H.B.FINE

范氏大代數題解

莊 用 舟 編 演

$x+y=0$

世界書局發行

中華民國三十五年七月新六版
范氏大代數題解
實價國幣
外加運費匯費
編演者　莊用舟
發行人　李煜瀛
出版者　世界書局
發行所　世界書局
版權所有不准翻印

例　　言

一　本書係根據范氏大代數 (College Algebra By H. B. Fine) 教本習題所編之題解，每一習題均予以精確詳細之解答。

二　本書專供教師及學生於教授或演算時之參考。凡家居自修，預備應試，均可以本題解作爲幫助，但僅爲一般學生在演算困難，思索不得之際，作爲指導，倘完全照書直抄，以此依賴，放棄練習演算，實非編者向願。

三　本書每一習題，重提示，詳簡不一，凡採用世界版漢譯本及其他書局出版之漢譯本，本題解一概適用。

四　本書在每習題前，均註明原書頁碼，使讀者便於查閱（世界版譯本與原書頁碼同），其他如排式醒目，印刷清晰，校對謹嚴，務期臻於完善，惟編印匆促，脫誤之處，尤恐難免，希國內各專家和讀者教正。

目　次

第二編　代　數

范氏大代數題解

I. 緒　論

習　題　I

原本第 89 頁

1. 解：函數 $x^2yz^3+2x^5y^4z^6+3x^7y^2z^8$ 中，x 的方次爲 7，y 的方次爲 4，z 的方次爲 8. y 與 z 的方次共爲 10. x, y, z 的方次共爲 17.

2. 解：$(x+1)(2x^2+3)(x^4-7)$ 爲 7 次式.

3. 解：$n=7$，$a_0=3$，$a_1=1$，$a_2=0$，$a_3=-4$，$a_4=1$，$a_5=0$，$a_6=0$，$a_7=-12$.

4. 解：$f(0)=2(0)^3-(0)^2+3=3.$

$f(-1)=2(-1)^3-(-1)^2+3=-2-1+3=0.$

$f(3)=2\times 3^3-3^2+3=54-9+3=48.$

$f(8)=2\times 8^3-8^2+3=1024-64+3=963.$

5. 解：$f(0)=(0^2-3\times 0+2)/(2\times 0+5)=2/5.$

$f(-2)=\{(-2)^2-3(-2)+2\}/\{2(-2)+5\}$

$=\{4+6+2\}/\{-4+5\}=12.$

$f(6)=(6^2-3\times 6+2)/(2\times 6+5)$

$=(36-18+2)/(12+5)=20/17.$

6. 解：$f(1)=1+\sqrt{1}+3=5.$

$f(4)=4+\sqrt{4}+3=9.$

$f(5)=5+\sqrt{5}+3=8+\sqrt{5}.$

7. 解：$f(x-2)=2(x-2)+3=2x-4+3=2x-1.$

$f(x^2+1)=2(x^2+1)+3=2x^2+2+3=2x^2+5.$

8. 解：$f(0, 0)=0^3+0-0+8=8.$

$f(1,0)=1^3+1-0+8=10.$
$f(0,1)=0^3+0-1+8=7.$
$f(1,1)=1^3+1-1+8=9.$
$f(-2,-3)=(-2)^3+(-2)-(-3)+8$
$\quad=-8-2+3+8=1.$

II. 基 本 演 算

習 題 II

原本第97頁

1. 解：$4ax^2y+(-6ax^2y)+5bx^2y+(-3bx^2y)$
$=4ax^2y-6ax^2y+5bx^2y-3bx^2y$
$=-2ax^2y+2bx^2y=2x^2y(b-a).$

2. 解：$(7a^2+2a-b^2)+(3a+b^2-2a^2)+(b^2-4a-4a^2)$
$=(7-2-4)a^2+(2+3-4)a+(-1+1+1)b^2$
$=a^2+a+b^2.$

3. 解：$(3x^2-5x+6)+(x^2+2x-8)+(-4x^2+3x-7)$
$=(3+1-4)x^2+(-5+2+3)x+(6-8-7)=-9.$

4. 解：$(4a^3+a^2b-5b^3)+\left(\frac{5}{3}a^3-6ab^2-a^2b\right)+\left(\frac{1}{3}a^3+10b^3\right)$
$+(6b^3-15ab^2-4a^2b-10a^3)$
$=\left(4+\frac{5}{3}+\frac{1}{3}-10\right)a^3+(1-1-4)a^2b+(-6-15)ab^2$
$+(-5+10+6)b^3=-4a^3-4a^2b-21ab^2+11b^3.$

5. 解：$(3a+b-c)-(4a-2b+6c)=3a+b-c-4a+2b-6c$
$=-a+3b-7c.$

6. 解：$(x^3+6x^2+5)-(2x^2-5x+7)=x^3+6x^2+5-2x^2+5x-7$
$=x^3+4x^2+5x-2.$

7. 解：$(a^3+b^3)-(a^3+5a^2b)=a^3+b^3-a^3-5a^2b=b(b^2-5a^2).$

8. 解：$(x^3+y^3-6x+5y)-\{(-2x^2-6x+7y-8)$
$+(x^3+2x^2-5y+9)\}$
$=x^3+y^3-6x+5y-\{x^3-6x+2y+1\}$
$=x^3+y^3-6x+5y-x^3+6x-2y-1=y^3+3y-1.$

9. 解: $-(a+b)+\{-a-(2a-b)\}-6(a-4b)$
$=-a-b-a-2a+b-6a+24b=-10a+24b.$

10. 解: $6x-\{4x+[2x-(3x+\overline{5x+7}-1)+3]-8\}$
$=6x-4x-[2x-(3x+\overline{5x+7}-1)+3]+8$
$=2x-2x+(3x+\overline{5x+7}-1)-3+8$
$=3x+5x+7-1-3+8=8x+11.$

11. 解: $2a-[4a-c+\{3a-(4b-c)-(b+3c)\}-6c]$
$=2a-[4a-c+\{3a-4b+c-b-3c\}-6c]$
$=2a-[4a-c+3a-4b+c-b-3c-6c]$
$=2a-4a+c-3a+4b-c+b+3c+6c=-5a+5b+9c.$

12. 解: $z-[3x+(y+5z)]-[x-(3y+2z)]$
$=z-3x-y-5z-x+3y+2z=2y-4x-2z.$

13. 解: $x^3-7-(x^2+8x+5)=x^3-7-x^2-8x-5$
$=x^3-x^2-8x-12.$

14. 解: $y^2+x-7-(x^4-9x^2+3y)=y^2+x-7-x^4+9x^2-3y$
$=y^2-3y-x^4+9x^2+x-7.$

習　題　III

原本第 106 頁

1. 解:

$$\begin{array}{r}
3-\ 2-1+7-6+5 \\
\underline{2-\ 3+1} \\
6-\ 4-2+14-12+10 \\
-\ 9+6+\ 3-21+18-15 \\
3-\ 2-\ 1+\ 7-\ 6+5 \\
\hline
6-13+7+15-34+35-21+5
\end{array}$$

答: $6x^7-13x^6+7x^5+15x^4-34x^3+35x^2-21x+5.$

2. 解:

$$\begin{array}{r}
5-3+\ 2+1 \\
\underline{3-1-\ 2} \\
15-9+\ 6+3 \\
-5+\ 3-2-1 \\
-10+6-4-2 \\
\hline
15-14-1+7-5-2
\end{array}$$

答：$15x^5-14ax^4-a^2x^3+7a^3x^2-5a^4x-2a^5$.

3\. 解：

$$\begin{array}{l}
1-1+1-1+1-1\\
1+1\\
\hline
1-1+1-1+1-1\\
\quad\;\; 1-1+1-1+1-1\\
\hline
1+0+0+0+0+0-1
\end{array}$$

答：x^6-y^6.

4\. 解：

$$\begin{array}{l}
3-2+0+7\\
2+0-3+5\\
\hline
6-4+0+14\\
\qquad -9+6+0-21\\
\qquad\qquad\quad 15-10+0+35\\
\hline
6-4-9+35-10-21+35
\end{array}$$

答：$6x^6-4x^5-9x^4+35x^3-10x^2-21x+35$.

5\. 解：$(7x-2y)(4x-5y)=28x^2-43xy+10y^2$.

6\. 解：$(a^2-ax+bx-x^2)(b+x)$

$=(a^2-ax)(b+x)+(bx-x^2)(b+x)$

$=a^2b-abx+a^2x-ax^2+b^2x-x^3$

$=a^2b+(a^2-ab+b^2)x-ax^2-x^3$.

7\. 解：

$$\begin{array}{l}
1-1+5-2\\
1-1+3\\
\hline
1-1+5-2\\
\quad -1+1-5+2\\
\qquad\quad 3-3+15-6\\
\hline
1-2+9-10+17-6
\end{array}$$

答：$x^6-2x^5+9x^4-10x^3+17x^2-6x$.

8\. 解：

$$\begin{array}{l}
2+0-3+5\\
1-1\\
\hline
2+0-3+5\\
\quad -2+0+3-5\\
\hline
2-2-3+8-5
\end{array}$$

答：$2x^{2n-2}-2x^{2n-3}-3x^{2n-4}+3x^{2n-5}-5x^{2n-6}$.

9. 解：$(a^2-ab+3b^2)(a^2+ab-3b^2)=a^4-(ab-3b^2)^2$
$=a^4-a^2b^2+6ab^3-9b^4$。

10. 解：$(x+3y-2z)(x-3y+2z)=x^2-(3y-2z)^2$
$=x^2-9y^2+12yz-4z^2$.

11. 解：$(x^2+xy+y^2+x-y+1)(x-y-1)$
$=[(x^2+xy+y^2)+(x-y)+1][(x-y)-1]$
$=(x^2+xy+y^2)(x-y)-(x^2+xy+y^2)+(x-y)^2-1$
$=x^3-y^3-x^2-xy-y^2+x^2-2xy+y^2-1$
$=x^3-y^3-3xy-1$.

12. 解：$(a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab)(a+b-c)$
$=[a(a-b+c)+(b^2+bc+c^2)][a+(b-c)]$
$=a[a^2-(b-c)^2]+a(b^2+bc+c^2)+(b^2+bc+c^2)(b-c)$
$=a^3-ab^2+2abc-ac^2+ab^2+abc+ac^2+b^3-c^3$
$=a^3+b^3-c^3+3abc$.

13. 解：$(3x-2y+5)(x-4y+6)$
$=3x^2-(3\times4+2\times1)xy+8y^2+(3\times6+5\times1)x$
$-(2\times6+5\times4)y+30$
$=3x^2-14xy+8y^2+23x-32y+30$.

14. 解：$(x+7y-3z)(2x+y-8z)$
$=2x^2+(1+14)xy+7y^2-(6+8)xz-(3+56)yz+24z^2$
$=2x^2+15xy+7y^2-14xz-59yz+24z^2$.

15. 解：$(b+x)(b-x)(b^2+x^2)=(b^2-x^2)(b^2+x^2)=b^4-x^4$.

16. 解：$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$
$=[(x^2+1)^2-x^2][x^4-x^2+1]=[x^4+x^2+1][x^4-x^2+1]$
$=[(x^4+1)^2-x^4]=x^8+x^4+1$.

17. 解：$(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$
$=[(y+z)^2-x^2][x^2-(y-z)^2]$
$=-x^4+[(y+z)^2+(y-z)^2]x^2-(y+z)^2(y-z)^2$
$=-x^4+(2y^2+2z^2)x^2-(y^2-z^2)^2$
$=-x^4+2y^2x^2+2z^2x^2-y^4+2y^2z^2-z^4$
$=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$.

18. 解：x^2+x+1 前四冪之係數爲：$1+1+1$, $1+2+3+2+1$, $1+3+6+7+6+3+1$ 及 $1+4+10+16+19+16+10+4+1$.

19. 解：依 § 312 之方法，得：

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\quad 1 \\ 1\quad 2\quad 1 \\ 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\ 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\ 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\ 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1 \\ 1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1 \\ 1\quad 8\quad 28\quad 56\quad 70\quad 56\quad 28\quad 8\quad 1 \\ 1\quad 9\quad 36\quad 84\quad 126\quad 126\quad 84\quad 36\quad 9\quad 1 \\ 1\quad 10\quad 45\quad 120\quad 210\quad 252\quad 210\quad 120\quad 45\quad 10\quad 1 \end{array}$$

20. 解：$(4x-3y)^2=(4x)^2+2(4x)(-3y)+(-3y)^2$

$=16x^2-24xy+9y^2.$

$(4x-3y)^3$

$=(4x)^3+3(4x)^2(-3y)+3(4x)(-3y)^2+(-3y)^3$

$=64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3.$

21. 解：$(x+2y+3z-4u)^2=[(x+2y)+(3z-4u)]^2$

$=(x+2y)^2+2(x+2y)(3z-4u)+(3z-4u)^2$

$=x^2+4xy+4y^2+6xz+12yz-8xu-16yu$

$+9z^2-24zu+16u^2.$

22. 解：$(x+2y+3z)^3=[(x+2y)+3z]^3$

$=(x+2y)^3+3(x+2y)^2(3z)+3(x+2y)(3z)^2+(3z)^3$

$=x^3+3x^2(2y)+3x(2y)^2+(2y)^3+3(x^2+4xy+4y^2)(3z)$

$+3(x+2y)(9z^2)+27z^3$

$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3+9x^2z+36xyz+36y^2z$

$+27xz^2+54yz^2+27z^3.$

$(x+2y-3z)^3=[(x+2y)-3z]^3$

$=(x+2y)^3-3(x+2y)^2(3z)+3(x+2y)(3z)^2-(3z)^3$

$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3-9x^2z-36xyz-36y^2z$

$+27xz^2+54yz^2-27z^5.$

23. 解：$(a+2b)^2(a-2b)^2=\{a^2-4b^2\}^2=a^4-8a^2b^2+16b^4.$

24. 解：此乘積之方次爲 $27+19=46$ 及 $46-29=17$.

故 x^{29} 之係數爲 $a_0b_{17}+a_1b_{16}+\cdots\cdots+a_{16}b_1+a_{17}b_0$.

又 $46-15=31$ 及 $31-19=12$.
故 x^{15} 之係數爲 $a_{12}b_{19}+a_{13}b_{18}+\cdots\cdots+a_{27}b_4$.

25. 解: x^6 之係數爲 $2(-8)+3(-3)+4\times 2+(-7)(-1)+2\times 3+(-5)0=-16-9+8+7+6+0=-4$.
x^8 之係數爲 $0(-8)+0\times 3+2\times 2+(-3)(-1)+4\times 0+(-7)3+2\times 0+(-5)0=0+0+4+3+0-21+0+0=-14$.
x^4 之係數爲 $4(-8)+(-7)3+0\times 2+2(-1)+(-5)\times 0=-32-21+0-2+0=-55$.

26. 解: 1. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$
$=(x+y)^3+3z(x+y)^2+3z^2(x+y)+z^3-x^3-y^3-z^3$
$=3xy(x+y)+3z(x+y)^2+3z^2(x+y)$
$=3(x+y)[xy+z(x+y)+z^2]$
$=3(x+y)(y+z)(z+x)$.

2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2$
$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+b^2x^2-2abxy+a^2y^2$
$=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.

3. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=a^2x^2+b^2y^2-b^2x^2-a^2y^2$
$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2-b^2x^2-2abxy-a^2y^2$
$=(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.

4. $(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$
$=a^3+3a^2(b+c)+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$
$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)+6abc$.

27. 解: $(2a^2x^3y^7)^5=32a^{10}x^{15}y^{35}$.
$(-x^5y^8z^9)^7=-x^{35}y^{56}z^{63}$.
$(a^2b^mc^3)^{2n}=a^{4n}b^{2mn}c^{6n}$.
$(a^mb^nc^{2n})^n=a^{mn}b^{n^2}c^{2n^2}$.

28. 解: $(-ab^2c^3)(a^3b)^2(-ac^3)^5=(-ab^2c^3)(a^6b^2)(-a^5c^{15})$
$=a^{12}b^4c^{18}$.
$(-2x^2y^4)^3(ax^5y^{11})^2=(-8x^6y^{12})(a^2x^{10}y^{22})$
$=-8a^2x^{16}y^{34}$.

習 題 IV

原本第110頁

1. 解: $15a^3bc^3/10ab^2c^3=3a^2/2b$.

2. 解: $75x^2y^4z^{10}/-100ax^7z^9=-3y^4z/4ax^5$.

3. 解: $-35x^{2m}y^m/28x^my^{m+n}=-5x^m/4y^n$.

4. 解: $-54\{(ab^2)^2c\}^5/-18\{a(b^2c)^2\}^3$

$=-54a^{10}b^{20}c^5/-18a^3b^{12}c^6=3a^7b^8/c$.

5. 解: $\dfrac{x^2y-xy^2}{x^2-y^2}=\dfrac{xy(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{xy}{x+y}$.

6. 解: $\dfrac{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}$

$=\dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}$

$=(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

7. 解: $\dfrac{(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}{(b-a)\ (c-b)^2(a-c)^3}$

$=\dfrac{(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}{-(a-b)(b-c)^2[-(c-a)^3]}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$.

8. 解: $\dfrac{30a^2b^3c^4-25a^3b^2c^5+20a^4b^4c^7}{-5ab^2c^3}$

$=-6abc+5a^2c^2-4a^3b^2c^4$.

9. 解: $\dfrac{3(y-x)^4-2(x-y)^3+5(x-y)^2}{(y-x)^2}$

$=\dfrac{(x-y)^2[3(x-y)^2-2(x-y)+5]}{(x-y)^2}$

$=3(x-y)^2-2(x-y)+5$.

10. 解: $4a^7\times(3ab^3c^2)^2\div(abc)^2\div6bc$

$=4a^7\times9a^2b^6c^4\div a^2b^2c^2\div6bc=6a^7b^3c$.

11. 解: (1) $a^7\div\{a^5\div(a^4\div a^2\times a)\times(a^3\times a\div a^2)\}$

$=a^7\div\{a^5\div a^3\times a^2\}$

$=a^7\div a^4=a^3$.

(2) $a^7\div\{a^5\div(a^4\div a^2\times a)\times(a^3\times a\div a^2)\}$

$=a^7\div\{a^5\div a^4\times a^2\div a\times a^2\times a\div a^3\}$

$$=a^7\div a^5\times a^4\div a^2\times a\div a^8\div a\times a^2$$
$$=a^8.$$

12. 解： $\dfrac{-4a^2(x^3y^2)^2}{2a(x^2y^3)^2}=\dfrac{-4a^2x^6y^4}{2ax^4y^6}=-\dfrac{2ax^2}{y^2}.$

III. 一元一次方程

習　題　V

原本第 119 頁

1. 解： $15-7+5x=2x+5-3x$
$$8+5x=5-x$$
$$6x=-3$$
$$\therefore\quad x=-\tfrac{1}{2}.$$

2. 解： $x^2+3x-4x^2+20x=15x-3x^2-16$
$$-3x^2+23x=15x-3x^2-16$$
$$8x=-16$$
$$\therefore\quad x=-2.$$

3. 解： $x^2+3x+2-x^2-7x-12=0$
$$-4x=10$$
$$\therefore\quad x=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}.$$

4. 解： $x-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{8}-\dfrac{x}{16}=1$
$$\frac{x}{16}=1$$
$$\therefore\quad x=16.$$

5. 解： $x-2[x-3x-12-5]=3\{2x-[x-8x+32]\}-2$
$$x-2x+6x+24+10=6x-3x+24x-96-2$$
$$22x=132$$
$$\therefore\quad x=6.$$

6. 解： $2\{3[20x-4-8]-20\}-7=1$
$$2\{60x-36-20\}-7=1$$
$$120x-112-7=1$$

$$120x=120$$

$$\therefore \quad x=1.$$

7. 解: $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{20}x-\frac{1}{4}-6\right]+4\right\}=1$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{60}x-\frac{1}{12}-2+4\right\}=1$$

$$\frac{1}{120}x-\frac{1}{24}+1=1$$

$$\frac{1}{120}x=\frac{1}{24}$$

$$\therefore \quad x=5.$$

8. 解: $\frac{15-5+2x}{5}=\frac{40-4+7x+5x+10}{10}$

$$30-10+4x=40-4+7x+5x+10$$

$$8x=-26$$

$$\therefore \quad x=-\frac{13}{4}.$$

9. 解: $\frac{3x-1+9}{3}=\frac{-2x+8+9x+15-30}{12}$

$$12x+32=7x-7$$

$$5x=-39$$

$$\therefore \quad x=-\frac{39}{5}.$$

10. 解: $\frac{10x-.8+.39x-.015}{.6}=\frac{13.95-8x}{1.2}$

$$20x-1.6+.78x-.03=13.95-8x$$

$$28.78x=15.53$$

$$\therefore \quad x=\frac{1558}{2878}=\frac{779}{1439}.$$

11. 解: $3cx-5a+b-2c=6b-a-3bx-2c$

$$3cx+3bx=5b+4a$$

$$\therefore \quad x=\frac{5b+4a}{3(c+b)}.$$

12. 解: 原式 $=ab-ax-bx+cx+bc-ab-cx+ax+ac-bc$

$$-ax+bx=1-x$$

$$1-x=0$$
$$\therefore \quad x=1.$$

13. 答: $x=a.$

14. 解: $(x+1)(a-b)+(x-1)(a+b)=2c$

$ax+a-bx-b+ax-a+bx-b=2a$

$2ax-2b=2a$

$$\therefore \quad x=\frac{a+b}{a}.$$

15. 解: $\left(\frac{m^2+n^2}{mn}\right)x=\frac{m^2-n^2}{mn}-\frac{2mnx}{mn}$

$x\left(\frac{m^2+n^2+2mn}{mn}\right)=\frac{m^2-n^2}{mn}$

$x(m+n)^2=(m+n)(m-n)$

$$\therefore \quad x=\frac{m-n}{m+n}.$$

16. 解: $2x-1=0,\ 3x-1=0,\ 4x+1=0,\ 5x+2=0$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{2}{5}.$$

17. 解: $(x^2-x)(2x-5-x-9)=0$

$x(x-1)(x-14)=0$

$\therefore \quad x=0,\ 1,\ 14.$

18. 解: $x^3+6x^2+12x+8-x^3+6x^2-12x+8=32x+16$

$12x^2-32x=0$

$x(12x-32)=0$

$$\therefore \quad x=0,\ 2\frac{2}{3}.$$

19. 解: $[ax+bx-c]^2=[ax-bx+c]^2$

$ax+bx-c=\pm(ax-bx+c)$

$ax+bx-c=ax-bx+c,$

$ax+bx-c=-ax+bx-c$

$$\therefore \quad x=\frac{c}{b},\ x=0.$$

20. 解: $(x-1)^4-(x-1)^2(x-3)^2=0$

$(x-1)^2[(x-1)^2-(x-3)^2]=0$

$$(x-1)^2(x^2-2x+1-x^2+6x-9)=0$$
$$(x-1)^2=0,\ 4x-8=0$$
$$\therefore\quad x=1,\ 1,\ 2.$$

習 題 VI

原本第 124 頁

1. 解: 設 x=十位數字, $14-x$=個位數字。

$$10x+(14-x)=10(14-x)+x-18$$
$$10x+14-x=140-10x+x-18$$
$$18x=108$$
$$\therefore\quad x=6,$$
$$14-x=8.$$

答: 某數爲 68.

2. 解: 設 x 爲除數.

$$156=11x+2$$
$$11x=154$$
$$\therefore\quad x=14.$$

3. 解: 設 x 爲小數, $x+298$ 爲大數.

$$x+298=12x+12$$
$$11x=286$$
$$\therefore\quad x=26,$$
$$x+298=324.$$

4. 解: 設 x 爲個位數字, $2x$ 爲十位數字。

$$(1+2x)10+(5+x)=3[10(x-1)+(2x-5)]$$
$$10+20x+5+x=30x-30+6x-15$$
$$15x=60$$
$$\therefore\quad x=4,$$
$$2x=8.$$

答: 該數爲 84.

5. 解: 設 x 爲某數.

$$4(x-2)=2x+\frac{1}{2}(x-1)$$
$$\therefore\quad x=5.$$

6. 解：設 x 爲子現年，$4x$ 爲父現年。

$$4x+20=2(x+20)$$

$$\therefore \quad x=10 \text{（子現年）},$$

$$4x=40 \text{（父現年）}.$$

設 y 年後父年爲子年之三倍。

$$40+y=3(10+y)$$

$$\therefore \quad y=5 \text{ 年}.$$

答：5 年後，父年爲子年之三倍。

7. 解：設 x 小時後，池中水方能洩盡，故一小時內放去池水 $\frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

$$\therefore \quad x=\frac{12}{5}=2.4 \text{ 小時，即二時二十四分}.$$

8. 解：設 x 與 y 各爲 A 與 B 獨作所需之日數，故 $\frac{1}{x}$ 與 $\frac{1}{y}$ 各爲 A 與 B 每日所作之工程。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}\cdots\cdots(1)$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)7+\frac{5}{y}=1\cdots\cdots(2)$$

$$\therefore \quad x=25 \text{ 日}, y=\frac{50}{3}=16\frac{2}{3} \text{ 日}.$$

9. 解：設 x 爲二針在同一方向時之分數，y 爲二針成相反方向時之分數。

$$x=40+\frac{x}{12}, \quad y=40+\frac{y}{12}-30$$

$$\therefore \quad x=43\frac{7}{11} \text{ 分}, y=10\frac{10}{11} \text{ 分}.$$

答：8 時 $43\frac{7}{11}$ 分二針成同一方向，8 時 $10\frac{10}{11}$ 分二針成相反方向。

10. 解：設 x 爲所求之分數。

$$x=20+\frac{x}{12}\pm 15$$

$$\therefore\quad x=5\frac{5}{11}\text{ 分 及 }38\frac{2}{11}\text{ 分}.$$

答：4 時 $5\frac{5}{11}$ 分及 4 時 $38\frac{2}{11}$ 分時二針成直角。

11. 解：設 x 爲時針與分針連續相重二次間之正確分數。

$$x=60+\frac{x}{12}$$

$$\therefore\quad x=65\text{ 分 }27\text{ 秒}.$$

答：每小時之錯誤爲

$$\frac{(66'-65'27'')60'}{65'27''}=30\text{ 秒}.$$

12. 解：設 x 爲 A 所得之洋數。

$$x+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x=1300$$

$$\therefore\quad x=540\text{ 元 }(A\text{ 所得}).$$

答：A, B, C, D 所得各爲 540 元，360 元，240 元，160 元。

13. 解：設 x 爲財產總數。

$$\left(\frac{x}{2}+1000\right)+\left[\frac{x-(\frac{x}{2}+1000)}{2}+1000\right]$$

$$-\left[\frac{x-\left\{\left(\frac{x}{2}+1000\right)+\left[\frac{x-(\frac{x}{2}+1000)}{2}+1000\right]\right\}}{2}+1000\right]$$

$$+3500=x$$

$$\therefore\quad x=42000\text{ 元}$$

14. 解：設 x 爲正方形之邊長。

$$x^2+100=(x+2)^2=x^2+4x+4$$

$$\therefore\quad x=24\text{ 呎},\ x^2=576\text{ 方呎}.$$

答：面積爲 576 方呎。

15. 解：設 x 爲竿長。

$$(x+2)^2=x^2+\overline{18}^2\qquad\therefore\quad x=80\text{ 呎}.$$

16. 解：設 x 爲金圓之數。

$$x+0.5(2x)+0.1(3x)=11.5$$

$$\therefore \quad x=5.$$

答：袋中有一圓者五個，半圓者十個，一角者十五個。

17. 解：設利率 6% 之存款為 x 元。

$$\frac{6}{100}x+\frac{4}{100}(5000-x)=\frac{5.5}{100}\times 5000$$

$$\therefore \quad x=3750\text{ 元}, \ 5000-x=1250\text{ 元}.$$

答：利率 4% 之存款為 1250 元，6% 之存款為 3750 元。

18. 解：設 $x:1$ 為所求之比例。

$$20x+30=26(1+x)$$

$$\therefore \quad x=\frac{2}{3}.$$

答：二種咖啡以 2 : 3 混合始成每磅價 26 分。

19. 解：設 x 為所加之銅量。

$$\frac{3}{5}+x=\frac{7(x+1)}{3+7}$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}\text{ 磅}.$$

20. 解：設 x 為第一次所加之水量。

$$\frac{30}{100}(x+1)=\frac{20}{100}(2x+1)$$

$$\therefore \quad x=1, \ \frac{30}{100}(x+1)=60\%.$$

答：第一次加水一磅，第二次加水二磅，酒精在原液體中佔 60%.

21. 解：設一火車自 A 站開出 x 小時後，兩車相遇。

$$45x+50\left(x-\frac{30}{60}\right)=90$$

$$\therefore \quad x=1\frac{4}{19}\text{ 時}=1\text{ 時 }12\frac{12}{19}\text{ 分},$$

$$50\left(x-\frac{30}{60}\right)=35\frac{10}{19}\text{ 哩}.$$

答：11 時 $12\frac{12}{19}$ 分兩車相遇，距 B 站 $35\frac{10}{19}$ 哩。

22\. 解：設 x 爲快車之速率。

$$\frac{45}{\frac{3}{5}x}=\frac{45}{x}+0.5$$

$$\therefore\quad x=60\text{ 哩/時},\ \frac{3}{5}x=36\text{ 哩/時},$$

$$\frac{45}{60}+0.5+10=11\frac{15}{60}\text{ 時。}$$

答：快車之速率爲每小時 60 哩；慢車 36 哩；二車相遇之時間爲 11 時 15 分。

23\. 解：設兔再行 x 步後爲狐追及。

$$x+50=\frac{4}{5}x\times\frac{3}{2}=\frac{6}{5}x$$

$$\therefore\quad x=250\text{ 步。}$$

24\. 解：設合金內含金 x 兩，故含銀 $(387-x)$ 兩。

$$x\times\frac{19-18}{19}+(387-x)\times\frac{10-9}{10}=387-351$$

$$\therefore\quad x=57\text{ 兩},\quad 387-x=330\text{ 兩(銀)}$$

25\. 解：設 x 爲此人所帶之洋數。

$$x=\left(\frac{x}{2}+2\right)+\left\{\frac{x-\left(\frac{x}{2}+2\right)}{2}+2\right\}$$

$$+\left\{\frac{x-\left[\left(\frac{x}{2}+2\right)+\left(\frac{x-(\frac{x}{2}+2)}{2}+2\right)\right]}{2}+2\right\}$$

$$\therefore\quad x=28\text{ 元.}$$

26\. 解：設 x 爲底邊或高之長。

$$4\left(\frac{x^2}{2}\right)+x^2+117=4\left[\frac{(x+3)^2}{2}\right]+(x+3)^2$$

$$\therefore\quad x=5\text{ 吋},$$

$$4\left(\frac{x^2}{2}\right)+x^2=75\text{ 方吋。}$$

27\. 解：設 x 爲個位數字，$a-x$ 爲十位數字，則

$$10(a-x)+x=10x+(a-x)+b$$

$$\therefore\quad x=\frac{9a+b}{18},\ a-x=\frac{9a-b}{18}.$$

因數字必須爲正整數，故 $9a$ 須 $\geqq b$，且 $9a+b$ 及 $9a-b$ 必須被 18 除盡。

28. 解：設距今 x 年時，A 年爲 B 年之 c 倍。

$$a+x=c(b+x)=cb+cx$$

$$\therefore\quad x=\frac{a-cb}{c-1}.$$

1. 如 $a>b$，則 c 必須大於 1，否則 $x=\dfrac{a-cb}{c-1}<\dfrac{a-ca}{c-1}=-a<-b$，此時在 A, B 未生以前，故不合理。
2. 如 $a<b$，則 c 必須小於 1，否則 $x=\dfrac{a-cb}{c-1}<\dfrac{b-cb}{c-1}=-b<-a$，此時也在 A, B 未生以前，故不合理。
3. 如 $a=b$，則 c 必須等於 1，否則 $x<-a=-b$，故不可能。

IV. 聯立一次方程系

習　　題　　VII

原本第 134 頁

1. 解：
$$\begin{cases}x+y=62 & \cdots\cdots(1)\\ x-y=12 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(1)+(2)，得　$2x=74$

$$\therefore\quad x=37.$$

$$\therefore\quad y=62-x=25.$$

2. 解：
$$\begin{cases}6x-5y=25 & \cdots\cdots(1)\\ 4x-3y=19 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$2\times(1)$，　$12x-10y=50\cdots\cdots(3)$

$3\times(2)$，　$12x-9y=57\cdots\cdots(4)$

$(4)-(3)$，　$y=7.$

$$\therefore\quad x=\frac{19+3y}{4}=1($$

3. 解：$\begin{cases} 45x-13y=161 & \cdots\cdots(1) \\ 18x+11y=32 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$2\times(1)$, $90x-26y=322 \cdots\cdots(3)$

$5\times(2)$, $90x+55y=160 \cdots\cdots(4)$

$(3)-(4)$, $-81y=162$

$\therefore\quad y=-2.$

$\therefore\quad x=\dfrac{32-11y}{18}=3.$

4. 解：$\begin{cases} x-3=7-x & \cdots\cdots(1) \\ 8x-3y-61=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式，$2y=10\quad\therefore\quad x=5.$

代入 (2) 式，$40-3y-61=0$

$3y=-21\quad\therefore\quad y=-7.$

5. 解：$\begin{cases} 12x=9-10y & \cdots\cdots(1) \\ 8y=7-9x & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式，$x=\dfrac{9-10y}{12}$

代入 (2) 式，$8y=7-9\times\dfrac{9-10y}{12}=\dfrac{28-27+30y}{4}$

$32y=1+30y$

$2y=1\quad\therefore\quad y=\dfrac{1}{2}.$

$\therefore\quad x=\dfrac{9-10y}{12}=\dfrac{1}{3}.$

6. 解：$\begin{cases} 2y-3x=0 & \cdots\cdots(1) \\ 5x-3y-2=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式，$y=\dfrac{3x}{2}$

代入 (2) 式，$5x-3\times\dfrac{3x}{2}=2$

$\therefore\quad x=4.$

$\therefore\quad y=\dfrac{3x}{2}=6.$

7\. 解: $\begin{cases} x/0.3+53=3\frac{1}{2} & \cdots\cdots(1) \\ 5x+3y=1.65 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$1.5\times(1)$, 得 $\quad 5x+7.5y=5.25 \cdots\cdots(3)$

$(3)-(2)$, $\quad 4.5y=3.6$

$$\therefore \quad y=0.8.$$

從 (2) 式, $\quad x=\dfrac{1.65-3y}{5}=-0.15.$

8\. 解: $\begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-3y)+10 & \cdots\cdots(1) \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式, $\quad 4x+6y=6x-9y+10$

$$2x-15y=-10 \cdots\cdots(3)$$

從 (2) 式, $\quad 4x-3y=24y-8x+3$

$$4x-9y=1 \cdots\cdots(4)$$

$2\times(3)-(4)$, $\quad -21y=-21 \quad \therefore \quad y=1.$

代入 (3) 式, $\quad 2x=15y-10=5 \quad \therefore \quad x=\dfrac{5}{2}.$

9\. 解: $\begin{cases} (x+2)(y+1)=(x-5)(y-1) & \cdots\cdots(1) \\ x(4+y)=-y(8-x) & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式, $xy+2y+x+2=xy-5y-x+5$

$$2x+7y=3 \cdots\cdots(3)$$

從 (2) 式, $\quad 4x+xy=-8y+xy$

$$x=-2y \cdots\cdots(4)$$

代入 (3) 式, $\quad -4y+7y=3$

$$3y=3 \quad \therefore \quad y=1.$$

$$\therefore \quad x=-2y=-2.$$

10\. 解: $\begin{cases} ax+by=a^2+2a+b^2 & \cdots\cdots(1) \\ bx+ay=a^2+2b+b^2 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)-(2)$, $\quad ax-bx+by-ay=2(a-b)$

$$(a-b)(x-y)=2(a-b)$$

$$x-y=2$$

$$x=2+y \cdots\cdots(3)$$

代入 (1) 式, $\quad a(2+y)+by=a^2+2a+b^2$

$$2a+y(a+b)=a^2+2a+b^2$$

$$\therefore \quad y=\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

$$\therefore \quad x=2+y=2+\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

11. 解: $\begin{cases} ax+by=c & \cdots\cdots(1) \\ px=qy & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式, $x=\frac{qy}{p}$

代入 (1) 式, $a\left(\frac{qy}{p}\right)+by=c$

$$aqy+bpy=pc$$

$$\therefore \quad y=\frac{pc}{aq+bp}.$$

$$\therefore \quad x=\frac{qy}{q}=\frac{qc}{aq+bp}.$$

12. 解: $\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2) & \cdots\cdots(1) \\ (a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2) & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) − (2), $-2bx+2by=-4b^2$

$x-y=2b \quad \cdots\cdots(3)$

(1) + (2), $2ax+2ay=4a^2$

$x+y=2a \quad \cdots\cdots(4)$

(3) + (4), $2x=2a+2b$

$$\therefore \quad x=a+b.$$

$$\therefore \quad y=x-2b=a-b.$$

13. 解: $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+\frac{y-x}{2}=5 & \cdots\cdots(1) \\ \frac{x}{2}+\frac{x+y}{9}=7 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式, $2x+2y+3y-3x=30 \quad \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式, $9x+2x+2y=126 \quad \cdots\cdots(4)$

從 (3) 式, $5y-x=30 \quad \cdots\cdots(5)$

從 (4) 式, $11x+2y=126 \quad \cdots\cdots(6)$

11 × (5), $55y-11x=330 \quad \cdots\cdots(7)$

(6) + (7), $57y=456$

$\therefore\quad y=8.$

$\therefore\quad x=5y-30=10.$

14. 解：$\begin{cases}\dfrac{x-y}{4}-\dfrac{x+2y-5}{6}=\dfrac{y-3}{4}-\dfrac{y+2x-5}{6} & \cdots\cdots(1)\\ 5x-2y+6=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1) 式，　$3x-3y-2x-4y+10=3y-9-2y-4x+10$

$$5x-8y+9=0 \cdots\cdots(3)$$

(2) − (3),　$6y-3=0$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-6+2y}{5}=-1.$$

15. 解：$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{c} & \cdots\cdots(1)\\ \dfrac{x}{a'}-\dfrac{y}{b'}=\dfrac{1}{c} & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

$\frac{1}{b'}\times(1)$,　$\dfrac{x}{ab'}+\dfrac{y}{bb'}=-\dfrac{1}{b'c}$ $\cdots\cdots(3)$

$\frac{1}{b}\times(2)$,　$\dfrac{x}{a'b}-\dfrac{y}{bb'}=\dfrac{1}{bc'}$ $\cdots\cdots(4)$

(3) + (4),　$x\left[\dfrac{a'b+ab'}{aa'bb'}\right]=\dfrac{bc'+b'c}{bb'cc'}$

$$\therefore\quad x=\frac{(bc'+b'c)aa'}{(a'b+ab')cc'}.$$

$\frac{1}{a'}\times(1)$,　$\dfrac{x}{aa'}+\dfrac{y}{a'b}=\dfrac{1}{a'c}$ $\cdots\cdots(5)$

$\frac{1}{a}\times(2)$　$\dfrac{x}{aa'}-\dfrac{y}{ab'}=\dfrac{1}{ac'}$ $\cdots\cdots(6)$

(5) − (6),　$y\left[\dfrac{ab'+a'b}{aa'bb'}\right]=\dfrac{ac'-a'c}{aa'cc'}$

$$\therefore\quad y=\frac{(ac'-a'c)bb'}{(ab'+a'b)cc'}.$$

16. 解: $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1+x & \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1+y & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)－(2)， $\left[\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right]x-\left[\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right]y=x-y.$

$$(x-y)\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]=x-y$$

$$(x-y)\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-1\right]=0$$

$$x=y \cdots\cdots(3)$$

代入 (1) 式， $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}=1+x$

$$x\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-1\right]=1$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{\dfrac{a+b-ab}{ab}}=\frac{ab}{a+b-ab}.$$

從 (3) 式， $y=\dfrac{ab}{a+b-ab}.$

17. 解: $\begin{cases} 1\dfrac{1}{2}x-2\dfrac{1}{2}y=10 & \cdots\cdots(1) \\ 6x-10y=15 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式， $3x-5y=20 \cdots\cdots(3)$

2×(3)， $6x-10y=40 \cdots\cdots(4)$

(4)－(2)，得 $0=25$

因 $0\neq25$，故方程式不合理。

18. 解: (1) 設 a, b, c, a', b', c' 各爲 2, 3, 5, 6, －9, 7；則二式爲:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{1}{5} \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{9}=\frac{1}{7} \cdots\cdots(2)$$

$\dfrac{1}{3}\times(1)$，得 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{9}=\dfrac{1}{15} \cdots\cdots(3)$

(2)−(3), $\frac{1}{7}=\frac{1}{15}$

$7=15.$

因 $7\neq15$, 故不合理。

(2) 設 a, b, c, a', b', c' 各為 $2, 3, 5, 6, -9, 15$; 則二式化為

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{1}{5} \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{9}=\frac{1}{15} \quad\cdots\cdots(2)$$

3×(2), 得 $$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{1}{5} \quad\cdots\cdots(3)$$

(3)−(1), 得 $0=0.$

故二方程式不相因。

習　題　VIII

原本第 136 頁

1. 解: $$\begin{cases}\frac{7}{2x}+\frac{1}{3y}=0 & \cdots\cdots(1)\\ \frac{3}{x}+\frac{14}{y}+3=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

42×(1), $\frac{147}{x}+\frac{14}{y}=0 \quad\cdots\cdots(3)$

(3)−(2), $\frac{144}{x}-3=0$

$\therefore\ x=\frac{144}{3}=48.$

從 (1) 式, $21y+2x=0$

$\therefore\ y=-\frac{2x}{21}=-\frac{32}{7}$

2. 解: $$\begin{cases}10x+\frac{6}{y}=5 & \cdots\cdots(1)\\ 15x+\frac{10}{y}=8 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$3\times(1)$, $30x+\frac{18}{y}=15$ ......(3)

$2\times(2)$, $30x+\frac{20}{y}=16$ ......(4)

$(4)-(3)$, $\therefore\ \frac{2}{y}=1$

$\therefore\ y=2.$

代入 (1) 式, $10x+3=5$

$\therefore\ x=\frac{5-3}{10}=\frac{1}{5}.$

3. 解: $\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{2(3-y)}{x}+\frac{3}{2} & \text{......(1)}\\ \frac{y+3}{x}=\frac{3y-5}{x}+1 & \text{......(2)}\end{cases}$

從 (1) 式, $2y=12-4y+3x$

$2y-x=4$ ......(3)

從 (2) 式, $y+3=3y-5+x$

$2y+x=8$ ......(4)

$(4)-(3)$, $2x=4$

$\therefore\ x=2.$

$(4)+(3)$, $4y=12$

$\therefore\ y=3.$

4. 解: $\begin{cases}xy=0 & \text{......(1)}\\ (x+2y-1)(3x-y+2)=0 & \text{......(2)}\end{cases}$

從 (1) 式, $x=0$ 或 $y=0.$

從 (2) 式, $x+2y-1=0$ 或 $3x-y+2=0$

若 $x=0$, 則 $2y-1=0$ 或 $-y+2=0$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}$ 或 $y=2.$

若 $y=0$, 則 $x-1=0$ 或 $3x+2=0$

$\therefore\ x=1$ 或 $x=-\frac{2}{3}.$

5. 解: $\begin{cases}xy-y=0 & \text{......(1)}\\ 3x-8y+5=0 & \text{......(2)}\end{cases}$

從 (1) 式， $y(x-1)=0$

$\therefore\ y=0$ 或 $x=1$.

代入 (2) 式：

若 $y=0$, 則 $3x+5=0\quad\therefore\ x=-\frac{5}{3}$.

若 $x=1$, 則 $3-8y+5=0\quad\therefore\ y=1$.

6. 解：$\begin{cases} x(x-y)(x+y)=0 & \cdots\cdots(1) \\ x+2y-5=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式， $x=0$ 或 $x=y$ 或 $x=-y$.

各値代入 (2) 式：

若 $x=0$, 則 $2y-5=0\quad\therefore\ y=\frac{5}{2}$.

$x=y$, 則 $y+2y-5=0\quad\therefore\ y=\frac{5}{3}=x$.

$x=-y$, 則 $-y+2y-5=0\quad\therefore\ y=5,\quad x=-5$.

7. 解：$\begin{cases} (x-1)(y-2)=0 & \cdots\cdots(1) \\ (x-2)(y-3)=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式， $x=1$ 或 $y=2$.

代入 (2) 式， $y=3$ 或 $x=2$.

答：$x=1, y=3$；$x=2, y=2$.

8. 解：$\begin{cases} y^2=(x-1)^3 & \cdots\cdots(1) \\ 2x+3y-7=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式， $y=\pm(x-1)\cdots\cdots(3)$

代入 (2) 式， $2x+3(x-1)-7=0\quad 5x-10=0\quad\therefore\ x=2$.

$2x-3(x-1)-7=0\quad -x-4=0\quad\therefore\ x=-4$.

代入 (2) 式：

若 $x=2$, 則 $4+3y-7=0\quad\therefore\ y=1$.

$x=-4$, 則 $-8+3y-7=0\quad\therefore\ y=5$.

9. 解：$\begin{cases} (2x+y)^2=(x-3y+5)^2 & \cdots\cdots(1) \\ (x+y)^2=1 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式，得二式：

$2x+y=x-3y+5\quad\cdots\cdots(3)$

$2x+y=-(x-3y+5)\quad\cdots\cdots(4)$

從 (2) 式,得二式

$$x+y=1 \cdots\cdots (5)$$
$$x+y=-1 \cdots\cdots (6)$$

從 (3) 與 (5), 得 $x=-1/3$, $y=4/3$.
(3) 與 (6), 得 $x=-3$, $y=2$.
(4) 與 (5), 得 $x=-3/5$, $y=8/5$.
(5) 與 (6), 得 $x=-7/5$, $y=2/5$.

10. 解: $\begin{cases}(x-5y+8)(x+3y+5)=0 \cdots\cdots (1)\\ (2x+y+5)(5x+2y-14)=0 \cdots\cdots (2)\end{cases}$

從 (1) 式, $x-5y+8=0 \cdots\cdots (3)$
$x+3y+5=0 \cdots\cdots (4)$

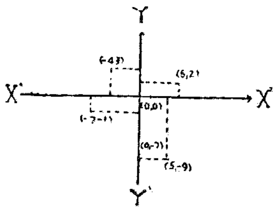
從 (2) 式, $2x+y+5=0 \cdots\cdots (5)$
$5x+2y-14=0 \cdots\cdots (6)$

從 (3) 與 (5), 得 $x=-3$, $y=1$.
(3) 與 (6), 得 $x=2$, $y=2$.
(4) 與 (5), 得 $x=-2$, $y=-1$.
(4) 與 (6), 得 $x=4$, $y=-3$.

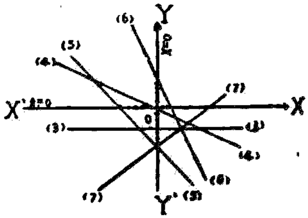
習 題 IX

原本第 143 頁

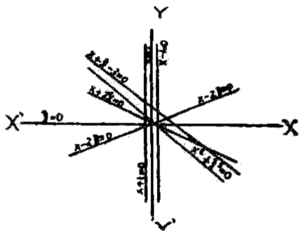
1. 解: (0, 0), (6, 0), (0, −7), (6, 2), (−7, −1), (−4, 3), (5, −9).



2. 解: (1) $x=0$, (2) $y=0$, (3) $2y+7=0$,
(4) $3y+x=0$, (5) $x+y+5=0$, (6) $7x+3y-18=0$,
(7) $3x-4y=24$.



3. **解：** (1) $xy=0$, (2) $(x+y-3)(x-2y)=0$, (3) $x^2-1=0$,
(4) $x^2=4y^2$, (5) $x^2+y^2=0$.



4. **解：** (1) $\begin{cases} x+y-3=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x-2y=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

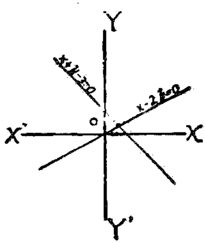
作二方程式之圖形

從圖，知二線相交於 (2, 1).

(1) − (2), $\qquad 2y+y-3=0$

$\therefore \quad y=1.$

$\therefore \quad x=2.$



(2)　$\begin{cases} 3y+2x+19=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2y-3x+4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

作圖，知二方程式之直線相交於 $(-5,\ -2)$.

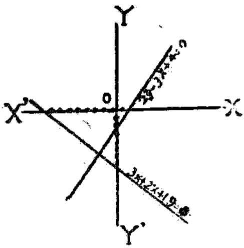
$2\times(1)$,　$9y+6x+57=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$2\times(2)$,　$4y-6x+8=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)+(4)$,　　$13y=-65$

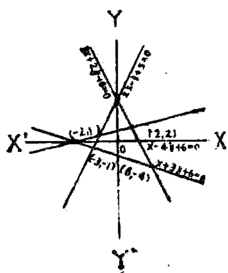
$$\therefore\quad y=-5.$$

$$\therefore\quad x=\frac{2y+4}{3}=-2.$$



5.　**解：(1)**　$\begin{cases} (x-4y+6)(x+3y+6)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ (x+2y-10)(2x-y+5)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

作圖，知諸一次方程式之直線之交點爲 $(2,\ 2)$, $(-2,\ 1)$, $(6,\ -4)$, $(-3,\ -1)$.



