ外接圓ノ方程式ヲ求メヨ. (C ノ縦線ハ正トシテ計算セヨ).

14. 二ツノ圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$, $(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$ ノ共通弦ノ長サヲ求メヨ.

15. 二ツノ直線 $2x+2y-9=0$ ト $x+y-7=0$ トハ, 圓 $(x-1)^2+(y-2)^2=3$ ニ關シテ共軛ナルコトヲ示セ.

16. 一定點 P ヲ通ズル任意ノ直線ガ, 與ヘラレタル圓ト交ハル點ヲ A, B トス. 弦 AB ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

17. 三角形ノ底邊ノ大サ及ビ位置, 及ビ頂角ノ大サガ與ヘラレタルトキ, ソノ頂點ノ軌跡如何.

18. 原點ヨリ圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ニ引ケル二ツノ切線ノ方程式ヲ求ム.

19. 二定點 A, B ヲ通ル任意ノ圓ニ一定點 P ヨリ引キタル切線ノ切點ノ軌跡ガ圓トナルニハ P ノ位置如何.

20. $P(x_1, y_1)$ ヲ通ジ, 圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ切スル二ツノ直線ノ方程式ハ

$$(x_1y-y_1x)^2=r^2\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}$$

ニヨリテ表ハシ得ルコトヲ示セ.

21. 二定點ヲ過ル任意ノ圓ト一定圓トノ交點ヲ P, Q トス. 直線 PQ ハ一定點ヲ通ズルコトヲ證明セヨ.

22. $x^2+y^2-2x-6y+9=0$, $x^2+y^2+6x-2y+1=0$ ノ共通切線ノ方程式ヲ求ム.

23. 二ツノ圓

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$$

及ビ
$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$$

ノ中心ヲ夫々 O_1, O_2 トシ，交點ノ一ツヲ A トス．角 O_1AO_2 ヲ ω トスルトキハ，$\cos\omega$ ノ値如何．

此角ヲ名ケテ二ツノ圓ノ**交角**トイフ．交角ガ 0° ナルトキハ兩圓ハ互ニ**內切ス**トイヒ，交角ガ 180° ナルトキハ**外切ス**トイフ．

24. 二ツノ圓ヲ

$$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0$$

及ビ
$$x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0$$

トシ，ソノ交角ヲ ω トスルトキハ

$$c_1+c_2+2r_1r_2\cos\omega-2a_1a_2-2b_1b_2=0$$

ナルコトヲ示セ．但シ r_1, r_2 ハ兩圓ノ半徑トス．

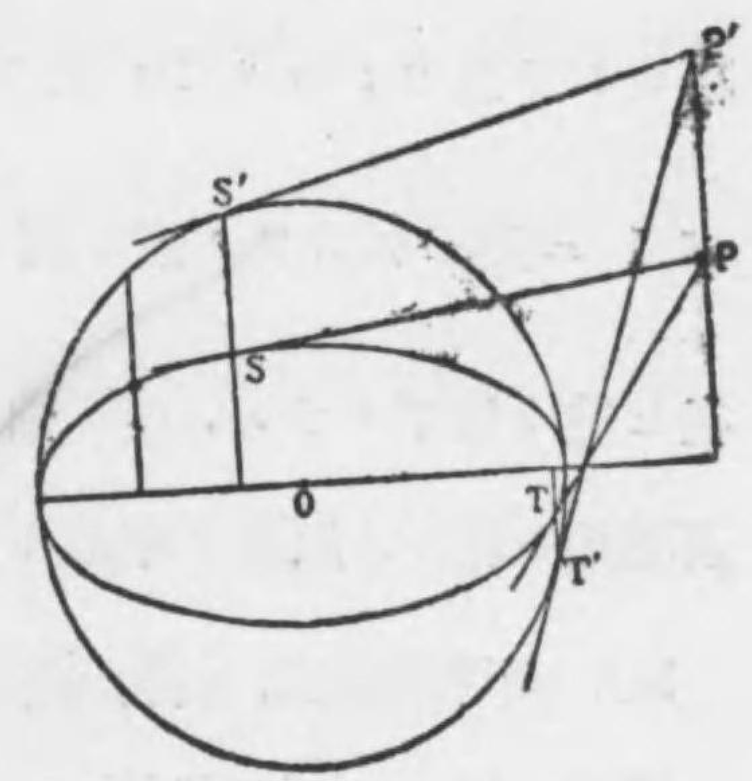
第四章

橢圓

27. 橢圓及ソノ方程式

圓ヲ一ツノ直徑ヲ軸トシテ平行投影シテ得ル圖形ヲ橢圓ト名ヅク．

第二十九圖



圓ノ方程式ヲ $x^2+y^2=a^2$ トシ軸ニトリタル直徑ヲ X 軸トス．變換式 (4) ニ於テ k ノ代リニ $\frac{b}{a}$ トオク．然ルトキ $x=x'$, $y=\frac{a}{b}y'$．之ヲ圓ノ方程式ニ代入シ $x'^2+\frac{a^2}{b^2}y'^2=a^2$．即チ橢圓ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ナリ．X 軸ト Y 軸トヲ交換スレバコノ式ハ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

トナル．故ニ X 軸ト Y 軸トヲ適當ニ選ベバ $a>b$ ナリト假定スルヲ得．依テ $2a$ 及ビ a ヲ**長徑及長半徑**，又 $2b$ 及 b ヲ夫々**短徑及短半徑**ト名ヅク．

28. 橢圓ノ形．

橢圓ノ形ハソノ定義ヨリ略々推測スルヲ得．先ヅ之ハ一ツノ閉ヂタル凸曲線ナリ．且 X 軸及 Y 軸ニツキ對稱ニシテ且ソレヨリ $2a$ 及 $2b$ ナル長サヲキリトル．$\frac{b}{a}$ ガ 1 ニ近ヅケバソノ形ハ圓ニ近ヅキ又 $\frac{b}{a}$ ガ小トナルニ從ヒ益々扁平ニナル．X 軸及 Y 軸ヲコノ曲線ノ**長軸**及**軸短**ト稱シ，原點ヲ**中心**ト名ヅク．

29. 平行投影ヨリ得ル橢圓ノ性質．

橢圓ハ圓ヨリ平行投影ニヨリ得ラルヽヲ以テ，圓ノ性質ノ中，平行投影ニヨリ變ラザルモノハ總テ橢圓ノ場合ニモ成立スベシ．

例 1. 橢圓外ノ一點ヲ過リコレニ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得． ソノ方法ハ次ノ如シ．(第二十九圖參照)．

橢圓ノ長徑ヲ AB トシ與ヘラレタル點ヲ P トス．平行投影ニヨリ橢圓ヲ AB ヲ直徑トセル圓ニ直スコトヲ得．コノ場合ニ P ハ新シキ點 P′ ニ來ル．P′ ヨリ圓 AB ニ切線 P′S′, P′T′ ヲ引ク．更ニ逆ノ平行投影ニヨリ圓ヲ橢圓ニ直セバ，P′S′, P′T′ ハ P ヨリ橢圓ニ引キタル切線 PS, PT ニカハル可シ．

例 2. 橢圓ノ面積ハ $ab\pi$ ナリ．コレハ圓ノ面積 $a^2\pi$ ノ $\frac{b}{a}$ 倍ナルコトヨリ明ナリ．

例 3. 橢圓上ノ一點 P ヲ短軸ノ兩端 C, D ニ結ビ，長軸ト CP, DP トノ交點ヲ E, F トスレバ OE, OF$=$OA^2 ナリ．但 O ハ橢圓ノ中心，OA ハソノ長半徑トス．

學生ハコノ定理ガ圓ニ於テ成立スルコトヲ證明シ，次ニ之ガ平行投影ヲ施シタル後ニモ成立スルコトヲ驗ス可シ．

30. 橢圓ノ焦點．

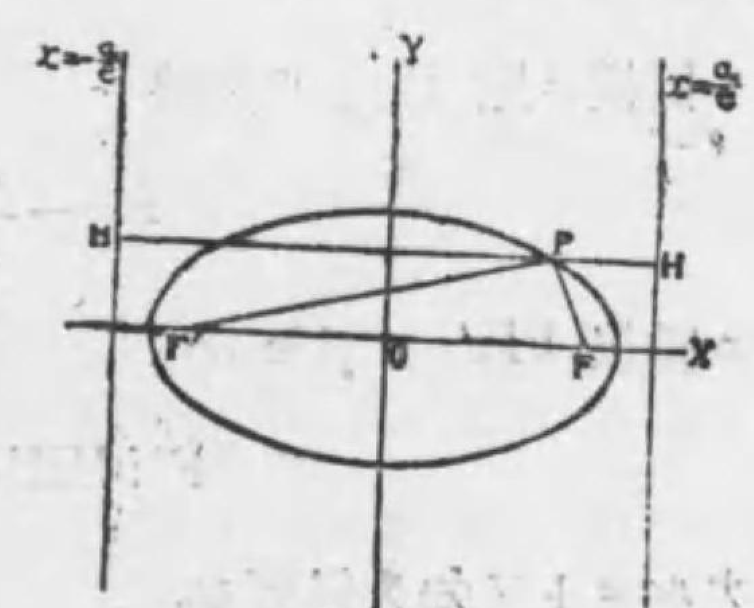
短軸ノ一端 C ヲ中心トシ a ヲ半徑トスル圓ト長軸 AB トノ交點ヲ F 及 F′ トセヨ．然ルトキ F 及 F′ ヲコノ橢圓ノ**焦點**ト云フ．

橢圓ノ方程式ヲ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ トス．然ルトキハ OF 及 OF′ ノ長サハ $\sqrt{a^2-b^2}$ ナリ．今 e ヲ以テ $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ ヲ表ハシ，之ヲ橢圓ノ**離心率**ト名ヅク．然ルトキ F 及 F′ ノ座標ハ

$(ae, 0)$ 及 $(-ae, 0)$　(2)

ナリ．

第三十圖



橢圓上ノ一點 $P(x_1, y_1)$ トソノ焦點トノ距離ヲ求メン．

$$\mathrm{PF}=\sqrt{(x_1-ae)^2+y_1^2}.$$

然ルニ (x_1, y_1) ハ楕圓上ニアルヲ以テ $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ ナリ.

故ニ $$\mathrm{PF}=\sqrt{x_1^2+a^2e^2-2aex_1+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_1^2}$$

$$=\sqrt{e^2x_1^2+a^2-2aex_1}$$

$$=a-ex_1.$$ $(a^2e^2=a^2-b^2,\ 1-\dfrac{b^2}{a^2}$ ナルコトニ注意). コレニヨレバ, 點 P ヨリ直線

$$x=\frac{a}{e} \tag{3}$$

ニ下シタル垂線ヲ PH トスレバ

$$\mathrm{PH}=\frac{a}{e}-x_1=\frac{\mathrm{PF}}{e},$$

從テ $$\mathrm{PF}:\mathrm{PH}=e:1 \tag{4}$$

故ニ楕圓ハ一點及一直線ヘノ距離ノ比ガ一定ナルガ如キ點ノ軌跡ナリト云フコトヲ得.

同様ニ點 P ヨリ直線

$$x=-\frac{a}{e} \tag{3'}$$

ニ垂線 PH′ ヲ下セバ

$$\mathrm{PF'}:\mathrm{PH'}=e:1 \tag{4'}$$

ナルコトヲ知リ得可シ.

直線 (3) 及 (3′) ヲ夫々 **F 及 F′ ニ屬スル準線**ト云フ.

又 $\mathrm{HH'}=2\dfrac{a}{e}$ ナルヲ以テ

$$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=\mathrm{HH'}\times e=2a \tag{5}$$

ナリ. 依テ楕圓ハ又二ツノ焦點ヨリノ距離ノ和ガ $2a$ ニ等シキ點ノ軌跡ナリ.

例 4. 相交ル二ツノ圓 O 及 O′ ノ一方ニ外接シ他方ニ内接スル圓ノ中心 P ノ軌跡ヲ求ム.

圓 O 及 O′ ノ半徑ヲ r_1 及 r_2 トシ動圓ノ半徑ヲ r トス. 例ヘバ動圓ガ圓 O ニ内接シ且圓 O′ ニ外接ストセバ

$$\mathrm{OP}=r_1-r,\quad \mathrm{O'P}=r_2+r$$

從ツテ $$\mathrm{OP}+\mathrm{O'P}=r_1+r_2=\text{一定}.$$

故ニ P ノ軌跡ハ點 O 及 O′ ヲ焦點トスル楕圓ナリ.

例 5. 楕圓上ノ一點 T ニ於テ切線 LM ヲ引ケバ $\angle\mathrm{FTM}=\angle\mathrm{F'TL}$ ナリ.

切線上ニ T ニアラザル一點 L ヲトリ之ヲ F, F′ ト結ブ. LF′ ト楕圓トノ交點ヲ P トス. 然ルトキハ

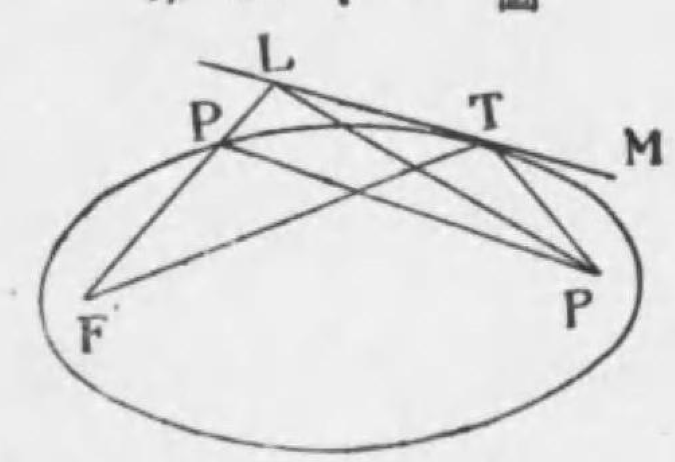
$$\mathrm{F'L}+\mathrm{FL}>\mathrm{F'P}+\mathrm{FP}=\mathrm{F'T}+\mathrm{FT}.$$

即 T ハ LM 上ニテ F 及 F′ ヘノ距離ノ和ガ極小ナルガ如キ點ナリ. カヽル點ニ對シテハ

$$\angle\mathrm{F'TL}=\angle\mathrm{FTM}$$

ガ成立ス.

第三十一圖



コノ性質ヨリシテ, モシ一ツノ焦點ニ發光體ヲ置カバ之ヨリ發シタル光ハ楕圓周ニ反射シタル後悉ク他ノ焦點ニ集ルベシ. 是レ焦點ノ名ノ起リシ所以ナリ.

