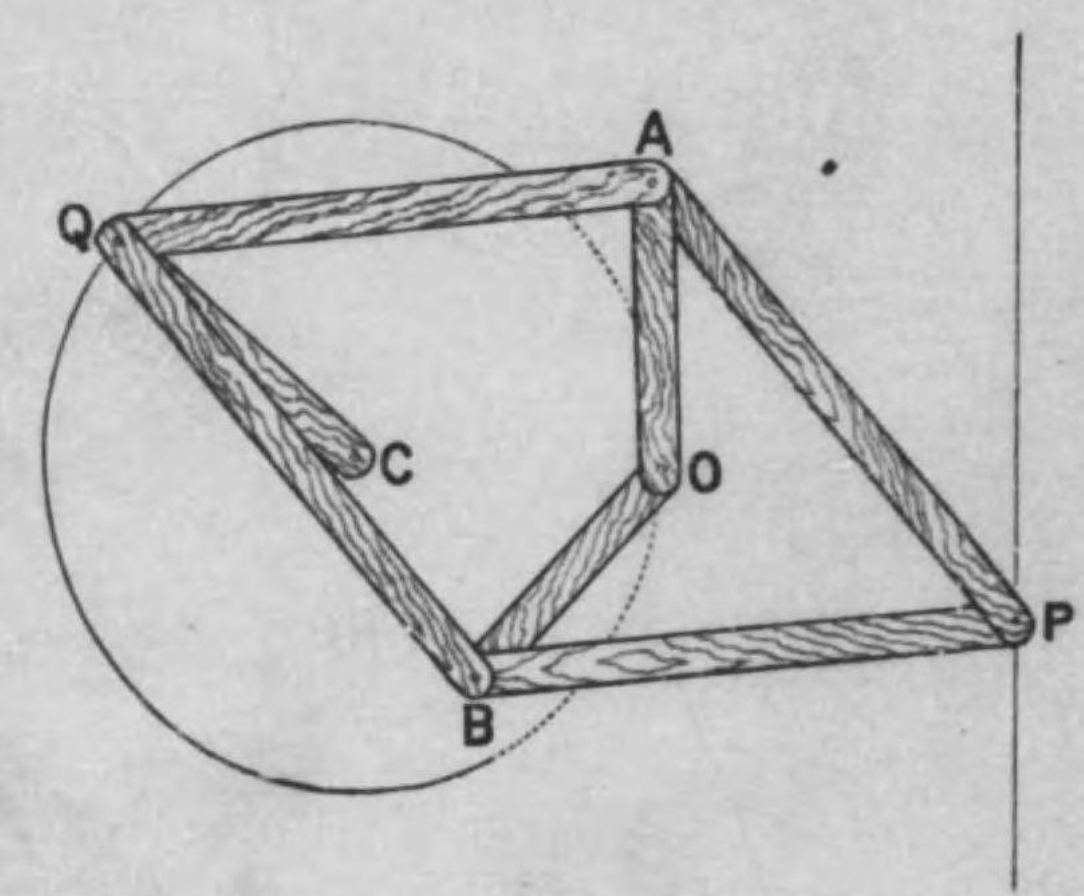
始

# NEW GEOMETRY PLANE

## 直線を引く器

西曆1864年マテハこむばすチ以テ圓周チ畫クト同様ニ器械的ニ直線チ引クコトチ知ラザリシハ極メテ奇異ノコトナリキ。然ルニ此ノ年ニ於テ佛國ノ技師ぽーせりえ[Peaucellier]氏ハ直線チ引クーノ器具チ發見セリ.




或長サノ四枚ノ板 AP, BP, AQ, BQ ト之ヨリ短カキ[或ハ長キ]二枚ノ板 AO, BO チ圖ノ如ク A, P, B, Q, O ニテ接ギ O ハ鋲ニテ圖板ニ留メ其ノ他ハ自由ニ運動セシム. 又 QC ハ便宜ノ長サノ板ニシテ其ノ一端チ Q ニ接ギ C ハ圖板ニ鋲ニテ留メ且 CO チ CQ ニ等シカラシム. サテ Q ガ圖板面チ運動スルニ從ヒ P ハ直線チ畫ク[其ノ理ハ163頁チ見ヨ].

New Geometry,

Plane.

K. NAGASAWA.

長澤龜之助編纂

# 新幾何學

## 教科書

### 平面



發行所
株式會社
國定教科書共同販賣所

# 訂正版序

中等敎育程度ノ幾何學敎科書ガ多クハ單ニ理論一遍ニ馳セ乾燥無味ニシテ中等敎育ノ本領ヲ沒却セルモノ尠ナカラザリシハ識者ノ齊シク鴻嘆セシ所ナリキ，本書ハ是等ノ弊ヲ一掃セントノ考ニテ編纂發刊セシガ今ヤ初版發行以來四星霜ヲ經,採用セラレシ各學校敎員諸氏ノ實際敎授報告注意ハ殆ムド本書ヲシテ適切ノ敎科書タルニ歸向セシムル所アリ，依リテ是等ノ報告注意ヲ參酌シ今玆ニ訂正版ヲ公ニスルコトトナレリ，本書ガ師範,中學,及ビ其ノ他ノ中等敎育程度ノ學校ノ敎科書タルニ一層適切ノモノタルハ是等敎員諸氏ノ注意ヲ多トスルモノトス，聊カ事由ヲ書シテ序トナス，

明治四十年八月　　著者識ス

# 第一版序

本書ハ中學校師範學校其ノ他中等敎育程度ノ敎科用ニ充テムガ爲ニ編纂セリ，其ノ編纂ノ大要ハ次ノ如シ．

1. 他分科トノ連絡　從來行ハルル敎科書ハ數學ノ他分科トノ連絡ニ乏シ，廣ク數學ノ各分科ハ扨テ置キ幾何學ヨリ前ニ修メシ算術並ニ稍前ヨリ始メタル代數學トノ連絡ハ中等敎育程度ノ幾何學トシテ是非トモ之ヲ附ケ置カザルベカラズ．

2. 應用ヲ重ムズ　從來行ハルル敎科書ハ乾燥無味ナルモノ多ク應用ニ乏シ是亦中學敎科用トシテ適當ニ之ヲ加ヘザル可カラズ．

3. 論理學ノ術語ヲ本文ヨリ省ク　從來ノ敎科書ハ論理學ノ術語ヲ用フル重キニ過ギタリ本書ハ是等ヲ一切本文ヨリ省キ簡單ニ頁ノ下段ニ註記シ取捨勝手トシタリ尤モヨレスラ一ケ所ニ纏メズ便宜ノ處ニ例解スルコトトシタリ．

4. 相當ノ定律　面積ノ定理,比例論ノ如キハ算術及ビ代數學ト一層深キ關係アルモノニシテ教授にゅ一かむ氏ノ所謂相當ノ定律[Law of Homology]ニ從フトキハ冗長ノ説述ヲ簡單明了ニシテ生徒ノ悟心ヲ爽カニスルコトト信ジ本書ハ之ニ從ヘリ.

5. 用器畫トノ連絡　幾何學ト用器畫トハ最モ親密ノ關係アルコト言ヲ竢タズ. 然レドモ從來ノ教科書ノ作圖題ノ圖ト用器畫ノ幾何圖ト引キ方同ジカラズ,故ニ本書ハ用器畫トノ連絡ヲ謀リ作圖題ノ圖ハ總テ既知線ハ細線[Fine line],既知點ハ小サキ單圈[Single small circle],作圖ニ入用ナル線ハ斷續線[Dotted line],作リ得タル所要ノ線ハ太線[Thick line],求メ得タル點ハ小サキ復圈[Double small circles]ヲ付シ置ケリ,尤モ定理ノ圖ハ格別ニシテ生徒ニ通曉シ易キコトヲ專一トセリ.

6. 比例論ノ簡明　佶倔冗長ナル比例論ノ此ノ種ノ教科書ヲ用フル生徒ノ年齡學力等ニ不相當ナルハ識者ノ認識スル所ナリ. 余ハ生徒ノ年齡學力等ヲ顧慮シ所論ハ充分簡單ニ



シテ通約スベキ量ニ就キテ論ジ通約スベカラザル量ニ就キテハ近似値ヲ以テ滿足スルコトトセリ尤モ教師諸君時ト場合トニ依リ之ヲ補足セラルルモ固ヨリ妨ナシ.

7. 歷史的註釋　歷史的註釋ハ生徒ニ利益アル興味ヲ與フルモノト信ジ米人び一まん及ビすみす氏ノ書ニ依リ所々ニ記入セリ,尤モ稍疑ハシキモノハ英人ご一氏ノ希臘數學歷史,米人かじょり一氏,英人ぼ一る氏等ノ數學歷史,佛人かたらん氏幾何學ニ依リ其ノ正確ト信ゼラルルモノニ就キ之ヲ掲載セリ.

8. 定理ノ一覽表　本書所載定理ノ一覽表ヲ工夫シ卷末ニ付シテ引用ニ便セリ.

9. 問題ノ撰擇　問題ノ撰擇ニ重キヲ置キ必要ナルモノ,興味アルモノ,實用的ナルモノ,他分科ト關係アルモノ[例ヘバ第三編48題ノ三角形ノ面積ノ式ハ實用的ニシテ,兼テ又三角法ト關係アルガ如ク又第三編18題ノ定理ハ靜力學ニ要用ナルガ如キノ類ナリ]等ヲ適當ニ配合集錄セリ.

10. 補習問題　補習問題ハ本書ヲ講ジ終リテ時

間ニ餘裕アル場合,又ハ補習科等ニ用ヒムガ爲ニ掲載セリ其ノ數少ナキガ如キモ其ノ始ニ例解セル如ク種々ノ方法ヲ以テ試ミルナド能ク問題ヲ玩味スルトキハ十分ノ數ヲ與フルモノト信ズ.

11. 代數學ト幾何學トノ解法ノ比較　代數學ト幾何學トノ解法ノ比較ハ簡單ナル二次方程式ニ歸スルモノヨリ彼此解法ヲ對照シ興味アリテ利益ヲ與フルモノ二三ヲ示セリ.

12. 記號的證明　證明ヲ徹頭徹尾文章ニテ記スルノ迂愚ナルハ余ノ十數年來ノ主張ニシテ世間ノ教科書モ近頃大イニ之ニ傾キタルハ竊ニ余ノ本懐トセル所ナリ本書モ亦固ヨリ適當ニ記號ヲ配シテ證明ヲ簡ニセリ.

13. 定理ノ證明ハ紙ノ裏面ニ跨ラヌコト　定理ノ證明ヲ記スルニハ紙ノ裏面ニ跨ラヌ樣ニセリ此ハ他ト違ヒ幾何學ニテハ一々圖ト對照スルガ爲ニ最モ必要ナルコトト信ズ.

14. 紙幅ノ餘白　節ノ終ニハ成ルベク餘白ヲ置キ[節ノ終ニ限ラズ中途ニテモ必要ニ應ジ餘白ヲ存セリ]教師ヨリ聞キタル必要ノコト又



ハ例題ノ解ノ大要ヲ記入スルノ便ニ供セリ.

15. 教科書ノ簡明　教科書ハ簡明ヲ主トスルコトハ余ガ十數年來ノ持論ニシテ本書ハ出來得ル限リ簡明ナラシメリ.

以上ハ余ガ本書編纂ノ大要ナリ. 本書ヲ採用セラルル諸君ハ改良スベキ適切ノ助言ヲ與ヘラレムコト余ノ切望スル所ナリ.

編者識ス.

明治三十七年八月

# 書中ノ用語及ビ記號

1. **定義** トハ用語ノ意義ヲ確定スルコトナリ.
2. **命題** トハ一ノ事項ノ陳述ナリ.
3. **定理** トハ推理ニ依リテ其ノ眞ナルコトヲ證明セムトスル命題ナリ.
4. **系** トハ定理ヨリ直チニ推定シ得可キ命題ナリ.
5. **記號**

| | | |
|---|---|---|
| $+$ 加. | $-$ 減. | $\sim$ 差. |
| $=$ 等. | $\neq$ 不等. | $\equiv$ 全等. |
| $>$ ヨリ大. | $<$ ヨリ小. | $\angle$ 角. |
| $\hat{R}$ 直角. | $\perp$ 垂線. | $/\!/$ 平行. |
| $\triangle$ 三角形. | ▱ 平行四邊形. | |
| ▭ 矩形. | □ 正方形. | $\backsim$ 相似. |
| $\therefore$ 故ニ. | $\because$ 如何トナレバ. | |
| $\geqq$ $>$或ハ$=$. | $\leqq$ $<$或ハ$=$. | |

# 目次

## 第三編　面積…　110—143.



## 第四編　比例 … …　144—176.



## 補習問題 … … …　177—188.

# 平面幾何學

## 緒論

**1.** **定義** 空間の限りある部分を稱して**立體**と云ふ.

空間ハ分チ得可キモノナリ. 空間ヨリ其ノ一部ヲ引キ離シテ考フルトキハ,コレ立體ナリ.

立體ハ物體ト異ナリ,物體ハ實質體ニシテ木,石ナドノ如シ. 立體ハ物體ノ占有セル空間ノ一部ヲ指シテ云フモノニシテ實質アルニ非ズ.

立體ニハ長サト幅ト厚サト位置トアリ.
而シテ　立體ハ分チ得可キモノナリ.

**2.** **定義** 立體の界を**面**と云ふ.

立體ノ界,卽チ立體ト其ノ周リノ空間トノ界ハ面ナリ. 面ニハ長サト幅ト位置トアレドモ厚サナシ.
而シテ　面ハ分チ得可キモノナリ.

**3. 定義** 面の界を**線**と云ふ.

面ノ一部ト他ノ一部トノ界ハ線ナリ.

線ニハ長サト位置トアレドモ幅モナク厚サモナシ.

而シテ 線ハ分チ得可キモノナリ.

**4. 定義** 線の界を**點**と云ふ.

線ノ一部ト他ノ一部トノ界ハ點ナリ.

點ニハ長サモ幅モナク亦厚サモナシ唯位置アルノミ. 而シテ 點ハ分チ得可カラザルモノナリ.

**注意** 立體,面,線,及ビ點ハ幾何學ニ於テ論ズル基本タリ而シテ是等ハ亦逆ニ次ノ如ク云ヒ得可シ.

I. 點ハ唯位置アルノミニシテ大サナシ.

II. 點ガ動クトキハ線ヲ生ズ.

[此ノ運動ノ爲ニ長サヲ生ズ].

III. 線ガソレ自身ニ沿ウコトナシニ動クトキハ面ヲ生ズ.

[此ノ運動ノ爲ニ長サノ外ニ幅ヲ生ズ].

IV. 面ガソレ自身ニ沿ウコトナシニ動クトキハ立體ヲ生ズ.

[此ノ運動ノ爲ニ長サト幅トノ外ニ厚サヲ生ズ].



**5. 定義** 點,線,面,立體,或は此の集合を**圖形**と稱す.

**6. 定義** **直線**とは線の各部が同一の方向をもつものなり.

故ニ 直線ハ其ノ一部ヲ取リテ其ノ任意ノ一部ノ上ニ如何樣ニ相重ヌルモ其ノ方向相合ス.

緊張シタル絲,又ハ錘ヲ吊シタル絲ノ如キハ直線ノ觀念ヲ與フ.

直線ハ雙方トモ長サニ制限ナシ.

若シ 直線ノ一部分ヲ考ヘタルトキハ**分線**,或ハ**有限直線**ト稱ス.

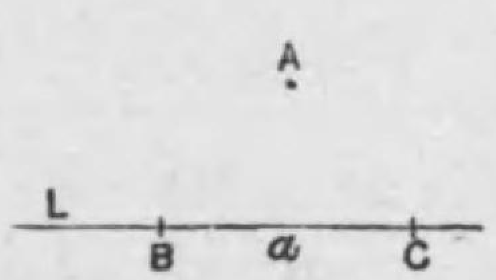
**注意** 線ノ各部ガ始終同一ノ方向ヲモタザルトキハ之ヲ**曲線**ト云フ.

**7.** 一ノ點ハ一ノろーま文字ニテ表ハサル.

例ヘハ「點A」或ハ「A點」ト云フガ如シ.

直線ハ一ノろーま文字,又ハ其ノ上ノ二點ノ文字ニテ表ハサル.

例ヘバ「直線L」又ハ「直線BC」ト云フガ如シ.




若シ 二點B,Cノ間

ニ含マルル直線ノ一部ヲ表ハサムニハ「分線BC」ト云フ. 分線ハ又其ノ長サヲ表ハス小文字ニテ表示セラル. 例ヘバ「分線$a$」ト云ヘバ「$a$ナル長サノ直線」ヲ意味スルガ如シ.

直線BCノ**延線**トハ BC ヲ B ヨリ C ノ向キヘ引キ延バシタルモノヲ云ヒ又 CB ノ延線トハ BC ヲ C ヨリ B ノ向キヘ引キ延バシタルモノヲ云フ.

8. **定義** **平面**とは其の中にある任意の二點を結び付くる直線が全く其の面上にある如きものを云ふ.*

靜水ノ面,平滑ナル鏡ノ面ノ如キハ平面ノ觀念ヲ與フ.

9. **定義** **幾何學**とは圖形の形狀,大さ及び位置に就きて論ずる學科なり.

**平面幾何學**ハ一平面上ニアル圖形ニ就キテ論ジ,**立體幾何學**ハ一平面上ニアラザル圖形ニ就キテ論ズルモノナリ.

* 大工がさしがねノ縁ヲ削リタル板ノ面ニ當テテ其ノ平滑ナルヤ否ヤヲ驗スルハ此ノ定義ノ應用ニ外ナラズ.



10. **定義** **公理**とは推理の基本とする所の命題なり.

公理ハ他ニ依リテ之ヲ說明スル能ハズ吾人ハ吾人ノ經驗ニ依リテ眞ナリト認ムルモノナリ.

公理に**普通公理**及び**幾何學公理**の二種あり.

普通公理ハ各種ノ量ニ關スルモノ,幾何學公理ハ特ニ幾何學的量ニ關スルモノナリ.

幾何學ニ於テ用フル普通公理ハ次ノ如シ.

I. 全量ハ其ノ各部分ノ和ニ等シ.

故ニ 全量ハ其ノ部分ヨリ大ナリ.

II. 同ジ量,或ハ相等シキ量ニ等シキ量ハ相等シ.

III. 相等シキ量ニ相等シキ量ヲ加フレバ其ノ和ハ相等シ.

IV. 相等シキ量ヨリ相等シキ量ヲ減ズレバ其ノ殘リハ相等シ.

V. 相等シキ量ト不等ノ量トノ和ハ相等シカラズ. 大ナル量ト加ヘタル和ガ他ノ和ヨリ大ナリ.

VI. 相等シキ量ヲ不等ノ量ヨリ減ズレバ其ノ殘リ

ハ相等シカラズ.

大ナル量ヨリ減ジタル殘リガ他ノ殘リヨリ大ナリ.

VII. 相等シキ量ヨリ不等ノ量ヲ減ズレバ其ノ殘リハ相等シカラズ.

大ナル量ヲ減ジタル殘リガ他ノ殘リヨリ小ナリ.

VIII. 相等シキ量ノ同ジ倍數ノ量ハ相等シ.

又 相等シキ量ノ同ジ分數ノ量モ相等シ.

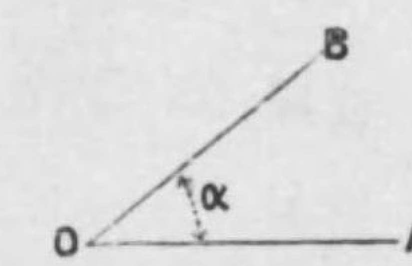
[幾何學公理ハ後ニ說ク可シ]

# 第一編　直線

## 第一節

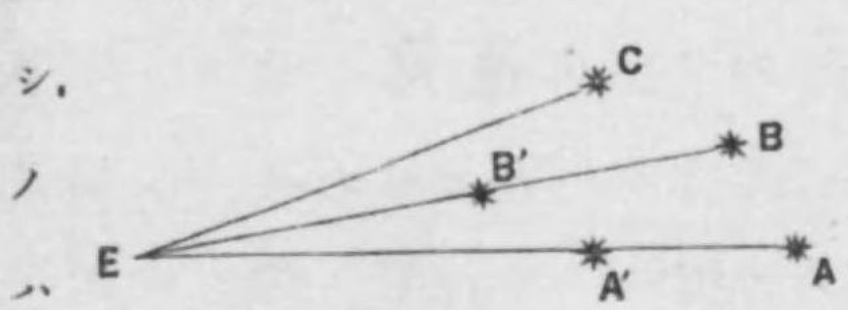
## 直線及び角

**11.** **定義**　同じ點より引ける二直線は**角**をなすと云ひ其の點を角の**頂點**,其の二直線を角の**邊**と云ふ.




一點OヨリヒケルOAガOヲ樞(カナメ)トシテOAノ位置ヨリOBノ位置マデ廻轉スルトキハOAハ二直線OA,OBノ間ノ角ダケ廻轉セリト云ヒ角ノ大小ハ此ノ廻轉ノ量ノ多少ニ同ジ.

角ハ此ノ廻轉ノ量ノ多少ニ依ルモノニシテ角ノ邊ノ長サニ關係ナシ.



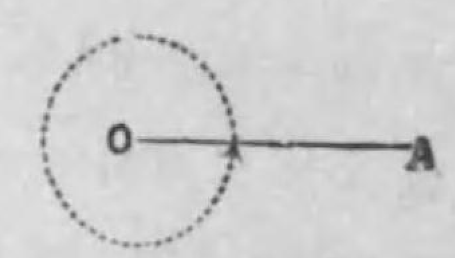

例ヘバ　Eハ人ノ眼ノ位置トシA,Bハ二ツノ星ノ位置トスレバAE,BEハ一ノ角ヲナス若シ星AガA′ニ,星BガB′ニ來ルトモA′EトB′Eト

ノ間ノ角ハAEトBEトノ間ノ角ニ異ナルコトナシ.
然レドモ星BガCノ位置ニ來レバ最早AEトCEトノ間ノ角ハAEトBEトノ間ノ角ニ同ジカラズ.

**12.** 角ハ其ノ頂點ニアル一ツノ文字ニテ表ハサル. 例ヘバ 角Oノ如シ,之ヲ $\hat{O}$ ト記ス [11款ノ圖].

又角ハ其ノ頂點ノ文字ヲ中央ニ,二邊ノ文字ヲ兩端ニ置キテ表ハサル. 例ヘバ 角AOBノ如シ,之ヲ $\widehat{AOB}$ ト記ス.

或ハ又 角ハ其ノ角內ニアル一ツノ文字ニテ表ハサル. 例ヘバ 角$\alpha$ノ如シ,之ヲ $\hat{\alpha}$ ト記ス.




直線OAガOヲ極トシOAノ位置ヨリ時計ノ針ノ廻ルト反對ノ方向ニ紙面ヲ離ルルコトナク全一廻轉シテ復OAノ位置ニ達シタルトキハOAハ**周角**ヲ畫クト云ヒ周角ノ半分ヲ**平角**,平角ノ半分ヲ**直角**ト云フ. [直角ハ $\hat{R}$ ト記ス].

周角ハ一ノ分線ガ其ノ一端ヲ極トシテ全一廻轉シテ復モトノ位置ニ達シタルトキノ角ナルヲ以テ次ノ命題ノ眞ナルコトヲ知ル可シ.

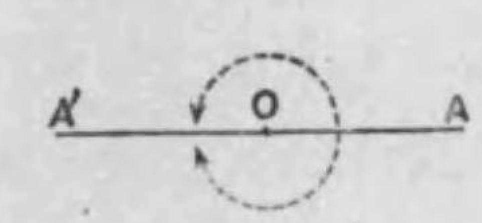
總ての周角は相等し.

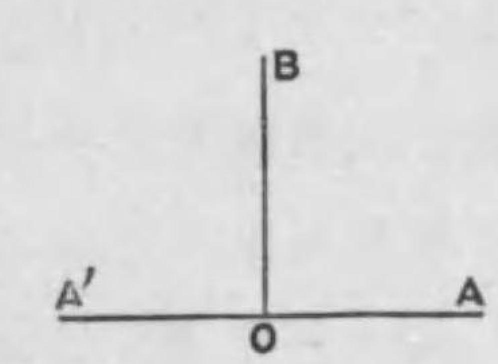


從ヒテ 總テノ平角モ相等シク,又總テノ直角モ相等シキコトヲ知リ得可シ.

直角ヨリ小ナル角ヲ**銳角**ト云ヒ直角ヨリ大ニシテ二直角ヨリ小ナル角ヲ**鈍角**ト云フ.

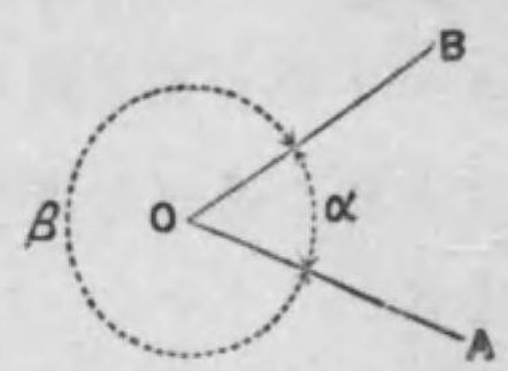
**注意** OAガ時計ノ針ノ廻ルト同方向ニ一廻轉スルモ其ノ畫ク所ノ角ハ一周角ニ等シ,又OAガ時計ノ針ノ廻ルト同方向ニ廻轉シテOAノ延線OA′ニ達スルトキト之ト反對ノ方向ニ廻轉シテOA′ニ達スルトキト其ノ畫ク所ノ角ノ大サハ相等シ,其ノ理ハ角ノ平面ヲAOA′ヲ折目トシテ折リ返セバ全ク相重ナリ合フヲ以テ知ルベシ.




依リテ $A\hat{O}A'$ ハ平角ナルコトヲ知ルベシ.
又直線BOガ直線AA′トOニ於テ交リ,
$\widehat{AOB}=\widehat{BOA'}$ ナルトキハ此ノ各ハ平角ノ半分,卽チ直角ナルコトヲ知ルベシ.

**13. 定義** 同一の點より引ける二直線は二つの角をなし此の二角は合せて一周角に等しく之を互に**共軛**なりと云ふ.




例ヘバ圖ノ$\alpha$ト$\beta$トノ如シ, 而シテ此ノ二角ヲ區別スル必要アルトキハ其ノ小ナル方[$\widehat{\alpha}$]ヲ**劣角**,大ナル方[$\widehat{\beta}$]ヲ**優角**ト云フ, 本書ニ於テハ別段ニ斷リナシニ角ト云ヘバ劣角ヲ指スモノトス.

二ツノ角ガ其ノ頂點ト一邊トヲ共有シテ共有邊ノ異傍ニアルトキハ互ニ之ヲ**接角**ヲナスト云フ.

**注意** 初等幾何學ニ於テハ直角ヲ單位トスレドモ實地應用上ニハ便利ノ爲ニ直角ヲ90等分シテ**度**ト云ヒ一度ヲ60等分シテ**分**ト云ヒ一分ヲ60等分シテ**秒**ト云フ. 即チ

$$\overset{度}{1} = \overset{分}{60} = \overset{秒}{3600}$$

$$\overset{分}{1} = \overset{秒}{60}$$

度分秒ニハソレゾレ°,′,″ナル記號ヲ用フ, 例ヘバ 42° 25′ 30″ ハ42度25分30秒ナルガ如シ.



**例題1.** 任意ノ一直線ヲ二ツニ等分スル點ハ一ツアリ而シテ唯一ツニ限ル[之ヲ其ノ直線ノ**中點**ト云フ].

**2.** 任意ノ一角ヲ二ツニ等分スル直線ハ一ツアリ而シテ唯一ツニ限ル[之ヲ其ノ角ノ**二等分線**ト云フ].

**3.** 有限直線ABノ中點ヲMトシ, M′ハMB上ノ任意ノ點トスレバ

$$AM' + BM' = 2AM \quad 及ビ \quad AM' - BM' = 2MM'$$

ナリ其ノ理如何.

**4.** 任意ノ角AOBノ二等分線ヲCOトシ$\widehat{BOC}$ノ内ニ引キタル任意ノ直線ヲC′Oトスレバ

$$\widehat{AOC'} + \widehat{BOC'} = 2\widehat{AOC} \quad 及ビ \quad \widehat{AOC'} - \widehat{BOC'} = 2\widehat{COC'}$$

ナリ其ノ理如何.

**5.** 一周角ハ幾直角ニ等シキカ.

## 14. 幾何學公理.

1 I. 圖形ハ其ノ形狀及ビ大サヲ變ズルコトナクシテ其ノ位置ヲ變ジ得可シ.

2 II. 全ク相合セシメ得ル大サハ相等シ.

3 III. 一點ヲ過リテ一ノ方向ニ一ツノ直線ヲ引ク

コトヲ得而シテ唯一ツニ限ル.

此ハ亦次ノ如ク云ヒ換フルコトヲ得可シ.

一點ト一ノ方向トハ一直線ヲ決定ス.

此ノ公理ヨリ次ノ二件ヲ知ル.

(1) 二點ハ一直線ヲ決定ス.

[或ハ 二點ヲ通有スル二直線ハ全ク相合シテ一直線トナル].

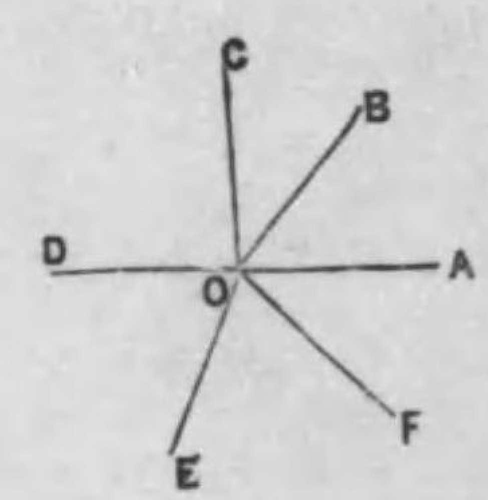
(2) 相異ナル二直線ハ唯一點ニ於テ相交リ得ルノミ.

IV. 二點間ノ最短徑ハ其ノ間ノ直線ナリ.

**15. 定義** 二點間の**距離**とは其の間の直線の長さを云ふ.

**16. 定理** 一點より若干の直線を引きて生ずる隣接せる總ての角の和は一周角[即ち四直角]に等し.

OA, OB, OC, …, OFハO ヨリ引ケル若干ノ直線トスルトキ $\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COD}+\cdots+\widehat{FOA}$ ハ一周角ニ等シキコト






ヲ證セムトス.

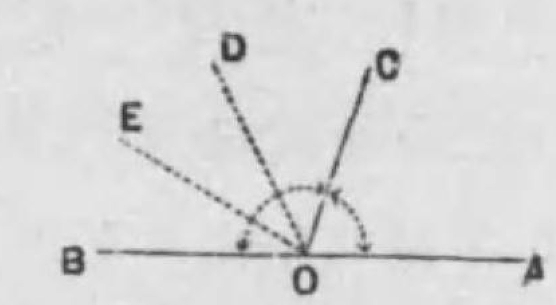
**證** 直線OAガ其ノ最初ノ位置OAヨリ廻轉シ始メテ順次ニOB,OC,…,OFナル位置ヲ經過シテ復最初ノOAナル位置ニ歸ルトキハ,

順次ニ角AOB,BOC,…,EOF,FOAヲ畫ク.

然ルニ此ノ廻轉ハ全一廻轉ナルユヱ一周角ナリ.

$$\therefore\ \widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COD}+\cdots+\widehat{FOA}=1\text{周角}.$$

**17. 系** 一直線[CO]ガ他ノ一直線[AB]ニ出會フトキ其ノ兩隣角[$\widehat{AOC}$,$\widehat{COB}$]ノ和ハ一平角[$2\hat{R}$]ニ等シ.




**注意** ABノ同ジ傍ニCO, DO, … ノ如キ幾多ノ直線ガ同一點Oニ出會フトモ$\widehat{AOC}$, $\widehat{COD}$, …, $\widehat{EOB}$ノ如キ隣接セル總テノ角ノ和ハ一平角ニ等シ.

**18. 定義** 二角の和が一平角,即ち二直角に等しきときは此の二角は之を互に**補角なり**と云ふ.

**19. 定義** 二角の和が一直角に等しきときは此の二角は之を互に**餘角なり**と云ふ.

**例題** 6. 13° 27′ 42″ ノ角ノ補角ハ如何. 又ソノ餘角ヲ問フ.

7. 一ツノ角ノ二等分線ハ又其ノ共軛角ヲモ二等分ス.

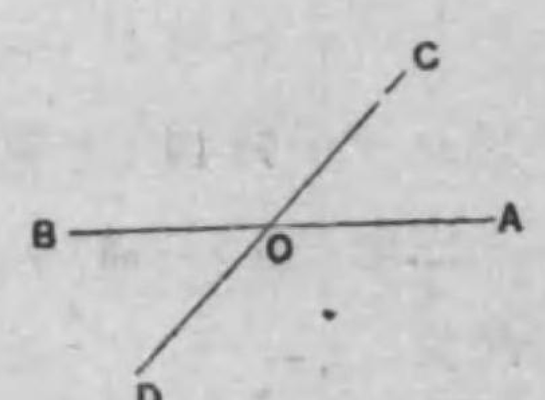
---

**20. 定義** 二直線が相交るとき向ひ合ひの角を**對頂角**と云ふ.

**21. 定理** 對頂角は相等し.*

二ツノ直線 AB, CD ガ O ニ於テ相交ルトキ $\widehat{AOC}$ ト $\widehat{BOD}$, $\widehat{AOD}$ ト $\widehat{BOC}$ ヲ對頂角トスレバ

$$\widehat{AOC}=\widehat{BOD},$$
$$\widehat{AOD}=\widehat{BOC}$$

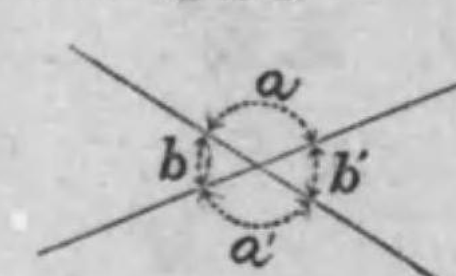



---

* 此ノ定理ハたーれす [*Thales*, 希臘七聖ノ一人.西暦紀元前 640 年生, 548 年死.幾何學ヲ埃及ヨリ希臘ヘ入レシ人ナリ]ノ始メテ宣言セシモノナリ.

此ノ證明ハ次ノ如キ記法ヲ用フレバ一層明瞭ナルベシ.

$$\hat{b}+\hat{a}=2\hat{R},$$
$$\hat{b}'+\hat{a}=2\hat{R},$$
$$\therefore\ \hat{b}+\hat{a}=\hat{b}'+\hat{a},$$
$$\therefore\ \hat{b}=\hat{b}'.$$






ナルコトヲ證セムトス.

**證** $\widehat{AOC}+\widehat{AOD}=2\hat{R}$, [17 款]

又 $\widehat{BOD}+\widehat{AOD}=2\hat{R}$,

$\therefore\ \widehat{AOC}+\widehat{AOD}=\widehat{BOD}+\widehat{AOD}$ [10款 II]

$\therefore\ \widehat{AOC}=\widehat{BOD}$ [10款 IV]

同様ニ $\widehat{AOD}=\widehat{BOC}$ ナルコトヲ證シ得可シ.

---

**例題** 8. 二直線ガ相交ルトキ一組ノ對頂角ガ各直角ナルトキハ他ノ一組ノ對頂角ノ大サ如何.

---

**22. 定義** 二直線が互に直角に交るときは此の二直線は之を互に**垂直**なりと云ひ其の一を他の一の垂線と云ふ.

一直線ガ他ノ一直線ニ垂線ナルコトヲ示スニハ其ノ間ニ ⊥ ナル記號ヲ用フ.

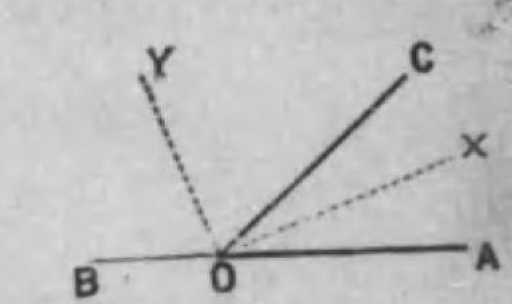
二直線ガ直角ニアラザル他ノ角ヲ以テ交ルトキハ其ノ一ヲ他ノ一ノ**斜線**ト云フ.

一直線ノ垂線,又ハ斜邊ガ之ニ出會フ點ヲ垂線,又ハ斜線ノ**趾**(アシ)ト云フ.