從 $\begin{cases} x-4y+6=0 \\ 3x+2y-10=0 \end{cases}$，得

$$x=2, \qquad y=2.$$

從 $\begin{cases} x-4y+6=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases}$，得

$$x=-2, \quad y=1.$$

從 $\begin{cases} 3x+2y-10=0 \\ x+3y+6=0 \end{cases}$，得

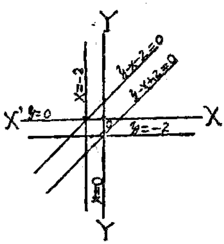
$$x=6, \qquad y=-4.$$

從 $\begin{cases} x+3y+6=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases}$，得

$$x=-3, \quad y=-1.$$

(2) $\begin{cases} (y-x-2)x=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ (y-x+2)y=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

作圖，知諸方程式直線之交點爲 $(0, 0)$, $(0, -2)$ 及 $(-2, 0)$，餘一組爲二平行線無交點。



從 $\begin{cases} y-x-2=0 \\ y-x+2=0 \end{cases}$，無解答。

從 $y-x+2=0$ 及 $x=0$，得

$$x=0, \qquad y=-2.$$

從 $x=0$ 及 $y=0$，得

$$x=0, \qquad y=0.$$

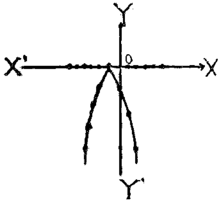
從 $y-x-2=0$ 及 $y=0$，得

$$y=0, \qquad x=-2.$$

6. 解：(1) $y=-(x+1)^2$

$x=\ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4.$

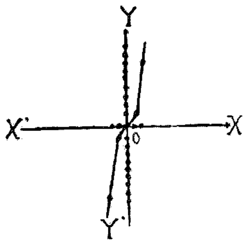
$y=-1,\ -4,\ -9,\ \ 0,\ -1,\ -4,\ -9.$



(2) $y=x^3$

$x=0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ -1,\ \ -2.$

$y=0,\ \ 1,\ \ 8,\ \ -1,\ \ -8.$



習 題 X

原本第147頁

1. 解：$\begin{cases} x+y=11 & \cdots\cdots(1) \\ y+z=13 & \cdots\cdots(2) \\ z+x=12 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)+(2)+(3)， $2(x+y+z)=36$

$x+y+z=18 \cdots\cdots(4)$

(4)−(2)，得 $x=5.$

(4)−(3)，得 $y=6.$

(4)−(1)，得 $z=7.$

2. 解：$\begin{cases} x+y+z=1 & \cdots\cdots(1) \\ x+2y+3z=4 & \cdots\cdots(2) \\ x+3y+7z=13 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(2)－(1),　　$y+2z=3$ ……(4)

(3)－(2),　　$y+4z=9$ ……(5)

(5)－(4),　　$2z=6$

$\therefore\ z=3.$

代入 (4) 式，　$y=3-2z=-3.$

代入 (1) 式，　$x=1-y-z=1.$

3. 解： $\begin{cases} x+2y-3z=3 & \cdots\cdots(1) \\ 3x-5y+7z=19 & \cdots\cdots(2) \\ 5x-8y-11z=13 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$

從 (1) 式，　$x=3-2y+3z$

代入 (2) 及 (3) 式，　$16z-11y=10$ ……(4)

$4z-18y=-28$ ……(5)

$4\times(5)$,　　$16z-72y=-112$ ……(6)

(4)－(6),　　$61y=122$

$\therefore\ y=2.$

代入 (5) 式，　$4z-36=-28$

$\therefore\ z=\frac{8}{4}=2,$

代入 (1) 式，　$x=5.$

4. 解： $\begin{cases} 5x-2y=-33 & \cdots\cdots(1) \\ x+y-7z=13 & \cdots\cdots(2) \\ x+3y=-10 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$

$5\times(3)$,　$5x+15y=-50$ ……(4)

(4)－(1),　　$17y=-17$

$\therefore\ y=-1.$

代入 (3) 式，　$x=-10-3y=-7.$

代入 (2) 式，　$z=-3.$

5. 解： $\begin{cases} x+2y-4z=14 & \cdots\cdots(1) \\ 2x-3y=0 & \cdots\cdots(2) \\ y-4z=0 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$

從 (3) 式，　$y=4z$ ……(4)

代入 (2) 式，　$x=6z$ ……(5)

代入 (1) 式，　$6z+8z-4z=11$

$$\therefore \quad z=\frac{11}{10}.$$

代入 (4) 式， $y=4z=\frac{22}{5}.$

代入 (5) 式， $x=6z=\frac{33}{5}.$

6. 解：
$$\begin{cases} 3x-5=2(x-2) \cdots\cdots(1) \\ (x+1)(y-1)=(x+2)(y-2)+5 \cdots\cdots(2) \\ 2x+3y+z=6 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

從 (1) 式，得 $x=1.$

代入 (2) 式， $2y-2=3y-6+5$

$$\therefore \quad y=-1.$$

代入 (3) 式， $2-3+z=6$

$$\therefore \quad z=7.$$

7. 解：
$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{6}{z}=9 \cdots\cdots(1) \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{4}{z}=5 \cdots\cdots(2) \\ \frac{3}{y}-\frac{2}{x}-\frac{1}{z}=4 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

$\frac{(1)-(2)}{2}$， $\frac{1}{y}-\frac{5}{z}=2 \cdots\cdots(4)$

$\frac{(1)+(2)+(3)}{3}$， $\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=6 \cdots\cdots(5)$

$(5)-(4)$， $\frac{4}{z}=4$

$$\therefore \quad z=1.$$

代入 (5) 式， $\frac{1}{y}-1=6$

$$\therefore \quad y=\frac{1}{7}.$$

代入 (2) 式， $\frac{1}{x}-7+4=5$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{8}.$$

8. 解：
$$\begin{cases} y+z+u=4 \cdots\cdots (1) \\ x+z+u=3 \cdots\cdots (2) \\ x+y+u=1 \cdots\cdots (3) \\ x+y+z=10 \cdots\cdots (4) \end{cases}$$

四式相加，得　$x+y+z+u=6 \cdots\cdots (5)$

$(5)-(1)$，　$x=2.$

$(5)-(2)$，　$y=3.$

$(5)-(3)$，　$z=5.$

$(5)-(4)$，　$u=-4.$

9. 解：
$$\begin{cases} 4x-3z+u=9 \cdots\cdots (1) \\ 5y+z-4u=17 \cdots\cdots (2) \\ 3y+u=12 \cdots\cdots (3) \\ x+2y+3u=8 \cdots\cdots (4) \end{cases}$$

從 (3) 式，　$u=12-3y \cdots\cdots (5)$

代入 (4) 式，$x=8-2y-3(12-3y)=7y-28 \cdots\cdots (6)$

代入 (2) 式，$z=17-5y+4(12-3y)=65-17y \cdots\cdots (7)$

代入 (1) 式，$4(7y-28)-3(65-17y)+12-3y=9 \cdots\cdots (8)$

$$76y-295=9$$

$$\therefore \quad y=4.$$

$$\therefore \quad u=12-12=0.$$

$$\therefore \quad x=28-28=0.$$

$$\therefore \quad z=65-68=-3.$$

0. 解：
$$\begin{cases} cx+by=l \cdots\cdots (1) \\ by+az=m \cdots\cdots (2) \\ az+cx=n \cdots\cdots (3) \end{cases}$$

三式相加，　$cx+by+az=\dfrac{l+m+n}{2} \cdots\cdots (4)$

$(4)-(2)$，　$x=\dfrac{l-m+n}{2c}.$

$(4)-(3)$，　$y=\dfrac{l+m-n}{2b}.$

(4)－(1), $z=\dfrac{-l+m+n}{2a}$.

11. 解: $\begin{cases} lx=my=nz & \cdots\cdots(1) \\ ax+by+cz=d & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從(1)式, $y=\dfrac{lx}{m}$, $z=\dfrac{lx}{n}$

代入(2)式, $ax+b\dfrac{lx}{m}+c\dfrac{lx}{n}=d$

$$x(amn+bln+clm)=mnd$$

$$\therefore\quad x=\frac{mnd}{amn+bln+clm}.$$

$$\therefore\quad y=\frac{l}{m}x=\frac{lnd}{amn+bln+clm}.$$

$$\therefore\quad z=\frac{l}{n}x=\frac{lmd}{amn+bln+clm}.$$

12. 解: $\begin{cases} 2x=3y=6z & \cdots\cdots(1) \\ (x+2y+z-16)(3x-2y+20)=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從(1)式, $x=3z,\ y=2z \cdots\cdots(3)$

代入(2)式, $(3z+4z+z-16)(9z-4z+20)=0$

$\therefore\quad z=2$ 或 $-4.$

$\therefore\quad x=6$ 或 $-12.$

$\therefore\quad y=4$ 或 $-8.$

13. 解: $\begin{cases} x-y=3 & \cdots\cdots(1) \\ y-z=-5 & \cdots\cdots(2) \\ z-x=2 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$

$$x-y-3=0$$
$$y-z+5=0$$
$$z-x-2=0.$$

此三式相加爲零,故知該組方程式爲不相因者,連絡各組方程式之恆等式爲

$$(x-y-3)+(y-z+5)+(z-x-2)=0.$$

14. 解: $\begin{cases} 3x-8y+9z=10 & \cdots\cdots(1) \\ 2x+5y-3z=12 & \cdots\cdots(2) \\ 16x+9y-z=80 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$

以 $[5\times(2)+2\times(1)]$ 卽得第三方程式。故此組方程式爲不相因者，其恆等式爲：

$$2(3x-8y+9z-10)+5(2x+5y-3z-12)-(16x+9y-z-80)=0.$$

習　題　XI

原本第 150 頁

1. 解：設 x, y, z 爲三數。

$$\begin{cases} x+y+z=20 & \cdots\cdots(1) \\ x+2y+3z=44 & \cdots\cdots(2) \\ 2(x+y)-4z=-14 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

$(3)\div 2$，　$x+y-2z=-7$ ……(4)

$(1)-(4)$，　$3z=27$　$\therefore\ z=9.$

$(2)-(1)$，　$y+2z=24$

$\therefore\ y=6.$

代入 (1) 式，　$x=5.$

2. 解：設 x, y, z 爲三數。

$$\begin{cases} x+y+z=51 & \cdots\cdots(1) \\ x=2y+5 & \cdots\cdots(2) \\ y=3z+2 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

(3) 代入 (2) 式，　$x=2(3z+2)+5=6z+9$ ……(4)

(3) 及 (4) 代入 (1) 式，　$6z+9+3z+2+z=51$

$\therefore\ z=4.$

代入 (3) 式，　$y=3z+2=14.$

代入 (4) 式，　$x=33.$

3. 解：設 x 爲十位數字，y 爲個位數字。

$$\begin{cases} 2x+3y=37 & \cdots\cdots(1) \\ 10y+x=10x+y-9 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (2) 式，　$x-y=1$ ……(3)

$2\times(3)$，　$2x-2y=2$ ……(4)

$(1)-(4)$，　$5y=35$

$\therefore\ y=7.$

$\therefore\ x=1+y=8.$

答：此數爲 87.

4. **解：** 設 x 爲 A 所有款數，y 爲 B 所有款數。

$$\begin{cases} x+\frac{2}{3}y=5000 & \cdots\cdots(1) \\ y+\frac{1}{2}x+100=3000 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$\frac{3}{2}\times(1)$, $\qquad \frac{3}{2}x+y=7500 \cdots\cdots(3)$

$(3)-(2)$, $\qquad x=4600$ 元。

代入 (2) 式， $\qquad y=600$ 元。

5. **解：** 設 x, y, z 各爲 A, B, C 之財富。

$$\begin{cases} x+y=p & \cdots\cdots(1) \\ y+z=q & \cdots\cdots(2) \\ x+z=r & \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

三式相加， $x+y+z=\frac{1}{2}(p+q+r) \cdots\cdots(4)$

$(4)-(2)$, $\qquad x=\frac{1}{2}(p+r-q)$.

$(4)-(3)$, $\qquad y=\frac{1}{2}(p+q-r)$.

$(4)-(1)$, $\qquad z=\frac{1}{2}(q+r-p)$.

答： 其必須條件爲 $p+r>q, p+q>r, q+r>p$.

6. **解：** 設 x 爲本錢，y 爲利率。

$$\begin{cases} x+2xy=2546.05 & \cdots\cdots(1) \\ x+4xy=2767.10 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$(2)-(1)$, $\qquad 2xy=211.05 \cdots\cdots(3)$

$(1)-(3)$, $\qquad x=2345$ 元.

代入 (3) 式， $\qquad y=4\frac{1}{2}\%$.

7. **解：** 設 x 爲利率 4% 之公債票之銀數，

y 爲利率 5% 之公債票之銀數，

$x+y$ 爲所求之總銀數。

$$x\times\frac{4}{100}+y\times\frac{100}{110}\times\frac{5}{100}=650 \cdots\cdots(1)$$

$$x\times\frac{100}{80}\times\frac{4}{100}+y\times\frac{100}{110}\times\frac{5}{100}=750 \cdots\cdots(2)$$

$(2)-(1)$, $\qquad \frac{x}{20}-\frac{x}{25}=100$

$\therefore\quad x=10000$ 元。

代入 (1) 式，　$y=5500$ 元。

答：此人共投資 $10000+5500=15500$ 元。

8. 解：設 x 爲長方形之長，y 爲寬。

$$\begin{cases}(x+6)=\frac{3}{2}(y+6)\cdots\cdots(1)\\(x+6)(y+6)=xy+84\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (1) 式，　$2x-3y=6$

從 (2) 式，　$x+y=8$

$2\times(2)-(1)$，　$5y=10$

$\therefore\quad y=2$ 吋。

$\therefore\quad x=8-y=6$ 吋。

答：長方形之面積爲 $xy=12$ 方吋。

9. 解：設 x 爲 A 原有洋數，y 爲 B 原有洋數。

$$\begin{cases}x-y+(x-y)-[y+y-(x-y)]=16\cdots\cdots(1)\\y+y-(x-y)+[y+y-(x-y)]=24\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$(1)+(2)$，　$x+y=16+24=40$

代入 (1) 式，　$8y=104$

$\therefore\quad y=13$ 元。

$\therefore\quad x=27$ 元。

10. 解：設 x, y, z 各爲 A, B, C 獨作所須之日數。

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{36}\cdots\cdots(1)\\\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{5}{24}\cdots\cdots(2)\\2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{26}{17}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

$(3)-(1)-(2)$，　$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{26}{17}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1-\frac{7}{36}-\frac{5}{24}=\frac{43}{72}$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{17}{72}\cdots\cdots(4)$$

$\frac{(1)+(2)+(4)}{2}$，　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{23}{72}\cdots\cdots(5)$

$(5)-(1)$，　$\frac{1}{z}=\frac{9}{72}=\frac{1}{8}\quad\therefore\quad z=8$ 日。

(5) − (2), $\dfrac{1}{y}=\dfrac{8}{72}=\dfrac{1}{9}$　∴ $y=9$ 日。

(5) − (4), $\dfrac{1}{x}=\dfrac{6}{72}=\dfrac{1}{12}$　∴ $x=12$ 日。

11. 解：設 x, y 各為二點之速率。

$$\begin{cases}5x+5y=150 \cdots\cdots (1)\\ 25x-25y=150 \cdots\cdots (2)\end{cases}$$

從 (1) 式，$x+y=30 \cdots\cdots (3)$

從 (2) 式，$x-y=6 \cdots\cdots (4)$

(3) + (4)，$2x=36.$

∴ $x=18$ 呎。

代入 (4)式，$y=12$ 呎。

答：一點之速率為每秒 18 呎，一為每秒 12 呎。

12. 解：設 x, y 各為快車，慢車每小時所行之哩數.

$$\begin{cases}\dfrac{25}{3600}(x+y)=\dfrac{240+200}{1760} \cdots\cdots (1)\\ \dfrac{\frac{15}{4}}{60}(x-y)=\dfrac{240+200}{1760} \cdots\cdots (2)\end{cases}$$

從 (1) 式，$x+y=36 \cdots\cdots (3)$

從 (2) 式，$x-y=4 \cdots\cdots (4)$

(3) + (4)，$x=20$ 哩/時.

(3) − (4)，$y=16$ 哩/時.

13. 解：設 x, y 各為 A, B 兩輪之速率.

$$\begin{cases}2x=3y \cdots\cdots (1)\\ \dfrac{200+10}{x}+4=\dfrac{200-10}{y}-1 \cdots\cdots (2)\end{cases}$$

從 (1) 式，$\dfrac{210}{x}=\dfrac{140}{y} \cdots\cdots (3)$

(2) − (3)，$4=\dfrac{190-140}{y}-1.$

∴ $y=10$ 哩/時。

代入 (1) 式，$x=\dfrac{3}{2}y=15$ 哩/時。

14. 解：設 x 為 B 勝 C 之碼數.

$$(880-20):880=10:x$$

$$\therefore \quad x=\frac{8800}{860}=10\frac{10}{43}\text{ 碼.}$$

15. 解：設 x, y 各爲 A, B 之速率.

$$\begin{cases}\dfrac{440}{x}=\dfrac{440-20}{y}-2 \cdots\cdots(1)\\[2ex]\dfrac{440}{x}=\dfrac{440-6}{y}-4 \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(1) − (2), $\dfrac{420}{y}-\dfrac{434}{y}+2=0$

$$\therefore \quad y=7\text{ 碼/秒.}$$

代入 (1) 式, $x=\dfrac{440}{58}=17\dfrac{17}{29}$ 碼/秒.

16. 解：設 x 爲允許攜帶之重量.

$$\frac{1.25+1.75}{500-2x}=\frac{4}{500-x}$$

$$2000-8x=1500-3x$$

$$5x=500$$

$$\therefore \quad x=100\text{ 磅.}$$

17. 解：設 x, y, z 各爲三種合金應融之重量.

$$\begin{cases}x+y+z=9 \cdots\cdots(1)\\[1ex]\dfrac{5}{8}x+\dfrac{2}{8}y+\dfrac{3}{8}z=3 \cdots\cdots(2)\\[2ex]\dfrac{2}{8}x+\dfrac{5}{8}y+\dfrac{1}{8}z=3 \cdots\cdots(3)\\[2ex]\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{8}y+\dfrac{4}{8}z=3 \cdots\cdots(4)\end{cases}$$

8 × (4) − (1), $3z=15 \quad \therefore z=5$ 兩.

代入 (1) 式, $x+y=4 \cdots\cdots(5)$

代入 (3) 式, $2x+5y=19 \cdots\cdots(6)$

2 × (5), $2x+2y=8 \cdots\cdots(7)$

(6) − (7), $3y=11 \quad \therefore y=\dfrac{11}{3}$ 兩.

代入 (5) 式, $x=\dfrac{1}{3}$ 兩.

18. 解：設 x, y 各爲 A 與 B 含銀之百分數.

$$\begin{cases}\dfrac{5}{8}x+\dfrac{3}{8}y=52\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[2mm]\dfrac{5}{16}x+\dfrac{11}{16}y=42\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$2\times(2)-(1)$, $\qquad y=32\%.$

$\therefore\quad x=64\%.$

19. 解: 設 x,y 各為音,子彈之速度.

$$\begin{cases}\dfrac{500}{x}+\dfrac{500}{y}=2\dfrac{2}{5}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[2mm]\dfrac{500}{y}+\dfrac{600}{x}-\dfrac{210}{x}=2\dfrac{1}{10}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$(1)-(2)$, $\qquad \dfrac{110}{x}=\dfrac{3}{10}$

$\therefore\quad x=366\dfrac{2}{3}$ 碼/秒.

代入 (1) 式, $\qquad y=482\dfrac{26}{57}$ 碼/秒.

20. 解: 設 x,y,z 各為每分鐘通過 A,B,C 三管之水量; V 為池之容積.

$$\begin{cases}x=100+y\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\3\times60(x+y-z)+V=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\60(x-z)+V=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\\45(y-z)+V=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)\end{cases}$$

$\dfrac{(2)-(3)}{60}$, $\qquad 2x-2z+3y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

$\dfrac{(3)-(4)}{15}$, $\qquad 4x-3y-z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

$2\times(6)-(5)$, $\quad 6x-9y=0 \qquad x=\dfrac{3}{2}y\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

代入 (1) 式, $\dfrac{3}{2}y=100+y \qquad \therefore\ y=200$ 嗧/分.

代入 (7) 式, $\qquad x=300$ 嗧/分.

代入 (6) 式, $z=1200-600=600$ 嗧/分.

代入 (4) 式, $V=45(600-200)=18000$ 嗧.

習　題　XII

原本第 154 頁

1. 解：設 $3x^3-x^2+2x-5=a(x-2)^3-b(x-2)^2+c(x-2)-d.$

右式 $=ax^3-(6a+b)x^2+(12a+4b+c)x-(8a-4b+2c+d).$

$$\therefore\ a=3.$$

$6a+b=1 \qquad \therefore\ b=-17.$

$12a+4b+c=2 \qquad \therefore\ c=34.$

$8a-4b+2c+d=5 \qquad \therefore\ d=-19.$

答：$3x^3-x^2+2x-5=3(x-2)^3+17(x-2)^2+34(x-2)+19.$

2. 解：設 $4x^2+8x+7=a(2x+3)^2+b(2x+3)+c$

$$=4ax^2+(12a+2b)x+(9a+3b+c).$$

$4a=4 \qquad \therefore\ a=1.$

$12a+2b=8 \qquad \therefore\ b=-2.$

$9a+3b+c=7 \qquad \therefore\ c=4.$

答：$4x^2+8x+7=(2x+3)^2-2(2x+3)+4.$

3. 解：

$a-b+c=11 \cdots\cdots(1)$

$a+b+c=-5 \cdots\cdots(2)$

$25a+5b+c=6 \cdots\cdots(3)$

$$\therefore\ a=\frac{43}{24},\ b=-8,\ c=\frac{29}{24}.$$

答：$f(x)=\frac{43}{24}x^2-8x+\frac{29}{24}.$

4. 解：

$d=5 \cdots\cdots(1)$

$-a+b-c+d=1 \cdots\cdots(2)$

$a+b+c+d=9 \cdots\cdots(3)$

$8a+4b+2c+d=31 \cdots\cdots(4)$

$$\therefore\ a=3,\ b=0,\ c=1,\ d=5.$$

答：$f(x)=3x^3+x+5.$

5. 解：

$c=4 \cdots\cdots(1)$

$4a+4b+c=0 \cdots\cdots(2)$

$a+c=6 \cdots\cdots(3)$

$$\therefore\ a=2,\ b=-3,\ c=4.$$

答：$f(x, y)=2x-3y+4.$

6. 解：
$$3a+b+1=0 \cdots\cdots(1)$$
$$4a-b+1=0 \cdots\cdots(2)$$
$$\therefore\ a=-\frac{2}{7},\quad b=-\frac{1}{7}.$$
$$\therefore\ -\frac{2}{7}x-\frac{1}{7}y+1=0.$$

答：$2x+y-7=0.$

7. 解：
$$3a+b+c=0 \cdots\cdots(1)$$
$$4a-b+c=0 \cdots\cdots(2)$$
$$a+b+c=0 \cdots\cdots(3)$$

(1)－(3)，　$2a=0$

$$\therefore\ a=0 \cdots\cdots(4)$$

(2)－(3)，　$3a-2b=0 \cdots\cdots(5)$

將 (4) 代入 (5) 式，$-2b=0$

$$\therefore\ b=0 \cdots\cdots(6)$$

將 (4) 與 (6) 代入 (3) 式，$c=0.$

答：此簡單方程式不能求得。

8. 解：設直線之方程式爲 $x+by+c=0.$
$$2+3b+c=0 \cdots\cdots(1)$$
$$-4+5b+c=0 \cdots\cdots(2)$$
$$\therefore\ b=-\frac{1}{3},\ c=-\frac{11}{3}.$$

答：直線之方程式爲 $x+3y-11=0.$

9. 解：
$$-6+3+c=0$$
$$\therefore\ c=3.$$

10. 解：(1) 由 $x=2, y=3$，得 $2a+3b+1=0 \cdots\cdots(1)$

$x=7, y=5$，得 $7a+5b+1=0 \cdots\cdots(2)$

從 (1) 及 (2)，得 $a=\frac{2}{11},\ b=-\frac{5}{11}.$

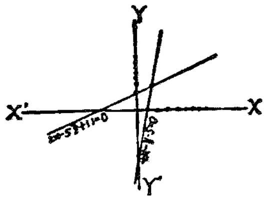
答：方程式爲 $2x-5y+11=0.$

(2) 由 $x=2,\ y=3$, 得　$2a'+3b'+1=0$ ………………………(1)

　　$x=3,\ y=7$, 得　$3a'+7b'+1=0$ ………………………(2)

從 (1) 及 (2), 得　$a'=-\frac{4}{5},\ b'=\frac{1}{5}$.

答: 方程式爲 $4x-y-5=0$.



11. 解:

$-8+4b-2c+d=0$ ………………………(1)

$1+b+c+d=0$ ………………………(2)

$27+9b+3c+d=0$ ………………………(3)

(2) − (1),　$9-3b+3c=0$ ………………………(4)

(3) − (2),　$26+8b+2c=0$ ………………………(5)

2 × (4) − 3 × (5),　$30b=-60$

$\therefore\ b=-2$.

代入 (4) 式,　$c=-5$.

代入 (2) 式,　$d=6$.

答: 方程式爲 $x^3-2x^2-5x+6=0$.

12. 解: 由 $x=1,\ y=0$, 得　$1+c=0$　　$\therefore\ c=-1$.

$x=2,\ y=1$, 得　$4+2b+2c+d=0$ ………………………(1)

$x=-2,\ y=1$, 得　$4-2b-2c+d=0$ ………………………(2)

(1) + (2),　$2d=-8$

$\therefore\ d=-4$.

將 d 之值代入 (1) 式, $4+2b-2-4=0$.

$\therefore\ b=1$.

答: 所求之方程式爲 $x^2+xy-x-4y=0$.

13. 解: $a(x+y-1)+b(2x-y+2)+c(x+2y-3)$

$$=(a+2b+c)x+(a-b+2c)y-(a-2b+3c)=3x+2y-3$$

$$a+2b+c=3 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$a-b+2c=2 \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$a-2b+3c=3 \cdots\cdots\cdots (3)$$

$\frac{(1)+(3)}{2}$,　　$a+2c=3 \cdots\cdots\cdots (4)$

$(3)-2\times(2)$,　　$-a-c=-1 \cdots\cdots\cdots (5)$

$(4)+(5)$,　　$c=2.$

代入 (4) 式，　$a=-1.$

代入 (1) 式，　$b=1.$

答：$3x+2y-3=-(x+y-1)+(2x-y+2)+2(x+2y-3).$

V. 除法變形

習題 XIII

原本第 165 頁

1. 解：

$$\begin{array}{r|l}
6-7-3+24-20 & 3+1-6 \\
6+2-12 & \overline{2-3+4} \\
\hline
-9+9+24-20 & \\
-9-3+18 & \\
\hline
12+6-20 & \\
12+4-24 & \\
\hline
2+4 &
\end{array}$$

答：商 $=Q=2x^2-3x+4$，餘數 $=R=2x+4$.

2. 解：

$$\begin{array}{r|l}
3-2-32+66-35 & 1+2-7 \\
3+6-21 & \overline{3-8+5} \\
\hline
-8-11+66-35 & \\
-8-16+56 & \\
\hline
5+10-35 & \\
5+10-35 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

答：$Q=3x^2-8x+5$，$R=0$.

3. 解：

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -5 & +13 & -15 & +22 & 1-2+4 \\
2 & -4 & +8 & & & \overline{2-1+3-5} \\ \cline{1-5}
 & -1 & +5 & -15 & & \\
 & -1 & +2 & -4 & & \\ \cline{2-5}
 & & 3 & -11 & +22 & \\
 & & 3 & -6 & +12 & \\ \cline{3-5}
 & & & -5 & +10 & \\
 & & & -5 & +10-20 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 20 &
\end{array}$$

答：$Q=2x^3-x^2+3x-5$, $R=20$.

4. 解：

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
4 & +0 & -3 & +19 & +2 & +4 & -4 & +7 & 1+0-1+5 \\
4 & +0 & -4 & +20 & & & & & \overline{4+0+1-1+3} \\ \cline{1-8}
 & & 1 & -1 & +2 & +4 & & & \\
 & & 1 & +0 & -1 & +5 & & & \\ \cline{3-8}
 & & & -1 & +3 & -1 & -4 & & \\
 & & & -1 & +0 & +1 & -5 & & \\ \cline{4-8}
 & & & & 3 & -2 & +1 & +7 & \\
 & & & & 3 & +0 & -3 & +15 & \\ \cline{5-8}
 & & & & & -2 & +4 & -8 &
\end{array}$$

答：$Q=4x^4+x^2-x+3$, $R=-2x^2+4x-8$.

5. 解：設 $Q=c_0x+c_1$ 及 $R=d_0x+d_1$

$$2x^3-3x^2+x-5\equiv(c_0x+c_1)(x^2-3x+2)+d_0x+d_1$$

$$\equiv c_0x^3\begin{array}{r|} -3c_0 \\ +c_1 \\ \\ \end{array} x^2 \begin{array}{r|} +2c_0 \\ -3c_1 \\ +d_0 \end{array} x \begin{array}{r|} +2c_1 \\ +d_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\therefore \quad c_0=2.$$

$$\begin{array}{lll}
-3c_0+c_1=-3 & \therefore & c_1=3. \\
2c_0-3c_1+d_0=1 & \therefore & d_0=6. \\
2c_1+d_1=-5 & \therefore & d_1=-11.
\end{array}$$

答：$Q=2x+3$, $R=6x-11$.

6. 解：設 $Q=c_0x^2+c_1x+c_2$, $R=d_0x^2+d_1x+d_2$

$$2x^5-3x^4+x^2-5$$

$$\equiv(c_0x^2+c_1x+c_2)(x^3-3x+2)+d_0x^2+d_1x+d_2$$

$$\equiv c_0x^5+c_1x^4\begin{array}{r|} +c_2 \\ -3c_0 \\ \\ \end{array} x^3 \begin{array}{r|} +2c_0 \\ -3c_1 \\ +d_0 \end{array} x^2 \begin{array}{r|} +2c_1 \\ -3c_2 \\ +d_1 \end{array} x \begin{array}{r|} +2c_2 \\ +d_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\therefore\quad c_0=2,\quad c_1=-3.$$

$$\begin{array}{ll}
-3c_0+c_2=0 & \therefore\quad c_2=6.\\
2c_0-3c_1+d_0=1 & \therefore\quad d_0=-12.\\
2c_1-3c_2+d_1=0 & \therefore\quad d_1=24.\\
2c_2+d_2=-5 & \therefore\quad d_2=-17.
\end{array}$$

答：$Q=2x^2-3x+6,\ R=-12x^2+24x-17.$

7. 解：

$$\begin{array}{r|l}
3-5-7+12 & 3+1-5\\
\underline{3+1-5\qquad} & \overline{1-2}\\
-6-2+12 & \\
\underline{-6-2+10} & \\
2 &
\end{array}$$

答：$3x^3-5x^2-7x+12=(x-2)(3x^2+x-5)+2,$

$$\frac{3x^3-5x^2-7x+12}{3x^2+x-5}=(x-2)+\frac{2}{3x^3+x-5}.$$

8. 解：

$$\begin{array}{r|l}
x^4+ax^3+x^2+bx+1 & x^2-2x+1\\
\underline{x^4-2x^3+x^2\qquad\qquad} & \overline{x^2+(a+2)x+2(a+2)}\\
(a+2)x^3+\quad 0\quad +bx\quad +1 & \\
\underline{(a+2)x^3-2(a+2)x^2+(a+2)x\qquad} & \\
2(a+2)x^2+(b-a-2)x\quad +1 & \\
\underline{2(a+2)x^2-4(a+2)x+2(a+2)} & \\
(3a+b+6)x-(2a+3) &
\end{array}$$

若 $x^4+ax^3+x^2+bx+1$ 能被 x^2-2x+1 除尽，则

$$3a+b+6=0,\quad 2a+3=0$$

答：$a=-\frac{3}{2},\ b=-\frac{3}{2}.$

9. 解：

$$\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3+3x^2+ax+b & x^2+3x+5\\
\underline{x^4+3x^3+5x^2\qquad\qquad} & \overline{x^2-x+1}\\
-\ x^3-2x^2+ax & \\
\underline{-\ x^3-3x^2-5x} & \\
x^2+(a+5)x+b & \\
\underline{x^2+\qquad 3x+5} & \\
(a+2)x+(b-5) &
\end{array}$$

如原式能化成正整式，则

$$a+2=0,\ b-5=0.$$

答：$a=-2,\ b=5.$

10. 解：

$$\begin{array}{r|l}
1+1+2+1+2+1+1 & 1+1+1 \\
\underline{1+1+1\qquad\qquad\quad} & \overline{1+0+1+0+1} \\
1+1+2\qquad\quad & \\
\underline{1+1+1\qquad\quad} & \\
1+1+1 & \\
\underline{1+1+1} & \\
0 &
\end{array}$$

答：$Q=x^4+x^2+1,\ R=0.$

11. 解：

$$\begin{array}{r|l}
2x^2+5xy-3y^2-5x+13y-12 & x+3y-4 \\
\underline{2x^2+6xy\qquad\quad -8x\qquad\qquad} & \overline{2x-y+3} \\
-xy-3y^2+3x+13y-12 & \\
\underline{-xy-3y^2\qquad +4y\qquad} & \\
3x+9y-12 & \\
\underline{3x+9y-12} & \\
0 &
\end{array}$$

答：$Q=2x-y+3,\ R=0.$

12. 解：

$$\begin{array}{r|l}
2a^2-b^2-6c^2-ab+ac+5bc & 2a+b-3c \\
\underline{2a^2\qquad\qquad\quad +ab-3ac\qquad} & \overline{a-b+2c} \\
-b^2-6c^2-2ab+4ac+5bc & \\
\underline{-b^2\qquad -2ab\qquad +3bc} & \\
-6c^2\qquad +4ac+2bc & \\
\underline{-6c^2\qquad +4ac+2bc} & \\
0 &
\end{array}$$

答：$Q=a-b+2c,\ B=0.$

13. 解：

$$\begin{array}{r|l}
a^2b+a^2c+b^2c+b^2a-c^2a-bc^2+abc & ab+bc+ca \\
\underline{a^2b+a^2c\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +abc} & \overline{a+b-c} \\
b^2c+b^2a-c^2a-bc^2\qquad & \\
\underline{b^2c+b^2a\qquad\qquad +abc} & \\
-c^2a-bc^2-abc & \\
\underline{-c^2a-bc^2-abc} & \\
0 &
\end{array}$$

答：$Q=a+b-c,\ R=0.$

14. 解:

$$\begin{array}{l|l}
x^4+ax^3-3x^3+4x^2-ax^2-2ax+8a & x^2-3x+4 \\
\underline{x^4\qquad\quad -3x^3+4x^2} & \overline{x^2+ax+2a} \\
\qquad ax^3\qquad\qquad\quad -ax^2-2ax+8a & \\
\qquad \underline{ax^3\qquad\qquad -3ax^2+4ax} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2ax^2-6ax+8a & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{2ax^2-6ax+8a} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

答: $Q=x^2+ax+2a\quad R=0.$

15. 解:

$$\begin{array}{l|l}
8+0+0-27 & 2-3 \\
\underline{8-12} & \overline{4+6+9} \\
\quad 12+0-27 & \\
\quad \underline{12-18} & \\
\qquad 18-27 & \\
\qquad \underline{18-27} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

答: $Q=4x^2+6xy+9y^2,\ R=0.$

16. 解:

$$\begin{array}{l|l}
1+0+0-4+3 & 1-1 \\
\underline{1-1} & \overline{1+1+1-3} \\
\quad 1+0-4+3 & \\
\quad \underline{1-1} & \\
\qquad 1-4+3 & \\
\qquad \underline{1-1} & \\
\qquad\quad -3+3 & \\
\qquad\quad \underline{-3+3} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

答: $Q=x^3+x^2y+xy^2-3y^3,\ R=0.$

17. 解:

$$\begin{array}{l|l}
6+1-1+11-5+4 & 2-1+1 \\
\underline{6-3+3} & \overline{3+2-1+4} \\
\quad 4-4+11-5+4 & \\
\quad \underline{4-2+2} & \\
\qquad -2+9-5+4 & \\
\qquad \underline{-2+1-1} & \\
\qquad\qquad 8-4+4 & \\
\qquad\qquad \underline{8-4+4} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

答: $Q=3a^3+2a^2b-ab^2+4b^3,\ R=0.$

18. 解：第一以 x 為"主元"，第二，以 y 為"主元"。

(1)

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+\ 0+xy^2+y^3 & 2x+y \\
\underline{2x^3+x^2y\qquad\qquad\quad} & \overline{x^2-\frac{xy}{2}+\frac{3y^2}{4}} \\
\quad -x^2y+xy^2+y^3 & \\
\quad \underline{-x^2y-\frac{xy^2}{2}\qquad\quad} & \\
\qquad\qquad \frac{3xy^2}{2}+\ y^3 & \\
\qquad\qquad \underline{\frac{3xy^2}{2}+\frac{3}{4}y^3} & \\
\qquad\qquad\qquad\ \frac{1}{4}y^3 &
\end{array}
$$

答：$Q=x^2-\frac{xy}{2}+\frac{3y^2}{4}$, $R=\frac{1}{4}y^3$.

(2)

$$
\begin{array}{l|l}
y^3+\ y^2x+\quad 0+2x^3 & y+2x \\
\underline{y^3+2y^2x\qquad\qquad\quad} & \overline{y^2-yx+2x^2} \\
\underline{\ -\ y^2x+\quad 0+2x^3} & \\
\underline{\ -\ y^2x-2yx^2\qquad\ } & \\
\qquad\qquad 2yx^2+2x^3 & \\
\qquad\qquad \underline{2yx^2+4x^3} & \\
\qquad\qquad\qquad\ -2x^3 &
\end{array}
$$

答：$Q=y^2-yx+2x^2$, $R=-2x^3$.

19. 解：

$$
\begin{array}{l|l}
1-3x+5x^2 & 1+x+3x^2 \\
\underline{1+\ x+3x^2} & \overline{1-4x+6x^2} \\
\quad -4x+2x^2 & \\
\quad \underline{-4x-4x^2-12x^3} & \\
\qquad\qquad 6x^2+12x^3 & \\
\qquad\qquad \underline{6x^2+\ 6x^3+18x^4} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 6x^3-18x^4 &
\end{array}
$$

答：$Q=1-4x+6x^2$, $R=6x^3-18x^4$.

20. 解:

$$
\begin{array}{l|l}
1+x+3x^2 & 1-3x+5x^2 \\
\underline{1-3x+5x^2} & \overline{1+4x+10x^2} \\
\quad 4x-2x^2 & \\
\quad \underline{4x-12x^2+20x^3} & \\
\qquad 10x^2-20x^3 & \\
\qquad \underline{10x^2-30x^3+50x^4} & \\
\qquad\qquad 10x^3-50x^4 &
\end{array}
$$

答: $Q=1+4x+10x^2,\ R=10x^3-50x^4.$

21. 解: 設 $\dfrac{1}{1-2x}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$

$$1=(1-2x)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots)$$

$$
=a_0+\left.\begin{array}{r} a_1 \\ -2a_0 \end{array}\right| x+\left.\begin{array}{r} a_2 \\ -2a_1 \end{array}\right| x^2+\left.\begin{array}{r} a_3 \\ -2a_2 \end{array}\right| x^3+\cdots\cdots
$$

$\therefore\quad a_0=1.$

$a_1-2a_0=0 \qquad \therefore\quad a_1=2.$

$a_2-2a_1=0 \qquad \therefore\quad a_2=4.$

$a_3-2a_2=0 \qquad \therefore\quad a_3=8.$

答: $\dfrac{1}{1-2x}=1+2x+4x^2+8x^3+\cdots\cdots.$

22. 解: 設 $\dfrac{2+3x+4x^2}{1-x+2x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$

$$
2+3x+4x^2=a_0+\left.\begin{array}{r} a_1 \\ -a_0 \\ \end{array}\right| x+\left.\begin{array}{r} a_2 \\ -a_1 \\ +2a_0 \end{array}\right| x^2+\left.\begin{array}{r} a_3 \\ -a_2 \\ +2a_1 \end{array}\right| x^3+\cdots\cdots
$$

$\therefore\quad a_0=2.$

$a_1-a_0=3 \qquad \therefore\quad a_1=5.$

$a_2-a_1+2a_0=4 \qquad \therefore\quad a_2=5.$

$a_3-a_2+2a_1=0 \qquad \therefore\quad a_3=-5.$

答: $\dfrac{2+3x+4x^2}{1-x+2x^2}=2+5x+5x^2-5x^3+\cdots\cdots.$

習 題 XIV

原本第 173 頁

1. 解:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -3 & -1 & -11 & -4 & \underline{4} \\
 & 4 & +4 & +12 & +4 & \\
\hline
1 & +1 & +3 & +1, & 0 &
\end{array}
$$

答: $Q=x^3+x^2+3x+1,\quad R=0.$

2. 解:

$$\begin{array}{r|l} 5-\ 6-\ 8+\ 7+\ 6+\ 3 & \underline{3} \\ 15+27+57+192+594 & \\ \hline 5+\ 9+19+64+198,\ \ 597 & \end{array}$$

答: $Q=5x^4+9x^3+19x^2+64x+198,\ R=597.$

3. 解:

$$\begin{array}{r|l} 3+0+\ 1+\ 0-\ 1 & \underline{-2} \\ -6+12-26+52 & \\ \hline 3-6+13-26,\ \ 51 & \end{array}$$

答: $Q=3x^3-6x^2+13x-26,\ R=51.$

4. 解:

$$\begin{array}{r|l} 3+16-13-6 & \underline{-\frac{1}{3}} \\ -\ 1-\ 5+6 & \\ \hline 3\,|\,3+15-18,\ \ 0 & \\ \hline 1+\ 5-\ 6,\ \ 0 & \end{array}$$

答: $Q=x^2+5x-6,\ R=0.$

5. 解:

$$\begin{array}{r|l} 3-6+1\ +2 & \underline{\frac{1}{3}} \\ 1-\frac{5}{3}-\frac{2}{9} & \\ \hline 3\,|\,3-5-\frac{2}{3},\ \ \frac{16}{9} & \\ \hline 1-\frac{5}{3}-\frac{2}{9}, & \end{array}$$

答: $Q=x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{9},\quad R=\frac{16}{9}.$

6. 解:

$$\begin{array}{r|l} 1-(a+b+c)+(ab+ac+bc)-abc & \underline{a} \\ a\qquad -(ab+ac)\qquad +abc & \\ \hline 1-\quad (b+c)+\qquad bc,\qquad 0 & \end{array}$$

答: $Q=x^2-(b+c)x+bc,\ R=0.$

7. 解:

$$\begin{array}{r|l} 2-1-7+7-10 & \underline{2} \\ 4+6-2+10 & \\ \hline 2+3-1+5,\quad 0 & \end{array}$$

答: $Q=2x^3+3x^2y-xy^2+5y^3,\ R=0.$

8. 解: (1)　　$f(1)=2-5+3=0.$

(2) $$f(2)=16-10+3=9.$$

(3)
$$\begin{array}{l|l} 2+\ 0-\ 5+\ \ 3 & 5 \\ 2+10+50+225 & \\ \hline 2+10+45,\ \ 228 & \end{array}$$
$$\therefore\quad f(5)=228.$$

(4) $$f(-1)=-2+5+3=6.$$

(5) $$f(-3)=-54+15+3=-36.$$

(6)
$$\begin{array}{l|l} 2+\ 0-\ 5+\ \ 3 & -6 \\ \ \ -12+72-402 & \\ \hline 2-12+67-399 & \end{array}$$
$$\therefore\quad f(-6)=-399.$$

9. **解:**
$$\begin{array}{llll|l} 1+m & -20 & + & 6 & 3 \\ \ \ \ 3 & +(9+3m) & +(9m-33) & & \\ \hline 1+(m+3) & +(3m-11) & +(9m-27) & & \end{array}$$
若能除盡,則 $$9m-27=0$$
$$\therefore\quad m=3.$$

10. **解:**
$$\begin{array}{l|l} 2-1+\ \ l+m & -2 \\ \ \ -4+\ 10-(2l+20) & \\ \hline 2-5+(10+l),(m-2l-20)=R & \end{array}$$
$$\begin{array}{l|l} 2-1+\ \ l+m & 4 \\ \ \ \ \ 8+\ 28+(4l+112) & \\ \hline 2+7+(l+28),(m+4l+112)=R & \end{array}$$
依題意,則 $$m-2l=20 \quad\cdots\cdots(1)$$
$$m+4l=-112 \quad\cdots\cdots(2)$$
(1) − (2), $$6l=-132$$
$$\therefore\quad l=-22.$$
$$\therefore\quad m=-24.$$

11. **解:** 以 $2n$ 代 m 於已知方程式中,得
$$3b(2n)+a(2n)-2an-6bn=0$$
故原式必能被 $m-2n$ 除盡。
同理於原式中以 $-3b$ 代 a, 則原式亦等於零,故 $a+3b$ 亦能除盡原式 (§ 416).

12. **解:** 以 b 代 a 於已知方程式,得
$$b(b-c)^3+b(c-b)^3+c(a-b)^3=b(b-c)^3-b(b-c)^3+0=0$$

故此已知方程式必能被 $a-b$ 除盡。
同理證 $b-c$, $c-a$ 亦能除盡原式。
故 $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ 能被 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 除盡 (§ 417).

13. 解：設

$$f(x)=a_0(x-1)(x-4)(x+2)$$
$$-16=a_0(2-1)(2-4)(2+2)$$
$$-16=a_0(-8)$$
$$\therefore\quad a_0=2.$$
$$\therefore\quad f(x)=2(x-1)(x-4)(x+2)$$
$$=2x^3-6x^2-42x+16.$$

14. 解：設

$$f(x)=(a_0x+a_1)(x-2)(x-3)$$
$$6=(0\times a_0+a_1)(0-2)(0-3)$$
$$12=(a_0+a_1)(1-2)(1-3)$$
$$\therefore\quad a_1=1,\ a_0=5.$$
$$\therefore\quad f(x)=(5x+1)(x-2)(x-3)$$
$$=5x^3-24x^2+25x+6.$$

15. 解：如以上二式有 x 之四值能其相等，則其相當係數必相等，然此二式之係數不等，故知其 x 不能有四個相同之值。

習　題　XV

原本第 176 頁

1. 解：

```
1+1+0+0-1 | 1+0+1
1+0+1     |-------
----------| 1+1-1 | 1+0+1
  1-1+0-1 | 1+0+1 |------
  1+0+1   |-------| 1   ∴ Q₁=1
  --------|   1-2 ∴ R₁=x-2
   -1-1-1
   -1-0-1
   ------
     -1      R=-x
```

答：$x^4+x^3-1\equiv(x^2+1)^2+(x-2)(x^2+1)-x.$

2. 解：

```
4+2+4+1+6 | 2+0+1
4+0+2     |-------
----------| 2+1+1 | 2+0+1
  2+2+1+6 | 2+0+1 |------
  2+0+1   |-------|   1 ∴ Q₁=1
  --------|   1  ∴ R₁=x
    2+0+6
    2+0+1
    -----
        5  ∴ R=5
```

答： $4x^4+2x^3+4x^2+x+6\equiv(2x^2+1)^2+x(2x^2+1)+5.$

3. 解：

$$
\begin{array}{l|l|l}
2-3+2+5+0-1+0+6 & 1-1+1+3 & \\
2-2+2+6 & 2-1-1-1+3 & 1-1-1+3 \\
\hline
\quad -1+0-1+0 & 2-2+2+6 & 2+1 \quad \therefore Q_1=2x+1 \\
\quad -1+1-1-3 & \quad 1-3-7+3 & \\
\hline
\qquad -1+0+3-1 & \quad 1-1+1+3 & \\
\qquad -1+1-1-3 & \qquad -2-8+0 & \therefore R_1=-2x^2-8x \\
\hline
\qquad\quad -1+4+2+0 & & \\
\qquad\quad -1+1-1-3 & & \\
\hline
\qquad\qquad 3+3+3+6 & & \\
\qquad\qquad 3-3+3+9 & & \\
\hline
\qquad\qquad\quad 6+0-3 & \therefore R=6x^2-3 &
\end{array}
$$

答： $2x^7-3x^6+2x^5+5x^4-x^2+6\equiv(2x+1)(x^3-x^2+x+3)^2$
$-(2x^2+8x)(x^3-x^2+x+3)+(6x^2-3).$

4. 解：

$$
\begin{array}{l|l|l}
1+0+1+1+0+1 & 1+1+1 & \\
1+1+1 & 1-1+1+1 & 1+1+1 \\
\hline
\quad -1+0+1 & 1+1+1 & 1-2 \quad \therefore Q_1=x-2y \\
\quad -1-1-1 & \quad -2+0+1 & \\
\hline
\qquad 1+2+0 & \quad -2-2-2 & \\
\qquad 1+1+1 & \qquad 2+3 & \therefore R_1=2xy^2+3y^3 \\
\hline
\qquad\quad 1-1+1 & & \qquad =(2x+3y)y^2 \\
\qquad\quad 1+1+1 & & \\
\hline
\qquad\quad -2 & \therefore R=-2xy^4 &
\end{array}
$$

答： $x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5\equiv(x-2y)(x^2+xy+y^2)^2$
$+(2x+3y)y^2(x^2+xy+y^2)-2xy^4.$

5. 解：

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2- & 8+ & 1+ & 6 & 3 \\
 & 6- & 6- & 15 & \\
\hline
2- & 2- & 5- & 9 & \therefore R=-9 \\
 & 6+ & 12 & & \\
\hline
2+ & 4+ & 7 & & \therefore R_1=7 \\
 & 6 & & & \\
\hline
2+ & 10 & & & \therefore R_2=10,\ Q_2=2
\end{array}
$$

答： $2x^3-8x^2+x+6\equiv2(x-3)^3+10(x-3)^2+7(x-3)-9.$

6. 解：
$$\begin{array}{l|l}
1+3-6+2-3+7 & -2 \\
\quad -2-2+16-36+78 & \\ \hline
1+1-8+18-39+85 & \therefore R=85 \\
\quad -2+2+12-60 & \\ \hline
1-1-6+30-99 & \therefore R_1=-99 \\
\quad -2+6+0 & \\ \hline
1-3+0+30 & \therefore R_2=30 \\
\quad -2+10 & \\ \hline
1-5+10 & \therefore R_3=10 \\
\quad -2 & \\ \hline
1-7 & \therefore R_4=-7,\ Q_4=1.
\end{array}$$

答：$x^5+3x^4-6x^3+2x^2-3x+7\equiv(x+2)^5-7(x+2)^4$
$+10(x+2)^3+30(x+2)^2-99(x+2)+85.$

7. 解：
$$\begin{array}{l|l}
1+9+27+0 & -3 \\
\quad -3-18-27 & \\ \hline
1+6+9-27 & \therefore R=-27 \\
\quad -3-9 & \\ \hline
1+3+0 & \therefore R_1=0 \\
\quad -3 & \\ \hline
1+0 & \therefore R_2=0,\ Q_2=1.
\end{array}$$

答：$x^3+9x^2+27x=(x+3)^3-27.$

8. 解：
$$\begin{array}{l|l}
1+3+1-1 & -1 \\
\quad -1-2+1 & \\ \hline
1+2-1+0 & \therefore R=0 \\
\quad -1-1 & \\ \hline
1+1-2 & \therefore R_1=-2 \\
\quad -1 & \\ \hline
1+0 & \therefore R_2=0,\ Q_2=1
\end{array}$$

答：$x^3+3x^2+x-1\equiv(x+1)^3-2(x+1).$

VI. 有理整式之因式

習 題 XVI

原本第 180 頁

1. 解：$6x^4y^3z^2-12x^2y^4z+8x^2y^3=2x^2y^3(3x^2z^2-6yz+4).$

2. 解： $2n^2+(n-3)n=2n^2+n^2-3n=3n^2-3n=3n(n-1)$.

3. 解： $ab-a+b-1=a(b-1)+(b-1)=(a+1)(b-1)$.

4. 解： $mx-nx-mn+n^2=x(m-n)-n(m-n)$
$=(x-n)(m-n)$.

5. 解： $3xy-2x-12y+8=x(3y-2)-4(3y-2)$
$=(x-4)(3y-2)$.

6. 解： $10xy+5y^2+6x+3y=5y(2x+y)+3(2x+y)$
$=(5y+3)(2x+y)$.

7. 解： $x^3y^2-x^2y^3+2x^2y-2xy^2=x^2y^2(x-y)+2xy(x-y)$
$=(x^2y^2+2xy)(x-y)=xy(xy+2)(x-y)$.

8. 解： $x^4+x^3+x^2+x=x^3(x+1)+x(x+1)$
$=(x^3+x)(x+1)=x(x+1)(x^2+1)$.

9. 解： $ac+bd-(bc+ad)=c(a-b)-d(a-b)=(c-d)(a-b)$.

10. 解： $a^2c-abd-abc+a^2d=a^2(c+d)-ab(c+d)$
$=(a^2-ab)(c+d)=a(a-b)(c+d)$.

11. 解： $ad+ce+bd+ae+cd+be=d(a+b+c)+e(a+b+c)$
$=(d+e)(a+b+c)$.

12. 解： $a^2+cd-ab-bd+ac+ad=a(a-b+c)+d(a-b+c)$
$=(a+d)(a-b+c)$.

習　題　XVII

原本第 184 頁

1. 解： $4x^3y-20x^2y^2+25xy^3=xy(4x^2-20xy+25y^2)$
$=xy(2x-5y)^2$.

2. 解： $28tx^2-63ty^2=7t(4x^2-9y^2)=7t(2x+3y)(2x-3y)$.

3. 解： $x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx$
$=(x-2y)^2+2[(3z)(x-2y)]+(3z)^2=(x-2y+3z)^2$.

4. 解： $(7a^2+2b^2)^2-(2a^2+7b^2)^2$
$=(7a^2+2b^2+2a^2+7b^2)(7a^2+2b^2-2a^2-7b^2)$
$=9(a^2+b^2)5(a+b)(a-b)$
$=45(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

5. 解： $(7x^2+4x-3)^2-(x^2+4x+3)^2$
$=(7x^2+4x-3+x^2+4x+3)(7x^2+4x-3-x^2-4x-3)$
$=8x(x+1)6(x+1)(x-1)=48(x+1)^2(x-1)$.