吾人ガ住ム地球ガ太陽ノ周リヲ過ル軌道ハ略々楕圓ニ

シテ，太陽ハソノ一ツノ焦點ノ位置ニアリ．

焦點ノ性質ヲ用ヒ橢圓ヲ機械的ニ畫ク事ヲ得． 即チ F 及 F′ ニ針ヲ立テ，長サ $2a$ ナル糸ノ兩端ヲコノ針ニ結ビツケ，鉛筆ニテコノ糸ヲ張リツヽ紙面ニ沿ツテ動カセバ可ナリ．

問 1. 橢圓 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ ノ離心率及焦點ヲ求ム．

問 2. $x^2+xy+y^2=10$ ハ橢圓ナルコトヲ示セ．（軸ヲ 45° 回轉シテ見ヨ）．

問 3. 橢圓 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ ト直線 $x+y=3$ トノ交點ヲ求ム．

第五章

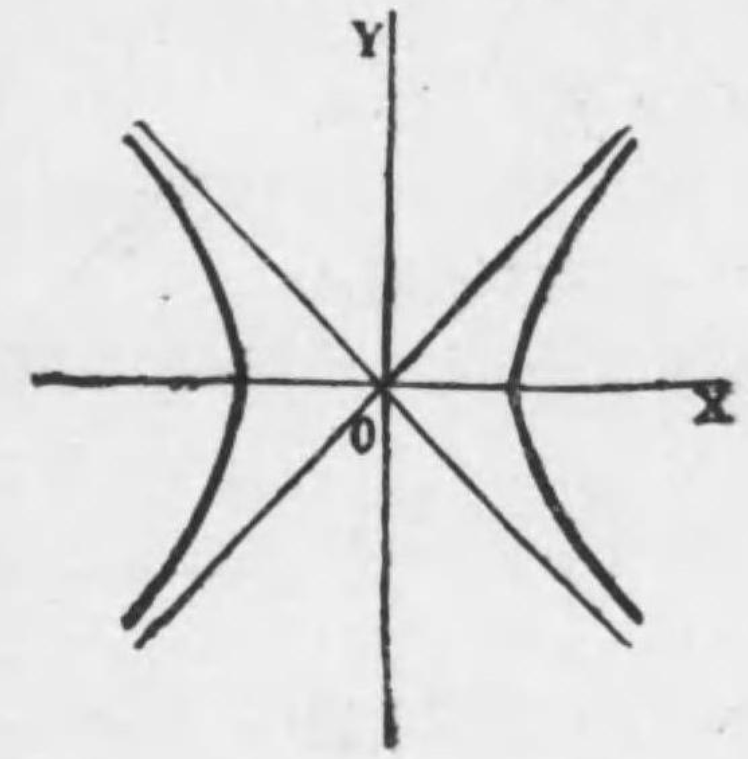
双曲線

31. 直角双曲線．

曲線 $xy=k$ ノぐらふヲ**直角双曲線**ト名ヅク． 第十七節ニヨリ，コノ曲線ヲ 45° 回轉スレバソノ方程式ハ

$$x^2-y^2=a^2 \tag{1}$$

第三十二圖



ナル形トナル．而シテコノ位置ニ於テハ直角双曲線ハ X 軸及 Y 軸ニツキ對稱ニシテ，直角ニ交ル二直線 $x+y=0$, $x-y=0$ (モトノ位置ニ於テノ X 軸及 Y 軸ノ間ニアル二ツノ枝ニ分レ，左右無限ニ擴ガルコトヲ知ル． コノ二直線ヲ**漸近線**ト云フ．

例 1. 一直線ガ直角双曲線及ソノ漸近線ヲソレゾレ C, D 及 A, B ニテ切レバ CA=BD ナリ．

C 及 D ヨリ漸近線ニ垂線 CE, CF 及 DE′, DF′ ヲ下ス． 然ルトキ漸近線ヲ X 軸及 Y 軸トシ双曲線ヲ $xy=k$ トスレバ

$\text{CE}:\text{CF}=\text{DE}':\text{DF}'=k.$

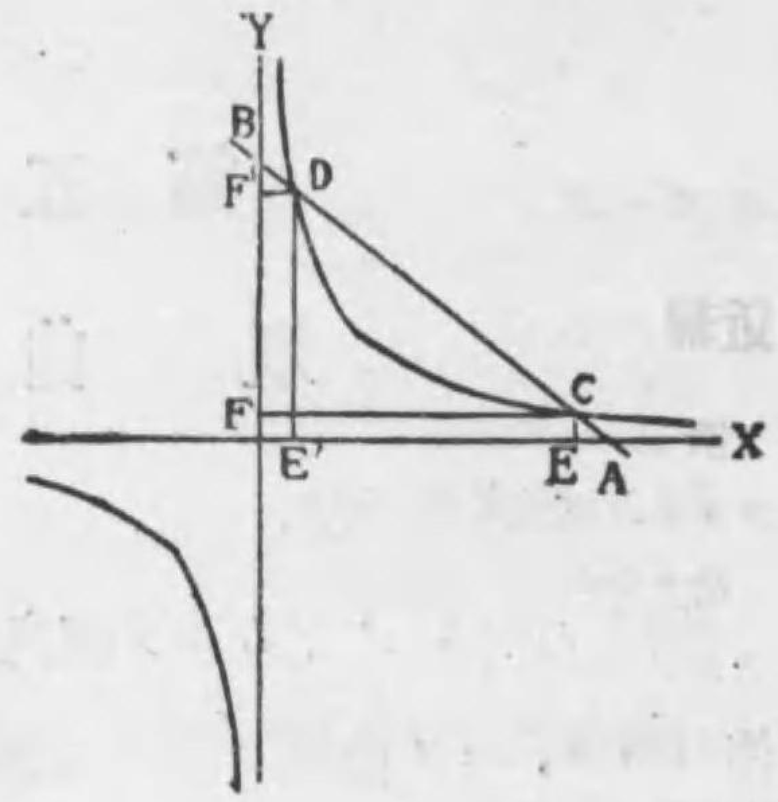
従ツテ　$\text{DE}':\text{CE}=\text{CF}:\text{DF}'.$

依テ　$\text{DB}:\text{BC}=\text{AC}:\text{AD}.$

従ツテ　$\text{BD}:\text{DC}=\text{AC}:\text{DC}.$

故ニ　$\text{BD}=\text{AC}.$

第三十三圖



32. 一般双曲線.

直角双曲線 $x^2-y^2=a^2$ ヲ X 軸ヲ軸トシテ平行投影シタルトキ得ラルヽ曲線ヲ**双曲線**ト名ヅク.

平行投形ノ式ヲ

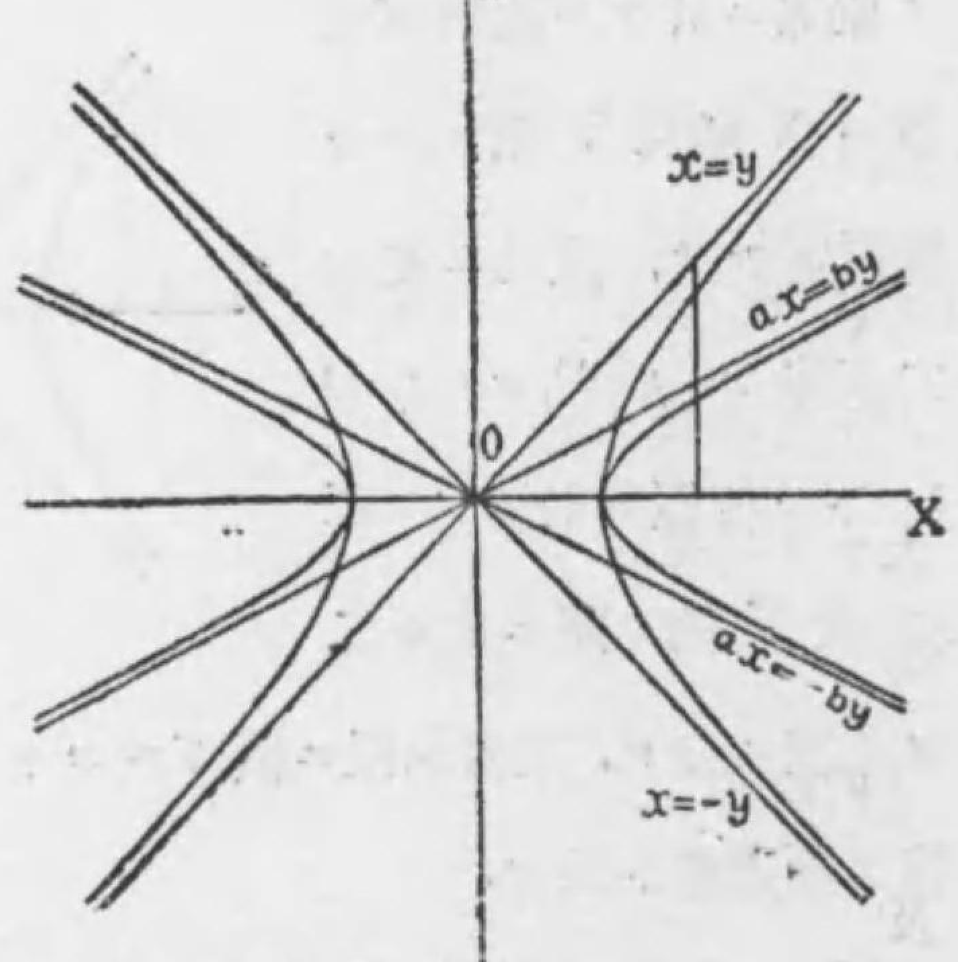
$x'=x,\ y=\frac{b}{a}y$ トスレバ直角双曲線ノ方程式ハ

$$x'^2-\left(\frac{a}{b}y'\right)^2=a^2$$

トナル. 即双曲線ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (2)$$

第三十四圖



ナリ. 又コノ平行投影ニヨリ $x+y=0$ 及 $x-y=0$ ハ夫々

$$\left.\begin{aligned} ax+by=0 \\ ax-by=0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ニカハル. コノ場合ニモ此等ノ二直線ヲコノ双曲線ノ**漸近線**ト云フ.

例 2. 前項例 1 ノ性質ハ平行投影ニヨリ變ラザルヲ以テ一般双曲線ニツキテモ成立ス.

依テ今例ヘバ双曲線上ノ一點 P ニ於テ之ニ切線ヲ引クニハ次ノ如ク考フレバ可ナリ. 例 1 ニテ C≡D≡P ト考フレバ, P ニ於ケル切線ノ二ツノ漸近線間ノ部分ハ, P ニヨリテ二等分セラル. 故ニ P ヲ過ル直線ヲ引キソノ漸近線間ノ部分ガ P ニヨリ二等分セラルヽ如クスレバ之ハ求ムル切線ナリ.

33. 双曲線ノ焦點.

前章三十節ノ例ニ倣ヒテ, 吾人ハ双曲線ノ焦點ナルモノヲ定メソノ性質ヲ求ムルヲ得.

$\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=e$ ヲ双曲線ノ**離心率**ト名ヅク. コレハ橢圓ノトキト異リテ常ニ 1 ヨリ大ナリ. 橢圓ノトキト同様ニ

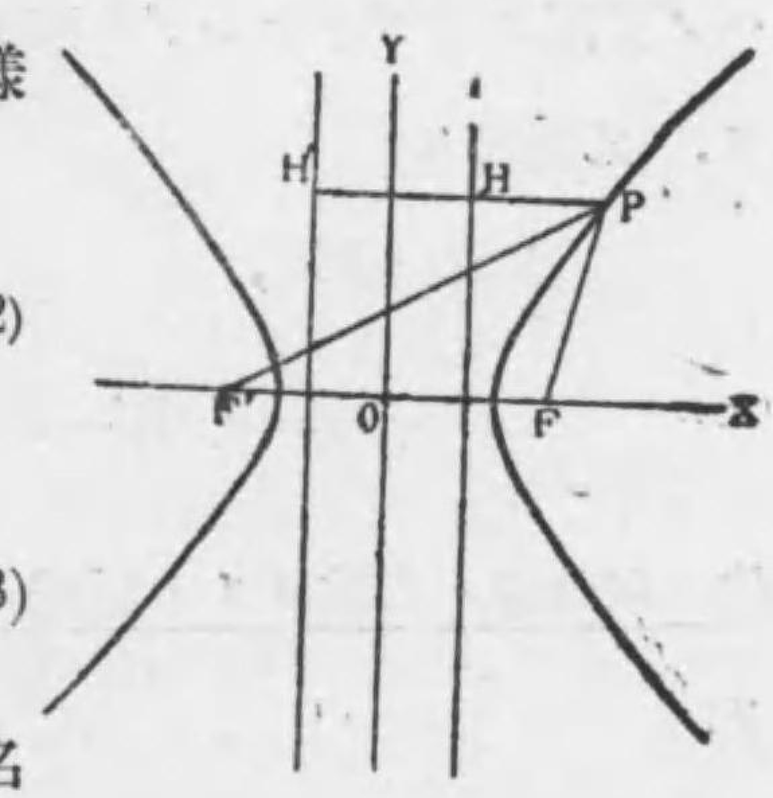
$$\text{F}(ae,0),\ \text{F}'(-ae,0) \quad (2)$$

及

$$x=\frac{a}{e},\quad x=-\frac{a}{e} \quad (3)$$

ヲソレソレ**焦點**及**準線**ト名

第三十五圖



ヅク. e ハ 1 ヨリ大ナルヲ以テ, コノ場合ニハ焦點ハ二ツノ準線ノ外側ニアリ.

今双曲線上ノ一點 $P(x_1\ y_1)$ ト焦點 F トノ距離ヲ求メン.

$$\mathrm{PF}=\sqrt{(x_1-ae)^2+y_1^2}$$

$$=\sqrt{x_1^2+a^2e^2-2aex_1+b^2+\frac{b^2}{a^2}x_1^2}$$

$$=\sqrt{x_1^2e^2+a^2-2aex_1}$$

$$=ex_1-a.$$

P ヨリ (3) ヘノ垂線ヲ PH 及 PH′ トスレバ

$$\mathrm{PH}=x_1-\frac{a}{e},\ \mathrm{PF}=e\mathrm{PH}.$$

即双曲線モ亦楕圓ノ如ク一點ト一直線ヘノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ナリ. 但シ楕圓ノ場合ニハ其上ノ點ヨリ一直線ヘノ距離ノ方ガ小ナレドモ双曲線ノ場合ニハソノ反對ナリ. 又同様ニ

$$\mathrm{PF}'=e\mathrm{PH}',$$

$$\mathrm{PF}'\sim\mathrm{PF}=e(\mathrm{PH}'\sim\mathrm{PH})=\frac{2a}{e}\times e=2a \qquad (4)$$

依テ双曲線ハ二點ヨリノ距離ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ナリ.

カクノ如ク楕圓ト双曲線トハソノ形ハ甚ダ異ナレドモソノ性質ハ大イニ類似セルヲ認ムベシ.

例 3. 前節例 5 ト同様ニシテ, 双曲線上ノ任意ノ點 T ニテ切線 LM ヲ引ケバ $\angle F'TL=\angle FTM$ ナルコトヲ證明シ得可シ. サレバ一ツノ焦點 F′ ニ一ツノ發光點ヲ置ケバ, コレヨリ發シタル光ガ双曲線ノ何レカ一ツノ枝ヨリ反射スルトキ, コノ反射光線ヲ逆ニ延長セバ悉ク他ノ焦點 F ヲ通過ス可シ. 即 F ハ所謂虛焦點ヲナス.

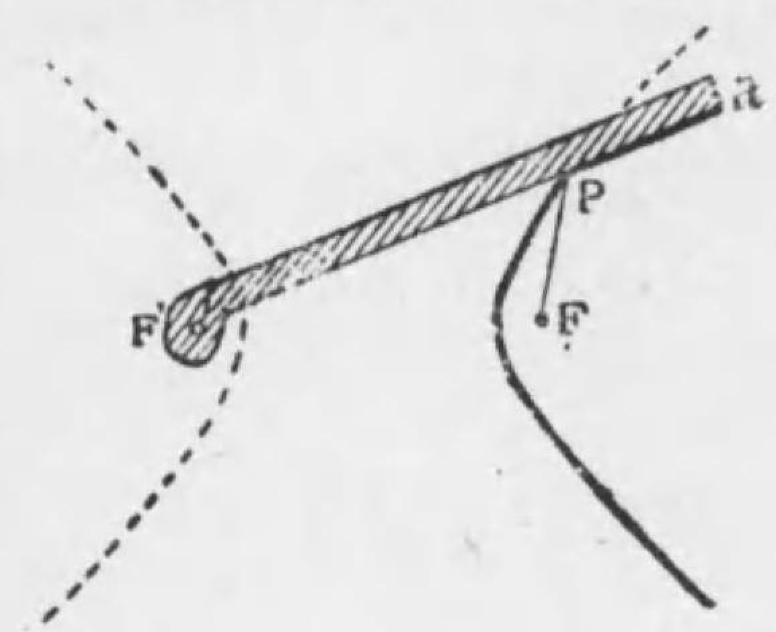
例 4. 楕圓ノトキノ例ニナラヒ双曲線ヲ機械的ニ畫クコトヲ得. 定規 F′R ハ定點 F′ ノマハリニ紙面上ニ回轉シ得ル如ク裝置シ F′R ヨリ $2a$ 短キ糸ヲ取リソノ一端ヲ定點 F ニ, 他ノ一端ヲ定規ノ端 R ニ結ブ. 鉛筆ノ先端 P ヲ F′R ニ接シ糸ヲ張ルヤウニシツヽ動カストキコレハ双曲線ノ一枝ヲ畫クベシ.

問 1. (3, 0), (−3, 0) ヲ焦點トシ $a=2$ ナルガ如キ双曲線ノ方程式ヲ求ム.

問 2. 前節例 4 ニ似タル軌跡ニテ双曲線トナルモノヲ擧ゲヨ.

問 3. ソノ上ノ一點 P 及漸近線 d, d' ヲ與ヘテ双曲線ヲ畫ク方法ヲ工夫セヨ. (本節例 2 ヲ用ヒヨ).

第三十六圖



第六章

抛物線

34. 抛物線.

抛物線ハ總テ相似ナルヲ以ヲ例ヘバ $y=\frac{1}{4p}x^2$ ナル曲線ヲ研究スレバ可ナリ. X 軸ト Y 軸トヲ交換シソノ方程式ヲ

$$y^2=4px \qquad (1)$$

トシテ研究セン. コノ場合ニ曲線ハ X 軸ニツキ對稱ナルヲ以テ, X 軸ヲコノ曲線ノ**主軸**ト名ヅク. 又點

$$F(p, 0) \qquad (2)$$

及直線

$$x=-p \qquad (3)$$

ヲソレゾレソノ**焦點**及**準線**ト名ヅク. (コノ場合ニハ焦點及準線ハ各一箇ナリ).