---

**例題** 9. 任意ノ角ノ二等分線ハ其ノ對頂角ヲ如何ニ分ツカ.

10. 直線COガ直線AOBト點Oニ於テ交リ角AOCノ二等分線ヲOXトシ角COBノ二等分線ヲOYトスルトキOX,OYハ互ニ垂直ナルコトヲ證セヨ.




OXハ角OACノ**內二等分線**,OYハ其ノ角ノ**外二等分線**ト云フコトアリ.

11. 半紙一枚ノ隅ヲ斜メニ折ルトキハ其ノ折目ハ折レタル邊ノ二部ノ間ノ角ノ二等分線ト直角ヲナスコトヲ證セヨ.

12. 10題ノ圖ニ於テ $A\hat{O}X+B\hat{O}Y=\hat{R}$ ナルコトヲ證セヨ.

---

**23. 定理** 二つの接角の和が二直角に等しきときは外の二邊は同一の直線をなす.* [17款ノ定理ノ逆].

---

○ 定理ハ**假設**及ビ**終結**ノ二部ヨリ成ル.
假設ハ乃チ「假ニ然リトスル所ノコト」ニシテ.
終結ハ乃チ「假設ヨリ起リ來ル可シト主張スル所ノコト」ナリ. 二ツノ定理ノ一ノ假設ト終結トガソレゾレ他ノ一ノ終結ト假設トナルトキハ此ノ二ツノ定理ハ之ヲ互ニ**逆**ナリト云フ. 或定理ガ眞ナルモ其ノ逆ハ必ズシモ眞ナラズ.

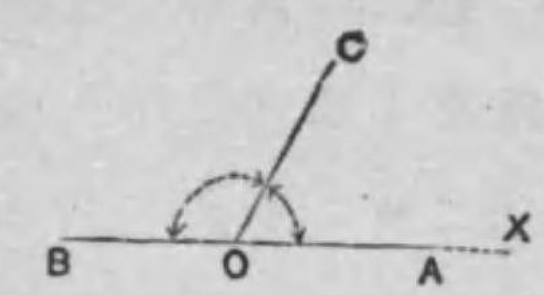


$B\hat{O}C+C\hat{O}A=2\hat{R}$

ナルトキハ

BO, OAハ同一ノ直線ヲ

ナスコト ヲ證セムトス.




**證** $B\hat{O}C+C\hat{O}A=B\hat{O}A.$

然ルニ $B\hat{O}A=2\hat{R}.$ [假設]

サテ 邊BOノ延線ヲOXトセヨ.

然ルトキハ $B\hat{O}X=2\hat{R}.$ [17款]

$\therefore\ B\hat{O}A=B\hat{O}X.$ [10款[1]]

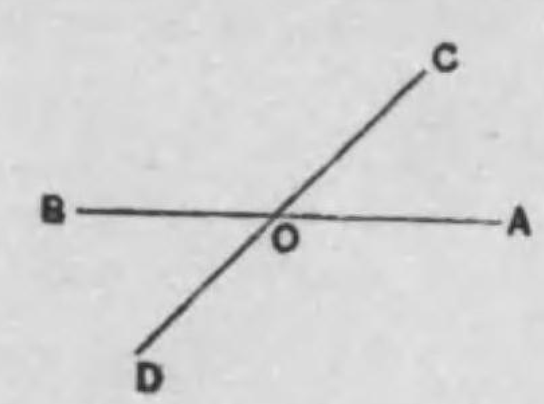
∴ 邊OAハ邊OXニ合ス.

∴ 邊BO, OAハ同一直線上ニアリ.

---

**例題** 13. 對頂角ノ二等分線ハ同一ノ直線ヲナスコトヲ證セヨ.

14. AOBハ一直線ニシテCO, ODハAOBト $A\hat{O}C=B\hat{O}D$ ナル如キ角ヲナス二直線トスレバCO,ODハ同一ノ直線ヲナスコトヲ證セヨ.



**15.** 既知一直線上ノ既知一點ヨリ之ニ一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル

[二枚ノ三角ぢやうぎヲ用ヒテ一直線上ノ一點ニ於テ之ニ垂線ヲ引ケ].

**16.** 或角ト其ノ餘角ト大サ相等シキトキ各角ノ大サ如何.

**17.** 角 LOM ノ二邊 LO, MO ハソレゾレ角 L'OM' ノ二邊 L'O, M'O ニ垂直ナルトキハ

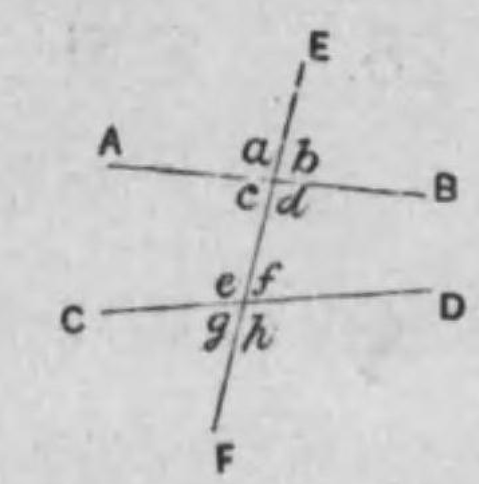
$$\widehat{LOM} = \widehat{L'OM'} \text{ 或ハ } \widehat{LOM} + \widehat{L'OM'} = 2\hat{R}$$

ナルコトヲ證セヨ.

# 第二節

## 平行線

**24.** **定義** 一つの直線が二つ或は多くの直線を截るときは之を**横截線**と云ふ.




横截線 EF ガ二直線 AB, CD ヲ截リテ生ズル八ツノ角ニハ次ノ命名ヲ用フ.

*a*, *b*, *g*, *h* ハ**外角**, *c*, *d*, *e*, *f*, ハ**內角**,

*a* ト *e*, *c* ト *g*, *b* ト *f*, *d* ト *h* ハ**同位角**,

*c* ト *f*, *d* ト *e* ハ**錯角**.

**25.** **定義** 二直線が同一の平面上にありて雙方へ如何程引き延ばすも出會はざるときは之を互に**平行す**と云ふ.

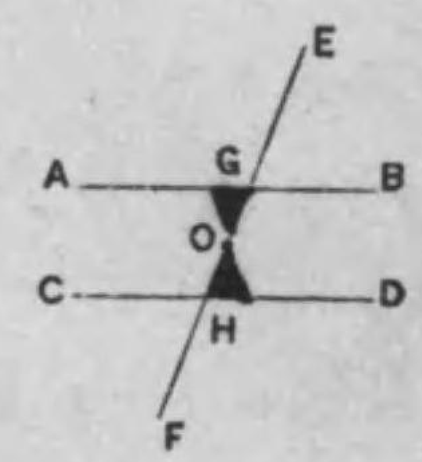
二ツノ直線ガ平行スルコトヲ示スニハ其ノ間ニ記號 // ヲ用フ.

**例題** 18. 24款ノ圖ニ於テ一組ノ錯角ガ相等シケレバ同位角ハ相等シク,他ノ一組ノ錯角モ亦相等シク,又同傍ノ內角ハ互ニ補角ヲナスコトヲ證セヨ.

---

**26.** **定理**　一直線が他の二直線を截りて錯角を相等しくなすときは後の二直線は互に平行す可し.

一直線EFガ二直線AB, CD ヲG, Hニ於テ截リ $\widehat{AGH}=\widehat{GHD}$ トナストキハAB∥CD ナルコトヲ證セムトス.




**證**　全キ圖形ヲバGHノ中點Oヲ樞トシテ一平角ダケ廻轉シ, GHガ復ソノ線自ラト重ナルニ至ラシメヨ.

然ルトキハ　　OG＝OH　　[假設]

ナルヲ以テ　點Gハ點Hニ,點Hハ點Gニ重ナル.

而シテ　　$\widehat{AGH}=\widehat{GHD}$　　[假設]

ナルヲ以テ　直線GAハ直線HDト重ナリ,



直線HDハ直線GAト重ナル,

故ニ　直線AGBハ直線DHCニ重ナリ, [何故カ]

直線CHDハ直線BGAニ重ナル,

斯ク　直線GA, HCハソレゾレ同ジ直線ノ一部HD, GBト重ナルヲ以テ,

若シ　直線GA, HCノ延線ガ出會フナラバ, GB, HDノ延線モ亦出會ハザル可カラズ,*

コレ背理ナリ.**　　[14款III (1)]

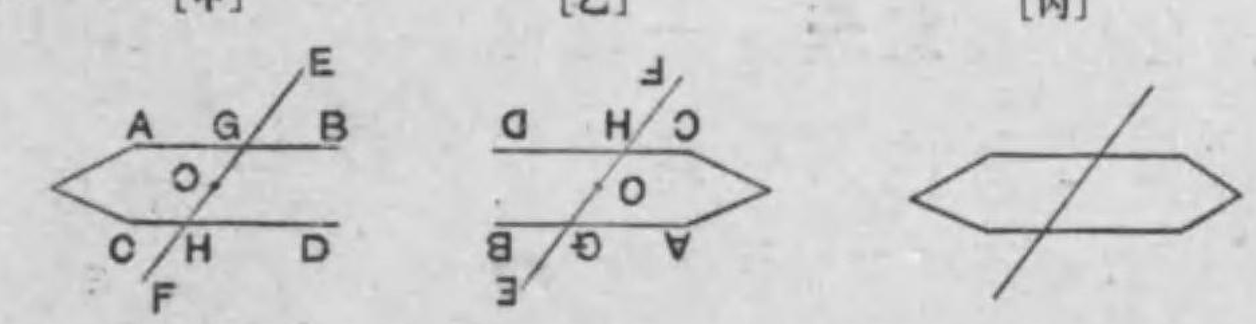
故ニ　直線AB, CDハ何レノ方ヘ引キ延バスモ出會フコト能ハズ.

∴ AB∥CD.

**27.** **系**　同ジ直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行ス.

---

*　[甲]　[乙]　[丙]



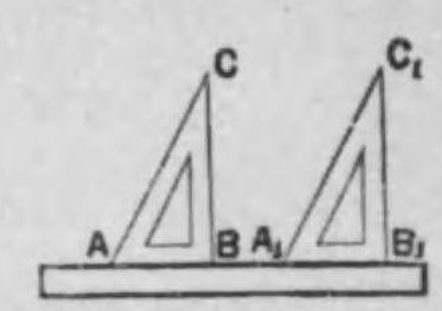

甲圖ノ如クGA, HCノ延線ガ出會フトキハ之ヲ一平角ダケ廻轉シタル後ニハ乙圖ノ如クナルベシ. 依リテ此ノ二ツノ圖ヲ重ネ合シテ考フレバ丙圖ノ如クナリテ二點ヲ過ル直線ガ二ツアルコトトナルベシ.

**　此ノ定理ノ證明ノ如ク背理ニ導クモノヲ **背理法** ト名ヅク.

**例題** 19. 26 款ノ圖ニ於テ横截線EFノ同ジ傍ニアル二內角AGH, GHC ガ互ニ補角ナルトキハ AB ハ CD ニ平行スルコトヲ證セヨ.

20. 同位角EGA, GHC ガ相等シキトキモ亦AB CDニ平行ス.

21. 圖ノ如ク二枚ノ同ジ三角ぢやうぎヲものさしノ線ニ沿ウテ置クトキ $BC \parallel B_1C_1$ 及ビ $AC \parallel A_1C_1$ ナル理由如何.




---

28. 幾何學公理 [11,12頁]ノ續キ.

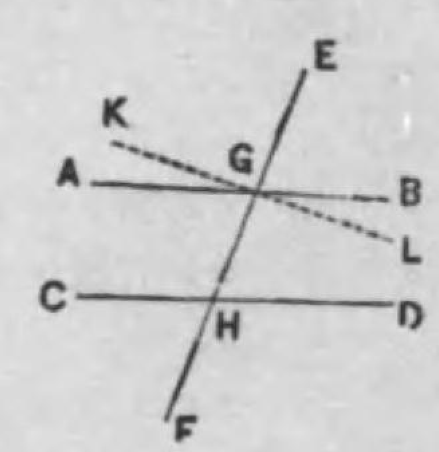
V. 一點ヲ過リ一直線ニ平行スル直線ハ一ツアリ而シテ唯一ツニ限ル.

29 **定理** 一直線が二平行直線を截るときは其の錯角は相等し.

一直線EFガ二平行直線 AB, CDヲ截ルトキハ、

$$\widehat{AGH}=\widehat{GHD}$$

ナルコトヲ證セムトス.




**證** 若シ $\widehat{AGH}\neq\widehat{GHD}$



ナルトキハ, Gヲ過リテ一直線KGLヲ引キ,

$$\widehat{KGH}=\widehat{GHD}$$

ナラシメヨ,

然ルトキハ $KL \parallel CD$, [26款]

然ルニ $AB \parallel CD$, [假設]

卽チ G點ヨリCDニ平行スル二ツノ直線ヲ引キ得ルニ至ル,

コレ背理ナリ.* [公理V]

$$\therefore \widehat{AGH}=\widehat{GHD}.$$

30. **系** 平行直線ハ共通ノ垂線ヲ有ス.

31. **定義** 二平行直線の間に夾まれたる共通垂線の長さを其の二平行線間の**距離**と云ふ.

---

**例題** 22. 一直線ガ二平行直線ヲ截ルトキハ

(1) 横截線ノ同ジ傍ニアル二內角ハ互ニ補角ナリ.

(2) 同位角ハ相等シ.

---

* 此ノ定理ノ證明モ亦背理法ナリ.

**23.**　平行直線ノ一ニ交ル直線ハ必ズ他ノ直線ニモ亦交ル.

**24.**　一直線ガ他ノ二平行直線ヲ截ルトキハ其ノナス所ノ一雙ノ錯角ノ二等分線ハ互ニ平行ナルコトヲ證セヨ.

此ノ問題ニ於テ錯角ノ代リニ同位角ヲ取ルトキハ如何.

**25.**　相交ル二直線ニ垂直ナル二直線ハ亦互ニ出會フ可シ.

**26.**　同ジ直線ニ平行スル二直線ハ互ニ平行ス.

**27.**　二ツノ角ノ各ノ二邊ガソレゾレ平行スルトキハ其ノ二ツノ角ハ相等シキカ,或ハ互ニ補角ナリ.

**28.**　角 LOM ノ二邊 LO, MO ガソレゾレ角 L′O′M′ ノ二邊 L′O′, M′O′ ニ垂直ナルトキハ

$$L\hat{O}M = L'\hat{O'}M',\ 又ハ\ L\hat{O}M + L'O'M' = 2\hat{R}$$

ナルコトヲ證セヨ.

# 第三節

## 多角形

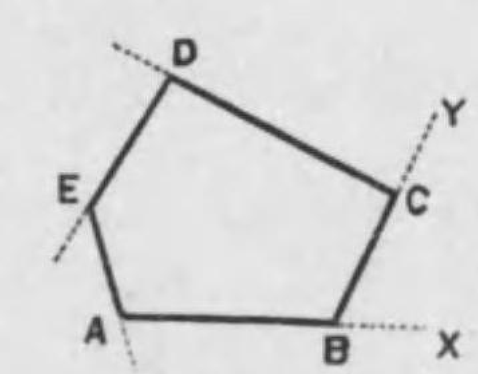
**32.**　**定義**　**平面形**とは一つ或は多くの線を以て圍みたる平面の部分を云ひ平面形の界を其の**周**と云ふ.

**33.**　**定義**　直線を以て圍みたる平面形を**直線形**或は**多角形**と云ふ.

多角形ノ各角ガ劣角ナレバ**凸多角形**ト云フ.

本書ニ於テハ多角形ト云ヘバ凸多角形ノコトナリ.

多角形 ABCDE ニ於テ $A\hat{B}C, B\hat{C}D, C\hat{D}E, \dots$ ハ其ノ**内角**ニシテ之ヲ單ニ多角形ノ**角**ト云ヒ, AB, BC, CD, … ヲ多角形ノ**邊**ト云フ. 多角形ノ邊ト其ノ隣ノ邊ノ延線トノ間ノ角 XBY, YCD, … ヲ多角形ノ**外角**ト云フ.




多角形ハ其ノ角數ガ 3, 4, 5, … ナルニ從ヒソレゾレ之ヲ**三角形**或ハ**三邊形**,**四角形**或ハ**四邊

**形,五角形**或ハ**五邊形,**…ト云フ.

**34.** **定義** 多角形の相隣らざる二つの角の頂點を結び付くる直線を**對角線**と云ふ.

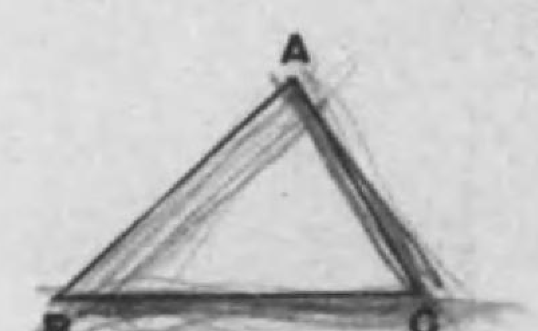
**35.** **定義** 多角形の總ての邊が相等しきときは**等邊多角形**と云ひ總ての角が相等しきときは**等角多角形**と云ふ.

**36.** **定義** 等邊にして且等角なる多角形を**正多角形**と云ふ.

**37.** **定理** 三角形の二邊の和は他の一邊より大なり.

$\triangle ABC$ ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l} AB+BC>CA \\ BC+CA>AB \\ CA+AB>BC \end{array}\right\}$$




ナルコトヲ證セムトス.

**證** 分線 CA ハ點 C ト點 A トノ最短徑ナリ.





依リテ $AB+BC>CA$.

他モ亦之ト同樣ニ證明シ得可シ.

**38.** **系** 三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリ小ナリ.

---

**例題 29.** 三角形內ノ一點ト底邊ノ兩端トヲ結ビ付クル二ツノ分線ノ和ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナルコトヲ證セヨ.

**30.** 三角形內ノ一點ト其ノ三ツノ頂點トヲ結ビ付クル三ツノ分線ノ和ハ三角形ノ周ヨリ小ニシテ半周ヨリ大ナルコトヲ證セヨ.

---

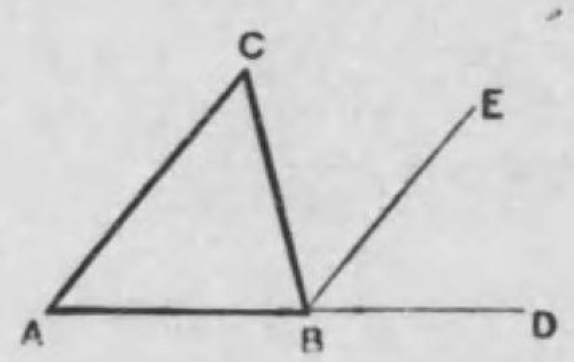
$AB-AC<BC$

$AB+AC>BC$
$AC+BC>AC$
$AB+AC+BC>BC+\cancel{AC}-\cancel{AC}$
$AC+BC>AB$

$A+BC-BC-AC$
$>\cancel{AB}-AC$

$AC$

**39.** **定理** 三角形の各角の和は二直角に等し.*




$\triangle ABC$ ニ於テ

$\hat{A}+\hat{C}+A\widehat{B}C=2\hat{R}$

ナルコトヲ證セムトス.

**證** AC ニ平行スル BE ヲ引キ, AB ヲ任意ノ點 D ニ引キ延バストキハ, AB ハ二平行直線 AC, BE ノ横截線ナルユヱ

$$\hat{A}=E\widehat{B}D, \qquad [22\text{題}(2)]$$

又 BC モ又二平行直線 AC, BE ノ横截線ナルユヱ

$$\hat{C}=C\widehat{B}E, \qquad [29\text{款}]$$

故ニ $\qquad \hat{A}+\hat{C}+A\widehat{B}C=E\widehat{B}D+C\widehat{B}E+A\widehat{B}C,$ [何故カ]

然ルニ $\qquad E\widehat{B}D+C\widehat{B}E+A\widehat{B}C=2\hat{R},$ [17款注意]

$$\therefore\ \hat{A}+\hat{C}+A\widehat{B}C=2\hat{R}.$$

**40.** **系 1.** 三角形ノ一外角ハ之ニ隣ラザル二ツノ内角ノ和ニ等シ. 從ヒテ 三角形ノ一外角ハ相對スル内角ノ何レヨリモ大ナリ.

**系 2.** 二ツノ三角形ニ於テ二角ガソレゾレ相

* 此ノ定理ハぴたごらす[*Pythagoras*, 西暦紀元前約580年生, 約501年死]ノ始メテ證明セシモノナリ.



等シキトキハ第三ノ角モ亦相等シ.

**系 3.** 三角形ハ唯一ツノ直角ヲ有シ, 或ハ唯一ツノ鈍角ヲ有シ得ルノミ.

**41.** **定義** 三角形の一角が直角なるものを**直角三角形**,鈍角なるものを**鈍角三角形**,總ての角が鋭角なるものを**鋭角三角形**と云ふ.

直角三角形ニ於テ直角ニ對スル邊ヲ**斜邊**ト云フ.

---

**例題 31.** 直角三角形ニ於テ二ツノ鋭角ハ互ニ餘角ナリ.

**32.** 等角三角形ノ各角ノ大サ如何.

**33.** 一直線外ノ一點ヨリ之ニ一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得而シテ唯一ツニ限ル.

**注意** 一點ヨリ一直線マデノ**距離**トハ此ノ點ヨリ此ノ直線ヘ引キタル垂線ノ長サナリ.

**34.** 一直線ガ他ノ二直線ヲ截リ其ノ同傍ノ内角ノ和ガ二直角ヨリ小ナルトキハ後ノ二直線ハ此ノ傍ニ於テ出會フ.

35. 三角形内ノ一點ニ於テ底邊ノ張ル角ハ三角形ノ頂角ヨリモ大ナリ.

36. 三角形ノ二ツノ外角ノ二等分線ノナス角ハ殘リノ外角ノ半分ニ等シキコトヲ證セヨ.

37. 三角形ABCニ於テ $\hat{B}$ ノ内二等分線ト $\hat{C}$ ノ外二等分線トノ交角ハ $\hat{A}$ ノ半分ニ等シ.

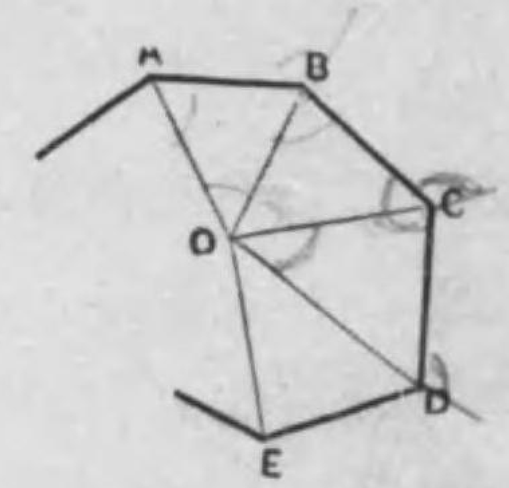
---

42. **定理** 多角形の各角の和は邊數の二倍より四を減じたるだけの直角に等し.

ABCDE…ヲ $n$ 邊ノ多角形トスルトキハ

其ノ各角ノ和 $=(2n-4)\hat{R}$

ナルコトヲ證セムトス.




**證** 多角形ノ各角ノ頂點A, B, C, … ヲ形内ノ一點Oニ結ビ付クルトキハ, $n$ 個ノ三角形ABO, BCO, CDO, … ヲ得,

而シテ此ノ各ノ三角形ノ三ツノ角ノ和ハ $2\hat{R}$ ナリ. [39款]

故ニ $n$ 個ノ三角形ノ各角ノ和ハ $2n\hat{R}$ ナリ.



然ルニ 此ノ和ハ多角形ノ各角ノ和ト O ニ於ケル各角ノ和トノ和ニ等シ.

而シテ O ニ於ケル各角ノ和ハ $4\hat{R}$ ナリ. [16款]

∴ 多角形ノ各角ノ和 $=(2n-4)\hat{R}$.

43. **系** 多角形ノ外角ノ和ハ四直角ニ等シ.

---

**例題** 38. 四邊形ノ各角ノ和ハ四直角ニ等シ.

39. 正 $n$ 角形ノ一角ノ大サ如何.

40. 正五角形ノ一角ハ幾度ナルカ.

41. 正多角形ノ一外角ガ正三角形ノ一角ト等シキトキハ幾邊形ナルカ.

42. 正多角形ノ一内角ガ135°ナルトキハ幾邊形ナルカ.

43. 正多角形ノ一外角ガ其ノ内角ノ六分ノ一ナルトキハ幾邊形ナルカ.

---

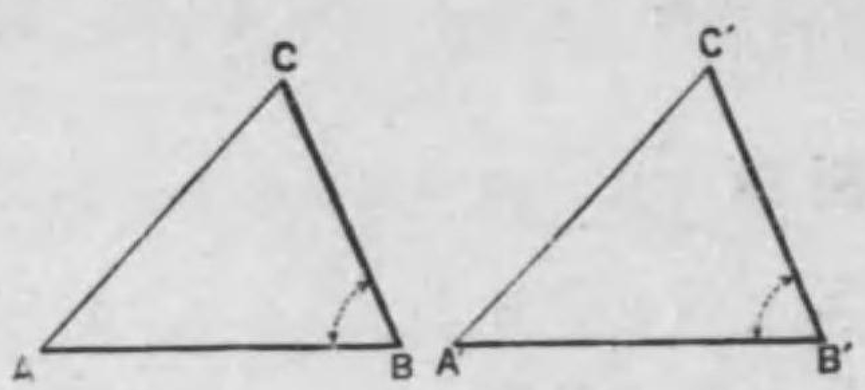
44. **定義** 二つの圖形の一を他の一に重ねて全く相合せしめ得れば是等の圖形は之を**合同**或は**全等なり**と云ふ.

二ツノ圖形ガ全等ナルコトヲ示スニハ其ノ間ニ ≡ ナル記號ヲ用フ.

**45.** **定理** 二つの三角形に於て二邊及び其の夾む角がそれぞれ相等しきときは其の二つの三角形は全等なり.

△ABC, △A′B′C′ ニ於テ

AB = A′B′
BC = B′C′
$\hat{B} = \hat{B'}$




ナルトキ

△ABC ≡ △A′B′C′ ナルコトヲ證セムトス.

**證** △ABC ヲ △A′B′C′ ノ上ニ重ネムトスルニ,

B ヲ B′ ノ上ニ置キ, BA ヲ B′A′ ニ沿ウテ置クトキハ,

BC ハ B′C′ ニ重ナル, ∵ $\hat{B} = \hat{B'}$. [14款III]

而シテ AB = A′B′ 及ビ BC = B′C′

ナルユヱ A ハ A′ ニ, C ハ C′ ニ合ス.

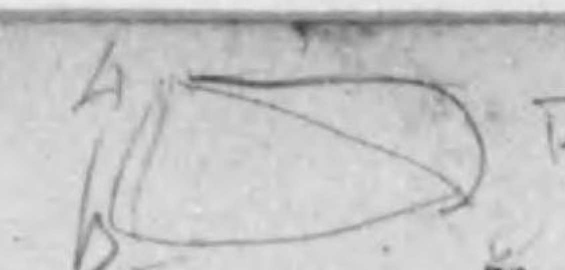
而シテ AC ハ A′C′ ニ重ナル. [何故カ]

∴ 二ツノ三角形ハ相合ス.* [14款III(1)]

∴ △ABC ≡ △A′B′C′.

**注意** 全等ナル二ツノ三角形ハ其ノ總テノ部分ヲ相重ナラシメ得ルユヱ,

* 此ノ證明ノ如ク重ネ合スモノヲ**重置法**ト云フ.

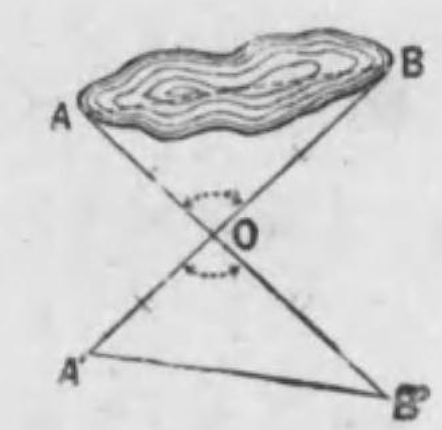





二ツノ三角形ガ全等ナルトキハ等角ニ對スル邊ハ相等シク又等邊ニ對スル角ハ相等シ.

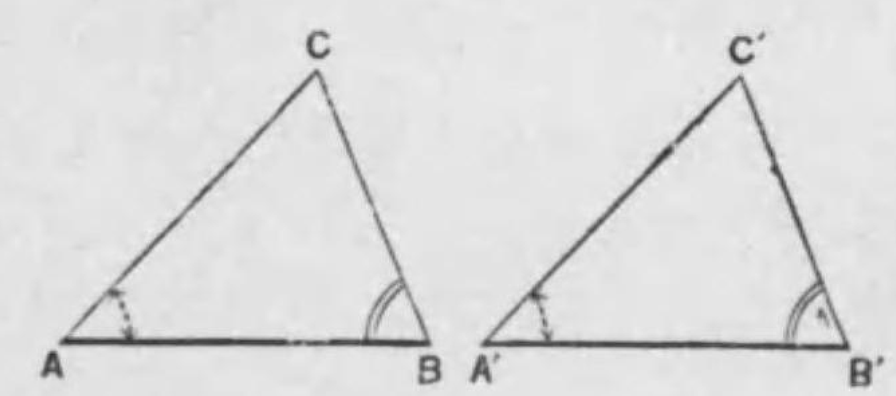
**例題 44.** 四邊形 ABCD ニ於テ AB = DA, 而シテ對角線 AC ガ角 BAD ヲ二等分スルトキハ BC = DC. 而シテ AC ハ角 DCB ヲ二等分スルコトヲ證セヨ.

**45.** 湖水ヲ隔テタル二點 A, B ノ距離ヲ測ラムニハ先ヅ O 點ヲ過リテ AOB′, BOA′ ノ二直線ヲ取リ OA′ = OA, OB′ = OB ナラシメ A′B′ ヲ測レバヨシ, 何故カ.




**46.** **定理** 二つの三角形に於て其の二角及び其の二角の夾む邊がそれぞれ相等しきときは其の二つの三角形は全等なり.

△ABC,
△A′B′C′
ニ於テ




$\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, AB = A′B′ ナルトキハ

△ABC ≡ △A′B′C′ ナルコトヲ證セムトス.

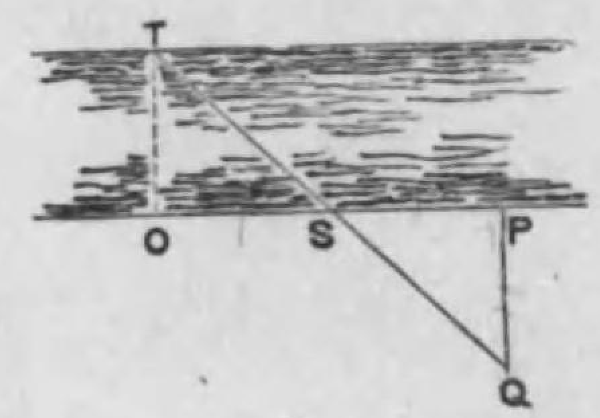
**證** $\triangle ABC$ ヲ $\triangle A'B'C'$ ノ上ニ重ネムトスルニ,$A$ヲ$A'$ノ上ニ,$AB$ヲ$A'B'$ニ沿ウテ置キ前款ノ如ク重置法ニ依リテ證明ス可シ.

**注意** 二ツノ三角形ニ於テ任意ノ二角ガソレゾレ相等シク一組ノ等角ニ對スル邊ガ相等シキ場合ハ本定理ニ歸ス.[40 款系 2].

---

**例題 46.** 或角ノ二等分線上ノ各點ハ角ノ二邊ヨリ等距離ニアリ.

**47.** 河ノ堤防ノ平行直線ヲナセル所ヲ撰ビ$O$ニ立チテ其ノ正對岸ニ目標$T$ヲ定メ置キ,$OT$ニ直角ナル方向ニ$OS$ヲ測リ,$S$ニ於テ杖ヲ立テ尚進ミテ$OS=SP$ナル如キ點$P$ニ至リ,之ヨリ$SP$ニ直角ナル方向ニ進ミ終ニ$S$,$T$ヲ同一直線上ニ見得ベキ點$Q$ニ至レバ$PQ$ノ距離ハ河ノ幅ニ等シカルベシ,之ヲ證セヨ.




---

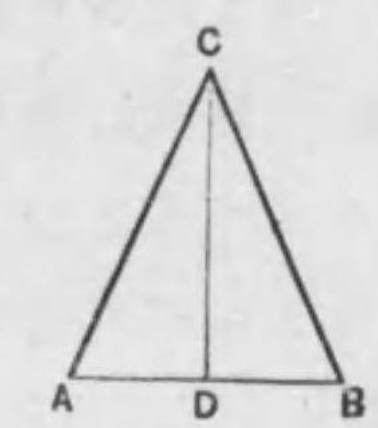
## 47. 定義 三角形の二邊が相等しきときは之を**二等邊三角形**と云ふ.



二等邊三角形ニ於テ相等シカラザル邊ヲ**底**ト稱シ底ニ對スル角ヲ**頂角**,頂角ノ頂點ヲ二等邊三角形ノ**頂點**,頂點ヨリ底ヘ引ケル垂線ヲ**高サ**ト云ヒ又底ニ隣ル角ヲ**底角**ト云フ.

**注意** 任意ノ三角形ニ於テハ任意ノ一邊ヲ**底**ト見ルコトヲ得.

## 48. 定理 二等邊三角形の二つの底角は相等し.




$\triangle ABC$ニ於テ

$AC=BC$ トスルトキハ

$\hat{A}=\hat{B}$

ナルコトヲ證セムトス.

**證** 角$ACB$ヲ二等分スル直線$CD$ヲ引クトキハ,$\triangle ACD$, $\triangle BCD$ ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l} AC=BC \\ CD\text{ハ共通} \\ A\widehat{C}D=B\widehat{C}D \end{array}\right\}$$ [假設] [作圖]

$\therefore\ \triangle ACD\equiv\triangle BCD,$ [45 款]

依リテ $\hat{A}=\hat{B}.$

**注意** 斯ノ如ク二ツノ三角形ヲ互ニ比較シテ證明スルヲ**比較法**ト云フ.

**49. 系 1.** 二等邊三角形ACBノ頂角ノ內二等分線CDハ底ニ垂直ニシテ且コレヲ二等分ス.

**注意** 或直線ニ垂直ニシテ且コレヲ二等分スル直線ヲ始ノ直線ノ**垂直二等分線**ト云フ.

而シテ二等邊三角形ノ頂角ノ內二等分線モ,亦底ノ垂直二等分線モ唯一ツニシテ,

頂角ノ內二等分線ハ底ノ垂直二等分線ナルユヱ,逆ニ底ノ垂直二等分線ハ又頂角ノ內二等分線ナリ*.

**系 2.** 等邊三角形ハ何レノ邊ヲモ底ト見ルコトヲ得ルユヱ,等邊三角形ノ總テノ角ハ相等シ. 又ソノ三ツノ高サハ相等シ.

---

**例題 48.** 二等邊三角形ノ底ノ兩端ヨリ對邊ノ中點ヘ引ケル直線ハ相等シ.

三角形ノ一ツノ角ノ頂點ヨリ對邊ノ中點ヘ引ケル直線ヲ**中線**ト云フ.

**49.** 三角形ノ不等ノ二邊ニ就キテ大ナル邊ハ大ナル角ニ對ス. 此ノ問題ニ依リテ**37**款ノ定理ヲ證明セヨ.

---

* 若シ唯一ツノXト唯一ツノYトアリテXハYナルコトヲ證シ得レバYハXナルコトハ證ヲ竢タズシテ明カナリ. 之ヲ**同一法**ト云フ.



**50.** 同ジ底ノ上ニ立ツ二ツノ二等邊三角形ノ頂點ヲ結ビ付クル直線ハ共通ノ底ノ垂直二等分線ナリ.

**51.** 二等邊三角形ノ頂角ノ外二等分線ハ底ニ平行ス.

---

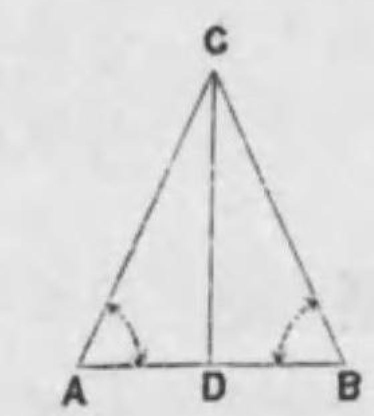
## 50. **定理** 三角形の二つの角が相等しきときは之に對する邊も亦相等し.

△ABCニ於テ

$\hat{A}=\hat{B}$ ナルトキハ

AC＝BC

ナルコトヲ證セムトス.