6. 解：$4(1-b^2-ab)-a^2=4-4b^2-4ab-a^2$
$=4-(2b+a)^2=(2+2b+a)(2-2b-a).$

7. 解：$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$
$=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1).$

8. 解：$a^4-6a^2b^2+b^4=a^4-2a^2b^2+b^4-4a^2b^2$
$=(a^2-b^2)^2-(2ab)^2=(a^2+2ab-b^2)(a^2-2ab-b^2).$

9. 解：$a^4+4a^2+16=a^4+8a^2+16-4a^2$
$=(a^2+4)^2-(2a)^2=(a^2+2a+4)(a^2-2a+4).$

10. 解：$9x^4+15x^2y^2+16y^4=9x^4+24x^2y^2+16y^4-9x^2y^2$
$=(3x^2+4y^2)^2-(3xy)^2$
$=(3x^2+3xy+4y^2)(3x^2-3xy+4y^2).$

11. 解：$4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$
$=(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ad+2cd-a^2-b^2+c^2$
$+d^2)=[(a+b)^2-(c-d)^2][-(a-b)^2+(c+d)^2]$
$=(a+b-c+d)(a+b+c-d)(c+d-a+b)(c+d+a-b).$

12. 解：$576x^6y^3-9y^{15}=9y^3(64x^6-y^{12})$
$=9y^3(8x^3-y^6)(8x^3+y^6)$
$=9y^3(2x-y^2)(2x+y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)(4x^2-2xy^2+y^4).$

13. 解：$x^9-y^9=(x^3-y^3)(x^6+x^3y^3+y^6).$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6).$

14. 解：$x^{12}-y^{12}=(x^6-y^6)(x^6+y^6)$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+y^2)$
$\times(x^4-x^2y^2+y^4).$

15. 解：$x^{10}+y^{10}=(x^2)^5+(y^2)^5$
$=(x^2+y^2)(x^8-x^6y^2+x^4y^4-x^2y^6+y^8).$

16. 解：$x^5-32=x^5-2^5=(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16).$

17. 解：$x^7+y^{14}=x^7+(y^2)^7$
$=(x+y^2)(x^6-x^5y^2+x^4y^4-x^3y^6+x^2y^8-xy^{10}+y^{12}).$

習　題　XVIII

原本第 185 頁

1. 解：$x^4-x^3+x-1=x^3(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^3+1)$
$=(x-1)(x+1)(x^2-x+1).$

2. 解: $x^5-x^3-8x^2+8=x^3(x^2-1)-8(x^2-1)$
$=(x^2-1)(x^3-8)=(x+1)(x-1)(x-2)(x^2+2x+4)$.

3. 解: $x^4-2x^3+2x-1=(x^2+1)(x^2-1)-2x(x^2-1)$
$=(x^2-1)(x^2-2x+1)=(x+1)(x-1)^3$.

4. 解: $x^3-7x^2-4x+28=x(x^2-4)-7(x^2-4)$
$=(x-7)(x^2-4)=(x-7)(x+2)(x-2)$.

5. 解: $x^6-x^4y^2-x^2y^4+y^6=x^4(x^2-y^2)-y^4(x^2-y^2)$
$=(x^4-y^4)(x^2-y^2)$
$=(x^2+y^2)(x-y)^2(x+y)^2$.

6. 解: $x^3+2x^2+3x+2=x^3+2x^2+x+2x+2$
$=x(x+1)^2+2(x+1)=(x+1)(x^2+x+2)$.

7. 解: $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1$
$=x^4(x+1)+x^3(x+1)+2x^2(x+1)+x(x+1)+(x+1)$
$=(x+1)(x^4+x^3+2x^2+x+1)=(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)$

8. 解: $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$
$=x^4+6x^2+9+4x^3+12x+4x^2$
$=(x^2+3)^2+4x(x^2+3)+4x^2=(x^2+2x+3)^2$.

習　題　XIX

原本第190頁

1. 解: $x^2-14x+48=(x-6)(x-8)$.

2. 解: $x^2-21x-120$
$$=\left[x-\frac{21}{2}-\frac{\sqrt{441+480}}{2}\right]\left[x-\frac{21}{2}+\frac{\sqrt{441+480}}{2}\right]$$
$=[x-(21+\sqrt{921})/2]\,[x-(21-\sqrt{921})/2]$.

3. 解: $5x^2-53x-22=(x-11)(5x+2)$.

4. 解: $16x^2+64x+63=(4x+7)(4x+9)$.

5. 解: $54x^2-21x+2=(6x-1)(9x-2)$.

6. 解: $12x^2+20xy-8y^2=4(3x^2+5xy-2y^2)$
$=4(3x-y)(x+2y)$.

7. 解: $x^4-13x^2+36=(x^2-9)(x^2-4)$
$=(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$.

8. 解：$x^3y-3x^2y^2-18xy^3=xy(x^2-3xy-18y^2)$
$=xy(x+3y)(x-6y).$

9. 解：$x^2-3x+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$
$=[x-(3+\sqrt{3}i)/2][x-(3-\sqrt{3}i)/2].$

10. 解：$3x^2+2x-3=3[(x+\frac{1}{3})^2-\frac{10}{9}]$
$=3[x+\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{10}}{3}][x+\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{10}}{3}]$
$=3[x+(1+\sqrt{10})/3][x+(1-\sqrt{10})/3].$

11 解：$x^2-4xy-2y^2=x^2-4xy+4y^2-4y^2-2y^2$
$=(x-2y)^2-6y^2=[x-(2+\sqrt{6})y][x-(2-\sqrt{6})y].$

12. 解：$x^2-6ax-9b^2-18ab=x^2-(3b)^2-6a(x+3b)$
$=(x+3b)(x-3b)-6a(x+3b)$
$=(x+3b)(x-6a-3b).$

13. 解：$abx^2-(a^2+b^2)x-(a^2-b^2)$
$=abx^2-(a^2+b^2)x-[(a+b)(a-b)]$
$=(ax+\overline{a-b})(bx-\overline{a+b})$
$=(ax+a-b)(bx-a-b).$

14. 解：$x^2+bd+dx+bx+cx^2+cdx$
$=x(x+d)+b(x+d)+cx(x+d)=(cx+x+b)(x+d).$

15. 解：$x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3$
$\equiv(x-5y+l)(x-3y+m)$
$\equiv x^2-8xy+mx+15y^2-5my+lx-3ly+lm$
$\equiv x^2-8xy+15y^2+(m+l)x-(5m+3l)y+lm.$

$$m+l=2,\quad 5m+3l=4,\quad lm=-3.$$
$$\therefore\quad l=3,\ m=-1.$$

答：$x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3=(x-5y+3)(x-3y-1).$

16. 解：$x^2+3xy+2y^2+3zx+5yz+2z^2$
$\equiv(x+2y+lz)(x+y+mz)$
$\equiv x^2+3xy+2y^2+(l+m)xz+(l+2m)yz+lmz^2.$

$$l+m=3,\quad l+2m=5,\quad lm=2.$$
$$\therefore\ m=2,\ l=1.$$

答：$x^2+3xy+2y^2+3zx+5yz+2z^2=(x+y+2z)(x+2y+z)$.

習　題　XX

原本第 194 頁

1.　解：

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -0 & -7 & +6 & \underline{1} \\ & 1 & +1 & -6 & \\ \hline 1 & +1 & -6 & +0 & \underline{2} \\ & 2 & +6 & & \\ \hline 1 & +3 & +0 & & \underline{-3} \\ & -3 & & & \\ \hline 1 & +0 & & & \end{array}$$

答：$x^3-7x+6=(x-1)(x-2(x+3)$.

2.　解：

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +6 & +11 & +6 & \underline{-2} \\ & -2 & -8 & -6 & \\ \hline 1 & +4 & +3 & +0 & \underline{-3} \\ & -3 & -3 & & \\ \hline 1 & +1 & +0 & & \underline{-1} \\ & -1 & & & \\ \hline 1 & +0 & & & \end{array}$$

答：$x^3+6x^2+11x+6=(x+2)(x+3)(x+1)$.

3.　解：

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -10 & +35 & -50 & +24 & \underline{1} \\ & 1 & -9 & +26 & -24 & \\ \hline 1 & -9 & +26 & -24 & +0 & \underline{2} \\ & 2 & -14 & +24 & & \\ \hline 1 & -7 & +12 & +0 & & \underline{3} \\ & 3 & -12 & & & \\ \hline 1 & -4 & +0 & & & \underline{4} \\ & 4 & & & & \\ \hline 1 & +0 & & & & \end{array}$$

答：$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

4.　解：

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -0 & -2 & +3 & -2 & \underline{1} \\ & 1 & +1 & -1 & +2 & \\ 1 & +1 & -1 & +2 & +0 & \underline{-2} \\ & -2 & +2 & -2 & & \\ \hline 1 & -1 & +1 & +0 & & \end{array}$$

答：$x^4-2x^2+3x-2=(x-1)(x+2)(x^2-x+1)$.

5\. 解:

$$\begin{array}{l|l} 6-13-14-3 & 3 \\ 6+\ 5+\ 1+0 & -\frac{1}{2} \\ 6+\ 2+\ 0 & -\frac{1}{3} \\ 6+\ 0 & \end{array}$$

答: $6x^3-13x^2-14x-3=(x-3)(2x+1)(3x+1)$.

6\. 解:

$$\begin{array}{l|l} 2-5-2+2 & \frac{1}{2} \\ 2-4-4+0 & \end{array}$$

答: $2x^3-5x^2y-2xy^2+2y^3=(2x-y)(x^2-2xy-2y^2)$

$=(2x-y)[x-(1+\sqrt{3})y][x-(1-\sqrt{3})y]$.

7\. 解:

$$\begin{array}{l} 2-1-9+13-5 \ \underline{|1} \\ \quad\ 2+1-\ 8+5 \\ \hline 2+1-8+\ 5+0 \ \underline{|1} \\ \quad\ 2+3-\ 5 \\ \hline 2+3-5+\ 0 \ \underline{|1} \\ \quad\ 2+5 \\ \hline 2+5+0 \end{array}$$

答: $2x^4-x^3-9x^2+13x-5=(x-1)^3(2x+5)$.

8\. 解:

$$\begin{array}{l} 4+\ 0-41+\ 0+46+0-9 \ \underline{|-1} \\ \quad -\ 4+\ 4+37-37-9+9 \\ \hline 4-\ 4-37+37+\ 9-9+0 \ \underline{|-1} \\ \quad\ 4+\ 0-37+\ 0+9 \\ \hline 4+\ 0-37+\ 0+\ 9+0 \ \underline{|-3} \\ \quad -12+36+\ 3-\ 9 \\ \hline 4-12-\ 1+\ 3+\ 0 \ \underline{|3} \\ \quad\ 12+\ 0-\ 3 \\ \hline 4+\ 0-\ 1+\ 0 \ \underline{|-1/2} \\ \quad -\ 2+\ 1 \\ \hline 2\,|\,4-\ 2+\ 0 \\ \hline \quad 2-\ 1 \ \underline{|1/2} \\ \quad\quad\ 1 \\ \hline 2\,|\,2+\ 0 \\ \hline \quad 1 \end{array}$$

答: $4x^6-41x^4+46x^2-9$

$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)(2x+1)(2x-1)$.

9. 解：

$$
\begin{array}{l}
6+19+22+23+16+4 \;|\,-2 \\
\quad -12-14-16-14-4 \\
\hline
6+7+8+7+2+0 \;|\,-1/2 \\
\quad -3-2-3-2 \\
\hline
6+4+6+4+0 \\
3+2+3+2 \;|\,-2/3 \\
\quad -2+0-2 \\
\hline
3+0+3+0 \\
1+0+1
\end{array}
$$

答：$6x^5+19x^4+22x^3+23x^2+16x+4$

$=(x+2)(2x+1)(3x+2)(x^2+1).$

10. 解：

$$
\begin{array}{l}
5-7-8-1+7+8-4 \;|\,-1 \\
\quad -5+12-4+5-12+4 \\
\hline
5-12+4-5+12-4+0 \;|\,1 \\
\quad 5-7-3-8+4 \\
\hline
5-7-3-8+4+0 \;|\,2 \\
\quad 10+6+6-4 \\
\hline
5+3+3-2+0 \;|\,2/5 \\
\quad 2+2+2 \\
\hline
5+5+5+0 \\
1+1+1
\end{array}
$$

答：$5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4$

$=(x+1)(x-1)(x-2)(5x-2)(x^2+x+1)$。

11. 解：$x^2-4x-12=0.$　$(x+2)(x-6)=0$

$\therefore\ x=-2$ 及 $6.$

12. 解：$6x^2-7x+2=0.$　$(3x-2)(2x-1)=0$

$\therefore\ x=\dfrac{2}{3}$ 及 $\dfrac{1}{2}.$

13. 解：$x^2-5x=14.$

$(x-7)(x+2)=0$

$\therefore\ x=7$ 及 $-2.$

14. 解：$x^2+6x=2.$

$x^2+6x+9-11=0$

$(x+3)^2-11=0$

$(x+\sqrt{11}+3)(x-\sqrt{11}+3)=0$

$\therefore\quad x=-3-\sqrt{11}$ 及 $-3+\sqrt{11}$.

15. 解: $x^3-9x^2+26x=24$.

$$\begin{array}{l|l} 1-9+26-24 & 2 \\ 1-7+12+\ \ 0 & 3 \\ 1-4+0 & 4 \\ 1+0 & \end{array}$$

$\therefore\quad x=2,3$ 及 4.

16. 解: $x^4+2x^3-4x^2-2x+3=0$.

$$\begin{array}{l|r} 1+2-4-2+3 & 1 \\ 1+3-1-3+0 & 1 \\ 1+4+3+0 & -1 \\ 1+3+0 & -3 \\ 1+0 & \end{array}$$

$\therefore\quad x=1,1,-1,-3.$

17. 解: $x^3-1=0$.

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$(x-1)(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2})(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2})=0$$

$$\therefore\quad x=1,\quad \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

18. 解: $10x^3-9x^2-3x+2=0$.

$$\begin{array}{l|r} 10-9-3+2 & 1 \\ 10+1-2+0 & -\frac{1}{2} \\ 10-4+0 & \frac{2}{5} \\ 10+0 & \end{array}$$

$$\therefore\quad x=1,-\frac{1}{2},\frac{2}{5}.$$

習　題　XXI

原本第 195 頁

1. 解: $6xy+15x-4y-10=3x(2y+5)-2(2y+5)$
$=(3x-2)(2y+5)$.

2. 解: $a^2bc-ac^2d-ab^2d+bcd^2=ab(ac-bd)-cd(ac-bd)$
$=(ab-cd)(ac-bd)$.

3. 解：$a^3(a-b)+b^3(b-a)=a^3(a-b)-b^3(a-b)$
$=(a-b)(a^3-b^3)=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$.

4. 解：$a^5-81ab^4=a(a^4-81b^4)=a(a^2-9b^2)(a^2+9b^2)$
$=a(a+3b)(a-3b)(a^2+9b^2)$.

5. 解：$a^4b-a^2b^3+a^3b^2-ab^4=ab(a^3-ab^2+a^2b-b^3)$
$=ab(a+b)(a^2-b^2)=ab(a-b)(a+b)^2$.

6. 解：$3abx^2-6axy+bxy-2y^2=3ax(bx-2y)+y(bx-2y)$
$=(3ax+y)(bx-2y)$.

7. 解：$3x^6-192y^6=3(x^6-64y^6)=3(x^3+8y^3)(x^3-8y^3)$
$=3(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$.

8. 解：$(x^2+x)^3-8=(x^2+x-2)[(x^2+x)^2+2(x^2+x)+4]$
$=(x-1)(x+2)(x^4+2x^3+3x^2+2x+4)$.

9. 解：$64x^6y^3-y^{15}=y^3(64x^6-y^{12})=y^3(8x^3+y^6)(8x^3-y^6)$
$=y^3(2x+y^2)(4x^2-2xy^2+y^4)(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)$.

10. 解：$x^2-(a-b)x-ab=(x-a)(x+b)$.

11. 解：$x^{2n}-3x^n-18=(x^n-6)(x^n+3)$.

12. 解：$x-x^2+42=42+x-x^2=(7-x)(6+x)$.

13. 解：$3x^4+3x^3-24x-24=3x^3(x+1)-24(x+1)$
$=3(x+1)(x^3-8)=3(x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$.

14. 解：$x^5-9x^3+8x^2-72=x^3(x^2-9)+8(x^2-9)$
$=(x^3+8)(x^2-9)=(x+2)(x^2-2x+4)(x+3)(x-3)$.

15. 解：$2xc-a^2+x^2-2ab+c^2-b^2$
$=(c^2+2xc+x^2)-(a^2+2ab+b^2)$
$=(c+x)^2-(a+b)^2$
$=(c+x+a+b)(c+x-a-b)$.

16. 解：$x^2(x^2-20)+64=x^4-20x^2+64$
$=(x^2-16)(x^2-4)$
$=(x+4)(x-4)(x+2)(x-2)$.

17. 解：$a^2-2ab+b^2-5a+5b+6=(a-b)^2-5(a-b)+6$
$=(a-b-3)(a-b-2)$.

18. 解：$x^4-10x^2y^2+9y^4=(x^2-y^2)(x^2-9y^2)$
$=(x+y)(x-y)(x+3y)(x-3y)$.

19. 解：$6x^2-7xy-5y^2-4x-2y$
$=(2x+y)(3x-5y)-2(2x+y)=(3x-5y-2)(2x+y)$.

20. 解：$x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=(x^2-a^2)(x^2-b^2)$
$=(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$.

21. 解：$4(xz+uy)^2-(x^2-y^2+z^2-u^2)^2$
$=(2xz+2uy+x^2-y^2+z^2-u^2)$
$\times(2xz+2uy-x^2+y^2-z^2+u^2)$
$=[(x+z)^2-(y-u)^2][-(x-z)^2+(y+u)^2]$
$=(x+y+z-u)(x-y+z+u)(x+y-z+u)$
$\times(-x+y+z+u)$.

22. 解：$14x^2+19x-3=(2x+3)(7x-1)$.

23. 解：$1+19y-66y^2=(1-3y)(1+22y)$.

24. 解：$xy^3+55x^2y^2+204x^3y=xy(y^2+55xy+204x$
$=xy(y+4x)(y+51x)$.

25. 解：$a^4-18a^2b^2c^2+81b^4c^4=(a^2-9b^2c^2)^2$
$=(a+3bc)^2(a-3bc)^2$.

26. 解：$(x^2-7x)^2+6x^2-42x=(x^2-7x)^2+6(x^2-7x)$
$=x(x-7)(x^2-7x+6)=x(x-7)(x-6)(x-1)$.

27. 解：$8(x+y)^3-27(x-y)^3=[2(x+y)-3(x-y)][4(x+y)^2$
$+6(x+y)(x-y)+9(x-y)^2]$
$=(5y-x)(7y^2-10xy+19x^2)$.

28. 解：$(x-2y)x^3-(y-2x)y^3=x^4-2x^3y-y^4+2xy^3$
$=(x^4-y^4)-2xy(x^2-y^2)$
$=(x^2-y^2)(x^2+y^2)-2xy(x^2-y^2)$
$=(x+y)(x-y)(x^2-2xy+y^2)$
$=(x+y)(x-y)^3$.

29. 解：$x^2+a^2-bx-ab+2ax=(x+a)^2-b(x+a)$
$=(x+a-b)(x+a)$.

30. 解：$x^5-y^5-(x-y)^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$
$-(x-y)(x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4)$
$=(x-y)(5x^3y-5x^2y^2+5xy^3)$
$=5xy(x-y)(x^2-xy+y^2)$.

31. 解：$x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$
$=x^4(x-1)-2x^2(x-1)+(x-1)$
$=(x-1)(x^4-2x^2+1)=(x-1)(x^2-1)^2$
$=(x+1)^2(x-1)^3$.

32. 解：$b^4+b^2+1=b^4+2b^2+1-b^2=(b^2+1)^2-b^2$
$=(b^2+b+1)(b^2-b-1)$.

33. 解：$2x^2+7xy+3y^2+9x+2y-5=(x+3y+l)(2x+y-m)$
$=2x^2+7xy+3y^2+(2l-m)x+(l-3m)y-lm$.

$$2l-m=9,\quad l-3m=2,\quad lm=5$$
$$\therefore\ m=1,\quad l=5.$$

答：$2x^2+7xy+3y^2+9x+2y-5=(x+3y+5)(2x+y-1)$.

34. 解：$a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2=(a^2+2)^2-(2a)^2$
$=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$.

35. 解：$x^2-xy-2y^2+4xz-5yz+3z^2$
$=(x-2y+lz)(x+y+mz)$
$=x^2-xy-2y^2+(m+l)xz-(2m-l)yz+lmz^2$.

$$m+l=4,\quad 2m-l=5,\quad lm=3.$$
$$\therefore\ m=3,\quad l=1.$$

答：$x^2-xy-2y^2+4xz-5yz+3z^2=(x-2y+z)(x+y+3z)$.

36. 解：$4a^4+3a^2b^2+9b^4=4a^4+12a^2b^2+9b^4-9a^2b^2$
$=(2a^2+3b^2)^2-(3ab^2)$
$=(2a^2+3ab+3b^2)(2a^2-3ab+3b^2)$.

37. 解：$x^2-8ax-40ab-25b^2=x^2-25b^2-8ax-40ab$
$=(x+5b)(x-5b)-8a(x+5b)$
$=(x+5b)(x-8a-5b)$.

38. 解：$x^8+x^4+1=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$
$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.

39. 解：$(x^2+2x-1)^2-(x^2-2x+1)^2=[(x^2+2x-1)$
$+(x^2-2x+1)][(x^2+2x-1)-(x^2-2x+1)]$
$=4x^2(2x-1)$.

40. 解：$(ax+by)^2-(bx+ay)^2$
$=(ax+by-bx-ay)(ax+by+bx+ay)$
$=[a(x-y)-b(x-y)][a(x+y)+b(x+y)]$
$=(a-b)(x-y)(a+b)(x+y)$.

41. 解：$x^3-ax^2-b^2x+ab^2=x(x^2-b^2)-a(x^2-b^2)$
$=(x-a)(x+b)(x-b)$.

42. 解：$x^4+bx^3-a^3x-a^3b=x(x^3-a^3)+b(x^3-a^3)$
$=(x+b)(x-a)(x^2+ax+a^2)$.

43. 解: $a^2-9b^2+12bc-4c^2=a^2-(9b^2-12bc+4c^2)$
$=a^2-(3b-2c)^2=(a+3b-2c)(a-3b+2c).$

44. 解: $8a^3+12a^2+6a+1=(2a+1)(4a^2+4a+1)=(2a+1)^3.$

45. 解: $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=x^4+2x^2+1-2x^3+x^2-2x$
$=(x^2+1)^2-2x(x^2+1)+x^2=(x^2-x+1)^2.$

46. 解: $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$
$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+b^2x^2-2abxy+a^2y^2$
$=x^2(a^2+b^2)+y^2(a^2+b^2)=(x^2+y^2)(a^2+b^2).$

47. 解: $4x^5+4x^4-37x^3-37x^2+9x+9$
$=4x^4(x+1)-37x^2(x+1)+9(x+1)$
$=(x+1)(4x^4-37x^2+9)$
$=(x+1)(4x^2-1)(x^2-9)$
$=(x+1)(2x+1)(2x-1)(x+3)(x-3).$

48. 解:
$$\begin{array}{r|l} 1+0+0-4+3 & 1 \\ 1+1+1-3 & \\ \hline 1+1+1-3+0 & 1 \\ 1+2+3 & \\ \hline 1+2+3+0 & \end{array}$$

答: $x^4-4x+3=(x-1)^2(x^2+2x+3).$

49. 解: $x^2+5ax+6a^2-ab-b^2=(x+3a+l)(x+2a+m)$
$=x^2+5ax+6a^2+(m+l)x+(3m+2l)a+lm.$
$$m+l=0,\ 3m+2l=-b,\ lm=-b^2$$
$$\therefore\ m=-b,\quad l=b.$$
答: $x^2+5ax+6a^2-ab-b^2=(x+3a+b)(x+2a-b).$

50. 解: $15x^3+29x^2-8x-12$
$=15x^3+30x^2-x^2-2x-6x-12$
$=15x^2(x+2)-x(x+2)-6(x+2)$
$=(x+2)(15x^2-x-6)=(x+2)(3x-2)(5x+3).$

51. 解: $abcx^2+(a^2b^2+c^2)x+abc=abcx^2+a^2b^2x+c^2x+abc$
$=abx(cx+ab)+c(cx+ab)=(cx+ab)(abx+c).$

52. 解:
$$\begin{array}{r|r} 2-1-5-2 & -1 \\ 2-3-2+0 & 2 \\ 2+1+0 & \end{array}$$

答: $2x^3-ax^2-5a^2x-2a^3=(x+a)(2x+a)(x-2a).$

53. 解: $(a-b)x^2+2ax+(a+b)=ax^2-bx^2+2ax+a+b$
$=ax^2+2ax+a-bx^2+b=a(x+1)^2-b(x^2-1)$
$=(x+1)(ax+a-bx+b)=(x+1)[x(a-b)+(a+b)]$.

54. 解: $x^{15}-y^{15}=(x^5)^3-(y^5)^3=(x^5-y^5)(x^{10}+x^5y^5+y^{10})$
$=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x^2+xy+y^2)(x^8-x^7y$
$+x^5y^3-x^4y^4+x^3y^5-xy^7+y^8)$.

55. 解:

$$\begin{array}{l|r}
1-6+7+6-8 & 1 \\
1-5+2+8+0 & -1 \\
1-6+8+0 & 2 \\
1-4+0 & 4 \\
1+0 &
\end{array}$$

答: $x^4-6x^3+7x^2+6x-8=(x-1)(x+1)(x-2)(x-4)$.

56. 解: $4x^3-3x-1=(x-1)(4x^2+4x+1)=(x-1)(2x+1)^2$.

57. 解:

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
3 & -10 & -8 & -3 & +10 & +8 & 1 \\
 & 3 & -7 & -15 & -18 & -8 & \\
\hline
3 & -7 & -15 & -18 & -8 & +0 & 4 \\
 & 12 & +20 & +20 & +8 & & \\
\hline
3 & +5 & +5 & +2 & +0 & & -{}^2/_3 \\
 & -2 & -2 & -2 & & & \\
\hline
3 & +3 & +3 & +0 & & & \\
1 & +1 & +1 & & & &
\end{array}$$

答: $3x^5-10x^4-8x^3-3x^2+10x+8$
$=(x-1)(x-4)(3x+2)(x^2+x+1)$.

58. 解:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
5 & +24 & -15 & -118 & +24 & -3 \\
 & -15 & -27 & +126 & -24 & \\
\hline
5 & +9 & -42 & +8 & +0 & 2 \\
 & 10 & +38 & -8 & & \\
\hline
5 & +19 & -4 & +0 & & -4 \\
 & -20 & +4 & & & \\
\hline
5 & -1 & +0 & & &
\end{array}$$

答: $5x^4+24x^3-15x^2-118x+24$
$=(x+3)(x-2)(x+4)(5x-1)$.

59. 解: $a^2bc+ac^2+acd-abd-cd-d^2$
$=ac(ab+c+d)-d(ab+c+d)$
$=(ac-d)(ab+c+d)$.

60. 解: $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$
$=(x^2-2yz-y^2-z^2)(x^2+2yz-y^2-z^2)$
$=(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z).$

VII. 最高公因式及最低公倍式

習 題 XXII

原本第 204 頁

1. 解: $10x^3y^2z^5$, $4x^5yz^3$, $6x^4y^3z^5$ 及 $x^4y^4z^4u$.
$$10x^3y^2z^5=x^3yz^3(10yz^2)$$
$$4x^5yz^3=x^3yz^3(4x^2)$$
$$6x^4y^3z^5=x^3yz^3(6xy^2z^2)$$
$$x^4y^4z^3u=x^3yz^3(xy^3zu)$$
$\therefore$ H.C.F.$=x^3yz^3$.

2. 解: $(a+b)^2(a-b)$, $(a+b)(a-b)^2$ 及 a^3b-ab^3.
$$a^3b-ab^3=ab(a+b)(a-b)$$
$\therefore$ H.C.F.$=(a+b)(a-b)$.

3. 解: y^4+y^2+1 及 y^2-y+1.
$$y^4+y^2+1=(y^2+y+1)(y^2-y+1)$$
$\therefore$ H.C.F.$=y^2-y+1$.

4. 解: a^2-1, a^2+2a+1 及 a^3+1.
$$a^2-1=(a+1)(a-1)$$
$$a^2+2a+1=(a+1)^2$$
$$a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$$
$\therefore$ H.C.F.$=a+1$.

5. 解: x^3-1 及 x^3+ax^2-ax-1.
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^3+ax^2-ax-1=(x-1)[x^2+(a+1)x+1]$$
$\therefore$ H.C.F.$=x-1$.

6. 解: x^4-y^4, x^6+y^6 及 $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.
$$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$$
$$x^6+y^6=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$$
$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=(x^2+y^2)(x+y)$$
$\therefore$ H.C.F.$=x^2+y^2$.

7. **解：** x^2+5x+6, x^2+x-2 及 $x^2-14x-32$.

$$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$$
$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$
$$x^2-14x-32=(x+2)(x-16)$$
$$\therefore\quad \text{H. C. F.}=x+2.$$

8. **解：** $(x-1)(x-2)$ 及 $5x-15x^3+8x^2+6x-4$.

$$5x-15x^3+8x^2+6x-4=(x-1)(x-2)(5x^2-2)$$
$$\therefore\quad \text{H. C. F.}=(x-1)(x-2).$$

9. **解：** x^3-1 及 x^3-4x^2-4x-5.

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^3-4x^2-4x-5=(x-5)(x^2+x+1)$$
$$\therefore\quad \text{H. C. F.}=x^2+x+1.$$

10. **解：** $(x^2-1)^2(x+1)^2$ 及 $(x^3+5x^2+7x+3)(x^2-6x-7)$.

$$(x^2-1)^2(x+1)^2=(x+1)^4(x-1)^2$$
$$(x^3+5x^2+7x+3)(x^2-6x-7)=(x+1)^3(x+3)(x-7)$$
$$\therefore\quad \text{H. C. F.}=(x+1)^3.$$

11. **解：** $(x-1)^2(x-2)^2$ 及 $(x^2-3x+2)(2x^2-5x^2+5x-6)$.

$$(x^2-3x+2)(2x^3-5x^2+5x-6)$$
$$=(x-1)(x-2)^2(2x^2-x+3)$$
$$\therefore\quad \text{H. C. F.}=(x-1)(x-2)^2.$$

12. **解：** $2x^3-3x^2-11x+6$ 及 $4x^3+3x^2-9x+2$.

$$2x^3-3x^2-11x+6=(x+2)(2x^2-7x+3)$$
$$4x^3+3x^2-9x+2=(x+2)(4x^2-5x+1)$$
$$\therefore\quad \text{H. C. F.}=x+2.$$

13. **解：** x^3-2x^2-2x-3 及 $2x^3+x^2+x-1$.

$$\begin{array}{r|l|r|l}
1 & 1-2-2-3 & 2+1+1-1 & 2 \\
 & 1+1+1 & 2-4-4-6 & \\
\hline
-3 & -3-3-3 & 5+5+5 & \\
 & -3-3-3 & 1+1+1 & 1 \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}$$

$$\therefore\quad \text{H. C. F.}=x^2+x+1.$$

14. **解：** $3x^3+2x^2-19x+6$ 及 $2x^3+x^2-13x+6$.

	$3+2-19+6$	$2+1-13+6$	2
3	$6+4-38+12$	$2+2-12$	
	$6+3-39+18$	$-1-1+6$	-1
	$1+1-6$	$-1-1+6$	
		0	

$\therefore\quad \text{H. C. F.}=x^2+x-6.$

15. 解：$x^4-x^3-3x^2+x+2$ 及 $2x^4+3x^3-x^2-3x-1.$

$1-2$	$1-1-3+1+2$	$2+3-1-3-1$	2
	$1+1-1-1$	$2-2-6+2+4$	
	$-2-2+2+2$	$5+5-5-5$	
	$-2-2+2+2$	$1+1-1-1$	
	0		

$\therefore\quad \text{H. C. F.}=x^3+x^2-x-1.$

16. 解：$3x^3-13x^2+23x-21$ 及 $6x^3+x^2-44x+21.$

$1-1$	$3-13+23-21$	$6+1-44+21$	2
	$3-10+7$	$6-26+46-42$	
	$-3+16-21$	$27-90+63$	
	$-3+10-7$	$3-10+7$	$1-1$
	$6-14$	$3-7$	
	$3-7$	$-3+7$	
		$-3+7$	
		0	

$\therefore\quad \text{H. C. F.}=3x-7.$

17. 解：$3x^3+8x^2-4x-15$ 及 $6x^4+10x^3-3x^2-2x+5.$

	$3+8-4-15$	$6+10-3-2+5$	$2-2$
1	$21+56-28-105$	$6+16-8-30$	
	$21+20-25$	$-6+5+28+5$	
	$36-3-105$	$-6-16+8+30$	
4	$84-7-245$	$21+20-25$	
	$84+80-100$	$609+580-725$	21
	$-87-145$	$609+1015$	
	$3+5$	$-435-725$	-145
		$-435-725$	
		0	

$\therefore\quad \text{H. C. F.}=3x+5.$

18. 解：$6x^5+7x^4-9x^3-7x^2+3x$ 及 $6x^5+7x^4+3x^2+7x^2-3x.$

1−1	6+7−9−7+3	6+7+3+ 7−3	1
	6+7−3	6+7−9− 7+3	
	−6−7+3	12+14−6	
	−6−7+3	6+ 7−3	
	0		

∴ H. C. F. $=6x^3+7x^2-3x=x(6x^2+7x-3)$.

19. 解: $6x^4-3x^3+7x^2+x-3$ 及 $2x^4+3x^3+7x^2+3x+9$.

3	6− 3+ 7+ 1− 3	2+3+ 7+ 3+ 9	
	6+ 9+21+ 9+27	6+9+21+ 9+27	1
	−12−14− 8−30	6+7+ 4+15	
3	6+ 7+ 4+15	2+17− 6+27	1+9
	6+51−18+81	2− 1+ 3	
	−44+22−66	18− 9+27	
	2− 1+ 3	18− 9+27	
		0	

∴ H. C. F. $=2x^2-x+3$.

20. 解: $6x^5-4x^4-11x^3-3x^2-3x-1$ 及 $4x^4+2x^3-18x^2+3x-5$.

	6− 4−11− 3− 3− 1	4+ 2−18+3−5	2
3	12− 8−22− 6− 6− 2	4− 8+ 2−2	
	12+ 6−54+ 9−15	10−20+5−5	5
	−14+32− 15+ 9− 2	10−20+5−5	
7	28−64+ 30−18+ 4	0	
	28+14−126+21−35		
	−78+156−39+39		
	2− 4+ 1− 1		

∴ H. C. F. $=2x^3-4x^2+x-1$.

21. 解: $x^5-x^3-4x^2-3x-2$ 及 $5x^4-3x^2-8x-3$.

5	5− 0− 3− 8− 3	1−0−1− 4− 3− 2	
	5+30+30+25	5−0−5−20−15−10	1
	−30−33−33− 3	5−0−3− 8− 3	
10	10+11+11+ 1	−2−12−12−10	
	10+60+60+50	1+ 6+ 6+ 5	1+5
	−49−49−49	1+ 1+ 1	
	1+ 1+ 1	5+ 5+ 5	
		5+ 5+ 5	
		0	

$\therefore$ H. C. F. $=x^2+x+1$.

22. 解：$3x^3-x^2-12x+4$, x^3-2x^2-5x+6 及 $7x^3+19x^2+8x-4$.

3	$3-1-12+4$	$1-2-5+6$	
	$3-6-15+18$	$5-10-25+30$	1
$5-7$	$5+3-14$	$5+3-14$	
	$5+10$	$-13-11+30$	
	$-7-14$	$-65-55+150$	-13
	$-7-14$	$-65-39+182$	
	0	$-16-32$	
		$1+2$	

$1+2$	$7+19+8-4$	7
	$7+14$	
	$5+8$	5
	$5+10$	
	$-2-4$	-2
	$-2-4$	
	0	

$\therefore$ H. C. F. $=x+2$.

23. 解：$x^3+ax^2-3x-3a$, x^3-x^2-3x+3 及 x^3+x^2-3x-3.

$$x^3+ax^2-3x-3a=x(x^2-3)+a(x^2-3)=(x+a)(x^2-3)$$
$$x^3-x^2-3x+3=x(x^2-3)-(x^2-3)=(x-1)(x^2-3)$$
$$x^3+x^2-3x-3=x(x^2-3)+(x^2-3)=(x+1)(x^2-3)$$

$\therefore$ H. C. F. $=x^2-3$.

24. 解：$7x^4y-6x^3y^2-18x^2y^3+4xy^4$ 及 $14x^3y-19x^2y^2-32xy^3+28y^4$.

-1	$7-6-18+4$	$14-19-32+28$	2
	$7-4-20$	$14-12-36+8$	
	$-2+2+4$	$-7+4+20$	-7
$1+1$	$1-1-2$	$-7+7+14$	
	$1-2$	$-3+6$	
	$1-2$	$1-2$	
	$1-2$		
	0		

$\therefore$ H. C. F. $=xy-2y^2=y(x-2y)$.

25. 解: $x(x-1)(x^3+4x^2+4x+3)$ 及 $(x-1)(x+3)(12x^3+x^2+x-1)$.

$$x(x-1)(x^3+4x^2+4x+3)=x(x-1)(x+3)(x^2+x+1)$$

$$\therefore\quad \text{H. C. F.}=(x-1)(x+3).$$

26. 解: $4x^3-8x^2-3x+9$ 及 $(2x^2-x-3)(2x^2-7x+6)$.

$$4x^3-8x^2-3x+9=(x+1)(2x-3)^2$$

$$(2x^2-x-3)(2x^2-7x+6)$$

$$=(x+1)(2x-3)(2x-3)(x-2)=(x+1)(2x-3)^2(x-2)$$

$$\therefore\quad \text{H. C. F.}=(x+1)(2x-3)^2.$$

習　題　XXIII

原本第 207 頁

1. 解: $3x-1,\ 9x^2-1$ 及 $9x^2+1$.

$$\therefore\quad \text{L. C. M.}=(9x^2-1)(9x^2+1).$$

2. 解: $(a+b)(a^5-b^5)$ 及 $(a-b)(a^5+b^5)$.

$$(a+b)(a^5-b^5)$$

$$=(a+b)(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

$$(a-b)(a^5+b^5)$$

$$=(a-b)(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$

$$\therefore\quad \text{L. C. M.}=(a^5-b^5)(a^5+b^5).$$

3. 解: $a^3+a^2+a,\ a^5-a^3$ 及 a^6-a^3.

$$a^3+a^2+a=a(a^2+a+1)$$

$$a^5-a^3=a^3(a^2-1)=a^3(a+1)(a-1)$$

$$a^6-a^3=a^3(a^3-1)=a^3(a-1)(a^2+a+1)$$

$$\therefore\quad \text{L. C. M.}=a^3(a^3-1)(a+1).$$

4. 解: $(x^3-y^3)(x-y)^3,\ (x^4-y^4)(x-y)^2$ 及 $(x^2-y^2)^2$

$$(x^3-y^3)(x-y)^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x-y)^3$$

$$(x^4-y^4)(x-y)^2=(x^2+y^2)(x-y)^3(x+y)$$

$$(x^2-y^2)^2=(x-y)^2(x+y)^2$$

$$\therefore\quad \text{L. C. M.}=(x-y)^4(x+y)^2(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2).$$

5. 解: $x^2-3x+2,\ x^2-5x+6$ 及 x^2-4x+3.

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

$$\therefore\quad \text{L. C. M.}=(x-1)(x-2)(x-3).$$

6. 解: $x^2-(y+z)^2,\ y^2-(z+x)^2$ 及 $z^2-(x+y)^2$.

$x^2-(y+z)^2=(x+y+z)(x-y-z)$

$y^2-(z+x)^2=(y+z+x)(y-z-x)$

$z^2-(x+y)^2=(z+x+y)(z-x-y)$

$\therefore$ L. C. M. $=(x+y+z)(x-y-z)(-x+y-z)(-x-y+z)$.

7. 解: $2x^2+3xy-9y^2,\ 3x^2+8xy-3y^2$ 及 $6x^2-11y+3y^2$.

$2x^2+3xy-9y^2=(2x-3y)(x+3y)$

$3x^2+8xy-3y^2=(3x-y)(x+3y)$

$6x^2-11xy+3y^2=(2x-3y)(3x-y)$

$\therefore$ L. C. M. $=(2x-3y)(x+3y)(3x-y)$.

8. 解: x^3+x^2+x+1 及 x^3-x^2+x-1.

$x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)=(x^2+1)(x+1)$

$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x^2+1)(x-1)$

$\therefore$ L. C. M. $=(x^2+1)(x+1)(x-1)$.

9. 解: $2a^2x+2x^2y+3y^2x+3a^2y$ 及 $(2x^2-3a^2)y+(2a^2-3y^2)x$.

$2a^2x+2x^2y+3y^2x+3a^2y=a^2(2x+3y)+xy(2x+3y)$

$=(a^2+xy)(2x+3y)$

$(2x^2-3a^2)y+(2a^2-3y^2)x=2x^2y-3a^2y+2a^2x-3xy^2$

$=xy(2x-3y)+a^2(2x-3y)=(a^2+xy)(2x-3y)$.

$\therefore$ L. C. M. $=(a^2+xy)(2x+3y)(2x-3y)$.

10. 解: $8x^3-18xy^2,\ 8x^3+8x^2y-6xy^2$ 及 $8x^2-2xy-15y^2$.

$8x^3-18xy^2=2x(4x^2-9y^2)=2x(2x+3y)(2x-3y)$

$8x^3+8x^2y-6xy^2=2x(4x^2+4xy-3y^2)$

$=2x(2x-y)(2x+3y)$

$8x^2-2xy-15y^2=(2x-3y)(4x+5y)$

$\therefore$ L. C. M. $=2x(2x+3y)(2x-3y)(2x-y)(4x+5y)$.

11. 解: $x^3+y^3,\ x^3-y^3$ 及 $x^4+x^2y^2+y^4$.

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$

$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

$\therefore$ L. C. M. $=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$.

12. 解: $x^6-1,\ 3x^3-5x^2-3x+5$ 及 x^4-1.

$x^6-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$

$3x^3-5x^2-3x+5=3x(x^2-1)-5(x^2-1)$

$=(3x-5)(x^2-1)$

$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x^2+1)(x-1)(x+1)$

$\therefore$ L. C. M. $=(x^2-1)(x^4+x^2+1)(3x-5)(x^2+1)$.

13. 解：$8x^3+27, 16x^4+36x^2+81$ 及 $6x^2+3x-6$.

$8x^3+27=(2x)^3+3^3=(2x+3)(4x^2-6x+9)$.

$16x^4+36x^2+81=16x^4+72x^2+81-36x^2$

$=(4x^2+6x+9)(4x^2-6x+9)$.

$6x^2+5x-6=(2x+3)(3x-2)$

$\therefore$ L. C. M. $=(2x+3)(4x^2-6x+9)(4x^2+6x+9)(3x-2)$

14. 解：$x^2-4a^2, x^3+2ax^2+4a^2x+8a^3$ 及 $x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3$.

$x^2-4a^2=(x-2a)(x+2a)$

$x^3+2ax^2+4a^2x+8a^3=x^2(x+2a)+4a^2(x+2a)$

$=(x^2+4a^2)(x+2a)$

$x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3=x^2(x-2a)+4a^2(x-2a)$

$=(x^2+4a^2)(x-2a)$

$\therefore$ L. C. M. $=(x-2a)(x+2a)(x^2+4a^2)$.

15. 解：$x^2+2x, x^2+bx+2x+2b$ 及 $x^3+ax^2-b^2x-ab^2$.

$x^2+2x=x(x+2)$

$x^2+bx+2x+2b=x(x+b)+2(x+b)=(x+2)(x+b)$

$x^3+ax^2-b^2x-ab^2=x^2(x+a)-b^2(x+a)$

$=(x^2-b^2)(x+a)=(x-b)(x+b)(x+a)$

$\therefore$ L. C. M. $=x(x+2)(x+b)(x-b)(x+a)$.

16. 解：$(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)$ 及 $(x^2+5x+6)(2x^2-3x-5)$

$(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

$(x^2+5x+6)(2x^2-3x-5)=(x+2)(x+3)(x+1)(2x-5)$

$\therefore$ L. C. M. $=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(2x-5)$.

17. 解：$(x^3-8)(27x^3+1)$ 及 $(2x^3+5x^2+10x+4)(x^3-x^2-x-2)$

$(x^3-8)(27x^3+1)$

$=(x-2)(x^2+2x+4)(3x+1)(9x^2-3x+1)$

$(2x^3+5x^2+10x+4)(x^3-x^2-x-2)$

$=(2x+1)(x^2+2x+4)(x-2)(x^2+x+1)$

$\therefore$ L. C. M. $=(x-2)(x^2+2x+4)(3x+1)(9x^2$

$\times(2x+1)(x^2+x+1)$.

18. 解: $x^3-6x^2+11x-6$, $2x^3-7x^2+7x-2$ 及 $2x^3+x^2-13x+6$.

1	$1-6+11-6$	$2-7+7-2$	2
	$1-3-2$	$2-12+22-12$	
-3	$-3+9-6$	$5-15+10$	
	$-3+9-6$	$1-3+2$	
	0		

故此二式之 H. C. F. 爲 x^2-3x+2.

$\therefore$ 二式之 L. C. M. 爲 $(x^3-6x^2+11x-6)(2x^3-7x^2+7x-2)\div(x^2-3x+2)=2x^4-13x^3+28x^2-23x+6$.

$1-7$	$2-13+28-23+6$	$2+1-13+6$	$1+3$
	$2+1-13+6$	$2-5+2$	
	$-14+41-29+6$	$6-15+6$	
	$-14-7+91-42$	$6-15+6$	
	$48-120+48$	0	
	$2-5+2$		

答: 此三式之 L. C. M. 爲 $(2x^4-13x^3+28x^2-23x+6)\times(2x^3+x^2-13x+6)\div(2x^2-5x+2)=2x^5-7x^4-11x^3+61x^2-63x+18=(x-1)(x-2)(x-3)(x+3)(2x-1)$.

19. 解: x^4+5x^2+4x+5, $2x^4-x^3+10x^2+4x+5$ 及 $2x^4+x^3+7x^2+3x+3$.

-1	$1-0+5+4+5$	$2-1+10+4+5$	2
	$1-0+4+5$	$2+0+10+8+10$	
	$1-1+5$	$-1+0-4-5$	-1
		$-1+1-5$	
		$-1+1-5$	-1
		$-1+1-5$	
		0	

故 (1) 與 (2) 二式之 H. C. F. 爲 x^2-x+5.

$\therefore$ 二式之 L. C. M. 爲 $(x^4+5x^2+4x+5)(2x^4-x^3+10x^2+4x+5)\div(x^2-x+5)=(x^2+x+1)(2x^4-x^3+10x^2+4x+5)$.

$-1-2$	$2+1+7+3+3$	$2-1+10+4+5$	1
	$2-3-1-2$	$2+1+7+3+3$	
	$4+8+5+3$	$-2+3+1+2$	-1
	$4-6-2-4$	$-2-1-1$	
	$14+7+7$	$4+2+2$	2
	$2+1+1$	$4+2+2$	
		0	

故 (2), (3) 式之 L. C. M. 為 $(x^2+3)(2x^4-x^3+10x^2+4x+5)$

答：此三式之 L. C. M. 為 $(2x^4-x^3+10x^2+4x+5)$
$\times(x^2+x+1)(x^2+3)$.

20. 解：$2x^4-x^3+2x^2+3x-2$, $2x^4+3x^3-4x^2+13x-6$ 及 $x^4+3x^3+x^2+5x+6$.

$2-1+2+3-2$	$2+3-4+13-6$	1
$2-3+5-2$	$2-1+2+3-2$	
$2-3+5-2$	$4-6+10-4$	
$2-3+5-2$	$2-3+5-2$	$1+1$
0		

故 (1), (2) 式之 L. C. M. 為 $(x+1)(2x^4+3x^3-4x^2+13x-6)$

$2+3-4+13-6$	$1+3+1+5+6$	$2+1$
$2+6+2+10+12$	$1+2-1+6$	
$-3-6+3-18$	$1+2-1+6$	1
$1+2-1+6$	$1+2-1+6$	
	0	

故(2), (3) 式之 L. C. M. 為 $(x+1)(2x^4+3x^3-4x^2+13x-6)$

答：此三式之 L. C. M. 為 $(x+1)(2x^4+3x^3-4x^2+13x-6)$

VIII. 有理分式

習題 XXIV

原本第 215 頁

1. 解：$\dfrac{x^5y^3-4x^3y^5}{x^3y^2-2x^2y^3}=\dfrac{x^3y^3(x^2-4y^2)}{x^2y^2(x-2y)}=\dfrac{x^3y^3(x-2y)(x+2y)}{x^2y^2(x-2y)}$

$=xy(x+2y)$.

2　解：$\dfrac{(x^6-y^6)(x+y)}{(x^3+y^3)(x^4-y^4)}=\dfrac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)(x+y)}{(x^3+y^3)(x^2+y^2)(x^2-y^2)}$

$$=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}.$$

3. 解：$\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+2x-63}=\dfrac{(x-7)(x+3)}{(x+9)(x-7)}=\dfrac{x+3}{x+9}.$

4. 解：$\dfrac{3x^2-8x-3}{3x^2+7x+2}=\dfrac{(3x+1)(x-3)}{(3x+1))x+2)}=\dfrac{x-3}{x+2}.$

5. 解：$\dfrac{3x^2-18bx+27b^2}{2x^2-18b^2}=\dfrac{3(x-3b)^2}{2(x-3b)(x+3b)}=\dfrac{3(x-3b)}{2(x+3b)}.$

6. 解：$\dfrac{5x^2+6ax+a^2}{5x^2+2ax-3a^2}=\dfrac{(5x+a)(x+a)}{(5x-3a)(x+a)}=\dfrac{5x+a}{5x-3a}.$

7. 解：$\dfrac{(x^2-25)(x^2-8x+15)}{(x^2-9)(x^2-7x+10)}=\dfrac{(x-5)^2(x+5)(x-3)}{(x-3)(x+3)(x-2)(x-5)}$

$$=\frac{(x-5)(x+5)}{(x+3)(x-2)}.$$

8. 解：$\dfrac{15x^2-46x+35}{10x^2-29x+21}=\dfrac{(5x-7)(3x-5)}{(5x-7)(2x-3)}=\dfrac{3x-5}{2x-3}.$

9. 解：$\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}=\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^6-y^6}$

$$=\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)}=\frac{1}{x^2-y^2}.$$

10. 解：$\dfrac{x^2-y^2+z^2+2xz}{x^2+y^2-z^2+2xy}=\dfrac{(x+z)^2-y^2}{(x+y)^2-z^2}$

$$=\frac{(x-y+z)(x+y+z)}{(x+y-z)(x+y+z)}=\frac{x-y+z}{x+y-z}.$$

11. 解：$\dfrac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{1-x^2}=\dfrac{1+2xy+x^2y^2-x^2-2xy+y^2}{1-x^2}$

$$=\frac{(1-y^2)(1-x^2)}{1-x^2}=1-y^2.$$

12. 解：$\dfrac{2mx-my-12nx+6ny}{6mx-3my-2nx+ny}=\dfrac{m(2x-y)-6n(2x-y)}{3m(2x-y)-n(2x-y)}$

$$=\frac{(m-6n)(2x-y)}{(3m-n)(2x-y)}=\frac{m-6n}{3m-n}.$$

13. 解: $\dfrac{2x^3+7x^2-7x-12}{2x^3+3x^2-14x-15}=\dfrac{(x+1)(2x^2+5x-12)}{(x+1)(2x^2+x-15)}$

$$=\frac{2x^2+5x-12}{2x^2+x-15}.$$

14. 解: $\dfrac{x^3-8x^2+19x-12}{2x^3-13x^2+17x+12}=\dfrac{(x-1)(x^2-7x+12)}{(2x+1)(x^2-7x+12)}=\dfrac{x-1}{2x+1}$

15. 解: $\dfrac{x^4+x^3+5x^2+4x+4}{2x^4+2x^3+14x^2+12x+12}=\dfrac{(x^2+4)(x^2+x+1)}{2(x^2+6)(x^2+x+1)}$

$$=\frac{x^2+4}{2(x^2+6)}.$$

16. 解: $\dfrac{x^3-2x^2-x-6}{x^4+3x^3+8x^2+8x+8}=\dfrac{(x-3)(x^2+x+2)}{(x^2+2x+4)(x^2+x+2)}$

$$=\frac{x-3}{x^2+2x+4}.$$

17. 解: $\dfrac{(x^2+c^2)^2-4b^2x^2}{x^4+4bx^3+4b^2x^2-c^4}=\dfrac{(x^2+2bx+c^2)(x^2-2bx+c^2)}{(x^2+2bx+c^2)(x^2+2bx-c^2)}$

$$=\frac{x^2-2bx+c^2}{x^2+2bx-c^2}.$$

18. 解: $\dfrac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$

此式中分子,分母僅能有之公因子為 $a-b$, $b-c$ 及 $c-a$, 今於分子中設 $a=b$, 得分子為 0. 故知分子能以 $a-b$ 除盡,同樣, $b-c$ 及 $c-a$ 亦能將分子除盡.