抛物線上ノ一點 $P(x_1y_1)$ ト F トノ距離ヲ求ムレバ

$$PF=\sqrt{x_1-p)^2+y_1^2}$$

$$=\sqrt{x_1^2-2px_1+p^2+4px_1}$$

$$=\sqrt{x_1^2+2px_1+p^2}$$

$$=p+x_1.$$

又 P ヨリ (3) ニ下シタル垂線ヲ PH トスレバ

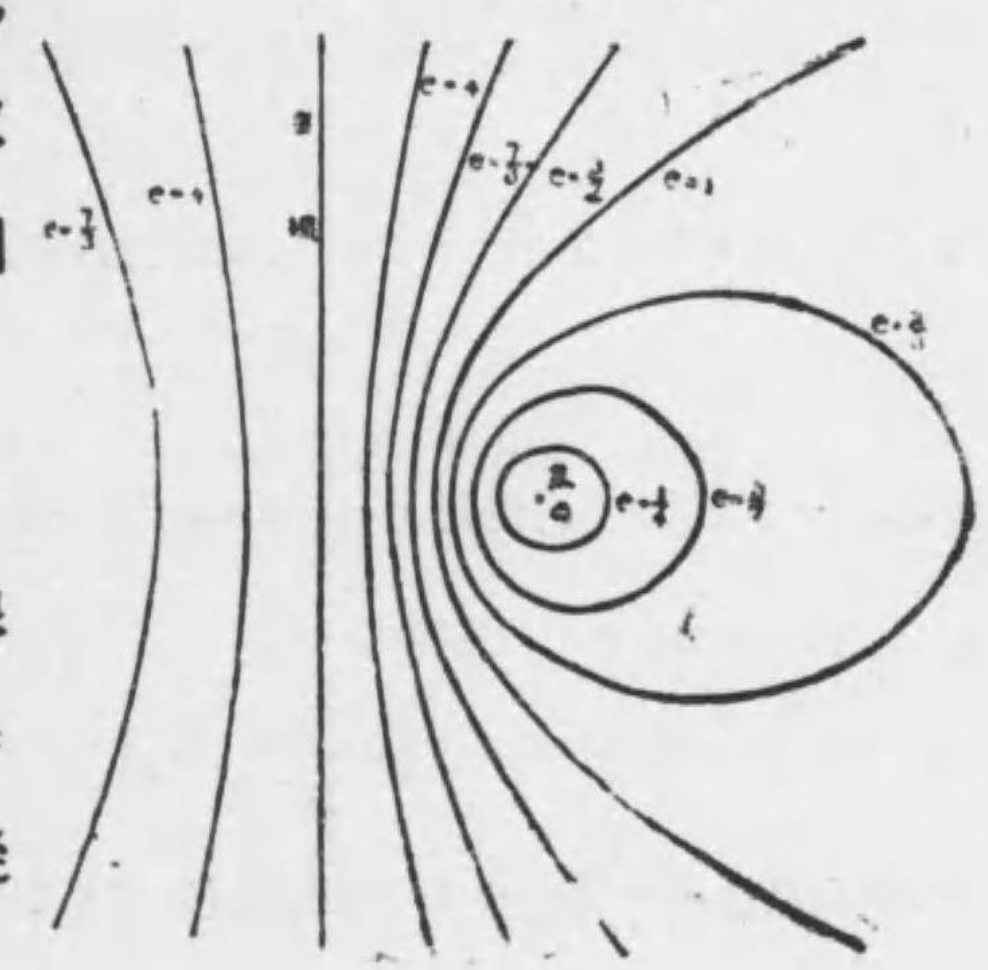
$$PH=p+x_1=PF.$$

即抛物線ハ一點及一直線ヘノ距離ガ相等シキ如キ點ノ軌跡ナリ. 之ト楕圓及双曲線ノ結果ト總合シテ, 次ノ定義ヲ得.

定義. 楕圓, 双曲線及抛物線ハ共ニ一定點ニ到ル距離ト一直線ニ到ル距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ナリ. コノ比ガ 1 ヨリ小ナレバ楕圓, 1 ニ等シケレバ抛物線, 1 ヨリ大ナレバ双曲線ナリ. 又コノ比ガ 0 ニ近キトキハ曲線ハ圓ニ近シ. 圓, 楕圓, 抛物線, 双曲線ヲ總稱シテ**圓錐曲線**ト云フ.

サレバ抛物線ノ形ハ楕圓ト双曲線トノ中間ニアルモノナルヲ知ル. 従

第三十七圖

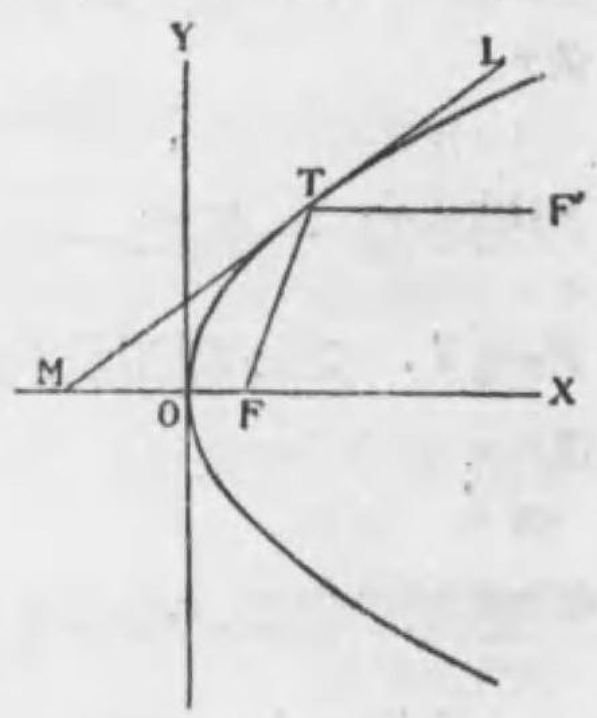


ツテ楕圓及双曲線ニ成立スル定理ハ殆ド抛物線ノ場合ニモ成立ス.

例 1. 抛物線上ノ一點 T ニ於テ切線 LM ヲ引キ, 又 T ヲ通リ主軸ニ平行線 TF′ ヲ引クキ ∠LTF′=∠MTF ナリ.

コノ定理ハ既ニ楕圓及双曲線ニ對シテ成立スルコトヲ知ル. 故ニ上ノ注意ニヨリ抛物線ニテモ成立スベシ. 然レドモ玆ニハ之ヲ純座標幾何學的ニ證明セン.

第三十八圖



先ヅ T ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メザル可カラズ. T ノ座標ヲ $(x_1\ y_1)$ トシ之ニ近キ抛物線上ノ點ヲ $(x_2,\ y_2$ トス. PT ノ方程式ハ

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad \text{(i)}$$

然ルニ $y_1^2=4px_1,\ y_2^2==4px_2$ (抛物線ノ方程式ハ (1) トシタリ) ヨリ

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2^2-y_1^2}{(x_2-x_1)(y_2+y_1)}=\frac{4p}{y_2-y_1}.$$

(i) ハ

$$y-y_1=\frac{4p}{y_2+y_1}(x-x_1)$$

トナル. コヽニテ T≡P トオケバ切線ノ方程線

$$y-y_1=\frac{2p}{y_1}(x-x_1) \qquad \text{(ii)}$$

ヲ得. コノ直線ノ方向例數ハ $\frac{2p}{y_1}$ ナリ. TF ハ點 (x_1, y_1) ト點 (p, o) ヲ結ブ直線ナルヲ以テソノ方程式ハ

$$y=\frac{y_1}{x_1-p}(x-p) \qquad \text{(iii)}$$

ソノ方向係數ハ $\frac{y_1}{x_1-p}$ ナリ. 第九節 (6) ニヨリ

$$\tan \mathrm{FTM}=\frac{\frac{y_1}{x_1-p}-\frac{2p}{y_1}}{1+\frac{2p}{y_1}\ \frac{y_1}{x_1-p}}=\frac{2px_1+2p^2}{(x+p)y_1}=\frac{2p}{y_1}.$$

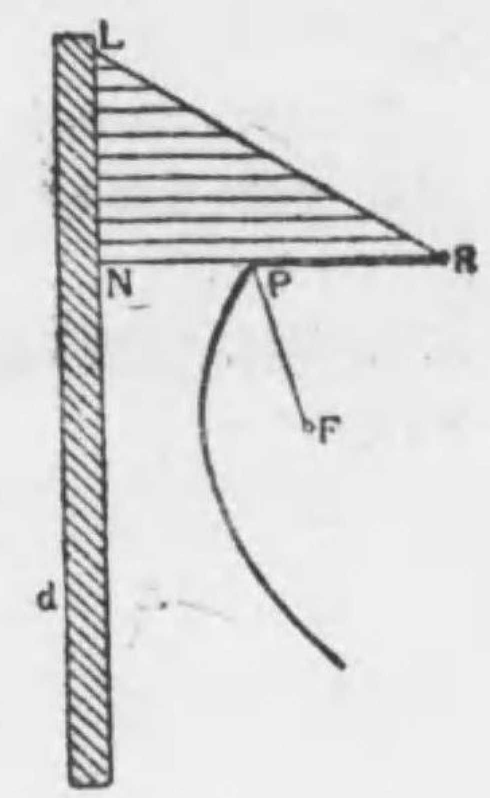
∠LTF′ ハ X 軸ト LM ノナス角ニ等シキヲ以テソノ正切ハ $\frac{2p}{y_1}$ ナリ.

依テ

$$\angle \mathrm{FTM}=\angle \mathrm{LTF'}$$

コノ定理ニヨリ抛物線ハ軸ノ方向ヨリ來レル平行光線ヲ焦點 F ニ集ムル能力アルヲ知ル. コレ焦點ノ名ノ起リシ所謂ナリ. 抛物線ノ主軸ヲ軸トシテ回轉シテ得ル如キ曲面ノ形ヲナス鏡ハ**ぱらぼら鏡**ト稱セラレ, 太陽ノ光線ヲ一點ニ集メ, 又ハ人工的ニ平行光線ヲ造ルコトニ利用セラル.

第三十九圖



例 2. 楕圓及 曲線ノトキノ例ニナラヒテ抛物線モ機械的ニ畫クコトヲ得.

三角定規 RNL ヲ圖ノ如ク他ノ定規 d ニ一邊 LM ヲ接シテ滑ベラス. NR ノ長サニ等シキ糸ノ兩端ヲ R 及 F ニ結ビツケ, 鉛筆ノ端 P ヲ NR ニ接シ糸ヲ張リツヽ動カスベシ.

問 1. $y=x^2$ ノ焦點ヲ求ム. 又 $y=3^2-6x+5$ ノ焦點ヲ求ム.

問 2. 一點ヲ通リ一直線ニ接スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

問　題

1. 原點ヲ焦點トシ $x+y=1$ ヲ準線トスル抛物線ノ方程式ヲ求ム.

2. 楕圓 $x^2+3y^2=5$ ノ長徑, 短徑及焦點ヲ求ム.

3. 双曲線 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$ 及 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=1$ ヲ畫ケ. 之ヲ合セ見ヨ.

4. 三角形ノ三頂點ヨリノ距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ機械的ニ畫ク方法ヲ工夫セヨ.

5 双曲線上ノ一點ヨリ二ツノ漸近線ニ下セル垂線ノ積ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

6. X 軸及 Y 軸ニ兩端ヲ置キツヽ長サ 10 ナル直線ガ動クトキソノ一端ヨリ 3 ナル距離ニアル點ノ軌跡如何.

7. 平行二直線 a, b 上ニソレゾレ A, B ナル點アリ. 然ルトキ a, b ニ共通ナル垂線 LM 上ノ AL.BM=LP.MP ナル如キ點 P ノ軌跡如何.(二ツノ場合アルコトニ注意セヨ).

8. 抛物線 $y^2=4px$ ノ切線ハ $y=mx+\frac{p}{m}$ ナル形ニテ表サルヽコトヲ證明シ, 且之ヲ用ヒテ抛物線ノ直角ニ交ル切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

9. 双曲線 $xy=1$ 上ノ一點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求ム.

10. 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ上ノ一點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求ム,

11. 焦點ガ $(3, 0)$, $(-3, 0)$ ニシテ準線ガ $x=\pm 1$ ナル双曲線ヲ求ム.

12. 地球ト太陽トノ最短距離ヲ r, 最遠距離ヲ s トシテ地球ノ軌道ノ兩半徑ヲ求ム.

13. 楕圓, 双曲線及抛物線ノ平行弦ノ中點ノ軌跡ハ何レモ直線ナルコトヲ證明セヨ.

第七章

二次曲線

35. 二次曲線.

二元二次方程式ノ一般ノ形ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0 \qquad (1)$$

ナリ. コノ形ノ方程式ニテ表サルヽ曲線ヲ**二次曲線**ト云フ. コノ方程式ト一次方程式トヲ聯立方程式トシテ解カバ二組ノ解ヲ得ルヲ以テコノ曲線ハ總テノ直線ト二點ニ於テ交ル.(但シコレ等ノ交點ガ一致スルコト又ハ虛トナルコトアリ).

次ニ二直線

$$lx+my+n=0,\ l'x+m'y+n'=0 \qquad (2)$$

ヲ考フ. 然ルトキ方程式

$$(lx+my+n)(l'x+m'y+n')=0 \qquad (3)$$

ヲ作レバ, コレハ (2) ノ何レカ一ツヲ滿足スル如キ (x, y) ノ値ニテ滿足セラル. 云ヒカヘレバ (3) ハ (2) ナル二直線ノ何レノ上ノ點ノ座標ニテモ滿足セラル. 故ニ (3) ハ

(2) ナル二直線ヲ同時ニ表スモノナルヲ知ル. 然ルニ (3) ハ二元二次方程式ナルヲ以テ (1) ナル形ニ書カル. 故ニ (1) ナル形ノ方程式ヲ有スル曲線即二次曲線ハ, 二直線ヲ一緒ニ考ヘタルモノヲモ含ム. (但コレハ双曲線ノ極限トモ考フルコトヲ得).

コノ他ニ吾人ハ二次方程式テ表ハサルヽ曲線數種ヲ知レリ. 是レ即圓錐曲線ト總稱セラルヽモノニシテ圓, 橢圓, 抛物線, 双曲線ト云フモノ之ナリ. 然ルニコノ逆モ成立ス. 即

定理. 二次曲線ハ圓錐曲線ナリ, 但シソノ極限トシテ二シノ直線トナルコトアリ.

今項ヲ追フテコノ定理ヲ證明セン. 今マデ取扱ヒタル圓錐曲線ノ方程式ハ曲線ヲ座標軸ニ關シテ特別ノ位置ニ置キタルトキノ方程式ナリ. 故ニコノ定理ヲ證明センニハ, (1) ニテ表ハサルヽ曲線ヲ適當ニ平行移動及回轉シテソノ方程式ガ今マデ知ラレタル圓錐曲線ノ方程式ノ形トナルコヲ示セバ可ナリ.

36. 二次曲線ノ中心.

先ヅ (1) ニ平行移動

$$x=x'-\alpha,\ y=y'-\beta \tag{2}$$

ヲ施ス. 然ルトキコノ式ハ次ノ如クナル.

$$a(x'-\alpha)^2+2h(x'-\alpha)(y'-\beta)+b(y'-\beta)^2+2f(x'-\alpha)$$
$$+2g(y'-\beta)+c=0.$$

從ツテ x', y' ノだっしゅヲ取リ去リテ變形スレバ

$$ax^2+2hxy+by^2-2(a\alpha+h\beta-f)x-2(h\alpha+b\beta-g)-c'=0$$

トナル. コヽニ c' ハ x 及 y ヲ含マザル項ナリ. (計算シ得レドモ不要ナルヲ以テカク略記セリ).

コヽニテ x ノ係數ト y ノ 係數トヲ 0 ナラシメ得ルヤ否ヤヲ試ミン. ソノ爲ニ

$$a\alpha+h\beta=f,\ h\alpha+b\beta=g$$

ナル聯立一次方程式ヨリ α 及 β ヲ求メラルヽヤ否ヤヲ考フ.

コノ聯立一次方程式ガ確定セル解ヲ有スル爲ニハ

$$ab-h^2\neq0 \tag{3}$$

ナルコトガ必要ニシテ充分ナリ. 今コノ場合ヲ研究セン.

α, β ヲカクノ如ク定メ得レバ方程式ハ

$$ax^2+2hxy+by^2=c' \tag{4}$$

ナル形トナル. コノ場合モシ一點 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ ガ (4) 上ニアルナラバ $ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2=c'$ ナルヲ以テ, $\mathrm{P}'(-x_1, -y_1)$ モ亦 (4) 上ニアリ. 即 (4) ナル曲線ハ原點ニツキ對稱ナ

リ. 云ヒカヘレバ原點ハ曲點ノ中心ナリ. コレヲ以テ見レバ (3) ハ曲線 (1) ガ中心ヲ有スル爲ノ條件ニシテ (2) ナル平行移動ニヨリテ曲線 (1) ノ中心ハ原點ニ移サルヽコトヲ知ル.

37. 橢圓及双曲線.

次ニ吾人ハ (4) ナル曲線ガ橢圓又ハ双曲線ヲ表ハス事ヲ示サン. 但, コヽニモシ $c'=0$ ナラバ (4) ハ

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$

トナリ, コノ式ノ左邊ハ二ツノ一次因數ニ分解セラル. 即コノ場合ニハ (4) ハ原點ヲ通ル二直線ヲ表ス可シ. 故ニ $c'\neq 0$ ナリトシテ考ヘン.