**證** CヨリABヘ垂線CDヲ引キ**48**款ノ如ク比較法ニ依リテ證明セヨ.

**51. 系** 三角形ノ總テノ角ガ互ニ相等シキトキハ總テノ邊ハ互ニ相等シ. 故ニ

等邊三角形は等角三角形ニシテ[49款系2],

等角三角形は等邊三角形ナリ [51款].

**注意** **48**款及ビ**50**款ヨリ 三角形ノ二邊ガ相等シケレバ是等ノ邊ニ對スル角ハ相等シク,

而シテ逆ニ　三角形ノ二角カ相等シケレバ是等ノ角ニ對スル邊ハ相等シ.

故ニ　　三角形ノ二邊ガ相等シカラザレバ是等ノ邊ニ對スル角ハ相等シカラズ.

而シテ　三角形ノ二角ガ相等シカラザレバ是等ノ角ニ對スル邊ハ相等シカラズ.*

**52.**　**定義**　三角形の各邊が悉く不等なるものを**不等邊三角形**と云ふ.

是ニ依リテ　不等邊三角形ハ其ノ何レノ二角モ相等シカラズ.

---

**例題 52.** 三角形ノ不等ノ二角ニ就キテ大ナル角ハ大ナル邊ニ對ス. 此ノ逆モ亦眞ナリ.

**53.** 二等邊三角形ノ頂點ヨリ底ヘ引ケル垂線ハ底ノ二等分線ニシテ又頂角ノ内二等分線ナリ.

**54.** 二等邊三角形ノ底ヘ引ケル中線ハ底ノ垂直二等分線ニシテ又頂角ノ内二等分線ナリ.

---

*　若シ定理ノ題形ヲ

「AガBナルトキハ　CハDナリ」トセバ　[48 款]

「CガDナラザルトキハ　AハBナラズ」ハ前ノ定理ノ**對偶**ト云ヒ,或定理ガ眞ナレバ其ノ對偶ハ必ズ眞ナリ.



**55.** 三角形ABCニ於テ $\hat{B}=2\hat{A}$ ナルトキ角Bヲ二等分スル直線ガ對邊ニDニ於テ交ルトキハADハBDニ等シキコトヲ證セヨ.

**56.** 一直線外ノ一點ヨリ之ニ引ケル總テノ分線ニ就キテ

(1) 垂線ハ最短ナリ.

(2) 垂線ノ趾ヨリ相等シキ距離ニ趾ヲモツ斜線ハ相等シ.

(3) 垂線ノ趾ヨリ遠キ距離ニ趾ヲモツ斜線ハ近キ距離ニ趾ヲモツ斜線ヨリ長シ.

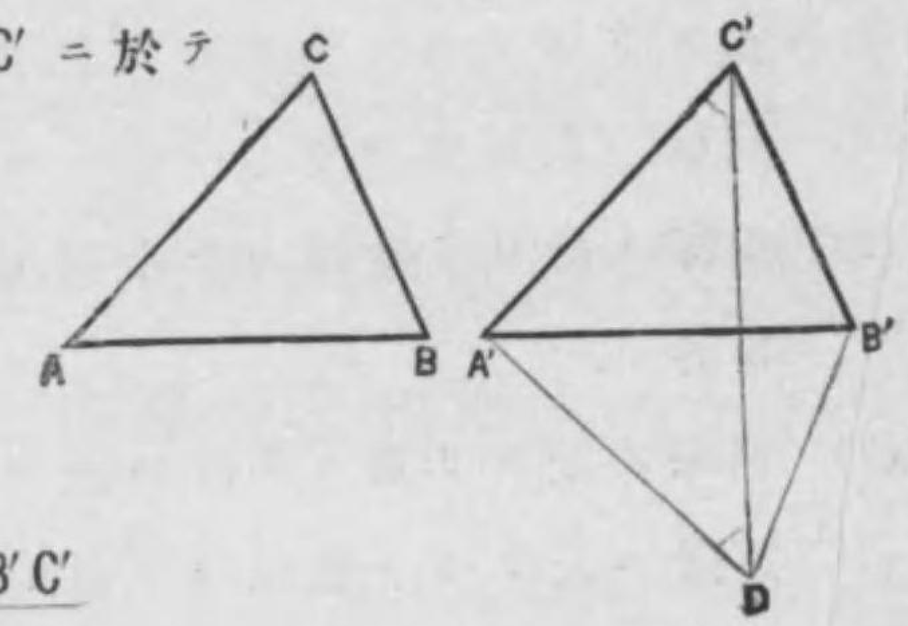
本題ノ逆モ亦眞ナルコトヲ證セヨ.

**57.** 一直線外ノ一點ヨリ之ニ相等シキ二ツノ分線ヲ引クコトヲ得,唯二ツニ限ル. 而シテ是等ノ分線ハ其ノ點ヨリ引ケル垂線ノ異傍ニアリ.

**53.** **定理** 二つの三角形に於て三邊がそれぞれ相等しきときは其の二つの三角形は全等なり.

$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B' \\ BC &= B'C' \\ CA &= C'A' \end{aligned}\right\}$$




ナルトキ

$\underline{\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'}$

ナルコトヲ證セムトス.

**證** $\triangle ABC$ ヲ裏返シテAヲA'ノ上ニ,邊ABヲA'B'ニ沿ウテ重ネ,點Cハ點Dニ來ルトセヨ.

Bハ B'ノ上ニ落ツ, $\because AB = A'B'$.

而シテ $\triangle A'B'D$ ハ $\triangle ABC$ ノ裏返シタル位置ナリ.

CDヲ結ビ付ケヨ.

サテ $A'C' = A'D$

ナルユヱ $A'\widehat{D}C' = A'\widehat{C'}D$, [48 款]

同樣ニ $B'\widehat{D}C' = B'\widehat{C'}D$,

故ニ $A'\widehat{D}B' = A'\widehat{C'}B'$. [何故カ]

而シテ $A'D = A'C'$, $B'D = B'C'$



ナルユヱ $\triangle A'DB' \equiv \triangle A'C'B'$. [45 款]

然ルニ $\triangle ABC \equiv \triangle A'DB'$ [作圖]

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

**注意** 三角形ABCニ於テ邊BC, CA, ABヲソレゾレ小文字 $a$, $b$, $c$ ニテ表ハスヲ通例ナリトス.

---

**例題 58.** 三角形ABCノ二邊ニAD=AEヲ取リDEヲ一邊トシテ其ノ上ニ等邊三角形DEFヲ作ルトキハAFハ角BACヲ二等分ス.

---

* 此ノ證ハふぃろ！[*Philo*, 西曆紀元前150年頃ノ人]ノ發見セシモノナリ.

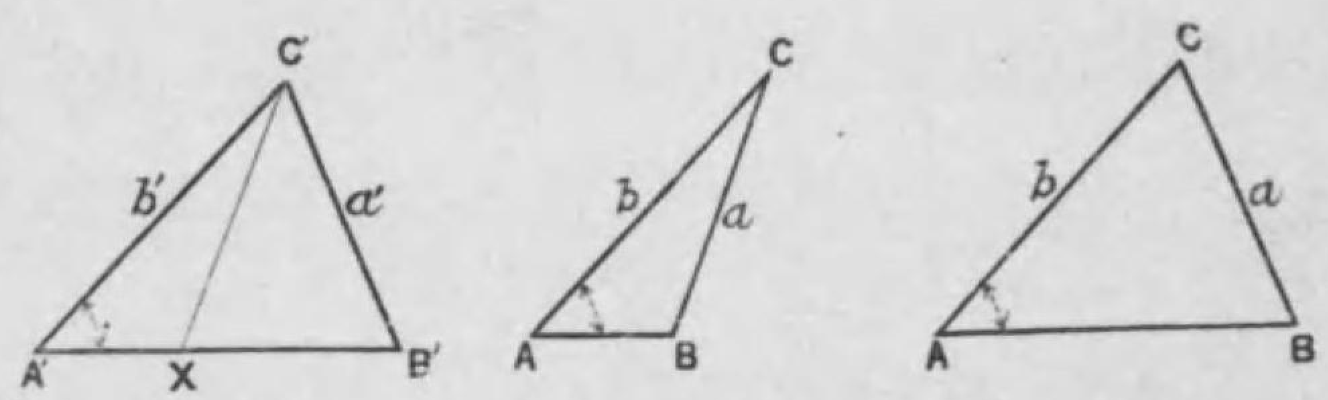
**54.** **定理** 二つの三角形に於て二つの邊がそれぞれ相等しく且その一對角が相等しきときは他の一組の等邊に對する角は,

(1) 相等しきか, 或ハ (2) 補角なり.

[(1) ノ場合ニハ二ツノ三角形ガ**全等**ニシテ,
(2) ハ二ツノ三角形ノ**兩意ノ場合**ト云フ].

$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ,

$a=a'$, $b=b'$, $\hat{A}=\hat{A}'$ ナルトキ




(1) $\hat{B}=\hat{B}'$, 從ヒテ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. 或ハ

(2) $\hat{B}+\hat{B}'=2\hat{R}$ ナルコトヲ證セムトス.

**證** $\triangle ABC$ ヲ $\triangle A'B'C'$ ノ上ニ重ネムトスルニ A ヲ A' ノ上ニ, $b$ ヲ $b'$ ト合セシメ, B 及ヒ B' ヲ $b$ ノ同傍ニアラシムレバ,

$\hat{A}=\hat{A}'$ ナルユヱ AB ハ A'B' ニ沿ウテ重ナル.



然ルトキハ B ハ B' ノ上ニ落ツルカ, (1)

或ハ AB 或ハ其ノ延線上ノ他ノ或點 X ノ上ニ落ツ可シ. (2)

(1) ノ場合ニハ 二ツノ三角形ハ合同シ, $\hat{B}=\hat{B}'$.

(2) ノ場合ニハ $C'X=a=a'$

ナルユヱ $C'\hat{B}'X=C'\widehat{X}B'$ [何故カ]

然ルニ $C'\widehat{X}A'+C'\widehat{X}B'=2\hat{R}$. [17 款]

$\therefore\ \hat{B}+\hat{B}'=2\hat{R}$.

---

**例題** 二ツノ三角形 ABC, A'B'C' ニ於テ $a=a'$, $b=b'$, $\hat{A}=\hat{A}'$ ナルトキ,

**59.** $\hat{A}=\hat{R}$ 或ハ $\hat{A}>\hat{R}$ ナルトキハ兩形ハ全等ナリ.

**60.** $a>b$ ナルトキハ兩形ハ全等ナリ.

**61.** $a=b$ ナルトキハ兩形ハ全等ナルカ.

**62.** $a<b$ ナルトキハ兩形ハ兩意ノ場合ナリ.

**63.** $\hat{B}'=\hat{B}$ ナルトキハ兩形ハ全等ナリ.

**64.** $\hat{B}$, $\hat{B}'$ ガ倶ニ鈍角或ハ倶ニ鋭角ナルトキハ兩形ハ全等ナリ.

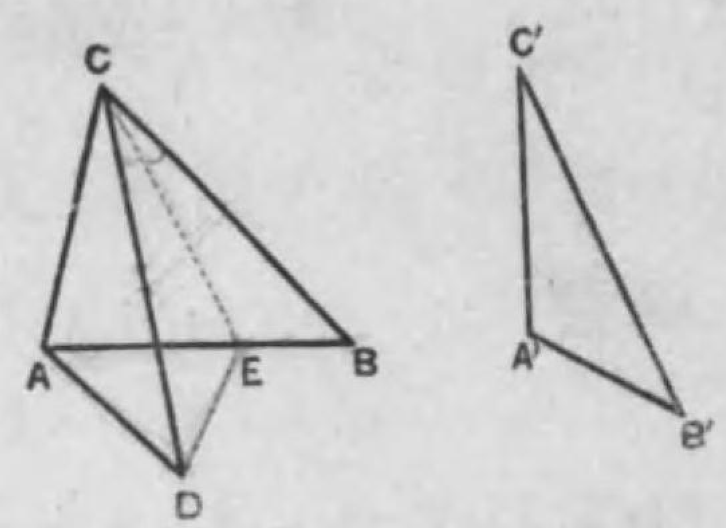
---

**55.** **定理** 二つの三角形に於て二邊がそれぞれ相等しく其の夾む角が不等なるときは夾む角の大なる方の對邊は小なる方の對邊より大なり.

$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

$AC = A'C'$
$BC = B'C'$
$\widehat{ACB} > \widehat{A'C'B'}$

ナルトキハ




$AB > A'B'$ ナルコトヲ證セムトス.

**證** $\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ネムトスルニ, $A'$ ヲ $A$ ノ上ニ, $A'C'$ ヲ $AC$ ニ沿ウテ置クトキハ, $A'C' = AC$ ナルユヱ $C'$ ハ $C$ ノ上ニ落ツ.

而シテ點 $B$ ト點 $B'$ トハ $AC$ ノ同ジ傍ニアラシメ, 點 $B'$ ハ或點 $D$ ニ落ツルトセヨ.

然ルトキハ $\triangle ADC$ ハ $\triangle A'B'C'$ ノ新位置ナリ.

若シ點 $D$ ガ $AB$ 上ニ來レバ $AB > A'B'$ ナルコト明カナリ, 故ニ點 $D$ ガ $AB$ 上ニ來ラザル場合ヲ論ゼム.

角 $DCB$ ヲ $CE$ ニテ二等分シ, $AB$ ニ $E$ ニ於テ交ラ



シメ, $DE$ ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ $\triangle DCE$, $\triangle BCE$ ニ於テ

$DC = BC$ [假設]
$CE$ ハ共通
$\widehat{DCE} = \widehat{BCE}$ [何故カ]

$\therefore\ \triangle DCE \equiv \triangle BCE$, [45 款]

而シテ $DE = EB$,

然ルニ $AB = AE + EB = AE + ED$,

而シテ 此ハ $AD$ ヨリ大ナリ, [37 款]

$\therefore\ AB > A'B'$.

**例題 65.** $\triangle ACD$ ヲ $AC$ ノ左ニ置キテ本定理ヲ證セヨ.

**66.** 三角形 $ABC$ ニ於テ中線 $CD$ ヲ引クトキ $\widehat{CDA}$ ガ鈍角ナレバ $AC > BC$ ナリ.

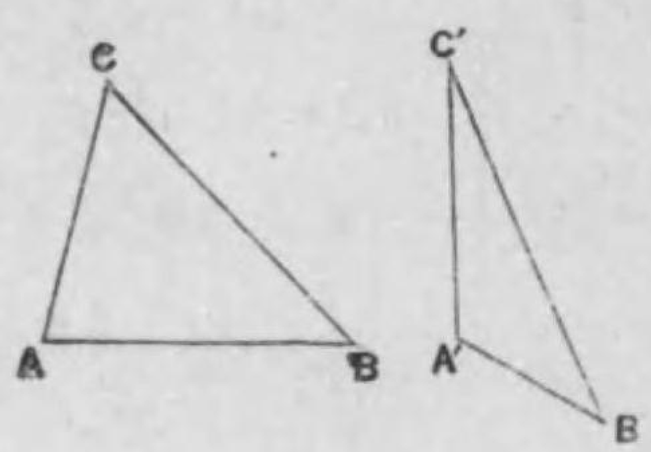
**56.** **定理** 二つの三角形に於て二邊がそれぞれ相等しく第三邊が不等なるときは其の大なる邊に對する角は小なる邊に對する角より大なり.

$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

$\left.\begin{aligned} AC &= A'C' \\ BC &= B'C' \\ AB &> A'B' \end{aligned}\right\}$

ナルトキハ

$\hat{C} > \hat{C'}$ ナルコトヲ證セムトス.




**證*** $\hat{C}$ ト $\hat{C'}$ トヲ比較スルニ

$$\hat{C} > \hat{C'}, \quad \hat{C} = \hat{C'}, \quad \hat{C} < \hat{C'}$$

ナル三ツノ場合アリ.

サテ $\hat{C} = \hat{C'}$ トスレバ $AB = A'B'$ トナル, [45 款]

コレ假設ニ戻ル.

* 斯ノ如ク一群ノ定理

$\left.\begin{aligned} &\hat{C} > \hat{C'} \text{ ナルトキハ } AB > A'B' \\ &\hat{C} = \hat{C'} \text{ ナルトキハ } AB = A'B' \\ &\hat{C} < \hat{C'} \text{ ナルトキハ } AB < A'B' \end{aligned}\right\}$ ヲ知リテ其ノ逆ノ眞ナルコトヲ

推定スルヲ**轉換法**ト云フ.



又 $\hat{C} < \hat{C'}$ トスレバ $AB < A'B'$ トナル, [55 款]

コレ又假設ニ戻ル.

$$\therefore \quad \hat{C} > \hat{C'}.$$

---

°**例題 67.** 三角形 ABC ニ於テ中線 CD ヲ引クトキ $AC > BC$ ナレバ $\widehat{CDA}$ ハ鈍角ナリ.

---

**57.** **定義** 四邊形に於て

(I) 二組の對邊が互に平行なるときは之を**平行四邊形**と云ふ.

°(II) 總ての邊が相等しきときは之を**菱形**と云ふ.

(III) 總ての角が直角なるときは之を**矩形**と云ふ.

(IV) 總ての邊及び總ての角が相等しきときは之を**正方形**と云ふ.

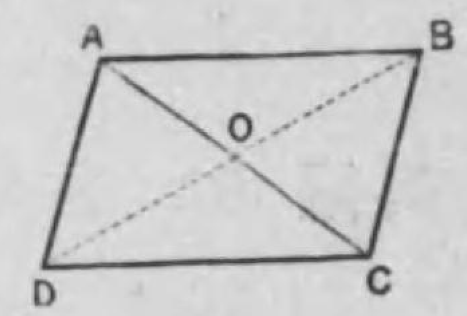
---

**58.** **定理** 平行四邊形に於て二組の對邊は互に相等し.

平行四邊形 ABCD ニ於テ

$AB=CD,\ BC=AD$

ナルコトヲ證セムトス.




**證** AC ハ二平行直線 AB, CD ノ横截線ナルユヱ

$$B\widehat{A}C=D\widehat{C}A, \qquad [29\text{款}]$$

又 AC ハ二平行直線 BC, AD ノ横截線ナルユヱ

$$B\widehat{C}A=D\widehat{A}C, \qquad [29\text{款}]$$

而シテ　AC ハ $\triangle ABC,\ \triangle CDA$ ニ共通ス,

$$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle CDA, \qquad [46\text{款}]$$

$$\therefore \quad AB=CD,\ \ BC=DA.$$

**59.** **系 1.** 平行四邊形ノ對角線ハ之ヲ全ク相等シキ二ツノ三角形ニ分ツ.

**系 2.** 平行四邊形ニ於テ二組ノ對角ハ互ニ相等シ.

**系 3.** 平行四邊形ノ二ツノ對角線ハ互ニ二等分セラル.

**注意** 平行四邊形ニ於テ

1. 兩隣邊ガ相等シキトキハ菱形,



2. 一角ガ直角ナルトキハ矩形,
3. 兩隣邊相等シク且一角ガ直角ナルトキハ正方形.

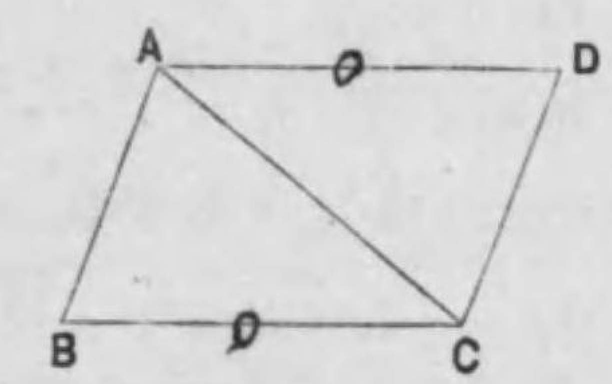
ナルコトヲ知ルベシ.

**60.** **定理** 四邊形の一組の對邊が相等しく且平行なるときは平行四邊形なり.

四邊形 ABCD ニ於テ

$\left.\begin{array}{l} AB=CD \\ AB \parallel CD \end{array}\right\}$ 及ビ

ナルトキハ




ABCD ハ平行四邊形ナルコトヲ證セムトス.

**證** AC ヲ結ビ付ケテ學生自ラ證明セヨ.

**61.** **系 1.** 四邊形ノ二組ノ對邊ガソレゾレ互ニ相等シキトキハ平行四邊形ナリ.

**系 2.** 四邊形ノ二組ノ對角ガソレゾレ互ニ相等シキトキハ平行四邊形ナリ.

**系 3.** 四邊形ノ兩對角線ガ互ニ二等分トナルトキハ平行四邊形ナリ.

**例題　68.**　菱形ノ兩對角線ハ互ニ垂直ナルコトヲ證セヨ.

**69.**　矩形ノ兩對角線ハ相等シク何レモ一邊ト等角ヲナスコトヲ證セヨ.

又正方形ニ就キテハ如何.

**70.**　三角形ノ一邊ノ中點ヨリ他ノ一邊ヘ平行シテ引ケル直線ハ第三邊ノ中點ヲ過ル.

**71.**　三ツノ平行直線ガ一ノ横截線ヨリ相等シキ分線ヲ截リ取ルトキハ他ノ任意ノ横截線ヨリモ相等シキ分線ヲ截リ取ルコトヲ證セヨ.

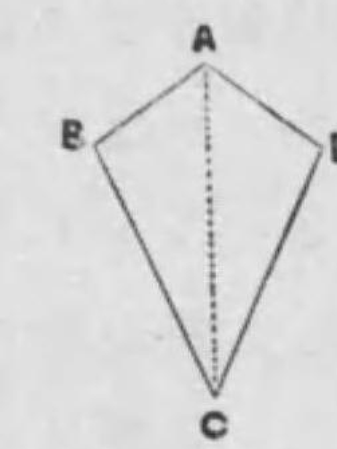
**72.**　平行四邊形ノ兩對角線ノ交點ヲ過リテ兩對邊ノ間ニ引ケル任意ノ直線ハ該點ニテ二等分セラルルコトヲ證セヨ.

一定點ヲ過リテ一ノ圖形ノ間ニ夾マレタル任意ノ直線ガ其ノ定點ニテ二等分トナルトキ此ノ圖形ハ此ノ點ニ關シテ**對稱ナリ**ト云ヒ,或ハ**點對稱**ヲモツト云フ. 此ノ定點ヲ**對稱ノ中心**ト稱ス.

**73.**　三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ第三邊ニ平行シ且ツソノ半分ニ等シ.



**74.**　しるべすたー[*Sylvester*, 西暦 1814 年生,近世數學ノ大家]氏ハ一種ノ紙鳶ヲ圖ノ如キ四邊形即チ AB＝AD, BC＝CD ナル四邊形 ABCD トセリ.




此ノ紙鳶ニ於テ

(1)　AC ヲ軸トシテ折リ返ストキハ △ABC ハ全ク △ADC ニ重ナル.

(2)　此ノ軸[AC]ハ BD ヲ直角ニ二等分シ,又角 A 及ビ C ヲ二等分ス.

(3)　角 B 及ビ D ハ相等シク,且 BD ガ相等シキ邊トナス角ハ相等シ.

一ノ圖形ガ一定直線ヲ折目トシテ其ノ一部ヲ折リ返ストキ全ク他ノ一部ト重ナルトキハ此ノ圖形ヲ此ノ定直線ニ關シテ**對稱ナリ**ト云ヒ,或ハ**線對稱**ヲモツト云フ. 此ノ定直線ヲ**對稱ノ軸**ト稱ス.

**75.**　二邊平行スル四邊形ノ平行セザル二邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ平行スル二邊ノ和ノ半分ニ等シキコトヲ證セヨ.

二邊平行スル四邊形ヲ**梯形**ト云フ.

**76.** 梯形ノ兩對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ平行スル二邊ノ差ノ半分ニ等シ.

**77.** 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付クレバ平行四邊形ヲ生ズ其ノ證如何.

又此ノ四邊形ノ周ハモトノ四邊形ノ兩對角線ノ和ニ等シキコトヲ證ス可シ.

**78.** 四邊形ノ二組ノ兩對邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ト兩對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線トハ同一ノ點ニ交リ且互ニ二等分セラル.

---



# 雜題

**79.** 三角形ABCノ各邊上ニ之ヲ一邊トシテ外方ニ正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ作ルトキハ AD, BE, CF ハ相等シ.

**80.** 直角三角形ニ於テ斜邊ノ中點ハ三ツノ角ノ頂點ヨリ等距離ニアリ.

而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

**81.** 三角形ノ一中線ガ兩隣邊トナス二角ニ就キテ小邊トナス角ハ大邊トナス角ヨリ大ナリ之ヲ證セヨ.

**82.** 三角形ノ一角ノ頂點ヨリ對邊ヘ垂線,中線及ビ其ノ角ノ二等分線ヲ引クトキハ二等分線ハ他ノ二線ノ間ニアルコトヲ證セヨ.

**83.** 二等邊三角形ノ底ノ上ノ任意ノ一點ヨリ二等邊ヘ引ケル垂線ノ和ハ一定ナリ.

若シ點ガ底ノ延線ノ上ニアルトキハ如何.

**84.** 正三角形内ノ任意ノ一點ヨリ各邊ヘ引ケル垂線ノ和ハ一定ナリ.

若シ點ガ正三角形ノ外ニアルトキハ如何.

**85.** 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點ニ交ルコトヲ證セヨ.

此ノ點ヲ三角形ノ**重心**ト云フ.

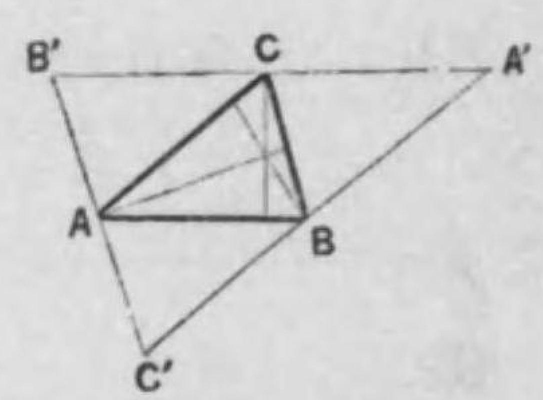
**86.** 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點ニ交ルコトヲ證セヨ.

此ノ點ヲ三角形ノ**外心**ト云フ.

**87.** 三角形ノ各角頂ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ハ同一ノ點ニ交ル.*

此ノ點ヲ三角形ノ**垂心**ト名ヅク.

[△ABCノ各角頂ヲ過リテ對邊ヘ平行スル直線ヲ引キ△A′B′C′ヲ作リテ證セヨ].




* 此ノ定理ハ希臘ノ數學者あるきめです[*Archimedes*, 西暦紀元前 287 年生, 同 212 年死] ノ發見セシモノニシテ𢪸ニ求メントスル證ハ近世ノ一大數學家がうす[*Gauss*, 西暦 1777 年生, 1855 年死] ノ考案ニ係ル.



**88.** 鋭角三角形ニ於テハ外心モ垂心モ形內ニアルコトヲ證セヨ.

鈍角三角形ニ於テハ如何.

直角三角形ニ於テハ如何.

**89.** 三角形ノ各角ノ內二等分線ハ同一ノ點ニ交ル. 此ノ點ヲ三角形ノ**內心**ト云フ.

**90.** 三角形ノ一角ノ內二等分線ト他ノ二角ノ外二等分線トハ同一ノ點ニ交ル.

此ノ點ヲ三角形ノ**傍心**ト云フ.

**91.** 三角形 ABC ニ於テ二邊 AB, AC ガ不等ナレバ中線 BE, CF モ亦不等ナルコトヲ證セヨ.*

[AB>AC ナレバ BE>CF].

* 若シ定理ノ雛形ヲ

「A ガ B ナルトキハ C ハ D ナリ」トセバ [48 題]

「A ガ B ナラザルトキハ C ハ D ナラズ」ハ [91 題]

前ノ定理ノ**裏**ト云ヒ, 或定理ガ眞ナルモ其ノ裏ハ必ズシモ眞ナラズ.

**92.** 定直線MNノ同傍ニ二定點A,Bアリ今MN上ニ一線Pヲ取リ $AP+BP$ ヲ最小ナラシメヨ.

又A,BガMNノ異傍ニアルトキ $AP \sim BP$ ヲ最大ナラシメヨ.

**93.** ABCハ任意ノ角ニシテACハBCニ垂線ナリトス. 若シACノ中ニ一點Pヲ求メBPヲ引キ延バシテ,Aヲ過リテBCニ平行スル直線ニQニ於テ交ラシメPQヲABノ二倍ナラシメ得レバ角PBCハ角ABCノ三分ノ一ナルコトヲ證セヨ.

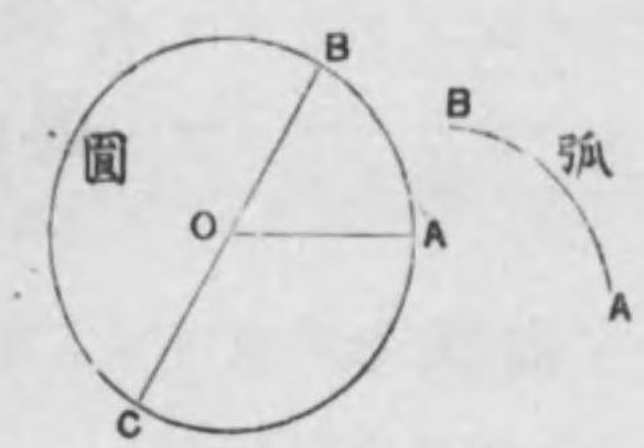
# 第二編　圓

## 第一節

## 弦及弧

**62.** **定義**　**圓**とは**圓周**と稱する線を以て圍みたる平面形にして形内の一定點より圓周まで引ける直線は皆相等しき如きものを云ふ.

此ノ定點ヲ圓ノ**中心**,中心ヨリ圓周マデノ直線ヲ**半徑**,中心ヲ過リ圓周ニ夾マルル直線ヲ**徑**ト云ヒ圓周ノ一部ヲ**弧**ト云フ.




**例題 1.** 圓ノ總テノ徑ハ相等シキコトヲ證セヨ.

**2.** 圓ノ中心ヨリ一點マデノ距離ハ其ノ點ガ圓内ニアレバ半徑ヨリ小サク,圓周上ニアレバ半徑ニ等シク,圓外ニアレバ半徑ヨリ大ナリ.

3. 圓ノ中心ヨリ一點マノデ距離ガ半徑ヨリ小ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,又ハ之ヨリ大ナルカニ從ヒ其ノ點ハ圓ニ關シテ如何ナル位置ニアルカ.

4. 相等シキ半徑ノ圓ハ全ク相等シ.

5. 圓ハ中心ニ關シテ對稱ナリ.

---

**63. 定義** 圓を截る所の直線を**割線**,割線の圓內にある部分を**弦**と云ひ,弦と弧とより成る平面形を**弓形**と云ふ.

弦ハ圓周及ビ圓ヲ**共軛**ナル二部ニ分チ其ノ小ナル方ヲソレゾレ**劣弧**及ビ**劣弓形**ト云ヒ其ノ大ナル方ヲソレゾレ**優弧**及ビ**劣弓形**ト云フ.

---

**例題 6.** 圓ヲ一ノ徑ニテ分チタル弓形,及ビ弧ノ大サヲ比較セヨ.

7. 圓ハ其ノ任意ノ徑ニ關シテ對稱ナリ.
徑ニテ分チタル圓ノ各部ヲ**半圓**ト云フ.

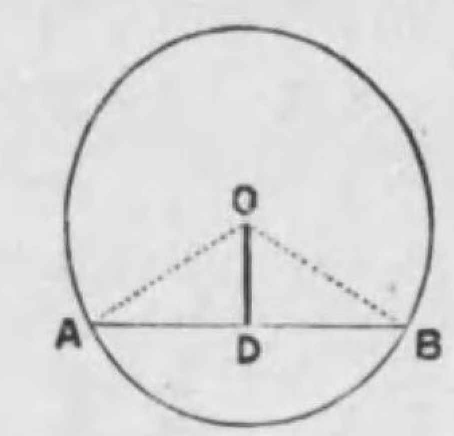
8. 圓ノ徑上ノ任意ノ點ニ於テ之ト等角ヲナス割線ヲ引クトキハ此ノ點ヨリ圓周トノ交點マデノ距離ハ相等シ.



9. 互ニ垂直ナル二徑ハ圓,及ビ圓周ヲ四等分ス.
互ニ垂直ナル二徑ニテ分タレタル圓,及ビ圓周ノ各部ヲ**象限,**及ビ**象限弧**ト云フ.

---

**64. 定理** 圓の中心より弦へ引ける垂線は弦を二等分すべし.



OD ハ中心 O ヨリ弦 AB へ引ケル垂線トスルトキハ

AD = BD

ナルコトヲ證セムトス.

**證** OA = OB

ナルユヱ, O ヨリ AB へ引ケル直線 OD ハ

AB ヲ二等分ス, [I. 53 題]

**65. 系** 圓ノ中心ヨリ弦ノ中點へ引ケル直線ハ弦ニ垂線ナリ.

---

**例題 10.** 弦 AB ノ垂直二等分線ハ圓ノ中心ヲ過ル.

11. OD ヲ兩方へ引キ延バシタル直線ハ弦 AB ニテ分ツ共軛弧ヲ二等分ス.

**12.** 弦 AB ニテ分ツ共軛弧ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ中心ヲ過リ且弦ヲ直角ニ二等分ス.

**13.** 弦 AB ニテ分ツ共軛弧ノ一ノ中點ヲ中心ニ結ビ付クル直線ハ弦ヲ直角ニ二等分ス.

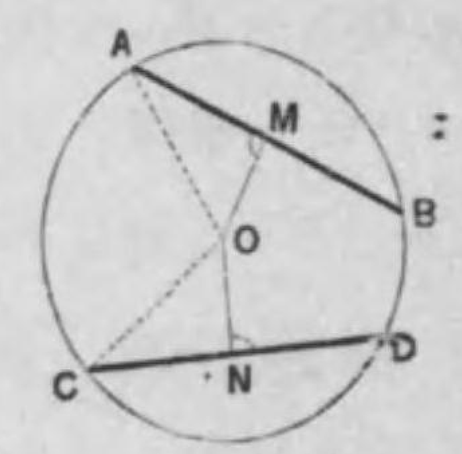
**14.** 圓ノ平行セル諸弦ノ一ヲ直角ニ二等分スル直線ハ殘リノ弦ヲモ直角ニ二等分ス.

**15.** 三ツノ點ヲ過ル一ツノ圓ヲ作ルコトヲ得, 而シテ唯一ツニ限ル.

---

## 66. **定理** 同じ圓に於て相等しき弦は中心より等距離にあり.

中心 O ヨリ弦 AB, CD ヘ垂線 OM, ON ヲ引キ




$\underline{弦\ AB = 弦\ CD}$

トスルトキハ

$\underline{OM = ON}$

ナルコトヲ證セムトス.

**證** AO, CO ヲ結ビ付ケヨ.

サテ　$AM = MB,\quad CN = ND,$　[64 款]

然ルニ　$AB = CD$　[假設]



ナルユヱ　$AM = CN$

而シテ　$AO = CO$　[62 款]

$A\hat{M}O = C\hat{N}O$　[何故カ]

依リテ　$\triangle AMO \equiv \triangle CNO,$　[I. 59 題]

$\therefore\ OM = ON.$

## 67. **系** 本定理ノ逆モ亦眞ナリ.

**注意** 66, 67 款ハ同ジ圓ニ限ラズ相等シキ圓ニ於テモ亦眞ナリ.

---

**例題 16.** 同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ不等ノ二弦ニ就キテ其ノ大ナル方ハ中心ニ近ク小ナル方ハ遠シ.

**17.** 同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ次ノ二條ヲ證明セヨ.

(1) 相等シキ弦ニ對スル弧ハ相等シ.

•(2) 一ノ弧ニ對スル弦ノ二倍ハ其ノ二倍ノ弧ニ對スル弦ヨリモ大ナリ.

---

# 第二節

## 中心角及び圓周角

68. **定義** 圓の二つの半徑の間の角を**中心角**と云ふ.

中心角ハ其ノ二邊ナル半徑ノ夾ム弧ニ**立ツ**ト云ヒ弧ハ中心角ニ**對ス**ト云フ.

---

**例題 18.** 同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ中心角ハ相等シキ弧ノ上ニ立ツ.

19. 同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弧ニ對スル弦ハ相等シ.

20. 同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ中心角ガ不等ナレバ大ナル中心角ハ大ナル弧ノ上ニ立ツ.

中心角ハ其ノ立ツ所ノ弧ニテ**測度セラル**ト云フ.

---

69. **定義** 圓の**扇形**とは其の弧と其の兩端へ引ける半徑との間の平面形を云ふ.