故此分式中,分子可為分母除盡,因分子,分母皆為三次,故知其商必為一數字,又當以 a 之多項式排列時,二者中含 a^2 之項為 $-3a^2(b-c)$ 及 $-a^2(b-c)$, 故此數字為 3, 即其商為 3.

習　題　XXV

原本第22[illegible]頁

1. 解: $\dfrac{1}{2a-3b}+\dfrac{1}{2a+3b}-\dfrac{6b}{4a^2-9b^2}=\dfrac{2a+3b+2a-3b-6b}{(2a-3b)(2a+3b)}$

$$=\frac{2(2a-3b)}{(2a-3b)(2a+3b)}=\frac{2}{2a+3b}.$$

2. 解: $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^3+1}$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(x-1)(x^2-x+1)+(x^2-x+1)+(x-1)}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{x^3-x^2+2x-1}{(x^3+1)(x-1)}.$$

3. 解: $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}$

$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{(x-3)+(x-1)+(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{3(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{3}{(x-1)(x-3)}.$$

4. 解: $\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{x+2}{(2-x)(x-3)}+\dfrac{x+3}{(x-1)(x-3)}$

$$=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}+\frac{x+2}{(x-2)(x-3)}+\frac{x+3}{(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{(x+1)(x-3)+(x+2)(x-1)+(x+3)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-2x-3+x^2+x-2+x^2+x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{3x^2-11}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

5. 解: $\dfrac{1}{x+b}-\dfrac{1}{x+c}+\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-c}$

$$=\frac{(x-b)(x^2-c^2)-(x^2-b^2)(x-c)+(x+b)(x^2-c^2)-(x+c)(x^2-b^2)}{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}$$

$$=\frac{2b^2x-2c^2x}{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}=\frac{2x(b^2-c^2)}{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}.$$

6. 解: $$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{a}{(a-b)(a-c)}-\frac{b}{(b-c)(a-b)}+\frac{c}{(a-c)(b-c)}$$
$$=\frac{ab-ac-ab+bc+ac-bc}{(a-b)(b-c)(a-c)}=0.$$

7. 解: $$\frac{yz(x+a)}{(x-y)(x-z)}+\frac{zx(y+a)}{(y-z)(y-x)}+\frac{xy(z+a)}{(z-x)(z-y)}$$
$$=\frac{yz(x+a)}{(x-y)(x-z)}-\frac{zx(y+a)}{(x-y)(y-z)}+\frac{xy(z+a)}{(x-z)(y-z)}$$
$$=\frac{yz(x+a)(y-z)-zx(y+a)(x-z)+xy(z+a)(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$
$$=\frac{a\{z^2(x-y)+y^2(x-z)+x^2(y-z)\}}{(x-y)(x-z)(y-z)}=a.$$

8. 解: $$x+\frac{1}{3-2x}-\frac{8x^4-33x}{8x^3-27}-\frac{2x+6}{4x^2+6x+9}$$
$$=x-\frac{1}{2x-3}-\frac{8x^4-33x}{8x^3-27}-\frac{2x+6}{4x^2+6x+9}=-\frac{8x^2+6x-9}{8x^3-27}.$$

9. 解: $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2$$
$$-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(xy+\frac{1}{xy}\right)$$
$$=x^2+2+\frac{1}{x^2}+y^2+2+\frac{1}{y^2}+x^2y^2+2+\frac{1}{x^2y^2}-x^2y^2-y^2$$
$$-x^2-1-1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2y^2}=4.$$

10. 解: $$\frac{(a+b)^3-c^3}{a+b-c}+\frac{(b+c)^3-a^3}{b+c-a}+\frac{(c+a)^3-b^3}{c+a-b}$$
$$=\frac{(a+b-c)[(a+b)^2+(a+b)c+c^2]}{a+b-c}$$
$$+\frac{(b+c-a)[(b+c)^2+(b+c)a+a^2]}{b+c-a}$$
$$+\frac{(c+a-b)[(c+a)^2+(c+a)b+b^2]}{c+a-b}$$

$=a^2+2ab+b^2+ac+bc+c^2+b^2+2bc+c^2+ab+ac$
$+a^2+c^2+2ac+a^2+bc+ab+b^2$
$=3a^2+3b^2+3c^2+4ab+4ac+4bc.$

11. 解：$\dfrac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+6}-\dfrac{3x^2-14x-5}{3x^3-2x^2-10x-3}$

$=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2-x-3)}-\dfrac{(3x+1)(x-5)}{(3x+1)(x^2-x-3)}$

$=\dfrac{x+2-x+5}{x^2-x-3}=\dfrac{7}{x^2-x-3}.$

12. 解：$\dfrac{1}{x^4-4x^2-x+2}+\dfrac{1}{2x^4-3x^3-5x^2+7x-2}$

$+\dfrac{1}{2x^4+3x^3-2x^2-2x+1}$

$=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)(x^2+x-1)}+\dfrac{1}{(x-2)(2x-1)(x^2+x-1)}$

$+\dfrac{1}{(x+1)(2x-1)(x^2+x-1)}$

$=\dfrac{2x-1+x+1+x-2}{(x+1)(x-2)(x^2+x-1)(2x-1)}$

$=\dfrac{2(2x-1)}{(x+1)(x-2)(x^2+x-1)(2x-1)}=\dfrac{2}{x^4-4x^2-x+2}.$

13. 解：$\left(a^4-\dfrac{1}{a^4}\right)\div\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$

$=\dfrac{a^8-1}{a^4}\times\dfrac{a}{a^2-1}=\dfrac{(a^2-1)(a^6+a^4+a^2+1)a}{a^4(a^2-1)}$

$=\dfrac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3}.$

14. 解：$\left(\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}\right)(a^4+a^3)=\dfrac{1-a+a^2}{a^3}\times a^3(a+1)$

$=a^3+1.$

15. 解：$\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}\cdot\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\div\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}$

$=\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x+4)(x-1)}\times\dfrac{(x+3)(x+4)}{(x-3)(x-5)}\times\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{x+1}{x-1}.$

16. 解: $\frac{1}{x}-\left\{1-\left[\frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)}\right)\right]\right\}$

$=\frac{1}{x}-\left\{1-\left[\frac{x-1}{x}+\frac{4x-6}{2x(x+1)}\right]\right\}$

$=\frac{1}{x}-\left\{1-\frac{2x^2+4x-8}{2x(x+1)}\right\}$

$=\frac{1}{x}-\frac{-2x+8}{2x(x+1)}=\frac{4x-6}{2x(x+1)}=\frac{2x-3}{x(x+1)}.$

17. 解: $\frac{ax+x^2}{2b-cx}\cdot\frac{2bx^3-cx^3}{(a+x)^2}=\frac{x(a+x)}{2b-cx}\cdot\frac{x^2(2b-cx)}{(a+x)^2}=\frac{x^3}{a+x}.$

18. 解: $(x^2-y^2-z^2+2yz)\div\frac{x-y+z}{x-y-z}$

$=(x+y-z)(x-y+z)\cdot\frac{x-y-z}{x-y+z}$

$=(x+y-z)(x-y-z)$

$=x^2-y^2+z^2-2xz.$

19. 解: $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$

$=\frac{(a+b)(a^2+ab+b^2)-a^3-b^3}{a^3-b^3}\cdot\frac{a^2+2ab+b^2+a^2+b^2}{a^2-b^2}$

$=\frac{2ab(a+b)\cdot2(a^2+ab+b^2)}{(a^3-b^3)(a+b)(a-b)}=\frac{4ab(a^2+ab+b^2)}{(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}$

$=\frac{4ab}{(a-b)^2}.$

20. 解: $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y+z}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}}\div\dfrac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x+z}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x+z}}=\dfrac{\frac{y+z-x}{x(y+z)}}{\frac{y+z+x}{x(y+z)}}\div\dfrac{\frac{x+z-y}{y(x+z)}}{\frac{x+z+y}{y(x+z)}}$

$=\frac{y+z-x}{y+z+x}\cdot\frac{x+z+y}{x+z-y}=\frac{y+z-x}{x+z-y}.$

21. 解: $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}\div\dfrac{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}=\dfrac{\frac{a^2+b^2}{ab}}{\frac{a^2-b^2}{ab}}\div\dfrac{\frac{b^4-a^4}{a^4b^4}}{\frac{b^2+2ab+a^2}{a^2b^2}}$

$$=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\div\frac{(b^2-a^2)(b^2+a^2)}{a^2b^2(b^2+2ab+a^2)}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2b^2(a+b)^2}{(b^2-a^2)(b^2+a^2)}$$

$$=\frac{a^2b^2(a+b)^2}{(a+b)(a-b)(a+b)(-a+b)}=-\frac{a^2b^2}{(a-b)^2}.$$

22. **解:** $$\frac{x-2}{x-2\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}=\frac{x-2}{x-2\dfrac{x}{\dfrac{x-3x+1}{x-2}}}=\frac{x-2}{x-2\dfrac{x^4-2x}{x^2-3x+1}}$$

$$=\frac{x-2}{x-\dfrac{2x^2-6x+2+x^2-2x}{x^2-3x+1}}=\frac{x-2}{\dfrac{x^8-3x^2+x-3x^2+8x-2}{x^2-3x+1}}$$

$$=\frac{(x-2)(x^2-3x+1)}{(x-2)(x^2-4x+1)}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-4x+1}.$$

23. **解:** $$x+\frac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}=x+\frac{1}{x+\dfrac{x}{x^2+1}}=x+\frac{x^2+1}{x^8+2x}$$

$$=\frac{x^4+2x^2+x^2+1}{x^8+2x}=\frac{x^4+3x^2+1}{x^3+2x}.$$

習　題　XXVI

原本第 230 頁

1. **解:** $$\lim_{x\doteq 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}=\lim_{x\doteq 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$$

$$=\lim_{x\doteq 2}\frac{x-3}{x-4}=\frac{1}{2}.$$

2. **解:** $$\lim_{x\doteq 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-2x+1}=\lim_{x\doteq 1}\frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\doteq 1}\frac{x^2-2x-2}{x^2+x-1}=-3.$$

3. **解:** $$\lim_{x\doteq 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\doteq 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\doteq 1}\frac{x+1}{x-1}=\infty.$$

4. 解：$\lim_{x\doteq a}\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2-(a+b)x+ab}=\lim_{x\doteq a}\frac{(x-a)^2}{(x-a)(x-b)}$

$$=\lim_{x\doteq a}\frac{x-a}{x-b}=0.$$

5. 解：$\lim_{x\doteq -2}\frac{(3x+1)(x+2)^2}{(x^2-4)(x^2+3x+2)}=\lim_{x\doteq -2}\frac{(3x+1)(x+2)^2}{(x-2)(x+2)(x+1)(x+2)}$

$$=\lim_{x\doteq -2}\frac{3x+1}{(x-2)(x+1)}=-\frac{5}{4}.$$

6. 解：$\lim_{x\doteq 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1}=\lim_{x\doteq 1}\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^3}$

$$=\lim_{x\doteq 1}\frac{x+1}{x-1}=\infty.$$

7. 解：$\lim_{x\doteq\infty}\frac{3x^2-x+5}{2x^2+6x-7}=\lim_{x\doteq\infty}\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{6}{x}-\frac{7}{x^2}}=\frac{3}{2},$

$$\lim_{x\doteq\infty}\frac{x^2+1}{x}=\lim_{x\doteq\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1}=\infty,$$

$$\lim_{x\doteq\infty}\frac{3x}{x^2+1}=\lim_{x\doteq\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0,$$

$$\lim_{x\doteq\infty}\frac{(2x^2+1)(x^3-5)}{(x^4+1)(x-6)}=\lim_{x\doteq\infty}\frac{2x^5+x^3-10x^2-5}{x^5-6x^4+x-6}$$

$$=\lim_{x\doteq\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}-\frac{10}{x^3}-\frac{5}{x^5}}{1-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^4}-\frac{6}{x^5}}=2.$$

8. 解：$\lim_{x\doteq 3}\left[\frac{x-1}{x^2-9}-\frac{x-2}{x(x-3)}\right]=\lim_{x\doteq 3}\frac{-2(x-3)}{x(x^2-9)}$

$$=\lim_{x\doteq 3}\frac{-2}{x(x+3)}=-\frac{2}{18}=-\frac{1}{9}.$$

9. 解：$\lim\limits_{x\doteq 1}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x(x-1)}\right]=\lim\limits_{x\doteq 1}\left[\frac{x+2}{x(x-1)}\right]=\frac{3}{0}=\infty.$

10. 解：$\lim\limits_{x\doteq 2}\dfrac{x^2+\dfrac{x+1}{x-2}}{x^2+\dfrac{x-1}{x-2}}=\lim\limits_{x\doteq 2}\dfrac{\dfrac{x^2(x-2)+(x+1)}{x-2}}{\dfrac{x^2(x-2)+(x-1)}{x-2}}$

$$=\lim_{x\doteq 2}\frac{x^3-2x^2+x+1}{x^3-2x^2+x-1}=3.$$

11. 解：$\lim\limits_{x\doteq\infty}\dfrac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{3x+1}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\doteq\infty}\dfrac{\dfrac{x^2+x-x^2+x}{x^2-1}}{\dfrac{3x+1}{x^2+1}}$

$$=\lim_{x\doteq\infty}\frac{2x^3+2x}{3x^3+x^2-3x-1}=\lim_{x\doteq\infty}\frac{2+\dfrac{2}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{3}.$$

習　題　XXVII

原本第 235 頁

1. 解：$\dfrac{6x-1}{3x+2}-\dfrac{4x-7}{2x-5}=0$

$$12x^2-30x-2x+5-12x^2+21x-8x+14=0$$

$$19x=19 \qquad \therefore \quad x=1.$$

2. 解：$\dfrac{6x}{5x-1}+\dfrac{8}{3-15x}=\dfrac{1}{6}$

$$\frac{6x}{5x-1}+\frac{8}{3(1-5x)}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{6x}{5x-1}-\frac{8}{3(1-5x)}=\frac{1}{6}$$

$$36x-16=5x-1$$

$$31x=15$$

$$\therefore \quad x=\frac{15}{31}.$$

3. **解:** $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{4}{x^2-6x+8}$

$$\frac{4x-16-x+2}{x^2-6x+8}=\frac{4}{x^2-6x+8}$$

$$3x-14=4$$

$$3x=18$$

$$\therefore \quad x=6.$$

4. **解:** $\dfrac{3}{2x+3}+\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{8}{2x-7x-15}=0$

$$3x-15+2x+3-8=0$$

$$5x=20 \qquad \therefore \quad x=4.$$

5. **解:** $\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}+\dfrac{2}{(x-3)(x+2)}+\dfrac{3}{(x+2)(x+1)}=0$

$$(x+2)+2(x+1)+3(x-3)=0$$

$$x+2+2x+2+3x-9=0$$

$$6x=5$$

$$\therefore \quad x=\frac{5}{6}.$$

6. **解:** $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^2+4x-5}+\dfrac{3}{x^2+6x+5}=0$

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)}-\frac{2}{(x-1)(x+5)}+\frac{3}{(x+1)(x+5)}=0$$

$$2(x+5)-2(x+1)+3(x-1)=0$$

$$3x=-5 \qquad \therefore \quad x=-\frac{5}{3}.$$

7. **解:** $\dfrac{x+1}{3x+1}+\dfrac{2x}{5-6x}=\dfrac{5}{5+9x-18x^2}$

$$\frac{(x+1)(5-6x)+2x(3x+1)}{5+9x-18x^2}=\frac{5}{5+9x-18x^2}$$

$$-6x^2-x+5+6x^2+2x=5$$

$$\therefore \quad x=0.$$

8. 解: $\frac{x+a}{b(x+b)}+\frac{x+b}{a(x+a)}=\frac{a+b}{ab}$

$$\frac{a(x+a)^2+b(x+b)^2}{ab(x+a)(x+b)}=\frac{a+b}{ab}$$

$$ax^2+2a^2x+a^3+bx^2+2b^2x+b^3-ax^2-2abx-bx^2$$
$$-a^2x-b^2x-a^2b-ab^2=0$$
$$x(a^2+b^2-2ab)=-a^2-b^2+a^2b+ab^2$$
$$\therefore\quad x=-\frac{(a+b)(a-b)^2}{(a-b)^2}=-(a+b).$$

9. 解: $\frac{x^3+1}{x+1}-\frac{x^3-1}{x-1}=20$

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}-\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=20$$
$$x^2-x+1-x^2-x-1=20$$
$$\therefore\quad x=-10.$$

10. 解: $\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+4}+\frac{x-1}{x^2+3x-4}=0$

$$\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x+4)}+\frac{x-1}{(x-1)(x+4)}=0$$
$$x+1+1=0\qquad\therefore\quad x=-2.$$

11. 解: $\frac{x-8}{x-3}-\frac{x-9}{x-4}=\frac{x+7}{x+8}-\frac{x+2}{x+3}$

$$1+\frac{-5}{x-3}-1+\frac{5}{x-4}=1+\frac{-1}{x+8}-1+\frac{1}{x+3}$$
$$\frac{5}{(x-3)(x-4)}=\frac{5}{(x+8)(x+3)}$$
$$(x-3)(x-4)=(x+8)(x+3)$$
$$x^2-7x+12=x^2+11x+24$$
$$18x=-12$$
$$\therefore\qquad x=-\frac{2}{3}.$$

12. 解: $\frac{x+7}{x+6}+\frac{x+9}{x+8}=\frac{x+10}{x+9}+\frac{x+6}{x+5}$

$$1+\frac{1}{x+6}+1+\frac{1}{x+8}=1+\frac{1}{x+9}+1+\frac{1}{x+5}$$

$$\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+9}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+8}$$

$$\frac{3}{(x+6)(x+9)}=\frac{3}{(x+5)(x+8)}$$

$$(x+6)(x+9)=(x+5)(x+8)$$

$$2x=-14$$

$$\therefore\quad x=-7.$$

13. 解: $\frac{x^3+2}{x-2}-\frac{x^3-2}{x+2}-\frac{15}{x^2-4}=4x.$

$$(x^3+2)(x+2)-(x^3-2)(x-2)-15=4x(x^2-4)$$

$$x^4+2x^3+2x+4-x^4+2x^3+2x-4=4x^3-16x+15$$

$$20x=15$$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{4}.$$

14. 解: $\frac{1}{x-1}-\frac{x-2}{x^2-1}+\frac{3x^2+x}{1-x^4}=0$

$$\frac{1}{x-1}-\frac{x-2}{x^2-1}-\frac{3x^2+x}{x^4-1}=0$$

$$(x+1)(x^2+1)-(x-2)(x^2+1)-(3x^2+x)=0$$

$$x^3+x^2+x+1-x^3+2x^2-x+2-3x^2-x=0$$

$$\therefore\quad x=3.$$

15. 解: $\frac{3}{x^3-8}+\frac{2x+5}{2x^2+4x+8}-\frac{1}{x-2}=0$

$$\frac{3\times 2+(2x+5)(x+2)-2(x^2+2x+4)}{2(x^3-8)}=0$$

$$6+2x^2+x-10-2x^2-4x-8=0$$

$$3x=-12\qquad\therefore\quad x=-4.$$

16. 解: $\frac{ax+c}{x-p}+\frac{bx+d}{x-q}=a+b$

$$\frac{ax+c}{x-p}-a+\frac{bx+d}{x-q}-b=0$$

$$\frac{ap+c}{x-p}+\frac{bq+d}{x-q}=0$$

$$(ap+c)(x-q)+(bq+d)(x-p)=0$$

$$apx+cx-apq-cq+bqx+dx-bpq-dp=0$$

$$x(c+d+ap+bq)=cq+dp+apq+bpq$$

$$\therefore\quad x=\frac{cq+dp+(a+b)pq}{c+d+ap+bq}.$$

17. 解: $\frac{x^2+7x-8}{x-1}+\frac{x^2+x+3}{x+2}+\frac{2x^2-x+7}{x+3}=4x$

$$x+8+x-1+\frac{5}{x+2}+2x-7+\frac{28}{x+3}=4x$$

$$\frac{5}{x+2}+\frac{28}{x+2}=0$$

$$5x+15+28x+56=0$$

$$33x=-71$$

$$\therefore\quad x=-\frac{71}{33}.$$

18. 解: $\frac{x^2-ax+2bx-2ab}{x-a}+\frac{b^2-x^2}{x-2b}+\frac{3c^2}{x-2c}=0$

$$\frac{(x-a)(x+2b)}{x-a}-\frac{x^2-b^2}{x-2b}+\frac{3c^2}{x-2c}=0$$

$$x+2b-(x+2b)-\frac{3b^2}{x-2b}+\frac{3c^2}{x-2c}=0$$

$$-\frac{3b^2}{x-2b}+\frac{3c^2}{x-2c}=0$$

$$-b^2x+2b^2c+c^2x-2bc^2=0$$

$$(c^2-b^2)x=2bc(c-b)$$

$$(c+b)x=2bc$$

$$\therefore\quad x=\frac{2bc}{b+c}.$$

19. 解: $\frac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)}+\frac{(x-b)^2}{(x-c)(x-a)}+\frac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)}=3$

$$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$3x(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$\therefore\quad x=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{3(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}=\frac{a+b+c}{3}.$$

20. **解:** $\dfrac{3x+2}{x^2+x}-\dfrac{x-5}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x^2-x}=0$

$$\frac{3x+2}{x(x+1)}-\frac{x-5}{(x-1)(x+1)}-\frac{x-5}{x(x-1)}=0$$

$$(3x+2)(x-1)-(x-5)x-(x-2)(x+1)=0$$

$$3x^2-x-2-x^2+5x-x^2+x+2=0$$

$$x^2+5x=0$$

$$\therefore\quad x=-5.$$

21. **解:** $\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x+6}{x^2-4}=0$

$$a(x-2)+2(x+2)-x-6=0$$

$$(a+1)x-2(a+1)=0$$

$$(a+1)x=2(a+1)$$

$$\therefore\quad x=2.$$

惟因 2 使分式中之分母爲 0,故不得爲根。

22. **解:** $\begin{cases}\dfrac{3x+y-1}{x-y+2}=\dfrac{6}{7}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[2mm]\dfrac{x+9}{y+4}=\dfrac{x+3}{y+3}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1) 式, $21x+7y-7=6x-6y+12$

即 $15x+13y-19=0$ ……………… (3)

從 (2) 式, $xy+9y+3x+27=xy+3y+4x+12$

即 $6y-x+15=0$ ……………… (4)

$15\times(4)+(3)$, $103y=-206$

$$\therefore\quad y=-2.$$

代入 (4) 式,得 $x=3$.

23. **解:** $\begin{cases}\dfrac{y-2}{x-3}+\dfrac{x-y}{x^2-9}=\dfrac{y-4}{x+3}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[2mm]\dfrac{2}{x^2-2x}+\dfrac{3}{xy-2y}+\dfrac{9}{xy}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1) 式， $xy-2x+3y-6+x-y-xy+4x+3y-12=0$

$3x+5y-18=0$ ……………………………… (3)

從 (2) 式， $6x+y-9=0$ ……………………………… (4)

$2\times(3)-(4)$， $9y=27$

$\therefore\ y=3.$

代入 (4) 式，得 $x=1.$

24. 解：
$$\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=a & \cdots\cdots (1)\\ \dfrac{yz}{y+z}=b & \cdots\cdots (2)\\ \dfrac{zx}{z+x}=c & \cdots\cdots (3)\end{cases}$$

從 (1) 式， $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a}$ ……………………………… (4)

從 (2) 式， $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{b}$ ……………………………… (5)

從 (3) 式， $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{c}$ ……………………………… (6)

$(4)+(5)+(6)$， $2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{bc+ca+ab}{2abc}$ ……… (7)

$(7)-(5)$， $\dfrac{1}{x}=\dfrac{bc-ca+ab}{2abc}$，

$\therefore\ x=2abc/(ab+bc-ca).$

$(7)-(6)$， $\dfrac{1}{y}=\dfrac{bc+ca-ab}{2abc}$

$\therefore\ y=2abc/(-ab+bc+ca).$

$(7)-(4)$， $\dfrac{1}{z}=\dfrac{-bc+ca+ab}{2abc}$

$\therefore\ z=2abc/(ab-bc+ca).$

25. 解: $\begin{cases} \dfrac{2}{x+2y}+2y+2z=3 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{y+z}{2}-\dfrac{5}{z-3x}=\dfrac{7}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ \dfrac{4}{z-3x}-\dfrac{3}{x+2y}=-1 \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$

(1)+(3), $y+z+\dfrac{2}{z-3x}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(4)×10, $10(y+z)+\dfrac{20}{z-3x}=10 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

(2)×4, $2(y+z)-\dfrac{20}{z-3x}=14 \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

(5)+(6), $12(y+z)=24$

$y+z=2$

$z=2-y \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$

將 (7) 代入 (1) 式,得 $\dfrac{2}{x+2y}+2y+2(2-y)=3$

即 $x+2y=-2 \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$

將 (7) 代入 (3) 式,得 $\dfrac{4}{2-y-3x}-\dfrac{3}{x+2y}=-1 \cdots\cdots\cdots (9)$

從 (8) 式, $x=-2(y+1)$

代入 (9) 式,得 $\dfrac{4}{5y+8}-\dfrac{2}{-2}=-1$

$-10y-16=4$

$\therefore\ y=-2.$

代入 (7) 式,得 $z=4.$

代入 (8) 式,得 $x=2.$

習題 XXVIII

原本第 244 頁

1. 解: $\dfrac{2x+11}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+3}$

$$2x+11=A(x+3)+B(x-2)$$

設　$x=2$　則　$15=5A$

$\therefore\quad A=3.$

設　$x=-3$　則　$5=-5B$

$\therefore\quad B=-1.$

答: $\dfrac{2x+11}{(2x+1)(3x-1)}=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x+3}.$

2. 解: $\dfrac{6x-1}{(2x+1)(3x-1)}=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{B}{3x-1}$

$$6x-1=A(3x-1)+B(2x+1)$$
$$=x(3A+2B)-(A-B)$$

$3A+2B=6\qquad A-B=1$

$$\therefore\quad A=\frac{8}{5},\quad B=\frac{3}{5}.$$

答: $\dfrac{6x-1}{(2x+1)(3x-1)}=\dfrac{8}{5(2x+1)}+\dfrac{3}{5(3x-1)}.$

3. 解: $\dfrac{4x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+3}$

$$4x=A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2)$$

設　$x=-1\qquad -4=2A\qquad \therefore\quad A=-2.$

$x=-2\qquad -8=-B\qquad \therefore\quad B=8.$

$x=-3\qquad -12=2C\qquad \therefore\quad C=-6.$

答: $\dfrac{4x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{8}{x+2}-\dfrac{6}{x+3}.$

4. 解: $\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{x-4}$$

$$x^2+2x+3=A(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$+B(x-1)(x-3)(x-4)$$
$$+C(x-1)(x-2)(x-4)$$
$$+D(x-1)(x-2)(x-3)$$

設　$x=1\qquad 6=-6A\qquad \therefore\quad A=-1.$

$x=2 \qquad 11=2B \qquad \therefore \quad B=\frac{11}{2}.$

$x=3 \qquad 18=-2C \qquad \therefore \quad C=-9.$

$x=4 \qquad 27=6D \qquad \therefore \quad D=\frac{9}{2}.$

答: $\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$

$=-\frac{1}{x-1}+\frac{11}{2(x-2)}-\frac{9}{x-3}+\frac{9}{2(x-4)}.$

5. 解: $\frac{x^2+2}{1+x^3}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1-x+x^2}$

$x^2+2=A(1-x+x^2)+(Bx+C)(1+x)$

設 $x=-1 \qquad 3=3A \qquad \therefore \quad A=1.$

$x^2+2=1-x+x^2+(Bx+C)(x+1)$

$x+1=(Bx+C)(x+1) \qquad Bx+C=1$

$\therefore \quad B=0, \qquad C=1.$

答: $\frac{x^2+2}{1+x^3}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x+x^2}.$

6. 解: $\frac{8x+2}{x-x^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1+x}+\frac{C}{1-x}$

$8x+2=A(1+x)(1-x)+Bx(1-x)+Cx(1+x)$

設 $x=0 \qquad 2=A \qquad \therefore \quad A=2.$

$x=-1 \qquad -2B=-6 \qquad \therefore \quad B=3.$

$x=1 \qquad 2C=10 \qquad \therefore \quad C=5.$

答: $\frac{8x+2}{x-x^3}=\frac{2}{x}+\frac{3}{1+x}+\frac{5}{1-x}.$

7. 解: $\frac{x^3-x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$

$=x+2+\frac{-x}{(x-1)(x-2)}=x+2+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$

$-x=A(x-2)+B(x-1)$

設 $x=1 \qquad -1=-A \qquad \therefore \quad A=1.$

$x=2 \qquad -2=B \qquad \therefore \quad B=-2.$

答: $\dfrac{x^3-x^2-5x+4}{x^2-3x+2}=x+2+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x-2}.$

8. 解: $\dfrac{2x^3-x^2+1}{(x-2)^4}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{(x-2)^3}+\dfrac{D}{(x-2)^4}$

$2x^3-x^2+1=A(x-2)^3+B(x-2)^2+C(x-2)+D$

設 $x=2$ $\quad\therefore\quad D=13.$

$2x^3-x^2-12=A(x-2)^3+B(x-2)^2+C(x-2)$

$2x^2+3x+6=A(x-2)^2+B(x-2)+C$

設 $x=2$ $\quad\therefore\quad C=20.$

$2x^2+3x-14=A(x-2)^2+B(x-2)$

$2x+7=A(x-2)+B$

設 $x=2$ $\quad\therefore\quad B=11.$

$\therefore\quad A=2$

答: $\dfrac{2x^3-x^2+1}{(x-2)^4}=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{11}{(x-2)^2}+\dfrac{20}{(x-2)^3}+\dfrac{13}{(x-2)^4}.$

9. 解: $\dfrac{x-1}{2x^3-5x^2-12x}=\dfrac{x-1}{x(2x+3)(x-4)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{2x+3}+\dfrac{C}{x-4}$

$x-1=A(2x+3)(x-4)+Bx(x-4)+Cx(2x+3)$

設 $x=0$ $\quad -1=-12A \quad\therefore\quad A=\dfrac{1}{12}.$

$x=-\dfrac{3}{2} \quad -\dfrac{5}{2}=\dfrac{33}{4}B \quad\therefore\quad B=-\dfrac{10}{33}.$

$x=4 \quad 3=44C \quad\therefore\quad C=\dfrac{3}{44}.$

答: $\dfrac{x-1}{2x^3-5x^2-12x}=\dfrac{1}{12x}-\dfrac{10}{33(2x+3)}+\dfrac{3}{44(x-4)}.$

10. 解: $\dfrac{6}{2x^4-x^2-1}=\dfrac{Ax+B}{2x^2+1}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{D}{x-1}$

$$6=(Ax+B)(x+1)(x-1)+C(2x^2+1)(x-1)+D(2x^2+1)(x+1) \cdots\cdots(1)$$

設 $x=1$ $\quad 6=6D \quad\therefore\quad D=1.$

$x=-1 \quad 6=-6C \quad\therefore\quad C=-1.$

將 C, D 的值代入 (1) 式,得

$6=(Ax+B)(x+1)(x-1)-2x^3+2x^2-x+1$

$$+2x^3+2x^2+x+1$$

$$4x^2+4=Ax^3+Bx^2-Ax-B$$

$$\therefore\quad A=0,\qquad B=-4.$$

答：$\dfrac{6}{2x^4-x^2-1}=-\dfrac{4}{2x^2+1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}.$

11. 解：$\dfrac{2x^3-3x^2+4x-5}{(x+3)^5}$

$$=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}+\frac{D}{(x+3)^4}+\frac{E}{(x+3)^5}$$

$$2x^3-3x^2+4x-5$$

$$=A(x+3)^4+B(x+3)^3+C(x+3)^2+D(x+3)+E$$

設 $x=-3\qquad\therefore\quad E=-98.$

$$2x^2-9x+31=A(x+3)^3+B(x+3)^2+C(x+3)+D$$

設 $x=-3\qquad\therefore\quad D=76.$

$$2x-15=A(x+3)^2+B(x+3)+C$$

設 $x=-3\qquad\therefore\quad C=-21.$

$$2=A(x+3)+B$$

設 $x=-3\qquad\therefore\quad B=2.$

$$0=A(x+3)\qquad\therefore\quad A=0.$$

答：$\dfrac{2x^3-3x^2+4x-5}{(x+3)^5}$

$$=\frac{2}{(x+3)^2}-\frac{21}{(x+3)^3}+\frac{76}{(x+3)^4}-\frac{98}{(x+3)^5}.$$

12. 解：$\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}$

$$x^2+x+1=(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)$$

$$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A+C)x+(2B+D)$$

$$A+C=0,\qquad B+D=1,$$

$$2A+C=1,\qquad 2B+D=1$$

$$\therefore\quad A=1,\quad B=0,\quad C=-1,\quad D=1.$$

答：$\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}=\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x-1}{x^2+2}.$

13\. 解: $\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}$

$x^2+6x-1=A(x-3)^2+B(x-1)(x-3)+C(x-1)$

設 $x=1$ 　　$6=4A$ 　　$\therefore$ 　$A=\dfrac{3}{2}.$

$x=3$ 　　$26=2C$ 　　$\therefore$ 　$C=13.$

$x=2$ 　　$15=\dfrac{3}{2}-B+13$ 　$\therefore$ 　$B=-\dfrac{1}{2}.$

答: $\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}=\dfrac{3}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x-3)}+\dfrac{13}{(x-3)^2}.$

14\. 解: $\dfrac{3x-1}{(x-2)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

$3x-1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$

$\quad=(A+B)x^2-(2B-C)x+(A-2C)$

$A+B=0,\qquad -2B+C=3,\qquad A-2C=-1$

$\therefore$ 　$A=1,\qquad B=-1,\qquad C=1.$

答: $\dfrac{3x-1}{(x-2)(x^2+1)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x-1}{x^2+1}.$

15\. 解: $\dfrac{2x^5-x+1}{(x^2+x+1)^3}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+x+1)^3}$

$2x^5-x+1=(Ax+B)(x^2+x+1)^2+(Cx+D)(x^2+x+1)$

$\quad+(Ex+F)$

$\quad=Ax^5+(2A+B)x^4+(3A+2B+C)x^3$

$\quad+(2A+3B+C+D)x^2+(A+2B+C+D$

$\quad+E)x+(B+D+F)$

$A=2,\qquad 2A+B=0,\qquad 3A+2B+C=0$

$2A+3B+C+D=0,\qquad A+2B+C+D+E=-1$

及 　$B+D+F=1$

$\therefore$ 　$A=2,\quad B=-4,\quad C=2,\quad D=6,$

$E=-3,\quad F=-1.$

答: $\dfrac{2x^5-x+1}{(x^2+x+1)^3}=\dfrac{2x-4}{x^2+x+1}+\dfrac{2x+6}{(x^2+x+1)^2}-\dfrac{3x+1}{(x^2+x+1)^3}.$

16\. 解: $\dfrac{2x^2-x+1}{(x^2-x)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{D}{(x-1)^2}$

$$2x^2-x+1$$
$$=A(x^3-2x^2+x)+B(x^2-2x+1)+C(x^3-x^2)+Dx^2$$
$$=(A+C)x^3-(2A-B+C-D)x^2+(A-2B)x+B$$
$$A+C=0,\qquad 2A-B+C-D=-2,$$
$$A-B=-1,\qquad B=1$$
$\therefore\quad A=1,\qquad B=1,\qquad C=-1,\qquad D=2.$

答: $\dfrac{2x^2-x+1}{(x^2-x)^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}.$

17. 解: $\dfrac{3x^2-x+2}{(x^2+2)(x^2-x-2)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+2}+\dfrac{C}{x-2}+\dfrac{D}{x+1}$

$$3x^2-x+2=(Ax+B)(x^2-x-2)+C(x^2+2)(x+1)$$
$$+D(x^2+2)(x-2)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設 $x=2,\qquad C=\dfrac{2}{3}.$

$x=-1,\qquad D=-\dfrac{2}{3}.$

將 C, D 二值代入 (1) 式,得

$$3x^2-x+2=(Ax+B)(x^2-x-2)+2x^2+4$$
$$x^2-x-2=Ax^3-(A-B)x^2-(2A+B)x-2B$$
$\therefore\quad A=0,\qquad B=1.$

答: $\dfrac{3x^2-x+2}{(x^2+2)(x^2-x-2)}=\dfrac{1}{x^2+2}+\dfrac{2}{3(x-2)}-\dfrac{2}{3(x+1)}.$

18. 解: $\dfrac{x^2+px+q}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$

$$x^2+px+q=A(x-b)(x-c)+B(x-a)(x-c)$$
$$+C(x-a)(x-b)$$

設 $x=a\qquad a^2+ap+q=A(a-b)(a-c)$

$\therefore\quad A=\dfrac{a^2+ap+q}{(a-b)(a-c)}.$

設 $x=b\qquad b^2+bp+q=B(b-a)(b-c)$

$\therefore\quad B=\dfrac{b^2+bp+q}{(b-a)(b-c)}.$

設 $x=c\qquad c^2+cp+q=C(c-a)(c-b)$

$$\therefore\quad C=\frac{c^2+cp+q}{(c-a)(c-b)}.$$

答: $$\frac{x^2+px+q}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$
$$=\frac{a^2+ap+q}{(a-b)(a-c)}\cdot\frac{1}{x-a}+\frac{b^2+bp+q}{(b-a)(b-c)}\cdot\frac{1}{x-b}$$
$$+\frac{c^2+cp+q}{(c-a)(c-b)}\cdot\frac{1}{x-c}.$$

19. 解: $$\frac{2x^2-3x-2}{x(x-1)^2(x+3)^3}$$
$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{(x+3)^3}$$

$$2x^2-3x-2=A(x-1)^2(x+3)^3+Bx(x-1)(x+3)^3$$
$$+Cx(x-1)(x+3)^3+Dx(x-1)^2(x+3)^2$$
$$+Ex(x-1)^2(x+3)+Fx(x-1)^2$$
$$=(A+B+D)x^5+(7A+8B+C+4D+E)x^4$$
$$-(2A-18B-9C+2D+E+F)x^3$$
$$-(18A-27C+12D+E+2F)x^2$$
$$-(27A+27B-27C-9D-3E-F)x+27A$$

$A+B+D=0,\qquad 7A+8B+C+4D+E=0,$

$2A-18B-9C+2D+E+F=0,$

$18A-27C+12D+E+2F=-2,$

$27A+27B-27C-9D-3E-F=3,$

$27A=-2$

$$\therefore\quad A=-\frac{2}{27},\qquad B=\frac{25}{256},\qquad C=-\frac{3}{64},$$
$$D=-\frac{163}{6912},\quad E=-\frac{35}{288},\quad F=-\frac{25}{48}.$$

答: $$\frac{2x^2-3x-2}{x(x-1)^2(x+3)^3}=-\frac{2}{27x}+\frac{25}{256(x-1)}-\frac{3}{64(x-1)^2}$$
$$-\frac{163}{6912(x+3)}-\frac{35}{288(x+3)^2}$$
$$-\frac{25}{48(x+3)^3}.$$

20. 解：$\dfrac{x^3+x+3}{x^4+x^2+1}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$

$$x^3+x+3=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$$
$$=(A+C)x^3-(A-B-C-D)x^2$$
$$+(A-B+C+D)x+(B+D)$$

$A+C=1,\quad A-B-C-D=0,\quad A-B+C+D=1,$
$B+D=3$

$\therefore\quad A=2,\quad B=\dfrac{3}{2},\quad C=-1,\quad D=\dfrac{3}{2}.$

答：$\dfrac{x^3+x+3}{x^4+x^2+1}=\dfrac{4x+3}{2(x^2+x+1)}-\dfrac{2x-3}{2(x^2-x+1)}.$

IX. 對稱函數

習題 XXIX

原本第 249 頁

1. 解：於 $x^4-2y^4+z^4+4(x^3-y^3)(y^3-z^3)(x^2+z^2)$ 式中，試述何字爲對稱者。

以 x 替 z，z 替 x，則吾人可得一與已知式相等之方程式，即 $z^4-2y^4+x^4+4(z^3-y^3)(y^3-x^3)(z^2+x^2)$，故知上式對 x 與 z 爲對稱者。

2. 解：完全書出下列各式中 a, b, c 之對稱函數，

$\Sigma a^2b^2,\quad \Sigma a^3b^4,\quad \Sigma a^2/b,\quad \Sigma a^2b^3c^5,\quad \Sigma a^2b^2c^4,$
$\Sigma(a+b)c,\quad \Sigma(a+b^2)c^3,\quad \Sigma(a+2b+3c).$

$\Sigma a^2b^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$

$\Sigma a^3b^4=a^3b^4+b^3a^4+b^3c^4+c^3b^4+c^3a^4+a^3c^4.$

$\Sigma a^2/b=a^2/b+b^2/a+b^2/c+c^2/b+c^2/a+a^2/c.$

$\Sigma a^2b^3c^5=a^2b^3c^5+a^2c^3b^5+b^2a^3c^5+b^2c^3a^5+c^2a^3b^5+c^2b^3a^5.$

$\Sigma a^2b^2c^4=a^2b^2c^4+a^2c^2b^4+b^2c^2a^4.$

$\Sigma(a+b)c=(a+b)c+(b+c)a+(c+a)b.$

$$\Sigma(a+b^2)c^3=(a+b^2)c^3+(b+a^2)c^3+(b+c^2)a^3+(c+b^2)a^3$$
$$+(c+a^2)b^3+(a+c^2)b^3.$$

$\Sigma(a+2b+3c)=(a+2b+3c)+(a+2c+3b)+(b+2c+3a)$
$+(b+2a+3c)+(c+2a+3b)+(c+2b+3a)$.

3. 解：指示 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 式中，a, b, c 爲輪換而非絕對對稱；又 $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ 中爲對稱。

以 a 代 b, b 代 c, c 代 a 代入原式，則原式不變。如以 a 及 b 互換，則原式變爲 $(b-a)(a-c)(c-b)$，與原式差一符號，故 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 爲輪換而非絕對對稱。

$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ 式，以 a, b, c 之任二字互換，所得之新多項式，仍與原式相等，故知爲對稱者。

4. 解：$(a-b)^2(b-c)^2(c-d)^2(d-a)^2$ 式，是否對於 a, b, c, d 對稱？

不對稱，因吾人以 a, b, c, d 中之任二字互換，所得之方程式，皆不與已知者相等也。

5. 解：$y^2-x^2, z^2-y^2, x^2-z^2$; $a^2bc, abd^2, ac^2d, b^2cd$;
$(a-c)(b-a), (a-c)(c-b), (a-b)(b-c)$.
$y^2-x^2, z^2-y^2, x^2-z^2=y^2-x^2, x^2-z^2, z^2-y^2$.
$a^2bc, abd^2, ac^2d, b^2cd=a^2bc, b^2cd, c^2da, d^2ab$.
$(a-c)(b-a), (a-c)(c-b), (a-b)(b-c)$
$=(a-c)(b-a), (b-a)(c-b), (c-b)(a-c)$.

6. 解：ab^3c^2; $a(b-c), (b+2c)(a+d)$; $a^2/(a-b)(a-c)$.
$ab^3c^2+bc^3d^2+cd^3a^2+da^3b^2$.
$a(b-c)+b(c-d)+c(d-a)+d(a-b)$.
$(b+2c)(a+d)+(c+2d)(b+a)+(d+2a)(c+b)$
$+(a+2b)(d+c)$.
$a^2/(a-b)(a-c)+b^2/(b-c)(b-d)+c^2/(c-d)(c-a)$
$+d^2/(d-a)(d-b)$.

7. 解：$\Sigma a^3\cdot\Sigma a=\Sigma a^4+\Sigma a^3b$; $\Sigma ab\cdot\Sigma a=\Sigma a^2b+3\Sigma abc$.

$\Sigma a^3\cdot\Sigma a=(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)$
$=a^4+b^4+c^4+a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b$
$=\Sigma a^4+\Sigma a^3b$.

$\Sigma ab\cdot\Sigma a=(ab+bc+ca)(a+b+c)$
$=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+3abc$,

$\Sigma a^2b+3\Sigma abc=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+3abc$.

$\therefore\quad \Sigma ab\cdot\Sigma a=\Sigma a^2b+3\Sigma abc$.

習題 XXX

原本第 251 頁

1. 解：$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

當 $x=y$ 或 $y=z$ 或 $z=x$ 時，此函數皆爲零，故此函數能被 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡。

故 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=k(y-z)(z-x)(x-y)$

設 $x=2, y=1, z=0$，得　$k=-1$.

答：$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=-(y-z)(z-x)(x-y)$.

2. 解：$yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)$

當 $x=y$ 或 $y=z$ 或 $z=x$ 時，此函數爲 0，故此函數能被 $(x-y)(y-z)(z-y)$ 除盡。

故 $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x)$

設 $x=2, y=1, z=0$，得　$k=-1$.

答：$yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)$.

3. 解：$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$

當 $x=y$ 或 $y=z$ 或 $z=x$ 時，此函數爲 0，故此函數能被 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡。

故 $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=k(x-y)(y-z)(z-x)$

設 $x=2, y=1, z=0$，得　$k=3$.

答：$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

4. 解：$x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$

設 $x=y$ 或 $y=z$ 或 $z=x$ 時，此函數爲 0，故此函數能爲 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡，因 $\Sigma x(y-z)^3$ 爲輪換對稱及齊次的四次式，而 $\Sigma(x-y)$ 爲輪換對稱及齊次的三次式，故

$$x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$$
$$=k(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$$

設　$x=2, y=1, z=0$，得　$k=1$.

答：$x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$
$$=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$$

5. 解：$x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$

此函數能爲 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡．故

$$x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$$

$= (x-y)(y-z)(z-x)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)]$

設 $x=1, y=-1, z=0$, 得 $\quad -2=4k-2l \qquad (1)$

設 $x=2, y=1, z=0$, 得 $\quad -4=-10k-4l \qquad (2)$

解 (1), (2) 式,得 $\quad k=0, l=1.$

答: $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$

$= (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx).$

6. 解: $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

此函數能爲 $(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$ 除盡. 且兩式各爲對稱及齊次的六次式,故

$x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

$= k(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$

設 $x=2, y=1, z=0$, 得 $\quad k=-1.$

答: $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

$= -(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$

$= -(x-y)(x+y)(y-z)(y+z)(z-x)(z+x).$

7. 解: $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

此函數能爲 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 除盡. 故

$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=k(x+y)(y+z)(z+x)$

設 $x=2, y=1, z=0$, 得 $\quad k=3.$

答: $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x).$

8. 解: $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$

此函數能爲 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡. 故

$(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$

$= (y-z)(z-x)(x-y)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)]$

設 $x=2,\ y=1,\ z=0,\ 30=10k+4l$

$x=3,\ y=1,\ z=0,\ -210=-60k-18l$

$\therefore\quad k=5,\ l=-5.$

答: $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$

$= 5(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$

9. 解: $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$

此函數能爲 x, y 與 z 除盡. 故

$(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$

$= xyz[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)]$

設 $x=1,\ y=1,\ z=1,\ 240=3k+3l$

$x=1,\ y=1,\ z=-1,\ -240=-3k+l$

$\therefore\quad l=0,\ k=80.$

答：$(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$
$=80xyz(x^2+y^2+z^2).$

10. 解：$(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$

此函數能為 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡．故

$$(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$$
$$=k(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

設 $x=2,\ y=1,\ z=0$，得 $k=-2.$

答：$(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$
$=-2(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$

11. 解：$x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$

此函數能為 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 除盡．故

$$x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$$
$$=k(x+y)(y+z)(z+x)$$

設 $x=2,\ y=1,\ z=0$，得 $k=1.$

答：$x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$
$=(x+y)(y+z)(z+x).$

12 解：$x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)$

此函數能為 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 除盡．故

$$x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)$$
$$=(x-y)(y-z)(z-x)[k(x^3+y^3+z^3)$$
$$+l(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+mxyz]$$

設 $x=2,\ y=1,\ z=0,\quad 30=-18k-12l$

$x=3,\ y=1,\ z=0,\ 240=-6[28k+12l]$

$x=3,\ y=2,\ z=1,\ 180=-72k-99l-12m$

$\therefore\quad k=-1,\ l=-1,\ m=-1.$

答：$x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)$
$=-(x-y)(y-z)(z-x)(x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2x+x^2z$
$+z^2x+y^2z+z^2y+xyz).$

13. 解：$\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{-a^4(b-c)-b^4(c-a)-c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

因 $-a^4(b-c)-b^4(c-a)-c^4(a-b)$ 能為 $(a-b)(b-c)(c-$

除盡，故

$$-a^4(b-c)-b^4(c-a)-c^4(a-b)$$
$$=(b-c)(c-a)(a-b)[k(a^2+b^2+c^2)+l(ab+bc+ca)]$$

設 $a=2,\ b=1,\ c=0,\quad 14=10k+4l$

$a=3,\ b=1,\ c=0,\quad 13=10k+3l$

$\therefore\quad l=1,\ k=1.$

答：$\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$

$=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$

14. 解：$\dfrac{x+a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x+b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{x+c}{(c-a)(c-b)}$

因 $-(x+a)(b-c)-(x+b)(c-a)-(x+c)(a-b)$ 能以 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 除盡，故等於 $k(a-b)(b-c)(c-a)$

設 $a=2,\ b=1,\ c=0,$ 得 $\quad k=0.$

答：$\dfrac{x+a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x+b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{x+c}{(c-a)(c-b)}=0.$

15. 解：$\dfrac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{-(a^2-bc)(b-c)-(b^2-ca)(c-a)-(c^2-ab)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

因 $-(a^2-bc)(b-c)-(b^2-ca)(c-a)-(c^2-ab)(a-b)$ 能以 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 除盡，故等於 $k(a-b)(b-c)(c-a)$

設 $a=2,\ b=1,\ c=0,$ 得 $\quad k=0.$

答：$\dfrac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}=0.$

16. 解：$\dfrac{(b+c)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(c+a)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(a+b)^2}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{(b+c)^2(b-c)-(c+a)^2(c-a)-(a+b)^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

因 $-(b+c)^2(b-c)-(c+a)^2(c-a)-(a+b)^2(a-b)$ 能以 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 除盡，故等於 $k(a-b)(b-c)(c-a)$

設 $a=2,\ b=1,\ c=0,$ 得 $\quad k=1.$

答：$\dfrac{(b+c)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(c+b)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(a+b)^2}{(c-a)(c-b)}=1.$

17. 解: $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

$$=\frac{-a^2(b-c)(x-b)(x-c)-b^2(c-a)(x-a)(x-c)-c^2(a-b)(x-a)(x-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$$

因 $-a^2(b-c)(x-b)(x-c)-b^2(c-a)(x-a)(x-c)-c^2(a-b)(x-a)(x-b)$ 能以 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 除盡,故等於 $k(b-c)(c-a)(a-b)$

設 $a=2$, $b=1$, $c=0$, 得 $k=x^2$.