原點即曲線ノ中心ヲ回轉ノ中心トシテ曲線ヲ角 θ ダケ回轉セン. 第二章第十七節ノ變換式 (2) ヲ書キ直シテ

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\theta+y'\sin\theta \\ y&=-x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ヲ得. 今之ヲ (4) ニ代入スレバ

$$a(x'\cos\theta+y'\sin\theta)^2+2h(x'\cos\theta+y'\sin\theta)(y'\cos\theta-x'\sin\theta)$$
$$+b(y'\cos\theta-x'\sin\theta)^2=c'.$$

從ツテ x', y' ノだっしゅヲ取リ去リテ之ヲ整理スレバ

$$Ax^2+2Hxy+By^2=c'$$

ナル形ノ式ヲ得. コヽニ於テ $H=0$ ナル如ク θ ヲ定メン. ソノ爲ニハ

$$H=a\cos\theta\sin\theta+h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-b\cos\theta\sin\theta=0,$$

即 $(a-b)\cos\theta\sin\theta+h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0.$

即 $(a-b)\sin 2\theta=-2h\cos 2\theta,$

故ニ
$$\tan 2\theta=-\frac{2h}{a-b} \qquad (6)$$

ナル如クニ θ ヲ選ベバ可ナルコトヲ知ル. 然ルニ正切ハ如何ナル實數値ヲモ取リ得. 且タトヘ $a-b=0$ ナルトキモ $2\theta=\frac{\pi}{2}$ トスレバ可ナルヲ以テ, (6) ヲ滿足スル θ ヲ選ブコトハ常ニ可能ナリ. カクスレバ上ノ方程式ハ

$$Ax^2+By^2=C \qquad (7)$$

ナル形トナル.

(7) ニ於テ A, B ガ同符號ナラバ C モ之ト同符號ナラザル可カラズ. 然ラザレバ (7) ハ實曲線ヲ表サズ. (コノ場合ニモコノ曲線ハ虚橢圓ヲ表ハスト云フコトアリ). A, B, C ガ共ニ同符號ナラバ $\frac{C}{A}=a^2$, $\frac{C}{B}=b^2$ ト置ク事ヲ得ルヲ以テ, (7) ハ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ナル橢圓ヲ表ハスコトヽナル. モシ (7) ニ於テ A, B ハ異符號ニシテ C ガ例ヘ

バ A ト同符號ナラバ $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}=a^2$, $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}=-b^2$ トオケバ (7) ハ

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ナル双曲線ノ方程式トナル. 何レニシテモ

(7) ハ楕圓又ハ双曲線ヲ表ハス.

問 1. (7) ニ於テ A, B ヲカヘズニ C ダケカヘタルトキ曲線ハ相似變換ヲ受クルコトヲ示セ. 又コレニヨリ (1) ナル形ノ二ツノ方程式ニテ, ソノ二次ノ項ガ等シケレバ, 之等ハ相似ニシテ相似ノ位置ニアル曲線ヲ表スコトヲ示セ.

38. 抛物線.

次ニ吾人ハ前ニ除外シ置キタル場合即 $ab-h^2=0$ ナル場合ヲ吟味セザル可カラズ.

$ab-h^2=0$ ナラバ (1) ニ於ケル二次ノ項 $ax^2+2hxy+by^2$ ハ完全平方トナル. 即コノ式ハ $a(x-my)^2$ ト書クコトヲ得. 依テ $m=\tan\theta$ トスレバコノ式ハ又

$$k(x\cos\theta-y\sin\theta)^2$$

ナル形ニ書キ直スコトヲ得. 故ニ與ヘラレタル方程式ハ

$$k(x\cos\theta-y\sin\theta)^2+2fx+2gy+c=0$$

ナル形トル.

コノ場合ニハ先ヅ (5) ナル回轉ヲ施サン. 然ルトキハ一次ノ項ハ變換ノ後モヤハリ一次ナルヲ以テソノ結果ハ

$$kx^2+2f'x+2g'y+c=0$$

ナル形ヲナス. 從ツテコレハ

$$y=-\frac{k}{2g'}x^2-\frac{f'}{2g'}x-\frac{c}{2g'} \qquad (8)$$

ト書キ直シ得ルヲ以テ二次式ノぐらふナリ. 即コレハ一ツノ抛物線ヲ表スヲ知ル. 但 $g'=0$ ナラバ, 上ノ式ハ y ノ項ヲ缺クヲ以テ, 之ヲ x ニツキテ解ケバ

$$x=\alpha,\ x=\beta \qquad (9)$$

ヲ得. 依テコレハ Y 軸ニ平行ナル二直線ナリ.

以上ニテ二次式ノ表ス曲線ハ總テ盡サレタリ. 即二次曲線ハ二ツノ直線又ハ圓錐曲線ヲ表スヲ知ル.

問 2. $x^2+xy=4x$ ハ何ヲ表スカ 又 $x^2-xy+y^2-2x+2y+10=0$ ハ何ヲ表スカ.

問 3. $x+\sqrt{x}$ ノぐらふハ如何ナル曲線ノ一部ナルカ.

問 4. 有理式ノぐらふガ二次曲線ナル場合ヲ擧ゲヨ.

—附　　錄—

第一章

空間幾何學

39. 平面ト直線.

與ヘラレタル面ノ上ノ二點ヲ結ブ直線ガ常ニ全クソノ上ニアルトキ之ヲ**平面**ト云フ.

コノ定義ニ從ヘバ直線ハ平面ト一ツヨリ多クノ點ニテ交ル能ハザルコト明ナリ. 又二平面ノ交リハ直線ナルコトモ明ナリ. 何トナレバ, 二平面ノ交リノ上ニ二點A, Bヲトレバ直線 AB ハコノ二平面ノ何レノ上ニモアル可ク, 二平面ノ交リニ他ナラザレバナリ.

同一直線上ニアラザル三點ヲ通ル平面ハ一ツアリテタダ一ツニ限ル.

一直線ト一點トヲ過ル平面ハ一ツアツテタダ一ツニ限ル. 何トナレバコノ直線上ノ二點ト與ヘラレタル一點ニテタダ一ツノ平面ガ決定セラレ, 且與ヘラレタル直線ハ

全クソノ上ニアレバナリ. 又相交ル二直線ハ同一平面上ニアルコトモ同樣ニシテ知ラル.

二直線ガ平行ナリトハ, ソレラガ同一平面上ニアリテ相交ラザルコトヲ云フ. 即平面幾何學ニ於ケルト同ジ意味ナリ. 同一平面上ニアラザル二直線ハ相交ラザルモ平行ナリトハ云ハズ.

一點 P ヲ過リテ一直線 a ニ平行ナル直線ハタダ一ツアリ. 何トナレバ P ヲ過リテ a ニ平行ナル直線 b ハ, a ト P トニテ決定セラルヽ平面 π 上ニアルベキヲ以テ平面幾何學ノ定理ガ成立スレバナリ.

一平面ト一直線ガ交ラザルトキ, ソレラハ互ニ**平行**ナリト云フ. 同樣ニ**二平面ノ平行**ナルコトモ定義スルヲ得.

平行二直線 a, b ノ一ツ例ヘバ b ヲ含ム平面 π ハ a ニ平行ナリ. 何トナレバ, モシ π ガ a ト P ニテ交ラバ P ト b ニテ定ムル平面ナル π ハ a ト b ニテ定ムル平面ト一致シ, a ヲ全ク含ム可ケレバナリ.

又二平面 π, π' ガ平行ナラバ, π' 上ノ總テノ直線ハ π ニ平行ナリ. 何トナレバ π' ハ π ト交ラザルヲ以テ π' 上ノ直線モ π ト交ル筈ナレバナリ,

三直線 a, b, c ニ於テモシ $a//b$, $b//c$ ナラバ $c//a$ ナリ.

a ト c ノ上ノ一點 P ヲ含ム平面 π ヲ考ヘン. π ハ a ヲ含ムヲ以テ b ニ平行ナリ. b ト c ハ平行ナルヲ以テ π ハ c ヲ全ク含ムベシ. 故ニ a ト c トハ同一平面上ニアリ. 然ルニ a ト c トハ交ル能ハズ. 何トナレバモシ交ラバソノ點ヲ過リ b ニ平行ナル直線ガ二ツアルコトヽナレバナリ. 故ニ a ト c トハ平行ナリ.

40. 垂　線.

一直線 a 上ノ一點 P ニ於テ之ニ垂線 b ヲ引キ, a ヲ軸トシテ b ヲ一回轉スルトキハ b ハ一ツノ平面 π ヲ畫クベシ. π 上ニアリテ P ヲ過ル直線ハ總テ b ノ或ル位分ト考ヘラルヽヲ以テ a ニ垂直ナリ. カクノ如キ**平面 π ハ a ニ垂直ナリ**ト云フ.

一點ヲ過リテ一ツノ平面ニ垂直ナル直線ハ只一ツアリ. 而シテコノ垂線ハコノ點ヨリ平面ニ到ル最短距離ナリ.

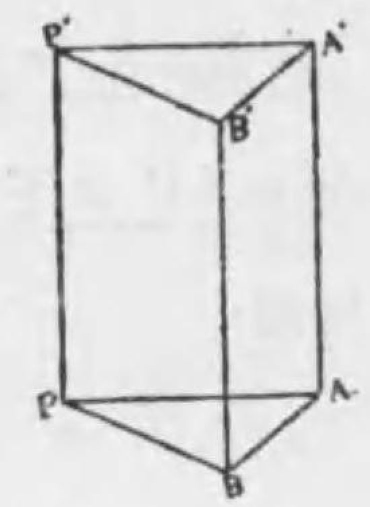
コレハ, ソノ點ヨリ引キタル一ツノ垂線及他ノ任意ノ直線ヲ含ム平面ニテ截口ヲ作リテ考フレバ容易ニ證明シ得可シ.

PA//P′A′, PB//P′B′ ニシテ PA ト P′A′, PB ト P′B′

ガ同ジ向キナレバ ∠APB=∠A′P′B′ ナリ.

PA=P′A′, PB=P′B′ ナルヤウニトレバ PAA′P′, PBB′P′ ハ共ニ平行四邊形ナリ. AA′, BB′ ハ共ニ PP′ ニ平行ニシテ等シ. 故ニ ABB′A′ モ亦平行四邊形ナリ. 故ニ A′B′=AB, △ABA≡△A′B′P′ 從ッテ ∠APB=∠A′P′B′ ナリ.

第四十圖



相交ラザル二直線 a', b' アリ. $a//a'$, $b//b'$ ナル二直線 a, b ガ交ルトキハソノ交角ハ前定理ニヨリ一定ナリ. コノ角ヲ **a' 及 b' ノ交角**ト云フ. 特ニコノ角ガ直角ナラバ二直角ハ直交スト云フ.

一直線 a ガ一平面 π ノ上ノ相交ル二直線 b. c ニ垂直ナレバ a ハ又 π ニ垂直ナリ. 從ッテ π 上ノ凡テノ直線ニ垂直ナリ.

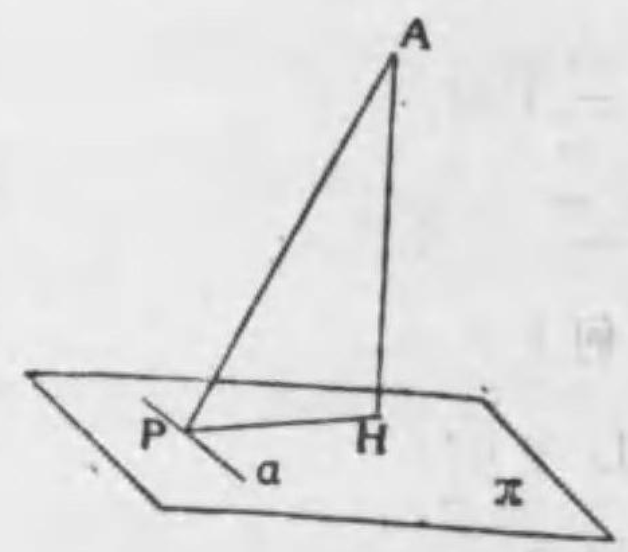
a ト π トハ平行ナラズ. モシ平行ナラバ π 上ニハ a ニ平行ナル直線 a' アル可ク π 上ニテ a ニ垂直ナル直線ハ a' ニ垂直ナル直線ニ限レバナリ. a ト π トノ交點ヲ P トス. P ヲ通リ b, c ニ平行ナル直線 b', c' ノ定ムル平面ハ π ナリ. P ヲ通リ a ニ垂直ナル平面ハ b' 及 c' ヲ含ムヲ以テ π ニ他ナラズ. 又 π 上ノ一直線 d

ヲ考フレバ, P ヲ通リ d ニ平行ナル直線 d' ハ a ト直交スルヲ以テ, d モ亦 a ト直交ス可シ. 依テ定理ハ證明セラレタリ.

一點 A ヨリ一平面 π 及ソノ上ノ一直線 a ニ垂線 AH, AP ヲ下ストキ, HP ハ a ニ垂直ナリ. (三垂線ノ定理).

AH ハ π ニ垂直ナルヲ以テ a ニモ垂直ナリ. AP モ亦 a ニ垂直ナルヲ以テ平面 APH ハ a ニ垂直ナリ. 依テ HP モ亦 a ニ垂直ナルベシ.

第四十一圖



問 1. 平行ナル二平面ヲ他ノ平面ニテ截レバ平行ナル二直線ヲ得ルコトヲ證明セヨ.

問 2. 平行二直線 a, b ヲ與フルトキ a ヲ含ム平面 A ト b トヲ含ム平面 B トノ交リハ a 及 b ニ平行ナルコトヲ示セ.

問 3. 同一平面ニ垂直ナル諸直線ハ互ニ平行ナルコトヲ示セ.

問 4. 一點ヲ過リ一直線ニ垂直ナル平面ハタダ一ツニ限ルコトヲ示セ.

41. 二 面 角.

二平面ノ交リテナス角ヲ**二面角**ト云フ. 二平面ノ交リニ垂直ナル平面ヲ作レバ, ソノ截口ナル二直線ノナス角ハ一定ナリ. (カクノ如キ二ツノ截口ヲ作レバソノ二直線ハ各々平行ナルベシ). 故ニコノ角ヲ以テ二面角ノ測度トナスヲ得. コレヲ**二面角ノ平面角**ト云フ. 特ニコノ角ガ直角ナルトキ二平面ハ垂直ナリト云フ.

一平面 π ニ垂直ナル直線 a ヲ含ム平面 π' ハ π ニ垂直ナリ. 何トナレバ π ト π' ノ交リヲ p トシ, a ト π ノ交點 P ニ於テ p ニ垂線 b ヲ引ケバ, a ト b トノ定ムル平面ハ p ニ垂直ナルヲ以テ π ト π' ノ交角ヲ與フベシ. 之ハ直角ナルコト明ナリ.

二平面 π ト π' ガ垂直ナラバ π' 上ノ一點 A ヨリ π ト π' ノ交リ p ニ下セル直線 AH ハ π' ニ垂直ナリ.

何トナレバ, H ヲ通リ π' 上ニテ p ニ垂直ナル直線 HL ヲ引ク. 平面 AHL ハ p ニ垂直ナルヲ以テ $\angle$AHL ハ直角ナラザル可カラズ. 故ニ AH ハ p ト HL ニ垂直ナルヲ以テ π' ニ垂直ナリ.

一平面 π ト一直線 a ガ交ルトキ, a ヲ含ミ π ニ垂直ナル平面 π' ト π トノ交リ b ト a ノナス角ヲ **a ト π トノナス角**ト云フ.

問 5. 互ニ垂直ナル平面ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ一ツニ平行ナルコトヲ證明セヨ.

問 6. 一平面ニ垂直ナル二ツノ平面ガ互ニ交ルトキ, ソノ交線ハモトノ平面ニ垂直ナルコトヲ證明セヨ.

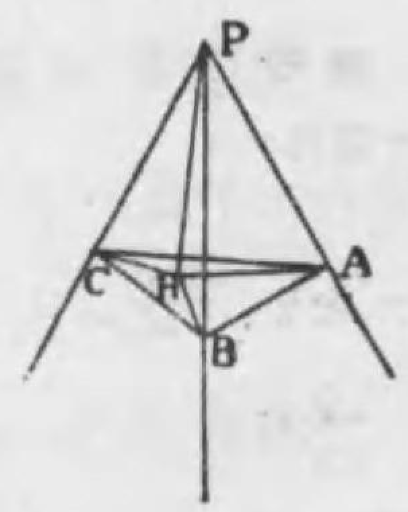
問 7. 二面角ノ各面ニ立テタル垂線ガ交ルトキ, ソノ交角ノ內, 二面角

ト同ジ向キノ開キヲ有スルモノハ二面角ノ平面角ノ補角ヲナスコトヲ證明セヨ.

42. 立體角.

一點 P ヲ通ル諸直線 PA_1, PA_2,……, PA_n アルトキ平面角 A_1PA_2, A_2PA_3,……, A_nPA_1 ニテ圍マレタル圖形ヲ **立體角** ト云ヒ, P ヲソノ **頂點**, PA_1, PA_2,……PA_n ヲソノ **稜**, A_1PA_2 ノ如キ角ヲソノ **面角**, A_1PA_2, A_2PA_3 ノ如キ二平面ノナス角ヲ **稜角** ト云フ. 平面角ノ數ニヨリ **三面角**, **四面角** 等ノ名アリ.