扇形ノ弧ノ兩端ヘ引ケル二ツノ半徑ノ間ノ角ヲ**扇形ノ角**ト云ヒ扇形ハ此ノ角ニ對スル弧ニ**立ツ**ト云フ.

---

**例題 21.** 18及ビ20題ハ扇形ニ就キテモ亦眞ナルコトヲ證セヨ.

---

22. 圓ノ徑ハ圓周ヲ相等シキ二弧ニ分ツコトヲ18題ニ依リテ證セヨ.

23. 圓ヲ六ツノ相等シキ扇形ニ分ツトキハ其ノ一ニ於ケル扇形ノ角ハ幾度ナルカ.

24. AB,AC ハ圓ノ相等シキ二弦ナルトキハ角BACノ二等分線ハ中心ヲ通過スルコトヲ證セヨ.

25. 一直線ハ二ツヨリ多クノ點ニ於テ圓ヲ截ル能ハザルコトヲ證セヨ.

26. 共通ノ中心ヲモツ二ツノ圓周ノ間ニ夾マレタル一直線ノ部分ハ相等シ.

共通ノ中心ヲモツ圓ヲ**同心圓**ト云フ.

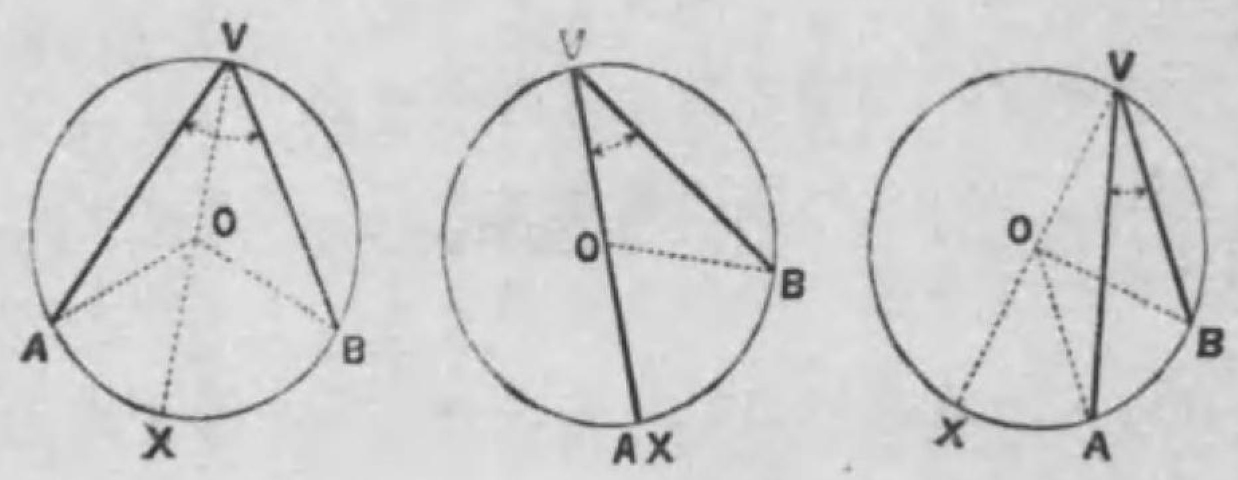
---

**70.　定義**　圓周上の一點より引ける二つの弦の間の角を**圓周角**と云ふ.

圓周角ハ其ノ二邊ナル弦ノ夾ム弧ニ**立ツ**ト云ヒ弧ハ圓周角ニ**對ス**ト云フ.

**71.　定理**　圓周角は同じ弧の上に立つ中心角の半分に等し.

AVB ハ圓周角, AOB ハ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角トスレバ




$\widehat{AVB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ ナルコトヲ證セムトス.

**證**　中心 O ヲ過リテ VO ヲ引キ, 之ヲ引キ延バシ圓周ニ X ニ於テ交ラシメヨ.

サテ　$\widehat{XVB}=\widehat{VBO},$　[48 款]

而シテ　$\widehat{XOB}=\widehat{XVB}+\widehat{VBO},$　[40 款]

$=2\widehat{XVB},$

$\therefore\ \widehat{XVB}=\frac{1}{2}\widehat{XOB},$　[何故カ]



同様ニ　$\widehat{AVX}=\frac{1}{2}\widehat{AOX},$　[第二圖ニ於テハ各＝0]

故ニ　$\widehat{AVB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}.$　[10 款 III, IV]

**72.　定義**　圓の**弓形に於ける角**とは弓形の弦の兩端より弓形の弧の上の任意の一點に引ける二直線間の角を云ふ.

**73.　系 1.**　圓ノ同ジ弓形ニ於ケル角ハ相等シ.*

**系 2.**　同ジ圓, 或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シ. 而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

---

**例題 27.**　一點ヨリ弓形ノ弦ノ兩端ヘ引ケル二直線間ノ角ハ其ノ點ガ弓形ノ內ニアレバ弓形ニ於ケル角ヨリ大ニシテ,其ノ點ガ弓形ノ外ニアレバ弓形ニ於ケル角ヨリ小ナリ.

---

*　此ノ系ハひぽくらてす [*Hippocrates of Chios*, 西暦紀元前 470 年頃ノ希臘人, 始メテ初等幾何學ノ書ヲ著ハセシ人ナリ] ノ考案ニ出ヅ.

**28.** 一點ヨリ弓形ノ弦ノ兩端ヘ二直線ヲ引キ其ノ間ノ角ガ其ノ弓形ニ於ケル角ニ等シケレバ此ノ點ハ其ノ弓形ノ弧ノ上ニアリ.

**29.** 同ジ圓ニ於テAB, CDヲ平行セル二弦トスレバ弧AC, BDハ相等シ.

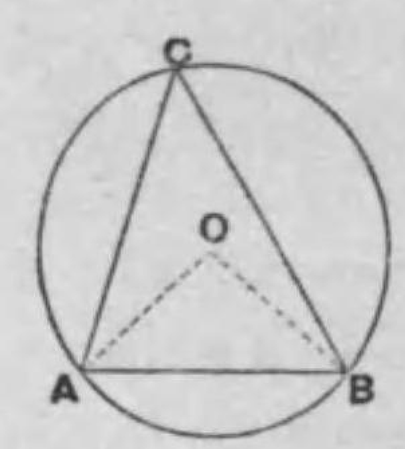
**30.** 同ジ圓ニ於テ弧AC, BDガ相等シケレバABハCDニ等シキカ,或ハAB, CDハ平行ス.

**31.** 圓內ニ於テ相交ル二弦ノ間ノ角ハ其ノ弦ガ夾ム二弧ノ和ノ半分ニテ測度セラルル中心角ニ等シ.

若シ二弦ハ其ノ延線ガ相交ル如クナルトキハ如何.

---

**74. 定理** 弓形に於ける角は其の弓形が半圓よりも大,或は之に等しく,又は之より小なるに從ひ銳角,或は直角,又は鈍角なり.



ABヲ任意ノ弦トシCヲ弧上ノ任意ノ點トス.

弓形ACB＞＝＜半圓

ナルトキ



角ACB＜＝＞$\hat{R}$ ナルコトヲ證セントス.

**證** Oヲ中心トシ, AO, BOヲ結ビ付ケヨ.

弓形ACB＞半圓

ナレバ　　弧ACBノ共軛弧ハ半圓ヨリ小

ナルヲ以テ　　$A\widehat{O}B < 2\hat{R}$.

然ルニ　　$A\widehat{C}B = \frac{1}{2} A\widehat{O}B$,

$\therefore \quad A\widehat{C}B < \hat{R}$.

他ノ證明ハ學生自ラ試ミヨ.

**75. 系** 弓形ハソレニ於ケル角ガ直角ヨリ小或ハ之ニ等シク,又ハ之ヨリ大ナルニ從ヒテ半圓ヨリ大,或ハ之ニ等シク,又ハ之ヨリ小ナリ.*

---

**例題 32.** 三角形ノ三ツノ角ノ頂點ヲ過リテ一ノ圓ガ畫カレタリトシ71款ノ定理ヲ用ヒテ三角形ノ各角ノ和ガ二直角ナルコトヲ證ス可シ.

**33.** △ABCノ二邊AB, ACヲ徑トシテ其ノ上ニ畫キタル二ツノ圓周ハ底,又ハ底ノ延線上ニテ相交ルコトヲ證セヨ.

---

* 半圓ニ於ケル角ガ直角ナルコトハたーれすノ發明ナリ. たーれすハ直角三角形ノ直角ノ頂點ガ斜邊ヲ徑トシテ其ノ上ニ畫キタル圓周上ニアルコトヲ發明セシトキ牛ヲ供ヘテ神ヲ祭レリト云フ.

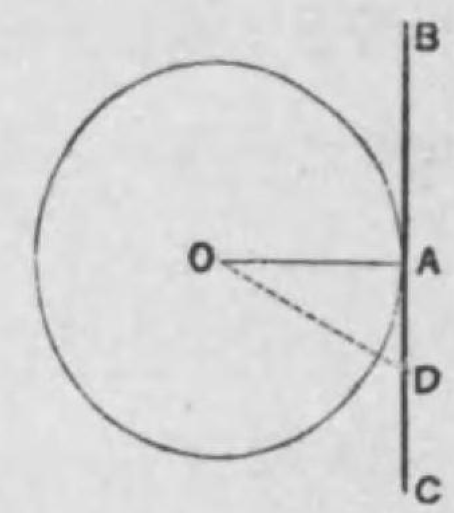
## 第三節

### 切線 及び 二圓の關係

**76.** **定理** 圓周上の一點を過り其の點へ引ける半徑に垂直なる直線は圓周と唯一點に於て出會ふ.

Oヲ圓ノ中心トシBAC⊥OAナルトキハ

BCハ圓Oノ周ト唯一點Aニ於テ出會フコトヲ證セムトス.




**證** BC上ニAノ外ニ任意ノ點Dヲ取リ,ODヲ結ビ付ケヨ,

OA⊥BCナルユヱ OA<OD, [I. 56題]

∴ BCト圓周Oトハ唯一點Aニ於テ出會フ.

**77. 系** Aヲ過リOAニ斜線ヲ引ケバAノ外,亦他ノ一點ニ於テ圓周ニ出會フ.

**78.** **定義** 圓周と唯一點のみにて出會ふ直線は其の圓に**切す**と云ひ此の



直線を圓の**切線**,その圓周に出會ふ點を**切點**と云ふ.

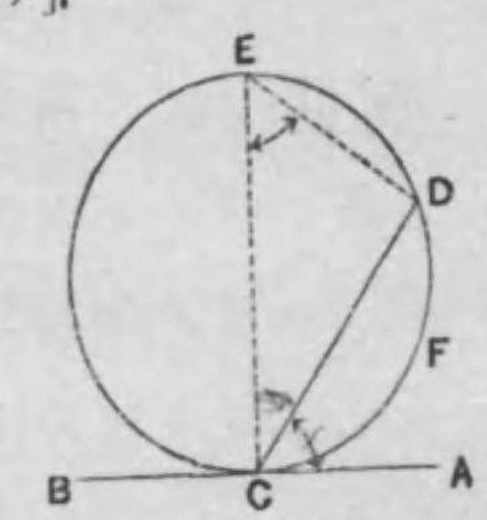
---

**例題 34.** 圓周上ノ一點ニ於テ其ノ圓ニ一ツノ切線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

**35.** 圓ノ切線ハ其ノ切點ヘ引ケル半徑ニ垂直ナリ. 逆ニ 圓ノ中心ヨリ切線ヘ引ケル垂線ハ切點ヲ通過ス.

---

**79.　定理**　切線と其の切點より引ける弦との間の角は隣の弓形に於ける角に等し．[此ノ逆モ亦眞ナリ]．




AB ハ點 C ニ於ケル切線
CD ハ任意ノ弦トスレバ
$\widehat{ACD}$ = 弓形 CED ニ於ケル角
ナルコトヲ證セムトス．

**證**　CE ハ C ヲ過ル徑トスレバ

$\widehat{ACD}$ ハ $\widehat{DCE}$ ノ餘角ナリ，　[35 題]

又　$\widehat{CDE} = \hat{R}$　[74 款]

ナルユヱ　$\widehat{CED}$ ハ $\widehat{DCE}$ ノ餘角ナリ．　[I. 31 題]

$\therefore\ \widehat{ACD} = \widehat{CED}$,

而シテ　$\widehat{CED}$ ハ弓形 CED ニ於ケル角ナリ．

同樣ニ　$\widehat{BCD}$ = 弓形 CFD ニ於ケル角．

**80. 系**　圓外ノ一點ヨリ圓ニ引ケル二切線ハ相等シ．如何トナレバ此ノ二切線ト切點ヲ結ビ付クル弦トニテ作レル三角形ノ二角ハ本定理ニ依リテ相等シケレバナリ．

---



**例題 36.**　79 款ノ圖ニ於テ P ヲ弧 CFD ノ中點トスレバ P ハ CA 及ビ CD ヨリ等距離ニアルコトヲ證セヨ．

若シ P ヲ弧 CED ノ中點ナリトセバ如何．

**37.**　圓ノ中心ヨリ一直線ニ至ル距離ガ半徑ヨリ小,或ハ之ニ等シク,又ハ之ヨリ大ナルニ從ヒ此ノ直線ハ圓ヲ截ル可ク,或ハ之ニ切ス可ク,又ハ之ニ出會ハザル可シ．

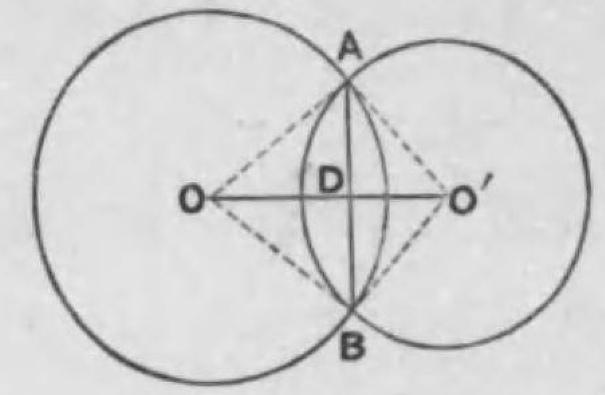
**38.**　切點ヲ過リ切線ヘ引ケル垂線ハ圓ノ中心ヲ過ルコトヲ證セヨ．

---

**81.　定義**　二圓の中心を結び付くる直線を其の**中心線**と云ふ．

**82.** **定理** 二つの圓周が其の中心線外の一點にて出會ふときは尚他の一點にて出會ふ.

中心 O, O′ ナル二ツノ圓周ガ其ノ中心線外ノ點 A ニ於テ出會フトキハ




尚他ノ一點ニテ出會フコトヲ證セムトス.

**證** A ヨリ OO′ ニ垂線 AD ヲ引キ之ヲ B マデ引キ延バシテ

DB＝AD

ナラシメ,　OA, OB, O′A, O′B ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ　OB＝OA.　[45 款]

依リテ　點 B ハ中心 O ナル圓周ノ上ニアリ. [II. 3 題]

同樣ニ　點 B ハ中心 O′ ナル圓周ノ上ニアルコトヲ證シ得ベシ.

故ニ　二圓ハ又點 B ニ於テ出會フ.

**83.** **定義** 二つの圓周が唯一點にて出會ふときは**相切す**と云ふ.



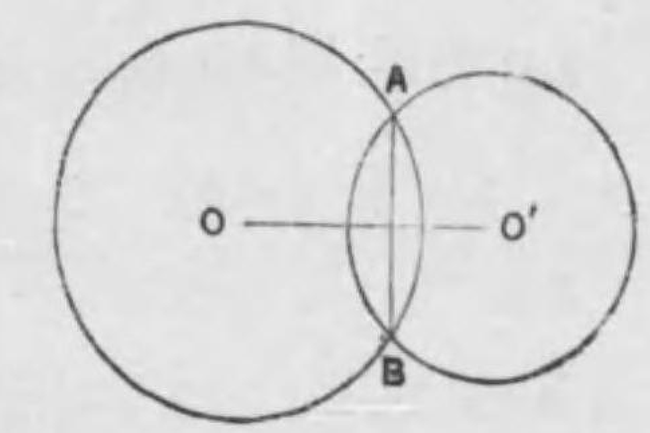
此ノ場合ニ一圓ガ全ク他ノ内ニ在レバ**内切ス**ト云ヒ,二圓ガ互ニ他ノ外ニ在レバ**外切ス**ト云フ.

---

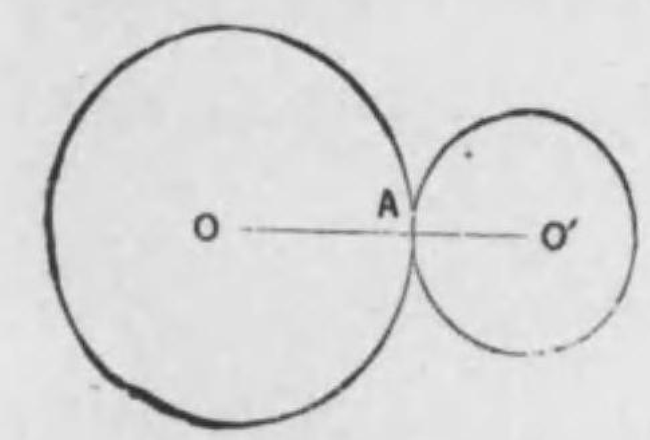
**例題 39.** 二ツノ圓周ガ中心線上ノ一點ニテ出會フトキハ他ノ點ニテ出會フコトナシ.

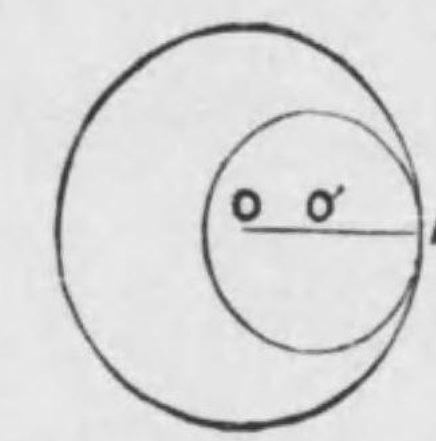
---

**84.** **系 1.** 相交ル二圓ノ中心線ハ其ノ共通弦ノ垂直二等分線ナリ.




**系 2.** OO′ ハ恒ニ AB ヲ直角ニ二等分スルユヱ,圓 O, O′ ガ漸々移動シ唯一點ニ於テ出會フトキハ點 A 及ビ B ハ相合シ OO′ ハ二ツノ圓周ノ切點ヲ過ル.




故ニ　圓ガ相切スルトキ二圓ノ中心ト切點トハ同一直線上ニアリ.

---

**例題 40.** 二圓ガ全ク相離レテ二ツガ互ニ他ノ外ニアレバ二ツノ中心間ノ距離ハ二ツノ半徑ノ和ヨリ大ナリ.

**41.** 二圓ガ全ク相離レテ其ノ一ガ他ノ内ニアレバ二ツノ中心間ノ距離ハ二ツノ半徑ノ差ヨリ小ナリ.

**42.** 二圓ガ相交ルトキハ二ツノ中心間ノ距離ハ二ツノ半徑ノ和ヨリ小ニシテ差ヨリ大ナリ.

**43.** 二圓ガ外切スルトキ二ツノ中心間ノ距離ハ如何.

**44.** 二圓ガ内切スルトキ二ツノ中心間ノ距離ハ如何.

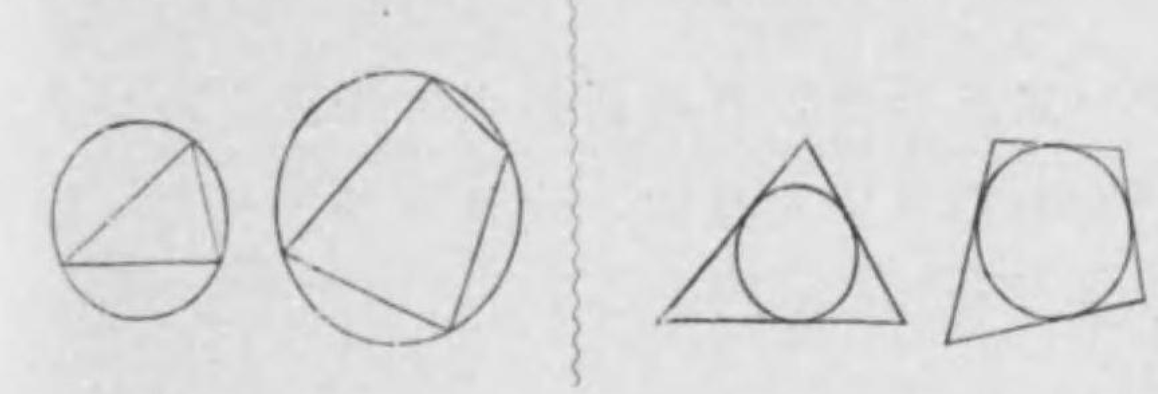
## 第四節

### 内接形 及び 外切形

**85. 定義** 多角形の各角の頂點が同一の圓周上にあるときは多角形は圓に**内接す**といひ圓は多角形に**外接す**と云ふ.

**86. 定義** 多角形の各邊が同一の圓に切するときは多角形は圓に**外切す**といひ圓は多角形に**内切す**と云ふ.*

内接形及ビ外接圓　　外切形及ビ内切圓



* 切ト接トノ異義ナルコトニ注意セヨ.

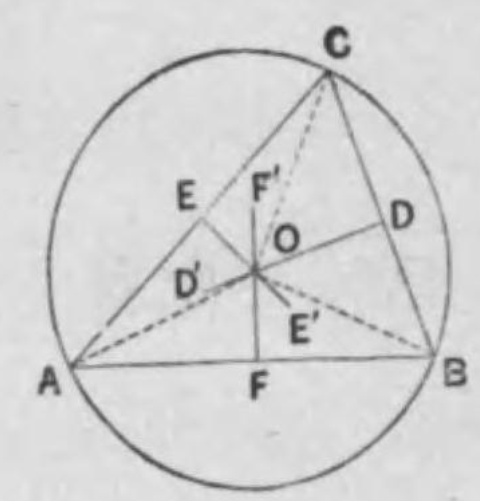
**87.** **定理**　任意の三角形に外接する圓を書くことを得.

△ABC ニ於テ

A,B,C ヲ過ル一ツノ圓

ヲ書キ得ルコト

ヲ證セムトス.




**證**　第一編86題ニ依リ,各邊ノ垂直二等分線DD′, EE′, FF′ ハ同一ノ點Oニ交リ

$$OA = OB = OC$$

ナルユヱ, O ヲ中心トシ, OA ヲ半徑トシテ書ケル圓ハ三角形ABC ノ外接圓ナリ.

---

**45.** 正三角形ノ外接圓周上ノ任意ノ點ヨリ三ツノ頂點ニ引キタル分線ノ中最モ長キモノハ他ノ二ツノ和ニ等シ.

**46.** 三角形ノ垂心ヨリ一邊ヘ垂線ヲ引キ之ヲ外接圓周マデ引キ延バストキハ其ノ分線ハ該邊ニテ二等分セラル.



**47.** 圓ニ内接スル三角形ノ頂角ノ外二等分線ガ圓周ト交ル點ハ底邊ノ兩端ヨリ等距離ニ在リ.

---

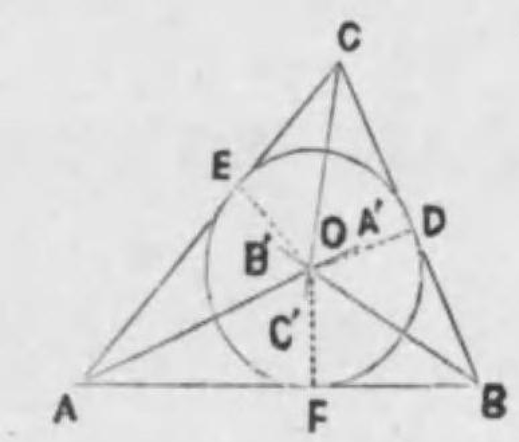
**88.** **定理**　任意の三角形に内切する圓を書くことを得.

△ABC ニ於テ

邊 AB, BC, CA ニ切スル圓

ヲ書キ得ルコト

ヲ證セムトス.




**證**　第一編89題ニ依リ各角ノ二等分線AA′, BB′, CC′ ハ同一ノ點Oニ交リ點Oヨリ各邊ヘ下セル垂線

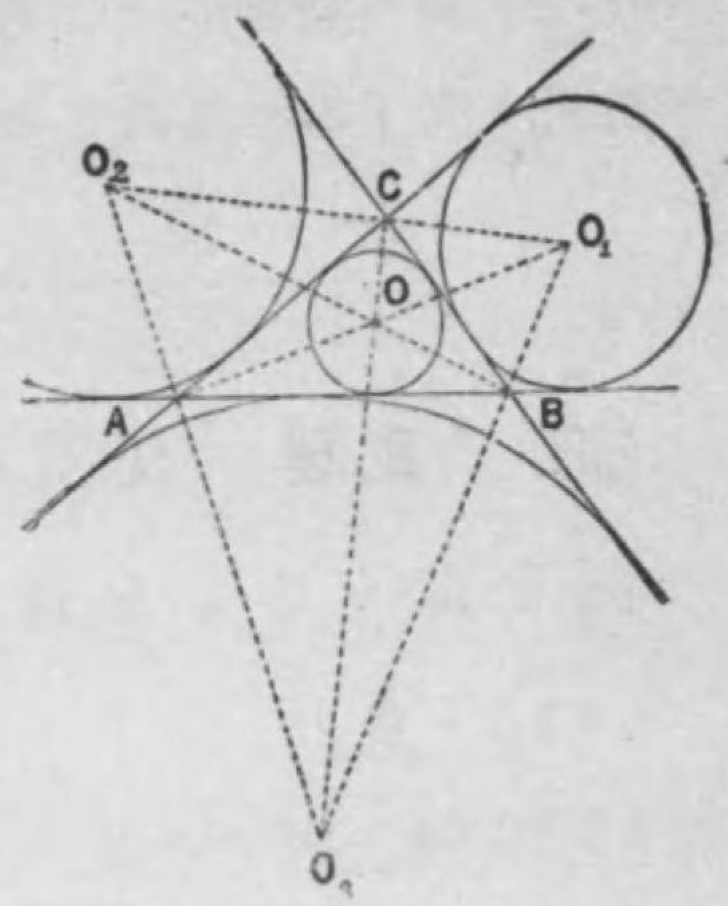
$$OD = OE = OF$$

ナルユヱ　　Oヲ中心トシODヲ半徑トセル圓ハ三角形ABCノ内切圓ナリ.

**89.** **系 1.** 三角形ノ三邊ニ切スル圓ハ唯一ツアリ.

**系 2.** 三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延線トニ切スル圓ヲ書クコトヲ得.

**90.** **定義** 三角形の各邊と他の二邊の延線とに切する圓を**傍切圓**といふ.




三角形ノ傍切圓ハ三ツアリ.

---

**例題 48.** 三角形ノ二ツノ傍心[或ハ内心ト一ツノ傍心ト]ヲ結ビ付クル直線[或ハ其ノ延線]ハ三角形ノ頂點ノ何レカ一ツヲ過ル.

**49.** 三角形ノ内心ハ三ツノ傍心ヲ頂點トスル三角形ノ垂心ナリ.

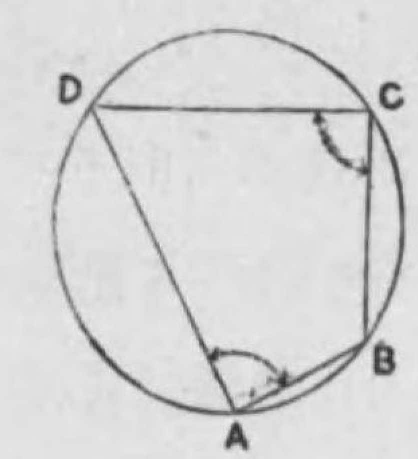
**50.** 二ツノ平行直線ト一ツノ横截線トニ切スル圓ハ幾ツアルカ.

---



**91.** **定理** 四邊形が圓に内接するときは其の相對する角は互に補角なり.

ABCD ヲ圓ニ内接スル四邊形トスルトキハ




$$\hat{A}+\hat{C}=2\hat{R},\ \hat{B}+\hat{D}=2\hat{R}$$

ナルコトヲ證セムトス.

**證** $\hat{A}=\frac{1}{2}$(弧BCDニ立ツ中心角), [71 款]

同様ニ $\hat{C}=\frac{1}{2}$(弧BADニ立ツ中心角),

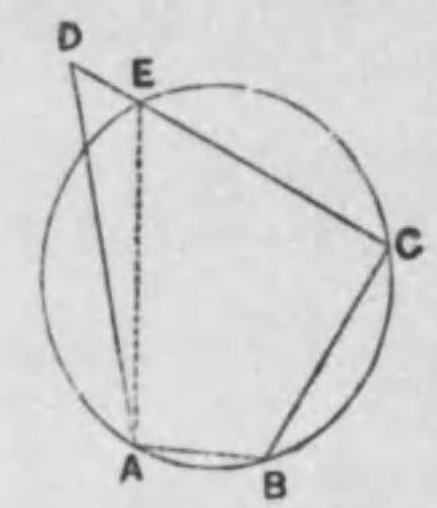
故ニ $\hat{A}+\hat{C}=\frac{1}{2}$(全圓周ニ立ツ中心角)

$=2\hat{R}$,

同様ニ $\hat{B}+\hat{D}=2\hat{R}$ ヲ證シ得可シ.

**92.** **系** 圓ニ内接スル四邊形ノ外角ハ其ノ内對角ニ等シ.

**93. 定理** 四邊形の相對する角が互に補角なるときは此の四邊形は圓に內接し得可し.




四邊形 ABCD ニ於テ

$\underline{\hat{A}+\hat{C}=2\hat{R}}$, 從ヒテ $\underline{\hat{B}+\hat{D}=2\hat{R}}$

ナルトキハ

<u>ABCDハ圓ニ內接シ得ルコト</u>

ヲ證セムトス.

**證** A,B,C ヲ過ル圓ガ若シ D ヲ過ラザルトキハ CD ヲ E ニ於テ截ルトセヨ.

AE ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ　$\hat{B}+\widehat{AEC}=2\hat{R}$,　[91 款]

然ルニ　$\hat{B}+\hat{D}=2\hat{R}$,　[假設]

$\therefore\ \widehat{AEC}=\hat{D}$

卽チ　△AED ノ外角 AEC ガ之ニ對スル內角 D ニ等シキニ至ル,

此ハ背理ナリ.　[40 款]

故ニ　A,B,C ヲ過ル圓ハ CD ニ交ラズ,

同樣ニシテ　A,B,C ヲ過ル圓ハ CD ノ延線ニモ交ラザルコトヲ證シ得可シ.



故ニ　A,B,C ヲ過ル圓ハ亦 D ヲ過ル.

---

**例題 51.** 28 題ヲ用ヒテ本定理ヲ證セヨ.

**52.** 正方形ハ圓ニ內接シ得可シ.

矩形ハ圓ニ內接シ得ルカ.

**53.** 圓周ヲ任意ノ數ノ相等シキ弧ニ分ツトキハ是等ノ弧ノ弦ノ成ス內接形ハ正多角形ナリ. 又總テノ分點ニ於ケル切線ノナス外切形モ亦正多角形ナリ.

**54.** 正多角形ノ角ヲ二等分スル直線ハ皆同一ノ點ニ於テ出會ヒ此ノ點ハ總テノ頂點ヨリ相等シキ距離ニアリ且總テノ邊ヨリ相等シキ距離ニアリ.

本題ニ於ケル如キ同一ノ點ヲ正多角形ノ**中心**, 其ノ外接圓ノ半徑ヲ正多角形ノ**半徑**, 內切圓ノ半徑ヲ正多角形ノ**邊心距**ト云フコトアリ.

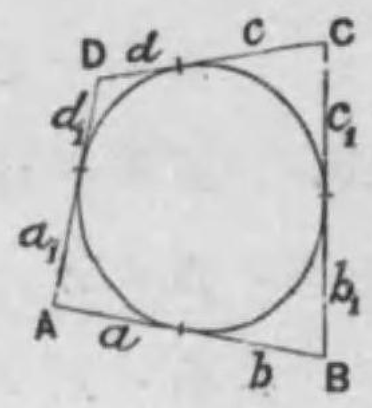
**55.** 正多角形ハ圓ニ內接シ得可シ.

**56.** 等角多角形ハ圓ニ內接シ得ルカ.

**57.** 等邊多角形ハ圓ニ內接シ得ルカ.

**58.** 圓ニ內接スル四邊形ノ任意ノ角ノ內二等分線ハ之ニ對スル角ノ外二等分線ト俱ニ圓周上ニ相交ルコトヲ證セヨ.

**94. 定理** 圓に外切する四邊形の相對する二邊の和は他の相對する二邊の和に等し.




圓ニ外切スル四邊形ABCD

ニ於テ

AB + CD = AD + BC

ナルコトヲ證セムトス.

**證** $a = a_1,\ b = b_1,$ [80 款]

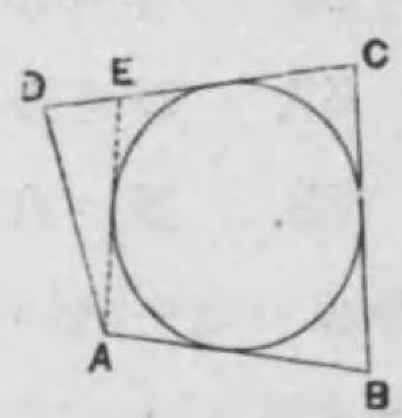
故ニ $AB = a + b = a_1 + b_1,$

同樣ニ $CD = c + d = c_1 + d_1.$

故ニ $AB + CD = a_1 + d_1 + b_1 + c_1$

$= AD + BC.$

**95. 定理** 四邊形の相對する二邊の和が他の相對する二邊の和に等しければ此の四邊形は圓に外切し得可し.




四邊形ABCDニ於テ

AB + CD = AD + BC

ナルトキハ

ABCDハ圓ニ外切シ得ルコト



ヲ證セムトス.

**證** 三邊AB, BC, CDニ切スル圓ガ若シADニ切セザルトキハ*Aヨリ切線AEヲ引キCDニEニ於テ交ラシメヨ.

然ルトキハ $AB + CE = BC + AE,$ [94 款]

然ルニ $AB + CD = BC + AD,$ [假設]

$\therefore\ CD - CE = AD - AE,$ [10 款 IV]

卽チ $DE = AD - AE,$

然ルニ 此ハ背理ナリ. [38 款]

故ニ AEハCDニ交ラズ.

亦同樣ニシテ AEハCDノ延線ニモ交ラザルコトヲ證シ得可シ.

故ニ ADハ三邊AB, BC, CDニ切スル圓ニ切ス.

---

**例題 59.** 正方形ハ圓ニ外切シ得可シ

**60.** 正多角形ハ圓ニ外切シ得可シ.

**61.** 等邊多角形ハ圓ニ外切シ得ルカ.

**62.** 等角多角形ハ圓ニ外切シ得ルカ.

**63.** 圓ニ內接スル六角形ノ隣接シタル二邊ガソレゾレ相對スル邊ニ平行スルトキハ他ノ二邊ハ平行ス.

**64.** 圓ニ內接スル四邊形ノ二組ノ對邊ヲ引キ延バシテ相交ラシメテ生ズル二角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ.

---



## 雜 題

**65.** 圓ニ內接スル四邊形ノ兩對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ其ノ交點ヨリ一邊ヘ引ケル垂線ハ相對スル邊ヲ二等分ス.*

**66.** 三角形ノ任意ノ一角ノ頂點ヨリ垂心マデノ距離ハ相對スル邊ヨリ外心マデノ距離ノ二倍ナリ.

**67.** 三角形ノ各角ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ハ其ノ趾ヲ結ビ付ケテ生ズル三角形ノ各角ノ二等分線ナリ.

三角形ノ各角ノ頂點ヨリ對邊ヘノ垂線ノ趾ヲ結ビ付ケテ生ズル三角形ヲ**垂趾三角形**ト云フ.

**68.** 三角形ノ外接圓周上ノ任意ノ點ヨリ三邊[必要ナレバ其ノ延線]ヘ下セル垂線ノ趾ハ同一直線上ニアリ.**

此ノ直線ヲ**垂趾直線**或ハ**しむそん線**ト云フ. 而シテ此ノ定理ノ逆モ亦眞ナリ.

---

* 之ヲぶらめぐぶた[*Brahmegupta*, 印度ノ數學家,西暦 598 年生]ノ定理ト云フ.

** 之ヲしむそん[*Simson*, 蘇格蘭ノ數學者,西暦 1687 年生, 1768 年死]ノ定理ト云フ.

**69.** △ABCノ垂心ヲOトスレバ△ABC, △AOB, △BOC, △COAノ外接圓ハ皆相等シ.

**70.** 三角形ノ垂趾三角形ノ外接圓ハモトノ三角形ノ各邊ノ中點ト各角ノ頂點ト垂心トノ間ノ中點ヲ通過スルコトヲ證セヨ.*

之ヲモトノ三角形ノ**九點圓**ト云フ.