答: $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

$$=\frac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

X. 二項式定理

習題 XXXI

原本第 259 頁

1. 解: $(3x+2y)^3$

$$=27x^3+3(3x)^2\cdot 2y+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}(3x)\cdot(2y)^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}(2y)^3$$

$$=27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3.$$

2. 解: $(a-b)^8=a^8-8a^7b+\dfrac{8\cdot 7}{1\cdot 2}a^6b^2-\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}a^5b^3$

$$+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^4b^4-\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^3b^5$$

$$+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}a^2b^6-\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}ab^7+b^8$$

$$=a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8.$$

3. 解：$(1+2x^2)^7=1^7+7(2x^2)+\frac{7\cdot6}{1\cdot2}(2x^2)^2+\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}(2x^2)^3$

$+\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(2x^2)^4+\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}(2x^2)^5$

$+\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}(2x^2)^6+(2x^2)^7$

$=1+14x^2+84x^4+280x^6+560x^8+672x^{10}+448x^{12}$
$+128x^{14}$.

4. 解：$\left(2+\frac{1}{x}\right)^4=2^4+4\cdot2^3\cdot\frac{1}{x}+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}\cdot2^2\left(\frac{1}{x}\right)^2$

$+\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}\cdot2\left(\frac{1}{x}\right)^3+\left(\frac{1}{x}\right)^4$

$=16+\frac{32}{x}+\frac{24}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^4}$.

5. 解：$\left(x-\frac{3}{x}\right)^6=x^6-6\cdot x^5\left(\frac{3}{x}\right)+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}x^4\left(\frac{3}{x}\right)^2-\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}x^3\left(\frac{3}{x}\right)^3$

$+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^2\left(\frac{3}{x}\right)^4-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x\left(\frac{3}{x}\right)^5+\left(\frac{3}{x}\right)^6$

$=x^6-18x^4+135x^2-540+\frac{1215}{x^2}-\frac{1458}{x^4}+\frac{729}{x^6}$.

6. 解：$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^5=\left(\frac{x}{y}\right)^5-5\left(\frac{x}{y}\right)^4\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y}{x}\right)^2$

$-\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\left(\frac{y}{x}\right)^3+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^4-\left(\frac{y}{x}\right)^5$

$=\frac{x^5}{y^5}-5\frac{x^3}{y^3}+10\frac{x}{y}-10\frac{y}{x}+5\frac{y^3}{x^3}-\frac{y^5}{x^5}$.

7. 解：$(1-x+2x^2)^4=[1-(x-2x^2)]^4$

$=1^4-4(x-2x^2)+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}(x-2x^2)^2$

$-\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}(x-2x^2)^3+(x-2x^2)^4$

$=1-4x+8x^2+6x^2-24x^3+24x^4-4x^3+24x^4-48x^5$
$+32x^6+x^4-8x^5+24x^6-32x^7+16x^8$

$=1-4x+14x^2-28x^3+49x^4-56x^5+56x^6-32x^7+16x^8.$

8. 解：$(a^2+ax-x^2)^3=(a^2)^3+3(a^2)^2(ax-x^2)$

$+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}a^2(ax-x^2)^2+(ax-x^2)^3$

$=a^6+3a^5x-3a^4x^2+3a^4x^2-6a^3x^3+3a^2x^4+a^3x^3-3a^2x^4$

$+3a^2x^4+3ax^5-x^6$

$=a^6+3a^5x-5a^3x^3+3ax^5-x^6.$

9. 解：$(1+x/2)^{11}$

$n=11,\quad r+1=6 \qquad \therefore \quad r=5$

答：所求之項爲 $\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{x^5}{32}=\frac{231}{16}x^5.$

10. 解：$(3a-4b)^{12}$

$n=12,\ r+1=8 \qquad \therefore \quad r=7$

答：$-\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}(3a)^5(4b)^7$

$=-3153199104a^5b^7.$

11. 解：$(a^2-2bc)^{10}$

$n=10,\ r+1=6 \qquad \therefore \quad r=5$

答：$-\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(a^2)^5(2bc)^5$

$=-8064a^{10}b^5c^5.$

12. 解：$(1-x)^9$

$n=9,\ r+1=5 \qquad \therefore \quad r=4$

答：$\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4=126x^4.$

$n=9,\ r+1=6 \qquad \therefore \quad r=5$

答：$-\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5=-126x^5.$

13 解：$(1+x)^8$

$n=8,\ r+1=6 \qquad \therefore \quad r=5$

答：所求之係數爲 $\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=56.$

14. 解：$(3-2x)^7$

$n=7,\ r=4$

答：所求之係數爲 $\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot3^3(-2)^4=15120.$

15. 解：$(1-x^2)^6$

$n=6,\ r=4$　　[因 $x^8=(x^2)^4$]

答：所求之係數爲 $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=15.$

16. 解：$(1+2x)^9+(1-2x)^{11}$

$n=9$ 及 $11,\ r=3$

答：所求之係數爲 $\frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}\cdot2^3+\frac{11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3}(-2)^3$

$=672-1320=-648.$

17. 解：$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12}$

$$通項=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^{12-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^{12-2r}$$

$2r=12$　　$\therefore$　$r=6$

答：常數項 $=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=924.$

18. 解：$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{15}$

$$通項=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}(2x)^{15-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r$$

$$=\frac{n\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x(-1)^r2^{15-r}x^{15-2r}$$

$15-2r=7$　　$\therefore$　$r=4$

答：x^7 之係數 $=\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot2^{11}=2795520.$

19. 解：$(x+2y)(x-3y)(x-5y)=x^3-6x^2y-xy^2+30y^3.$

20. 解：$(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)$

$=x^4-4x^3-19x^2+46x+120.$

21. 解：$(a+b+c+d)(f+g+h)(k+1)(m+n+p+q)$ 乘積中項之總數爲 $4\times3\times2\times4=96.$

22. 解：1. $(1+x^2+x^3+x^4)^3$ 各項係數之總數爲
$(1+1+1+1)^3=4^3=64.$

2. $(1+2x+x^2)^2(1+x+3x^3)^2$ 各項係數之總數爲
$(1+2+1)^2(1+1+3)^2=4^2\cdot 5^2=400.$

23. 解：1. $\Sigma a^2\cdot\Sigma a=(a^2+b^2+c^2+d^2)(a+b+c+d)$
其係數之和爲 $4\times 4=16.$

2. $\Sigma a^3\cdot\Sigma abc$
$=(a^3+b^3+c^3+d^3)(abc+bcd+cda+dab)$
其係數之和爲 $4\times 4=16.$

3. $\Sigma ab\cdot\Sigma abc=(ab+bc+cd+da+ac+bd)$
$\times(abc+bcd+cda+dab)$
其係數之和爲 $6\times 4=24.$

24. 解：$(a+b)^n=(a+b)(a+b)\cdots\cdots$ 至 n 項.
答：其係數之和爲 $2\cdot 2\cdot 2\cdots\cdots$ 至第 n 項 $=2^n$.

25. 解：$(a-b)^n$ 展開式中各項之係數與 $(1-1)^n$ 展開式中各項相等. 因 $(1-1)^n=0$, $\therefore$ $(a-b)^n$ 展開式中各項係數之和等於 0, 即其正負係數之和相等.

XI. 開方

習題 XXXII

原本第 269 頁

1. 解：$\sqrt[3]{-\dfrac{27x^6y^{15}}{125a^9z^{12}}}=-\dfrac{3x^2y^5}{5a^3z^4}.$

2. 解：$\sqrt{\dfrac{529a^4b^6}{625c^2d^8}}=\dfrac{23a^2b^3}{25cd^4}.$

3. 解：$\sqrt[6]{(x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4)^3}=\sqrt[6]{(x^2y-xy^2)^6}=x^2y-xy^2$
$=xy(x-y).$

4. 解：$x^4-2x^3+3x^2-2x+1\equiv(x^2+px+q)^2$
$\equiv x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

$2p=-2\qquad\therefore\quad p=-1$

$p^2+2q=3\qquad\therefore\quad q=1$

因 p, q 之值能適合 $2pq=-2$ 及 $p^2=1$

答：其平方根爲 x^2-x+1.

5. 解：$x^2-2x^4+6x^3-6x+x^6+9=x^6-2x^4+6x^3+x^2-6x+9$

$\equiv(x^3+px+q)^2\equiv x^6+2px^4+2qx^3+p^2x^2+2pqx+q^2$

$2p=-2 \qquad \therefore \quad p=-1$

$2q=6 \qquad \therefore \quad q=3$

答：其平方根爲 x^3-x+3.

6. 解：$4x^6+12x^5y+9x^4y^2-4x^3y^3-6x^2y^4+y^6$

$\equiv(2x^3+px^2y+qy^3)^2$

$\equiv 4x^6+4px^5y+p^2x^4y^2+4qx^3y^3+2pqx^2y^4+q^2y^6$

$4p=12 \qquad \therefore \quad p=3$

$4q=-4 \qquad \therefore \quad q=-1$

答：其平方根爲 $2x^3+3x^2y-y^3$.

7. 解：$4x^2-20x+13+30/x+9/x^2\equiv(2x+p+q/x)^2$

$\equiv 4x^2+4px+(4q+p^2)+2pq/x+q^2/x^2$

$4p=-20 \qquad \therefore \quad p=-5$

$4q+p^2=13 \qquad \therefore \quad q=-3$

答：其平方根爲 $2x-5-3/x$.

8. 解：$49-84x-34x^2+60x^3+25x^4\equiv(7+px+qx^2)^2$

$\equiv 49+14px+(14q+p^2)x^2+2pqx^3+q^2x^4$

$14p=-84 \qquad \therefore \quad p=-6$

$14p+q^2=-34 \qquad \therefore \quad q=-5$

答：其平方根爲 $7-6x-5x^2$.

9. 解：$x^8+2x^7-x^6-x^4-6x^3+5x^2-4x+4$

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^8+2x^7-x^6-x^4-6x^3+5x^2-4x+4 \;\underline{|\, x^4+x^3-x^2+x-2} \\
 & x^8 \\
\hline
2x^4+x^3 & 2x^7-x^6 \\
 & 2x^7+x^6 \\
\hline
2x^4+2x^3-x^2 & -2x^6-x^4 \\
 & -2x^6-2x^5+x^4 \\
\hline
2x^4+2x^3-2x^2+x & 2x^5-2x^4-6x^3+5x^2 \\
 & 2x^5+2x^4-2x^3+x^2 \\
\hline
2x^4+2x^3-2x^2+2x-2 & -4x^4-4x^3+4x^2-4x+4 \\
 & -4x^4-4x^3+4x^2-4x+4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

答：其平方根爲 $x^4+x^3-x^2+x-2$.

10. 解：$(x^2+1)^2-4x(x^2-1)=x^4+2x^2+1-4x^3+4x$

$=x^4-4x^3+2x^2+4x+1\equiv(x^2+px+q)^2$

$\equiv x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

$2p=-4 \qquad \therefore \quad p=-2$

$p^2+2q=2 \qquad \therefore \quad q=-1$

答：其平方根爲 x^2-2x-1.

11. 解：$4x^4+9x^2y^2-12x^3y+16x^2-24xy+16\equiv(2x^2+pxy+q)^2$

$\equiv 4x^4+4px^3y+4qx^2+p^2x^2y^2+2pqxy+q^2$

$4p=-12 \qquad \therefore \quad p=-3$

$4q=16 \qquad \therefore \quad q=4$

答：其平方根爲 $2x^2-3xy+4$.

12. 解：$x^2/y^2+y^2/x^2+2+2x^2+2y^2+x^2y^2$

$\equiv(x/y+pxy+qy/x)^2$

$\equiv x^2/y^2+2px^2+2q+2pqy^2+p^2x^2y^2+q^2y^2/x^2$

$2p=2 \qquad \therefore \quad p=1$

$2q=2 \qquad \therefore \quad q=1$

因 p, q 之值能適合 $2pq=2,\ p^2=1,\ q^2=1$

答：$x/y+xy+y/x$ 爲其平方根。

13. 解：$1-2x$

$$1-2x \quad \Big| \; 1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\cdots\cdots$$

$$1$$

$$2-x \quad \Big| \; -2x$$

$$-2x+x^2$$

$$2-2x-\frac{x^2}{2} \quad \Big| \; -x^2$$

$$-x^2+x^3+\frac{x^4}{4}$$

$$2-2x-x^2-\frac{x^3}{4} \quad \Big| \; -x^3-\frac{x^4}{4}$$

$$-x^3+x^4+\frac{x^5}{2}+\frac{x^6}{4}$$

$$-\frac{5x^4}{4}-\frac{x^5}{2}-\frac{x^6}{4}$$

答：其平方根為 $1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\cdots\cdots$.

14. 解：$4-x+3x^2\equiv(2+px+qx^2+rx^3+\cdots\cdots)^2$

$\equiv4+4px+(4q+p^2)x^2+(4r+2pq)x^3+\cdots\cdots$

$4p=-1 \qquad \therefore \quad p=-\frac{1}{4}$

$4q+p^2=3 \qquad \therefore \quad q=\frac{47}{64}$

$4r+2pq=0 \qquad \therefore \quad r=\frac{47}{512}$

答：其平方根為 $2-\frac{x}{4}+\frac{47x^2}{64}+\frac{47x^3}{512}+\cdots\cdots$.

15. 解：$x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1\equiv(x^2+px+q)^3$

$\equiv x^6+3px^5+3(p^2+q)x^4+(p^3+6pq)x^3+3(p^2q+q^2)x^2$
$+3pqx+q^3$

$3p=3 \qquad \therefore \quad p=1$

$p^2+q=2 \qquad \therefore \quad q=1$

因 p, q 之值能適合 $p^3+6pq=7$, $3(p^2q+q^2)=6$, $3pq=3$, $q^3=1$

答：其立方根為 x^2+x+1.

16. 解：$27x^{12}+27x^{10}-18x^8-17x^6+6x^4+3x^2-1$

$\equiv(3x^4+px^2+q)^3$

$\equiv27x^{12}+(18p+9p)x^{10}+(18q+3p^2+6p^2+9q)x^8+\cdots\cdots$

$27p=27 \qquad \therefore \quad p=1$

$27q+9p^2=-18 \qquad \therefore \quad q=-1$

答：其立方根為 $3x^4+x^2-1$.

17. 解：$8x^6-36ax^5+90a^2x^4-135a^3x^3+135a^4x^2-81a^5x+27a^6$

$\equiv(2x^2+pax+qa^2)^3\equiv8x^6+12pax^5+(12q+6p^2)x^4a^2$
$+(12pq+p^3)a^3x^3+(6q^2+3p^2q)a^4x^2+3pq^2a^5x+q^3a^6$

$12p=-36 \qquad \therefore \quad p=-3$

$12q+6p^2=90 \qquad \therefore \quad q=3$

答：其立方根為 $2x^2-3ax^2+3a^2$.

18. 解：$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}+3\frac{x^2}{y^2}+3\frac{y^2}{x^2}+6\frac{x}{y}+6\frac{y}{x}+7.$

$$\frac{x^3}{y^3}+3\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y}+7+6\frac{y}{x}+3\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^3}{x^3} \quad \Big|\ \frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}$$

$$\frac{x^3}{y^3}$$

$$3\frac{x^2}{y^2}+3\frac{x}{y}+1 \quad \Big|\ 3\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y}+7+6\frac{y}{x}+3\frac{y^4}{x^2}+\frac{y^3}{x^3}$$

$$3\frac{x^2}{y^2}+3\frac{x}{y}+1$$

$$3\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y}+3 \quad \Big|\ 3\frac{x}{y}+6+6\frac{y}{x}+3\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^3}{x^3}$$

$$+3\left(\frac{x}{y}+1\right)\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2} \quad \Big|\ 3\frac{x}{y}+6+6\frac{y}{x}+3\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^3}{x^3}$$

$$3\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y}+6+3\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2} \quad \Big|\ 0$$

答：其立方根爲 $\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}$.

19. 解：$1-x+x^2\equiv(1+px+qx^2+\cdots\cdots)^3$

$\equiv 1+3px+(3q+3p^2)x^2+\cdots\cdots$

$3p=-1 \qquad \therefore \quad p=-\frac{1}{3}$

$3q+3p^2=1 \qquad \therefore \quad q=\frac{2}{9}$

答：其立方根爲 $1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^3-\cdots\cdots$.

20. 解：$x^8-4x^7+10x^6-16x^5+19x^4-16x^3+10x^2-4x+1$

$\equiv(x^2+px+q)^4\equiv x^8+4px^7+(4q+6p^2)x^6+\cdots\cdots$

$4p=-4 \qquad \therefore \quad p=-1$

$4q+6p^2=10 \qquad \therefore \quad q=1$

答：其四次根爲 x^2-x+1.

21. 解：$x^{10}+5x^9+15x^8+30x^7+45x^6+51x^5+45x^4+30x^3$
$+15x^2+5x+1$

$\equiv(x^2+px+q)^5\equiv x^{10}+5px^9+(5q+10p^2)x^8+\cdots\cdots$

$5p=5 \qquad \therefore \quad p=1$

$5q+10p^2=15 \qquad \therefore \quad q=1$

答：其五次根爲 x^2+x+1.

22. 解: $x^4+6x^3+11x^2+ax+b\equiv(x^2+px+q)^2$

$$\equiv x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2.$$

$$2p=6 \qquad \therefore \quad p=3$$

$$p^2+2q=11 \qquad \therefore \quad q=1$$

又 $$2pq=a \qquad \therefore \quad a=6$$

$$q^2=b \qquad \therefore \quad b=1$$

答: a 應爲 6, b 應爲 1.

23. 解: 27889.

```
      2,78,89 | 167
      1
   ------------
26  | 178
    | 156
   ----------
327 | 2289
    | 2289
   ----------
         0
```

答: $\sqrt{27889}=167.$

24. 解: 2313.61.

```
      23,13.61 | 48.1
      16
   ------------
88  | 713
    | 704
   ----------
961 | 961
    | 961
   ----------
        0
```

答: $\sqrt{2313.61}=48.1.$

25. 解: 583.2225.

```
       5,83.22,25 | 24.15
       4
   ------------
44   | 183
     | 176
   ----------
481  | 722
     | 481
   ----------
4825 | 24125
     | 24125
   ----------
           0
```

答: $\sqrt{583.2225}=24.15,$

26. 解：4149369.

```
  4,14,93,69 | 2037
  4
403  | 1493
     | 1209
4067 | 28469
     | 28469
           0
```

答：$\sqrt{4149369}=2037$.

27. 解：0.00320356.

```
0.00,32,03,56 | 0.0566
       25
 106 | 703
     | 636
1126 | 6756
     | 6756
          0
```

答：$\sqrt{0.00320356}=0.0566$.

28. 解：9.024016.

```
  9.02,40,16 | 3.004
  9
6004 | 24016
     | 24016
         0
```

答：$\sqrt{9.024016}=3.004$.

29. 解：2.

```
   2 | 1.414
   1
  24 | 100
     |  96
 281 | 400
     | 281
2824 | 11900
     | 11296
         604
```

答：$\sqrt{2}=1.414$.

30. 解：55.5.

```
          55.5 | 7.449
          49
       144 | 650
           | 576
       1484 | 7400
            | 5936
      14889 | 146400
            | 134001
               12399
```

答：$\sqrt{55.5}=7.449$.

31. 解：234.561.

```
          2,34.56,10 | 15.315
          1
      25 | 134
         | 125
      303 | 956
          | 909
      3061 | 4710
           | 3061
     30625 | 164900
           | 153125
               11775
```

答：$\sqrt{234.561}=15.315$.

32. 解：1860867

```
          1,860,867 | 123
          1
     300 | 860
      60 |
       4 |
     364 | 728
   43200 | 132867
    1080 |
       9 |
   44289 | 132867
                0
```

答：$\sqrt[3]{1860867}=123$.

33. 解：167284.151.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 167,284.151 \;|\; \underline{55.1} \\
 & 125 \\
\hline
7500 & 42284 \\
750 & \\
25 & \\
\hline
8275 & 41375 \\
\hline
907500 & 909151 \\
1650 & \\
1 & \\
\hline
909151 & 909151 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

答：$\sqrt[3]{167284.151}=55.1.$

34. 解：1036.433728.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1,036,433,728 \;|\; \underline{10.12} \\
 & 1 \\
\hline
30000 & 36433 \\
300 & \\
1 & \\
\hline
30301 & 30301 \\
\hline
3060300 & 6132728 \\
6060 & \\
4 & \\
\hline
3066364 & 6132728 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

答：$\sqrt[3]{1036.433728}=10.12.$

XII. 無理函數，根式與分指數

習　題　XXXIII

原本第 274 頁

1. 解：$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}.$

2. 解：$\sqrt{588}=\sqrt{14^2\times 3}=14\sqrt{3}.$

3. 解：$\sqrt[3]{-27^2}=\sqrt[3]{-(3^3)^2}=\sqrt[3]{-(3^2)^3}=-9.$

4. 解：$\sqrt[9]{-1000}=\sqrt[9]{-10^3}=\sqrt[3]{-10}.$

5. 解：$\sqrt{3/2}=\sqrt{3/2\cdot 2/2}=\frac{1}{2}\sqrt{6}.$

6. 解：$\sqrt[3]{3/2}=\sqrt[3]{\frac{3\times 4}{2\times 4}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}.$

7. 解：$\sqrt[3]{3/4}=\sqrt[3]{\frac{3\times 2}{4\times 2}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}.$

8. 解：$\sqrt[5]{3/16}=\sqrt[5]{6/32}=\frac{1}{2}\sqrt[5]{6}.$

9. 解：$\sqrt[5]{25a^5b^{10}c^{15}d^6}=ab^2c^3d\sqrt[5]{25d}.$

10. 解：$\sqrt[6]{128a^2b^4c^8}=2c\sqrt[6]{2a^2b^4c^2}.$

11. 解：$\sqrt[12]{8x^6y^9z^{15}}=z\sqrt[12]{8x^6y^9z^3}=z\sqrt[4]{2x^2y^3z}.$

12. 解：$\sqrt[2n]{25a^2b^4c^6}=\sqrt[n]{5ab^2c^3}.$

13. 解：$\sqrt[3n]{a^nb^{2n}c^{3n}}=c\sqrt[3]{ab^2}.$

14. 解：$\sqrt[n]{a^{2n+1}b^{3n+2}c^{4n}}=a^2b^3c^4\sqrt[n]{ab^2}.$

15. 解：$\sqrt{x^2y^4-x^2z^2}=x\sqrt{y^4-z^2}.$

16. 解：$\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}=\sqrt{(x-y)(x+y)^2}=(x+y)\sqrt{x-y}.$

17. 解：$\sqrt[3]{x^6-x^3y^3}=x\sqrt[3]{x^3-y^3}.$

18. 解：$\sqrt[4]{a^4b^4-2a^3b^5+a^2b^6}=\sqrt[4]{a^2b^4(a^2-2ab+b^2)}$
$=\sqrt[4]{a^2b^4(a-b)^2}=b\sqrt{a(a-b)}.$

19. 解：$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{32ab^2}}=\sqrt[3]{\frac{2(a^3+b^3)a^2b}{64a^3b^3}}=\frac{1}{4ab}\sqrt[3]{2(a^3+b^3)a^2b}.$

20. 解：$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}}=\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}.$

21. 解：$\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{9(x+1)^2}}=\sqrt[3]{\frac{(x^2-x+1)3(x+1)}{27(x+1)^3}}$
$=\frac{1}{3(x+1)}\sqrt[3]{3(x^3+1)}.$

22. 解：$\sqrt[3]{1-\frac{a^3}{b^3}}=\sqrt[3]{\frac{b^3-a^3}{b^3}}=\frac{1}{b}\sqrt[3]{b^3-a^3}.$

23. 解：$\sqrt[3]{\frac{c^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+2}}}=\sqrt[3]{\frac{bc^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+3}}}=\frac{c}{a^nb^{n+1}}\sqrt[3]{bc^n}.$

24. 解：$\sqrt{\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{2ax}{b^2}+\frac{1}{b}}=\sqrt{\frac{b(a^2x^2-2abx+b^2)}{b^4}}$
$=\sqrt{\frac{b(ax-b)^2}{b^4}}=\frac{ax-b}{b^2}\sqrt{b}.$

25. 解: $3a\sqrt{3a}=\sqrt{(3a)^2}\sqrt{3a}=\sqrt{27a^3}$.

26. 解: $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\sqrt{\frac{(a-b)(a+b)^2}{(a+b)(a-b)^2}}=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$.

27. 解: $3ax\sqrt[4]{\frac{1}{27a^3x^3}}=\sqrt[4]{\frac{(3ax)^4}{27a^3x^3}}=\sqrt[4]{\frac{81a^4x^4}{27a^3x^3}}=\sqrt[4]{3ax}$.

28. 解: $\sqrt{18}=\sqrt{2\times 3^2}=3\sqrt{2}$.
$\sqrt{50}=\sqrt{2\times 5^2}=5\sqrt{2}$.
$\sqrt{1/8}=\sqrt{2/16}=1/4\sqrt{2}$.

29. 解: $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3\times 2^3}=2\sqrt[3]{3}$.
$\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{3\times 4^3}=4\sqrt[3]{3}$.
$\sqrt[3]{8/9}=\sqrt[3]{24/27}=2/3\sqrt[3]{3}$.

30. 解: $\sqrt{(x^3-y^3)(x-y)}=\sqrt{(x-y)^2(x^2+xy+y^2)}$
$=(x-y)\sqrt{x^2+xy+y^2}$.
$\sqrt{x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4}=\sqrt{x^2y^2(x^2+xy+y^2)}$
$=xy\sqrt{x^2+xy+y^2}$.

習題 XXXIV

原本第277頁

1. 解: $\sqrt[6]{3}=\sqrt[30]{3^5}=\sqrt[30]{243}$.
$\sqrt[10]{3}=\sqrt[30]{3^3}=\sqrt[30]{27}$.
$\sqrt[15]{3}=\sqrt[30]{3^2}=\sqrt[30]{9}$.

2. 解: $\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[12]{(a^2)^4}=\sqrt[12]{a^8}$.
$\sqrt[4]{2a^3b^2}=\sqrt[12]{(2a^3b^2)^3}=\sqrt[12]{8a^9b^6}$.
$\sqrt[6]{7b^5}=\sqrt[12]{(7b^5)^2}=\sqrt[12]{49b^{10}}$.

3. 解: $3\sqrt{2}=\sqrt{18}=\sqrt[6]{18^3}=\sqrt[6]{5832}$.
$2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{24}=\sqrt[6]{24^2}=\sqrt[6]{576}$.
$\therefore\quad 3\sqrt{2}>2\sqrt[3]{3}$.

4. 解: $\sqrt{3}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[12]{729}$.
$\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{256}$.
$\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$.

$\therefore\ \sqrt{3}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}.$

5. 解: $\sqrt{35}\div\sqrt{7/5}=\sqrt{35}\cdot\sqrt{5/7}=\sqrt{5^2}=5.$

6. 解: $10\div\sqrt{5}=10\times 1/\sqrt{5}=10\times\frac{\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}.$

7. 解: $4\div\sqrt[3]{2}=4\times\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=4\times\frac{\sqrt[3]{4}}{2}=2\sqrt[3]{4}.$

8. 解 $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{900}=30.$

9. 解: $\sqrt[3]{60}\cdot\sqrt[3]{90}\cdot\sqrt[3]{15}=\sqrt[3]{60\cdot 90\cdot 15}$
$=\sqrt[3]{30\cdot 2\cdot 3\cdot 30\cdot 15}=30\sqrt[3]{3}.$

10. 解: $2\sqrt{3}\div 3\sqrt{2}=\sqrt{12}\times\sqrt{1/18}=\sqrt{6/9}=\frac{1}{3}\sqrt{6}.$

11. 解: $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{2^{13}}=2\sqrt[12]{2}.$

12. 解: $\sqrt[6]{3}\div\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{9}\cdot\sqrt[12]{1/5^3}$
$=\sqrt[12]{9/5^3}=\frac{1}{5}\sqrt[12]{9\cdot 5^9}=1/5\sqrt[12]{17578125}.$

13. 解: $2\sqrt{35}\cdot\sqrt{65}\div\sqrt{91}=2\sqrt{35\times 65/91}$
$=2\sqrt{5\times 7\times 5\times 13/7\times 13}=10.$

14. 解: $\sqrt{a^3b^5c^7}\cdot\sqrt[3]{a^2b^4c^8}=ab^2c^3\sqrt{abc}\times bc^2\sqrt[3]{a^2bc^2}$
$=ab^3c^5\sqrt[6]{a^3b^3c^3\times a^4b^2c^4}=a^2b^3c^6\sqrt[6]{ab^5c}.$

15. 解: $\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[3n]{a}=\sqrt[6n]{a^3}\cdot\sqrt[6n]{a^2}=\sqrt[6n]{a^5}.$

16. 解: $\sqrt{a^3b^3}\div\sqrt[6]{a^5b^5}=\sqrt[6]{a^9b^9}\cdot\sqrt[6]{1/a^5b^5}=\sqrt[6]{a^4b^4}=\sqrt[3]{a^2b^2}.$

17. 解: $\sqrt[3]{a^2bc^2}\cdot\sqrt[3]{ab^2c^4}=\sqrt[3]{a^3b^3c^6}=abc^2.$

18. 解: $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6n]{a}=\sqrt[6n]{a^{2n}}\cdot\sqrt[6n]{a}=\sqrt[6n]{a^{2n+1}}.$

19. 解: $\sqrt[6]{a/b}\div\sqrt[9]{a/b}=\sqrt[18]{a^3/b^3}\cdot\sqrt[18]{b^2/a^2}$
$=\sqrt[18]{a/b}=1/b\sqrt[18]{ab^{17}}.$

20. 解: $\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{ab^5}\div(\sqrt[10]{a^7b^9}\cdot\sqrt[15]{a^{12}b^{14}}$
$=\sqrt[6]{a^2b^4}\cdot\sqrt[6]{ab^5}\div(\sqrt[30]{a^{21}b^{27}}\cdot\sqrt[30]{a^{24}b^{28}})$
$=\sqrt[6]{a^3b^9}\div\sqrt[30]{a^{45}b^{55}}=\sqrt[6]{a^3b^9}\div\sqrt[6]{a^9b^{11}}=\sqrt[6]{a^3b^9/a^9b^{11}}$
$=\frac{1}{ab}\sqrt[6]{/b^4}=\frac{1}{ab}\sqrt[3]{b^2}.$

21. 解: $(\sqrt{12})^3=12\sqrt{12}=24\sqrt{3}.$

22. 解：$(\sqrt[3]{a^2})^6=(a^2)^2=a^4.$

23. 解：$(2\sqrt[4]{xy^2z^3})^6=64\sqrt[4]{x^6y^{12}z^{18}}=64xy^3z^4\sqrt[4]{x^2z^2}$
$=64xy^3z^4\sqrt{xz}.$

24. 解：$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[12]{a^2}=\sqrt[6]{a}$

25. 解：$\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}.$

26. 解：$\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^3b^6/c^9}}=\sqrt[30]{a^3b^6/c^9}=\sqrt[10]{ab^2/c^3}$
$=\sqrt[10]{ab^2c^7/c^{10}}=1/c\sqrt[10]{ab^2c^7}.$

27. 解：$\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}=\sqrt[12]{256}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[3]{4}.$

28. 解：$\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{8}}=\sqrt[4]{8}.$

29. 解：$\sqrt{2\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[6]{16}=\sqrt[3]{4}.$

30. 解：$\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{4}}=\sqrt{\sqrt[6]{32}}=\sqrt[12]{32}.$

31. 解：$\sqrt[m]{\sqrt[2n]{a^m}}=\sqrt[2mn]{a^m}=\sqrt[2n]{a}.$

32. 解：$(\sqrt[2m]{\sqrt[n]{a}})^{mnp}=\sqrt[2mn]{a^{mnp}}=\sqrt{a^p}.$

33. 解：$\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{147}$
$=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-4\sqrt{3}+7\sqrt{3}=10\sqrt{3}.$

34. 解：$\sqrt{125}+\sqrt{175}-\sqrt{28}+\sqrt{1/20}$
$=5\sqrt{5}+5\sqrt{7}-2\sqrt{7}+\frac{1}{10}\sqrt{5}$
$=\frac{51}{10}\sqrt{5}+3\sqrt{7}.$

35. 解：$\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{1/2}=5\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$
$=\frac{5}{2}\sqrt[3]{4}.$

36. 解：$\sqrt{a/bc}+\sqrt{b/ca}+\sqrt{c/ab}$
$=\sqrt{\frac{a^3bc}{a^2b^2c^2}}+\sqrt{\frac{ab^3c}{a^2b^2c^2}}+\sqrt{\frac{abc^3}{a^2b^2c^2}}$
$=\frac{a}{abc}\sqrt{abc}+\frac{b}{abc}\sqrt{abc}+\frac{c}{abc}\sqrt{abc}$
$=\frac{a+b+c}{abc}\sqrt{abc}.$

37. 解：$\sqrt{50}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{7\frac{1}{9}}$

$=5\sqrt{2}-3/2\sqrt{2}-2\sqrt[3]{3}+4/3\sqrt[3]{3}=7/2\sqrt{2}-2/3\sqrt[3]{3}.$

38. 解: $\sqrt{(a+b)^2c}-\sqrt{a^2c}-\sqrt{b^2c}$

$=(a+b)\sqrt{c}-a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=0.$

39. 解: $\sqrt{ax^3+6ax^2+9ax}-\sqrt{ax^3-4a^2x^2+4a^3x}$

$=\sqrt{ax(x^2+6x+9)}-\sqrt{ax(x^2-4ax+4a^2)}$

$=\sqrt{ax(x+3)^2}-\sqrt{ax(x-2a)^2}$

$=(x+3)\sqrt{ax}-(x-2a)\sqrt{ax}$

$=(3+2a)\sqrt{ax}.$

40. 解: $(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}-(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{1}{x^2-y^2}}$

$=(x+y)\sqrt{\frac{(x^2-y^2)}{(x+y)^2}}-(x-y)\sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}}+\sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x^2-y^2)^2}}$

$=\frac{1}{x^2-y^2}\sqrt{x^2-y^2}.$

41. 解: $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+6.$

42. 解: $(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{14})\div\sqrt{2}=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}.$

43. 解: $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{15})=2\sqrt{3}+3\sqrt{10}+\sqrt{10}+5\sqrt{3}$

$=7\sqrt{3}+4\sqrt{10}.$

44. 解: $\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}.$

45. 解: $(1+\sqrt{3})^3=1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}=10+6\sqrt{3}.$

46. 解: $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1)$

$=(\sqrt{a}+1+\sqrt[4]{a})(\sqrt{a}+1-\sqrt[4]{a})$

$=(\sqrt{a}+1)^2-(\sqrt[4]{a})^2=a+2\sqrt{a}+1-\sqrt{a}=a+\sqrt{a}+1.$

習　題　XXXV

原本第 232 頁

1. 解: $\sqrt[12]{a^8}=a^{\frac{8}{12}}=a^{\frac{2}{3}}.$

2. 解: $\sqrt{c^{\frac{4}{3}}}=c^{\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}}=c^{\frac{2}{3}}.$

3. 解: $\frac{a^{\frac{8}{5}}}{\sqrt[3]{a^{\frac{6}{5}}}}=\frac{a^{\frac{8}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}}=a^{\frac{8}{5}-\frac{2}{5}}=a^{\frac{6}{5}}.$

4. 解: $b\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[6]{b^5}=b\cdot b^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{5}{6}}=b^{1+\frac{4}{3}+\frac{5}{6}}=b^{\frac{19}{6}}.$

5. 解: $a^{\frac{14}{21}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}.$

6. 解: $c^{-1.5}=c^{-\frac{3}{2}}=1/c^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{c\sqrt{c}}=\dfrac{1}{c^2}\sqrt{c}.$

7. 解: $(d^{\frac{2}{3}})^{-6}=\dfrac{1}{(d^{\frac{2}{3}})^6}=\dfrac{1}{d^4}.$

8. 解: $(e^{-3\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{7}}=(e^{-\frac{7}{2}})^{-\frac{1}{7}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$

9. 解: $\dfrac{a^{-1}}{b^{-3}c^{-2}}=\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b^3}\cdot\frac{1}{c^2}}=\dfrac{b^3c^2}{a}.$

10. 解: $x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{y^{-3}}=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{3}{2}}}.$

11. 解: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^{-5}}}\right)^{-4}=\left(\dfrac{1}{x^{-\frac{5}{2}}}\right)^{-4}=\dfrac{1}{x^{10}}.$

12. 解: $\dfrac{x^{-2}\sqrt{y^{-3}}}{y^{-2}\sqrt{x^{-3}}}=\dfrac{x^{-2}\cdot y^{-\frac{3}{2}}}{y^{-2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}}=\dfrac{y^2x^{\frac{3}{2}}}{x^2y^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}.$

13. 解: $\dfrac{a}{bc}-\dfrac{b^{-1}}{c^{-2}}-\dfrac{a^{-1}(b^{-1}+c^{-1})}{a^{-2}(b+c)}+\dfrac{b+c}{b^{-1}+c^{-1}}=\dfrac{a}{bc}-\dfrac{c^2}{b}-\dfrac{a}{bc}+bc$

$=\dfrac{-c^3+b^2c^2}{bc}=\dfrac{-c^2+b^2c}{b}=(-c^2+b^2c)b^{-1}=bc-c^2b^{-1}.$

14. 解: $\left(3\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{25}{8}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{5^2}{2^3}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{5^3}{16\sqrt{2}}=\dfrac{125\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{32}.$

15. 解: $(81)^{\frac{3}{4}}=(3^4)^{\frac{3}{4}}=3^3=27.$

16. 解: $(-27)^{\frac{2}{3}}=[(-3)^3]^{\frac{2}{3}}=(-3)^2=9.$

17. 解: $8^{-\frac{5}{2}}=\dfrac{1}{8^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{1}{(2^3)^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{1}{2^{\frac{15}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2^{15}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^{16}}}=2^{\frac{1}{2}}/2^8=2^{\frac{1}{2}}/256$

18. 解：$a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}=a^{\frac{9}{4}}$.

19. 解：$a^{\frac{2}{5}}a^{-\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{15}}=a^{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}-\frac{1}{15}}=a^0=1$.

20. 解：$\frac{ab^{-2}}{a^{-3}b}=\frac{a}{b^2}\cdot\frac{a^3}{b}=\frac{a^4}{b^3}=a^4b^{-3}$.

21. 解：$(a^{\frac{3}{2}}b)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=(ab)^{\frac{5}{4}}$.

22. 解：$(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{9}}=a^{\frac{6}{36}}=a^{\frac{1}{6}}$.

23. 解：$(a^{-1}b^{-2}c^3)^{-2}=a^2b^4c^{-6}$.

24. 解：$(-32a^{10})^{\frac{3}{5}}=(-2^5a^{10})^{\frac{3}{5}}=-2^3a^6=-8a^6$.

25. 解：$(-a^6b^{-9})^{-\frac{2}{3}}=+a^{-4}b^6=a^{-4}b^6$.

26. 解：$b^{-\frac{1}{3}}\sqrt[12]{b^{-5}}\div b^{-1}\sqrt{b^{-1}}=b^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{5}{12}}\div b^{-1}\cdot b^{-\frac{1}{2}}$

$=b^{-\frac{3}{4}}\div b^{-\frac{3}{2}}=b^{\frac{3}{4}}$.

27. 解：$(a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{bc^5})^{\frac{2}{3}}=a^{-1}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{3}}$.

28. 解：$\left(\frac{8a^{-15}}{\sqrt{125a^3}}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{2^3a^{-15}}{5^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{2^{-2}a^{10}}{5^{-1}a^{-1}}=2^{-2}\cdot5a^{11}=\frac{5}{4}a^{11}$.

29. 解：$\sqrt{a^{\frac{2}{3}}(bc^{-1})^{-2}}=a^{\frac{2}{6}}(bc^{-1})^{-\frac{2}{2}}=a^{\frac{1}{3}}bc$.

30. 解：$\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt[4]{a^3}}=a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{3}{12}}=a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=a^{-\frac{1}{12}}$.

31. 解：$\frac{\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\sqrt{a^{-3}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\cdot\sqrt[3]{a}}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{7}{6}}\cdot a^{\frac{1}{6}}}=\frac{a}{a^{-1}}=a^2$.

32. 解：$[(x^x)^x]^x=[x^{x2}]^x=x^{x3}$.

33. 解：$(x^{x2+xy}y^{y2+xy})^{\frac{xy}{x+y}}=x^{x2y}+y^{xy2}$.

34. 解：$\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{4}}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{\frac{y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}}=(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})\left(\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}\right)$

$$=(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})\left(\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}\right)=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}.$$

35. 解： $(x^{\frac14}+x^{\frac18}y^{\frac18}+y^{\frac14})(x^{\frac14}-x^{\frac18}y^{\frac18}+y^{\frac14})=(x^{\frac14}+y^{\frac14})^2-(x^{\frac18}y^{\frac18})^2$

$=(x^{\frac14})^2+2x^{\frac14}y^{\frac14}+(y^{\frac14})^2-x^{\frac14}y^{\frac14}=x^{\frac12}+x^{\frac14}y^{\frac14}+y^{\frac12}.$

36. 解：

$$\begin{array}{l}
\quad\quad\quad\quad \underline{\big|\, a^{\frac13}-b^{\frac12}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\quad\quad\quad a^{\frac53}+a^{\frac43}b^{\frac12}+ab+a^{\frac23}b^{\frac32}+a^{\frac13}b^2+b^{\frac52} \\
a^2-b^3 \\
\underline{a^2-a^{\frac53}b^{\frac12}} \\
\quad a^{\frac53}b^{\frac12} \\
\quad \underline{a^{\frac53}b^{\frac12}-a^{\frac43}b} \\
\quad\quad a^{\frac43}b \\
\quad\quad \underline{a^{\frac43}b-ab^{\frac32}} \\
\quad\quad\quad ab^{\frac32} \\
\quad\quad\quad \underline{ab^{\frac32}-a^{\frac23}b^2} \\
\quad\quad\quad\quad a^{\frac23}b^2 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{a^{\frac23}b^2-a^{\frac13}b^{\frac52}} \\
\quad\quad\quad\quad\quad a^{\frac13}b^{\frac52}-b^3 \\
\quad\quad\quad\quad\quad \underline{a^{\frac13}b^{\frac52}-b^3} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

答： $Q=a^{\frac53}+a^{\frac43}b^{\frac12}+ab+a^{\frac23}b^{\frac32}+a^{\frac13}b^2+b^{\frac52}.$

37. 解： $(x^{\frac12}-y^{\frac14}z^{\frac14})^4=(x^{\frac12})^4-4(x^{\frac12})^3(y^{\frac14}z^{\frac14})+6(x^{\frac12})^2(y^{\frac14}z^{\frac14})^2$

$-4(x^{\frac12})(y^{\frac14}z^{\frac14})^3+(y^{\frac14}z^{\frac14})^4$

$=x^2-4x^{\frac32}y^{\frac14}z^{\frac14}+6xy^{\frac12}z^{\frac12}-4x^{\frac12}y^{\frac34}z^{\frac34}+yz.$

38. 解： $[(e^x+e^{-x})^2-4]^{\frac12}=[e^{2x}+2+e^{-2x}-4]^{\frac12}$

$=[e^{2x}-2+e^{-2x}]^{\frac12}=[(e^x-e^{-x})^2]^{\frac12}=e^x-e^{-x}.$

39. 解：

$$\begin{array}{r}
\underline{\big|\, x+2x^{\frac12}y^{\frac12}+3x^{-\frac12}y^{\frac32}} \\
x^2+4x^{\frac32}y^{\frac12}+4xy+6x^{\frac12}y^{\frac32}+12y^2+9x^{-1}y^3
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^2 \\
\hline
2x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} & 4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+4xy \\
 & 4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+4xy \\
\hline
2x+4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} & 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+12y^2+9x^{-1}y^3 \\
 & 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+12y^2+9x^{-1}y^3 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

答：其平方根爲 $x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$.

40. 解：$x^3+3x^2+6x+7+6x^{-1}+3x^{-2}+x^{-3}=(x+p+qx^{-1})^3$
$=x^3+3px^2+\cdots\cdots+qx^{-3}$.

$$3p=3 \qquad \therefore\ p=1, \qquad q=1.$$

答：其立方根爲 $x+1+x^{-1}$.

習　題　XXXVI

原本第 284 頁

1. 解：$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1^{\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})}{1\cdot 2}x^2+\dfrac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\cdots$

$$=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}+\cdots\cdots.$$

2. 解：$(a^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}=(a^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)(a^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}}(x^{-\frac{2}{3}})$

$$+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2}(a^{\frac{2}{3}})^{-\frac{5}{2}}(x^{-\frac{2}{3}})^2+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1\cdot 2\cdot 3}(a^{\frac{2}{3}})^{-\frac{7}{2}}(x^{-\frac{2}{3}})^3$$

$$+\cdots\cdots$$

$$=a^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}a^{-1}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{3}{8}a^{-\frac{5}{3}}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{5}{16}a^{-\frac{7}{3}}x^{-2}+\cdots\cdots.$$

3. 解：$\sqrt[3]{(27-2x)^2}=(27-2x)^{\frac{2}{3}}=27^{\frac{2}{3}}-\dfrac{2}{3}\cdot 27^{-\frac{1}{3}}(2x)$

$$+\frac{\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})}{1\cdot 2}(27)^{-\frac{4}{3}}(2x)^2-\frac{\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})}{1\cdot 2\cdot 3}(27)^{-\frac{7}{3}}(2x)^3+\cdots\cdots$$

$$=9-\frac{4}{3^2}x-\frac{4}{3^6}x^2-\frac{32}{3^{11}}x^3+\cdots\cdots.$$

4. **解：** $(a^m+x)^{\frac{1}{m}}=(a^m)^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{m}(a^m)^{\frac{1}{m}-1}x$

$+\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1-m}{m}\right)}{1\cdot 2}(a^m)^{\frac{1}{m}-2}x^2+\frac{\frac{1}{m}\left[\frac{1-m}{m}\right]\left[\frac{1-2m}{m}\right]}{1\cdot 2\cdot 3}(a^m)^{\frac{1}{m}-3}x^3$

$+\cdots\cdots$

$=a+\frac{1}{m}a^{1-m}x+\frac{1-m}{2m^2}a^{1-2m}x^2+\frac{(1-m)(1-2m)}{6m^3}$

$+a^{1-3m}x^3+\cdots\cdots.$

5. **解：** $(a^{-1}-b^{-\frac{1}{2}})^{-4}=a^4+4a^5b^{-\frac{1}{2}}+\frac{(-4)(-5)}{2}a^6b^{-1}$

$-\frac{(-4)(-5)(-6)}{2\cdot 3}a^7b^{-\frac{3}{2}}$

$=a^4+4a^5b^{-\frac{1}{2}}+10a^6b^{-1}+20a^7b^{-\frac{3}{2}}+\cdots\cdots.$

6. **解：** $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})^{-6}=(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}})^{-6}=x^{-3}-6x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{1}{3}}$

$+\frac{(-6)(-7)}{2}x^{-4}(y^{\frac{1}{3}})^2+\frac{(-6)(-7)(-8)}{2\cdot 3}x^{-\frac{9}{2}}(y^{\frac{1}{3}})^3$

$+\cdots\cdots$

$=x^{-3}-6x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{1}{3}}+21x^{-4}y^{\frac{2}{3}}-56x^{-\frac{9}{2}}y+\cdots\cdots.$

7. **解：** $\frac{1}{2+3x}=(2+3x)^{-1}=2^{-1}-2^{-2}3x+\frac{(-1)(-2)}{2}\cdot 2^{-3}(3x)^2$

$+\frac{(-1)(-2)(-3)}{2\cdot 3}2^{-4}(3x)^3+\cdots\cdots$

$=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x+\frac{9}{8}x^2-\frac{27}{16}x^3+\cdots\cdots$

8. **解：** $\frac{1}{\sqrt[5]{(1+x)^2}}=(1+x)^{-\frac{2}{5}}=1-\frac{2}{5}x+\frac{(-\frac{2}{5})(-\frac{7}{5})}{2}x^2$

$+\frac{(-\frac{2}{5})(-\frac{7}{5})(-\frac{12}{5})}{2\cdot 3}x^3+\cdots\cdots$

$=1-\frac{2}{5}x+\frac{7}{25}x^2-\frac{28}{125}x^3+\cdots\cdots.$

9. **解：** $\left(\frac{1}{\sqrt{1+3\sqrt{x}}}\right)^3=(1+3x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{3}{2}}$

$$=1-\frac{3}{2}3x^{\frac{1}{2}}+\frac{(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{2}(3x^{\frac{1}{2}})^2+\frac{(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{2\cdot 3}(3x^{\frac{1}{2}})^3+\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{135}{8}x-\frac{945}{16}x^{\frac{3}{2}}+\cdots\cdots.$$

10. 解: $n=-3,\ a=1,\ b=x,\ r=9.$

$$\frac{(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}x^9$$

$$=-55x^9.$$

11. 解: $n=\frac{3}{4},\ \ a=x^{-2},\ \ b=2y^{\frac{1}{3}},\ \ r=6.$

$$\frac{\frac{3}{4}(-\frac{1}{4})(-\frac{5}{4})(-\frac{9}{4})(-\frac{13}{4})(-\frac{17}{4})}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}a^{-\frac{21}{2}}(2y^{\frac{1}{3}})^6=-\frac{663}{1024}x^{-\frac{21}{2}}y^2.$$

12. 解: $x^{\frac{9}{2}}=(-x^{\frac{1}{2}})^n=-x^{\frac{n}{2}}\qquad\therefore\quad n=9.$

$$\frac{\frac{1}{4}(-\frac{3}{4})(-\frac{7}{4})(-\frac{11}{4})(-\frac{15}{4})(-\frac{19}{4})(-\frac{23}{4})(-\frac{27}{4})(-\frac{31}{4})}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}x^{\frac{9}{2}}$$

$$=-\frac{19\cdot 23\cdot 31\cdot 33}{2^{25}}x^{\frac{9}{2}}=-\frac{507051}{31554432}x^{\frac{9}{2}}.$$

13. 在 $x^{-\frac{3}{2}}(2+x^{-\frac{1}{6}})^{-3}$ 展開式中, x^{-2} 項卽在 $(2+x^{-\frac{1}{6}})^{-3}$ 展開式中 $x^{-\frac{1}{2}}$ 項. 設 t_r 爲 $(2+x^{-\frac{1}{6}})^{-3}$ 展開式中第 $r+1$ 項, 則

$$t_r=\frac{-3(-3-1)\cdots\cdots(-3-r+1)}{\underline{|r}}2^{-3-r}(x^{-\frac{1}{6}})^r$$

$$=\frac{(-3)(-4)\cdots\cdots(-3-r+1)}{\underline{|r}}2^{-3-r}x^{-\frac{r}{6}}$$

設 $\qquad -\frac{r}{6}=-\frac{1}{2}\qquad r=3.$

$$t_3=\frac{(-3)(-4)(-5)}{1\cdot 2\cdot 3}2^{-6}x^{-\frac{1}{2}}=-\frac{5}{2^5}x^{-\frac{1}{2}}$$

答: 所求之項爲 $-\frac{5}{2^5}x^{-2}$.

14. 解: 1. $\sqrt{99}=3(9+2)^{\frac{1}{2}}=3\Big[3+\frac{1}{2}9^{-\frac{1}{2}}\cdot 2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}9^{-\frac{3}{2}}\cdot 2^2$

$$+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3}\cdot 9^{-\frac{5}{2}}\cdot 2^3\Big]=9+1-\frac{4}{216}+\frac{8}{2888}=9.9498.$$

2. $\sqrt[3]{62}=(64-2)^{\frac{1}{3}}=4-\frac{1}{3}\cdot 64^{-\frac{2}{3}}\cdot 2+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2}\cdot 64^{-\frac{5}{3}}\cdot 2^2$

$-\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{2\cdot 3}\cdot 64^{-\frac{8}{3}}\cdot 2^3=4-\frac{2}{48}+\frac{1}{2304}-\frac{4}{9216}=3.9578.$

3. $\sqrt[5]{31}=(32-1)^{\frac{1}{5}}=2-\frac{1}{5}\cdot 32^{-\frac{4}{5}}+\frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})}{2}\cdot 32^{-\frac{9}{5}}$

$+\frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})(-\frac{9}{5})}{2\cdot 3}\cdot 32^{-\frac{14}{5}}=2-\frac{1}{80}-\frac{1}{64075}=1.0873.$

習題 XXXVII

原本第287頁

1. 解：$\sqrt[7]{a^5}$.

$$\because\quad a^{\frac{5}{7}}a^{\frac{2}{7}}=a.$$

答：$\sqrt[7]{a^5}$ 之理化因子爲 $a^{\frac{2}{7}}$.