第四十二圖



三面角ノ面角ノ和ハ四直角ヨリ小ニシテ, ソノ稜角ノ和ハ二直角ヨリ大ナリ.

三面角 P(ABC) (P ヲ頂點トシ PA, PB, PC ヲ稜トスル三面角ノ意.) ニ於テ PA=PB=PC トシ P ヨリ平面 ABC ニ垂線 PH ヲ下ス. 然ルトキハ直角三角形 AHP, BHP, CHP ハ合同ナルヲ以テ HA=HB=HC <PA. 故ニ $\angle AHB > \angle APB$ 等ヲ得. 故ニ $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPA$ ノ和ハ $\angle AHB$, $\angle BHC$, $\angle CHA$ ノ和即四直角ヨリ小ナリ.

次ニ P ヲ通リ平面 PBC, PCA, PAB ニ垂線 PA′, PB′, PC′ ヲ引ケバ, P(A′B′C′) ナル三面角ノ面角ハ P(ABC) ノ稜角ノ補角ナルベシ. (問 7.) P(ABC) ノ稜角ノ和ハ 6 直角ヨリ P(A′B′C′) ノ面角ノ和ヲ引キタルモノナリ. 故ニ二直角ヨリ大ナリ.

問 8. 三面角ノ二ツノ面角ガ等シケレバ之ニ對スル稜角モ等シキコトヲ證明セヨ.

43. 多面體, 體積.

多クノ平面ニテ限ラレタル空間ノ一部ヲ **多面體** ト云フ. サレバ多面體ノ界ヲナス平面ノ部分ハ多角形ナリ. コノ多角形ヲ多面體ノ **面** ト云ヒ, ソノ邊ヲ **稜**, ソノ頂點ヲ多面體ノ **頂點** ト云フ. 多面體ノ頂點ハ各々一ツノ立體角ヲナス. 多面體ハ又面ノ數ニヨリ四面體, 五面體, 六面體等ト云フ.

各面ガ相等シキ正多角形ニシテ, 各頂點ニ於ケル立體角ガ相等シキ多面體ヲ **正多面體** ト云フ. 三ツ以上ノ相等シキ面角ニテ立體角ヲ作ルニハコノ面角ハ 120° ヨリ小ナラザル可カラズ. 故ニ正多面體ノ面トナリ得ルハ正三角形, 正方形, 正五邊形ノ三ツナリ. 之ヲ以テ正多面體ヲ作レバ次ノ五種ヲ得.

多面體	面	立體角
正四面體	正三角形	三面角
正六面體(立方體)	正方形	三面角
正八面體	正三角形	四面角
正十二面體	正五角形	三面角
正二十面體	正三角形	五面角

而シテコノ五種ニ限ルコトモ容易ニ證明スルコトヲ得.

三双ノ平行平面ニテ包マルヽ六面體ヲ**平行六面體**ト云フ. ソレラノ平行平面ガ互ニ垂直トナルトキコレヲ**直方體**ト云ヒ, 直方體ノ稜ノ長サガ皆相等シキトキ之ヲ**立方體**ト云フ. 立方體ハ正六面體ナリ.

立體ノ體積ヲ表スニハ長サノ單位ヲ一邊トシタル立方體ノ體積ヲ單位トスルコトハヨク知ラレタリ. 直方體ノ體積ハソノ三稜ノ長サニ複比例スルヲ以テ三稜ノ長サヲ表ス數ノ積ニテ表サル.

問 9. 三ツノ稜ノ長サ a, b, c ナル直方體ノ對角線ノ長サハ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ナルコトヲ證明セヨ. (コノ定理ハ重要ナリ).

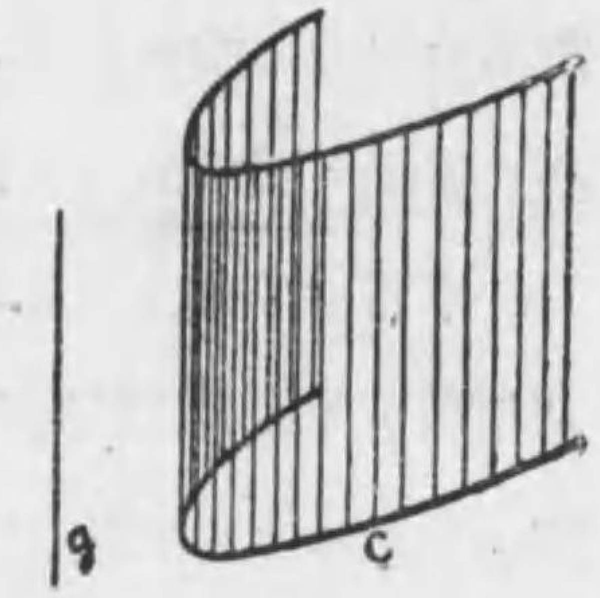
問 10. 平行六面體ノ相對スル面ハ合同ナル平行四邊形ナルコトヲ證明セヨ.

問 11. 稜ノ長サ一寸ナル正四面體ノ高サヲ求ム. (高サトハ一ツノ頂點ヨリソレニ對スル面ニ下シタル垂線ノ長サナリ).

44. 壔及錐.

定曲線 C ト交リ且定直線 g ニ平行シツヽ動ク直線ニヨリ作ラレタ面ヲ**壔面**ト云ヒ, 閉ヂタル壔面ト平行ナル二平面 (g ニ平行ナラザル) ニヨリ包マルヽ立體ヲ**壔**ト云フ. 壔面ヲ作ル動直線ヲ**母線**ト云ヒ, コノ壔面ヲ壔ノ**側面**ト云フ. 又上ノ平行二平面ヲ壔ノ**底**, ソノ距離ヲ**高サ**ト云フ. 底ガ多角形, 圓ナルトキ之ヲ**角壔**, **圓壔**ト云フ. 平行六面體ハ角壔ノ一種ナリ. 壔ノ兩底ハ合同ナルノミナラズ底ニ平行ナル任意ノ平面ニテ截リタル截リ口モ底ト合同ナリ.

第四十三圖

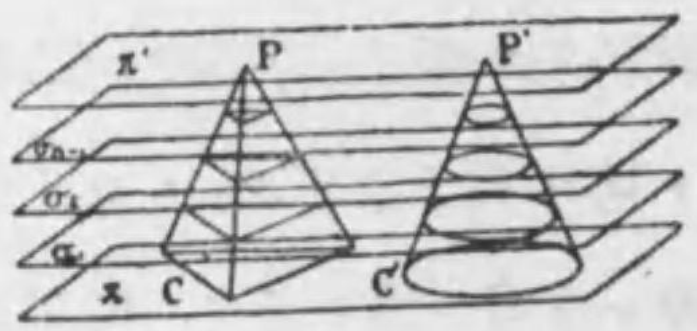


定曲線 C ト交リ且定點 P ヲ通リツヽ動ク直線ニテ作ラルヽ面ヲ**錐面**ト云ヒ, 錐面ト P ヲ通ラザル一平面トニヨリ立體ガ限ラルヽトキ之ヲ錐ト云フ. 錐面ヲ作ル動直線ヲ**母線**, P ヲソノ**頂點**ト云ヒ, コノ錐面ヲ錐ノ**側面**, 平面ヲソノ**底**, 頂點ト底面トノ距離ヲソノ**高サ**ト云フ. 底ガ多角形, (例ヘバ三角形) 又ハ圓ナルトキ之ヲ**角錐** (例ヘバ**三角錐**) **圓錐**ト云フ. 錐ヲソノ底面ニ平行ナル平面ニテキレバ截口ハ底ト相似ナリ.

底ノ面積及高サノ相等シキ壔又ハ錐ハソノ體積互ニ相等シ.

今例ヘバ之ヲ錐ニツキテ證明セン. (壔ニツキテモ全ク同様ニ證明スルヲ得).

第四十四圖

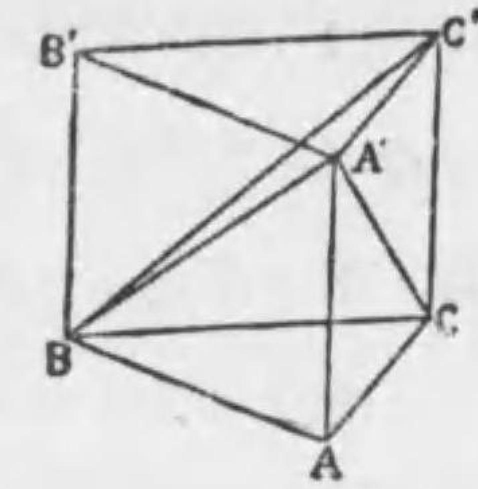


一平面 π ノ上ニアル面積相等シキ圖形 C 及 C' ヲ底トシ, π ニ平行ナル一平面 π' 上ニアル二點 P 及 P' ヲ頂點トスル二ツノ錐 V 及 V' ヲ考ヘン. π 及 π' ニ平行ナル平面 σ_1, σ_2,…… σ_{n-1} ヲ π ト π' トノ間ニ作リ, V 及 V' ノ π ト σ_1 トノ間ノ部分ヲ V_1, V_1', σ_1 σ_2 トノ間ノ部分ヲ V_2, V_2' 等以下同様ニス. σ ニヨル V 及 V' ノ截口ハ面積相等シキヲ以テ, σ_{k-1} ト σ_k トガ充分近ケレバ, ソノ間ニ挾マレタル V 及 V' ノ部分即 V_k ト V_k' ハ殆ド相第シ. 故ニ $V=V_1+V_2+……+V_n$ ト $V'=V_1'+V_2'+……+V_n'$ トノ比モ殆ド 1 ニ等シ. 然モコノ比ハ平面ノ數ヲ增スコトニヨリ如何程ニテモ 1 ニ近キコトヲ證明スルヲ得. 故ニコノ比ハ始メヨリ 1 ナラザル可カラズ. 即 $V=V'$ ナリ.

底ノ面積及高サノ等シキ壔及錐アルトキ壔ノ體積ハ錐ノ體積ノ三倍ナリ.

今コノ定理ヲ三角壔 ABCA'B'C' ト三角錐 ABCA' ニツキテ證明セン. 三角錐 ABCA' ハ ACA' ヲ底ト見レバ三角錐 A'CC'B ト體積ガ等シキコトヲ知ル. 又之ハ三角錐 AB'CB トモ體積等シ. 何トナレバコノ二ツノ三角錐ノ底面ハ ABC, A'B'C' ニテ等シク高サモコノ二平面ノ距離ナルヲ以テ相等シケレバナリ. 即

第四十五圖



三角壔 ABCA'B'C'＝三角錐 ABCA'

＋三角錐 A'CC'B＋三角錐 A'B'C'B

＝3 三角錐 ABCA'.

次ニ底邊及高サノ等シキ壔又ハ錐ハ體積相等シキヲ以テ, コノ定理ハ任意ノ三角壔及三角錐ニ對シテ成立ス. 最後ニ一般ノ壔ハ三角壔ノ和又ハ三角壔ノ和ノ極限トシテ表シ得可ク, 錐ニシキテモ同様ナルコトヲ考フレバ, コノ定理ガ一般ニ成立スルヲ知ルニ足ルベシ.

問 12. 底ノ半徑 1 寸高サ 5 分ナル圓錐ノ體積ヲ求メヨ.

問 13. 稜ノ長サ a 寸ナル正四面體及方八面體ノ體積ヲ求ム.

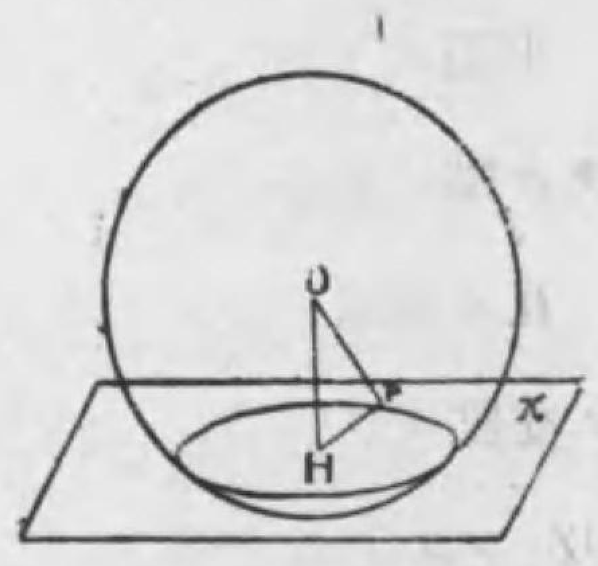
問 14. 錐面ノ平面ニヨル截口ノ面積ハコノ平面ガ母線ニ垂直ナルトキ最小ナルコトヲ證明セヨ.

45. 球　　面.

一點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ナル曲面ヲ**球面**ト云フ. ソノ點ヲ**中心**, ソノ距離ヲ**半徑**ト云フ

今 O ヲ中心トシ半徑 r ナル球面ト O ヨリ h ナル距離ニアル平面トヲ考フ. $h>r$ ナラバコノ球面ト平面トハ一點ヲモ共有スルコトナシ. $h=r$ ナラバ, O ヨリ π ニ下シタル垂線ノ足 H ハ球面 O ノ上ニアリ, O ト π トノ交點ハ只一ツナリ. コノトキ π ハ O ノ**切平面**ナリト云ヒ, H ヲソノ**切點**ナリト云フ. 次ニ $h<r$ ナラバコノ球面ト平面トハ交ルベシ. 然ルトキハソノ交リハ一ツノ圓ナルコトヲ示サン.

第四十六圖



今交リノ上ノ一點ヲ P トス. OPH ハ直角三角形ナルヲ以テ $HP=\sqrt{OP^2-OH^2}$ $=\sqrt{r^2-h^2}$ ニテ一定ナリ. 依テ P ハ H ヲ中心トシタル圓周上ニアルベシ. 又逆ニコノ圓周上ノ點ハ平面ト球トニ共通ナルコト明ナリ. 依テ求ムル交リハ一ツノ圓ナリ.

球ト平面トノ交リノ内ソノ平面ガ球ノ中心ヲ通ルモノ

ヲ**大圓**, 然ラザルモノヲ**小圓**ト云フ. 中心ニ於テ之等ノ平面ニ引キタル垂線ガ球ト交ル二點ハ此等ノ圓ニテ圍マレタル球面ノ部分ノ中央ニアルベシ. 之ヲ此等ノ圓ノ**極**ト云フ.

球面上ノ圖形ニツキテハ既ニ三角法ノ條下ニテ述ベタリ.

問 15. 二ツノ球ノ交リハ一點ナルカ又ハ一ツノ圓ナルコトヲ示セ.

問 16. 球ト只一點ニテ交ル直線 (切線ト云フ) ハソノ點ニ於ケル球ノ切平面上ニアルコトヲ證明セヨ.

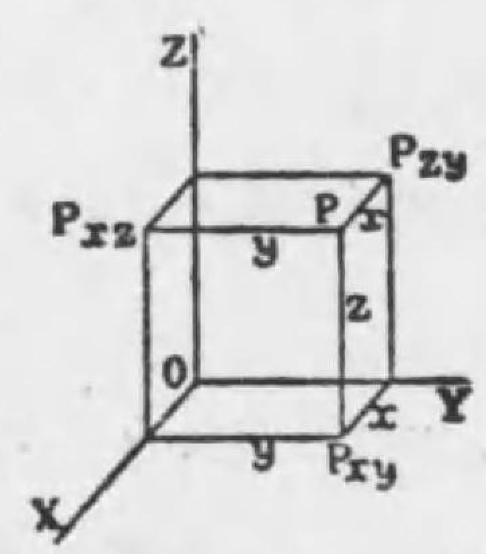
問 17. 一點 P ヲ過ル直線ヲ引キ一ツノ球 O ヲ A 及 B ニテ切レバ PA, PB ハコノ直線ノ如何ニカヽハラズ一定ナルコトヲ證明セヨ.

問 18. 二與點 A, B ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ハ一ツノ球ナリ. (AB ヲ含ム平面上ニテ問題ヲ解キ, 次ニ AB ヲ軸トシテ之ヲ一回轉シテ考フベシ).

46. 空間ニ於ケル座標.

平面ノトキノ例ニナラヒ空間ニ於ケル點ノ座標ヲ定メン.