九點圓ノ半徑ハ外接圓ノ半徑ノ半分ナリ.

**71.** 圓ニ内接スル任意ノ六角形ノ一ツオキノ三ツノ角ノ和ハ四直角ナリ.

[對角線一本ヲ引キテ證セヨ].

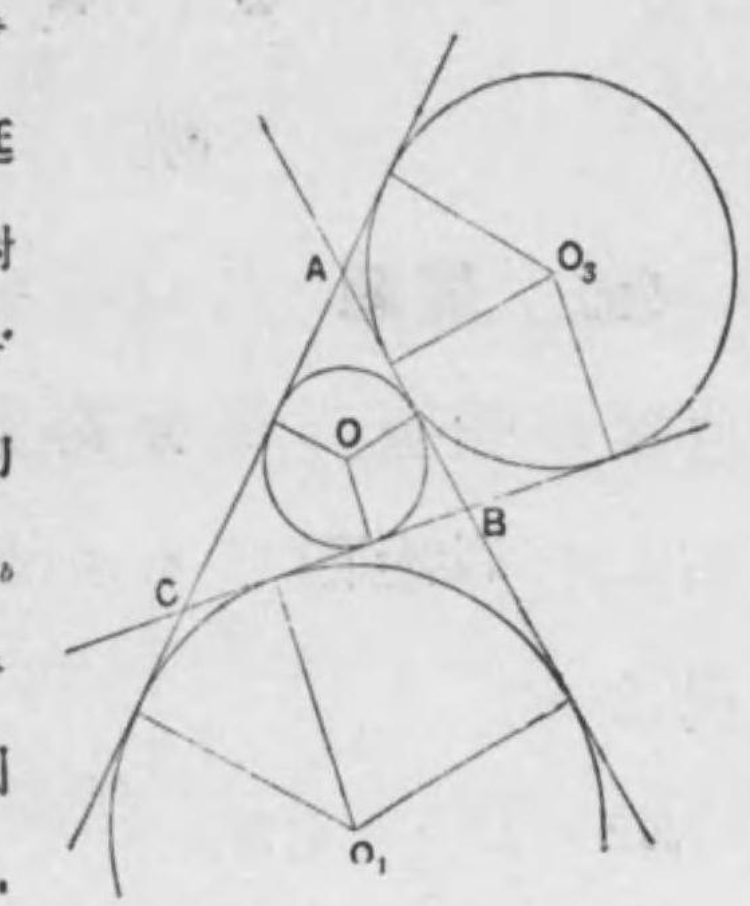
**72.** 圓ニ内接スル任意ノ八角形ノ一ツオキノ四ツノ角ノ和ハ六直角ナリ.

* 之ヲぽんすれ！[*Poncelet* 佛國ノ幾何學者,工學者ニシテ西暦1788年生, 1867年死]ノ定理ト云フ.



**73.** 圓ニ外切スル任意ノ六角形ノ一ツオキノ三邊ノ和ハ他ノ三邊ノ和ニ等シ.

**74.** △ABCニ於テ$A_a$ハAヨリ邊$b, c$ノ延線ニ於テAヨリ之ニ對スル傍切圓ノ切點マデノ距離, $A_i$ハ同ジク内切圓ノ切點マデノ距離, $A_b$ハAヨリ邊$b$ノ延線ニ切スル近キ方ノ傍切圓ノ切點マデノ距離トス.




其ノ他同樣ノ記法ヲ用フルトキハ次ノ結果アリ.

$$A_a=B_b=C_c=s,\quad 但\ s=\tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

$$A_i=B_c=C_b=s-a,$$

$$B_i=C_a=A_c=s-b,$$

$$C_i=A_b=B_a=s-c.$$

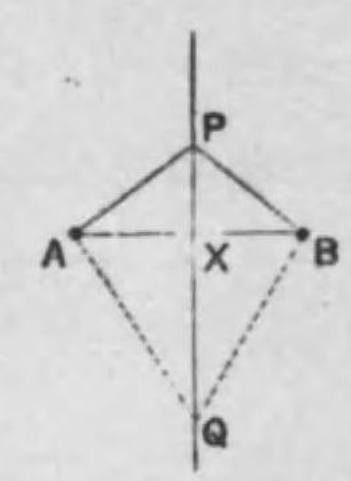
# 第五節

## 軌跡

**96. 補題** 二つの定點を結び付くる直線の垂直二等分線上の各點は此の二點より等距離にあり,而して此の逆も亦眞なり.

A,B ヲ二ツノ定點トス.

I. ABノ垂直二等分線PX上ノ各點ハA,Bヨリ等距離ニアルコトヲ證セムトス.




**證** Qヲ此ノ直線上ノ任意ノ點トシ, AQ, BQヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ　$\triangle AXQ$, $\triangle BXQ$ ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l} AX = BX \\ XQ\text{ハ共通} \\ A\widehat{X}Q = B\widehat{X}Q \end{array}\right\}\qquad \text{[何故カ]}$$

$$\therefore\ AQ = BQ. \qquad \text{[45款]}$$



II. PヲA及ビBヨリ等距離,即チ$AP=BP$トス, 然ルトキハ

PハABノ垂直二等分線上ニアルコト

ヲ證セムトス.

**證** ABヲXニ於テ二等分シ,PXヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ　$\triangle AXP$, $\triangle BXP$ ニ於テ

$$\left.\begin{array}{ll} AP = BP & \text{[假設]} \\ AX = BX & \text{[作圖]} \\ PX\text{ハ共通} & \end{array}\right\}$$

$$\therefore\ P\widehat{X}A = P\widehat{X}B, \qquad \text{[53款]}$$

然ルニ　$P\widehat{X}A + P\widehat{X}B = 2\hat{R}$, 　[17款]

$$\therefore\ P\widehat{X}A = P\widehat{X}B = \hat{R},$$

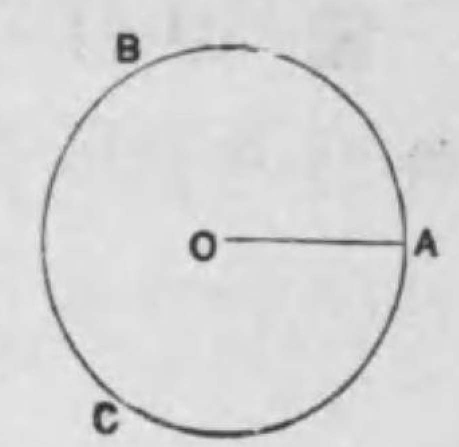
$$\therefore\ PX \perp AB.$$

**注意** 是ニ依リテABノ垂直二等分線上ノ各點ハA及ビBヨリ等距離ニ在ルコト,

及ビ　A,Bヨリ等距離ニ在ル點ハ悉ク其ノ垂直二等分線上ニ在リテ其ノ他ニハ一モ無キコト,

ヲ知ルベシ.

**97. 補題** 一定點を中心とし一定の距離を半徑とする圓周上の各點は該定點より該定距離に在り,而して此の定理の裏も亦眞なり.




一定點 O ヲ中心トシ,

一定ノ距離 OA ヲ半徑トシテ圓 ABC ヲ畫ク.

I. 圓周 ABC 上ノ各點ハ O 點ヨリ一定ノ距離ニアリ. [62 款]

II. 圓周 ABC 上ニアラザル點ハ O 點ヨリ一定ノ距離ニアラズ. [2 題]

**注意** 是ニ依リテ一定點ヲ中心トシテ一定ノ距離ヲ半徑トスル圓周上ノ各點ハ該定點ヨリ該定距離ニ在ルコト,

及ビ 該定點ヨリ該定距離ニ在ル點ハ悉ク該圓周ノ上ニ在リテ其ノ他ニハ一モコレ無キコト,

ヲ知ルベシ.

**98.** 96,97 款ニ依リテ或線上ノ各點ハ或要件ニ適シ其ノ他ニハ該要件ニ適スル點一モ無キ如キ場合アルコトヲ知ルベシ. 依リテ次ノ定義アリ.



或線上の總ての點は或一定の要件に適し其の他には該要件に適する點なければ該線を該要件に適する點の**軌跡**と云ふ.*

依リテ補題 1 ハ次ノ如ク述ブルコトヲ得ベシ.

二定點より等距離にある點の軌跡は該二定點を結び付くる直線の垂直二等分線なり.

又補題 2 ハ次ノ如ク述ブルコトヲ得.

一定點より一定の距離にある點の軌跡は該點を中心とし該定距離を半徑とする圓周なり.

**注意** 或要件ニ適スル點ノ軌跡ハ直線,曲線,或ハ其ノ一部分,又ハ其ノ群ナルコトアリ.

**99.** 或點ノ軌跡ヲ決定スルニハ次ノ二ツノ命題ヲ證明スルヲ要ス. 卽チ

---

* 鉛筆ノ尖頭(サキ)ニテ直線,又ハ曲線ヲ或要件ニ從ヒテ畫クトキハ鉛筆ノ尖頭ハ動點ニシテ畫キタル直線,又ハ曲線ハ軌跡ノ觀念ヲ與フ. 代數學ニテハ此ノ要件ヲ軌跡ノ方程式ニテ表ハス.

I. 線 X の上にある點は要件 A に適す.

II. 要件 A に適する點は線 X の上にあり.

I, II ノ代リニソレゾレ次ノ二ツヲ證明スルモ可ナリ.

III. 要件 A ニ適セザル點ハ線 X ノ上ニアラズ.

IV. 線 X ノ上ニアラザル點ハ要件 A ニ適セズ.

又 II ト III, 或ハ I ト IV トヲ證明スルモ可ナリ.

---

**例題 75.** 一定直線ヨリ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

**76.** 一定點ヨリ一定直線マデ引ケル直線ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

**77.** 圓ノ定長ノ弦ノ中點ノ軌跡ハ一ノ同心圓ナリ.

**78.** 三角形ノ一邊ガ一定ニシテ之ニ對スル角ノ大サガ一定ナルトキ其ノ角ノ頂點ノ軌跡如何.



**79.** 相交ル二直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡如何.

若シ二直線ガ平行スルトキハ如何.

**80.** 三角形ノ一邊ガ一定ニシテ之ニ對スル角ノ大サガ一定ナルトキ

(1) 其ノ內心ノ軌跡如何.

(2) 其ノ傍心ノ軌跡如何.

(3) 底ノ一端ヨリ頂角ノ外二等分線ニ引キタル垂線ノ趾ノ軌跡如何.

---

## 第六節

## 作圖題

**100.** **定義** 幾何學に於て既知件を以て圖形の作圖をなす命題を**作圖題**と云ひ,得る所の圖形を其の**解**と云ふ.

實用的作圖ニ於テハちやうぎ[矩]及ビこむぱす[規]ヲ用フ. ちやうぎハ直線ヲ引キ,こむぱすハ圓ヲ畫ク所以ノ具タリ.

理論的作圖ニ於テハ次ノ三條ヲ作シ得ルモノトシテ許容セラレタリ之ヲ**作圖ノ公法**ト云フ.

**101.** 作圖の公法.

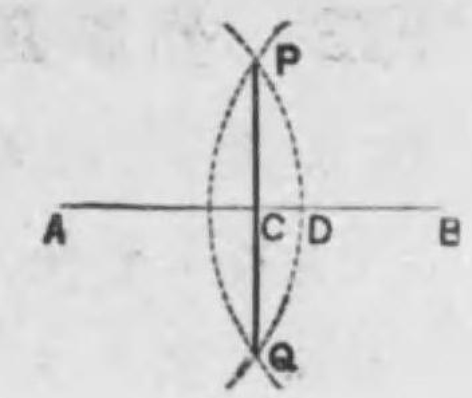
I. 任意ノ一點ヨリ他ノ任意ノ一點へ直線ヲ引クコト.

II. 有限直線ヲ任意ノ長サニ引キ延バスコト.

III. 任意ノ點ヲ中心トシ任意ノ長サノ直線ヲ半徑トシテ圓ヲ畫クコト.

**102.** **作圖題** 既知の分線の垂直二等分線を作ること.






AB ヲ既知ノ分線トス.

**作圖法** A及ビBヲ中心トシ,ABノ半分ヨリ少シク大ナルADヲ半徑トシテ二ツノ圓ヲ畫キ其ノ交點ヲP,Qトス.

然ルトキハ PQ ハ所要ノ垂直二等分線ナリ.

**證** PAB,QAB ハ何レモ二等邊三角形ナルユヱ PQ ハ AB ノ垂直二等分線ナリ. [I. 50 題]

**注意** 1. 本文ノ作圖法ハABノ中點Cヲ與フ.

2. C ヲ既知點トシ CA=CB ヲ取リ本文ノ作圖ヲナストキハ PQ ハ既知直線上ノ既知點ニ於テ之ニ垂線トナル.

---

**例題** 81. 102 款ノ作圖ニ於テ AD ヲ AB ノ半分ヨリ少シク大キク取リタル理由如何.

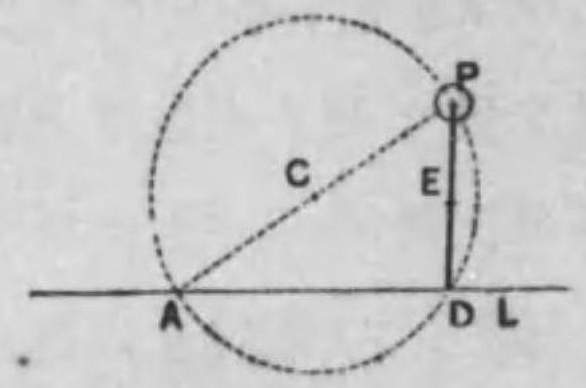
**82.** 既知ノ分線ヲ $2^n$ 等分セヨ. 但 $n$ ハ任意ノ整數ナリ.

**83.** 既知ノ三點ヲ過ル圓ヲ畫ケ.

**103. 作圖題** 既知一直線外の既知一點より之に垂線を引くこと.*

Lヲ既知ノ直線,

Pヲ既知ノ點トス.




**作圖法** Pヲ過リテ任意ノ直線ヲ引キ直線Lニ點Aニ於テ出會ハシメAPヲCニ於テ二等分シ[102款注意1], Cヲ中心トシ, CPヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケ.

若シPAガLニ垂線ナラザルトキハ圓ハ二點A, Dニ於テLニ交ル可シ.

然ルトキハPDハ所要ノ垂線ナリ.

**證** $P\widehat{D}A$ハ半圓ニ於ケル角ナリ,

$$\therefore\ P\widehat{D}A = \hat{R} \qquad \text{[74款]}$$

**注意** DハLノ上ノ既知ノ點トス.

任意ノ中心Cト半徑CDトヲ以テ圓ヲ畫キLヲ再ビ點Aニ於テ截ラシメ徑ACPヲ引キDPヲ結ビ付クレバDPハLニ垂線ナリ. 故ニ

此ノ作圖法ハ「既知直線Lノ上ノ既知一點Dヨリ

* 始メテ本題ヲ解キシハえのぴです[Œnopides, 希臘ノ幾何學者, 約西暦紀元前465年頃ノ人]ナリ.



之ニ垂線ヲ作ルコト」ヲ示ス.

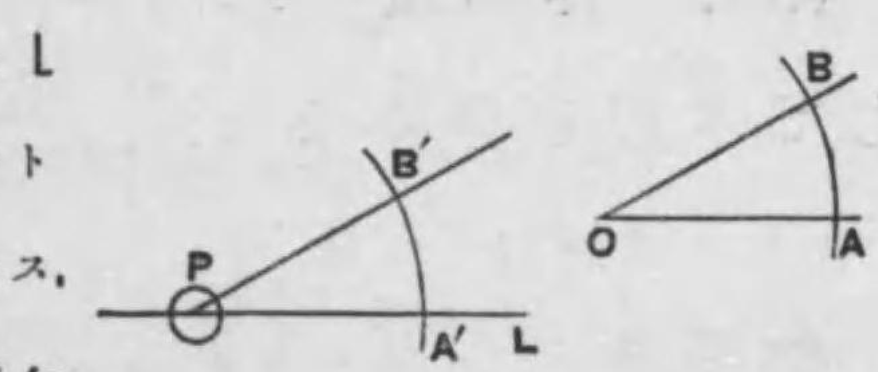
---

**例題 84.** 103款ノ圖ニ於テCヲ既知點トシLヲ既知直線トス而シテPDヲEニ於テ二等分スレバCEハCヲ過リテLニ平行スル直線ヲ與フ可シ之ヲ證セヨ.

---

**104. 作圖題** 既知直線上の既知一點を過りて之と既知角をなす直線を引くこと.

Pヲ既知直線Lニ於ケル既知點トシ, $\hat{O}$ヲ既知角トス.




**作圖法** 既知角ノ頂點Oヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ二邊ヲA, Bニテ截ラシム.

之ト同ジ半徑ヲ以テPヲ中心トシテ圓ヲ畫キLトA'ニテ交ラシム.

次ニA'ヲ中心トシ距離ABヲ半徑トスル圓ヲ畫キ前ノ圓トB'ニテ交ラシメ,

PB'ヲ結ビ付クレバPB'ハ所要ノ直線ナリ.

**證** $\triangle OAB \equiv \triangle PA'B'$ [53 款]

ナルコトヨリ明カナリ.

**注意** 本文ノ作圖ニ於テ PA′ ヲ P ヨリ左ニ取レバ亦一ノ解ヲ得. 故ニ本題ニハ二ツノ解アリ.

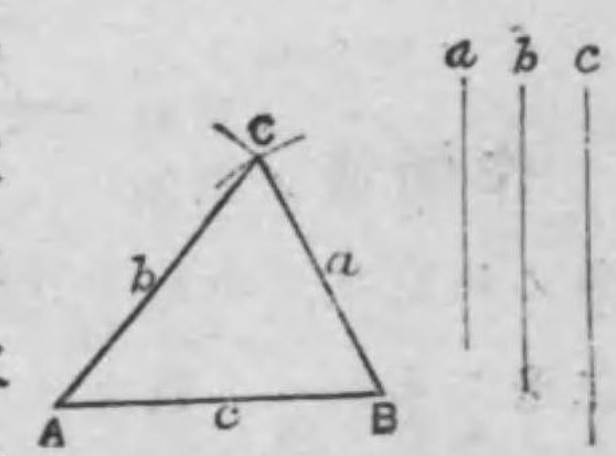
---

**例題 85.** 既知一點ヲ過リ既知一直線ニ平行スル直線ヲ引クコトヲ求ム.

---

## 105. 作圖題 三角形の三邊を既知して本形を作ること.

$a, b, c$ ヲ既知ノ三邊トス.




**作圖法** $c$ ニ等シキ直線 AB ヲ置キ, A ヲ中心トシ $b$ ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ,又 B ヲ中心トシ $a$ ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ前ノ弧ト點 C ニ於テ交ラシムレバ ABC ハ所要ノ三角形ナリ.

**證** $\triangle ABC$ ノ三邊ハソレゾレ $a, b, c$ ニ等シキコト明カナリ.



**注意 1.** 本文ノ作圖ニ於ケル弧ハ復 AB ヲ隔テテ C ト反對ノ傍ニ點 C′ ニ於テ交ル可シ.

故ニ $\triangle ABC'$ ハ亦一ノ解ナリ. 然レドモ $\triangle ABC'$ ハ全ク $\triangle ABC$ ト同ジ.

**注意 2.** $c=a+b$, 又ハ $c=a\sim b$ ナル場合ニハ二圓ハ外切,又ハ内切シ,又 $c>a+b$, 又ハ $c<a\sim b$ ナル場合ニハ二圓ハ相交ラズ,何レモ三角形ハ不能ナリ. 故ニ本題ヲシテ能成ナラシメムニハ $c<a+b$ 及ビ $c>a\sim b$ ナルヲ要ス. 而シテ此ノ場合ニハ全ク相等シキ二解アリ.

斯ク作圖題ノ解ノ數及ビ能不能ノ限界等ヲ論ズルコトヲ作圖題ノ **吟味** ト云フ.

---

**例題 86.** 既知角ヲ二等分スル法如何.

[I. 58 題ヲ參考セヨ]

從ヒテ又 既知角ヲ $2^n$ 等分セヨ. 但 $n$ ハ任意ノ整數ナリ.

---

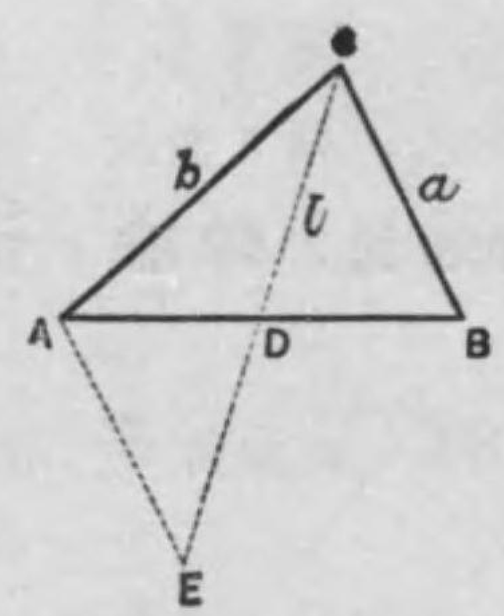
**106.** 以上述ベタル方法ハ先ヅ作圖法ヲ與ヘ次ニ之ヲ證明セリ,斯クスルコトヲ **組立法** ト云フ. 然レドモ稍困難ナル問題ニハ概シテ **解析法** ヲ用フルヲ可ナリトス.

解析法トハ先ヅ所要ノ圖形ヲ作リ得タリトシ之ヨリ逆ニ推理シテ既知件ト未知件トノ關係ヲ求メテ容易ク作圖シ得ルモノ,又ハ既ニ爲シタル作圖ニ歸セシムルヲ云フ．次ニ之ヲ例セム．

**107. 作圖題** 三角形の二邊と第三邊へ引ける中線とを既知して本形を作ること．

$a, b$ ヲ既知ノ二邊, $l$ ヲ未知ノ第三邊ヘ引ケル中線トス．

**解析法** 所要ノ三角形ABCヲ作リ得タリトシ, CDヲ既知ノ中線トス．





CDヲEニ引キ延バシDE＝CDナラシメ,AEヲ結ビ付ケヨ．

然ルトキハ　△ADE, △BDCニ於テ

$$AD = BD \quad \text{[假設]}$$
$$DE = CD \quad \text{[作圖]}$$
$$A\widehat{D}E = B\widehat{D}C \quad \text{[21 款]}$$
$$\therefore AE = BC, \quad \text{[45 款]}$$



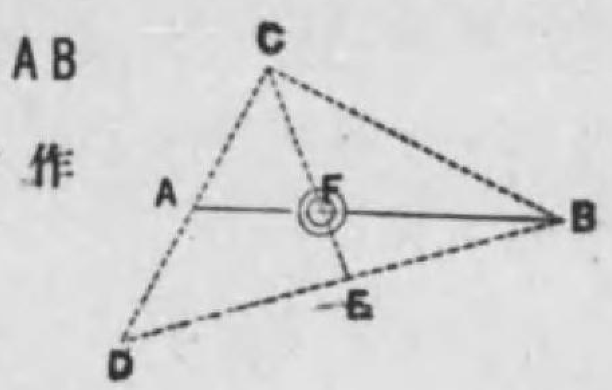
依リテ　△ACEハ既知ノ三邊 $2l, a, b$ ヲ有ス．

故ニ　本題ハ△ACEヲ作ルコトニ歸ス．

而シテ　此ハ105款ニ既ニ之ヲ爲セリ．

---

**例題 87.** 既知ノ分線ABノ三等分點Fヲ求ムル次ノ作圖法ヲ證明セヨ．




任意ノ直線CADヲ引キ

AC＝ADナラシメBC,BDヲ結ビ付ケBDヲEニ於テ二等分シCEヲ結ビABニFニ於テ交ラシム．

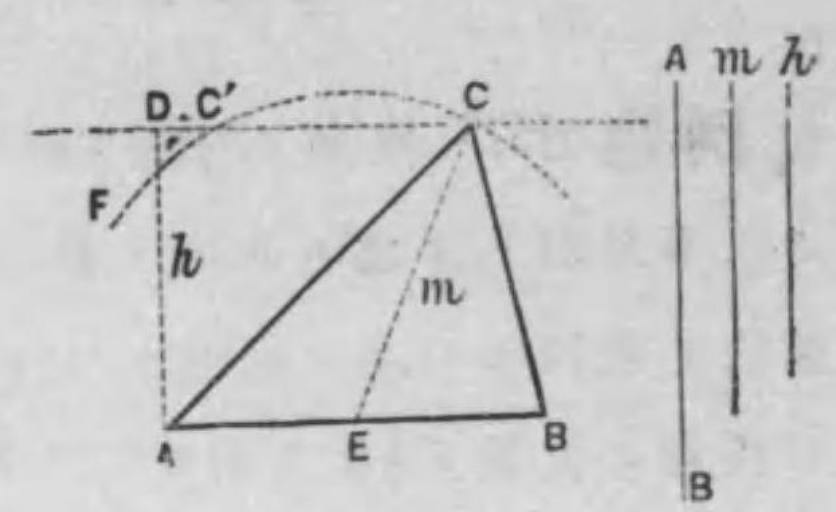
**88.** 三角形ノ三中線ヲ既知シテ本形ヲ作レ．

**89.** 圓ニ内接スル正六角形ヲ作レ．

**90.** 一周角ヲ三等分セヨ．

**108. 作圖題** 三角形の高さ,底及び此の底に引ける中線を與へて本形を作ること.

AB ヲ與ヘラレタル底邊, $h$, $m$ ヲソレゾレ高サ及ビ中線トス.




I. AB ニ長サ $h$ ナル垂線 AD ヲ作リ D ヲ過リ AB ニ平行スル直線 CC′ ヲ引クトキハ

所要ノ三角形ノ頂點ハ CC′ ノ上ニアリ.

II. AB ノ中點 E ヲ中心トシ, $m$ ヲ半徑トシテ圓 CC′F ヲ畫ケバ

所要ノ三角形ノ頂點ハ圓周 CC′F ノ上ニアリ.

故ニ　所要ノ三角形ノ頂點ハ此ノ二ツノ軌跡,
即チ　直線 CC′ 及ビ圓周 CC′F ノ共通ノ點 C 及ビ C′ ナリ.

**吟味** 若シ $h<m$ ナルトキハ直線 CC′ ハ圓周 CC′F ニ交リ問題ノ要件ニ適スル三角形ハ二ツアリ.

若シ $h=m$ ナルトキハ直線 CC′ ハ圓周 CC′F ノ切線トナリ要件ニ適スル唯一ツノ三角形アリ.



又 $h>m$ ナルトキハ直線 CC′ ハ圓周 CC′F ニ交ラズ,而シテ三角形ハ不能ナリ.

**注意** 此ノ作圖題ノ如ク作圖ヲ成功スルニハ一點[即チ C]ヲ求ムルニアリテ此ノ一點ハ二ツノ軌跡ノ各ニ屬スルコトヲ述ベ其ノ交點ヲ取ル方法ヲ**軌跡ノ交リノ法**ト云フ.

---

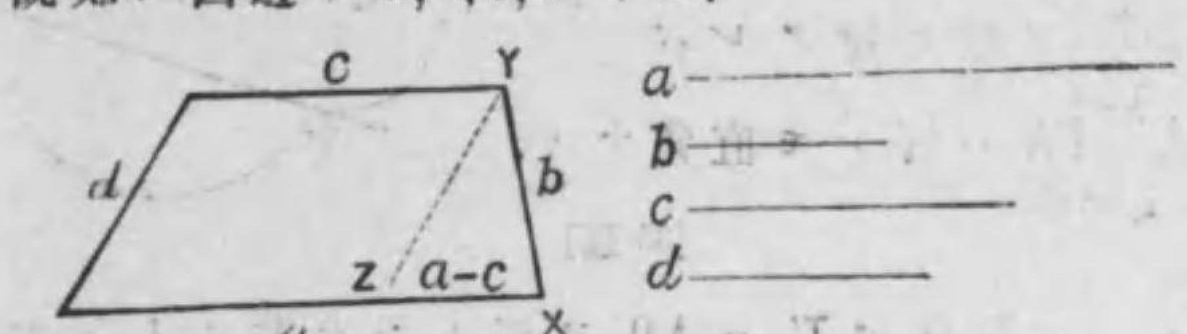
**例題 91.** 既知ノ圓,又ハ弧ノ中心ヲ求メヨ.

**92.** 三角形ノ底,高サ及ビ頂角ノ大サヲ知リテ本形ヲ作レ.

---

**109. 作圖題** 梯形の四邊を既知して本形を作ること.

既知ノ四邊ヲ $a, b, c, d$ トス.




**解析法** 梯形ヲ畫キ得タリトシ,邊 $d$ ガソレ自身ニ平行シ邊 $a, c$ ノ間ヲ移動シテ YZ ノ位置ニ來ルトセヨ. 然ルトキハ三角形 XYZ ハ既知ノ三邊 $b, d, a-c$ ヲ有スルヲ以テ作圖シ得可シ[105款].

故ニ容易ニ本形ヲ作リ得可シ.

**注意** 斯ノ如ク作圖題ヲ解クコトヲ**平行移動ノ法**ト云フ.

---

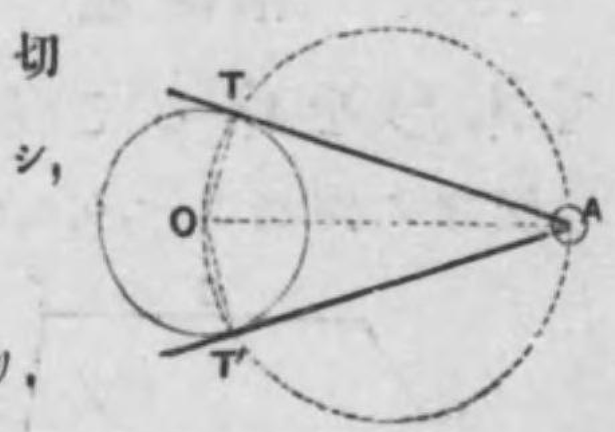
**例題 93.** 既知ノ直線ニ平行シ且既知ノ長サヲ有スル直線ヲ既知二圓周ノ間ニ置ケ.

---

## 110. 作圖題 既知圓外の既知一點より之に切線を引くこと.

O ヲ既知ノ圓トシ,A ヲ其ノ外ノ既知ノ一點トス.

**解析法** A ヨリ二ツノ切線 AT,AT′ ヲ引キ得タリトシ, OT,OT′ ヲ結ビ付クレバ $O\hat{T}A$, $O\hat{T'}A$ ハ何レモ直角ナリ.




[35 題]

故ニ　T 及ビ T′ ハ AO ヲ徑トシテ其ノ上ニ畫キタル圓周上ニアリ.　[何故カ]

故ニ　此ノ周圓ト既知圓周トノ交點ハ所要ノ切線ノ切點ナリ.

---



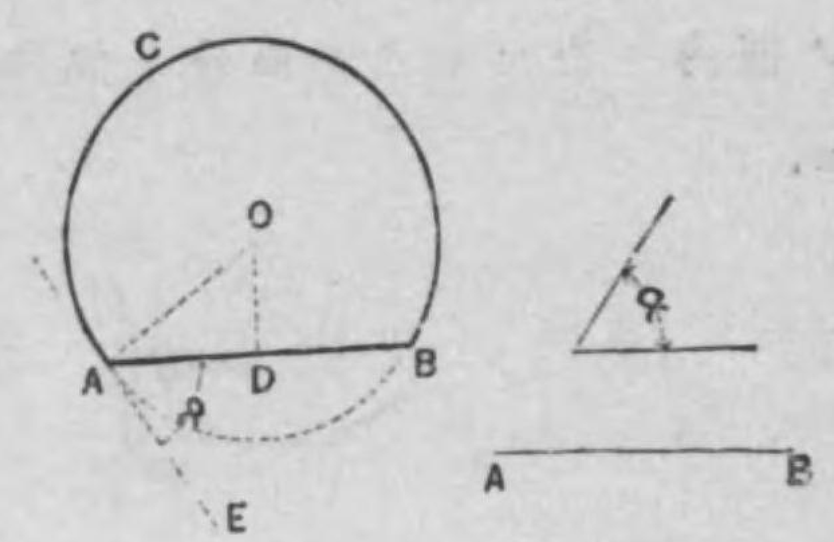
**例題 94.** A 點ガ既知圓 O ノ周上ニアルトキハ如何.

**95.** 既知二圓ニ共通ノ切線ヲ引ケ.

**96.** 既知一點ヲ過リテ既知圓ニ割線ヲ引キ其ノ圓內ニ夾マレタル部分ヲ既知ノ長サニ等シクセヨ.

**111. 作圖題** 既知直線上に弓形を書き此の弓形に於ける角を既知角に等しからしむること.

AB ヲ既知ノ直線トシ, $\alpha$ ヲ既知ノ角トス.




**解析法** ACB ハ所要ノ弓形ナリトシ, O ヲ其ノ弓形ノ弧ノ中心, AE ヲ A ニ於ケル切線トスレバ

$\widehat{EAB} = \hat{\alpha}$, [79 款]

而シテ中心 O ハ AE ノ垂線 AO ノ上ニアリ, [35 題]

又　O ハ AB ノ垂直二等分線 DO ノ上ニアリ. [96 款]

故ニ　中心 O ハ此ノ二直線ノ交點ナリ.

是ニ依リテ　AB ト角 $\alpha$ ヲナス直線 AE ヲ引キ A ニ於テ AE ニ垂線 AO ヲ作リ, 又 AB ノ垂直二等分線 DO ヲ作レバ, 其ノ交點 O ハ所要ノ弓形ノ弧ノ中心ナリ.



**例題 97.** 既知圓ヨリ一ノ弓形ヲ截リ取リ其ノ弓形ニ於ケル角ヲ既知角ニ等シカラシメヨ.

**98.** 既知ノ三角形ト等角ナル三角形ヲ既知ノ圓ニ內接セヨ. 又外切セヨ.

## 雜題

99. 三角形ノ底,他ノ二邊ノ和若シクハ差ト一底角トヲ知リテ本形ヲ作レ.

100. 三角形ノ周ト二ツノ角トヲ知リテ本形ヲ作レ.

101. 既知ノ一點ヲ過リテ既知ノ二平行直線ニ一ノ橫截線ヲ引キ其ノ二平行直線間ニ夾マレタル分線ヲ既知ノ長サニ等シカラシメヨ.

此ノ作圖題ヲ吟味セヨ.

102. 兄弟二家ニ住ス,其ノ間ニ一河アリテ其ノ兩堤防ハ互ニ平行セリ. 今此ノ河ニ橋ヲ架スルニ橋ノ長サヲ最モ短クシ且二家ノ距離ヲモ最モ近クセムトス. 如何ニセバ可ナルカ.

103. 圓ノ平行セル諸弦ノ中點ノ軌跡ハ如何.

104. 既知ノ二直線ニ切スル既知ノ半徑ノ圓ヲ畫ケ.

105. 既知ノ二圓ノ中心線上ノ如何ナル點ヨリ此ノ二圓ガ相等シキ角ニ見ユルカ.

106. 既知ノ圓ヲ二ツノ弓形ニ分チ其ノ一ニ於ケル角ヲ他ノ一ニ於ケル角ノ二倍ナラシメヨ.



107. 圓ニ內接セル三角形ノ各角ガ 30°, 50° 及ビ 100° ナルトキ此ノ三ツノ角ノ二等分線ガ圓周ニ交ル點ヲ A,B,C トセバ三角形 ABC ノ各角ノ大サ如何.

108. 既知ノ半徑ヲ以テ既知ノ一直線ト既知ノ圓トニ切スル圓ヲ畫ケ.

109. 既知ノ線[必ズシモ直線ナルヲ要セズ]上ニ既知ノ二點ヨリ等距離ナル點ヲ求メヨ.

110. 梯形ノ兩對角線,及ビ其ノ夾角,並ニ兩隣邊ノ和ヲ與ヘテ本形ヲ作レ.

111. 次ノ既知件ヲ以テ三角形ヲ作レ.

(1) 一邊 $a$ ノ大サ及ビ位置,並ニ內心ノ位置.

(2) 一邊 $a$ ノ大サ及ビ位置,並ニ垂心ノ位置.

(3) 一邊 $a$ ノ大サ及ビ位置,並ニ重心ノ位置.

# 第三編　面積

## 第一節

### 面積の比較

**112. 定義**　平面形の**面積**とは其の形内に含まれたる平面の廣さを云ふ.

全等形ハ勿論面積相等シ即チ等積ナリ.