2. 解：$\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b^3}$.

$$\because\quad (a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}})(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}})=ab^2.$$

答：$\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b^3}$ 之理化因子爲 $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$.

3. 解：$x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}}$.

$$\because\quad (x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}})x^{\frac{1}{2}}=x^2+x^3+x^4.$$

答：$x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}}$ 之理化因子爲 $x^{\frac{1}{2}}$.

4. 解：$\sqrt{a}+\sqrt{bc}$.

$$(a^{\frac{1}{2}}+\overline{bc}^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-\overline{bc}^{\frac{1}{2}})=a-bc.$$

答：$\sqrt{a}+\sqrt{bc}$ 之理化因子爲 $\sqrt{a}-\sqrt{bc}$.

5. 解：$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})$

$=x+y-z+2\sqrt{xy}(x+y-z+2\sqrt{xy}).$

$(x+y-z+2\sqrt{xy})(x+y-z+2\sqrt{xy})$

$=(x+y-z)^2-4xy.$

答：$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ 之理化因子爲 $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(x+y-z-2\sqrt{xy})$.

6. 解：$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$.

$(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}-\sqrt{zx})$

$=xy+yz-zx+2y\sqrt{xz}(xy+yz-zx+2y\sqrt{xy}).$

$(xy+yz-zx+2y\sqrt{xz})(xy+yz-zx-2y\sqrt{xz})$

$=(xy+yz-zx)^2-4y^2xz.$

答：$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$ 之理化因子爲 $(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}-\sqrt{zx})(xy+yz-zx-2y\sqrt{xz})$.

7. 解：$\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}-\sqrt{u}$.

$[(\sqrt{x}+\sqrt{y})-(\sqrt{z}+\sqrt{u})][(\sqrt{x}+\sqrt{y})+(\sqrt{z}+\sqrt{u})]=[(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{z}+\sqrt{u})^2]$

$=x+y-z-u+2(\sqrt{xy}-\sqrt{zu}).$

$[x+y-z-u+2(\sqrt{xy}-\sqrt{zu})][x+y-z-u-2(\sqrt{xy}-\sqrt{zu})]=(x+y-z-u)^2-4(\sqrt{xy}-\sqrt{zu})^2$

$=x^2+y^2+z^2+u^2-2xy-2xz-2xu-2yz-2yu-2zu+8\sqrt{xyzu}.$

$[x^2+y^2+z^2+u^2-2xy-2xz-2xu-2yz-2yu-2zu+8+\sqrt{xyzu}][x^2+y^2+z^2+u^2-2xy-2xz-2xu-2yz-2yu-2zu-8\sqrt{xyzu}]$

$=[x^2+y^2+z^2+u^2-2xy-2xz-2xu-2yz-2yu-2zu]^2-64xyzu.$

答：$\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}-\sqrt{u}$ 之理化因子爲 $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{u})[x+y-z-u-2(\sqrt{xy}-\sqrt{zu}\ ]$ $[x^2+y^2+z^2+u^2-2xy-2xz-2xu-2yz-2yu-2zu-8\sqrt{xyzu}]$.

8. 解：$(\sqrt{x}+1+\sqrt[4]{x})(\sqrt{x}+1-\sqrt[4]{x})$

$=x+1+2\sqrt{x}-\sqrt{x}=x+1+\sqrt{x}.$

$(x+1+\sqrt{x})(x+1-\sqrt{x})=(x+1)^2-x=x^2+x+1.$

答：$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1$ 之理化因子爲 $(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1)\times(x-\sqrt{x}+1)$.

9. 解：$(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=x+y$.

答：$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$ 之理化因子爲 $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

10. 解：$(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}})=[a^{\frac{1}{3}}-(b^2)^{\frac{1}{3}}]$.

$[a^{\frac{1}{3}}-(b^2)^{\frac{1}{3}}][a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}]=a-b^2$

答：$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b^2}$ 之理化因子爲 $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}$.

11. 解：$(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})=x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$.

$(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})=x-y$.

答：$x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}$ 之理化因子爲 $(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$.

12. 解：$x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{2}{3}}=(x^9)^{\frac{1}{12}}+(y^8)^{\frac{1}{12}}$.

$[(x^9)^{\frac{1}{12}}+(y^8)^{\frac{1}{12}}][(x^9)^{\frac{11}{12}}-(x^9)^{\frac{10}{12}}(y^8)^{\frac{1}{12}}+(x^9)^{\frac{9}{12}}(y^8)^{\frac{2}{12}}-\cdots\cdots-(y^8)^{\frac{11}{12}}]=x^9-y^8$.

答：$x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{2}{3}}$ 之理化因子爲 $[(x^9)^{\frac{11}{12}}-(x^9)^{\frac{10}{12}}(y^8)^{\frac{1}{12}}+(x^9)^{\frac{9}{12}}(y^8)^{\frac{2}{12}}-\cdots\cdots-(y^8)^{\frac{11}{12}}]$.

13. 解：$(1+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})(1-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})=1-xy^{\frac{2}{3}}$.

$(1-xy^{\frac{2}{3}})(1+xy^{\frac{2}{3}}+x^2y^{\frac{4}{3}})=1-x^3y^2$.

答：$1+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$ 之理化因子爲 $(1-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})(1+xy^{\frac{2}{3}}+x^2y^{\frac{4}{3}})$.

14. 解：$(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)(x^{\frac{1}{3}}-1)=x-1$.

答：$x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1$ 之理化因子爲 $x^{\frac{1}{3}}-1$.

15. 解：$(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})=9-5=4$.

答：$3-\sqrt{5}$ 之理化因子爲 $3+\sqrt{5}$.

16. 解：$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})=1+2-3+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.　$2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$.

答：$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 之理化因子爲 $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}$.

17. 解：$(1+2^{\frac{1}{3}})(1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}})=1-2=-1.$

答：$1+\sqrt[3]{2}$ 之理化因子為 $1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$.

18. 解：$(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)(1-\sqrt[3]{3})=1-3.$

答：$\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$ 之理化因子為 $1-\sqrt[3]{3}$.

19. 解：$(\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3})\sqrt[3]{3^2}=3\sqrt[3]{2^2}+3\sqrt[3]{2}+3.$

$(3\sqrt[3]{2^2}+3\sqrt[3]{2}+3)(1-\sqrt[3]{2})=3.$

答：$\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3}$ 之理化因子為 $\sqrt[3]{3^2}(1-\sqrt[3]{2})$.

20. 解：$\dfrac{1}{\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{\sqrt{a}\sqrt[5]{b^3}}{ab}.$

21. 解：$\dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}=\dfrac{a^2+2a\sqrt{b}+b}{a^2-b}.$

22. 解：$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{6}}{15}.$

23. 解：$\dfrac{1}{b+\sqrt{b^2-a^2}}=\dfrac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a^2}.$

24. 解：$\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}=\dfrac{2x+2\sqrt{x^2-y^2}}{2y}=\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}.$

25. 解：$\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$$=\frac{-4-2\sqrt{6}}{-2\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{12}}{2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

26. 解：$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

$$=\frac{(1+\sqrt{2})-(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{-6-4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})(6-4\sqrt{2})}{36-32}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{4}$$

$$=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}.$$

27. 解：$\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}}$

$$=\frac{(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})}{x+y-x-y+2\sqrt{xy}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})\sqrt{xy}}{2xy}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})(xy\sqrt{x}+xy\sqrt{y})}{2xy}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{2}.$$

28. 解：$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+1}=\dfrac{\sqrt[3]{3}+1+\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3^2}-1}$

$$=\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}-1}=\frac{2\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3^2}+1)}{(\sqrt[3]{3^2}-1)(\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3^2}+1)}$$

$$=\frac{2\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3^2}+1)}{8}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3^2}+1)}{4}$$

29. 解：$\dfrac{5}{\sqrt{125}}=\dfrac{5}{5\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}=0.447.$

30. 解：$\dfrac{2+\sqrt{28}}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}+\sqrt{196}}{7}=\dfrac{2\sqrt{7}+14}{7}=2.756.$

31. 解：$\dfrac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}=1.732.$

習題 XXXVIII

原本第290頁

1. 解：$x^{\frac{1}{2}}=4.$

$$\therefore \quad x=4^4=256.$$

2. 解：$x^{-\frac{1}{2}}=3.$

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=3 \quad 或 \quad \frac{1}{x}=3^2=9.$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{9}.$$

3. 解：$x^{\frac{3}{2}}=8.$

$$\therefore \quad x=8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(2^3)^2}=4.$$

4. 解：$(\sqrt{2x-1})^{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}.$

$$(2x-1)^{\frac{1}{3}}=3.$$

$$2x-1=3^3=27.$$

$$\therefore \quad x=14.$$

5. 解：$\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=2.$

$$[2+(3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}=2.$$

$$2+(3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=4.$$

$$(3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=2.$$

$$3+x^{\frac{1}{2}}=4.$$

$$x^{\frac{1}{2}}=1. \quad \therefore \ x=1.$$

6. 解：$\sqrt{ax}+\sqrt{bx}+\sqrt{cx}=d.$

$$\sqrt{x}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})=d.$$

$$\sqrt{x}=\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}.$$

$$\therefore \quad x=\left[\frac{d}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right]^2.$$

7. 解：$\sqrt{4x^2+x+10}=2x+1.$

$$4x^2+x+10=4x^2+4x+1.$$

$$3x=9.$$

$$\therefore \quad x=3.$$

8. 解：$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=7.$

$$\sqrt{x+4}=7-\sqrt{x+11}.$$
$$x+4=49-14\sqrt{x+11}+x+11.$$
$$14\sqrt{x+11}=56.$$
$$\sqrt{x+11}=4.$$
$$x+11=16.$$
$$\therefore\quad x=5.$$

9. 解：$\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+1}-\sqrt{9x+10}=0.$
$$\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+1}=\sqrt{9x+10}.$$
$$4x+5+x+1+2\sqrt{4x^2+9x+5}=9x+10.$$
$$\sqrt{4x^2+9x+5}=2x+2.$$
$$4x^2+9x+5=4x^2+8x+4.$$
$$\therefore\quad x=-1.$$

10. 解：$\sqrt{x+1}+\dfrac{x-6}{\sqrt{x+2}}=0.$
$$\sqrt{x+1}=-\frac{x-6}{\sqrt{x+2}}.$$
$$x+1=\frac{(x-6)^2}{x+2}.$$
$$x^2+3x+2=x^2-12x+36.$$
$$15x=34.$$
$$\therefore\quad x=\frac{34}{15}.$$

11. 解：$\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x-1}=2.$
$$\sqrt{x^2+3x-1}=2+\sqrt{x^2-x-1}.$$
$$x^2+3x-1=4+4\sqrt{x^2-x-1}+x^2-x-1.$$
$$x-1=\sqrt{x^2-x-1}.$$
$$x^2-2x+1=x^2-x-1.$$
$$\therefore\quad x=2.$$

12. 解：$\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}.$
$$x+7+x-2+2\sqrt{x^2+5x-14}$$
$$=x+2+x-1+2\sqrt{x^2+x-2}.$$
$$2+\sqrt{x^2+5x-14}=\sqrt{x^2+x-2}.$$
$$4+4\sqrt{x^2+5x-14}+x^2+5x-14=x^2+x-2.$$

$$\sqrt{x^2+5x-14}=2-x.$$
$$x^2+5x-14=4-4x+x^2.$$
$$9x=18.$$
$$\therefore\quad x=2.$$

13. 解：$\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}}=2.$

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}=2\sqrt{x-3}-2\sqrt{x-5}.$$
$$3\sqrt{x-5}=\sqrt{x+3}.$$
$$9x-45=x+3.$$
$$8x=48.$$
$$\therefore\quad x=6.$$

14. 解：$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0.$

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}+1=0.$$
$$\sqrt{x-1}+1=\sqrt{x+1}.$$
$$x-1+1+2\sqrt{x-1}=x+1.$$
$$4x-4=1.$$
$$4x=5.$$
$$\therefore\quad x=\frac{5}{4}.$$

15. 解：$\begin{cases}\sqrt{x+17}+\sqrt{y-2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{y+6} \quad\cdots\cdots\cdots (1)\\ \sqrt{y-x}=\sqrt{3-x}+\sqrt{y-3}\quad\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$

從 (2) 式，$\quad y-x=3-x+y-3+2\sqrt{(3-x)(y-3)}$

$$\sqrt{(3-x)(y-3)}=0$$
$$3-x=0 \text{ 及 } y-3=0$$
$$\therefore\quad x=3 \text{ 及 } y=3.$$

將此二值各代入 (1) 式；當 $x=3$ 時，則

$$\sqrt{20}+\sqrt{y-2}=\sqrt{8}+\sqrt{y+6}$$
$$\sqrt{20}-\sqrt{8}=\sqrt{y+6}-\sqrt{y-2}$$
$$28-2\sqrt{160}=2y+4-2\sqrt{(y+6)(y-2)}$$
$$12-4\sqrt{10}-y=\sqrt{(y+6)(y-2)}$$

$$(2-4\sqrt{10})^2-2(12-4\sqrt{10})y+y^2=y^2+4y-12$$
$$4^2(3-\sqrt{10})^2-2\times4(3-\sqrt{10})y=4(y-3)$$
$$4(9-6\sqrt{10}+10)-6y+2\sqrt{10}y=y-3$$
$$7y-2\sqrt{10}y=79-24\sqrt{10}.$$
$$\therefore\quad y=\frac{79-24\sqrt{10}}{7-2\sqrt{10}}=\frac{73-10\sqrt{10}}{49-40}$$
$$=\frac{73-10\sqrt{10}}{9}.$$

當 $y=3$ 時，則

$$\sqrt{x+17}+\sqrt{1}=\sqrt{x+5}+\sqrt{9}$$
$$\sqrt{x+17}=\sqrt{x+5}+2$$

兩邊平方，化簡： $2=\sqrt{x+5}$

$$\therefore\quad x=-1.$$

答： $x=-1,\ y=3;\ x=3,\ y=(73-10\sqrt{10})/9.$

16. 解： $\begin{cases}3\sqrt{x-2y}-\sqrt{x+y-4}=3 & \cdots\cdots(1)\\ \sqrt{x-2y}+2\sqrt{x+y-4}=8 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1)×2+(2)， $7\sqrt{x-2y}=14.$

$$x-2y=4\quad\cdots\cdots(3)$$

(2)×3−(1)， $7\sqrt{x+y-4}=21$

$$x+y=13\quad\cdots\cdots(4)$$

(4)×2+(3)， $3x=30$

$$\therefore\quad x=10.$$

代入 (4) 式， $y=3.$

17. 解： $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}+\sqrt{x+d}=0$

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=-(\sqrt{x+c}+\sqrt{x+d})$$
$$x+a+x+b+2\sqrt{(x+a)(x+b)}$$
$$=x+c+x+d+2\sqrt{(x+c)(x+d)}.$$

於此間 $2x+a+b=2x+c+d$

及 $\sqrt{(x+a)(x+b)}=\sqrt{(x+c)(x+d)}$

$$x^2+(a+b)x+ab=x^2+(c+d)x+cd$$
$$(a+b-c-d)x+ab-cd=0.$$

18 解: $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}-\sqrt{ex+f}=0$

$\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=\sqrt{ex+f}$

$ax+b+cx+d+2\sqrt{acx^2+(ad+bc)x+bd}=ex+f$

$(a+c-e)x+b+d-f=-2\sqrt{acx^2+(ad+bc)x+bd}$

$(a+c-e)^2x^2+(b+d-f)^2+2(a+c-e)(b+d-f)x$

$=4[acx^2+(ad+bc)x+bd]$ ……………………………(1)

若 $\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{e}=0$

則 $(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2=e.$

$a+c-e=-2\sqrt{ac}$

$\therefore\quad (a+c-e)^2-4ac=0$

代入 (1) 答且化簡之,得一一次有理方程:

$2[(a+c-e)(b+d-f)-2(ad+bc)]x+(b+d-f)^2-4bd=0.$

習 題 XXXIX

原 本 第 293 頁

1. 解: $9+\sqrt{56}=9+2\sqrt{14}$

但 $14=2\times 7$ 及 $9=2+7.$

$\therefore\quad \sqrt{9+\sqrt{56}}=\sqrt{2}+\sqrt{7}.$

2. 解: $20+2\sqrt{96}=20+8\sqrt{6}=4(5+2\sqrt{6})$

但 $6=3\times 2$ 及 $5=3+2.$

$\therefore\quad \sqrt{20+2\sqrt{96}}=2(\sqrt{2}+\sqrt{3}).$

3. 解: $32-2\sqrt{175}$

因 $175=25\times 7$ 及 $32=25+7$

$\therefore\quad \sqrt{32-2\sqrt{175}}=\sqrt{25}-\sqrt{7}=5-\sqrt{7}.$

4. 解: $\sqrt{1+\frac{2\sqrt{6}}{5}}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{5}}=\sqrt{\frac{3+2+2\sqrt{3\times 2}}{5}}$

$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{5}.$

5. 解: $\sqrt{7-3\sqrt{5}}=\sqrt{7-\sqrt{45}}=\sqrt{\frac{28-2\sqrt{180}}{4}}$

$$=\sqrt{\frac{10+18-2\sqrt{10\times18}}{4}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}.$$

6. 解: $\sqrt{8\sqrt{2}+2\sqrt{30}}=\sqrt{\sqrt{2}(8+2\sqrt{15})}$

$=\sqrt[4]{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3}).$

7. 解: $\sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b^2})}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}$

但 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 及 $2a=(a+b)(a-b)$

$\therefore\quad \sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b^2})}=\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}.$

8. 解: $\sqrt{b-2\sqrt{ab-a^2}}=\sqrt{b-2\sqrt{a(b-a)}}=\sqrt{a}-\sqrt{b-a}.$

9. 解: $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt[4]{17+2\sqrt{72}}=\sqrt{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$

$=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{1}+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}.$

10. 解: $\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\sqrt{9+4(1+\sqrt{3})}$

$=\sqrt{9+4+4\sqrt{3}}=\sqrt{13+2\sqrt{12}}=\sqrt{1}+\sqrt{12}$

$=1+2\sqrt{3}.$

習 題 XL

原本第297頁

1. 解: $\sqrt{-49}=\sqrt{49}i=7i.$

2. 解: $\sqrt{-18}=\sqrt{18}i=3\sqrt{2}i.$

3. 解: $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-12}=\sqrt{8}\cdot\sqrt{12}\cdot i^2=\sqrt{96}i^2$

$=4\sqrt{6}i^2=-4\sqrt{6}.$

4. 解: $\sqrt{-2^2}=\sqrt{2^2}i=2i.$

5. 解: $(\sqrt{-2})^2=(\sqrt{2}i)^2=2i^2=-2.$

6. 解: $i^{12}=i^{4\times3}=1^3=1.$

7. 解: $i^{-7}=i^{-7}\times i^8=i.$

8. 解: $i^{15}=(i^4)^3\cdot i^2 i=1\cdot(-1)i=-i.$

9. 解: $\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{y-x}=\sqrt{x-y}\sqrt{x-y}i=(x-y)i.$

10. 解: $(2+\sqrt{-3})(1+\sqrt{-2})=(2+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{2}i)$

$=2+\sqrt{3}i+2\sqrt{2}i+\sqrt{6}i^2=2-\sqrt{6}+(\sqrt{3}+2\sqrt{2}i).$

11. 解: $(\sqrt{-2})^7(\sqrt{-3})^9=(\sqrt{2}i)^7(\sqrt{3}i)^9$

$=8\sqrt{2}\times 81\sqrt{3}\,i^{16}=648\sqrt{6}.$

12. 解: $(1+2i)^3+(1-2i)^3$
$=1+6i+12i^2+8i^3+1-6i+12i^2-8i^3$
$=1-12+1-12=-22.$

13. 解: $\dfrac{a}{\sqrt{-a^2}}-\dfrac{b}{i\sqrt{b^2}}=\dfrac{a}{i\sqrt{a^2}}-\dfrac{b}{i\sqrt{b^2}}=\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i}=0.$

14. 解: $\dfrac{4+6i}{1+i}+\dfrac{4-6i}{1-i}=\dfrac{4+2i-6i^2+4-2i-6i^2}{1-i^2}=\dfrac{20}{2}=10.$

15. 解: $(\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i})^2=3+4i+3-4i+2\sqrt{9-16i^2}$
$=6+2\sqrt{25}=6+10=16.$

16. 解: $\dfrac{1+i^3}{1+i}=1-i+i^2=1-i-1=-i.$

17. 解: $\dfrac{a+bi}{a-bi}=\dfrac{(a+bi)^2}{a^2-b^2i^2}=\dfrac{a^2+2abi+bi^2}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i.$

18. 解: $\dfrac{9+3\sqrt{2}\,i}{(3+\sqrt{2}\,i)(1+\sqrt{2}\,i)}=\dfrac{3(3+\sqrt{2}\,i)}{(3+\sqrt{2}\,i)(1+\sqrt{2}\,i)}$

$=\dfrac{3}{1+\sqrt{2}\,i}=\dfrac{3(1-\sqrt{2}\,i)}{1-2i^2}=\dfrac{3(1-\sqrt{2}\,i)}{3}=1-\sqrt{2}\,i.$

19. 解: $\dfrac{4}{1+\sqrt{3}\,i}=\dfrac{4(1-\sqrt{3}\,i)}{1-(\sqrt{3})^2i^2}=\dfrac{4(1-\sqrt{3}\,i)}{4}=1-\sqrt{3}\,i.$

20. 解: $\sqrt[4]{-16}=\sqrt{\sqrt{-16}}=\sqrt{4i}=\sqrt{2}\sqrt{2i}=\sqrt{2}\sqrt{1+2i+i^2}$
$=\sqrt{2}\,(1+i).$

21. 解: $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=\dfrac{-1+3\sqrt{3}\,i-9i^2+3\sqrt{3}\,i^3}{8}$

$=\dfrac{-1+3\sqrt{3}\,i+9-3\sqrt{3}\,i}{8}=\dfrac{8}{8}=1.$

答: $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ 爲 1 之立方根.

22. 解: $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4=\dfrac{1+4i+6i^2+4i^3+i^4}{4}=\dfrac{1+4i-6-4i+1}{4}$

$=\dfrac{2-6}{4}=-1.$

23. 解: $3+2i+x(i-1)+2yi=(3i+4)(x+y).$

$$3+2i+xi-x+2yi=3xi+3yi+4x+4y.$$

$$3-x+(2+x+2y)i=4x+4y+(3x+3y)i.$$

於此間 $3-x=4x+4y \cdots\cdots(1)$

及 $2+x+2y=3x+3y \cdots\cdots(2)$

由 (1) 式， $5x+4y=3 \cdots\cdots(3)$

由 (2) 式， $2x+y=2 \cdots\cdots(4)$

解 (1), (2), 得 $x=\dfrac{5}{3}$ 及 $y=-\dfrac{4}{3}$.

24. 解： $\sqrt{5+12i}$.

$$a=5 \text{ 及 } \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13.$$

$$\therefore \quad x=\frac{5+13}{2}=9, \quad y=\frac{-5+13}{2}=4.$$

$$\therefore \quad \sqrt{5+12i}=3+2i.$$

25. 解： $\sqrt{2i}$.

$$a=0 \quad \text{及} \quad \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{0+2^2}=2.$$

$$\therefore \quad x=\frac{2}{2}=1, \quad y=\frac{2}{2}=1.$$

$$\therefore \quad \sqrt{2i}=1+i.$$

26. 解： $\sqrt{4ab+2(a^2-b^2)i}$.

設 $\sqrt{4ab+2(a^2-b^2)i}=\sqrt{x}+\sqrt{y}i$.

$$4ab+2(a^2-b^2)i=x-y+2\sqrt{xy}i.$$

$$x-y=4ab \cdots\cdots(1)$$

$$\sqrt{xy}=a^2-b^2 \cdots\cdots(2)$$

由 (2)， $xy=a^4-2a^2b^2+b^4 \cdots\cdots(3)$

由 (1)， $x^2-2xy+y^2=16a^2b^2 \cdots\cdots(4)$

(4) + 4 × (3)， $(x+y)^2=4(a^4+2a^2b^2+b^4)$.

$$x+y=2(a^2+b^2) \cdots\cdots(5)$$

$\dfrac{(5)+(1)}{2}$， $x=(a+b)^2$.

$\dfrac{(5)-(1)}{2}$， $y=(a-b)^2$.

$$\therefore \quad \sqrt{4ab+2(a^2-b^2)i}=(a+b)+(a-b)i.$$

XIII. 二次方程

習 題 XLI

原本第 301 頁

1. 解：$x^2+2x=35.$

$$(x-5)(x+7)=0.$$

$$\therefore \quad x=5 \text{ 及 } -7.$$

2. 解：$4x^2-4x=3.$

$$(2x-3)(2x+1)=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{3}{2} \text{ 及 } -\frac{1}{2}.$$

3. 解：$x^2=10x-18.$

$$x^2-10x+18=0.$$

$$\therefore \quad x=5\pm\sqrt{5^2-18}=5\pm\sqrt{7}.$$

4. 解：$9x^2+6x+5=0.$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-5\times9}}{9}=\frac{-3\pm\sqrt{36}i}{9}=\frac{-1\pm2i}{3}.$$

5. 解. $2x^2+3x-4=0.$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+32}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}.$$

6. $(2x-3)^2=8x.$

$$4x^2-12x+9-8x=0.$$

$$4x^2-20x+9=0.$$

$$(2x-9)(2x-1)=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{9}{2} \quad \text{及} \quad \frac{1}{2}.$$

7. 解：$x^2+9x-252=0.$

$$(x+21)(x-12)=0.$$

$$\therefore \quad x=-21 \quad \text{及} \quad 12.$$

8. 解：$12x^2+56x-255=0$

$$(6x-17)(2x+15)=0,$$

$$\therefore \quad x=\frac{17}{6} \quad 及 \quad -\frac{15}{2}.$$

9. 解: $8x^2-82x+207=0.$

$$(4x-23)(2x-9)=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{23}{4} \quad 及 \quad \frac{9}{2}.$$

10. 解: $15x^2-86x-64=0.$

$$(5x-32)(3x+2)=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{32}{5} \quad 及 \quad -\frac{2}{3}.$$

11. 解: $x^2-3x-1+\sqrt{3}=0.$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+4-4\sqrt{3}}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{13-2\sqrt{12}}}{2}$$

$$=\frac{3\pm(1-\sqrt{12})}{2}.$$

$$\therefore \quad x=\frac{3+1-\sqrt{12}}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3},$$

$$x=\frac{3-1+\sqrt{12}}{2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}.$$

12. 解: $x^2-(6+i)x+8+2i=0.$

$$x^2-(6+i)x+2(4+i)=0.$$

$$(x-2)[x-(4+i)]=0.$$

$$\therefore \quad x=2 \quad 及 \quad 4+i.$$

13. 解: $(x-2)^2(x-7)=(x+2)(x-3)(x-6).$

$$x^3-11x^2+32x-28=x^3-7x^2+36.$$

$$4x^2-32x+64=0.$$

$$x^2-8x+16=0.$$

$$(x-4)^2=0.$$

$$\therefore \quad x=4, \quad 4.$$

14. 解: $\frac{2x}{x+2}+\frac{x+2}{2x}=2.$

$$1+\left(\frac{x+2}{2x}\right)^2-2\left(\frac{x+2}{2x}\right)=0.$$

$$\left(\frac{x+2}{2x}-1\right)^2=0.$$

$$\frac{x+2}{2x}=1.$$

$$x+2=2x.$$

$$\therefore\quad x=2,\quad 2.$$

15. 解: $\frac{x+1}{x}+1=\frac{x}{x-1}.$

$$2x^2-x-1=x^2.$$

$$x^2-x-1=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

16. 解: $\frac{3}{2(x^2-1)}+\frac{x}{4x+4}=\frac{3}{8}.$

$$x^2+2x-15=0.$$

$$(x+5)(x-3)=0.$$

$$\therefore\quad x=-5\quad 及\quad 3.$$

17. 解: $\frac{3}{2x+1}-\frac{1}{4x-2}-\frac{2x}{1-4x^2}=\frac{7}{8}.$

$$28x^2-56x+21=0.$$

$$4x^2-8x+3=0.$$

$$(2x-3)(2x-1)=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{2}\quad 及\quad \frac{1}{2}.$$

18. 解: $\frac{2x-1}{x-2}+\frac{3x+1}{x-3}=\frac{5x-14}{x-4}.$

$$2+\frac{3}{x-2}+3+\frac{10}{x-3}=5+\frac{6}{x-4}.$$

$$\frac{3}{x-2}+\frac{10}{x-3}-\frac{6}{x-4}=0.$$

$$3(x-3)(x-4)+10(x-2)(x-4)-6(x-2)(x-3)=0.$$

$$7x^2-51x+80=0.$$

$$(7x-16)(x-5)=0,$$

$$\therefore \quad x=\frac{16}{7} \quad \text{及} \quad 5.$$

19. 解: $\frac{x+1}{x(x-2)}-\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{2x}=0.$

$2(x+1)(x-1)-x(x-2)+(x-2)(x-1)=0.$

$2x^2-x=0. \quad x(2x-1)=0.$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2} \quad \text{或} \quad 0.$$

惟0能使分母爲0，故不得爲根。

20. 解: $\frac{4}{x-1}-\frac{1}{4-x}=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{3-x}.$

$$\frac{4}{x-1}-\frac{3}{x-2}=\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-4}.$$

$$\frac{x-5}{(x-1)(x-2)}=\frac{x-5}{(x-3)(x-4)}.$$

$$(x-1)(x-2)=(x-3)(x-4).$$

$$x^2-3x+2=x^2-7x+12.$$

$$4x=10.$$

$$\therefore \quad x=\frac{5}{2}.$$

又 $\quad x-5=0.$

$$\therefore \quad x=5.$$

21. 解: $\frac{x+3}{4(x+2)(3x-1)}+\frac{2x+1}{3(3x-1)(x+4)}-\frac{17x+7}{6(x+4)(x+2)}=$

$3(x+3)(x+4)+4(2x+1)(x+2)-2(17x+7)(3x-1)=$

$$91x^2-33x-58=0.$$

$$(x-1)(91x+58)=0.$$

$$\therefore \quad x=1 \quad \text{及} \quad -\frac{58}{91}.$$

22. 解: $\frac{x+7}{2x^2-7x+3}+\frac{x}{x^2-2x-3}+\frac{x+3}{2x^2+x-1}=0.$

$$\frac{x+7}{(2x-1)(x-3)}+\frac{x}{(x+1)(x-3)}+\frac{x+3}{(2x-1)(x+1)}=0.$$

$$(x+7)(x+1)+x(2x-1)+(x+3)(x-3)=0.$$

$$4x^2+7x-2=0.$$
$$(4x-1)(x+2)=0.$$
$$\therefore\quad x=\frac{1}{4}\quad 及\quad -2.$$

23. 解：$3x^2+(9a-1)x-3a=0.$
$$(3x-1)(x+3a)=0.$$
$$\therefore\quad x=\frac{1}{3}\quad 及\quad -3a.$$

24. 解：$x^2-2ax+a^2-b^2=0.$
$$(x-a)^2-b^2=0.$$
$$(x-a+b)(x-a-b)=0.$$
$$\therefore\quad x=a-b\quad 及\quad a+b.$$

25. 解：$c^2x^2+c(a-b)x-ab=0.$
$$(cx+a)(cx-b)=0.$$
$$\therefore\quad x=-\frac{a}{c}\quad 及\quad \frac{b}{c}.$$

26. 解：$x^2-4ax+4a^2-b^2=0.$
$$(x-2a)^2-b^2=0.$$
$$(x-2a+b)(x-2a-b)=0.$$
$$\therefore\quad x=2a-b\quad 及\quad 2a+b.$$

27. 解：$x^2-6acx+a^2(9c^2-4b^2)=0.$
$$x^2-6acx+9a^2c^2-4a^2b^2=0.$$
$$(x-3ac)^2-(2ab)^2=0.$$
$$(x-3ac+2ab)(x-3ac-2ab)=0.$$
$$\therefore\quad x=a(3c-2b)\quad 及\quad a(3c+2b).$$

28. 解：$(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0.$
$$\{(a-b)x-(a+b)\}\{(a+b)x-(a-b)\}=0.$$
$$\therefore\quad x=\frac{a+b}{a-b}\quad 及\quad \frac{a-b}{a+b}.$$

29. 解：$\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0.$
$$(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0.$$
$$3x^2-(2a+2b+2c)x+ca+bc+ab=0.$$

$\therefore \quad x=\dfrac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}.$

30. 解: $\dfrac{(x-a)^2-(x-b)^2}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{4ab}{a^2-b^2}=0.$

$[(x-a)^2-(x-b)^2](a^2-b^2)+4ab(x-a)(x-b)=0.$

$4abx^2-2(a^2+b^2)(a+b)x+(a^2+b^2)^2=0.$

$[2ax-(a^2+b^2)][2bx-(a^2+b^2)]=0.$

$\therefore \quad x=\dfrac{a^2+b^2}{2a}$ 及 $\dfrac{a^2+b^2}{2b}.$

習 題 XLII

原本第 302 頁

1. 解: 設 $x, x+1$ 爲二連續數。

$x(x+1)=506$

$x^2+x-506=0$

$(x-22)(x+23)=0$

$\therefore \quad x=22$ 或 $-23,$

$x+1=23$ 或 $-22.$

答: 此二數爲 22 及 23 或 -23 及 $-22.$

2. 解: 設 $x, x+1$ 爲所求之二數。

$x^2+(x+1)^2=481$

$x^2+x-240=0$

$(x-15)(x+16)=0$

$\therefore \quad x=15$ 或 $-16,$

$x+1=16$ 或 $-15.$

答: 此二數爲 15 及 16, 或 -16 及 $-15.$

3. 解: 設 $x, x+1$ 爲所求之二數。

$(x+1)^3-x^3=91$

$x^2+x-30=0$

$(x+6)(x-5)=0$

$\therefore \quad x=5$ 或 $-6,$

$x+1=6$ 或 $-5.$

答: 此二數爲 5 及 6, 或 -6 及 $-5.$

4. 解: 設 $x-1, x, x+1$ 爲三連續數。

$$(x-1)x+x(x+1)+(x+1)(x-1)=587$$

$$3x^2=588 \qquad x^2=196.$$

$$\therefore \quad x=\pm 14.$$

答: 13, 14, 15 或 −15, −14, −13 爲三連續數。

5. 解: 設 x 爲十位數字, $\frac{48}{x}$ 爲個位數字。

$$10x+\frac{48}{x}-18=10\cdot\frac{48}{x}+x$$

$$9x^2-18x-432=0$$

$$x^2-2x-48=0$$

$$(x-8)(x+6)=0$$

$$\therefore \quad x=8,$$

$$\frac{48}{x}=6.$$

答: 此數爲 86.

6. 解: 設 x 爲其分母。

$$\frac{x+2}{x}-\frac{x}{x+2}=\frac{24}{35}$$

$$6x^2-23x-35=0$$

$$(x-5)(6x+7)=0$$

$$\therefore \quad x=5.$$

答: 此分數爲 $\frac{x+2}{x}$ 卽 $\frac{7}{5}$.

7. 解: 設 x 爲此人所購牛之頭數。

$$(x-4)\left[\frac{1260}{x}+10\right]-1260=260$$

$$x^2-30x-504=0$$

$$(x+12)(x-42)=0$$

$$\therefore \quad x=42.$$

答: 此人原購牛四十二頭。

8. 解: 設 x 爲該物之原價。

$$x+\frac{x/2}{100}x=48$$

$$x^2+200x-9600=0$$
$$(x+240)(x-40)=0$$
$$\therefore\quad x=40.$$

答：該物原值銀 40 元。

9. 解：設 $x\%$ 爲利率。

$$4000\left[1+\frac{x}{100}\right]^2=4410$$
$$x^2+200x-1025=0$$
$$(x-5)(x+205)=0$$
$$\therefore\quad x=5.$$

答：利率爲 5%.

10. 解：設 x 爲承繼遺產稅率。

$$25000\left[\frac{x}{100}+\frac{x+1}{100}\right]=25000-22890$$
$$500x=1950$$
$$\therefore\quad x=4.$$

答：承繼遺產稅率爲 4%.

11. 解：設 x 爲股票數目。

$$3\times\frac{50-\dfrac{4500}{x}}{50}=\frac{\dfrac{5850}{x-10}-50}{50}$$
$$\frac{3x-270}{x}=\frac{127-x}{x-10}$$
$$4x^2-427x+2700=0$$
$$(x-100)(4x-27)=0$$

$\therefore\quad x=100$ 及 $\dfrac{27}{4}$（因張數不得爲分數，故不合理）。

答：此人共購股票數一百張。

12. 解：設 x 爲前輪周長，$x+8$ 爲後輪周長。

1 哩 = 63360 吋。

$$\frac{63360}{x}-\frac{63360}{x+8}=88$$
$$x^2+8x-5760=0$$
$$(x+80)(x-72)=0$$

$\therefore \quad x=72$ 时卽 6 呎，

$x+8=80$ 时卽 $6\frac{2}{3}$ 呎．

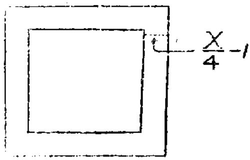
答：前後二輪之圓周長度各爲 6 呎及 $6\frac{2}{3}$ 呎．

13. 解：設 x 爲正方形之邊長，$\frac{x}{4}-1$ 爲其鑲邊之寬。

$$\left[x+2\left(\frac{x}{4}-1\right)\right]^2-x^2=4x+64$$

$$4x\left(\frac{x}{4}-1\right)+4\left(\frac{x}{4}-1\right)^2$$

$$=4x+64$$



$$x^2-8x-48=0$$

$$(x-12)(x+4)=0$$

$$x=12 \text{ 时}$$

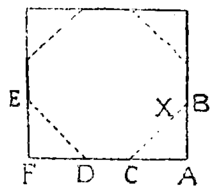
$$\therefore \quad x^2=144 \text{ 方时，}$$

$$\left[x+2\left(\frac{x}{4}-1\right)\right]^2-x^2=112 \text{ 方时。}$$

答：正方形及鑲邊之面積各爲 144 方时及 112 方时．

14. 解：設 x 爲所求之邊長．

$$x^2=\overline{AC}^2+\overline{BA}^2=2\overline{AB}^2=2\left[\frac{2-x}{2}\right]^2$$



$$x^2+4x-4=0$$

$$\therefore \quad x=-2\pm\sqrt{4+4}=-2\pm2\sqrt{2}$$

$$=2(\pm\sqrt{2}-1).$$

答：八邊形之邊長爲 $2(\sqrt{2}-1)$．

15. 解：設 x 爲每次所取出之罌數．

$$63-x-\frac{63-x}{63}x=28$$

$$x^2-126x+2205=0$$

$$(x-105)(x-21)=0$$

$$\therefore \quad x=21 \text{ 罌。}$$

答：此人每次取出二十一罌．

16. 解：設 x 爲 A 車之速率，$x+5$ 爲 B 車之速率。

$$\frac{50}{x}+\frac{1}{12}+\frac{50}{x+5}=2\frac{4}{9}$$
$$17x^2-635x-1800=0$$
$$(17x+45)(x-40)=0$$
$$\therefore\quad x=40\text{ 哩/時,}$$
$$x+5=45\text{ 哩/時。}$$

答: A, B 二車之速率各爲每小時 40 哩及 45 哩。

17. 解: 設 x 爲步行者之速率, $\frac{6}{x}$ 爲所求之時間。

$$\left(\frac{6}{x}-\frac{1}{2}\right)(x+2)=6$$
$$x^2-2x-24=0$$
$$(x+6)(x-4)=0$$
$$\therefore\quad x=4\text{ 哩/時,}$$
$$\frac{6}{x}=1\frac{1}{2}\text{ 時。}$$

答: 所求之時間及速率爲 $1\frac{1}{2}$ 小時及每小時 4 哩。

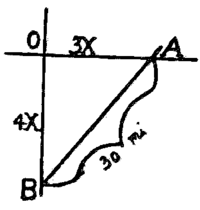
18. 解: 設 x 爲原速率, $\frac{12}{x}+\frac{6}{x+\frac{1}{2}}$ 爲所求之時間。

$$\frac{12}{x}+\frac{6}{x+\frac{1}{2}}-\frac{18}{x+\frac{1}{2}}=\frac{20}{60}$$
$$2x^2+x-36=0$$
$$(2x+9)(x-4)=0$$
$$x=4\text{ 哩/時}$$
$$\therefore\quad \frac{12}{x}+\frac{6}{x+\frac{1}{2}}=3+\frac{4}{3}=4\frac{1}{3}\text{ 小時}=4\text{ 小時 }20\text{ 分。}$$

答: 所求之時間爲 4 小時 20 分。

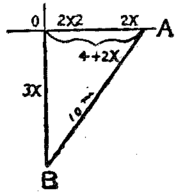
19. 解: 設 x 爲所求之時間。

$$(3x)^2+(4x)^2=\overline{30}^2$$
$$9x^2+16x^2=900$$
$$25x^2=900$$
$$5x=30$$
$$\therefore\quad x=6\text{ 小時。}$$



答: 所須之時間爲 6 小時。

20. 解：設 x 為所求之時間。



$$(2x+2\cdot 2)^2+(3x)^2=\overline{10}^2$$
$$13x^2+16x-84=0$$
$$(x-2)(13x+42)=0$$
$$\therefore\quad x=2\text{ 小時。}$$

答：須經 2 小時後，二人方能相距 10 哩。

21. 解：(1)
$$7=0+32t-16t^2$$
$$16t^2-32t+7=0$$
$$(4t-7)(4t-1)=0$$
$$\therefore\quad t=\frac{1}{4}\text{ 秒或 }\frac{7}{4}\text{ 秒。}$$
$$16=0+32t-16t^2$$
$$16t^2-32t+16=0$$
$$(16t-16)(t-1)=0$$
$$\therefore\quad t=1\text{ 秒.}$$
$$17=0+32t-16t^2$$
$$16t^2-32t+17=0$$
$$\therefore\quad t=\frac{16\pm\sqrt{256-272}}{16}=\frac{16\pm\sqrt{-16}}{16}\text{ (不可能)。}$$

(2)
$$36=64-48t-16t^2$$
$$16t^2+48t-28=0$$
$$4t^2+12t-7=0$$
$$(2t-1)(2t+7)=0$$
$$\therefore\quad t=\frac{1}{2}\text{ 秒。}$$

(3)
$$16t^2=36\qquad 4t=\pm 6$$
$$\therefore\quad t=\frac{3}{2}\text{ 秒。}$$

答：所求之時間為 (1) $\frac{1}{4}$ 秒及 $\frac{7}{4}$ 秒，1 秒，不可能；(2) $\frac{1}{2}$ 秒；(3) $\frac{3}{2}$ 秒。

XIV. 二次方程式之討論,極大與極小

習 題 XLIII

原本第 308 頁

1. 解: $(m+2)x^2-2mx+1=0$

$B^2-4AC=(2m)^2-4(m+2)=4m^2-4m-8$

$=4(m-2)(m+1)=0$

$\therefore\quad m=2$ 或 $-1.$

2. 解: $(m^2+m)x^2+3mx-2=0$

當 $m=-1$ 時, $(1-1)x^2-3x-2=0$

$0\cdot x^2-3x-2=0$

$(0\cdot x-1)(3x+2)=0$

$\therefore\quad x=\infty$ 及 $-\dfrac{2}{3}.$

當 $m=0$ 時, $0\cdot x^2+0\cdot x-2=0$

$(0\cdot x-2)(0\cdot x+1)=0$

$\therefore\quad x=\infty,\ \infty.$

3. 解: $3x^2+(5y-5)x-(2y^2-4y+2)=0$

$$x=\frac{-(5y-5)\pm\sqrt{(5y-5)^2+12(2y^2-4y+2)}}{6}$$

$$=\frac{-(5y-5)\pm(7y-7)}{6}=\frac{y-1}{3}\text{ 或 }-2y+2$$

$\therefore\quad 3x^2+5xy-2y^2-5x+4y-2=(3x-y+1)(x+2y-2).$

4. 解: $x^2-y^2+mx+5y-6=(x+y-\alpha)(x-y+\beta)$

$=x^2-y^2+(\beta-\alpha)x+(\alpha+\beta)y-\alpha\beta$

$\beta-\alpha=m$ ……………………………(1)

$\alpha+\beta=5$ ……………………………(2)

$\alpha\beta=6$ ……………………………(3)

$\therefore\quad m=\pm1$ 時,上式能分解。

5. 解: $x^2+px+q=0$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=p^2-4q$

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]^2-2(\alpha\beta)^2$

$=(p^2-2q)^2-2q^2=p^4-4p^2q+2q^2$

$$\alpha/\beta+\beta/\alpha=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{p^2-2q}{q}.$$

6. 解: $2x^2-3x+4=0$

$$\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$$

$$=\frac{(\frac{3}{2})^3-\frac{4}{2}(\frac{3}{2})\cdot 3}{2^2}=-\frac{45}{32}$$

$$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]$$

$$=2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\right]=2\left[\frac{-7}{4}\right]=-\frac{7}{2}.$$

7. 解: $x^2+x+2=0$

$$\alpha+\beta=-1,\quad \alpha\cdot\beta=2$$

故所求之方程式爲:

(i) $x^2-(-\alpha-\beta)x+(-\alpha)(-\beta)=x^2-x+2=0.$

(ii) $x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)=x^2-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x+\frac{1}{\alpha\beta}$

$$=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=0$$

即 $2x^2+x+1=0.$

(iii) $x^2-(2\alpha+2\beta)x+(2\alpha)(2\beta)=x^2-2(\alpha+\beta)x+4\alpha\beta=0$

即 $x^2+2x+8=0.$

(iv) $x^2-(\alpha+1+\beta+1)x+(\alpha+1)(\beta+1)=x^2-[(\alpha+\beta)+2]x+[\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1]=x^2-x+2=0.$

8. 解: 1. x^2-8x+3

設 $y=x^2-8x+3+13-13=(x-4)^2-13$

答: 當 $x=4$ 時, y 有一極小值 -13.

2. $2x^2-x+4$

設 $y=2x^2-x+4=2\left[x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right]+\frac{31}{8}$

$$=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{31}{8}$$

答: 當 $x=\frac{1}{4}$ 時, y 有一極小值 $\frac{31}{8}$.

3. $1+4x-x^2$

設　　$y=1+4x-x^2=5-(x-2)^2$

答：當 $x=2$ 時，y 有一極大值 5.

4. $x/(x^2+1)$

設　$y=x/(x^2+1)$，即 $x^2y-x+y=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y}=\frac{1\pm\sqrt{(1+2y)(1-2y)}}{2y}$$

$$\because\quad (1-2y)(1+2y)\geqq 0$$

$$\therefore\quad y\leqq\frac{1}{2}\ \text{及}\ y\geqq-\frac{1}{2}.$$

答：$x=1$ 時，y 有一極大值 $\frac{1}{2}$；

$x=-1$ 時，y 有一極小值 $-\frac{1}{2}$.

5. $1/x+1/(1-x)$

設　$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$，即 $x^2y-xy+1=0$

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4y}}{2y}=\frac{y\pm\sqrt{y(y-4)}}{2y}$$

$$\because\quad y(y-4)\geqq 0$$

$$\therefore\quad y\leqq 0\ \text{及}\ y\geqq 4.$$

答：$x=\frac{1}{2}$ 時，y 有一極小值 4.

6. $(x+1)/(2x^2-1)$

設　$y=(x+1)/(2x^2-1)$，即 $2yx^2-x-(y+1)=0$

$$\therefore\quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+8y(y+1)}}{4y}=\frac{1\pm\sqrt{8y^2+8y+1}}{4y}.$$

設　　$8y^2+8y+1=0$

$$\therefore\quad y=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 8\cdot 1}}{2\cdot 8}=\frac{-8\pm 4\sqrt{2}}{16}=\frac{-2\pm\sqrt{2}}{4}.$$

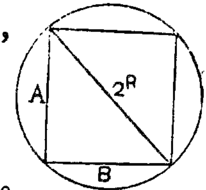
因根式內 y^2 之係數爲正。

答：y 之極大值爲 $\frac{-2+\sqrt{2}}{4}$，極小值爲 $\frac{-2-\sqrt{2}}{4}$.

9. 解：求一圓內面積最大之內接矩形及周長最大之內接矩

形。

設 x 爲矩形一邊之長，d 爲圓之直徑之長，則 $\sqrt{d^2-x^2}$ 爲矩形另一邊之長。



設 y 示矩形之面積，則

$$y=x\sqrt{d^2-x^2}$$

平方，得

$$y^2=x^2(d^2-x^2) \qquad x^4-d^2x^2+y^2=0$$

$$\therefore \quad x^2=\frac{d^2\pm\sqrt{d^4-4y^2}}{2}=\frac{d^2\pm\sqrt{(d^2-2y)(d^2+2y)}}{2}.$$

答：$x^2=\frac{d^2}{2}$，卽 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}d$ 時，y 有一極大值 $\frac{d^2}{2}$；

卽 圓之內接正方形之面積爲最大。

設 P 示矩形之周長，則

$$P=2x+2\sqrt{d^2-x^2}$$

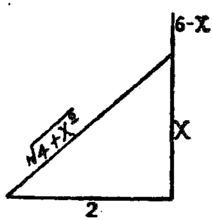
化簡，得 $\quad 8x^2-4Px+(P^2-4d^2)=0$

$$\therefore \quad x=\frac{P\pm\sqrt{8d^2-P^2}}{4}=\frac{P\pm\sqrt{(2\sqrt{2}d-P)(2\sqrt{2}d+P)}}{4}$$

答：$x=\frac{P}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}d$ 時，P 有一極大值 $2\sqrt{2}d$；

卽 內接矩形中正方形之周長最大。

10. 解：設 x 爲所求點至最近點之距離，y 爲某人划行及步行共需之時間。



$$y-\frac{6-x}{5}=\frac{\sqrt{4+x^2}}{4}$$

$$400y^2-960y+160xy+476$$
$$-192x-9x^2=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{\frac{160y-192}{9}\pm\sqrt{\frac{(192-160y)^2}{81}+\frac{1600y^2-3840y+1904}{9}}}{2}$$

$$=\frac{160y-192}{9\cdot 2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{40000y^2-96000y+54000}{81}} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

設 $\qquad 40000y^2-96000y+54000=0$

即
$$20y^2-48y+27=0$$
$$(2y-3)(10y-9)=0$$
$$\therefore\quad y=\frac{3}{2}\quad 或\quad \frac{9}{10}.$$

因程式內 y^2 之係數大於 0，故 $\frac{3}{2}$ 為 y 之極小值。

代入 (1) 式，得
$$x=\frac{160\times\frac{3}{2}-192}{18}=2\frac{2}{3}\ 哩.$$

答：須划至距最近點 $2\frac{2}{3}$ 哩之點，方使行程所需之時間為最短。

11. 解：$h=a+bt-16t^2$
$$=0+48t-16t^2$$
$$=36-(36-48t+16t^2)$$
$$=36-(6-4t)^2$$
$\therefore\quad t=\frac{3}{2}$ 秒時，h 有一最大值 36.