第四十七圖



互ニ直線ニ交ル三平面ヲトリ, ソノ交點ヲ O, ソノ交線ヲ OX, OY, OZ トス. O ヲ**原點** OX, OY, OZ ヲソレゾレ **X 軸**, **Y 軸**, **Z 軸**, XOY, YOZ, ZOX 平面ヲソレゾレ **XY 平面**, **YZ 平面**, **XZ 平面**ト云フ. XY 平面ニ普通ノ平面幾何學ニ於ケル XY

平面ト同様ニ座標系ヲトル．一點 P ヨリ XY 平面ニ垂線 PP_{xy} ヲ下シタリトス．P_{xy} ノ XY 平面上ニ於ケル座標ヲ (x, y) トシ $PP_{xy}=z$ トスルトキ (x, y, z) ヲ以テ點 P ノ座標トス．云ヒカヘレバ，P ヨリ ZY, XZ, YX 平面ヘソレゾレ垂線 PP_{zy}, PP_{xz}, PP_{xy} ヲ引クトキソレラノ長サガソレゾレ x, y, z ニ等シ．

47. 曲線及曲面．

x, y, z ノ間ニ一ツノ方程式アヲバ，ソノ方程式ヲ滿足スル x, y, z ノ組ハ無數ニアリ．x 及 y ヲ定ムルトキコノ方程式ヨリ z ヲ定メ得可キヲ以テ，一般ニ XY 平面上ノ一點ニ於テ之ニ引キタル垂線上ニコノ方程式ヲ足滿スル點アリ．故ニコノ方程式ヲ滿足スル點ノ軌跡ハ一ツノ曲面ナル可シ．即曲面ハ一般ニ

$$f(x, y, z)=0$$

ナル形ノ式ニテ表サル．特ニ一次方程式

$$ax+by+cz=d$$

ハ平面ヲ表スコトヲ證明スルコトヲ得．又一點 (a, b, c) ヲ中心トシ半徑 r ナル球ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

ナルコト明ナリ．（本節問 9 參照）．

次ニ x, y, z ノ間ニ二ツノ方程式アラバ，之等ヲ同時ニ滿足スル點ハ二ツノ曲面ノ上ニアリ．從ツテ一般ニソノ交リナル曲線ヲ表スベシ．又 x, y, z ガ共ニ一ツノ變數 t ノ函數ナルトキ，t ヲ變ズレバ點ガ運動シテ一ツノ曲線ヲ書ク可シ．故ニ曲線ハ又

$$5=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)$$

ナル形ニモ表スヲ得．特ニ f_1, f_2, f_3 ガ凡テ一次ナラバ，即 $x=a_1t+b_1$, $y=a_2t+b_2$, $z=a_3t+b_3$ ハ直線ヲ表スコトヲ證明スルヲ得．

問 19. $xy+yz+zx=1$ ノ如キ方程式ニ於テ $z=0$ トシタルモノハ前ノ曲面ノ何ヲ表スカ．

問 20. $x^2+y^2=1$ ノ如ク z ヲ含マザル方程式ハ空間ニテ何ヲ表スカ．

問 21. $x=y^2+z$, $z=x^2-y$ ノ如キ曲線ノ方程式ヨリ z ヲ消去シタル $x+y=x^2+y^2$ ハ何ヲ表スカ．

問 22. $x^2+y^2+z^2=9$ ハ何ヲ表スカ．之ト $x=t$, $y=2t$, $z=t+1$ ナル直線トノ交點ヲ求ム．

問 23. 曲線 $y=x^2$ ヲ X 軸ヲ軸トシテ一回轉シテ生ズル曲面ノ方程式ヲ求ム．

第二章

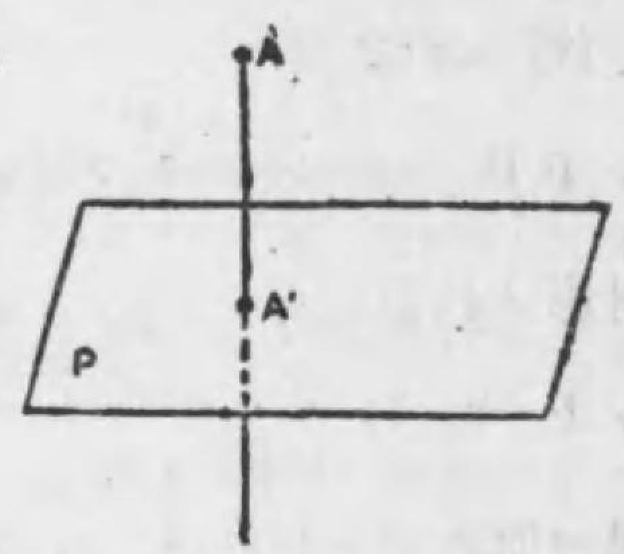
立體解析幾何學

48. 射　影.

(i)　一平面 P 上ニ投スル一點 A ノ射影.

ソノ一點 A ヲ通ル直線トソノ平面トノ交點 A′ ヲ平面上ニ投スル A 點ノ射影トイフ. 若シソノ直線ガソノ平面 P ニ垂線ナラバ, ソノ射影ヲ直射影 (orthogonal projection) トイフ.

第四十八圖

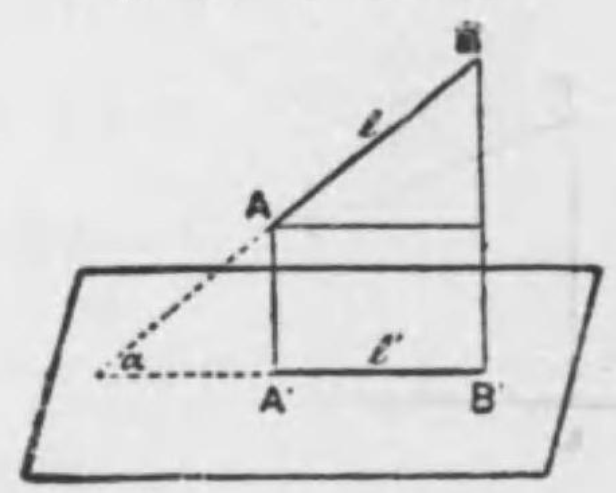


(ii)　一平面上ニ投ズル一直線ノ直射影.

ソノ直線上ノ各點ノ直射影ノ軌跡ヲイフ. 一平面上ニ投ズル長サ l ナル線分ノ直射影ノ長サ l' ハ l ニソノ直線トソノ平面トノナス角 α ノ餘弦ヲ掛ケタルモノニ等シ.

即チ　　$l'=l\cos\alpha.$

第四十九圖



(iii)　一直線上ニ投ズル一點ノ直射影. ソノ點ヨリソノ直線ヘノ垂線ノ足ヲイフ.

(iv)　一直線 L 上ニ投ズル他ノ直線 L′ ノ直射影.

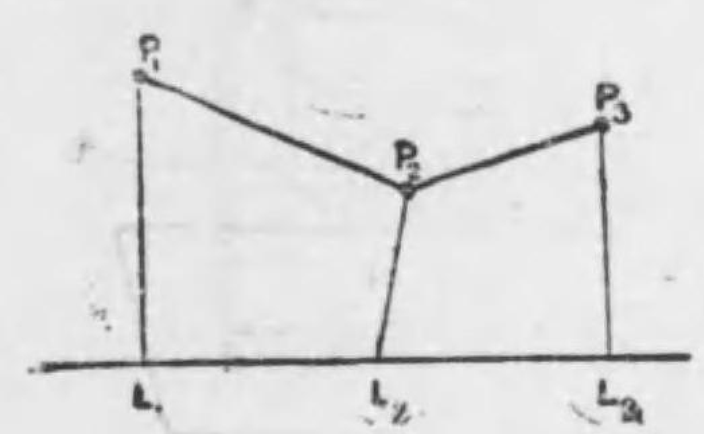
L′ 上ノ各點ノ直射影ノ軌跡ヲイフ. 線分ノ直射影ハソノ兩端ノ直射影ノ連絡線分デアル. 長サ l ナル線分ノ直線 L 上ニ於ケル直射影ノ長サ l' ハ, ソノ線分ト直線 L トノナス角 α ノ餘弦ヲ l ニ掛ケタルモノニ等シ,

即チ　　$l'=l\cos\alpha.$

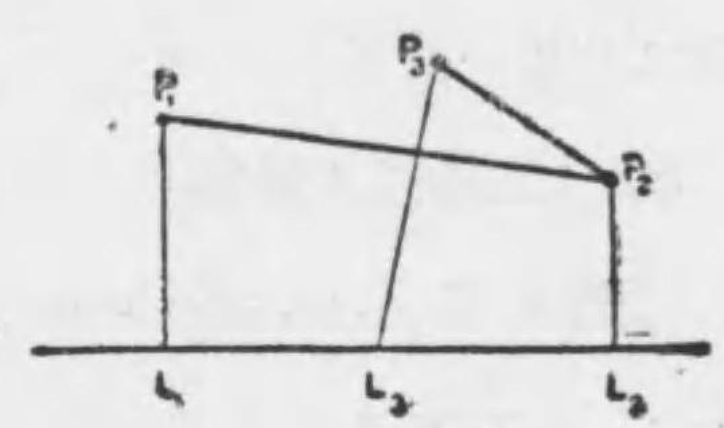
(v)　定理. P_1, P_2, P_3 ナル三點アリ. 一直線上ニ投ズル P_1P_3 ノ直射影ハ同ジ直線上ニ投ズル P_1P_2, P_2P_3 ノ直射影ノ代數的和ニ等シ. 證明. P_1, P_2, P_3 ノ直射影ヲ夫々 L_1, L_2, L_3 トス. L_2 ガ L_1, L_3 ノ間ニアルトキハ本定理ハ明カデアル. 若シ L_2 ガ L_1, L_3 ノ間ニナクシテ L_3 ガ L_1, L_2 ノ間ニアリトスル. 然ルトキハ

$$L_1L_3=L_1L_2-L_3L_2=L_1L_2+L_2L_3.$$

等五十圖



第五十一圖

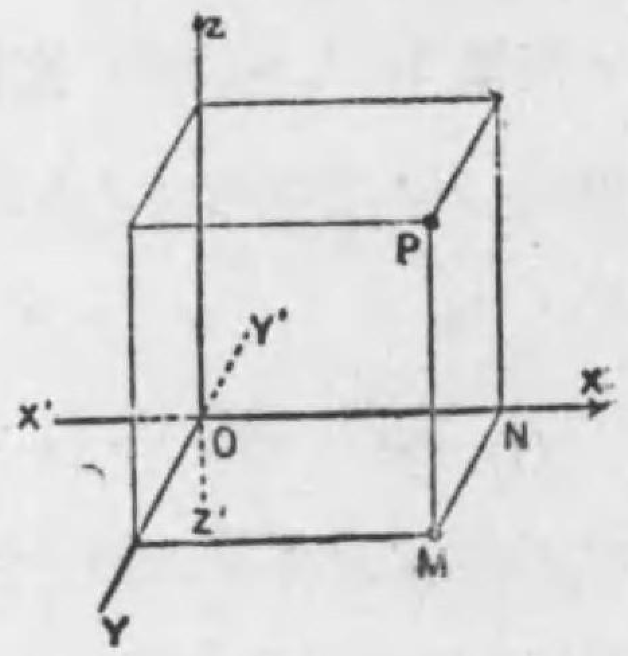


但シ P_1P_2 ガ直線トナス角ヲ鋭角ト考ヘルトキハ P_2P_3 ガ直線トナス角ハ鈍角デアル. 從テ L_2L_3 ハ負ト見ラルヽノデアル.

49. 空間ニ於ケル點ノ直座標.

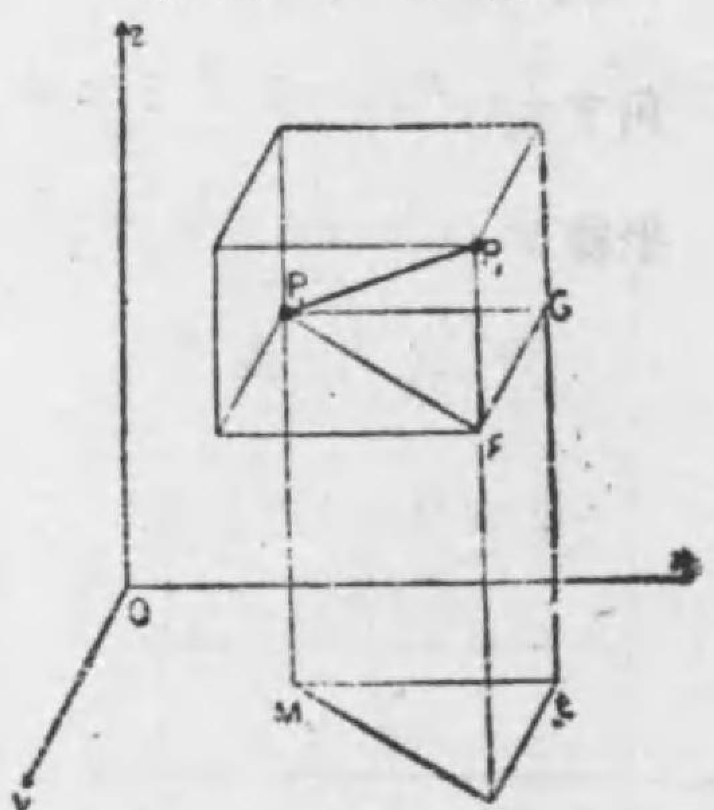
一點 O ヲ原點ニトリ, O ニ於テ互ニ直交スル三直線 XOX′, YOY′, ZOZ′ ヲ引キ, コレヲ夫々 x 軸, y 軸, z 軸ト名ヅケ, 平面 XOY, YOZ, ZOX ヲ夫々 xy 平面, yz 平面, zx 平面トイフ.

第五十二圖



空間一ノ點 P ヨリ xy 平面へ垂線 PM ヲ引キ, M ヨリ OX へ垂線 MN ヲ引キ ON$=x$, MN$=y$, PM$=z$ ナリトスレバ, P ノ座標ハ (x, y, z) ニシテコレニヨリテ P 點ノ位置ハ確定セラル.

第五十三圖



50. 二點間ノ距離.

二點ヲ $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ トスレバ

$$P_1P_2^2 = P_1F^2 + P_2F^2$$
$$= (M_1E^2 + M_2E^2) + P_2F^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$
$$OP_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

P_1P_2 ノ中點ヲ (x', y', z') トスレバ

$$x' = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y' = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z' = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

問 題

(1) 次ノ二點間ノ距離ヲ求ム.

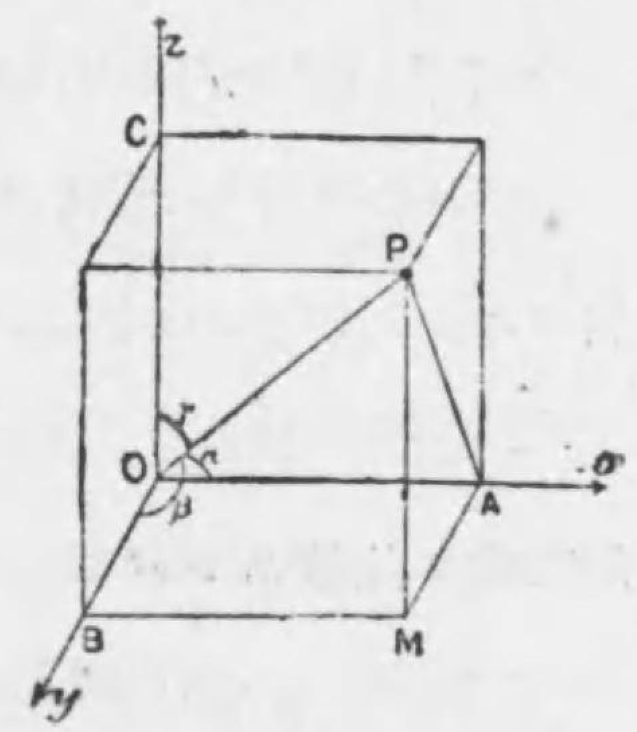
(a) P(3, 2, 5), Q(1, 3, 2),

(b) P(3, −2, 0), Q(5, 7, −6),

51. 方向餘弦 (direction cosine).

OP ガ坐標軸ノ正方向トナス角ヲ夫々 α, β, γ トシ, 點 P ノ坐標ヲ (x, y, z) トセバ

第五十四圖



$$\left.\begin{aligned} x &= OA = OP\cos\alpha \\ y &= OB = OP\cos\beta \\ z &= OC = OP\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 = OP^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

然ルニ $x^2+y^2+z^2=\mathrm{OP}^2$

∴ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (2) (公式)

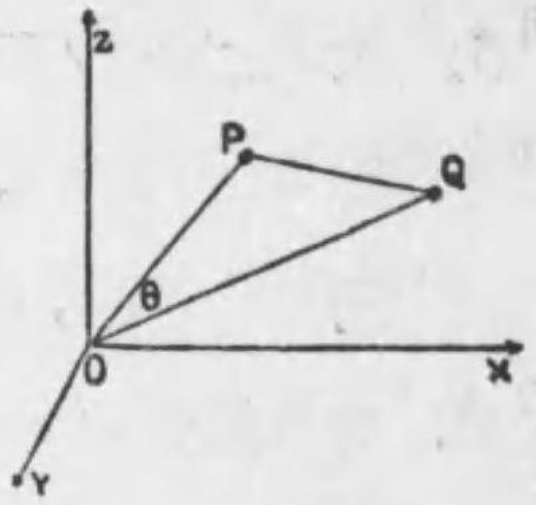
コノ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ヲ直線 OP ノ方向餘弦トイヒ，通常ハ l, m, n ヲ以テ表ハス．然ルトキハ

$$l^2+m^2+n^2=1 \qquad (2)' \text{ (公式)}$$

52. 二直線間ノ角 θ.