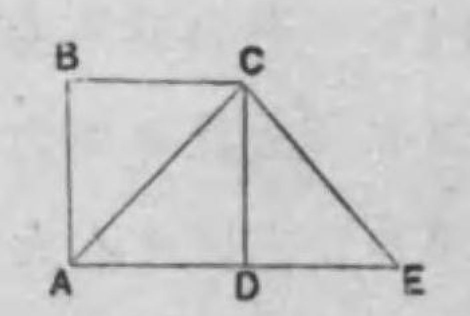
然レドモ　等積ナルモノ必ズシモ全等ナラズ.

例ヘバ　ABCDヲ正方形トス.

然ルトキハ　$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$,

サテADヲEニ引キ延バシ

$DE=AD$ナリトセヨ.




然ルトキハ　$\triangle CDE \equiv \triangle ADC \equiv \triangle ABC$,

$\therefore\ \square ABCD = \triangle ACE$.

即チ等積ナルモ全等ナラザル兩形ヲ得タリ.

**113. 定義**　三角形,平行四邊形は其の任意の一邊を底と見ることを得. 然るときは底より之に對する頂點,若しくは



邊までの距離は其の**高さ**なり.

底ト高サトハ比對的名稱ナリ.

例ヘバ　三角形ハ三ツノ異ナリタル底ト之ニ對應スル三ツノ高サトヲモチ得可シ.

矩形ノ兩隣邊ハ互ニ垂直ナルユヱ其ノ一邊ヲ底ト見,之ニ隣ル邊ヲ高サト見ルコトヲ得.

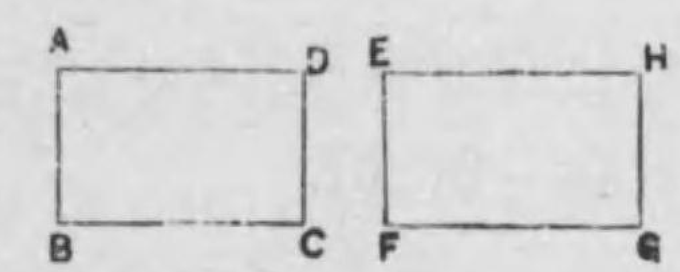
既知ノ二分線ヲ底及ビ高サトスル矩形ハ是等ノ二分線ノ包ム矩形ト稱ス. 而シテ二直線AB,CDノ包ム矩形ハAB.CDト記ス.

**114. 定理**　二つの矩形に於て底及び高さがそれぞれ相等しきときは等積なり.

$\square AC$, $\square EG$ニ於テ

$BC=FG$,　$AB=EF$

ナルトキハ




$\square AC = \square EG$ナルコトヲ證セムトス.

**證**　二ツノ矩形ヲ重ネ合シテ等積ナルコトヲ證明シ得可シ.

**115. 系**　等底等積ノ矩形ハ高サ相等シ.

[高サ AB ガ高サ EF ニ等シカラズトセバ背理ノ結果ヲ得ルコトニ依リテ證明ス可シ].

**116. 系** 等高等積ノ矩形ハ底相等シ.

---

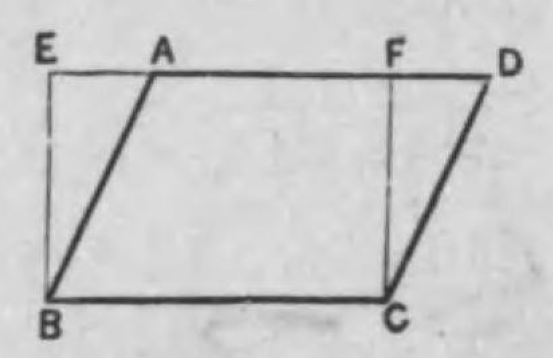
**例題 1.** 等底ノ二ツノ矩形アリ其ノ一ノ高サガ他ノ一ノ高サノ二倍ナルトキハ第一ノ矩形ノ面積ハ第二ノ矩形ノ面積ノ二倍ナリ.

**2.** 一ノ正方形ノ面積ハ其ノ半分ノ邊ヲモツ正方形ノ面積ノ四倍ナリ.

---

**117. 定理** 平行四邊形は其の底と高さとの包む矩形と等積なり.

AC ハ BC ヲ底トシ CF ヲ高サトスル平行四邊形ナルトキハ




▱AC = BC.CF

ナルコトヲ證セムトス.

**證** BC ニ垂線 BE ヲ引キ矩形 CFEB ヲ完成セヨ. 然ルトキハ △DFC ≡ △AEB, [何故カ]

∴ ▱AC = ▭EC, [10 款 III]

卽チ ▱AC = BC.CF.



**118. 系** 等底等高ヲモツ平行四邊形ハ等積ナリ.

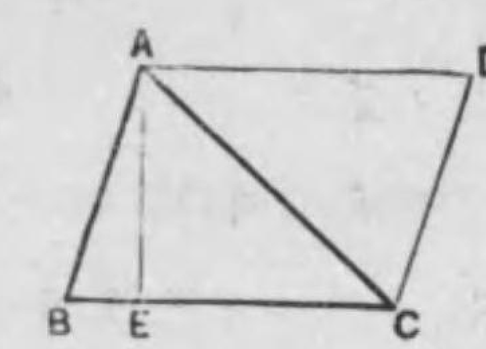
---

**例題 3.** 等底等積ノ平行四邊形ハ高サ相等シク,又等高等積ノ平行四邊形ハ底相等シ.

---

**119. 定理** 三角形は其の底と高さとの包む矩形の半分と等積なり.

ABC ハ BC ヲ底トシ AE ヲ高サトスル三角形トスレバ




$\triangle ABC = \frac{1}{2}AE.BC$

ナルコトヲ證セムトス.

**證** AB, BC ヲ兩隣邊トスル平行四邊形 ABCD ヲ完成スレバ

△ABC ハ ▱ABCD ノ半分ニシテ, [何故カ]

▱ABCD = AE.BC, [117 款]

∴ $\triangle ABC = \frac{1}{2}AE.BC$.

**120. 系** 三角形ハ等底等高ヲモツ平行四邊形ノ半分ト等積ナリ.

---

**例題 4.** 等底等高ヲモツ三角形ハ等積ナリ.

5. 等高等積ノ三角形ハ底相等シク,

又 等底等積ノ三角形ハ高サ相等シ.

6. 三角形ノ一中線ニテ本形ヲ分テル二部ノ面積ヲ比較セヨ.

7. 同ジ底ノ同傍ニアル二ツノ等積ノ三角形ノ頂點ヲ結ビ付クル直線ハ底ニ平行ス.

又底ニ平行ナル任意ノ直線ヲ引キ二ツノ三角形ノ邊ニ交ラシムレバ各ノ二邊ガ此ノ直線ヨリ截リ取ル部分ハ相等シ.

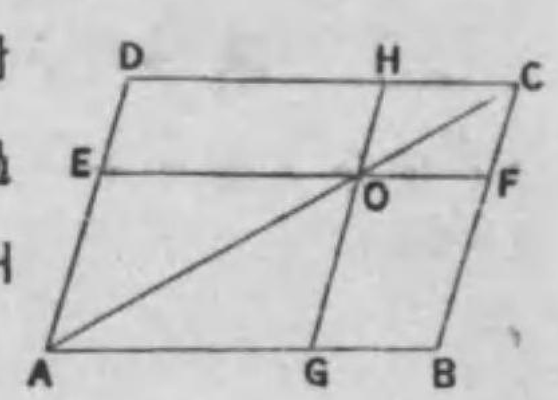
8. 二ツノ三角形ガ同ジ底ノ異傍ニアルトキ,

(1) 三角形ガ等積ナレバ底ハ其ノ頂點ヲ結ビ付クル直線ヲ二等分ス.

(2) 底ガ頂點ヲ結ビ付クル直線ヲ二等分スルトキハ三角形ハ等積ナリ.

9. 二ツノ矩形ノ高サガ相等シキトキハ其ノ和ハ底ノ和ト共通ノ高サトノ包ム矩形ニ等シ.

10. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 上ノ任意ノ一點 O ヲ過リテ邊ニ平行スル直線 EF, GH ヲ引クトキハ ▱DO＝▱OB.





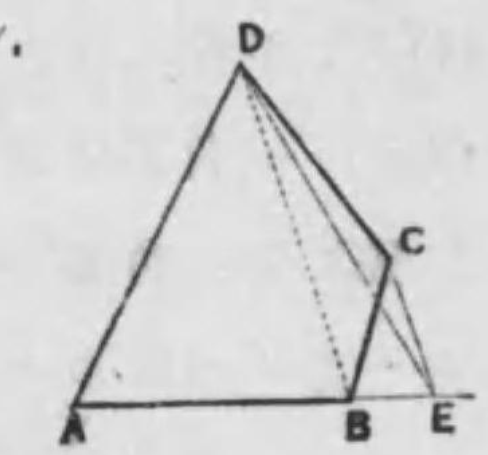

又此ノ問題ヲ應用シテ既知ノ邊上ニ既知ノ矩形ニ等シキ矩形ヲ作レ.

**注意** 平行四邊形 EG, HF ヲ平行四邊形 ABCD ノ**對角線ニ沿ウ平行四邊形**ト云ヒ,平行四邊形 DO, BO ハ之ヲ平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC ニ沿ウ平行四邊形ノ**餘形**ナリト云フ.

11. 梯形ノ面積ハ其ノ二ツノ底[平行二邊]ノ和ト高サトノ包ム矩形ノ半分ニ等シ.

12. 既知ノ四邊形 ABCD ト等積ナル三角形ヲ作レ.

13. 既知ノ多角形ト等積ナル三角形ヲ作レ.




14. 三角形ノ一邊上ノ既知一點ヲ過ル一直線ヲ引キ本形ヲ二等分セヨ.

又該點ヲ過ル二直線ヲ引キテ本形ヲ三等分スル法如何.

15. 三角形ノ各邊ノ中點ヲ二ツヅツ結ビ付クルトキハ本形ヲ四等分ス.

16. 平行四邊形ノ兩對角線ノ交點ヲ過ル任意ノ直線ハ本形ヲ二等分ス.

17. 梯形ノ平行セザル二邊ノ一ヲ底トシ對邊

ノ中點ヲ頂點トスル三角形ハ梯形ノ半分ニ等シ.

**18.** ABCD ハ平行四邊形ニシテ O ハ形內ノ一點ナルトキハ

(1) $\triangle AOB + \triangle COD = \frac{1}{2} \square ABCD.$

(2) $\triangle AOC = \triangle AOD \sim \triangle AOB.$

若シ O ガ平行四邊形ノ外ニアルトキハ如何.

**19.** 次ノ要件ニ從ヒテ梯形ヲ二等分セヨ.

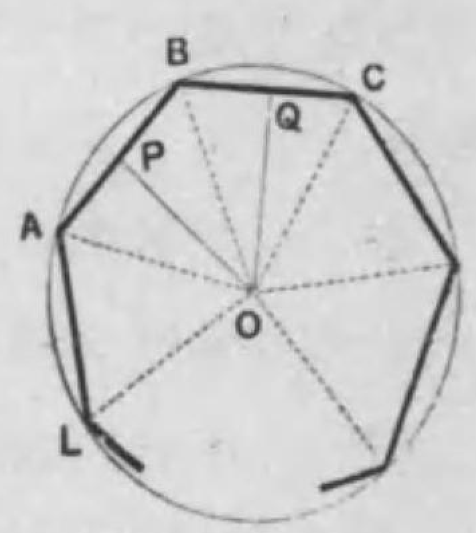
(1) 平行二邊ノ一ノ中點ヲ過ル直線ニテ.

(2) 一角頂ヲ過ル直線ニテ.

**20.** 三角形ノ三中線ヲ三邊トスル三角形ノ面積ハ前ノ三角形ノ面積ノ四分ノ三ナリ.

---

**121. 定理** 正多角形の面積は其の邊心距と周との包む矩形の半分に等し.




ABC…L ヲ正多角形, O ヲ其ノ內切圓,外接圓共通ノ中心, OP, OQ,… ヲ其ノ邊心距トスレバ

正多角形ABC…L

$= \frac{1}{2} OP . \overline{AB + BC + \cdots + LA}$

ナルコトヲ證セムトス.

**證** $\triangle AOB, \triangle BOC, \cdots, \triangle LOA$ ノ高サハ皆 OP ニ



等シキヲ以テ其ノ面積ノ和,卽チ

正多角形 $ABC \cdots L = \frac{1}{2} OP . \overline{AB + BC + \cdots + LA}.$ [9題]

## 122. 極限に就きて.


ABCD ハ圓ニ內接スル正方形トシ, 弧 AB, BC, CD, DA ヲソレゾレ E, F, G, H ニ於テ二等分スレバ內接正八角形ノ頂點ヲ得.

サテ正八角形ノ面積ハ正方形ノ面積ヨリモ圓ノ面積ニ近ク,正八角形ノ周ハ正方形ノ周ヨリモ圓周ニ近ク,又正八角形ノ邊心距ハ正方形ノ邊心距ヨリモ圓ノ半徑ニ近シ.

又弧 EB, BF, FC, … ヲソレゾレ I, J, K, … ニ於テ二等分スルトキハ正十六角形ヲ得,而シテ正十六角形ノ面積,周,邊心距ハソレゾレ正八角形ノ面積,周,邊心距ヨリモ圓ノ面積,周,半徑ニ近シ.

斯ノ如ク次第ニ弧ヲ二等分シテ正多角形ノ邊數ヲ限リナク增ストキハ其ノ面積,周,邊心距ヲシテソレゾレ圓ノ面積,周,半徑ニ限リナク近寄ラシメ得可シ,然レドモ後ノモノハ決シテ前ノモノヲ超過スルコトナシ.

故ニ圓ノ面積,周,半徑ハソレゾレ內接正多角形ノ邊數ガ限リナク增シタルトキ其ノ面積,周,邊心距ノ極限ナリト云フ.

**123. 定理** 圓は其の半徑及び圓周と等長なる分線の包む矩形の半分と等積なり.

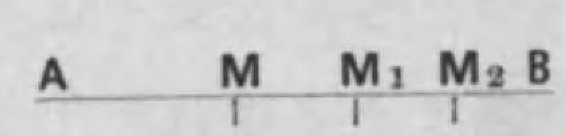
**證** 圓ノ面積ハ其ノ內接正多角形ノ邊數ガ限リナク增シタルトキ其ノ面積ノ極限ニシテ半徑ハ正多角形ノ邊心距ノ極限ナリ.

然ルニ正多角形ハ其ノ邊數ノ如何ニ拘ラズ邊心距ト周トノ包ム矩形ノ半分ト等積ナリ. [121款]

故ニ　圓ハ其ノ半徑及ビ其ノ周ト等長ナル分線ノ包ム矩形ノ半分ト等積ナリ.

---

**例題 21.** ABハ定長ノ直線ナリトシ一點ガAヨリ發シ第一秒間ニABノ半分AMヲ,第二秒間ニ殘ノ半分$MM_1$ヲ進行スルトシ逐テ斯ノ如クナルトキ該點ノ進行シタル距離ノ極限如何.




**22.** 圓ニ外切スル正多角形ノ邊數ヲ限リナク增ストキ其ノ周ノ極限ハ圓周ナリ.



**23.** 正多角形ノ邊數ガ限リナク增ストキ其ノ一內角ノ極限ハ如何.

**24.** 正多角形ノ邊數ガ限リナク增ストキ其ノ一外角ノ極限如何.

---

# 第二節

## 長さ及び面積の測度

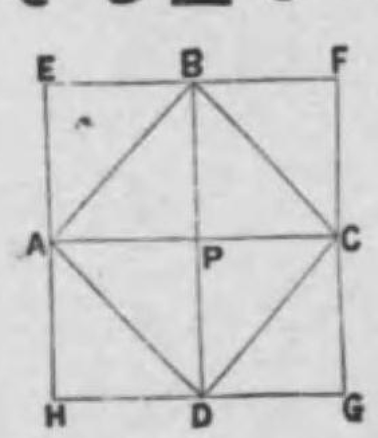
**124.** 長サヲ測度スルニハ**線單位**ヲ取ルヲ要ス．例ヘバ實地ニハ測度ス可キ物ニ依リ一寸，一尺，一間，一町，一里，又ハ一めーとる等ヲ用フルガ如シ．

然シ幾何學ニテハ線單位ハ全ク任意ナレドモ一ツノ所論中ハ必ズ同ジ單位ヲ用フ可シ．

面積ヲ測度スルニハ線單位ヲ一邊トスル正方形ヲ取リテ**面積單位**トス．

**125.** **定義** 二つの量が或共通の單位にて整數又は分數にて表はさるるときは之を**通約す可き量**といひ然らざるときは之を**通約す可からざる量**といふ．

例ヘバABCDヲ正方形トシEF, GHハBDニ垂直ニ，EH, FGハACニ垂直ニ引クトキハEFGHハ亦正方形ニシテ






ABE, ABP, BCF, BCP, … ノ如キハ何レモ相等シキコト明カナリ．

若シABヲ線單位トスレバ正方形ACハ面積單位ニシテ，又EFヲ線單位トスレバ正方形EGハ面積單位ナリ．

前ノ場合ニ於テハ □ACノ測度ハ1，□EGノ測度ハ2ニシテ，後ノ場合ニ於テハ □EGノ測度ハ1 □ACノ測度ハ$\frac{1}{2}$ナリ．

故ニ □EGト□ACトハ通約ス可キ量ナリ．

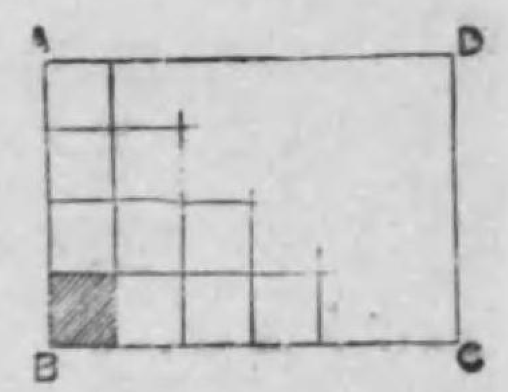
又ABヲ線單位トスレバEFハ後ニ示ス如ク[36題]唯記號的ニ$\sqrt{2}$トシテ表ハシ得ルノミニシテ整數又ハ分數ニテ表ハス能ハズ．斯ノ如キモノヲ**不盡數**ト云フ.*

故ニ ABおよびEFハ通約ス可カラザル量ナリ．

* $\sqrt{2}$ハ整數又ハ分數ニテ表ハス能ハザレドモ望ム所ノ程度マデ精密ニ近似値ヲ求メ得可シ．
例ヘバ$\sqrt{2}$ノ近似値トシテ $\frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \cdots$ ヲ得ルガ如シ．

**126.** **定理**　矩形に於ける面積單位の數は其の兩隣邊に於ける線單位の數の積に等し.

I.　兩隣邊ノ測度ヲ整數ナリトス,




AB ハ線單位ヲ $a$ 倍ダケ含ミ, BC ハ $b$ 倍ダケ含ムトスレバ AB ヲ $a$ 等分シ, BC ヲ $b$ 等分シテ各分點ヨリ隣邊ニ平行スル直線ヲ引ケバ,

□ABCD ニ於ケル面積單位ノ數ハ $ab$ ナルコト明カナリ.

II.　兩隣邊ノ測度ヲ分數ナリトス.

前ニ用ヒタル線單位ノ $\frac{1}{n}$ ヲ AB ハ $p$ 倍ダケ, BC ハ $q$ 倍ダケ含ムトスレバ,

モトノ線單位ノ $\frac{1}{n}$ ヲ線單位トスレバ □AC ノ測度ハ $pq$ ニシテ,

モトノ線單位ヲ用フレバ □AC ノ測度ハ

$$\frac{pq}{n^2}\ \text{卽チ}\ \frac{p}{n}\times\frac{q}{n}\quad \text{トナル.}$$

依リテ本定理ノ如シ,今コレヲ略言シテ



矩形の面積は其の兩隣邊の積に等し.

ト云フ.*[以下コノ略言ノ文體ヲ用フ].

**127.**　前款ノ結果ヨリ前節ニ記シタル定理ハ次ノ數條ヲ與フ.

(1)　平行四邊形ノ面積ハ其ノ底ト高サトノ積ニ等シ.　[117款]

(2)　三角形ノ面積ハ其ノ底ト高サトノ積ノ半分ニ等シ.　[119款]

(3)　梯形ノ面積ハ其ノ平行二邊ノ和ト高サトノ積ノ半分ニ等シ.　[11 題]

(4)　正多角形ノ面積ハ其ノ邊心距ト周トノ積ノ半分ニ等シ.　[121款]

(5)　圓ノ面積ハ其ノ半徑ト周トノ積ノ半分ニ等シ.　[123款]

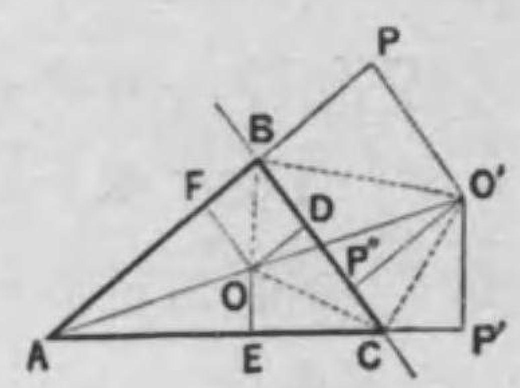
---

**例題** 25.　三角形ノ三ツノ中線ハ面積ヲ六等分スルコトヲ證セヨ.

---

* 矩形ノ兩隣邊ガ不盡數ナル場合ニハ其ノ近似値ヲ取レバ II ニ屬ス. 然レドモ絕對的ニ不盡數ナル場合ハ初等ノ書ニ不適當ナルユヱ玆ニ之ヲ書カ. 併シ本定理ハ不盡數ニテモ亦眞ナリトス.

**26.** 三角形ノ重心ヨリ三ツノ直線ヲ引キ本形ヲ等積ナル三ツノ四邊形ニ分テ.




**27.** 三角形ABCノ三邊ヲ$a, b, c$トシ其ノ和ノ半分ヲ$s$, 內切圓ノ半徑ヲ$r$, A, B, Cニ對スル傍切圓ノ半徑ヲソレゾレ$r_1, r_2, r_3$トスレバ面積$\Delta$ハ$sr, r_1(s-a), r_2(s-b), r_3(s-c)$ノ各ニ等シ.

[$\triangle ABC=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA=\triangle AO'B+\triangle AO'C-\triangle BO'C$ニ依リテ證セヨ,但Oハ內切圓ノ中心,O'ハ角Aノ內ニアル傍切圓ノ中心ナリ].

**28.** $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}$ヲ證セヨ.

**29.** 三角形ABCノ各邊ヲ$a, b, c$トシ$a=18, b=14, c=8$, $\Delta=24\sqrt{5}$ナルトキ$\Delta^2=rr_1r_2r_3$ナルコトヲ證セヨ.

**30.** 等邊三角形ニ於テ內切圓ノ半徑ト傍切圓ノ半徑トノ關係如何.

**31.** 圓ノ徑ヲ單位トシタルトキ其ノ面積如何.

**注意** 圓ノ徑ヲ單位トスレバ其ノ周$\pi$ハ不盡數ナレドモ通例近似値トシテ3.1416ヲ用フ.

**32.** △ABCニ於テXヲBC上ニ, YヲCA上ニ



ZヲAB上ニ取リ, $BX=\frac{1}{3}BC$, $CY=\frac{1}{3}CA$, $AZ=\frac{1}{3}AB$ナラシメ△XYZノ面積ヲ△ABCノ面積ニテ表ハセ.

## 128. 幾何學の定理と代數學の定理との關係.

| 幾何學ノ定理 | 代數學ノ定理 |
|---|---|
| X, Y,…ハ分線 | $a, b,$…ハ數 |
| XY, XZ,………ハX及ビY, X及ビZ,…ノ包ム矩形, $X^2, Y^2$,………ハXノ上ノ正方形, Yノ上ノ正方形,……ヲ表ハストキハ | $ab, ac,$……ハ$a$及ビ$b$, $a$及ビ$c$,…………ノ積, $a^2, b^2$,………ハ$a$ノ平方, $b$ノ平方,……ヲ表ハストキハ |
| **1.** $X(Y+Z)=XY+XZ.$ | **1.** $a(b+c)=ab+ac.$ |
| **2.** $(X+Y)^2=X^2+Y^2+2XY.$ | **2.** $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$ |
| **3.** $X^2=4\left(\dfrac{X}{2}\right)^2.$ | **3.** $a^2=4\left(\dfrac{a}{2}\right)^2.$ |
| **4.** $(X-Y)^2=X^2+Y^2-2XY.$ | **4.** $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab.$ |
| **5.** $X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y).$ | **5.** $a^2-b^2=(a+b)(a-b).$ |

此ノ1ハ例題9ニ同ジク既ニ之ヲ證明セルモノ

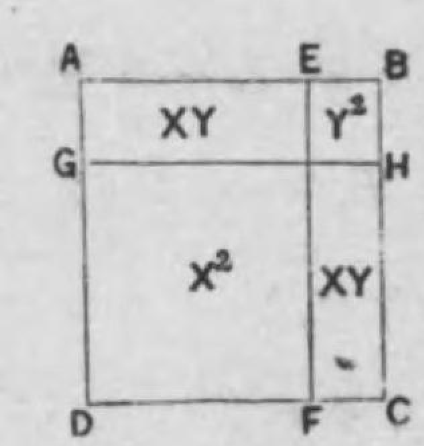
トス，又 3 ハ例題 2 ニ同ジク是亦スデニ證明セルモノトス，

依リテ 次ニ 2 ヲ證明セム，

[4, 5 ハ學生自ラ證明ス可シ]，

今 2 ヲ幾何學的ニ說述スレバ，

二直線の和の上の正方形は其の各の上の正方形と各の包む矩形の二倍との和に等し，




ABCD ヲ X + Y 上ノ正方形トシ，AE = X トスレバ EB = Y，AG = Y トスレバ GD = X，

サテ EF ヲ邊 AD ニ平行ニ，GH ヲ邊 AB ニ平行ニ引ケバ

$$\square GF = X^2,\quad \square EH = Y^2,$$

$$\square GE = XY,\ \square FH = XY,$$

而シテ $\square ABCD = \square GF + \square EH + \square GE + \square FH,$

卽チ $(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + XY + XY$

$$= X^2 + Y^2 + 2XY.$$



**例題 33.** $(X+Y)^2 + (X-Y)^2 = 2(X^2+Y^2)$ $[X > Y]$ ヲ幾何學的ニ說述シ且コレヲ證明セヨ，

**34.** $(X+Y)^2 - (X-Y)^2 = 4XY$ $[X > Y]$ ヲ幾何學的ニ說述シ且コレヲ證明セヨ，

## 第 三 節

## 面積の關係

**129.** **定義** 一點より一直線へ引ける垂線の趾を該直線上に該點の**射影**と稱す.

**130.** **定義** 一分線の兩端より他の一直線に垂線を引くときは其の垂線趾の間の分線を前の分線が後の一直線に投ずる**正射影**と云ふ.

本書ニ於テハ正射影ノミニ就キテ論ズルヲ以テ正射影ヲ略シテ單ニ**射影**ト云フ.

**131.** **定理** 直角三角形の斜邊上の正方形は他の二邊上の正方形の和に等し.

ABC ハ C ヲ直角トスル三角形トセバ

$c^2 = a^2 + b^2$ ナルコトヲ證セムトス.



**證** $\mathrm{BLMC} = a^2$, $\mathrm{ACKH} = b^2$, $\mathrm{AEGB} = c^2$ トシ,

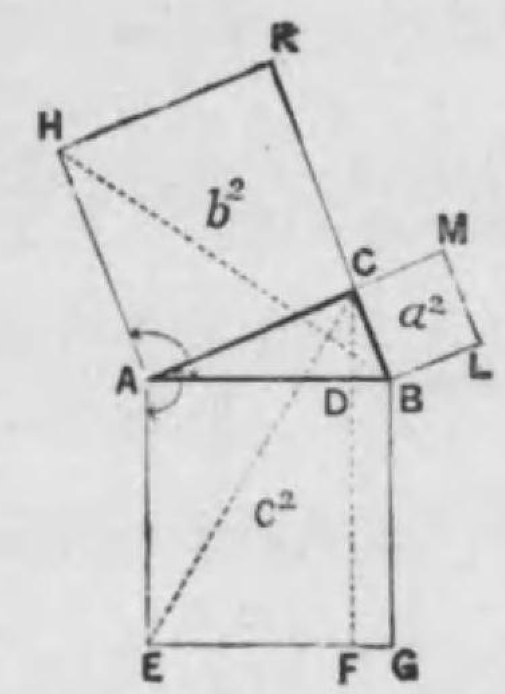
$\mathrm{CF} /\!/ \mathrm{AE}$ トス.

而シテ HB 及ビ CE ヲ結ビ付ケヨ.

サテ $\widehat{\mathrm{KCA}}, \widehat{\mathrm{ACB}}$ ハ各直角ナルユヱ

$\widehat{\mathrm{KCA}} + \widehat{\mathrm{ACB}} = 2\hat{\mathrm{R}}$,

∴ BCK ハ一直線ナリ. [23款]




サテ $\widehat{\mathrm{CAH}} = \widehat{\mathrm{EAB}}$, [何故カ]

∴ $\widehat{\mathrm{BAH}} = \widehat{\mathrm{EAC}}$ [10款III]

$\mathrm{HA} = \mathrm{CA}$ [57款IV]

$\mathrm{BA} = \mathrm{EA}$

∴ $\triangle\mathrm{HAB} \equiv \triangle\mathrm{CAE}$, [45款]

然ルニ BCK ハ一直線ニシテ

AH ニ平行ス. [何故カ]

∴ $\triangle\mathrm{HAB} = \frac{1}{2}\square\mathrm{ACKH}$, [119款]

又 $\triangle\mathrm{CAE} = \frac{1}{2}\square\mathrm{AF}$,

∴ $\square\mathrm{ACKH} = \square\mathrm{AF}$.

同様ニ $\square\mathrm{BLMC} = \square\mathrm{BF}$.

∴ $\square\mathrm{ACKH} + \square\mathrm{BLMC} = \square\mathrm{AEGB}$,

即チ $a^2 + b^2 = c^2$.*

* コレヲぴたごらす [*Pythagoras*, 西曆紀元前約 580 年生,約 501 年

**132. 系** 直角三角形ノ直角傍ノ一邊上ノ正方形ハ其ノ一邊ノ斜邊上ニ於ケル射影ト斜邊トノ包ム矩形ニ等シ.

**注意** 直角三角形ノ三邊ヲ表ハス整數ヲ求ムルコト.

此ノ問題ハ $x^2=y^2+z^2$ ナル要件ニ適スル三ツノ數ヲ求ムレバ可ナリ.

然ルニ 34 題ニ依リ

$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$

ナルユエ所要ノ三邊ハ

$m^2+n^2$, $m^2-n^2$ 及ビ $2mn$

ニテ適合ス可シ. 茲ニ記スル表ハ $m$ 及ビ $n$ ニ順次ニ數ヲ與ヘテ何所マデモ擴張スルヲ得可シ.

| $n$ \ $m$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5<br>3<br>4 | 10<br>8<br>6 | 17<br>15<br>8 | 26<br>24<br>10 | 37<br>35<br>12 |
| 2 | | 13<br>5<br>12 | 20<br>12<br>16 | 29<br>21<br>20 | 40<br>32<br>24 |
| 3 | | | 25<br>7<br>24 | 34<br>16<br>30 | 45<br>27<br>36 |

**例題 35.** 131 款ノ圖ニ於テ $CD^2=AD.BD$ ナルコトヲ證セヨ.

---

死]ノ定理ト云フ. 此ノ定理ハぴたごらす以前ヨリ世ニ知ラレタリシガ正シク之ヲ證明セシハぴたごらすニ始ル. 此ノ定理ハ要用ナルユエ次ニ一ノ圖解ヲ示ス.

圖ハ數瓦ヨリ實驗セルモノニシテ直角二等邊三角形ニ就キテ特



**36.** 正方形ノ一邊ヲ $a$ トスレバ其ノ對角線ハ $a\sqrt{2}$ ナルコトヲ證セヨ.*

**37.** 既知二正方形ノ和[或ハ差]ニ等シキ正方形ノ一邊ヲ求メヨ.

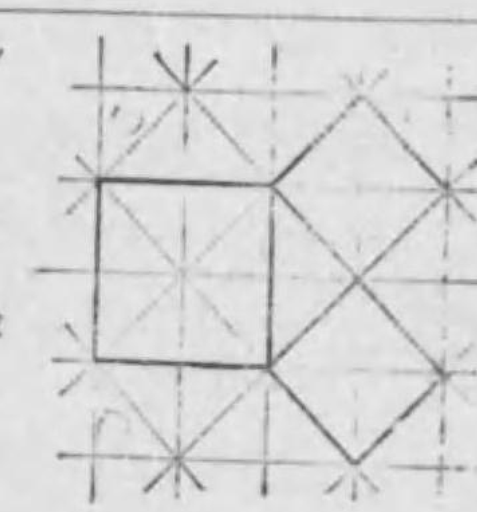
**38.** 131 款ノ圖ニ於テ BH ト CE トハ互ニ垂直ナルコトヲ證セヨ.

**39.** 131 款ノ圖ニ於テ AC 及ビ BH ノ交點ヲ P トシ, P ヨリ CB ニ平行スル PQ ヲ引キ AB ニ Q ニ於テ交ラシムレバ CP=PQ ナルコトヲ證セヨ.

**40.** 131 款ノ圖ニ於テ AL, BH, CF ハ同一ノ點ニ交ルコトヲ證明ス可シ.

---

別ノ場合ナリ. 古昔コノ定理ニ氣付シハ此ノ圖ニ基ヅキシト云フ.



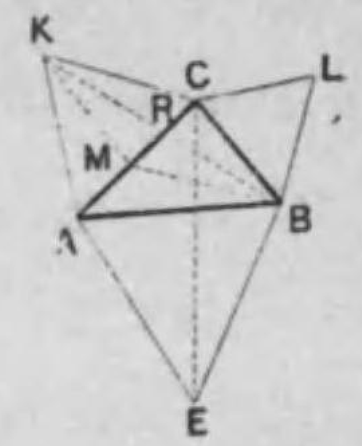
又別紙挿圖ハ二ツトモ切リ接ギ證明ノ一種ニシテ此ノ種ノ圖ハ數多アリ今最モ面白キ二ツヲ示ス. 學生自ラ證明ヲ試ミヨ.

* $\sqrt{2}$ ハ整數ニテ表ハス能ハザルコト明カナリ.

又 $\sqrt{2}$ ハ分數ニテ表ハス能ハズ. 如何トナレバ若シ $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ トシ, $\frac{m}{n}$ ハ最簡項ヲナストセバ $2n^2=m^2$ ナルユエ $m^2$ 及ビ $m$ ハ倶ニ偶數ニシテ,從ヒテ $n$ ハ奇數ナリ.

然ルニ $m$ ガ偶數ナルトキハ $\frac{m^2}{2}$ ハ偶數ナルユエ上ノ等式アル爲ニハ $n^2$ 及ビ $n$ ハ倶ニ偶數ナル可シ. 併シ $n$ ハ奇數ニシテ偶數ナル能ハズ. 故ニ $\sqrt{2}$ ハ分數ニテ表ハス能ハズ.

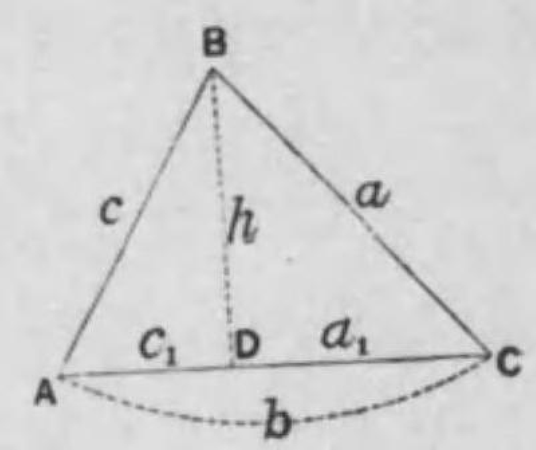
**41.** 直角三角形ノ斜邊上ニ畫キタル正三角形ハ他ノ二邊上ニ畫キタル正三角形ノ和ニ等シキコトヲ證ス可シ.




**42.** 直角三角形ノ斜邊ト他ノ一邊トノ和［或ハ差］竝ニ殘リノ一邊ヲ知リテ本形ヲ作レ.

---

**133.** 任意ノ三角形ノ三邊ヲ $a, b, c$ トシ, $a$ ヲ鋭角ニ對スル邊トス. $b$ ヲ底ニ取リ, $b$ ノ上ニ $a$ 及ビ $c$ ノ射影ヲソレゾレ $a_1$ 及ビ $c_1$ トシ, 高サヲ $h$ トスレバ




(1) $b^2 = c_1^2 + a_1^2 + 2c_1a_1$, ［128款2］

(2) $c^2 = c_1^2 + h^2$

(3) $a^2 = a_1^2 + h^2$ ［131款］

(1) ト (2) トヲ加ヘ (3) ヲ減ジ

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2c_1^2 + 2c_1a_1 = 2bc_1,$$

$$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc_1, \ \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

故ニ次ノ定理アリ.