答：所求之高度為 36 呎，時間為 $\frac{3}{2}$ 秒。

XV. 用二次方程式可解之高次方程式

習題 XLIV

原本第 316 頁

1. 解：$4x^4-17x^2+18=0$
$$(4x^2-9)(x^2-2)=0$$
$$\therefore\quad x=\pm\frac{3}{2}\ 及\ \pm\sqrt{2}.$$

2. 解：$3x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{3}{4}}=7$
$$(3x^{\frac{3}{4}}-7)(x^{\frac{3}{4}}+1)=0$$

$$x^{\frac{3}{4}}=\frac{7}{3} \text{ 及 } -1$$

$$\therefore \quad x=\sqrt[3]{\left(\frac{7}{3}\right)^4}=\frac{7}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{3}}=\frac{7}{9}\sqrt[3]{63}$$

及 $x=\sqrt[3]{(-1)^4}=1.$

3. 解: $(x^2-4)(x^2-9)=7x^2$

$$x^4-20x^2+36=0$$
$$(x^2-18)(x^2-2)=0$$
$$x^2=18 \text{ 及 } 2$$
$$\therefore \quad x=\pm 3\sqrt{2} \text{ 及 } \pm\sqrt{2}.$$

4. 解: $(2x^2-x-3)(3x^2+x-2)^2=0$

$$(2x-3)(x+1)(3x-2)^2(x+1)^2=0$$
$$\therefore \quad x=\frac{3}{2}, -1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -1, -1.$$

5. 解: $x^4-x^3+x^2+3x-6=0$

$$(x-1)(x^2+3)(x+2)=0$$
$$\therefore \quad x=1, \pm\sqrt{3}i, -2.$$

6. 解: $x^4-2x^3+x^2+2x-2=0$

$$(x+1)(x-1)(x^2-2x+2)=0$$
$$\therefore \quad x=-1, 1, 1\pm i.$$

7. 解: $(3x^2-2x+1)(3x^2-2x-7)+12=0$

$$(3x^2-2x)^2-6(3x^2-2x)+5=0$$
$$(3x^2-2x-5)(3x^2-2x-1)=0$$
$$(3x-5)(x+1)(3x+1)(x-1)=0$$
$$\therefore \quad x=\frac{5}{3}, -1, -\frac{1}{3}, 1.$$

8. 解: $x^4-12x^3+33x^2+18x-28=0$

$$(x^4-12x^3+36x^2)-3x^2+18x-28=0$$
$$(x^2-6x)^2-3(x^2-6x)-28=0$$
$$(x^2-6x-7)(x^2-6x+4)=0$$
$$(x+1)(x-7)(x^2-6x+4)=0$$
$$\therefore \quad x=-1, 7, 3\pm\sqrt{5}.$$

9. 解: $4x^4+4x^3-x^2-x-2=0$

$$(2x^2+x)^2-(2x^2+x)-2=0$$
$$(2x^2+x+1)(2x^2+x-2)=0$$
$$2x^2+x+1=0$$
$$\therefore\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{4}.$$
$$2x^2+x-2=0$$
$$\therefore\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}.$$

10. **解：** $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$

$$x^2(x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)=0$$
$$(x^2+1)(x^2-2x+1)=0$$
$$(x^2+1)(x-1)^2=0$$
$$\therefore\quad x=\pm i,\ 1,\ 1.$$

11. **解：** $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$

$$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}+1\right)=0$$
$$x+\frac{1}{x}=0$$
$$x^2+1=0$$
$$\therefore\quad x=\pm i.$$
$$x+\frac{1}{x}+1=0$$
$$x^2+x+1=0$$
$$\therefore\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

12. **解：** $x^5-11x^4+36x^3-36x^2+11x-1=0$

$$(x^5-1)-11(x^4-x)+36(x^3-x^2)=0$$
$$(x-1)[x^4-10x^3+26x^2-10x+1]=0$$

$$(x-1)\left[x^2-10x+26-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}\right]=0$$

$$(x-1)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+24\right]=0$$

$$(x-1)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)\left(x+\frac{1}{x}-6\right)=0$$

$$(x-1)(x^2-4x+1)(x^2-6x+1)=0$$

$$\therefore\quad x=1,\ 2\pm\sqrt{3},\ 3\pm2\sqrt{2}.$$

13. 解：$x^5-243=0$

設　$x=3y$

代入上式，得　$y^5-1=0$

$$(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)=0$$

$$(y-1)\left(y^2+y+1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}\right)=0$$

$$(y-1)\left[\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)-1\right]=0$$

$$y=1,\quad \left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)-1=0$$

$$y+\frac{1}{y}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$y^2-\left[\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right]y+1=0$$

$$\therefore\quad y=\left[\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right]\pm\sqrt{\left[\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right]^2-1}$$

$$=\left[\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right]\pm\sqrt{\frac{[-1\pm\sqrt{5}]^2-16}{16}}$$

$$=\frac{1}{4}[-1\pm\sqrt{5}\pm i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}].$$

$$\therefore\quad x=3\ 及\ \frac{3[-1\pm\sqrt{5}\pm i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}]}{4}.$$

14. 解：$(2x-1)^3=1$

設　$2x-1=y$

$$y^3-1=0$$

$$(y-1)(y^2+y+1)=0 \qquad \therefore \quad y=1.$$
$$2x-1=1 \qquad \therefore \quad x=1.$$
$$y^2+y+1=0 \qquad \therefore \quad y=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \quad x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}.$$

15. **解：** $(1+x)^3=(1-x)^3$

$$(1+x)^3-(1-x)^3$$
$$=(1+x-1+x)[(1+x)^2+(1+x)(1-x)+(1-x)^2]$$
$$=2x[x^2+3]=0$$
$$2x=0 \qquad \therefore \quad x=0.$$
$$x^2+3=0 \qquad \therefore \quad x=\pm\sqrt{3}i.$$

16. **解：** $(x-2)^4-81=0$

$$[(x-2)^2-9][(x-2)^2+9]=0$$
$$(x-5)(x+1)(x^2-4x+13)=0$$
$$\therefore \quad x=5,\ -1,\ 2\pm 3i.$$

17. **解：** $(a+x)^3+(b+x)^3=(a+b+2x)^3$

$$(a+x)^3+(b+x)^3-[(a+x)+(b+x)]^3$$
$$=(a+b+2x)[(a+x)^2-(a+x)(b+x)+(b+x)^2$$
$$-(a+x)^2-2(a+x)(b+x)-(b+x)^2]=0$$
$$(a+b+2x)(a+x)(b+x)=0$$
$$\therefore \quad x=-a,\ -b,\ -\frac{a+b}{2}.$$

18. **解：** $(a-x)^4-(b-x)^4=(a-b)(a+b-2x)$

$$[(a-x)^2+(b-a)^2][(a-x)^2-(b-x)^2]$$
$$=(a-b)(a+b-2x)$$
$$[2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2][(a+b-2x)(a-b)]$$
$$=(a-b)(a+b-2x)$$
$$2x^2-2(a+b)x+(a^2+b^2-1)=0$$
$$\therefore \quad x=\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-2(a^2+b^2-1)}}{2}$$
$$=\frac{a+b\pm\sqrt{2-(a-b)^2}}{2}.$$

又　　$a+b-2x=0$

$$\therefore\quad x=\frac{a+b}{2}.$$

19. 解：$\frac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}-3\frac{4x^2+6x-1}{x^2+3x+1}-2=0$

$$\left[\frac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}\right]^2-2\left[\frac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}\right]-3=0$$

$$\left[\frac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}+1\right]\left[\frac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}-3\right]=0$$

$$\frac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}+1=0$$

$$x(5x+9)=0$$

$$\therefore\quad x=0\quad 及\quad -\frac{9}{5}.$$

又　　$\frac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}-3=0$

$$11x^2+15x-4=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{-15\pm\sqrt{225+176}}{22}=\frac{-15\pm\sqrt{401}}{22}.$$

20. 解：$x^2+\frac{1}{x^2}=a^2+\frac{1}{a^2}$

$$(x^2-a^2)-\frac{(x^2-a^2)}{a^2x^2}=0$$

$$(x^2-a^2)\left\{1-\frac{1}{a^2x^2}\right\}=0$$

$$\therefore\quad x=\pm a,\quad \pm\frac{1}{a}.$$

21. 解：$3x^2-2x-5\sqrt{3x^2-2x+3}+9=0$

$$(3x^2-2x+3)-5\sqrt{3x^2-2x+3}+6=0$$

$$[\sqrt{3x^2-2x+3}-2][\sqrt{3x^2-2x+3}-3]=0$$

$$\sqrt{3x^2-2x+3}=2$$

$$3x^2-2x-1=0$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{3},\quad 1.$$

又
$$\sqrt{3x^2-2x+3}=3$$
$$3x^2-2x-6=0$$
$$\therefore\quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+18}}{3}=\frac{1\pm\sqrt{19}}{3}.$$

22. **解:** $4x^2-2x-1=\sqrt{2x^2-x}$
$$2(2x^2-x)-\sqrt{2x^2-x}-1=0$$
$$(2\sqrt{2x^2-x}+1)(\sqrt{2x^2-x}-1)=0$$
$$2\sqrt{2x^2-x}=-1$$
$$8x^2-4x-1=0$$
$$\therefore\quad x=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{8}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}.$$

又
$$\sqrt{2x^2-x}=1$$
$$2x^2-x-1=0$$
$$(2x+1)(x-1)=0$$
$$\therefore\quad x=-\frac{1}{2},\quad 1.$$

23. **解:** $\sqrt{3-x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{5-2x}$
$$3-x+2-x+2\sqrt{(3-x)(2-x)}=5-2x$$
$$2\sqrt{(3-x)(2-x)}=0$$
$$\therefore\quad x=3,\ 2.$$

24. **解:** $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=0$
$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-3}$$
$$2\sqrt{(2x+3)(3x-5)}=2\sqrt{(x+1)(4x-3)}$$
$$6x^2-x-15=4x^2+x-3$$
$$x^2-x-6=0$$
$$(x-3)(x+2)=0$$
$$\therefore\quad x=3,\ -2.$$

25. **解:** $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}-x=\sqrt{\dfrac{6}{x}}$
$$\frac{1}{x-1}=\sqrt{\frac{6}{x}}$$
$$6x^2-13x+6=0$$

$$(2x-3)(3x-2)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{2},\ \frac{2}{3}.$$

26. 解: $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$

$$\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1-\sqrt{x}$$

$$x-\sqrt{1-x}=1+x-2\sqrt{x}$$

$$4\sqrt{x}=5x$$

$$16x=25x^2$$

$$x(25x-16)=0$$

$$\therefore\quad x=0,\ \frac{16}{25}.$$

27. 解: $\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2+3x}=0$

$$\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2+3x}$$

$$x+3=x(x+3)$$

$$\therefore\quad x=1,\quad -3.$$

28. 解: $\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt{x}+6\sqrt[4]{x}=0$

$$x^{\frac{3}{4}}-5x^{\frac{2}{4}}+6x^{\frac{1}{4}}=0$$

$$x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{2}{4}}-5x^{\frac{1}{4}}+6)=0$$

$$\therefore\quad x=0.$$

$$x^{\frac{2}{4}}-5x^{\frac{1}{4}}+6=0$$

$$(x^{\frac{1}{4}}-3)(x^{\frac{1}{4}}-2)=0$$

$$x^{\frac{1}{4}}=3,\quad 2$$

$$\therefore\quad x=81,\ 16.$$

29. 解: $\sqrt{\frac{2x-5}{x-2}}-3\sqrt{\frac{x-2}{2x-5}}+2=0$

$$\frac{2x-5}{x-2}+2\sqrt{\frac{2x-5}{x-2}}-3=0$$

$$\left(\sqrt{\frac{2x-5}{x-2}}+3\right)\left(\sqrt{\frac{2x-5}{x-2}}-1\right)=0$$

$$2x-5-x+2=0\qquad\therefore\quad x=3.$$

30. 解: $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=x-3$

$$\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})^2}{(x-1)-(x+1)}=x-3$$

$$-x+\sqrt{x^2-1}=x-3$$

$$\sqrt{x^2-1}=2x-3$$

$$x^2-1=4x^2-12x+9$$

$$3x^2-12x+10=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{6\pm\sqrt{36-30}}{3}=\frac{6\pm\sqrt{6}}{3}.$$

31. 解: $\sqrt{5x^2-6x+1}-\sqrt{5x^2+9x-2}=5x-1$

$$\sqrt{(5x-1)(x-1)}-\sqrt{(5x-1)(x+2)}=(\sqrt{5x-1})^2$$

$$\sqrt{5x-1}=0\quad\therefore\quad x=\frac{1}{5}.$$

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}=\sqrt{5x-1}$$

$$5x^2-16x+12=0$$

$$(5x-6)(x-2)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{6}{5},\quad 2.$$

但此二値非原方程式之二根，故當略去。

32. 解: $\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x}}+3=0$

$$\frac{2x-1+3x+2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{3x}}{2x-1-3x}+3=0$$

$$5x-1+2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{3x}-3x-3=0$$

$$\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{3x}=2-x$$

$$5x^2+x-4=0$$

$$(5x-4)(x+1)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{4}{5},\quad -1.$$

但 -1 非原方程式之根，故當略去。

33. 解: $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}=2$

$$2-x=(2-\sqrt[3]{x})^3=8-12\sqrt[3]{x}+6\sqrt[3]{x^2}-x$$

$$6x^{\frac{2}{3}}-12x^{\frac{1}{3}}+6=0$$

$$6(x^{\frac{1}{3}}-1)^2=0$$

$$x^{\frac{1}{3}}=1$$

$$\therefore\quad x=1.$$

34. 解: $(x+a)^{\frac{1}{3}}+(x+b)^{\frac{1}{3}}+(x+c)^{\frac{1}{3}}=0$

$$(x+a)^{\frac{1}{3}}+(x+b)^{\frac{1}{3}}=-(x+c)^{\frac{1}{3}}$$

$$x+a+3(x+a)^{\frac{2}{3}}(x+b)^{\frac{1}{3}}+3(x+a)^{\frac{1}{3}}+(x+b)^{\frac{2}{3}}+x+b$$
$$=-(x+c)$$

$$3x+a+b+c=-3(x+a)^{\frac{1}{3}}(x+b)^{\frac{1}{3}}\{(x+a)^{\frac{1}{3}}+(x+b)^{\frac{1}{3}}\}$$

$$3x+(a+b+c)=-3(x+a)^{\frac{1}{3}}(x+b)^{\frac{1}{3}}\{-(x+c)^{\frac{1}{3}}\}$$

$$27x^3+27x^2(a+b+c)+9x(a+b+c)^2+(a+b+c)^2$$
$$=27(x+a)(x+b)(x+c)$$

$$27x^3+27x^2(a+b+c)+9x(a+b+c)^2+(a+b+c)^3$$
$$=27x^3+27x^2(a+b+c)+27x(ab+ca+bc)+27abc$$

$$\{9(a+b+c)^2-27(ab+ca+bc)\}x=27abc-(a+b+c)^3$$

$$\{9(a^2+b^2+c^2)-9(ab+bc+ca)\}x=27abc-(a+b+c)^3$$

$$\therefore\quad x=\frac{27abc-(a+b+c)^3}{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}.$$

35. 解: $x(x-1)(x-2)(x-3)=6\cdot5\cdot4\cdot3$

$$(x^2-3x+2)(x^2-3x)=18\cdot20$$

$$(x^2-3x)^2+2(x^2-3x)-18\cdot20=0$$

$$(x^2-3x-18)(x^2-3x+20)=0$$

$$(x-6)(x+3)(x^2-3x+20)=0$$

$$\therefore\quad x=6,\quad -3.$$

$$x^2-3x+20=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{3\pm\sqrt{9-80}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{71}i}{2}.$$

36. 解: $(x+a)^2+4(x+a)\sqrt{x}=a^2-4a\sqrt{x}$

$$(x+a)^2-a^2=-4\sqrt{x}(x+2a)$$

$$x(x+2a)=-4\sqrt{x}(x+2a)$$
$$\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)(x+2a)=0$$
$$\therefore\quad x=0,\quad -2a.$$

37. 解: $\sqrt[3]{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2-1}}=6$

$$\sqrt[3]{\frac{x^4+2x^2+1}{(x^2-1)^2}}+\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=6$$

$$\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]^{\frac{2}{3}}+\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]^{\frac{1}{3}}-6=0$$

$$\left\{\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]^{\frac{1}{3}}+3\right\}\left\{\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]^{\frac{1}{3}}-2\right\}=0$$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}=(-3)^3=-27$$
$$x^2+1=-27x^2+27$$
$$28x^2=26$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{26}{28}}=\pm\sqrt{\frac{13}{14}}=\pm\frac{1}{14}\sqrt{182}.$$
$$\frac{x^2+1}{x^2-1}=2^3=8$$
$$x^2+1=8x^2-8$$
$$7x^2=9$$
$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{9}{7}}=\pm\frac{1}{7}\sqrt{63}=\pm\frac{3}{7}\sqrt{7}.$$

XVI. 聯立方程式之能以二次方程解之者

習 題 XLV

原本第 320 頁

1. 解: $\begin{cases}7x^2-6xy=8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 2x-3y=8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (2) 式, $\qquad y=\frac{2x-5}{3}$

代入 (1) 式，得　$3x^2+10x-8=0$

$$(3x-2)(x+4)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{2}{3}\quad 及\quad -4,$$

$$y=-\frac{11}{9}\quad 及\quad \frac{13}{3}.$$

答: 其根為 $\frac{2}{3}, -\frac{11}{9}$; $-4, -\frac{13}{3}$.

2. 解: $\begin{cases} xy=1 \cdots\cdots(1) \\ 3x-5y=2 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式，　$x=\frac{1}{y}$

代入 (2) 式，得　$5y^2+2y-3=0$

$$(5y-3)(y+1)=0$$

$$\therefore\quad y=\frac{3}{5}\quad 及\quad -1,$$

$$x=\frac{5}{3}\quad 及\quad -1.$$

答: 其根為 $\frac{5}{3}, \frac{3}{5}$; $-1, -1$.

3. 解: $\begin{cases} x^2+x=4y^2 \cdots\cdots(1) \\ 3x+6y=1 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式，　$y=\frac{1-3x}{6}$

代入 (1) 式，得　$x^2+x=4\left[\frac{1-3x}{6}\right]^2$

$$15x=1$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{15},\ y=\frac{2}{15}.$$

答: 其根為 $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}$; 一無限根.

4. 解: $\begin{cases} 3x^2-3xy-y^2-4x-8y+3=0 \cdots\cdots(1) \\ 3x-y-8=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式，　$3x-8$

代入 (1) 式，得 $15x^2-44x-3=0$

$$(15x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{15}\quad \text{及}\quad 3,$$

$$y=-\frac{41}{5}\quad \text{及}\quad 1.$$

答：其根為 $-\frac{1}{15}, -\frac{41}{5}; 3, 1.$

5. 解：$\begin{cases} x^2+5y^2-8x-7y=0 \cdots\cdots(1) \\ x+3y=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式， $x=-3y$

代入 (1) 式，得 $14y^2+17y=0$

$$y(14y+17)=0$$

$$\therefore\quad y=0\quad \text{及}\quad -\frac{17}{14},$$

$$x=0\quad \text{及}\quad \frac{51}{14}.$$

答：其根為 $0, 0; \frac{51}{14}, -\frac{17}{14}.$

6. 解：$\begin{cases} 2x^2-xy-3y=0 \cdots\cdots(1) \\ 7x-6y-4=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式， $y=\frac{7x-4}{6}$

代入 (1) 式，得 $5x^2-17x+12=0$

$$(x-1)(5x-12)=0$$

$$\therefore\quad x=1\quad \text{及}\quad \frac{12}{5},$$

$$y=\frac{1}{2}\quad \text{及}\quad \frac{32}{15}.$$

答：其根為 $1, \frac{1}{2}; \frac{12}{5}, \frac{32}{15}.$

7. 解：$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2-1=0 \cdots\cdots(1) \\ x+y=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式， $y=-x$

代入 (1) 式，得　$x^2-3x^2+2x^2-1=0$

但　$-1\neq 0$

答：此組方程式有兩對無限根。

8. 解：$\begin{cases} 2x+3y=37 \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{14}{45} \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式，　$45y+45x-14xy=0$

$$y=\frac{45x}{14x-45}$$

代入 (1) 式，得　$28x^2-473x+1665=0$

$$\therefore\quad x=\frac{473\pm\sqrt{223729-186480}}{56}$$

$$=\frac{473\pm 193}{56}$$

$$=\frac{333}{28}\quad 及\quad 5,$$

$$y=\frac{185}{42}\quad 及\quad 9.$$

答：其根爲 $\dfrac{333}{28},\dfrac{185}{42}$; 5, 9.

9. 解：$\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{x}=1 \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{7}{xy}-\dfrac{1}{y^2}=12 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式，　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{y}-1\right)$

代入 (2) 式，得　$\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y^2}=12$

$$36y^2+7y-4=0$$

$$(4y-1)(9y+4)=0$$

$$\therefore\quad y=-\frac{4}{9}\quad 及\quad \frac{1}{4},$$

$$x=-\frac{12}{13}\quad 及\quad 1.$$

答：其根爲 $-\frac{12}{13}, -\frac{4}{9}$；$1, \frac{1}{4}$.

10. 解：$\begin{cases} x^2+xy+2=0 \cdots\cdots(1) \\ (3x+y)(2x+y-1)=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式，　$3x+y=0$　及　$2x+y-1=0$

$y=-3x$　及　$-2x+1 \cdots\cdots(3)$

分别代入 (1) 式，得　$2x^2=2$　$\therefore$　$x=\pm 1$.

及　$x^2-x-2=0$　$\therefore$　$x=-1,\ 2$.

將 x 之值分别代入 (3) 式，得

$y=\mp 3,\ 3,\ -3.$

答：其根爲 $1, -3$；$-1, 3$；$-1, 3$；$2, -3$.

11. 解：$\begin{cases} x^2+y^2-8=0 \cdots\cdots(1) \\ (x+1)^2=(y-1)^2 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式，　$(x-y+2)(x+y)=0$

$x-y+2=0 \cdots\cdots(3)$

$x+y=0 \cdots\cdots(4)$

解 (1), (3)；得　$x=-1\pm\sqrt{3}$,

$y=1\pm\sqrt{3}$.

解 (1), (4)；得　$x=\pm 2$,

$y=\mp 2$.

答：其根爲 $-1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$；$-1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$；$2, -2$；$-2, 2$.

12. 解：$\begin{cases} x^2-xy-2y^2+y=0 \cdots\cdots(1) \\ (x-2y)(x+y-3)=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式，　$(x+y)(x-2y)+y=0 \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式，　$x-2y=0 \cdots\cdots(4)$

$x+y-3=0 \cdots\cdots(5)$

解 (3), (4)；得 $x=0,\ y=0$；及一無限解.

解 (3), (5)；得 $x=\frac{15}{8}, y=\frac{9}{8}$；及一無限解.

答：其根爲 $0, 0$；$\frac{15}{8}, \frac{9}{8}$；及二無限解.

13. 解：$\begin{cases} y^2+4x+4=0 \cdots\cdots(1) \\ y=mx \cdots\cdots(2) \end{cases}$

將 (2) 式代入 (1) 式，得

$$m^2x^2+4x+4=0$$

若二解答相等，則

$$b^2-4a=0$$

即 $$16-16m^2=0$$

$$m^2=1$$

$$\therefore\quad m=\pm 1.$$

14. 解：$\begin{cases} x^2+xy-2y^2+x=0 & \cdots\cdots(1)\\ y=mx+c & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

將 (2) 代入 (1) 式，得

$$(1+m-2m^2)x^2+(c-4mc+1)x-2c^2=0$$

若兩解答爲無限，則

$$1+m-2m^2=0\cdots\cdots(3)$$

$$c-4mc+1=0\cdots\cdots(4)$$

從 (3) 式， $$(1+2m)(1-m)=0$$

$$\therefore\quad m=-\frac{1}{2}\quad 及\quad 1.$$

代入 (4) 式，得

$$c=-\frac{1}{3}\quad 及\quad \frac{1}{3}.$$

答：m, c 之值爲 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$；$1, \frac{1}{3}$.

15. 解：$\begin{cases} 2x-y+4=0 & \cdots\cdots(1)\\ 2x^2+xy-y^2+10x+y+12=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1) 式， $$y=2x+4$$

代入 (2) 式，得 $4x^2-4x^2+16x-16x+16-16=0$

但此方程式爲一恆等式，故 x 之任何值皆能滿足之，是以 $2x-y+4$ 爲 $2x^2+xy-y^2+10x+y+12$ 之因子。

16. 解：$\begin{cases} xy=1 & \cdots\cdots(1)\\ xy+x+y=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1) 式， $$x=\frac{1}{y}$$

代入 (2) 式，得 $$1+\frac{1}{y}+y=0$$

卽　　$y^2+y+1=0$

此方程式爲二次方程式，故僅能有二有限解答。再 (1), (2) 兩式中最高次的項均有 x 及 y 兩因式已示 (1), (2) 兩式有二無限解，故 (1), (2) 二式僅能有 $4-2$ 卽 2 有限解答。

$$\begin{cases} x^2y+xy=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \\ x^2+y^2=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(4) \end{cases}$$

從 (3) 式，　　$y=\dfrac{1}{y^2+x}$

代入 (4) 式，得　$x^4+3x^3+2x^2-1=0$

此方程式爲四次方程式，故僅能有四有限解。再對應於 (3), (4) 兩式中三次項的公因式 x^2 示 (3), (4) 二式有二無限解。又對應於 (3), (4) 兩式中一，二，三次項的公因式 y 示 (3), (4) 兩式又有 3 無限解，故 (3), (4) 兩式有 5 無限解及 4 有限解。

習　題　XLVI

原本第 324 頁

1.　解：$\begin{cases} x^2+3y^2=31 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 7x^2-2y^2=10 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\times2+(2)\times3$,　　$23x^2=92$

$x^2=4$　$\therefore$　$x=\pm2$.

代入 (1) 式，得　　$y^2=9$　$\therefore$　$y=\pm3$.

答：方程式 (1), (2) 之四解爲 $2, 3$; $2, -3$; $-2, 3$; $-2, -3$.

2.　解：$\begin{cases} \dfrac{36}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=18 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{4}{x^2}=8 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)-(2)$,　　$\dfrac{40}{x^2}=10$　　$x^2=4$

$\therefore$　$x=\pm2$.

將 x 之各值代入 (2) 式：

當 $x=2$ 時，　　$y=\pm\frac{1}{3}$.

當 $x=-2$ 時，　　$y=\pm\frac{1}{3}$.

答：其根爲 $2,\frac{1}{3}$; $2,-\frac{1}{3}$; $-2,\frac{1}{3}$; $-2,-\frac{1}{3}$.

3. 解：$\begin{cases} y^2+xy+6=0 \cdots\cdots(1) \\ y^2-y-2=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式，　　$(y+1)(y-2)=0$

$\therefore\quad y=-1$ 及 2.

代入 (1) 式，得　　$x=7$ 及 -5.

答：其根爲 $7,-1$; $-5,2$; 及二無限根對應於 (1), (2) 中一，二次項的公因式 y。

4. 解：$\begin{cases} x^2+y^2-3x+2y-39=0 \cdots\cdots(1) \\ 3x^2-17xy+10y^2=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式，　　$(3x-2y)(x-5y)=0$

$$x=\frac{2y}{3} \text{ 及 } 5y$$

將 $x=\frac{2}{3}y$ 代入 (1) 式，得

$$y^2=27$$

$$\therefore\quad y=\pm3\sqrt{3},$$

$$x=\pm2\sqrt{3}.$$

將 $x=5y$ 代入 (1) 式，得

$$2y^2-y-3=0$$

$$(2y-3)(y+1)=0$$

$$\therefore\quad y=\frac{3}{2} \text{ 及 } -1,$$

$$x=\frac{15}{2} \text{ 及 } -5.$$

答：其四解爲 $2\sqrt{3},3\sqrt{3}$; $-2\sqrt{3},-3\sqrt{3}$; $\frac{15}{2},\frac{3}{2}$; $-5,-1$.

5. 解: $\begin{cases} y^2-x^2-5=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 4x^2+4xy+y^2+4x+2y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

分解 (2) 式，得 $(2x+y+3)(2x+y-1)=0$

$y=-(2x+3) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

及 $y=1-2x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

將 (3) 式代入 (1) 式，得

$$3x^2+12x+4=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{-6\pm\sqrt{36-12}}{3}=\frac{-6\pm2\sqrt{6}}{3}.$$

代入 (3) 式，得

$$y=\frac{3\mp4\sqrt{6}}{3}.$$

將 (4) 式代入 (1) 式，得

$$3x^2-4x-4=0$$

$$(3x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore \quad x=-\frac{2}{3} \quad 及 \quad 2.$$

代入 (4) 式，得 $y=\frac{7}{3}$ 及 -3.

答: 其根爲 $2, -3$; $-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}$; $\frac{-6\pm2\sqrt{6}}{3}, \frac{3\mp4\sqrt{6}}{3}$.

6. 解: $\begin{cases} x^2+5xy-2x+3y+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x^2+15xy-7x+8y+4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\times3-(2)$, $x+y=1$

$y=1-x$

代入 (1) 式，得 $4x^2-4=0$

$$\therefore \quad x=\pm1,$$

$$y=0 \quad 及 \quad 2.$$

答: 其根爲 $1, 0$; $-1, 2$; 及二無限根對應於 (1), (2) 兩式中最高次項的公因式 x 及 $x+5y$.

7. 解: $\begin{cases} x^2-15xy-3y^2+2x+9y=98 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 5xy+y^2-3y=-21 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)+(2)\times3$, $x^2+2x-35=0$

$$(x+7)(x-5)=0$$

$$\therefore\quad x=-7 \quad 及 \quad 5.$$

將 $x=-7$ 代入 (2) 式，得

$$y^2-38y+21=0$$

$$\therefore\quad y=19\pm\sqrt{361-21}=19\pm2\sqrt{85}.$$

將 $x=5$ 代入 (2) 式，得

$$y^2+22y+21=0$$

$$(y+1)(y+21)=0$$

$$\therefore\quad y=-1,\quad -21.$$

答：其根爲 $-7,\ 19+2\sqrt{85}$；$-7,\ 19-2\sqrt{85}$；$5,\ -1$；$5,\ -21$.

8. 解：$\begin{cases} 2x^2+3xy-4y^2=25 & \cdots\cdots(1) \\ 15x^2+24xy-31y^2=200 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\times8-(2)$，　$x^2-y^2=0$

$$(x+y)(x-y)=0$$

$$x=-y \quad 及 \quad x=y$$

將 $x=-y$ 代入 (1) 式，得

$$y^2=-5$$

$$\therefore\quad y=\pm\sqrt{5}i,$$

$$x=\mp\sqrt{5}i.$$

將 $x=y$ 代入 (1) 式，得

$$y^2=25$$

$$\therefore\quad y=\pm5,$$

$$x=\pm5.$$

答：其根爲 $5, 5$；$-5, -5$；$\sqrt{5}i, -\sqrt{5}i$；$-\sqrt{5}i, \sqrt{5}i$.

9. 解：$\begin{cases} x(x+3y)=18 & \cdots\cdots(1) \\ x^2-5y^2=4 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$2\times(1)-9\times(2)$，　$45y^2+6xy-7x^2=0$

$$(15y+7x)(3y-x)=0$$

$$y=-\frac{7x}{15} \quad 及 \quad y=\frac{x}{3}$$

將 $y=-\dfrac{7x}{15}$ 代入 (2) 式，得

$$x^2=-45$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{45}i=\pm 3\sqrt{5}i,$$

$$y=\mp\frac{7\sqrt{5}i}{5}.$$

將 $y=\frac{x}{3}$ 代入 (2) 式，得

$$x^2=9$$

$$\therefore\quad x=\pm 3,$$

$$y=\pm 1.$$

答：其根爲 $3\sqrt{5}i,\ \frac{-7\sqrt{5}i}{5}$；$-3\sqrt{5}i,\ \frac{7\sqrt{5}i}{5}$；$3,1$；$-3,-1$.

10. 解：$\begin{cases} x^2-3xy+3y^2=x^2y^2 & \cdots\cdots(1) \\ 7x^2-10xy+7y^2=12x^2y^2 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\times 12-(2)$，$\quad 5x^2-26xy+32y^2=0$

$$(5x-16y)(x-2y)=0$$

$$x=\frac{16}{5}y \quad 及 \quad x=2y$$

將 $x=\frac{16}{5}y$ 代入 (1) 式，得

$$y^2(256y^2-91)=0$$

$$\therefore\quad y=0,\ 0,\ \pm\frac{1}{16}\sqrt{91};$$

$$x=0,\ 0,\ \pm\frac{1}{5}\sqrt{91}.$$

將 $x=2y$ 代入 (1) 式，得

$$y^2(4y^2-1)=0$$

$$\therefore\quad y=0,\ 0,\ \pm\frac{1}{2};$$

$$x=0,\ 0,\ \pm 1.$$

答：其根爲 $0,0$；$0,0$；$0,0$；$0,0$；$\frac{1}{16}\sqrt{91},\ \frac{1}{5}\sqrt{91}$；$-\frac{1}{16}\sqrt{91},\ -\frac{1}{5}\sqrt{91}$；$\frac{1}{2},1$；$-\frac{1}{2}$；$-1$；及 8 無限解對應於 (1), (2) 兩式中三次項及四次項的公因式 x,x,y,y.

11. 解: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=38 \cdots\cdots(1) \\ x^2-xy+y^2=14 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)+(2), $x^2+y^2=26 \cdots\cdots(3)$

(1)−(2), $2xy=24 \cdots\cdots(4)$

(3)+(4), $(x+y)^2=50$

$x+y=\pm 5\sqrt{2} \cdots\cdots(5)$

(3)−(4), $(x-y)^2=2$

$x-y=\pm\sqrt{2} \cdots\cdots(6)$

(5)+(6), $x=\pm 3\sqrt{2},\ \pm 2\sqrt{2}.$

(5)−(6) $y=\pm 2\sqrt{2},\ \pm 3\sqrt{2}.$

答: 其根爲 $3\sqrt{2},\ 2\sqrt{2};\ -3\sqrt{2},\ -2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2},\ 3\sqrt{2};\ -2\sqrt{2},\ -3\sqrt{2}.$

12. 解: $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21(x-y) \cdots\cdots(1) \\ xy=20 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)−(2), $x^2-2xy+y^2=21(x-y)-20$

$(x-y)^2-21(x-y)+20=0$

$(x-y-1)(x-y-20)=0$

$x=1+y \cdots\cdots(3)$

$x=20+y \cdots\cdots(4)$

將 (3) 式代入 (2) 式,得

$y^2+y-20=0$

$(y-4)(y+5)=0$

$\therefore\ y=4$ 及 $-5,$

$x=5$ 及 $-4.$

將 (4) 式代入 (2) 式,得

$y^2+20y-20=0$

$\therefore\ y=-10\pm\sqrt{100+20}=-10\pm 2\sqrt{30},$

$x=10\pm 2\sqrt{30}.$

答: 其根爲 5, 4; −4, −5; $10\pm 2\sqrt{30},\ -10\pm 2\sqrt{30}.$

13. 解: $\begin{cases} x^2+y-8=0 \cdots\cdots(1) \\ y^2+15x-46=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式, $y=8-x^2$

代入 (2) 式，得 $x^4-16x^2+15x+18=0$

$$(x-2)(x-3)(x^2+5x+3)=0$$

$$\therefore\quad x=2,\ 3,\ \frac{-5\pm\sqrt{13}}{2};$$

$$y=4,\ -1,\ \frac{-3\pm5\sqrt{13}}{2}.$$

答：其根爲 $2, 4$; $3, -1$; $\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}, \dfrac{-3\pm5\sqrt{13}}{2}$.

習題 XLVII

原本第 325 頁

1. 解：
$$\begin{cases} x^3-y^3=63 & \cdots\cdots(1) \\ x-y=3 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1)÷(2)，$x^2+xy+y^2=21$ ⋯⋯(3)

(2) 平方，$x^2-2xy+y^2=9$ ⋯⋯(4)

(3)−(4)，$3xy=12$

$xy=4$ ⋯⋯(5)

(3)+(5)，$x^2+2xy+y^2=25$

$x+y=\pm5$ ⋯⋯(6)

(2)+(6)，$x=4,\ -1.$

代入 (2) 式，得 $y=1,\ -4.$

答：其根爲 $4, 1$; $-1, -1$; 及一無限根對應於 (1), (2) 兩式中最高次項的公因式 $x-y$.

2. 解：
$$\begin{cases} x+y=98 & \cdots\cdots(1) \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1)÷(2)，$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=49$ ⋯⋯(3)

從 (2) 式，$\sqrt[3]{x}=2-\sqrt[3]{y}$

(2) 平方，$\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}=4$ ⋯⋯(4)

(4)−(3)，$3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}=-45$

$\sqrt[3]{xy}=-15$ ⋯⋯(5)

(3)−(5)，$(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2=64$

$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\pm8$ ⋯⋯(6)

(2)+(6), $2\sqrt[3]{x}=10$ 或 -6

$\therefore\ x=125$ 或 $-27.$

代入 (1) 式,得 $y=-27$ 或 $125.$

答: 其根為 $-27, 125$; $125, -27$; 及一無限根。

3. 解: $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=931 \cdots\cdots(1) \\ x^2+xy+y^2=49 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)÷(2), $x^2-xy+y^2=19 \cdots\cdots(3)$

(2)−(3), $2xy=30$

$xy=15 \cdots\cdots(4)$

(2)+(4), $(x+y)^2=64$

$x+y=\pm 8 \cdots\cdots(5)$

(3)−(4), $(x-y)^2=4$

$x-y=\pm 2 \cdots\cdots(6)$

$\frac{(5)+(6)}{2}$, $x=5, -5, 3, -3.$

代入 (4) 式,得 $y=3, -3, 5, -5.$

答: 其各根為 $5, 3$; $-5, -3$; $3, 5$; $-3, -5$; 及四無限解對應於 (1), (2) 兩式中最高次項的公因式 x^2+xy+y^2.

4. 解: $\begin{cases} (x+y)(x^2-2y^2)=-70 \cdots\cdots(1) \\ (x-y)(x^2-2y^2)=14 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)÷(2), $x+y=-5(x-y).$

$$x=\frac{2}{3}y$$

代入 (2) 式,得 $\left[\frac{2}{3}y-y\right]\left[\frac{4}{9}y^2-2y^2\right]=14$

$$y^3-27=0$$

$$(y-3)(y^2+3y+9)=0$$

$$\therefore\ y=3,\ 3(-1\pm\sqrt{3}i)/2;$$

$$x=2,\quad -1\pm\sqrt{3}i.$$

答: 其根為 $2, 3$; $-1\pm\sqrt{3}i, 3(-1\pm\sqrt{3}i)/2$; 及六無限根。

5. 解: $\begin{cases} (x+y)^2(x-y)=3xy+6y \cdots\cdots(1) \\ x^2-y^2=x+2 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)÷(2), $x+y=3y$

$$x=2y \cdots\cdots(3)$$

又 $$x=-2 \cdots\cdots(4)$$

及 $$x^2=y^2$$

$$x=\pm y \cdots\cdots(5)$$

代入 (2) 式:

當 $x=-y$, $y=2$ $\therefore$ $x=-2$.

當 $x=y$, $y=-2$ $\therefore$ $x=-2$.

當 $x=-2$, $y=\pm 2$

當 $x=2y$, $y=(1\pm\sqrt{7})/3$, $x=(2\pm 2\sqrt{7})/3$.

答: 其根為 $-2, 2$; $-2, -2$; $(2\pm 2\sqrt{7})/3$, $(1\pm\sqrt{7})3$; 及二無限根.

6. 解: $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=6x \cdots\cdots(1) \\ x^2-y^2=-5y \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) ÷ (2), $\dfrac{x-2y}{x+y}=-\dfrac{6x}{5y}$

$$6x^2+11xy-10y^2=0 \quad (3x-2y)(2x+5y)=0$$

$$x=\frac{2}{3}y \text{ 及 } x=\frac{5}{2}y$$

代入 (2) 式,得 $y^2-9y=0 \cdots\cdots(3)$

及 $21y^2+20y=0 \cdots\cdots(4)$

解 (3) 式,得 $y=0$ 及 9,

$$x=\frac{2}{3}y=0, \text{ 及 } 6.$$

解 (4) 式,得 $y=0$ 及 $-\dfrac{20}{21}$,

$$x=-\frac{5}{2}y=0 \text{ 及 } -\frac{50}{21}$$

答: 其根為 $0, 0$; $6, 9$; $\dfrac{50}{21}, -\dfrac{20}{21}$; 及一無限根.

習 題 XLVIII

原本第 328 頁

1. 解: $\begin{cases} x+y=5 \cdots\cdots(1) \\ xy+36=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式，　$x=5-y$

代入 (2) 式，得　$y^2-5y-36=0$

$(y-9)(y+4)=0$

$\therefore\ y=9$ 及 -4,

$x=-4$ 及 9.

2. 解：$\begin{cases} x^2+y^2=200 & \cdots\cdots(1) \\ x+y=12 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(2) 平方，　$x^2+2xy+y^2=144 \quad \cdots\cdots(3)$

$2\times(1)-(3)$,　$x^2-2xy+y^2=256$

$x-y=\pm 16 \quad \cdots\cdots(4)$

$\frac{(2)+(4)}{2}$,　$x=14$ 及 -2,

$y=-2$ 及 14.

3. 解：$\begin{cases} x^2+y^2=293 & \cdots\cdots(1) \\ xy=34 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)+2\times(2)$,　$(x+y)^2=361$

$x+y=\pm 19 \quad \cdots\cdots(3)$

$(1)-2\times(2)$,　$(x-y)^2=225$

$x-y=\pm 15 \quad \cdots\cdots(4)$

從 (3) 及 (4)，　$x=\pm 17,\ \pm 2.$

代入 (2) 式，得　$y=\pm 2,\ \pm 17.$

4. 解：$\begin{cases} x^2+y^2=85 & \cdots\cdots(1) \\ x-y=7 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式，　$x=7+y$

代入 (1) 式，得　$y^2+7y-18=0$

$(y+9)(y-2)=0$

$\therefore\ y=-9$ 及 2,

$x=-2$ 及 9.

5. 解：$\begin{cases} x^3+y^3=513 & \cdots\cdots(1) \\ x+y=9 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\div(2)$,　$x^2-xy+y^2=57 \quad \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式，　$y=9-x$

代入 (3) 式，得　$x^2-9x+8=0$

$(x-8)(x-1)=0$

$\therefore \quad x=8,\ 1;$

$y=1,\ 8$；及一無限解對應於 (1), (2) 中最高次項的公因式 $x+y$.

6\. 解：$\begin{cases} x^3+y^3=468 & \cdots\cdots(1) \\ x^2y+xy^2=420 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

對應於 (1), (2) 兩式中一次，二次，三項的公因式 $x+y$ 有三無限解。

(1)＋(2)×3, $\quad x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=1728$

$$(x+y)^3=12^3$$

$$[(x+y)-12][(x+y)^2+12(x+y)+144]=0.$$

$$x+y=12 \quad \cdots\cdots(3)$$

$$(x+y)^2+12(x+y)+144=0.$$

$$\therefore\ x+y=-6\pm\sqrt{36-144}=-6\pm6\sqrt{3}i \quad \cdots\cdots(4)$$

解 (2) 和 (3) 及 (2) 和 (4), 即得 (1), (2) 兩式之各有限解。

解 (2) 和 (3)：

(2)÷(3), $\quad xy=35 \quad \cdots\cdots(5)$

解 (5) 和 (3)，得 $\quad x=7,\ 5;$

$\quad y=5,\ 7.$

解 (2) 和 (4)：

(2)÷(4), $\quad xy=\dfrac{70}{-1\pm\sqrt{3}i}=\dfrac{35}{2}(-1\mp\sqrt{3}i) \quad \cdots\cdots(6)$

$(4)^2-4(6)$, $\quad (x-y)^2=-2(1\pm\sqrt{3}i)$

$$x-y=\pm\sqrt{-2\mp2\sqrt{3}i}$$

$$=\pm(\sqrt{3}i\mp1) \quad \cdots\cdots(7)$$

(4)＋(7), $\quad 2x=(-6+6\sqrt{3}i)\pm(\sqrt{3}i-1) \quad \cdots\cdots(8)$

及 $\quad 2x=(-6-6\sqrt{3}i)\pm(\sqrt{3}i+1) \quad \cdots\cdots(9)$

從 (8) 式， $\quad x=\dfrac{-7+7\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-5+5\sqrt{3}i}{2}.$

代入 $x+y=-6+6\sqrt{3}i$，得

$$y=\frac{-5+5\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-7+7\sqrt{3}i}{2}.$$

從 (9) 式， $\quad x=\dfrac{-7-7\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-5-5\sqrt{3}i}{2}.$

代入 $x+y=-6-6\sqrt{3}i$, 得

$$y=\frac{-5-5\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-7-7\sqrt{3}i}{2}.$$

答: 其有限解爲 7, 5; 5, 7; $\frac{7}{2}(-1+\sqrt{3}i)$, $\frac{5}{2}(-1+\sqrt{3}i)$;

$\frac{5}{2}(-1\sqrt{3}i)$, $\frac{7}{2}(-1+\sqrt{3}i)$; $\frac{-5}{2}(1+\sqrt{3}i)$,

$\frac{-7}{2}(1+\sqrt{3}i)$; $\frac{-7}{2}(1+\sqrt{3}i)$, $\frac{-5}{2}(1+\sqrt{3}i)$.

7. 解: $\begin{cases}27x^3+64y^3=65 \cdots\cdots(1)\\ 3x+4y=5 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

對應於最高次項中的公因式 $6x+4y$ 有一無限解。

(1) ÷ (2), $9x^2-12xy+16y^2=13 \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式, $y=\frac{5-3x}{4}$

代入 (3) 式, 得 $27x^2-45x+12=0$

$(3x-4)(9x-3)=0$

$\therefore\ x=\frac{4}{3}$ 及 $\frac{1}{3}$,

$y=\frac{1}{4}$ 及 1.

8. 解: $\begin{cases}x^4+y^4=82 \cdots\cdots(1)\\ x-y=2 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

設 $x=u+v,\quad y=u-v$

從 (1) 式, $(u+v)^4+(u-v)^4=82 \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式, $2v=2$

代入 (3) 式, $u^4+6u^2-40=0$

$(u^2+10)(u^2-4)=0$

$u^2=-10$ 及 4

$\therefore\ u=\pm\sqrt{10}i$ 及 ± 2;

$x=\pm\sqrt{10}i+1,\ 3,\ -1$;

$y=\pm\sqrt{10}i-1,\ 1,\ -3.$

9. 解: $\begin{cases}x^5+y^5=32 \cdots\cdots(1)\\ x+y=2 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

對應於二式中最高次項的公因式 $x+y$ 有一無限解。

設 $x=u+v,\quad y=u-v$

從 (2) 式，$2u=2\quad\therefore\quad u=1.$

從 (1) 式，$v^4+2v^2-3=0$

$(v^2+3)(v^2-1)=0$

$v=\pm i\sqrt{3}$ 及 $\pm1;$

$x=1\pm i\sqrt{3},\ 2,\ 0;$

$y=1\mp i\sqrt{3},\ 0,\ 2.$

10. 解：$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots(1) \\ 56\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+113=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式，$56x^2+113xy+56y^2=0$

$(7x+8y)(8x+7y)=0$

$y=-\dfrac{7}{8}x$ 及 $y=-\dfrac{8}{7}x.$

代入 (1) 式，$x=4$ 及 $-\dfrac{7}{2},$

$y=-\dfrac{7}{2}$ 及 $4.$

11. 解：$\begin{cases} xy+x+y=-19 & \cdots\cdots(1) \\ x^2y+xy^2+20=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

對應於二式中最高次項的公因式 x 及 y 有二無限解。

從 (2) 式，$xy=-\dfrac{20}{x+y}$

代入 (1) 式，得 $(x+y)^2+19(x+y)-20=0$

$(x+y+20)(x+y-1)=0$

$x=-20-y$ 及 $x=1-y$

代入 (1) 式，得 $y^2+20y+1=0\cdots\cdots(3)$

及 $y^2-y-20=0\cdots\cdots(4)$

從 (3) 式，$y=-10\pm3\sqrt{11},$

$x=-10\mp3\sqrt{11}.$

從 (4) 式，$y=5$ 及 $-4,$

$x=-4$ 及 $5.$

12. 解: $\begin{cases} x^4+y^4-(x^2+y^2)=72 & \cdots\cdots(1) \\ x^2+x^2y^2+y^2=19 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)+2×(2), $x^4+2x^2y^2+y^4+x^2+y^2=110$

$(x^2+y^2+11)(x^2+y^2-10)=0$

$y^2=10-x^2$ 及 $y^2=-(11+x^2)$

代入 (2) 式,得 $x^4-10x^2+9=0$ ……(3)

及 $x^4+11x^2+30=0$ ……(4)

從 (3) 式, $x=\pm1$ 及 $\pm3,$

$y=\pm3$ 及 $\pm1.$

從 (4) 式, $x=\pm\sqrt{6}i$ 及 $\pm\sqrt{5}i,$

$y=\pm\sqrt{5}i$ 及 $\pm\sqrt{6}i.$

答: 其解爲 $1, \pm3$; $-1, \pm3$; $3, \pm1$; $-3, \pm1$, …等共十六個.

13. 解: $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 & \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{10} & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

對應於兩式中最高次項的公因式 x 及 y 有二無限解.

從 (1) 式, $xy(x+y)=30$ ……(3)

從 (2) 式, $\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{10}$ ……(4)

$\sqrt{(3)\times(4)}$, $x+y=\pm3$

$x=3-y$ 及 $x=-3-y$

代入 (4) 式,得 $y^2-3y+10=0$ ……(5)

及 $y^2+3y-10=0$ ……(6)

從 (5) 式, $y=\dfrac{3\pm\sqrt{31}i}{2},$

$x=\dfrac{3\mp\sqrt{31}i}{2}$

從 (6) 式, $y=-5$ 及 $2,$

$x=2$ 及 $-5.$

14. 解: $\begin{cases} x^2+3xy+y^2+2x+2y=8 & \cdots\cdots(1) \\ 2x^2+2y^2+3x+3y=14 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式，　$(x+y)^2+xy+2(x+y)-8=0 \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式，　$2(x+y)^2-4xy+3(x+y)-14=0 \cdots\cdots(4)$

$4\times(3)+(4)$，　$6(x+y)^2+11(x+y)-46=0$

$$[6(x+y)+23][(x+y)-2]=0$$

$$x+y=-\frac{23}{6} \text{ 及 } x+y=2 \cdots\cdots(5)$$

代入 (3) 式，得　$xy=\frac{35}{36}$ 及 $xy=0 \cdots\cdots(6)$

從 (5) 及 (6) 式，得 $36y^2+138y+35=0 \cdots\cdots(7)$

及　$(2-y)y=0 \cdots\cdots(8)$

從 (7) 式，　$y=(-23\pm\sqrt{389})/12$,

$$x=(-23\mp\sqrt{389})/12.$$

從 (8) 式，　$y=0$ 及 2,

$$x=2 \text{ 及 } 0.$$

答：其解為 $0, 2$; $2, 0$; $(-32\pm\sqrt{389})/12$, $(-3\mp\sqrt{389})/12$.

15. 解：$\begin{cases} x^3=5y & \cdots\cdots(1) \\ y^3=5x & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)+(2)$，　$x^3+y^3=5(x+y)$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=5(x+y)$$

$$x+y=0 \cdots\cdots(3)$$

$$x^2-xy+y^2-5=0 \cdots\cdots(4)$$

$(1)-(2)$，　$x^3-y^3=-5(x-y)$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=-5(x-y)$$

$$x-y=0 \cdots\cdots(5)$$

$$x^2+xy+y^2+5=0 \cdots\cdots(6)$$

從 (3) 及 (5)，得　$x=0$,　$y=0$.

從 (3) 及 (6)，得　$x=\pm\sqrt{5}i$, $y=\mp\sqrt{5}i$.

從 (4) 及 (5)，得　$x=\pm\sqrt{5}i$, $y=\mp\sqrt{5}i$.

從 (4) 及 (6)，得　$x=\pm\sqrt{10}(1+i)/2$, $\pm\sqrt{10}(1-i)/2$;

$$y=\mp\sqrt{10}(1-i)/2,\ \mp\sqrt{10}(1+i)/2.$$

習　題　XLIX

原本第329頁

1. 解: $\begin{cases} x+y=3 \cdots\cdots(1) \\ y+z=2 \cdots\cdots(2) \\ x^2-yz=19 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

從 (1) 式，　$x=3-y$

從 (2) 式，　$z=2-y$

代入 (3) 式，得　$9-6y+y^2-2y+y^2=19$

$y^2-4y-5=0$

$\therefore\ y=5$ 及 -1,

$x=-2$ 及 4,

$z=-3$ 及 3.