二直線ノ方向餘弦ヲ夫々 l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2 トス．今二直線ニ平行ニ原點ヲ通リテ OP, OQ ヲ引キ，ソノ夾角ヲ θ トスレバ，此 θ ハ所要ノ角デアル．OP, OQ 上ニ夫々 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$，$\mathrm{Q}(x_2, y_2, z_2)$ ヲトレバ，

第五十五圖



$$\mathrm{PQ}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$
$$=(x_2^2+y_2^2+z_2^2)+(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)$$
$$=\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OP}^2-2\mathrm{OQ}\,.\,\mathrm{OP}(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)$$

然ルニ $\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OP}^2-2\mathrm{OQ}\,.\,\mathrm{OP}\cos\theta$,

[第二餘弦法則]

此二式ヲ比較スレバ

$$\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 \qquad (3) \text{ (公式)}$$

コレニヨレバ θ ハ求メラル．

系 1. 二直線ガ直角ヲナスタメノ條件ハ

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0. \qquad (4)$$

系 2. $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)^2$

$$=(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)$$
$$-(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)^2$$
$$=(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1^2).$$

系 3. 二直線ガ平行ナルコトノ條件ハ $\dfrac{l^1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.

何トナレバ，二直線ガ平行ナルトキハ交角 $\theta=0$, 從テ $\sin\theta=0$,

∴ $(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2=0$, コレガ實數 l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2 ニ對シテ成立スルタメニハ

$$m_1n_2-m_2n_1=0, \quad n_1l_2-n_2l_1=0, \quad l_1m_2-l_2m_1=0.$$

從テ $\dfrac{l_1}{l^2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.

故ニコレハ二直線ガ平行ナルタメノ條件デアル．

問　題

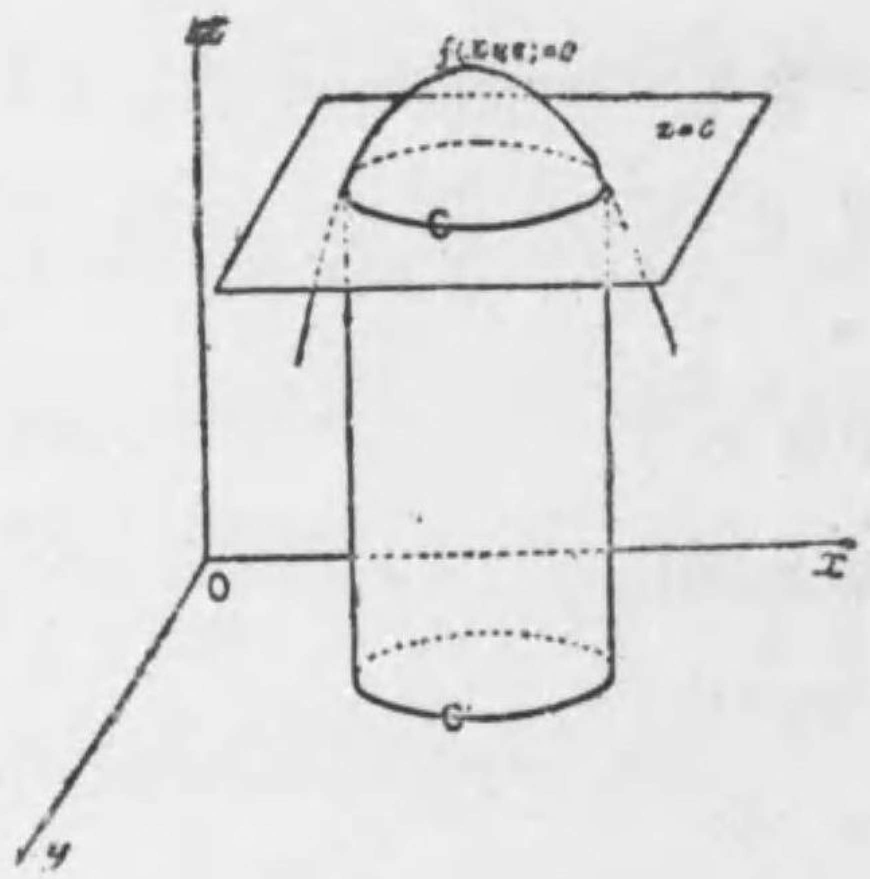
(2) (a) 三點 A(1, 2, 3), B(2, 3, 1), C(3. 1, 2) ハ正△ノ頂點ナルコトヲ證明セヨ，(b) OA, OB ノ方向餘弦ハ如何，(c) OA, OB ノ夾角ノ餘弦如何．

53. 表面ト截リロ.

坐標 x, y, z ノ間ノ關係ヲ表ハス方程式ヲ $f(x, y, z)=0$ トスレバ, コレハ點 (x, y, z) ノ軌跡ヲ示スモノデ一般ニハ曲面ヲ表ハス.

若シ $z=c$ トオケバ $f(x, y, c)=0$ トナル. コレハ表面 $f(x, y, z)=0$ ト平面 $z=c$ トノ截リロナル曲線 C ノ xy 平面上ニ投ズル直射影 C′ ノ方程式デアル. 勿論 C ト C′ トハ合同デアル.

第五十六圖



今考ヘタル

$$f(x, y, c)=0$$

ハ xy 平面上デハ平面曲線 C′ ヲ表ハスモノナルガ, 立體的ニハ一ツノ壔形面 (cylindrical surface) ヲ表ハス. 即チ曲線 C′ ヲ通リ, z 軸ニ平行ニ動ク所ノ直線ニヨリテ生ズル曲面ヲ表ハス.

例　$\alpha^2+y^2=r^2$　　直圓壔

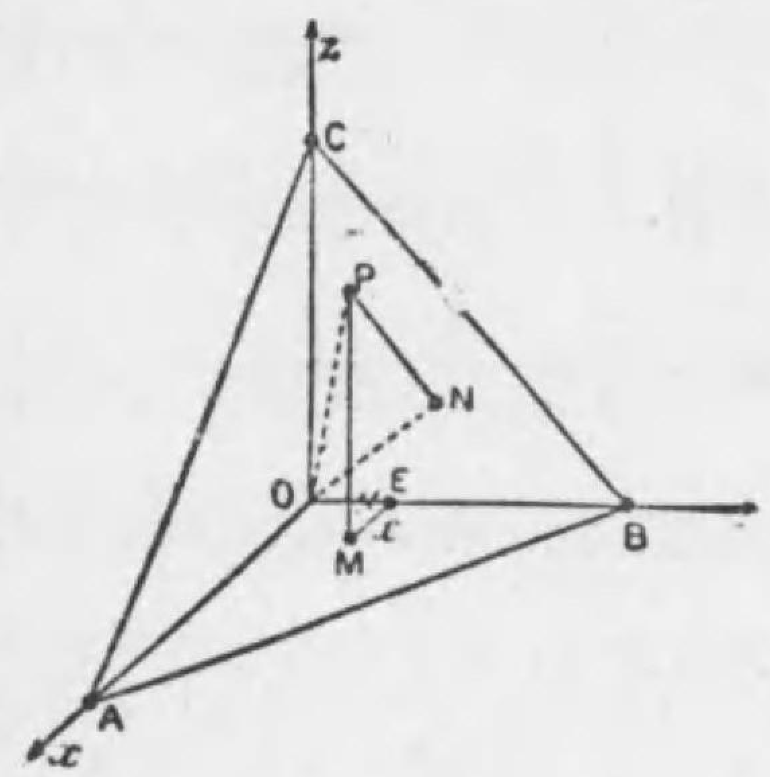
　　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　楕圓壔

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad xy\ 面ニ垂直ナル平面.$$

54. 平　面.

(i) 平面ノ方程式. 原點 O ヨリ, 平面 ABC へ引ケル垂線ノ足ヲ N トシ, ON$=p$, ON ノ方向餘弦ヲ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ トス. 平面 ABC 上ノ任意ノ點ヲ P(x, y, z) トスレバ, OP ノ ON 上ニ投ズル直射影ハ ON 即チ p デアル. 然ルニ P ヨリ xy 面へノ垂線ヲ PM, M ヨリ y 軸へノ垂線ヲ ME トスレバ ME$=x$, OE$=y$, PM$=z$. 而シテ第117頁ノ定理ニヨリ OP ノ ON 上ニ投ズル直射影ハ OE, EM, MP ノ ON 上ニ投ズル直射影ノ和 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$ ニ等シ.

第五十七圖



故ニ
$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p \qquad (1)$$
デアル. 故ニコノ (1) ハ原點ヲ通リ定方向ヲモツ定長線分ノ端ニ於テコレニ垂直ナル平面上ノ任意ノ點ノ坐標ニヨリテ滿足セラルヽ方程式デアル, 從テソノ平面ノ方程式デアル. 而シテ (1) ハ一次方程式デアルカラ平面ヲ表

ハス方程式ハ一次ナルヲ知ル.

次ニ一次方程式

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z=\mathrm{D},\quad (\mathrm{D}>0) \qquad (2)$$

ヲトリ, コレヲ $\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}$ デワレバ

$$\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}_2}}x+\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}y+\frac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}z$$

$$=\frac{+\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}_2}} \qquad (2)'$$

ヲ得.

故ニ $\dfrac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}},\ \dfrac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}},\ \dfrac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}_2}}$ ヲ

方向餘弦ト考ヘバ (2)′ 從ツテ (2) ハ平面ヲ表ハス方程式ニナル, 即チ一次方程式ハ平面ヲ表ハス. 以上ヲ總合スレバ,「平面ハ一次方程式デ表ハサレ, 逆ニ一次方程式ハ平面ヲ表ハス」ヲ知ル.

(ii) 平面ノ方向餘弦.

平面ノ方向ハ, ソノ垂線ノ方向ニヨリテ決定サレルカラ, 垂線ノ方向餘弦ヲ以テ, ソノマヽ平面ノ方向餘弦トシテ用フル, 故ニ

(iii) 二平面ノナス角ハ

原點ヨリ, ソノ二平面ヘ引ケル垂線ノ夾角ニ等シ.

(iv) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ ハ x, y, z 三軸ヨリ截リトル部分ガ夫々 a, b, c ナルヤウナ平面ノ方程式デアル.

例. 二平面 $ax+by+cz+d=0$, $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ノ夾角 θ ヲ求ム. $(d<0,\ d_1<0)$. トス.

解. 原點ヨリコノ二平面ヘノ垂線ガ三軸トナス角ヲ夫々 α, β, γ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ トス. コノ二垂線ノ夾角ハ二平面ノ夾角 θ ニ等シ. 故ニ

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1$$

然ルニ (i) ヨリ

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\alpha_1=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},\quad \cos\beta_1=\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},$$

$$\cos\gamma_1=\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}.$$

デアルカラ

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}(aa_1+bb_1+cc_1).$$

θ ハコレニヨツテ定マル.

系. 二平面ガ垂直ナルコトノ條件ハ $aa_1+bb_1+cc_1=0$,

又二平面ガ平行ナル條件ハ $\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}=\dfrac{c}{c_1}$ デアル.

問　　題

(3) 次ノ様ナ平面ノ方程式ヲ作レ.

(a) 原點ヨリノ垂線ノ長サハ 5, ソノ垂線ノ方向餘弦ハ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$ ナル平面,

(b) 坐標軸上ノ截部ガ夫々 3, 2, 1 ナル平面.

(4) $2x+3x-z+6=0$ ナル平面ノ方向餘弦ヲ求ム. (原點ヨリノ垂線ノ方向餘弦ヲ求ムレバヨイ).

55. 直　　線.

(i) 直線ノ方程式.

直線ハ二平面ノ交リトシテ定マレルモノデアルカラ, 直線ノ方程式ハ聯立方程式デアル. 即チ

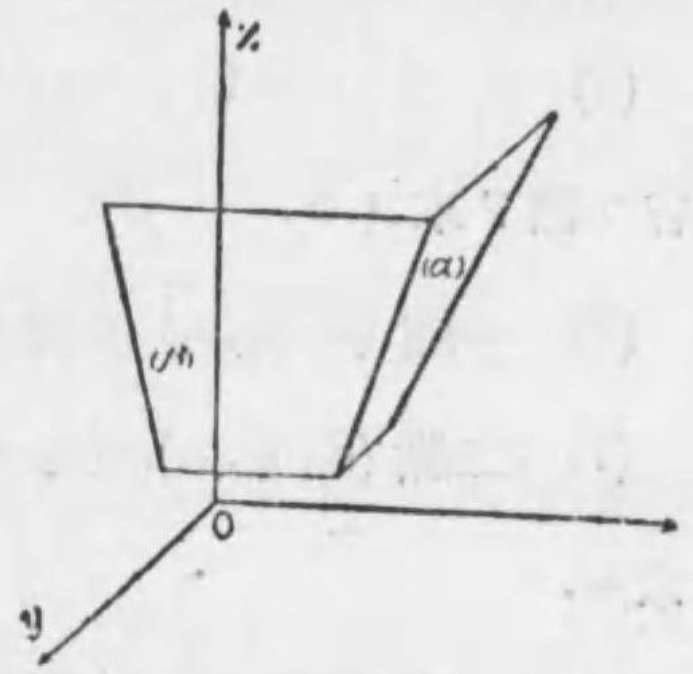
$$\left.\begin{array}{l} x=az+p\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha) \\ y=bz+q\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\beta) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

ノ如キ形デ直線ハ表ハサレル.

コノ第一式ハ xz 平面ニ垂直ナル平面 (α) ノ方程式デ, 第二式ハ yz 平面ニ垂直ナル平面 (β) ノ方程式デアル. 此兩式ヲ聯立ト考ヘバ二平面ノ交リ, 即チ一直線ヲ表ハス

方程式トナル.

第五十八圖



(ii) 方程式 (1) ヲ變形スレバ

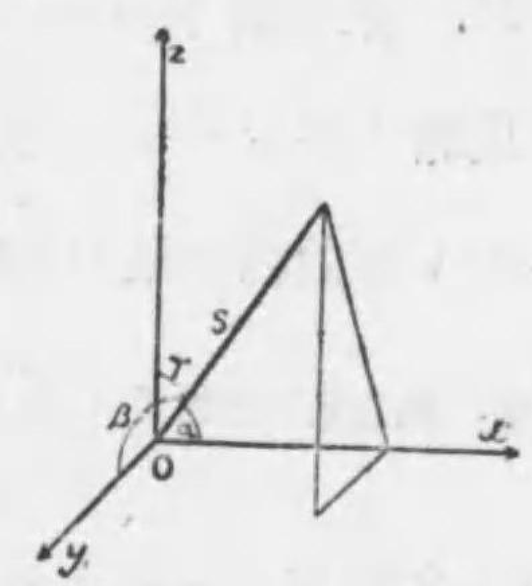
$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z}{1} \qquad (2)$$

ナル形トナル. コノ (2) ハ $(p, q, 0)$ ニヨッテ滿足セラルヽカラ, (2) ハ點 $(p, q, 0)$ ヲ過ル直線ヲ表ハス方程式デアル. 又原點ヲ過ギ (2) ニ平行ナル直線ヲ引クトキハソノ方程式ハ

$$x=az, \quad y=bz \qquad (3)$$

ナルヲ知ル. 但シ平行二直線ノ一坐標面ニ投ズル直射影ハ平行ナレバナリ. 然ルトキハ

第五十九圖



$x=s\cos\alpha,\ y=s\cos\beta,\ z=s\cos\gamma$

(3) ニ代入スレバ

$$\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos\gamma}$$

ナルヲ知ル. 即チ $a:b:1$ ハ方向餘弦ニ比例スルヲ知ル. 依テ (2) ハ $p, q, 0)$ ヲ過リ, 方向餘弦ガ $a, b, 1$ ニ比例スルヤウナ直線ノ方程式デアル.

問　　題

(5) $x-2z-3=0,\ y+z-1=0$ ナル直線ガ xy 面ト出會フ點ヲ求メヨ.

(6) 一點 (x_1, y_1, z_1) ヲ通ル直線ノ方程式ヲ求ム.

(7) 二點 (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) ヲ通ル直線ノ方程式ヲ求ム.

56. 二次曲面 (Quadrics).

I. 球面 (spherical surface).

中心ヲ (a, b, c), 半徑ヲ r トセバ, 球面ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

中心ガ原點ニアルナラバ

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

II. 錐形面 (conical surface, or cone).

頂點ト呼バルヽ一定點及ビ準線 (guiding curve) トイハルヽ定曲線ヲ通ル直線ニヨリテ生ズル表面ヲイフ.

例. 橢圓錐ノ方程式ハ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0.$

何トナレバ, $z=k$ トセバ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\text{const}$ トナル. コレハ橢圓ヲ表ハス. 即チ xy 平面ニ平行ナル平面ニヨツテノ截面ハ常ニ橢圓デアル.

$x=0,\ y=0$ トオケバ $z=0.$ 故ニ頂點ハ原點ニアル.