**定理** 任意の三角形に於て鋭角に對



する邊上の正方形は他の二邊上の正方形の和より小なること是等の二邊の一と其の上に他の一邊の射影との包む矩形の二倍なり.

---

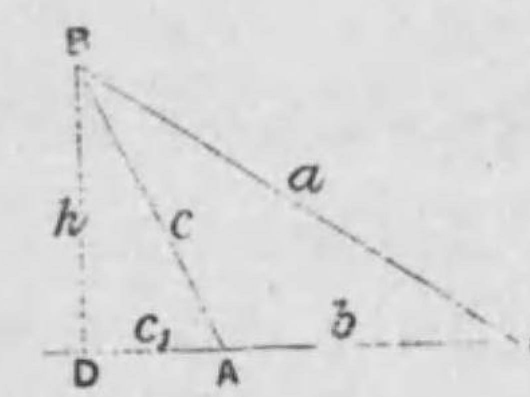
**例題 43.** 本款ノ圖ニ於テ $a^2 - c^2 = a_1^2 - c_1^2$ ナルコトヲ證セヨ.

---

**134.** 前款ノ圖ニ於テ A ガ鈍角トナリトセバ (A) ハ次ノ如ク變ズ.

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc_1, \ \cdots\cdots (B)$$

故ニ次ノ定理アリ.




**定理** 鈍角三角形に於て鈍角に對する邊上の正方形は他の二邊上の正方形の和より大なること是等の二邊の一と其の上に他の一邊の射影との包む矩形の二倍なり.

**135.** **系** $\hat{A}$ ガ鋭角ナルトキハ $a^2 < b^2 + c^2$. ［133款］

$\hat{A}$ ガ直角ナルトキハ $a^2 = b^2 + c^2$. ［131款］

$\hat{A}$ ガ鈍角ナルトキハ $a^2 > b^2 + c^2$. ［134款］

故ニ是等ノ逆ハ眞ナリ［轉換法］.

**例題 44.** 三角形ノ二邊上ノ正方形ノ和ハ第三邊ノ半分上ノ正方形ノ二倍ト第三邊ヘ引ケル中線上ノ正方形ノ二倍トノ和ニ等シ.

**45.** 二等邊三角形ノ底 BC 上ニ任意ノ一點 P ヲ取ルトキ $\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=BP.CP$ ナルコトヲ證セヨ.

若シ P 點ガ BC ノ延線上ニアルトキハ次ノ如シ,

$$\overline{AP}^2-\overline{AB}^2=BP.CP.$$

**46.** 既知ノ周ヲモツ總テノ矩形ニ就キテ正方形ガ最大ナルコトヲ證セヨ.

**47.** 既知ノ分線ヲ二分シ其ノ各部ノ上ノ正方形ノ和ヲ最小ナラシメヨ.

**48.** △ABC ノ面積 $\Delta$ ハ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ナルコトヲ證セヨ但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.*

133 款ノ圖ニ於テ $h^2=c^2-c_1^2=(c+c_1)(c-c_1)$,

然ルニ $$c_1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b},$$ [133款]

$$\therefore\quad c+c_1=\frac{(b+c)^2-a^2}{2b}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b},$$

$$c-c_1=\frac{a^2-(b-c)^2}{2b}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b},$$ 云々.

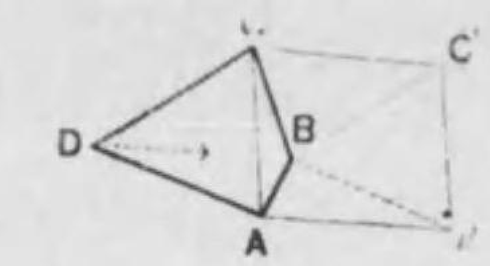
---

* あれくさんどりあノ住人へろん[*Heron*, 西暦紀元前120年乃至100年頃活動セシ人]ガ氏ノ測地學ノ末編ニ始メテ掲載セシ公式ナリ. 併シ證明ハ氏ノ他ノ著書 *Dioptra* ニ記セリ.



**49.** 正八角形ノ面積ハ $2r^2\sqrt{2}$, 但 $r$ ハ外接圓ノ半徑ナリ.

**50.** 四邊形ABCDニ於テCD 及ビ DA ハソレゾレ各自ノ原位置ニ平行シテ C′B 及ビ BA′ ニ移動セリトス. 然ルトキハ ▱AA′C′C ニ於テ次ノ條件アリ.




(1) B ヨリ ▱AA′C′C ノ各角ノ頂點マデノ距離ハ四邊形 ABCD ノ各邊ニ等シ.

(2) B ノ周リノ各角ハ四邊形 ABCD ノ各角ニ等シ.

(3) ▱AA′C′C ノ各邊ハ四邊形 ABCD ノ對角線ニ等シ.

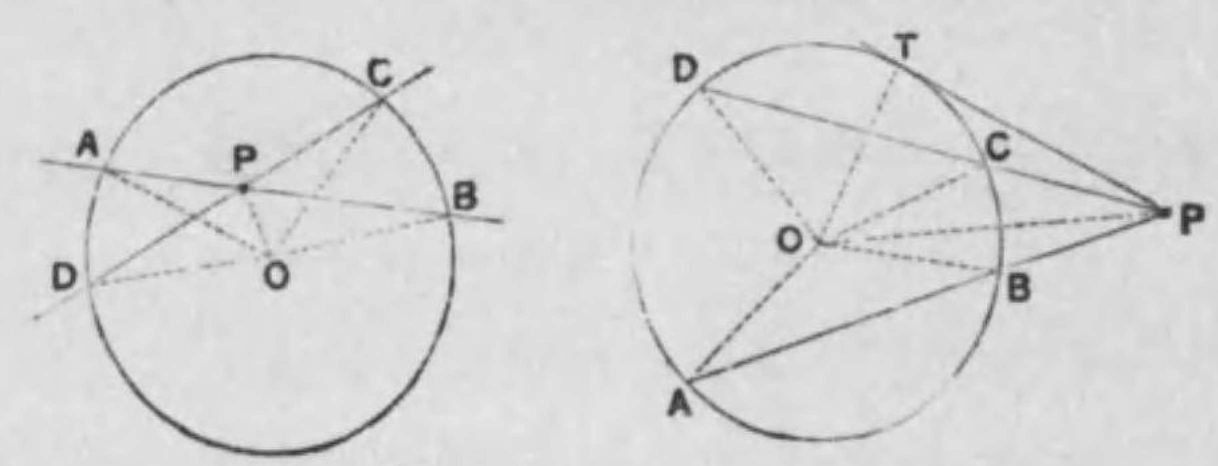
(4) ▱AA′C′C ノ各角ハ四邊形 ABCD ノ兩對角線ノ間ノ角ニ等シ.

(5) ▱AA′C′C ノ各邊ト B ヨリ其ノ各角ノ頂點ヘ引ケル直線トノ間ノ角ハ四邊形ノ各邊ト對角線トノ間ノ角ニ等シ.

(6) ▱AA′C′C ノ面積ハ四邊形 ABCD ノ面積ノ二倍ニ等シ.

**136.　定理**　一定點を過る圓の總ての割線に就きて其の圓周と交る二點より該定點までの分線の包む矩形は相等し.

AB, CD ハ P 點ニ於テ交ル二ツノ割線トスレバ




AP.BP＝CP.DP ナルコトヲ證セムトス.

**證**　OA, OB, OC, OD 及ビ OP ヲ結ビ付クレバ

$$AP.BP=\overline{OA}^2\sim\overline{OP}^2,\qquad [45題]$$

同樣ニ　　$CP.DP=\overline{OC}^2\sim\overline{OP}^2$ *

然ルニ　　$OA=OC$

ナルユヱ　　$AP.BP=CP.DP.$

---

* P點ガ AB,CD 上ニアル場合ニハ同時ニ

$$AP.BP=\overline{OA}^2-\overline{OP}^2,\quad CP.DP=\overline{OC}^2-\overline{OP}^2.$$

又P點ガ AB,DC ノ延線上ニアル場合ニハ同時ニ

$$AP.BP=\overline{OP}^2-\overline{OA}^2,\quad CP.DP=\overline{OP}^2-\overline{OC}^2.$$



**137.　系**　PT ヲ P ヨリ引ケル切線トスルトキハ　$\overline{PT}^2=\overline{OP}^2-\overline{OT}^2=\overline{OP}^2-\overline{OA}^2=AP.BP.$

即チ　圓外ノ一點ヨリ圓ヘ引ケル切線上ノ正方形ハ同ジ點ヨリ引ケル割線ノ二部ノ包ム矩形ニ等シ.

---

**例題**　**51.**　136, 137 款ノ定理ノ逆ハ眞ナルコトヲ證セヨ.

**52.**　136 款ニ於テ CD ハ弦 AB ニ垂直ナル徑ナルトキハ　$CP.DP=\overline{AP}^2.$

**53.**　圓ノ二弦 AB, CD ガ P ニ於テ互ニ垂直ニ交ルトキハ　$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=$ 徑$^2$.

**55.**　地球ノ徑ヲ 7920 哩ナリトセバ海面上 $h$ 呎ノ高サノ一點ヨリ海面上ヲ望見シ得可キ距離ハ $\sqrt{\frac{3h}{2}}$ 哩ナルコトヲ證セヨ.[但近似數ナリ].

# 雜題

**55.** 一動點 P ヨリ二定點 A,B マデノ距離ノ上ノ正方形ノ差ガ一定ナルトキ P 點ノ軌跡如何.

**56.** 既知二點ヲ過リ既知一直線ニ切スル圓ヲ畫ケ.*

**57.** $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ハ對應シタル文字ニテ表ハシタル邊ガ相等シク且同ジ向キニ平行ナルモノトス. 然ルトキハ對應シタル角ノ頂點ヲ二ツヅツ結ビ付ケテ生ズル三ツノ平行四邊形ニ就キテ其ノ一ツハ他ノ二ツノ和ニ等シ. 又コレヨリぴたごらすノ定理ヲ誘求セヨ.

**58.** ABCD ハ矩形ニシテ DE ハ DC ニ等シキ DA ノ一部分ナリ. AD ニ垂線 EF ヲ引キ A ヲ中心トシ AD ヲ半徑トスル圓周ニ F ニ於テ交ラシムレバ DF ハ矩形ト等積ナル正方形ノ對角線ニ等シ.

**59.** 既知ノ三角形ト等積ナル平行四邊形ヲ作リ且ソノ一角ヲ既知ノ角ニ等シカラシメヨ.

* 此ノ題ハ又第二編ノ範圍內ニテモ解クコトヲ得可シ.

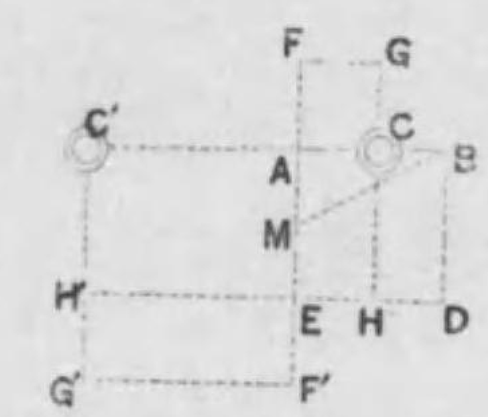


**60.** 既知ノ底上ニ平行四邊形ヲ作リ既知ノ三角形ト等積ニシテ且ソノ一角ヲ既知角ニ等シカラシメヨ.

**61.** 既知ノ多角形ト等積ナル平行四邊形ヲ作リ且ソノ一角ヲ既知角ニ等シカラシメヨ.

**62.** 既知ノ多角形ト等積ナル正方形ヲ作レ.

**63.** 既知ノ分線 AB ヲ C 又ハ C′ ニ於テ $AC^2=AB.CB$, 或ハ $\overline{AC'}^2=AB.C'B$ ナル如ク分ツ次ノ方法ヲ證明セヨ.




AB ノ上ニ正方形 ABDE ヲ作リ AE ヲ M ニ於テ二等分シ MF＝MB ヲ取リ正方形 AFGC ヲ作レバ點 C ヲ得.

又點 C′ ヲ得ムニハ MF′＝MB ヲ取リ AF′ ノ上ニ正方形 AF′G′C′ ヲ作レバ可ナリ.

直線ヲ一點ニテ本題ノ如ク分ツコトヲ**外中比**ニ分ツト云フ.

* 本題ハ幾何學ニ於テ極メテ必要ナルモノニシテ古昔希臘ノ數學者ハ之ヲ**黃金分割**ト稱ヘぴたごらす時代ニ〆能ク之ヲ知レリ.

# 第四節

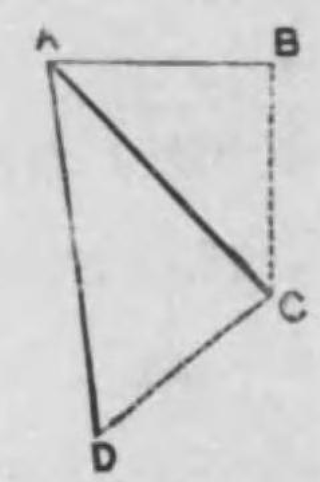
## 代數的作圖題

138. **作圖題** ABを既知の分線とし分線 $AB\sqrt{2}$, $AB\sqrt{3}$, $AB\sqrt{5}$ を作ること.

**作圖法** AB ニ垂線 BC ヲ作リ, $BC=AB$ トナストキハ $AC=AB\sqrt{2}$.

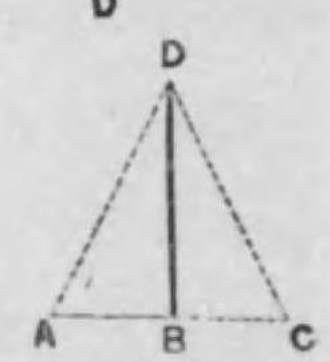
又 AC ニ垂線 CD ヲ作リ, $CD=AB$ トナストキハ

$$AD=AB\sqrt{3}.$$




餘ハ之ニ倣ヘ.

**證** 131款ヨリ容易ニ證シ得可シ.




**注意 1.** AB ヲ C ニ引キ延バシ $BC=AB$ トナシ, 正三角形ACD ヲ作ルトキハ其ノ高サ BD ハ $AB\sqrt{3}$ ニ等シ.

**注意 2.** AB ニ垂線 BC ヲ作リ, $BC=2AB$ トナストキハ

$$AC=AB\sqrt{5}.$$




**例題 64.** 正方形ノ一邊ト一對角線トノ和 $l$ ヲ知リテ本形ヲ作レ.

正方形ノ一邊ヲ $a$ トスレバ $a(\sqrt{2}+1)=l$,

$$\therefore\ a=l(\sqrt{2}-1).$$

139. **作圖題** ABを既知の分線とし其の上に一點Cを求め $\overline{AC}^2=AB.CB$ ならしむること.

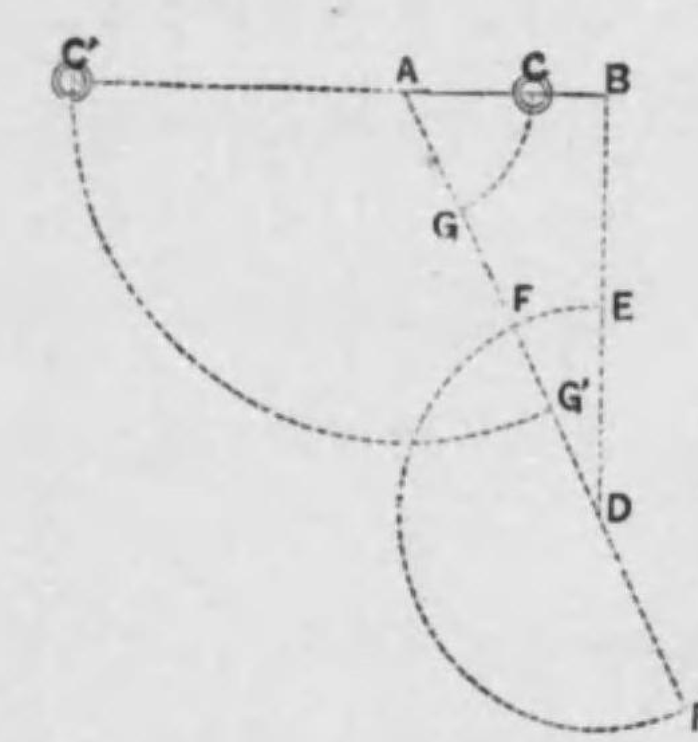
**解析法**

$$\overline{AC}^2=AB.CB$$
$$=AB(AB-AC),$$

即チ $\overline{AC}^2+AC.AB=\overline{AB}^2$.

サテ $AB=a, AC=x$ トスレバ $x^2+ax=a^2$.

此ノ二次方程式ヲ解クトキハ $x=\frac{1}{2}(a\sqrt{5}-a)$, 或ハ $x=\frac{1}{2}(-a\sqrt{5}-a)$.




**作圖法** $AD=AB\sqrt{5}$ [138款] ヲ作リ E ヲ BD ノ中點トシ $DF=DE$ ヲ取リ AF ヲ G ニ於テ二等分シ $AC=AG$ ヲ取レバ C ハ所要ノ分點ナリ.

若シ $DF'=DE$ ヲ取リ $AF'$ ヲ $G'$ ニ於テ二等分シ $AC'=AG'$ ヲ取レバ $C'$ ハ $\overline{AC'}^2=AB.C'B$ ナル關係ヲ與フ.*

**注意** 時トシテハ分線 BA ノ延線上ニ取リタル點 C′ ハ分線 BA ヲ**外分ス**ト云ヒ之ニ對シテ C ハ BA ヲ**内分ス**ト云フ. 内分ノ二部ハ AC, CB ニシテ外分ノ二部ハ AC′, C′B ナリ.

本題ヨリ次ノ二條ヲ見ル.

(1) 本題ノ解析中ニハ二次方程式ノ解ヲ含ミ其ノ二根ニ對應スル二解アリ.

(2) 二ツノ解ハ倶ニ題文ニ適合ス可ク或ハ其ノ一ノミガ題文ニ適合ス可シ.

本題ノ說述ヲ

既知ノ分線ヲ二分シ其ノ一部ノ上ノ正方形ヲ全線ト他ノ一部トノ包ム矩形ニ等シカラシメヨ.

ト改メ内分ノミニ限ルトスレバ二ツノ解ノ一ツノミガ適合シ又内分外分倶ニ許ストキハ二ツノ解ガ倶ニ適合ス.

---

本題ハ直線ヲ外中比ニ分ツ代數的作圖法ナリ



**例題 65.** 既知ノ矩形ト等積ナル正方形ヲ作レ.

**66.** 既知ノ分線 AB ヲ C ニ於テ $\overline{AC}^2=2\,\overline{CB}^2$ ナル如ク分テ.

外分ノ場合ニモ此ノ法ハ成リ立ツカ.

# 第四編　比例

## 第一節

## 比　及び　比例

**140.** 單ニ二ツノ分線ノ等,不等ヲ知ルニハ相重ネテ比較スレバ可ナリ. 然レドモ不等ナル二ツノ分線ノ長サノ關係ヲ表ハサムニハ二ツノ分線ノ關係ト同ジキ關係ヲモツ二ツノ數値ヲ見出スヲ要ス.

AB及ビCDヲ二ツノ分線トス. 若シ此ノ二ツハ通約ス可キ量ナルトキハ[125款] AB及ビCDノ測度ヲ整數ニテ求ムルヲ得. サテABノ測度ヲ$m$,CDノ測度ヲ$n$トス. 然ルトキハ$m,n$ナル二數相互ノ關係ハAB,CDナル二ツノ分線相互ノ關係ニ等シ.

故ニ$\dfrac{m}{n}$ハABトCDトノ關係ヲ表ハス. 依リテ

**定義**　或量の之と同種類なる他の量



に於ける**比**は第一の量の測度を第二の量の測度にて除したる商なり.

ABノCDニ於ケル比,卽チABトCDトノ比ハAB:CD或ハ$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}$ニテ表ハス.

サテ$n$ト$m$トノ比ハ1ト$\dfrac{m}{n}$トノ比ニ同ジ. 然ルニ若シCDヲ單位トスレバ其ノ測度ハ1トナリ,ABノ測度ハ$\dfrac{m}{n}$トナル.

故ニ　ABトCDトノ比ハCDヲ單位トシタルトキABノ測度ナリ.

若シAB及ビCDガ通約ス可キ量ナルトキハ此ノ比ハ整數,又ハ分數ニテ表ハサルレドモAB及ビCDガ通約ス可カラザル量ナルトキハ此ノ比ハ唯記號ニテ表示セラルルノミ. 然シ其ノ近似値ハ望ム所ノ程度マデ精密ニ求メ得可シ.

**141.** **定義**　四つの量は之を其の第一と第二との比が第三と第四との比に等しきとき**比例す**といふ.

例ヘバ　二量AトBトノ比ガ二量XトYトノ比ニ等シキトキハA,B,X,Yハ比例ヲナシ之ヲ

$$A:B=X:Y,$$

或ハ $\frac{A}{B}=\frac{X}{Y}$

ト記シ之ヲ次ノ如ク唱フ.

AノBニ於ケル比ハXノYニ於ケル比ニ等シ,

或ハ Aニ就イテノBハXニ就イテノY.

AトYトヲ比例ノ**外項**,BトXトヲ比例ノ**中項**ト稱シ,YヲA,B,Xノ**比例第四項**ト稱ス.

**注意** 比例 A:B=X:Y ニ於テAトBトハ必ズ同種類ノ量,XトYトモ同種類ノ量ナレドモA,BトX,Yトハ必ズシモ同種類ナルヲ要セズ.

**142.** 四ツノ量A,B,C,Dガ比例スルトキハ

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}.$$

然ルニ同ジ單位ニテ測リタルA,Bノ測度ヲ$a,b$トシ,又同樣ニC,Dノ測度ヲ$c,d$トスルトキハ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b},\quad \frac{C}{D}=\frac{c}{d}$$

ナルユヱ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

又逆ニ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

ナルトキハ $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$.

故ニ 四ツノ量ノ比例ヨリ直チニ其ノ數値ノ比



例ヲ得可ク而シテ四ツノ量ガ皆同種類ナルトキハ數ノ比ニ關スル事項ヲ直チニ量ノ比ニ關スル事項トナスコトヲ得可シ.

**143.** 前款ノ末文ニ依リテ次ノ比例ノ性質ハ又量ニ關スルモノト見ルコトヲ得可ク而シテ容易ニ證明シ得可シ.

I. $\frac{a}{b}=\frac{x}{y},\ \frac{c}{d}=\frac{x}{y}$ ナルトキハ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

II. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. [反轉ノ理].

III. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. [更迭ノ理].

IV. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $ad=bc$.

V. $ad=bc$ ナルトキハ次ノ一ツノ比例ガ成リ立ツ,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c},\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d},\ \frac{c}{a}=\frac{d}{b}.$$

VI. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. [合比ノ理].

VII. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{a\sim b}{b}=\frac{c\sim d}{d}$. [分比ノ理].

VIII. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$ ナルトキハ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}.$$ [加比ノ理].

IX. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ナルトキハ $b^2=ac$ 及ビ $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$.

**注意** $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ナルトキハ $b$ ハ $a$ ト $c$ トノ **比例中項** ト云ヒ, $c$ ハ $a$ ト $b$ トノ **比例第三項** ト云フ. 又 $\frac{a^2}{b^2}$ ヲ $\frac{a}{b}$ ノ **二乘比** ト稱ス.

X. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{x}{y}=\frac{z}{w}$ ナルトキハ $\frac{ax}{by}=\frac{cz}{dw}$.

XI. $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$, $\frac{b}{c}=\frac{q}{r}$ ナルトキハ $\frac{a}{c}=\frac{p}{r}$.

XII. $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$, $\frac{b}{c}=\frac{r}{s}$ ナルトキハ $\frac{a}{c}=\frac{pr}{qs}$.

---

**例題** 1. $m>n$ ナルトキハ $\frac{m}{a}>\frac{n}{a}$, $\frac{a}{m}<\frac{a}{n}$.

2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{ma}{mb}=\frac{nc}{nd}$.

3. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $a \gtreqless c$ ニ從ヒ $b \gtreqless d$.

4. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{a+b}{a\sim b}=\frac{c+d}{c\sim d}$.

5. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{a}{d}=\frac{a^3}{b^3}$.

**注意** $\frac{a^3}{b^3}$ ヲ $\frac{a}{b}$ ノ **三乘比** ト云フ.

## 第二節

### 線に關する比例

**144. 定義** 二つの多角形に於て同じ順に取りたる角がそれぞれ相等しきときは此の二つの多角形は互に**等角**なりと云ふ.

互ニ等角ナル二ツノ多角形ニ於テ相等シキ角ヲ**對應角**ト云ヒ相隣レル二ツノ對應角ノ間ニアル邊ヲ**對應邊**ト云フ.

**145. 定義** 二つの多角形が互に等角にして對應邊が比例するときは之を**相似多角形**或は單に**相似形**と云ふ.

二ツノ多角形ガ相似ナルコトヲ示スニハ其ノ間ニ∽ナル記號ヲ用フ.*

---

* ∽ナル記號ハ相似ヲ意味スル羅甸語 *Similis* ノ首字 *S* ヨリ取リタルナリ.

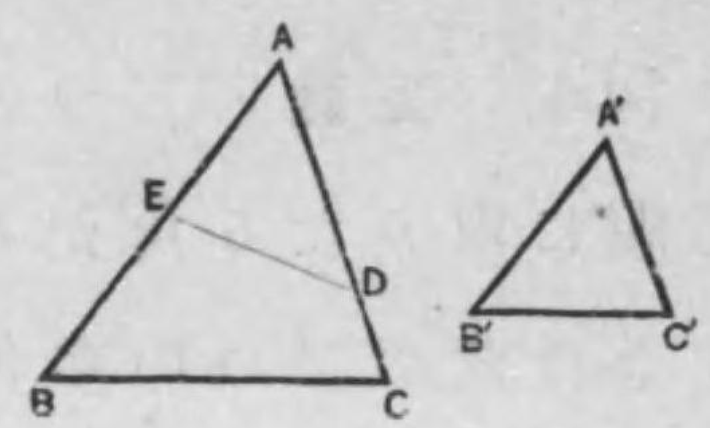
**146. 定理** 互に等角なる二つの三角形は相似なり.

$\triangle ABC,\ \triangle A'B'C'$ ニ於テ

$\hat{A}=\hat{A}',\ \hat{B}=\hat{B}'$

從ヒテ $\hat{C}=\hat{C}'$

ナルトキハ




$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ ナルコトヲ證セムトス.

**證** $\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ニ重ヌルニ, $A'$ ヲ $A$ ノ上ニ $C'$ ヲ $AB$ 上ノ或點 $E$ ノ上ニ置ケバ

$\hat{A}'=\hat{A}$ ナルユヱ $B'$ ハ $AC$ 上ノ或點 $D$ ニ落ツ可シ.

$$\therefore\ \widehat{ADE}=\hat{B}'=\hat{B}.$$

依リテ $B, C, D, E$ ハ同一ノ圓周上ニアリ. [93款]

故ニ $AB.AE=AC.AD.$ [136款]

$$\therefore\ \frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{A'B'}{A'C'}. \quad \text{[143款V]}$$

同樣ニ $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$, 及ビ $\dfrac{BC}{CA}=\dfrac{B'C'}{C'A'}$.*

$$\therefore\ \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$$

* 三ツノ比例ヨリ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$ ヲ得.



**147. 系** 二ツノ三角形ハ彼此ノ二角ガソレゾレ相等シキトキニ相似ナリ.

**例題 6.** 三角形 ABC ノ三邊ヲ $a, b, c$ トシ之ト相似ナル三角形 $A'B'C'$ ノ對應邊ヲ $a', b', c'$ トスルトキハ

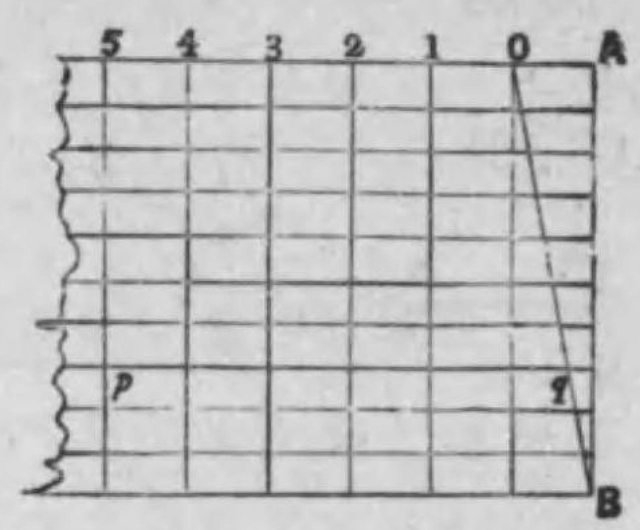
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{a+b+c}{a'+b'+c'}.$$

**7.** 三角形ノ底ニ平行スル直線ハ原形ト相似ナル三角形ヲ截リ取ル可シ.

**8.** 三角形ノ底ニ平行シテ引ケル直線ガ二邊ヲ分ツ部分ハ比例ヲナス.

**9.** 一組ノ數多ノ平行直線ニ交ハル二ツノ横截線ハ是等ノ平行直線ニテ比例スル如ク分タル.

**注意 對角線尺**




[*Diagonal Scale*]ハ此ノ理ニ基ヅキテ作レルモノナリ. 卽チ此ノ尺ハ相似三角形ニ依リテ小サキ分線ヲ精密ニ與フルモノナリ.

例ヘバ一寸ヲ五十分ノ一ニ割ラムトスルニ, OA ヲ一寸ノ五分ノ一トシ, OA ニ垂直ナル AB ヲ十分畫シ各分點ヨリ OA ニ平行線ヲ引キ, OB ヲ結ビ付クレバ, OB ハ平行線ヲ下ヨリ計フレバ OA ノ $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ …… ノ距離ニ於テ截ルナリ.

例ヘバ *pq* ハ一寸ト其ノ五十分ノ七ナリ.

**10.** 梯形ノ平行セル二邊ノ一ガ他ノ一ノ二倍ナルトキハ兩對角線ハ互ニ其ノ三等分點ノ一ニ於テ相交ハル可シ.



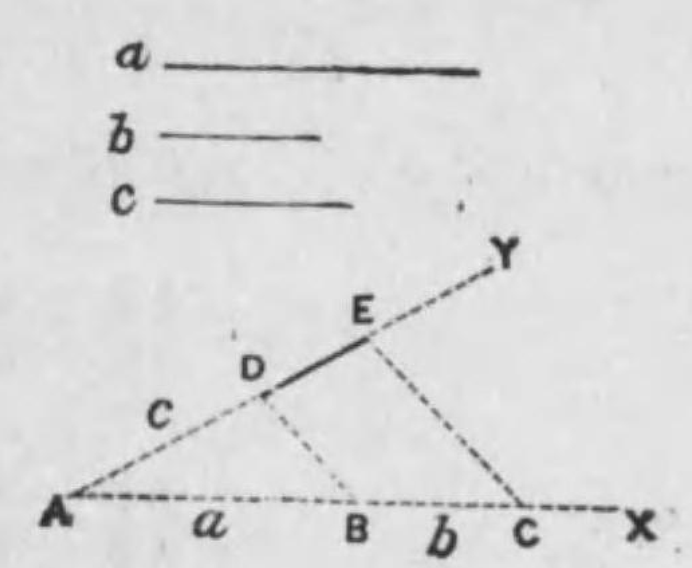
**11.** 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ引ケル垂線ハ本形ヲ原形ト相似ナル[從ヒテ互ニ相似ナル]二ツノ三角形ニ分ツ.

**12.** 二ツノ相似三角形ニ於テ高サノ比ハ底邊ノ比ニ等シ.

**13.** 既知ノ分線ヲ既知ノ二分線ノ比ニ分テ. 二分線ノ比ガ1ヨリ大ナルカ或ハ1ニ等シキカ又ハ1ヨリ小ナルカニ從ヒテ分點ノ位置ハ如何ニ變ズルカ. 又分點ハ唯一ツナルコトヲ證セヨ.

**14.** 既知ノ三分線ノ比例第四項ヲ作レ.

$a$, $b$, $c$, ヲ既知ノ分線トス.



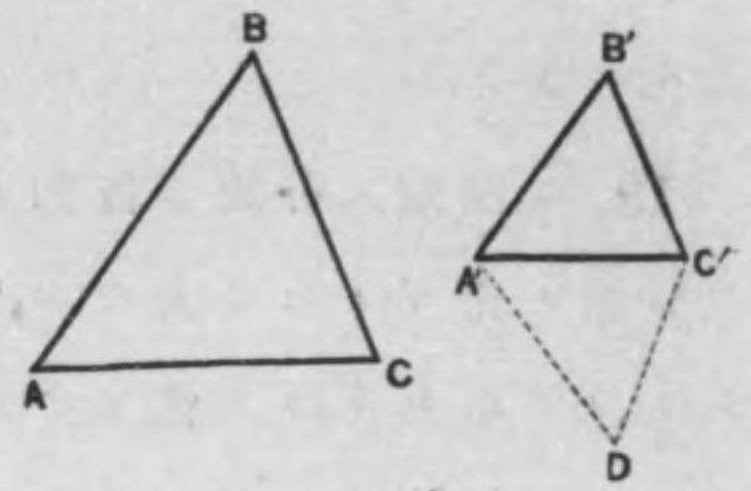

任意ノ角 X$\hat{A}$Y ヲ作リ AB = $a$, BC = $b$, AD = $c$ ヲ取リ BD ヲ結ビ付ケ之ニ平行シテ CE ヲ引ケバ DE ハ所要ノ分線ナリ.

**15** 既知ノ二分線ノ比例第三項ヲ作レ.

**16** 既知ノ二分線ノ比例中項ヲ作レ.

**148. 定理** 二つの三角形の三邊が同じ順に取りて比例をなすときは二つの三角形は相似なり.

$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ




$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$$

ナルトキハ

$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ ナルコトヲ證セムトス.

**證** $A'C'$ ノ上ニ $\triangle A'DC'$ ヲ作リ

$$D\widehat{A'}C'=\hat{A} \text{ 及ビ } D\widehat{C'}A'=\hat{C}$$

ナラシムレバ $\triangle A'DC' \backsim \triangle ABC$, [147款]

$$\therefore \frac{AB}{A'D}=\frac{AC}{A'C'},$$

然ルニ $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'},$$ [假設]

$$\therefore \frac{AB}{A'D}=\frac{AB}{A'B'},$$

同様ニ $$\frac{BC}{DC'}=\frac{BC}{B'C'},$$



$\therefore A'D=A'B'$ 及ビ $DC'=B'C'$.

依リテ $\triangle A'DC'=\triangle A'B'C'$, [53款]

$\therefore \hat{A}'=\hat{A},\ \hat{B}'=\hat{B},\ \hat{C}'=\hat{C}$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$. [146款]

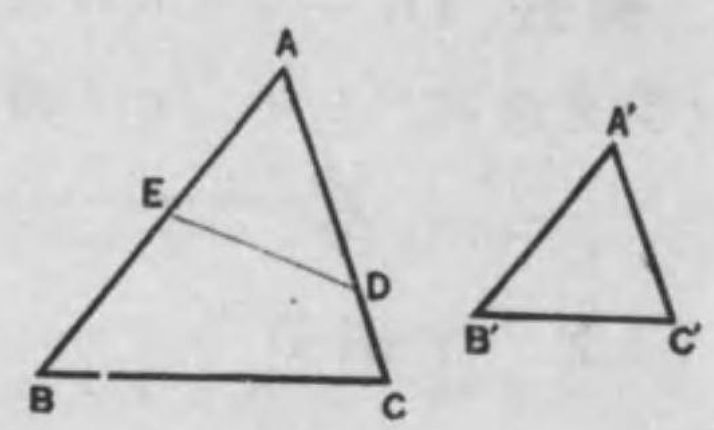
**例題 17.** 二ツノ四邊形ノ各邊ガ同ジ順ニ取リテ比例スルトキ二ツノ四邊形ハ相似ナルカ.

**149. 定理** 二つの三角形に於て彼此の二邊が比例し其の二邊の夾む角が相等しきときは此の二つの三角形は相似なり。

△ABC, △A'B'C' ニ於テ

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'},\ \hat{A}=\hat{A'}$$

ナルトキハ




△ABC ∽ △A'B'C' ナルコトヲ證セムトス.

**證** A' ヲ A ノ上ニ, C' ヲ AB 上ノ或點 E ノ上ニ置キ △A'B'C' ヲ △ABC ノ上ニ重ヌルニ,

$\hat{A}=\hat{A'}$ ナルユヱ B' ハ AC 上ノ或點 D ニ落ツ可シ

而シテ $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}=\frac{AD}{AE}$ [假設]

ナルユヱ $AB.AE=AC.AD$ [143款 IV]

故ニ B, C, D, E ハ一圓周上ニアリ. [III.51題]

依リテ $\hat{B}=\widehat{ADE}=\hat{B'}$,

$\hat{C}=\widehat{AED}=\hat{C'}$.

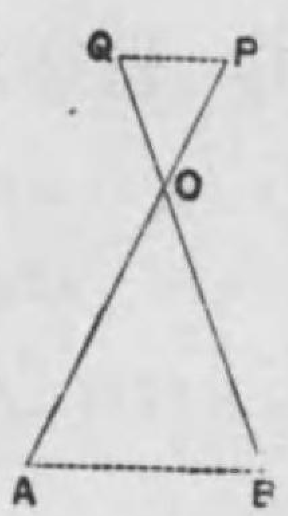
∴ △ABC ∽ △A'B'C', [146款]



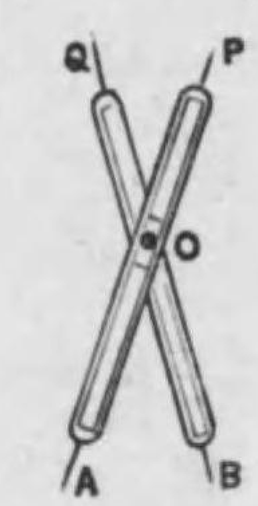
**例題 18.** 三角形ノ二邊ヲ比例スル如ク分ツ直線ハ底ニ平行ス.

**19.** 梯形ノ平行セザル二邊ヲ順次ニ比例スル部分ニ分チ其ノ對應セル分點ヲ順次ニ結ビ付クル直線ハ互ニ平行ナリ.

**20.** 等長ノ二直線 AOP, BOQ ガ點 O ニ於テ相交リ AO＝BO ナルトキハ $\frac{AB}{PQ}=\frac{AO}{OP}$ ナリ.




**注意 比例規** [*Proportional Compass*] ハ此ノ理ニ基ヅキテ作レリ. 此ノ規ハ既知ノ分線ヲ既知ノ比ニ增大シ又ハ減小スル爲ニ用フルモノナリ. 即チ O ナル動點ヲ動カシテ $\frac{OP}{AO}$ ヲ既知ノ比 [此ノ規ノ各ノ脚ニハ目盛ヲナシ此ノ比ヲ容易ニ知ラシム] ニ等シクシ AB ヲ既知ノ分線ニ等シクスレバ PQ ハ AB ヲ $\frac{OP}{AO}$ ノ比ヲ以テ增大シ, 若シクハ減小スルナリ.



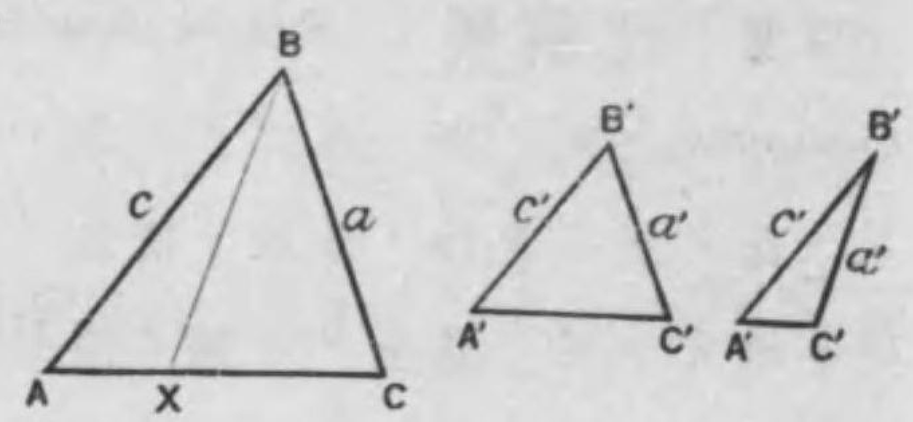
**150.** **定理** 二つの三角形に於て彼此の一角が相等しく且その對邊の比が他の彼此の一邊の比に等しきときは後の邊の對角は

(1) 相等しきか, 或は (2) 補角なり.

[前ノ場合ニハ二ツノ三角形ハ相似ナリ,然レドモ後ノ場合ニハ必ズシモ相似ナラズ].

$\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ ニ於テ

$\hat{A} = \hat{A}', \quad \dfrac{a}{a'} = \dfrac{c}{c'}$




ナルトキハ

$\hat{C} = \hat{C}'$ 或ハ $\hat{C} + \hat{C}' = 2\hat{R}$ ナルコトヲ證セムトス.

**證** $\widehat{ABC}, \widehat{A'B'C'}$ ヲ比較スルニ相等シキカ或ハ不等ナル可シ.

若シ $\qquad \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

ナルトキハ $\qquad \hat{C} = \hat{C}',$

而シテ $\qquad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$ [147款]

又 $\qquad \widehat{ABC} \neq \widehat{A'B'C'}$

ナルトキハ其ノ一ハ他ヨリ大ナル可ク, 今 $\widehat{ABC}$ ヲ



大ナリトシ $\widehat{ABX} = \widehat{A'B'C'}$ ナル様ニ BX ヲ引ケ.

然ルトキハ $\qquad \triangle ABX \backsim \triangle A'B'C'$ [147款]

而シテ $\qquad \dfrac{c}{c'} = \dfrac{BX}{a'}$

然ルニ $\qquad \dfrac{c}{c'} = \dfrac{a}{a'},$

$\therefore \quad BX = a,$

$\therefore \quad \hat{C} = \widehat{BXC},$

依リテ $\qquad \hat{C} + \hat{C}' = \widehat{BXC} + \widehat{BXA}$

$= 2\hat{R}.$

**例題** $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ ニ於テ $\hat{A} = \hat{A}'$ 及ビ $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{c}{c'}$ ナルトキ,

**21.** $a > c$, 或ハ $a' > c'$ ナルトキハ二ツノ三角形ハ相似ナリ.

**22.** $\hat{C}$ 及ビ $\hat{C}'$ ハ何レモ $\hat{R}$ ヨリ大ナルトキハ二ツノ三角形ハ相似ナリ.

**23.** $\hat{C} = \hat{C}'$ ニシテ此ハ何レモ $\hat{R}$ ヨリ小ナルトキハ二ツノ三角形ハ相似ナリ.

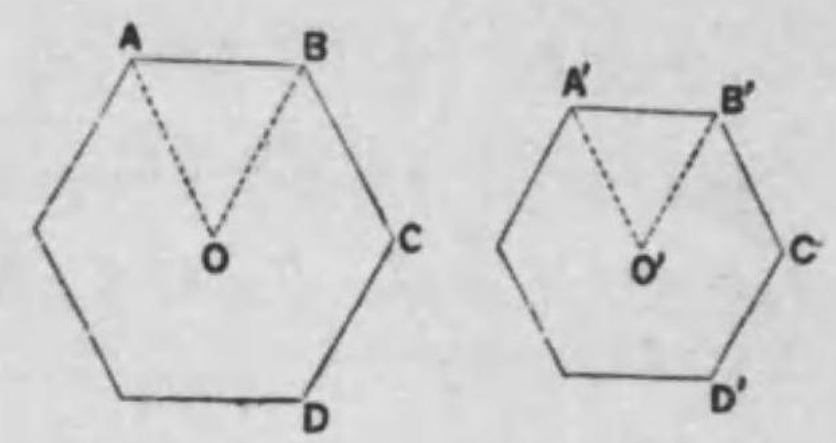
**24.** $\hat{C} = \hat{C}' = \hat{R}$ ナルトキハ二ツノ三角形ハ相似ナリ.

**25.** $\hat{A}$ ガ直角,又ハ鈍角ナルトキハ二ツノ三角形ハ相似ナルカ.

---

## 151. 定理 同邊數の正多角形は相似形なり.

ABCD…,及ビ A'B'C'D'……ハ同邊數ノ正多角形ナリトスレバ




ABCD…∽A'B'C'D'… ナルコトヲ證セムトス.

**證** 同邊數ノ二ツノ正多角形ハ互ニ等角ナリ,而シテ 正多角形ハ等邊形ナルユヱ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\cdots\cdots$$

ナレバナリ.

**152. 系** 二ツノ相似多角形ノ對應邊ヲソレゾレ $a, b, c, \cdots\cdots, a', b', c', \cdots\cdots$ トシ, 其ノ外接圓ノ半徑ヲ $r, r'$ トスレバ

$$\frac{r}{r'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots$$

$$=\frac{a+b+c+\cdots}{a'+b'+c'+\cdots}=\frac{\text{ABCD}\cdots\text{ノ周}}{\text{A'B'C'D'}\cdots\text{ノ周}}.$$



然ルニ極限ニ於テ正多角形ハ其ノ外接圓トナル,

[122款]

故ニ 任意ノ二圓周ハ其ノ半徑ト比例ス.

**153. 系** 二ツノ圓周ヲ $c, c'$ ニテ,其ノ半徑ヲ $r, r'$ ニテ表ハストキハ

$$\frac{c}{r}=\frac{c'}{r'}=\text{一定數,之ヲ }2\pi\text{ トス.}$$

$$\therefore\ c=2\pi r.$$

繁雜ナル計算,又ハ高等數學ニ依リ $\pi$ ノ値ヲ計算シ其ノ近似値トシテ $\pi=3.141592653589\cdots\cdots$ ヲ得,通例ハ之ヲ 3.1416 トシテ用ヒ之ヲ**圓周率**ト稱ス.

圓周率ハ又 $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ トシテ用フルコトアリ.*

---

* 古昔ニアリテハ洋ノ東西ヲ論セズ多クハ $\pi$ ヲ3トセリ. あるきめです[*Archimedes*, 西曆紀元前 287 年生,同 212 年死]ハ $3\frac{1}{7}$, 卽チ $\frac{22}{7}$ ヲ用ヒあれくさんどりあノへろんモ亦之ヲ用ヒタリ. ありあばった[*Aryabhatta*, 西曆第五世紀ノ印度ノ數學者,代數學及ビ幾何學ノ著アリ]ハ 3.1416 ヲ用ヒ,又和蘭人めちゅす[*Metius*, 西曆第十六世紀末ヨリ第十七世紀始頃ノ人]ハ世人ニ能ク記憶セラルル $\frac{355}{113}$ ヲ用ヒタリ. [$\frac{355}{113}$ ヲ記憶セムニハ 113355 ト書キ始ノ三ツハ分母,終ノ三ツハ分子ト思ヘバヨシ]. 又 $3\frac{1}{7}$, $\frac{355}{113}$ ハ支那ニテハ宋ノ頃ヨリ之ヲ知リ我邦ニテモ關新助孝和[上州藤岡ノ人,英ノにゅーとんト同年,卽チ西曆 1642 年生,1727年死]之ヲ算出セリ. 又獨逸人るーどるふ[*Ludolph*, 西曆第十六世紀頃ノ人]ハ之ヲ小數第三十五位マデ計算シ死セシトキ

**154. 系**　圓ノ面積ハ其ノ半徑ト其ノ周ニ等長ナル分線トノ包ム矩形ノ半分ニ等シ[123款]キユエ

$$\text{圓ノ面積} = \frac{1}{2}cr = \pi r^2.$$

即チ　圓ノ面積ハ其ノ半徑上ノ正方形ノ $\pi$ 倍ナリ.

---

**例題 26.**　三角形ノ頂角ノ内外二等分線ハ底邊ヲ他ノ二邊ト比例スル如ク内分,及ビ外分ス.

而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

一分線ヲ同ジ比ニ内分及ビ外分スルコトヲ**調和ニ分ツ**ト云ヒ分線ノ兩端ト二ツノ分點トヲ**調和列點**ト云フ.

**27.**　圓周上ノ任意ノ一點ニ於ケル切線,及ビ其ノ點ヨリ任意ノ徑ヘ引ケル垂線ハ徑ヲ調和ニ分ツ.

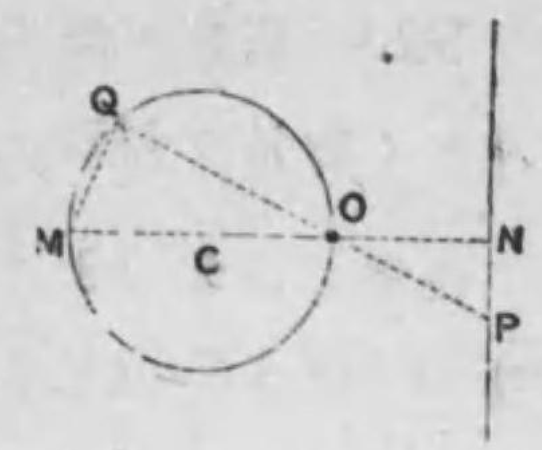
**28.**　二定點ヨリ一動點ニ至ル距離ガ定比ヲ有スルトキ此ノ動點ノ軌跡如何.

---

遺言シテ之ヲ墓石ニ刻セリ,故ニ獨逸ニテハ之ヲ「るーどるふノ數」ト云フコトアリ.　其ノ後獨逸人だーぜ [*Dase*, 西暦第十九世紀始ノ人] 之ヲ小數第二百位マデ計算シ,又獨逸人りひてる [*Richter*, 西暦第十九世紀半バ頃ノ人] 之ヲ小數第五百位マデ計算シ,英人しゃんくす [*Shanks*, 西暦 1882 年死] ハ之ヲ小數第七百七位マデ計算セリト云フ.



**29.**　O ハ定圓周上ノ一定點ニシテ PQ ハ O ヲ過ル任意ノ割線トス.　OQ.OP＝一定量,ナルトキ P 點ノ軌跡ハ一直線ナリ.




**注意**　卷首ニ載セタル直線ヲ引クぽーせりえ氏ノ器ハ此ノ理ニ基ヅキテ作レルモノナリ.　即チ此ノ器ノ構造ニ依リ P,O,Q ハ恒ニ一直線ヲナスユヱ

$$QO.PO = \overline{QA}^2 - \overline{OA}^2 = \text{一定量} \qquad \text{[III. 45 題]}$$

ナレバナリ. [又コノ問題ハ第三編面積ノ定理ニ依リテモ解クコトヲ得可シ].

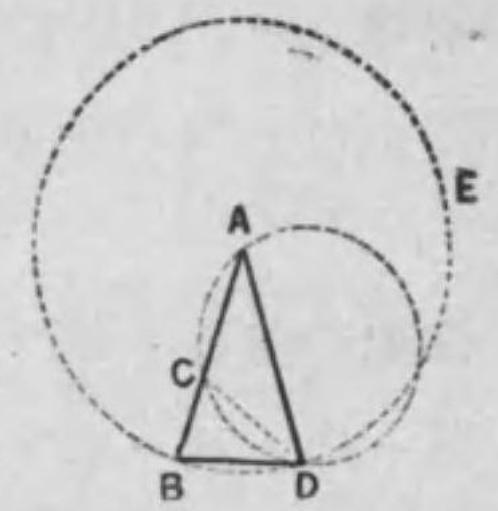
**30.**　既知二直線ヘノ距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

**31.**　既知圓外ノ既知一點ヨリ圓周マデ引ケル直線上ニ作レル正方形ノ二ツノ角頂ノ軌跡ハ如何.

[一ツノ頂點ノ軌跡ハ比例ヲ用ヒズシテ見出スコトヲ得レドモ,他ノ一ツハ比例ヲ用フルヲ要ス].

**32.** 底角ガ頂角ノ二倍ナル二等邊三角形ヲ作ル次ノ方法ヲ證明セヨ.

任意ノ直線 AB ヲ取リ之ヲ點 C ニテ $\overline{AC}^2=AB.BC$ ナル如ク分チ[139款],A ヲ中心トシ AB ヲ半徑トシテ圓 BDE ヲ畫キ弦 BD ヲ AC ニ等シカラシムレバABD ハ所要ノ二等邊三角形ナリ.




**33.** 前題ニ於テ二等邊三角形ABDノ各角ハ幾度ナルカ. 又 $\widehat{BAD}$ ハ四直角ノ幾分ノ幾ナルカ.

**34.** 圓ニ内接スル正十角形,及ビ正五角形ヲ畫ケ.*

* 圓ニ内接スル正方形ハ互ニ垂直ナル徑ヲ引キテ直チニ畫クコトヲ得可シ. 而シテ任意ノ弧ハ容易ニ二等分シ得ルユヱ圓ニ内接スル $2^n$ 邊ノ正多角形ヲ畫キ得可シ. 又圓ニ内接スル正六角形ヲ畫クコトヲ得[II. 89題],從ヒテ圓ニ内接スル正三角形ヲ畫キ得可シ,故ニ圓ニ内接スル $3\times2^n$ 邊ノ正多形ヲ畫キ得ルナリ. 又茲ニ正五角形[34題]及ビ正十五角形[35題]ヲ畫キ得ルユヱ $5\times2^n$, $15\times2^n$ 邊ノ正多角形ヲ畫キ得可シ. 換言スレバ四直角ヲ $2^n$, $3\times2^n$, $5\times2^n$, $15\times2^n$ 等分スルコトヲ得,而シテ此ハゆーくりっど [*Euclid*, 西暦紀元前 300



**35.** 圓ニ内接スル正十五角形ヲ畫ケ.

$\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}\right.$ ナルコトニ注意セヨ$\left.\right]$.

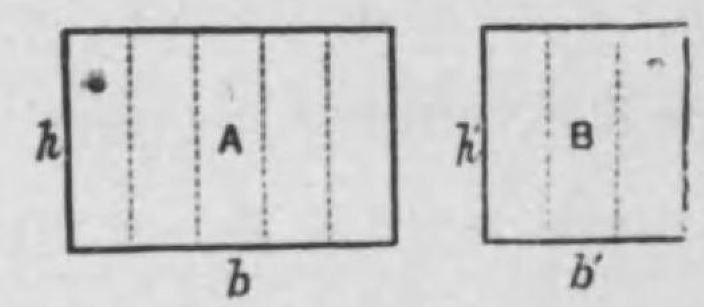
年頃ノ人あれくさんどりあ學校ニ於テ有名ナル幾何學者ニシテ始メテ完全ナル幾何學書ヲ著ハシタル人ナリ] 時代ヨリ既ニ世ニ知ラレシガ爾來殆ムド二千餘年間規矩ノ二ツノミニテハ此ノ他ノ等分ヲ爲シ得ザルモノト信セリ. 然ルニ近世ニ至リがうす氏ノ力ニ依リテ「若シ $2^n+1$ ガ素數ナレバ規矩ノ二ツノミニテ圓ニ内接スル $2^n+1$ 邊ノ正多角形ヲ畫キ得可シ」ナル定理ヲ證シ得タリ. 然ルニ順次ニ $n=1, 2, 3, \ldots\ldots$ トスレバ順次ニ $2^n+1=3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, \ldots\ldots$ トナリ其ノ中,素數ナルモノハ 3, 5, 17, 257 ナリ. 依リテがうす氏ハ規矩ノ二ツニテ圓ニ内接スル正十七角形,及ビ正二百五十七角形ヲ畫クコトヲ示シタリ [正十七角形ノ畫法ハ編者譯佛人かたらん氏幾何學定理及問題第四編定理 VIII ヲ見ヨ].

# 第三節

## 面積に關する比例

**155. 定理** 相等しき高さの矩形は底に比例す.

□A, □B ニ於テ




高サ $h=h'$ ナレバ

$$\frac{□A}{□B}=\frac{底 b}{底 b'}$$

ナルコトヲ證セムトス.

**證** 先ヅ $b$ ト $b'$ トハ通約ス可キ量ナリトシ其ノ比ヲ $\frac{m}{n}$ トス.

$b$ ヲ $m$ 等分シ, 又 $b'$ ヲ $n$ 等分シ各分點ヨリ高サニ平行スル直線ヲ引クトキハ, A ハ $m$ 個ノ矩形ニ, B ハ $n$ 個ノ矩形ニ分タル可ク而シテ是等ノ矩形ハ相等シ,

$$\therefore\quad \frac{□A}{□B}=\frac{m}{n},$$

然ルニ

$$\frac{b}{b'}=\frac{m}{n},\qquad [假設]$$

$$\therefore\quad \frac{□A}{□B}=\frac{b}{b'},$$



次ニ $b$ ト $b'$ トガ通約スベカラザル量ノ場合ニモ此ノ定理ハ亦眞ナリトス.*

**156. 系** 相等シキ底ヲモツ矩形ハ高サニ比例ス.

---

**例題 36.** 相等シキ高サノ三角形ハ底ニ比例ス.

**37.** 相等シキ底ヲモツ三角形ハ高サニ比例ス.

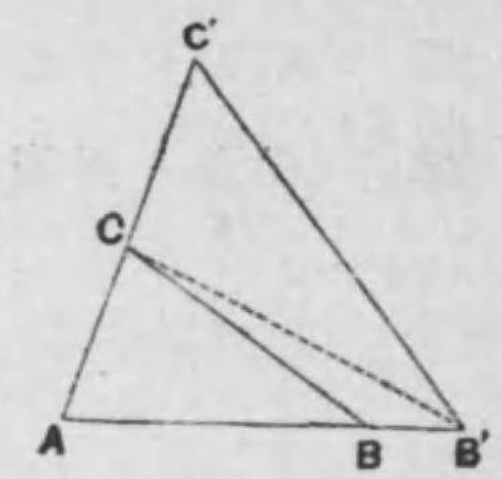
**38.** 任意ノ四邊形ハ其ノ兩對角線ニテ比例ヲナス四ツノ三角形ニ分タル.

---

* $b$ ト $b'$ トガ通約ス可カラザル量ナルトキハ其ノ近似値ニ就キテノ證明ハ前ノ場合ニ歸ス. 然レドモ $b$ ト $b'$ トガ絶對的ニ通約ス可カラザル場合ノ證明ハ初等ノ書ニ適セザルユヱ茲ニ之ヲ省ク.

**157. 定理** 一つの角が互に相等しきか或は互に補角なる二つの三角形の比は此の角を夾む二邊の包む矩形の比に等し.

先ヅ $\triangle ABC, \triangle AB'C'$ ニ於テ其ノ各ノ角 A ガ相等シキトキハ




$$\frac{\triangle ABC}{\triangle AB'C'}=\frac{AB.AC}{AB'.AC'}$$

ナルコトヲ證セムトス.

**證** 二ツノ三角形ハ其ノ角 A ガ相等シキユエ之ヲ相合シタリトシ, CB' ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ $\frac{\triangle ABC}{\triangle AB'C}=\frac{AB}{AB'}$, [36題]

及ビ $\frac{\triangle AB'C}{\triangle AB'C'}=\frac{AC}{AC'}$, [何故カ]

$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle AB'C'}=\frac{AB.AC}{AB'.AC'}$ [143款XII]

次ニ補角ノ場合ニハ學生自ラ證明ス可シ.

**158. 系** 相似三角形ノ比ハ其ノ對應邊ノ二乘比ニ等シ.

如何トナレバ $\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$



ナルトキハ $BC \parallel B'C'$

ナルユエ 比 $\frac{AB}{AB'}$ ハ $\frac{AC}{AC'}$

ニ等シキユエ, $\frac{AB.AC}{AB'.AC'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AB'}^2}$

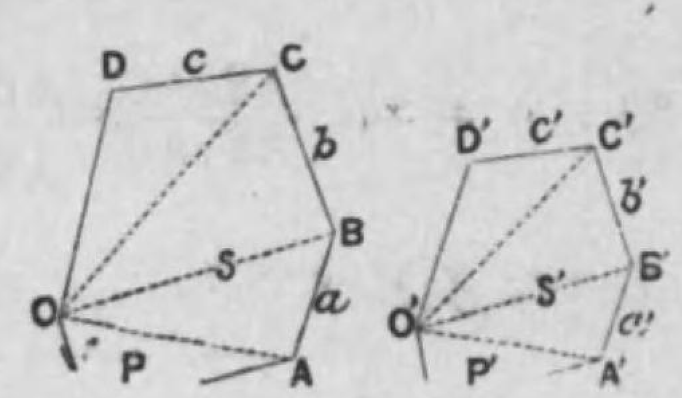
トナルベケレバナリ.

**例題 39.** 相等シキ一角ヲモツ二ツノ平行四邊形ノ比ハ此ノ角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シキコトヲ證セヨ.

**40.** 二ツノ正三角形ノ面積ノ比ガ 1:2 ナルトキ其ノ邊ノ比ヲ小數第二位マデ最モ精密ニ見出セ.

**159. 定理** 相似多角形の比は其の對應邊の二乘比に等し.

P 及ビ P′ ヲ相似多角形トシ邊 $a, b, \cdots$ ハソレゾレ邊 $a', b', \cdots$ ニ對應ストセバ




$\dfrac{P}{P'}=\dfrac{a^2}{a'^2}$ ナルコトヲ證セムトス.

**證** $a, b, \cdots$ 及ビ $a', b', \cdots$ ヲ底トシ其ノ兩端ヨリ對應角ノ頂點 0, 0′ ニ對角線ヲ引キテ P 及ビ P′ ヲ同數ノ相似三角形ニ分ツトキハ

$$\frac{\triangle 0AB}{\triangle 0'A'B'}=\frac{a^2}{a'^2}, \qquad [158款]$$

而シテ

$$\frac{\triangle 0BC}{\triangle 0'B'C'}=\frac{b^2}{b'^2}=\frac{a^2}{a'^2}, \qquad [何故カ]$$

同樣ニ

$$\frac{\triangle 0CD}{\triangle 0'C'D'}=\frac{a^2}{a'^2},$$

$$\therefore \frac{\triangle 0AB+\triangle 0BC+\triangle 0CD+\cdots}{\triangle 0'A'B'+\triangle 0'B'C'+\triangle 0'C'D'+\cdots}=\frac{a^2}{a'^2},$$

[143款VIII]

即チ

$$\frac{P}{P'}=\frac{a^2}{a'^2}.$$

**160. 系** 二圓ノ面積ノ比ハ其ノ半徑,又ハ徑ノ二乘比ニ等シ.

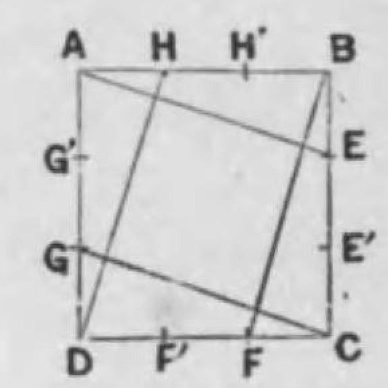


**例題 41.** 159 款ノ定理ニ於テ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{a'}{x}$ ナルトキハ $\dfrac{P}{P'}=\dfrac{a}{x}$ ナルコトヲ證セヨ.

**42.** 等積ナル二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ニ於テ $\hat{C}=\hat{C}'$ ナルトキハ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b'}{b}$ ナリ.

# 雜題

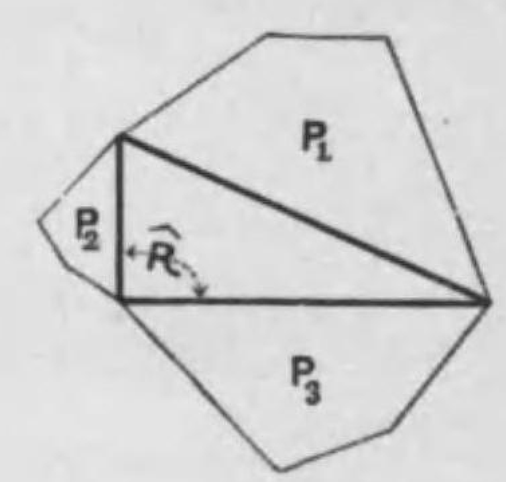
**43.** 正方形ABCDノ各邊ヲ圖ノ如クE, E′ F, F′, G, G′, H, H′ ニテ三等分シ, AE, BF, CG, DH ヲ結ビ付ケテ生ズル正方形ハ原形ノ五分ノ二ナルコトヲ證セヨ.




若シ AE′, BF′, CG′, DH′ ヲ結ビ付クレバ如何.

**44.** 三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB 上ニソレゾレ點 X, Y, Z ヲ取リ $\frac{BX}{XC}=\frac{CY}{YA}=\frac{AZ}{ZB}=\frac{2}{1}$ ナラシムルトキ △XYZ ト △ABC トノ比ヲ求メヨ.

**45.** 直角三角形ノ各邊上ニ相似多角形 $P_1, P_2, P_3$ ヲ畫キ直角三角形ノ邊ヲ對應邊ナラシムルトキハ斜邊上ノ多角形 $P_1$ ハ他ノ二ツノ多角形 $P_2, P_3$ ノ和ニ等シ. [ぴたごらす定理ノ擴張].




**46.** 二ツ或ハ三ツノ相似三角形ノ和ニ等シキ三角形ヲ作リ原形ト相似ナラシメヨ.

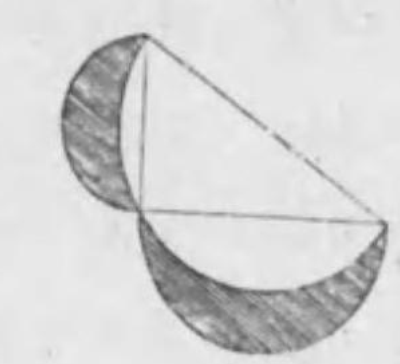


**47.** 既知形狀ノ三角形ノ一角頂ハ固定シ他ノ一角頂ハ一定圓周上ヲ運動スルトキ第三ノ角頂ノ軌跡如何.

三角形ハ其ノ三ツノ角ガ各一定ナルトキ **既知形狀** ナリト云フ. 一般ニ多角形ハ其ノ各角ガ一定シ且各邊ノ比ガ一定ナルトキ **既知形狀** ナリト云フ.

**48.** 既知角內ノ既知一點ヲ過リテ角ノ二邊ノ間ニ夾マルル直線ヲ引キ其ノ既知點ニテ分タレタル二部ヲシテ既知比ヲ有タシメヨ.

**49.** 直角三角形ノ直角傍ノ二邊上ニ之ヲ徑トシテ三角形外ニ半圓ヲ畫キ又斜邊上ニ之ヲ徑トシテ半圓ヲ三角形ト相重ネテ畫クトキ生ズル二ツノ三日月形ノ和ハ三角形ノ面積ニ等シ.

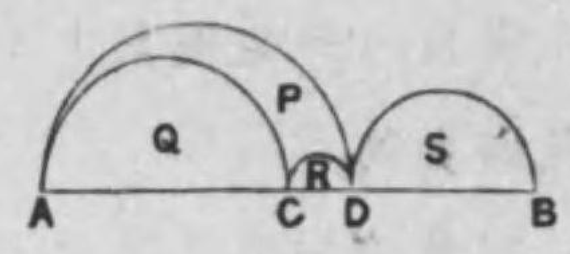


**50.** 三角形ABC內ノ任意ノ一點 O ヲ過リ A, B, C ヨリ三ツノ直線 AX, BY, CZ ヲ引キ對邊ニソレゾレ X, Y, Z ニ於テ交ラシムレバ

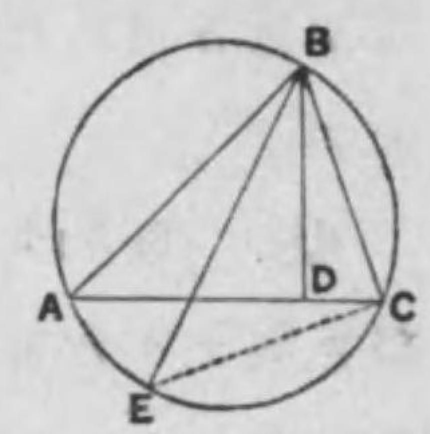
$$\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}=\frac{BX}{CX},$$ 等

ナルコトヲ證セヨ.

**51.**　分線 AB ヲ C ニ於テ二等分シ, D ニ於テ不等ニ二分シ圖ノ如ク半圓ヲ畫クトキハ　P+S=Q+R.




**52.**　三角形ノ任意ノ二邊ノ包ム矩形ハ第三邊ヘノ高サト外接圓ノ徑トノ包ム矩形ニ等シ.



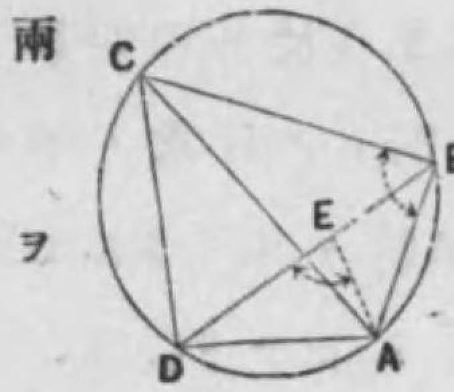

BD ハ AC ヘ垂線, BE ハ外接圓ノ徑トスルトキハ △ABD, △EBC ノ相似ナルコトヲ注意シテ證ス可シ.

**53.**　△ABC ノ外接圓ノ半徑ヲ R トスレバ $R=\frac{abc}{4\Delta}$, 但 $a, b, c$ ハ三邊, $\Delta$ ハ面積ヲ表ハス.

**54.**　甲乙丙三軒ノ家ヨリ等距離ノ所ニ井戸ヲ掘ラムトスルニ甲乙ハ 4 間, 乙丙ハ 13 間, 丙甲ハ 15 間ヲ隔ツルトキ各家ヨリ井戸マデノ距離如何.



**55.**　圓ニ內接スル四邊形ニ於テ兩對角線ノ包ム矩形ハ二組ノ兩對邊ノ包ム矩形ノ和ニ等シ.



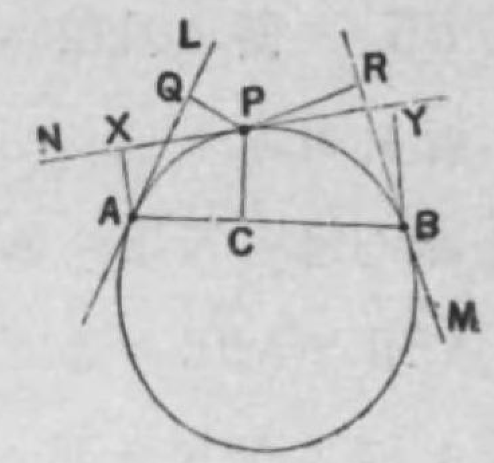

$\widehat{AED}$ ヲ $\widehat{ABC}$ ニ等シクシテ AE ヲ引キ以テ證ス可シ.

コレヲぷとれみー [*Ptolemy*, 西暦紀元 87 年生, 165 年死] ノ定理ト云フ.

**56.**　正三角形ノ外接圓周上ノ任意ノ點ヨリ最モ遠キ角頂マデノ距離ハ他ノ二角頂マデノ距離ノ和ニ等シ.

**57.**　圓ニ內接スル四邊形ノ兩對角線ガ互ニ直角ニ交ルトキハ二組ノ兩對邊ノ包ム矩形ノ和ハ四邊形ノ面積ノ二倍ニ等シ.

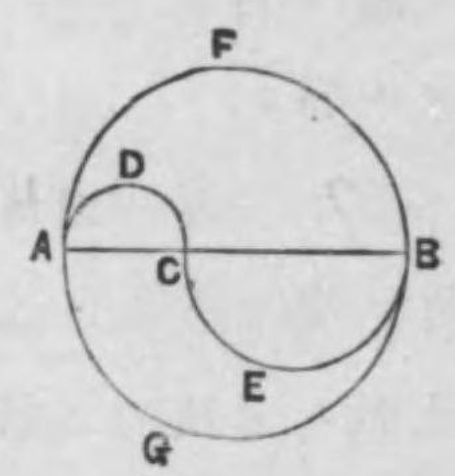
**58.** L,M ハ圓周上ノ定點A,B ニ於ケル切線トシ,N ハ弧AB 上ノ任意ノ點P ニ於ケル切線トス. AX, BY ハ N ニ垂線ニシテ PC, PQ, PR ハソレゾレ AB, L, M ニ垂線ナルトキ




(1) $AX.BY=\overline{PC}^2$, (2) $PQ.PR=\overline{PC}^2$,

ナルコトヲ證セヨ.

**59.** 圓ノ徑 AB 上ニ任意ノ一點 C ヲ取リ AC, BC ヲ徑トシテ圖ノ如ク半圓ヲ畫クトキ




$$\frac{\text{面積}AFBECD}{\text{面積}BECDAG}=\frac{BC}{AC}$$

ナルコトヲ證セヨ.

**60.** 前題ノ如クシテ圓ノ面積ヲ若干等分セヨ.

# 補習問題

## 附

幾何學ニ於ケル不能問題ノ一例

代數學ト幾何學トノ解法ノ比較