又 $y=0$ トオケバ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0.$ コレハ母線タル二直線ヲ表ハス. 準線ガ圓ナラバ圓錐デソノ方程式ハ次ノ如シ.

$$x^2+y^2-c^2z^2=0$$

III. 橢圓體 (ellipsoid).

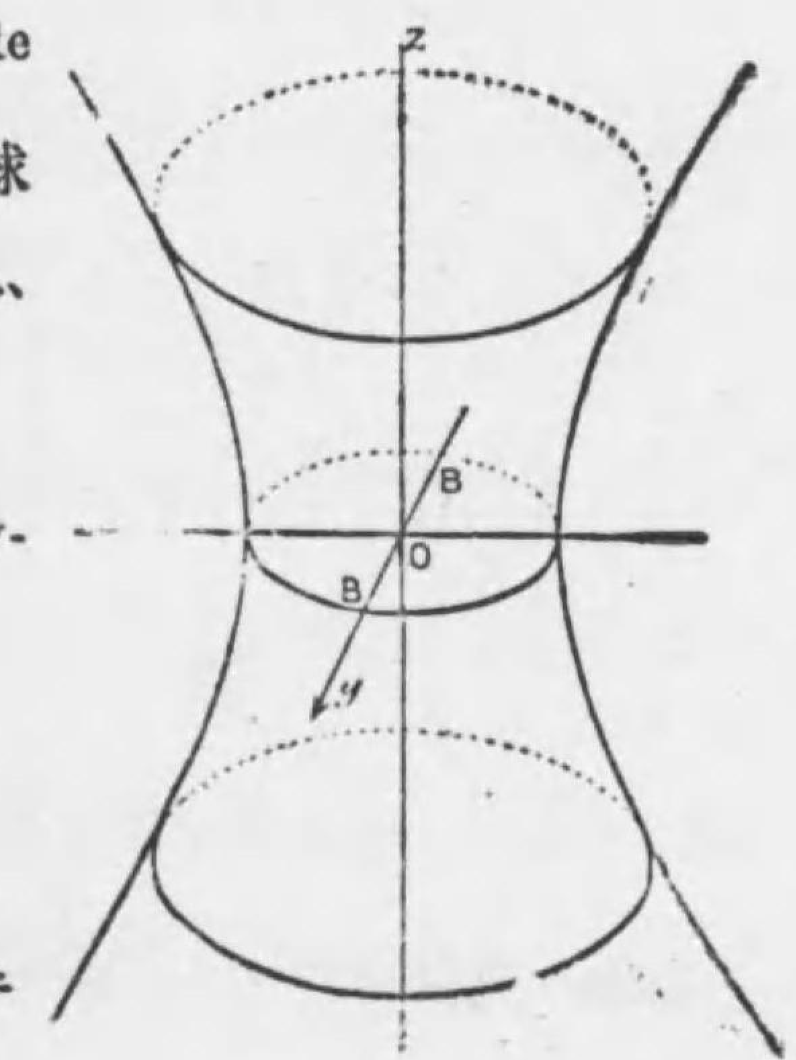
方程式ハ
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$a=b$ ナルトキハ

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

此トキ spheroid トイフ, $a>c$ ナラバ扁球 (oblate spheroid), $a<c$ ナラバ長球 (prolete spheroid) トイハル.

第六十圖



IV. 一葉双曲面 (Hyperboloid of one sheet).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

xy 平面ニ平行ナル平面ニテノ截面ハ常ニ橢圓ヲナ

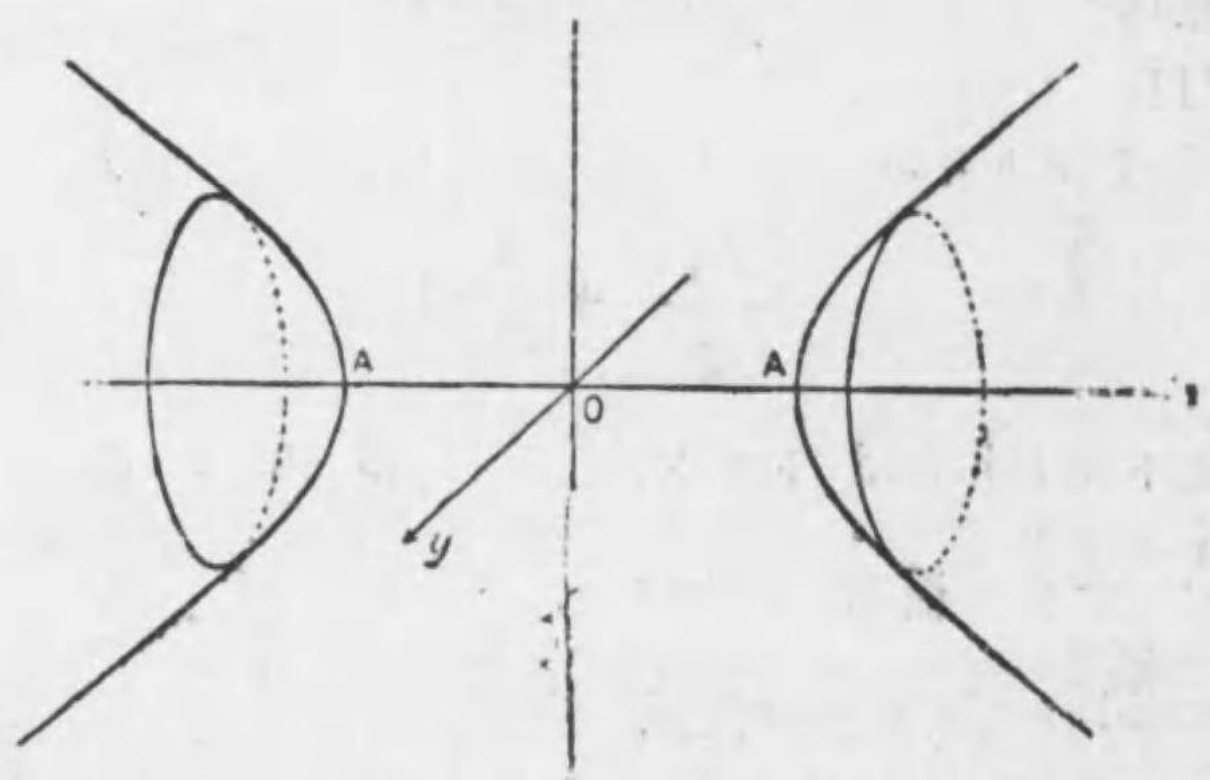
シ，他ノ坐標面ニ平行ナル平面ニヨリテノ截面ハ双曲線デアル.

V.　二葉双曲面 (hyperboloid of two sheets).

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

x 軸ニ垂直ナル平面ニテノ截口ハ楕圓デアル．何トナレ

第六十一圖

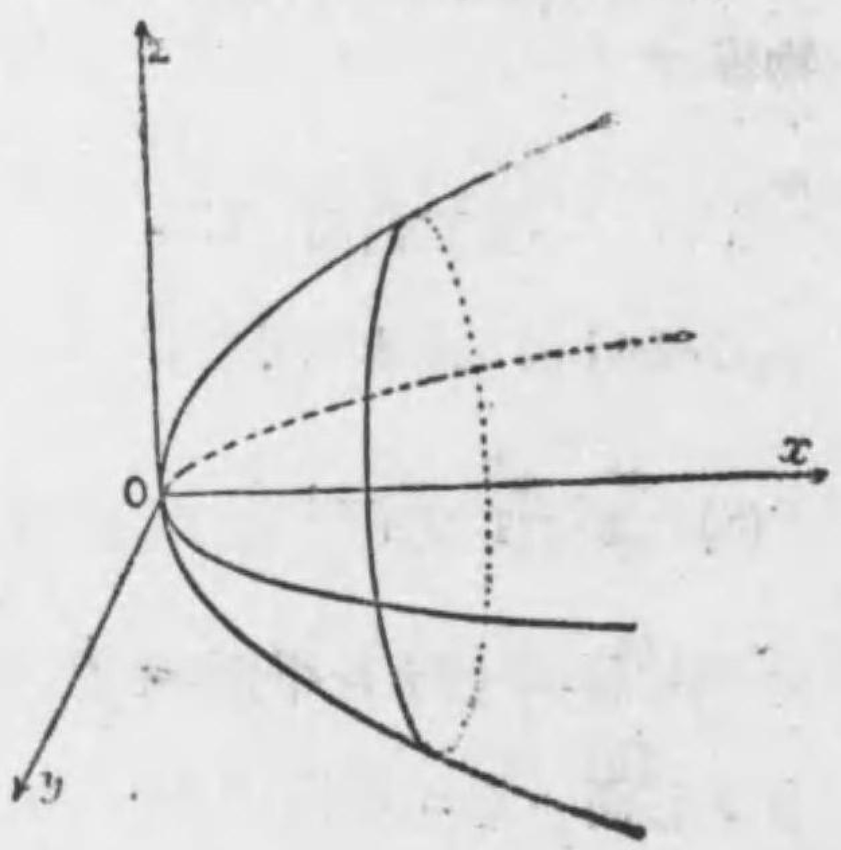


バ$x=k$ ナラバ方程式ハ

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{a^2}-1$$

デアルカラ．然シ $|x|<a$ ナルトコロデハ右邊ハ負數ニナルカラ面ハナイ．y 軸,

第六十二圖



z 軸ニ垂直ナル平面デノ截口ハ共ニ双曲線デアル

VI.　楕圓的拋物面 (elliptic paraboloid).

$$\frac{y^2}{l}+\frac{z^2}{l'}=x$$

x 軸ニ ⊥ ナル平面ニテノ截面ハ常ニ楕圓デアル.

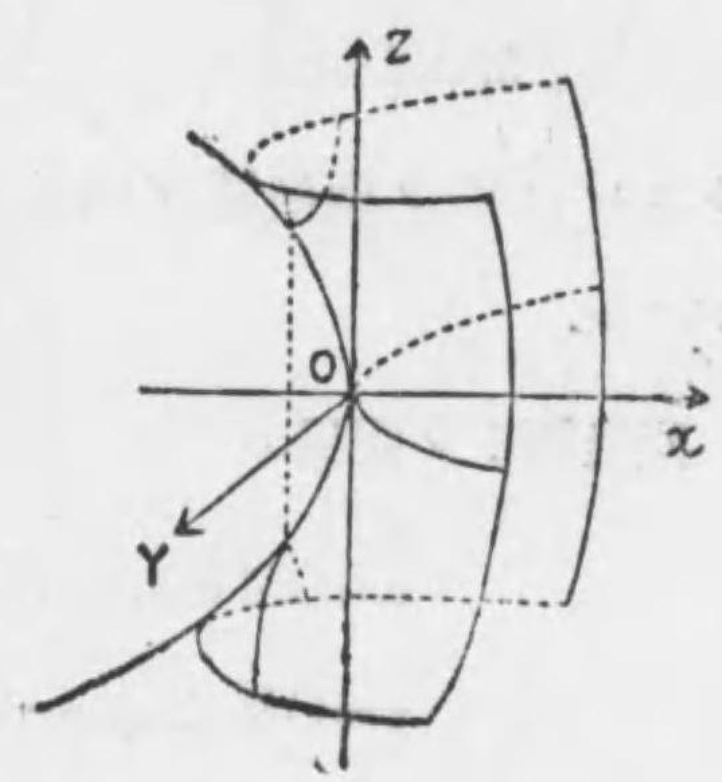
y 軸又ハ z 軸ニ垂直ナル平面デノ截面ハ常ニ拋物線デアル.

VII.　双曲線的拋物面 (hyperbolic paraboloid).

$$\frac{y^2}{l}-\frac{z^2}{l'}=x$$

コレハ x 軸ニ垂直ナル平面ニテノ截面ハ双曲線，z 軸及 y 軸ニ ⊥ ナル平面ニテノ截面ハ共ニ拋物線ナル様ナ曲面デアル.

第六十三圖



問　　題

(8)　次ノ方程式ガ表ハス表面ヲ考ヘヨ.

(a)　$x^2+y^2+z^2-2z=4$,

(b)　$x^2+y^2=ax$,

(c) $4x^2+5y^2+6z^2=20$,

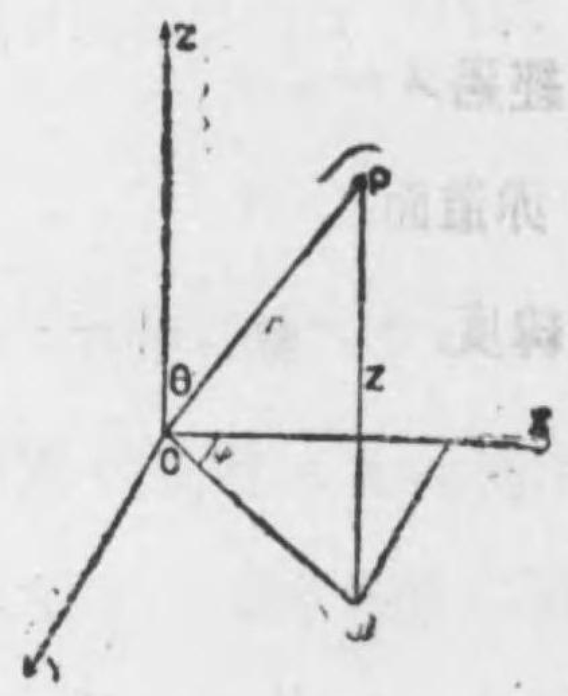
(d) $5x^2+3y^2-z^2=0$,

(9) $x^2+4y^2+z^2=1$ ト $z=\dfrac{1}{2}$ トノ交リハ何カ.

(10) $Ay^2+Bz^2=x$ ト $z=k$ トノ截口ハ如何ナル曲線ナルカ.

57. 空間ニ於ケル極坐標.

第六十四圖



$$\left.\begin{aligned} OP&=r \\ \angle POZ&=\theta \\ \angle MOX&=\varphi \end{aligned}\right\}$$

トスレバ P ノ極坐標ハ (r, θ, φ) デアル.

直坐標トノ關係ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=OM\cos\varphi=r\,\mathrm{sih}\,\theta\cos\varphi \\ y&=OM\sin\varphi=r\sin\theta\sin\varphi \\ z&=r\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

即チ

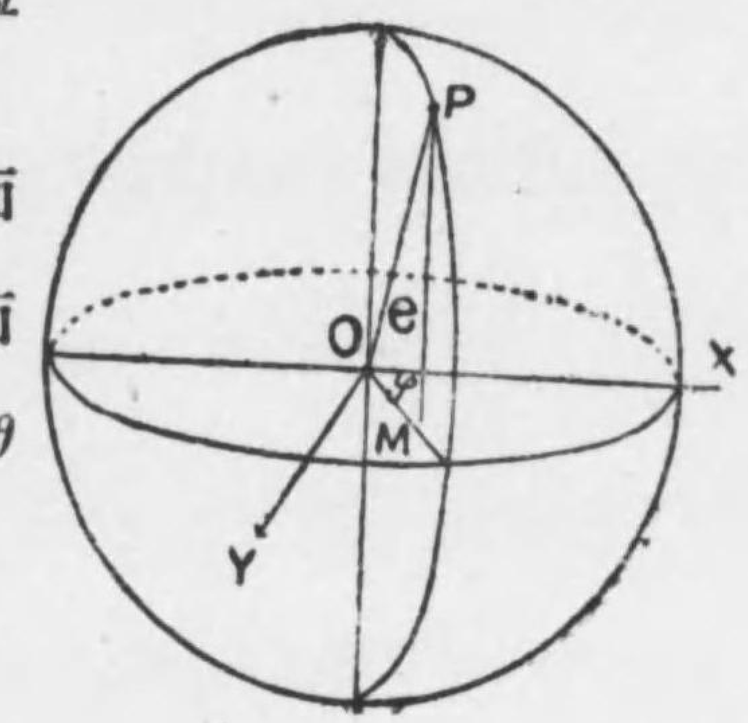
$$\left.\begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\varphi \\ y&=r\sin\theta\sin\varphi \\ z&=r\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

從テ

$$\left.\begin{aligned} r^2&=x^2+y^2+z^2 \\ \tan\varphi&=\frac{y}{x} \\ \tan\theta&=\sqrt{x^2+y^2}/z \end{aligned}\right\}.$$

[註] 天文學テハ θ ヲ天頂距離 (zenith distance), φ ヲ方位 (azimuth) ト稱ス.

第六十五圖



又 OZ ヲ地軸, xz 平面ヲ經過スル子午面, xy 平面ヲ赤道面ニスレバ $90°-\theta$ ハ緯度, φ ハ經度ニ當ル.

昭和六年四月十日　印刷
昭和六年四月廿二日　發行

高等解析幾何學

定價　金壹圓五拾錢

編纂　東京高等工學校

編輯兼發行者　北村一郎
東京市本郷區追分町五十七

印刷者　小川義一
東京市牛込區市谷台町廿二

印刷所　成武堂印刷所
東京市牛込區市谷台町廿二

發行所　（東京市本郷區追分町五七）　有文閣

終