2. 解: $\begin{cases} x(y+z)=12 \cdots\cdots(1) \\ y(z+x)=6 \cdots\cdots(2) \\ z(x+y)=10 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)+(2)−(3),　$xy=4 \cdots\cdots(4)$

(1)+(3)−(2),　$xz=8 \cdots\cdots(5)$

(2)+(3)−(1),　$yz=2 \cdots\cdots(6)$

(4)×(5)÷(6),　$x^2=16$

$\therefore\ x=4$ 或 -4,

$y=1$ 或 -1,

$z=2$ 或 -2.

3. 解: $\begin{cases} (y+b)(z+c)=a^2 \cdots\cdots(1) \\ (z+c)(x+a)=b^2 \cdots\cdots(2) \\ (x+a)(y+b)=c^2 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)×(2)÷(3),　$\dfrac{(y+b)(z+c)(z+c)(x+a)}{(x+a)(y+b)}=\dfrac{a^2b^2}{c^2}$

$$(z+c)^2=\frac{a^2b^2}{c^2}$$

$$z+c=\pm\frac{ab}{c}$$

$$\therefore \quad z=\frac{-c^2\pm ab}{c},$$

$$y=\frac{-b^2\pm ca}{b},$$

$$x=\frac{-a^2\pm bc}{a}.$$

習　題　L

原本第33[illegible]頁

1. 解: $\begin{cases} 7x^2-6xy=8 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x-3y=5 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式，　$3y=2x-5$

代入 (3) 式，得　$3x^2+10x-8=0$

$(3x-2)(x+4)=0$

$$\therefore \quad x=\frac{2}{3} \text{ 及 } -4,$$

$$y=-\frac{11}{9} \text{ 及 } -\frac{13}{3}.$$

2. 解: $\begin{cases} x^2+y^2=25 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-y=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式，　$y=x-1$

代入 (1) 式，得　$x^2-x-12=0$

$(x-4)(x+3)=0$

$$\therefore \quad x=4 \text{ 及 } -3,$$

$$y=3 \text{ 及 } -4.$$

3. 解: $\begin{cases} x-y=a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy=(b^2-a^2)/4 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) 平方，　$x^2-2xy+y^2=a^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(3) $+4\times$ (2)，　$(x+y)^2=b^2$

$x+y=\pm b \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$\dfrac{(1)+(4)}{2}$，　$x=\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a-b}{2}.$

代入 (4) 式，得　$y=\frac{-a+b}{2},\ \frac{-a-b}{2}.$

4. 解：$\begin{cases}\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=a^2+b^2 \cdots\cdots(1)\\ x^2+y^2=0 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (2) 式，　$y^2=-x^2 \cdots\cdots(3)$

代入 (1) 式，得　$\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x^2}=a^2+b^2$

$$x^2=\frac{a-b}{a^2+b^2}$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{a-b}{a^2+b^2}}.$$

當　$x=\sqrt{\frac{a-b}{a^2+b^2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{b-a}{a^2+b^2}}.$

當　$x=-\sqrt{\frac{a-b}{a^2+b^2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{b-a}{a^2+b^2}}.$

5. 解：$\begin{cases}\frac{1}{y}-\frac{3}{x}=1 \cdots\cdots(1)\\ \frac{7}{xy}-\frac{1}{y^2}=12 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1) 式，　$\frac{1}{y}=1+\frac{3}{x}$

代入 (2) 式，得　$13x^2-x-12=0$

$$(13x+12)(x-1)=0$$

$$\therefore\quad x=-\frac{12}{13}\ \text{及}\ 1,$$

$$y=-\frac{4}{9}\ \text{及}\ \frac{1}{4}.$$

6. 解：$\begin{cases}x+y=a+b \cdots\cdots(1)\\ \frac{a}{x+b}+\frac{b}{y+a}=1 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1) 式，　$y=a+b-x$

代入 (2) 式，得　$x^2-(3a-b)x-(ab-2a^2)=0$

$$(x-a)(x-2a+b)=0$$

$$\therefore\quad x=a \text{ 及 } 2a-b,$$
$$y=b \text{ 及 } 2b-a.$$

7\. 解：$\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=\dfrac{1001}{125} \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{5} \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)÷(2)，$\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{91}{25}=0 \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式，$\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{5}-\dfrac{1}{x}$

代入 (3) 式，得 $2x^2-11x+5=0$

$$(2x-1)(x-5)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2} \text{ 及 } 5,$$

$$y=5 \text{ 及 } \frac{1}{2}.$$

8\. 解：$\begin{cases} \dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=5 \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{ab}{xy}=2 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式，$\dfrac{b}{y}=\dfrac{2x}{a}$

代入 (2) 式，得 $4x^4-5a^2x^2+a^4=0$

$$(4x^2-a^2)(x^2-a^2)=0$$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{a}{2} \text{ 及 } \pm a,$$

$$y=\pm b \text{ 及 } \pm\frac{b}{2}.$$

9\. 解：$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{17}{4}xy \cdots\cdots(1) \\ x-y=\dfrac{3}{4}xy \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式，$y=\dfrac{4x}{3x+4}$

代入 (1) 式，得　$x^4-3x^3-4x^2=0$

$\therefore\quad x=0,\ 0;\quad y=0,\ 0.$

$x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0$

$\therefore\quad x=4,\ -1;\quad y=1,\ -4.$

10. 解：$a(x+y)=b(x-y)=xy$

$$y=\frac{ax}{x-a}$$

$$bx-\frac{abx}{x-a}=\frac{ax^2}{x-a}$$

$$bx^2-abx-abx-ax^2=0$$

$\therefore\quad x=0,\quad y=0.$

$$bx-2ab-ax=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{2ab}{b-a},\ y=\frac{2ab}{b+a}.$$

11. 解：$40xy=21(x^2-y^2)=210(x+y)$

$4xy=21(x+y)$ ……………………………………(1)

$x^2-y^2-10(x+y)=0$ ……………………………………(2)

從 (2) 式，　$(x-y-10)(x+y)=0$

$y=x-10$ 及 $y=-x$

代入 (1) 式，得　$2x^2-41x+105=0$

$(x-3)(2x-35)=0$

$$\therefore\quad x=3\quad 及\quad \frac{35}{2},$$

$$y=-7\quad 及\quad \frac{15}{2}.$$

又　$4x(-x)=21(x^2-x^2)$

$x^2=0$

$\therefore\quad x=0,\ 0;\ y=0,\ 0.$

12. 解：$\begin{cases}4x^2-25y^2=0 & \cdots\cdots(1)\\ 2x^2-10y^2-3y=4 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1) 式，　$(2x-5y)(2x+5y)=0$

$$y=\frac{2}{5}x\ 及\ -\frac{2}{5}x$$

代入 (2) 式，得 $x^2-3x-10=0 \cdots\cdots(3)$

及 $x^2+3x-10=0 \cdots\cdots(4)$

從 (3) 式， $(x-5)(x+2)=0$

$\therefore\ x=5$ 及 -2,

$y=2$ 及 $-\frac{4}{5}$.

從 (4) 式， $(x+5)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-5$ 及 -2,

$y=2$ 及 $-\frac{4}{5}$.

13. 解: $\begin{cases} x^2+3xy-9y^2=9 & \cdots\cdots(1) \\ x^2-13xy+21y^2=-9 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)+(2), $2x^2-10xy+12y^2=0$

$2(x-3y)(x-2y)=0$

$y=\frac{x}{3}$ 及 $\frac{x}{2}$

代入 (1) 式，得 $x^2+x^2-x^2=9$

$\therefore\ x=\pm 3,\quad y=\pm 1.$

又 $4x^2+6x^2-9x^2=36$

$\therefore\ x=\pm 6,\quad y=\pm 3.$

14. 解: $\begin{cases} x^2-7y^2-29=0 & \cdots\cdots(1) \\ x^2-6xy+9y^2-2x+6y=3 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式， $(x-3y)^2-2(x-3y)-3=0$

$(x-3y-3)(x-3y+1)=0$

$x=3y+3$ 及 $x=3y-1$.

代入 (1) 式，得 $y^2+9y-10=0$

$(y+10)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-10$ 及 1,

$x=-27$ 及 6.

又 $y^2-3y-14=0$

$\therefore\ y=\frac{3\pm\sqrt{9+56}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{65}}{2}$,

$x=\frac{9\pm 3\sqrt{65}-2}{2}=\frac{7\pm 3\sqrt{65}}{2}$.

15. 解: $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{65}{28} & \cdots\cdots(1) \\ 2(x^2+y^2)+(x-y)=34 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式, $28(x^2+y^2)=65xy$

$$28(x-y)^2-9xy=0 \cdots\cdots(3)$$

從 (2) 式, $2(x-y)^2+(x-y)+4xy=34 \cdots\cdots(4)$

4(3)+9(4), $130(x-y)^2+9(x-y)-306=0$

$$[65(x-y)+102][2(x-y)-3]=0$$

$$x=-\frac{102}{65}+y \text{ 及 } x=\frac{3}{2}+y$$

代入 (3) 式,得 $(65y-238)(65y+136)=0$

及 $2y^2+3y-14=0$

$$\therefore\ y=\frac{238}{65},\ -\frac{136}{65},\ 2,\ -\frac{7}{2};$$

$$x=\frac{136}{65},\ -\frac{238}{65},\ \frac{7}{2},\ -2.$$

16. 解: $\begin{cases} x^2y=a & \cdots\cdots(1) \\ xy^2=b & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

對應於 (1), (2) 二式中一次項，二次項，三次項的公因式 x 及 y 有 6 無限解.

(1)÷(2), $\dfrac{x}{y}=\dfrac{a}{b}$　　$x=\dfrac{a}{b}y$

代入 (2) 式, $y^3=\dfrac{b^2}{a}$

$$\therefore\ y=\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}},\ \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}\omega,\ \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}\omega^2;$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}},\ \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}\omega,\ \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}\omega^2.$$

其中 ω 示 $(-1+\sqrt{3}i)/2$.

17. 解: $\begin{cases} x^2y+xy^2=a & \cdots\cdots(1) \\ x^2y-xy^2=b & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

對應於 (1), (2) 式中三次項，二次項及一次項的公因式 x 及 y 有 6 無限解.

$(1)+(2)$, $2x^2y=a+b$ ……(3)

$(1)-(2)$, $2xy^2=a-b$ ……(4)

$(3)\div(4)$, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{a+b}{a-b}$

$$x=\frac{a+b}{a-b}y$$

代入 (4) 式, $y^3=\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}$

$$\therefore\quad y=\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}},\ \sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}}\omega,\ \sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}}\omega^2;$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{2(a-b)}},\ \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{2(a-b)}}\omega,\ \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{2(a-b)}}\omega^2.$$

其中 ω 示 $(-1+\sqrt{3}i)/2$.

18. 解: $\begin{cases} x=a(x^2+y^2) & \cdots\cdots(1) \\ y=b(x^2+y^2) & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\div(2)$, $x=\dfrac{a}{b}y$

代入 (2) 式, $y\left[\dfrac{a^2+b^2}{b}y-1\right]=0$

$$\therefore\quad y=0\ 及\ \frac{b}{a^2+b^2},$$

$$x=0\ 及\ \frac{a}{a^2+b^2}.$$

19. 解: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5}{3} & \cdots\cdots(1) \\ (2x+3y)(3x-2y)=110a^2 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式, $x=4y$

代入 (2) 式, $(8y+3y)(12y-2y)=110a^2$

$y^2=a^2$

$\therefore\quad y=\pm a,$

$x=\pm 4a.$

20. 解: $\begin{cases} 3(x^3-y^3)=13xy & \cdots\cdots(1) \\ x-y=1 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

對應於 (1), (2) 式中最高次項的公因式 $x-y$ 有一無限解。

(1)÷(2), $3x^2-10xy+3y^2=0$

$(3x-y)(x-3y)=0$

$x=\frac{1}{3}y$ 及 $x=3y$

代入 (2) 式， $y=\frac{1}{2}$ 及 $-\frac{3}{2}$,

$x=\frac{3}{2}$ 及 $-\frac{1}{2}$

21. 解: $\begin{cases} x^4+y^4=a^4 \cdots\cdots(1) \\ x+y=a \cdots\cdots(2) \end{cases}$

設 $x=u+v$ 及 $y=u-v$

從 (2) 式, $2u=a$

$u=\frac{a}{2}$

代入 (1) 式; $\left[\frac{a}{2}+v\right]^4+\left[\frac{a}{2}-v\right]^4=a^4$

$16v^4+24a^2v^2-7a^4=0$

$(4v^2+7a^2)(4v^2-a^2)=0$

$v^2=-\frac{7}{4}a^2$ 及 $v^2=\frac{1}{4}a^2$

$\therefore$ $v=\pm\frac{a}{2}\sqrt{7}i$ 及 $\pm\frac{a}{2}$;

$x=\frac{a(1\pm\sqrt{7}i)}{2}$, a, 0;

$y=\frac{a(1\mp\sqrt{7}i)}{2}$, 0, a.

22. 解: $\begin{cases} 21(x+y)=10xy \cdots\cdots(1) \\ x+y+x^2+y^2=68 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式， $(x+y)^2+(x+y)-68=2xy \cdots\cdots(3)$

5(3)−(1)， $5(x+y)^2-16(x+y)-340=0$

$[5(x+y)+34][(x+y)-10]=0$

$x+y=-\frac{34}{5}$ 及 $x+y=10 \cdots\cdots(4)$

解 (1) 及 (4),得 $x=7,\ 3,\ (-17\pm\sqrt{646})/5;$

$y=3,\ 7,\ (-17\mp\sqrt{646})/5.$

23. 解: $x^2+y^2=xy=x+y$

$xy=x+y \quad\cdots\cdots(1)$

$(x+y)^2-2xy=xy \quad\cdots\cdots(2)$

從 (1) 及 (2), $(x+y)(x+y-3)=0$

$x=-y \quad\cdots\cdots(3)$

$x=3-y \quad\cdots\cdots(4)$

代入 (1) 式,得 $y=0,\ 0;\ x=0,\ 0.$

又 $y^2-3y+3=0 \quad\cdots\cdots(5)$

$\therefore\ y=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2},$

$x=3-\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{3\mp\sqrt{3}i}{2}.$

24. 解: $x^2-xy+y^2=3a^2=x^2-y^2$

$y(x-2y)=0$

$y=0$ 及 $x=2y$

將此二値各代入 $x^2-y^2=3a^2$ 中,得下列二式:

$x^2=3a^2 \quad\cdots\cdots(1)$

$3y^2=3a^2 \quad\cdots\cdots(2)$

從 (1) 式, $x=\pm a\sqrt{3},\quad y=0.$

從 (2) 式, $y=\pm a,\quad x=\pm 2a.$

答: 其根為 $a\sqrt{3},\ 0;\ -a\sqrt{3},\ 0;\ 2a,\ a;\ -2a;\ -a.$

25. 解: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=21 \quad\cdots\cdots(1) \\ x+\sqrt{xy}+y=7 \quad\cdots\cdots(2) \end{cases}$

對應於 (1), (2) 式中最高次項的公因式 $x+\sqrt{xy}+y$ 有無限解。

(1) ÷ (2), $x-\sqrt{xy}+y=3 \quad\cdots\cdots(3)$

(2) + (3), $2x+2y=10$

$x+y=5$

$y=5-x$

代入 (1) 式,得 $x^2-5x-4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore\quad x=1$ 及 $4,$

$y=4$ 及 $1.$

26. 解：$\begin{cases} 4x^2-3y^2=12(x-y) \cdots\cdots(1) \\ xy=0 \cdots\cdots(1) \end{cases}$

從 (2) 式，　　$x=0,\quad y=0.$

將 $x=0$ 代入 (1) 式，得 $y^2-4y=0$

$\therefore\quad y=0$ 及 $4.$

將 $y=0$ 代入 (1) 式，得 $x^2-3x=0$

$\therefore\quad x=0$ 及 $3.$

答：其根爲 0, 0；0, 4；0, 0；3, 0.

27. 解：$\begin{cases} x^2+y^2=x+y+20 \cdots\cdots(1) \\ xy+10=2(x+y) \cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式，　$(x+y)^2-(x+y)-2xy-20=0 \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式，　$xy=2(x+y)-10$

代入 (3) 式，　$(x+y)^2-5(x+y)=0$

$(x+y)(x+y-5)=0$

$y=-x$ 及 $y=5-x$

將 $x=-x$ 代入 (2) 式，得 $x^2=10$

$\therefore\quad x=\pm\sqrt{10},\ y=\mp\sqrt{10}.$

將 $y=5-x$ 代入 (2) 式，得 $x(5-x)=0$

$\therefore\quad x=0$ 及 $5,\ y=5$ 及 $0.$

28. 解：$\begin{cases} x^2+4x-3y=0 \cdots\cdots(1) \\ y^2+10x-9y=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) − (2)，　　$x^2-y^2-6x+6y=0$

$(x-y)[(x+y)-6]=0$

$x=y$ 及 $x=6-y$

代入 (1) 式，得　$x^2+x=0$

$\therefore\quad x=0$ 及 $-1,$

$y=0$ 及 $-1.$

又　　$y^2-19y+60=0$

$(y-4)(y-15)=0$

$\therefore\quad y=4$ 及 $15,$

$x=2$ 及 $-9.$

29. 解：
$$\begin{cases} 28(x^5+y^5)=61(x^3+y^3) \cdots\cdots(1) \\ x+y=2 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

對應於最高次項的公因式 $x+y$ 有一無限解。

設 $x=u+v,\quad y=u-v$

從 (2) 式， $u=1.$

代入 (1) 式， $28[(1+v)^5+(1-v)^5]=61[(1+v)^3+(1-v)^3]$

$$140v^4+97v^2-33=0$$

$$(4v^2-1)(35v^2+33)=0$$

$$\therefore\quad v=\pm\frac{1}{2}\ \text{及}\ \pm\frac{i\sqrt{1155}}{35};$$

$$x=\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\pm\frac{i\sqrt{1155}}{35};$$

$$y=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 1\mp\frac{i\sqrt{1155}}{35}.$$

30. 解：
$$\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=a \cdots\cdots(1) \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{a} \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1)－(2)， $\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}=a-\dfrac{1}{a}$

$$y^2-\left(a-\frac{1}{a}\right)xy-x^2=0$$

$$(y-ax)\left(y+\frac{x}{a}\right)=0$$

$$y=ax\ \text{及}\ y=-\frac{x}{a}$$

代入 (1) 式， $ax^2-\dfrac{1}{a}=a$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\ \text{或}\ -\frac{\sqrt{a^2+1}}{a},$$

$$y=\sqrt{a^2+1}\ \text{或}\ -\sqrt{a^2+1}.$$

又 $-\dfrac{x^2}{a}+a=a$

$\therefore\quad x=0,\ 0$ [此為不合理,因其能使 (2) 中分母為 0].

答: (1), (2) 兩式之有限解僅有

$$\frac{\sqrt{a^2+1}}{a},\ \sqrt{a^2+1};\quad -\frac{\sqrt{a^2+1}}{a},\ -\sqrt{a^2+1}.$$

31. 解: $\begin{cases}(x+1)^3+(y-2)^3=19 & \cdots\cdots(1)\\ x+y=2 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

對應於 (1), (2) 兩式中最高次項的公因式 $x+y$ 有一無限解.

從 (2) 式,　$y=2-x$

代入 (1) 式,得　$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore\quad x=-3$ 及 2,

$y=5$ 及 0.

32. 解: $\begin{cases}x^2+y=\dfrac{8}{3} & \cdots\cdots(1)\\ x+y^2=\dfrac{34}{9} & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1) 式,　$y=\dfrac{8}{3}-x^2$

代入 (2) 式,得　$3x^4-16x^2+3x+10=0$

$(x-1)(x-2)(3x^2+9x+5)=0$

$\therefore\quad x=1,\ 2$ 或 $\dfrac{-9\pm\sqrt{21}}{6};$

$y=\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{4}{3}$ 或 $\dfrac{-1\pm3\sqrt{21}}{6}.$

33. 解: $\begin{cases}y^2-xy-yz=3 & \cdots\cdots(1)\\ x+4y+z=14 & \cdots\cdots(2)\\ x-y+2z=0 & \cdots\cdots(3)\end{cases}$

(2) − (3),　$5y-z=14$　　$z=5y-14$

代入 (2) 式,得　$x+9y-14=14$　　$x=28-9y$

將 x, z 之值代入 (1) 式,得下列方程式:

$5y^2-14y-3=0$

$(5y+1)(y-3)=0$

$$y=-\frac{1}{5} \text{ 及 } 3,$$
$$z=-15 \text{ 及 } 1,$$
$$x=\frac{149}{5} \text{ 及 } 1.$$

34. 解: $\begin{cases} x+y+z+u=0 \cdots\cdots(1) \\ 3x+z+u=0 \cdots\cdots(2) \\ 3y+2z=0 \cdots\cdots(3) \\ x^2+y^2+zu=5 \cdots\cdots(4) \end{cases}$

從 (2) 及 (3), $\quad x=\frac{-z-u}{3}$ 及 $y=-\frac{2z}{3}$

代入 (1) 式,得 $\quad -u-z-2z+3z+3u=0 \quad \therefore \quad u=0.$

$$x=-\frac{z}{3}$$

代入 (4) 式,得 $\quad z^2+4z^2=45 \quad \therefore \quad z=\pm 3.$

$$\therefore \quad x=\mp 1, \quad y=\mp 2.$$

答: $x, y, z, u=1, 2, -3, 0;\ -1, -2, 3, 0.$

35. 解: $\begin{cases} (y+z)(x+y+z)=10 \cdots\cdots(1) \\ (z+x)(x+y+z)=20 \cdots\cdots(2) \\ (x+y)(x+y+z)=20 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

(1)+(2)+(3), $\quad (x+y+z)^2=25$

$$x+y+z=\pm 5.$$

代入 (1), (2) 及 (3) 式,得

$$y+z=\pm 2 \cdots\cdots(4)$$
$$z+x=\pm 4 \cdots\cdots(5)$$
$$x+y=\pm 5 \cdots\cdots(6)$$

(4)+(5)−(6), $\quad 2z=\pm 6\mp 4=\pm 2$

$$\therefore \quad z=\pm 1.$$

代入 (5) 式,得 $\quad x=\pm 3.$

代入 (6) 式,得 $\quad y=\pm 1.$

答: $x, y, z=3, 1, 1;\ -3, -1, -1.$

36. 解: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \cdots\cdots(1) \\ xy+yz+zx=-1 \cdots\cdots(2) \\ 2x+y-2z=-3 \cdots\cdots(3) \end{cases}$

$(1)+2\times(2)$, $\quad(x+y+z)^2=4$

$$x+y+z=2 \quad\cdots\cdots(4)$$

$$x+y+z=-2 \quad\cdots\cdots(5)$$

解 (3) 及 (4), 得

$$x=3z-5 \text{ 及 } y=7-4z$$

代入 (1) 式,得 $\quad 13z^2-43z+34=0$

$$(13z-17)(z-2)=0$$

$$\therefore\quad z=\frac{17}{13} \text{ 及 } 2,$$

$$y=\frac{23}{13} \text{ 及 } -1,$$

$$x=-\frac{14}{13} \text{ 及 } 1.$$

解 (3) 及 (5), 得

$$x=3z-1 \text{ 及 } y=-4z-1$$

代入 (1) 式,得 $\quad 13z^2+z-2=0$

$$\therefore\quad z=\frac{-1\pm\sqrt{105}}{26},$$

$$y=\frac{-11\mp2\sqrt{105}}{13},$$

$$x=\frac{-29\pm3\sqrt{105}}{26}.$$

答: $x, y, z=1, -1, 2;\ -\frac{14}{13}, \frac{23}{13}, \frac{17}{13};$

$$\frac{-29\pm3\sqrt{105}}{26}, \frac{-11\mp2\sqrt{105}}{13}, \frac{-1\pm\sqrt{105}}{26}.$$

習　題　LI

原 本 第 331 頁

1. 解: 設 x 爲大數, y 爲小數。

$$\begin{cases} x^3-y^3=218 \quad\cdots\cdots(1) \\ (x-y)^3=8 \quad\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (2) 式，　$x-y=2$ ……………………(3)

(1)÷(3)，　$x^2+xy+y^2=109$ ……………………(4)

以 (3) 代入 (4)，得　$y^2+2y-35=0$

$(y-5)(y+7)=0$

$\therefore\ y=5$ 及 -7,

$x=7$ 及 -5.

2. 解：設 x 爲大數，y 爲小數。

$$\begin{cases}(x+y)^2-xy=63 & \cdots\cdots(1)\\ x^3-y^3=189 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (1) 式，　$x^2+xy+y^2=63$ ……………………(3)

(2)÷(3)，　$x-y=3$　　$x=3+y$

代入 (3) 式，得　$y^2+3y-18=0$

$(y-3)(y+6)=0$

$\therefore\ y=3$ 及 -6,

$x=6$ 及 -3.

3. 解：設 x 爲分子，y 爲分母。

$$\begin{cases}x+y=11 & \cdots\cdots(1)\\ \dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{x+3}{y+4}=\dfrac{2}{3} & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (2) 式，　$3x^2-2y^2+9x-8y=0$ ……………………(3)

從 (1) 式，　$x=11-y$

代入 (3) 式，得　$y^2-83y+462=0$

$(y-6)(y-77)=0$

$\therefore\ y=6$ 或 77,

$x=5$ 或 -66.

答：所求之分數爲 $\dfrac{5}{6}$.

4. 解：設 x, y 及 z 爲所求之三部．

$$\begin{cases}x+y+z=37 & \cdots\cdots(1)\\ x\cdot y\cdot z=1440 & \cdots\cdots(2)\\ xy-3z=12 & \cdots\cdots(3)\end{cases}$$

從 (3) 式，　$xy=12+3z$

代入 (2) 式，得　$3z^2+12z-1440=0$

$$(3z+72)(z-20)=0$$

$$\therefore\quad z=20.$$

$$xy=12+3\cdot 20=72$$

$$x=\frac{72}{y}$$

代入 (1) 式，得　$y^2-17y+72=0$

$$(y-8)(y-9)=0$$

$\therefore\quad y=8$ 及 9,

$x=9$ 及 8.

答：此三部爲 8, 9 及 20.

5. 解：設 x 與 y 爲長方形之邊長。

$$\begin{cases} x^2+y^2=\overline{13}^2 & \cdots\cdots(1) \\ (x+2)(y+2)=38+x\cdot y & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (2) 式，　$x+y=17$　　$y=17-x$

代入 (1) 式，得　$x^2-17x+60=0$

$$(x-5)(x-12)=0$$

$\therefore\quad x=5$ 及 12,

$y=12$ 及 5.

答：其邊長爲 5 呎與 12 呎。

6. 解：設 x, y 爲直角三角形勾與股之長度。

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2+y^2}=36 & \cdots\cdots(1) \\ \frac{1}{2}xy=54 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (2) 式，　$xy=180$　　$y=180/x$

代入 (1) 式，得　$x^2-21x+108=0$

$$(x-12)(x-9)=0$$

$\therefore\quad x=12$ 及 9,

$y=9$ 及 12,

$\sqrt{x^2+y^2}=15$.

答：其三邊之長度爲 9 吋，12 吋及 15 吋。

7. 解：設 $x, x-3, x-24$ 爲弦及垂直二邊之長度。

$$(x-3)^2+(x-24)^2=x^2$$

$$x^2-54x+585=0$$

$(x-39)(x-15)=0$

$\therefore\ x=39$ 吋或 15 吋(不合理),

$x-3\ =36$ 吋

$x-24=15$ 吋.

答: 其三邊之長度爲 39 吋, 36 吋及 15 吋.

8. 解: 設 x, y 與 z 爲所求之長,寬,高

$$\begin{cases} x\cdot y=224 & \cdots\cdots(1) \\ y\cdot z=144 & \cdots\cdots(2) \\ z\cdot x=126 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

(1)×(3)÷(2), $\dfrac{xy\cdot zx}{yz}=\dfrac{224\times 126}{144}$

$x^2=\overline{14}^2$

$\therefore\ x=14$ 呎.

代入 (1) 及 (3) 式,得 $y=16$ 呎,

$z=9$ 呎.

答: 此室之長,寬,高爲 14 呎, 16 呎及 9 呎.

9. 解: 設 x, y 爲長方形之長及寬.

$$\begin{cases} x\cdot y=168 & \cdots\cdots(1) \\ (x+10)(y+10)=360+168 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (2) 式; $xy+10x+10y-428=0$ ⋯⋯(3)

從 (1) 式, $y=\dfrac{168}{x}$

代入 (3) 式,得 $x^2-26x+168=0$

$(x-14)(x-12)=0$

$\therefore\ x=14$ 及 12

$y=12$ 及 14.

答: 長方形之長及寬爲 14 吋及 12 吋.

10. 解: 設 x, y 各爲二人購煤一噸之價.

$$\begin{cases} \dfrac{135}{x}=\dfrac{135}{y}+3 & \cdots\cdots(1) \\ 5y=4x+7 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (2) 式, $y=\dfrac{4x+7}{5}$

代入 (1) 式，得　$4x^2+52x-315=0$

$$(2x-9)(2x+35)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{9}{2}=4.5\ 元,$$

$$y=5\ 元。$$

答：A 購煤每噸 4.5 元；B, 5 元。

11. 解：設 x 爲本金，y 爲利率。

$$\begin{cases} x(1+y)=1248 & \cdots\cdots(1) \\ (x+100)\left(1+y\times\frac{3}{2}\times 2\right)=1456 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從 (1) 式，　$x=\dfrac{1248}{1+y}$

代入 (2) 式，得下列方程式：

$$300y^2+2688y-108=0$$

$$(100y-4)(3y+27)=0$$

$$\therefore\quad y=4\%,$$

$$x=\frac{1248}{1+\frac{4}{100}}=\frac{124800}{104}=1200\ 元。$$

答：本金爲 1200 元，利率爲 4%.

12. 解：設 x 爲其子數，則 $7-x$ 爲其孫數。

$$\frac{20000}{x}-\frac{40000}{7-x}=2000$$

$$x^2-37x+70=0$$

$$(x-2)(x-35)=0$$

$$\therefore\quad x=2\ 人(子數),$$

$$7-x=5\ 人(孫數),$$

$$\frac{20000}{x}=10000\ 元(子所得),$$

$$\frac{40000}{7-x}=8000\ 元(孫所得).$$

答：其子二人，其孫五人；子每人所得爲 10000 元，孫每人所得爲 8000 元。

13. 解：設 x 爲水流速率，y 爲靜水中划行速率.

$$\begin{cases}\dfrac{15}{y-x}-\dfrac{15}{y+x}=5 \cdots\cdots(1)\\ \dfrac{15}{2y-x}-\dfrac{15}{2y+x}=1 \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (1) 式, $x^2+6x-y^2=0 \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式, $x^2+30x-4y^2=0 \cdots\cdots(4)$

$5(3)-(4)$, $4x^2=y^2$

代入 (3) 式,得 $3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$\therefore$ $x=2$ 哩/時,

$y=\sqrt{4x^2}=4$ 哩/時。

答: 水流速率每小時 2 哩,靜水中划行速率每小時 4 哩。

14. 解: 設 x, y, z 各爲 A, B, C 單獨爲之所須之時間。

$$\begin{cases}1\div\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=1\dfrac{1}{3} \cdots\cdots(1)\\ z=2x \cdots\cdots(2)\\ z=2+y \cdots\cdots(3)\end{cases}$$

從 (2), (3) 式, $y=2x-2 \cdots\cdots(4)$

將 (2), (4) 代入 (1) 式,得 $3x^2-11x+6=0$

$(3x-2)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=3$ 小時,

$y=2x-2=4$ 小時,

$z=2x=6$ 小時。

答: A 單獨爲之須 3 小時; B, 4 小時; C, 6 小時。

15. 解: 設 x 與 y 各爲 A 與 B 之速率。

$$\begin{cases}\dfrac{20}{y}-\dfrac{20}{x}=2 \cdots\cdots(1)\\ \dfrac{20}{x-y}=60 \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (1) 式, $10x-10y=xy$

$x=\dfrac{10y}{10-y}$

代入 (1) 式,得 $3y^2+y-10=0$

$(3y-2)(y+2)=0$

$$\therefore \quad y=\frac{5}{3} \text{ 呎或} = 20 \text{ 吋},$$

$$x = 2 \text{ 呎或} = 24 \text{ 吋}.$$

答: A 之速率爲每秒 24 吋; B, 每秒 20 吋。

16. 解: 設 x 與 y 各爲 A 與 B 之速率。

$$\begin{cases}(28-2x)^2+(9-2y)^2=\overline{13}^2 & \cdots\cdots(1)\\ (28-3x)^2+(9-3y)^2=5^2 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

從 (1) 式, $x^2+y^2-28x-9y+174=0 \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式, $3x^2+3y^2-56x-18y+280=0 \cdots\cdots(4)$

$3\times(3)-(4)$, $28x+9y-242=0$

$$y=\frac{242-28x}{9}$$

代入 (3) 式,得 $865x^2-13552x+53056=0$

$$(865x-6632)(x-8)=0$$

$$\therefore \quad x=8 \text{ 吋/秒 或 } \frac{6632}{865} \text{ 吋/秒},$$

$$y=2 \text{ 吋/秒 或 } \frac{23634}{7785} \text{ 吋/秒}.$$

答: A 之速率每秒 8 吋; B, 每秒 2 吋。

17. 解: 設 x 爲距離, y 爲 B 之速率。

$$\frac{x}{y}-\frac{x}{4\frac{1}{2}}=2 \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x}{y-1}-\frac{x}{y}=3 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式, $9x-2xy=18y \cdots\cdots(3)$

從 (2) 式, $3y^2-3y-x=0$

$$x=3y^2-3y$$

代入 (3) 式,得 $2y^2-11y+15=0$

$$(2y-5)(y-3)=0$$

$$y=3 \text{ 哩/時或 } \frac{5}{2} \text{ 哩/時}$$

$$\therefore \quad x=18 \text{ 哩 或 } \frac{45}{4} \text{ 哩}.$$

答：其距離爲 18 哩或 $\frac{45}{4}$ 哩。

18. 解：設二人相遇時 B 行 x 哩，A 行 $x+12$ 哩，故 P, Q 間之距離爲 $2x+12$.

$$\frac{\frac{x+12}{x}}{4\frac{2}{3}}=\frac{\frac{x}{x+12}}{7\frac{5}{7}}$$

$$\frac{14(x+12)}{3x}=\frac{54x}{6(x+12)}$$

$$\frac{7(x+12)}{3x}=\frac{27x}{7(x+12)}$$

$$[7(x+12)]^2=(9x)^2$$

$$7(x+12)=9x$$

$$2x=84$$

$$\therefore\quad 2x+12=96 \text{ 哩。}$$

答：P, Q 間之距離爲 96 哩.

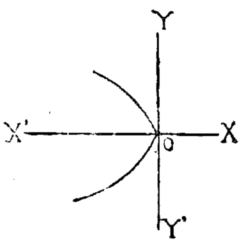
習　題　LII

原本第 339 頁

1. 解：$y^2=-8x$

$$y=\pm2\sqrt{-2x}$$

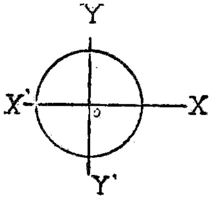
x	$0,$	$-1,$	$-2,$	-3
y	$0,$	$\pm2\sqrt{2},$	$\pm4,$	$\pm2\sqrt{6}$



2. 解：$x^2+y^2=9$

$$y=\pm\sqrt{(3-x)(3+x)}$$

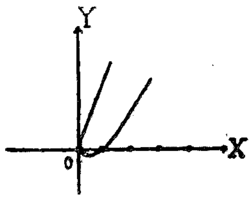
x	-3,	-2,	-1,	0	1,	2,	3
y	0,	$\pm\sqrt{5}$,	$\pm2\sqrt{2}$,	±3,	$\pm2\sqrt{2}$,	$\pm\sqrt{5}$,	0



3. 解：$(y-x)^2=x$

$$y=x\pm\sqrt{x}$$

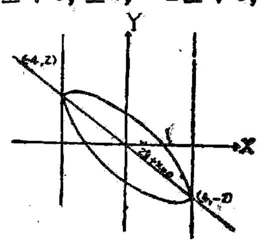
x	0;	1;	2;	3;	4
y	0;	1 ± 1;	$2\pm\sqrt{2}$;	$3\pm\sqrt{3}$;	4 ± 2



4. 解：$x^2+2xy+2y^2=8$

$$y=\frac{-x\pm\sqrt{16-x^2}}{2}$$

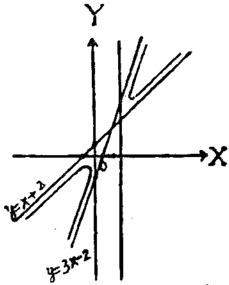
x	-4,	-2,	0,	2,	4
y	2,	$1\pm\sqrt{3}$,	±2,	$-1\pm\sqrt{3}$,	-2



5. 解: $y^2-4xy+3x^2+4x=0$

$$y=2x\pm\sqrt{x(x-4)}$$

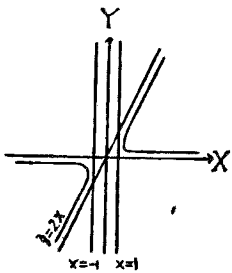
x	-3;	-2;	-1;	0;	4;	5
y	$-6\pm\sqrt{21}$;	$-4\pm\sqrt{12}$;	$2\pm\sqrt{5}$;	0;	8;	$10\pm\sqrt{5}$



6. 解: $y^2-2xy+1=0$

$$y=x\pm\sqrt{x^2-1}$$

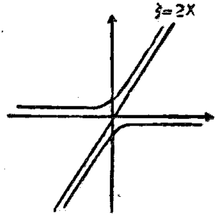
x	-1,	$-2,\cdots$;	1,	$2\cdots$
y	-1,	$-2\pm\sqrt{3},\cdots$;	1,	$2\pm\sqrt{3}\cdots$



7. 解: $y^2-2xy-1=0$

$$y=x\pm\sqrt{x^2+1}$$

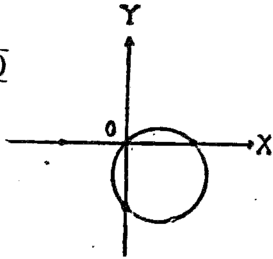
x	0,	1,	2,	-1
y	±1,	$1\pm\sqrt{2}$,	$2\pm\sqrt{5}$,	$-1\pm\sqrt{2}$



8. 解： $2x^2+3y^2-4x+6y=0$

$$y=\frac{-3\pm\sqrt{3(3+4x-2x^2)}}{3}$$

x	0;	1;	2
y	0, −2;	$\frac{-3\pm\sqrt{15}}{3}$;	0, −2



9. 解： $y^2-x^2-3x+y-2=0$

$(y+x+2)(y-x-1)=0$

故此方程式為二直線：

$y+x+2=0$……………(1)

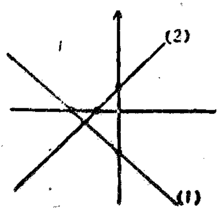
$y-x-1=0$……………(2)

(1)

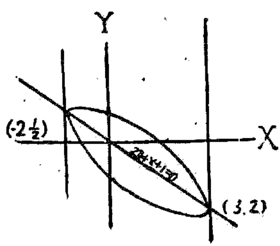
x	0,	1,	−1
y	−2,	−3,	−1

(2)

x	0,	1,	−1
y	1,	2,	0



10. 解： $2x^2+4xy+4y^2+x+4y-5=0$



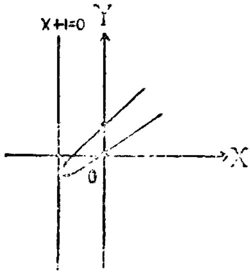
$$y=\frac{-(x+1)\pm\sqrt{(3-x)(2+x)}}{2}$$

x	$0,$	$1,$	$2,$	$3,$	$-1,$	$-$[illegible]
y	$\frac{-1\pm\sqrt{6}}{2},$	$\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2},$	$\frac{-3\pm4}{2},$	$-2,$	$\pm1,$	$\frac{1}{2}$

11. 解：$4x^2-12xy+9y^2+3x-6y=0$

$$y=\frac{(2x+1)\pm\sqrt{x+1}}{3}$$

x	$0;$	$1;$	$2;$	$3;$	-1
y	0, $\frac{2}{3},$	$\frac{3\pm\sqrt{2}}{3},$	$\frac{5\pm\sqrt{3}}{3},$	3, $\frac{5}{3},$	$-\frac{1}{3}$



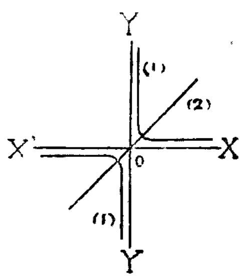
12. 解：$\begin{cases} xy=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 3x-5y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

(1)

x	$1, 2, 3, -1, -2, -3$
y	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

(2)

x	$0,$	$1,$	$2,$	$-1,$	-2
y	$-\frac{2}{5},$	$\frac{1}{5},$	$\frac{4}{5},$	$-1,$	$-\frac{8}{5}$

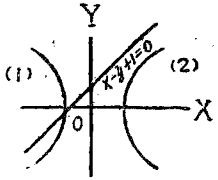


答：其交點爲 $\left(\frac{5}{3}, \frac{3}{5}\right)$ 及 $(-1, -1)$.

13. 解: $\begin{cases} x^2-y^2=1 \quad\cdots\cdots(1) \\ x^2-xy+x=0 \quad\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1)

x	±1,	±2,	±3
y	0,	$\pm\sqrt{3}$,	$\pm2\sqrt{3}$



(2) $x(x-y+1)=0$

故 (2) 式爲二直線:

$x=0 \quad\cdots\cdots(3)$

$x-y+1=0 \quad\cdots\cdots(4)$

x	0,	1,	2,	-1,	-2
y	1,	2,	3,	0,	-1

答: 其交點爲 $(-1, 0)$.

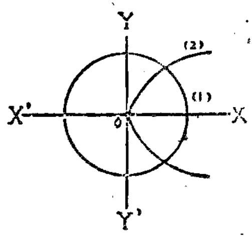
14. 解: $\begin{cases} x^2+y^2=3 \quad\cdots\cdots(1) \\ y^2=2x \quad\cdots\cdots(1) \end{cases}$

(1)

x	$\pm\sqrt{3}$,	$\pm\sqrt{2}$,	0,	±1
y	0,	±1,	$\pm\sqrt{3}$,	$\pm\sqrt{2}$

(2)

x	0,	1,	2,	3,	4
y	0,	$\pm\sqrt{2}$,	±2,	$\pm\sqrt{6}$,	$\pm2\sqrt{2}$



答: 其交點爲 $(1, \sqrt{2})$, $(1, -\sqrt{2})$.

15. 解: $\begin{cases} y^2-xy-2x^2-2x-2y-2=0 \quad\cdots\cdots(1) \\ y^2-xy-2x^2+2=0 \quad\cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式, $(y+x)(y-2x-2)-2=0 \quad\cdots\cdots(3)$

故其漸近線爲 $y+x=0$ 及 $y-2x-2=0$.

從 (3) 式, $y=\dfrac{(x+2)\pm\sqrt{3(3x^2+4x+4)}}{2}$.

x	-2;	-1;	0;	1
y	$\pm 2\sqrt{6}$;	$\frac{-1}{2}$;	$1\pm\sqrt{3}$;	$\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}$

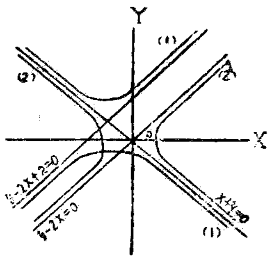
從 (2) 式，　$(y+x)(y-2x)+2=0$ ……………………………(4)

故其漸近線爲

$$y+x=0 \quad 及 \quad y-2x=0.$$

從 (4) 式，　$y=\dfrac{x\pm\sqrt{9x^2-8}}{2}$.

x	-2	-1;	0;	1
y	$-1\pm\sqrt{7}$;	$\frac{0}{-1}$;	虛數;	$\frac{1}{0}$



答：其交點爲 $(-1,\ -1)$.

16. 解：$\begin{cases}(x-2y)(x+y)+x-3y=0 & \cdots\cdots(1)\\ (x-2y)(x-y)+2x-6y=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

從 (1) 式，　$2y^2+(x+3)y-(x^2+x)=0$

$$\therefore\quad y=\frac{-(x+3)\pm\sqrt{9x^2+14x+9}}{4}.$$

x	0;	1;	2;	-1;	-2;	-3;	-4
y	$\begin{matrix}0\\-\frac{3}{2}\end{matrix}$,	$-1\pm\sqrt{2}$;	$\frac{-5\pm\sqrt{73}}{4}$,	$\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}$;	$\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$;	$\pm\sqrt{3}$;	$\frac{1\pm\sqrt{97}}{4}$

故其漸近線爲 $6y-3x+1=0$ 與 $y+3x+4=0$

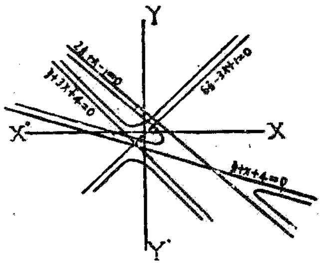
從 (2) 式，　$2y^2-(3x+6)y+(x^2+2x)=0$

$$\therefore \quad y=\frac{(3x+6)\pm\sqrt{x^2+20x+36}}{4}$$

$$=\frac{(3x+6)\pm\sqrt{(x+2)(x+18)}}{4}$$

x	$0;$	$1;$	$2;$	-1
y	$3,\ 0;$	$\frac{9\pm\sqrt{51}}{4};$	$3\pm\sqrt{5};$	$\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$

x	$-2;$	$-3;$	$-18;$	19
y	$0,\ 3;$	虛數;	$-12;$	$\frac{-51\pm\sqrt{17}}{4}$

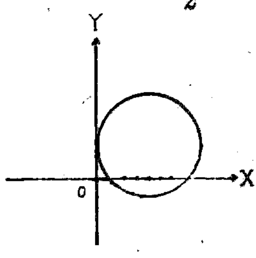


故其漸近線爲 $2y+x-1=0$ 與 $y+x+4=0$.

答: 其交點爲 $(0,0)$; $\left(-\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

17. 解: $x^2+y^2-6x-2y+1=0$

x	$0,$	$1,$	$2,$	$3,$	$2\pm2\sqrt{2}$
y	$1,$	$1\pm\sqrt{5},$	$1\pm\sqrt{8},$	$-\frac{4}{2},$	0



以 $x=0$ 代入原方程式中，得 y 軸之交點 $(0, 1)$.
以 $y=0$ 代入原方程式中，得 x 軸之交點 $(3\pm\sqrt{8}, 0)$.

18. 解：$(x-y)^2-2(x+y)+1=0$
以 $x=0$ 代入原方程式中，得 $y=1$；以 $y=0$ 代入原方程式中，得 $x=1$，故知此圖形與 x, y 軸相交。

19. 解：將 $y=3x+5$ 代入 $16x^2+y^2-16=0$ 中，得

$$25x^2+30x+9=0$$

$$(5x+3)^2=0 \quad \therefore \quad x=-\frac{3}{5}.$$

代入 $y=3x+5$，得 $y=\frac{16}{5}.$

答：此圖形與直線相切於 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{16}{5}\right)$ 點。

20. 解：將 $y=mx+3$ 代入 $x^2+2y^2=6$ 式中，得

$$x^2+2(mx+3)^2=6$$
$$x^2(1+2m^2)+12mx+12=0$$

若 $B^2-4AC=0$ 時，則此直線與該圖形相切，即

$$144m^2-4\cdot 12(1+2m^2)=0$$
$$m^2=1 \quad \therefore \quad m=\pm 1.$$

答：當 $m=\pm 1$ 時，則 $y=mx+3$ 與 $x^2+2y^2=6$ 相切。

21. 解：$\begin{cases} 7x-4y+c=0 \cdots\cdots\cdots (1) \\ 3x^2-y^2+x=0 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

從 (1) 式，$y=\frac{7x+c}{4}$

代入 (2) 式，得 $x^2+14cx-16x+c^2=0$

$$B^2-4AC=(14c-16)^2-4c^2=0$$
$$3c^2-7c+4=0$$
$$(3c-4)(c-1)=0$$
$$\therefore \quad c=\frac{4}{3} \text{ 及 } 1.$$

22. 解：設 $y=mx+b$ 為 $xy-2y^2+y+6=0$ 之漸近線，將 y 之值代入此方程式中，得

$$(m-2m^2)x^2+(b-4bm+m)x+(2b^2+b+6)=0$$

若 x^2 及 x 之係數為零時，則可求得其漸近線之方程式。

$$m(1-2m)=0 \qquad \therefore \quad m=0 \text{ 及 } \frac{1}{2}.$$

$$b-4bm+m=0 \quad \therefore \quad b=0 \text{ 及 } \frac{1}{2}.$$

將 m 及 b 之值代入 $y=mx+b$ 式中,得

$$y=0 \text{ 及 } x-2y+1=0$$

答: $y=0$ 及 $x-2y+1=0$ 爲 $xy-2y^2+y+6=0$ 之漸近線。

23. 解: 設 $y=mx+b$ 爲其漸近線,代入 $2x^2+3xy-2y^2+x+2y+2=0$ 式中,得

$$(2+3m-2m^2)x^2+(3b-4mb+1+2m)x+(2b-7b^2+2)=0$$

$$2+3m-2m^2=0 \qquad \therefore \quad m=2 \text{ 及 } -\frac{1}{2}.$$

$$3b-4mb+1+2m=0 \quad \therefore \quad b=1 \text{ 及 } 0.$$

將 m 及 b 之值代入 $y=mx+b$ 式中,得

$$y=2x+1 \text{ 及 } x+2y=0$$

即所求之漸近線方程。

24. 解: $x^2+\lambda xy+y^2-x=0$

$a=1,\ 2h=\lambda,\ b=1$

當其爲橢圓時, $h^2-ab<0$

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2-1<0$$

$$\frac{1}{4}\lambda^2<1$$

$$\lambda^2<4$$

$$|\lambda|<2$$

故當 $|\lambda|<2$ 時,此方程式之圖形爲一橢圓。

當其爲拋物線時, $h^2-ab=0$

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2-1=0$$

$$\frac{1}{4}\lambda^2=1$$

$$\lambda^2=4$$

$$|\lambda|=2$$

故當 $\lambda=2$ 時，此方程式之圖形表一拋物線。

當其爲雙曲線時，$h^2-ab>0$

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2-1>0$$

$$\frac{1}{4}\lambda^2>1$$

$$\lambda^2>4$$

$$|\lambda|>2$$

故當 $|\lambda|>2$ 時，此方程式之圖形表一雙曲線。

XVII. 不等式

習題 LIII

原本第 341 頁

1. 求證：$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$

$(a-b)^2>0$

$a^2-2ab+b^2>0$

$a^2+b^2>2ab$

$\therefore\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.$

2. 求證：$(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2$

$(a-b)^2>0$

$a^2+b^2>2ab$

$ab(a^2+b^2)>2a^2b^2$

$a^3b+ab^3>2a^2b^2$

$a^4+a^3b+ab^3+b^4>a^4+2a^2b^2+b^4$

$\therefore\quad (a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2$

3. 求證：$a^3+b^3>a^2b+ab^2$

$(a+b)(a-b)^2>0$

$a^3+b^3-a^2b-ab^2>0$

$\therefore\quad a^3+b^3>a^2b+ab^2.$

4. 求證：　$a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c>6abc$

$(a-b)^2>0$

$a^2+b^2>2ab$

$a^2c+b^2c>2abc$

同理　$b^2a+c^2a>2abc$

$c^2a+c^2b>2abc$

$\therefore\quad a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c>6abc.$

5. 求證：　$a^3+b^3+c^3>3abc$

$a^3+b^3>a^2b+ab^2$　　（從第 3 題）

$b^3+c^3>b^2c+bc^2$

$c^3+a^3>c^2a+ca^2$

$2(a^3+b^3+c^3)>a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$

但　$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2>6abc$

$2(a^3+b^3+c^3)>6abc$

$\therefore\quad a^3+b^3+c^3>3abc$

6. 解：$x+7>\frac{3x}{2}-8$

$2x+14>3x-16$

$x-30>0$

$\therefore\quad x>30.$

7. 解：$2x^2+4x>x^2+6x+8$

$x^2-2x-8>0$

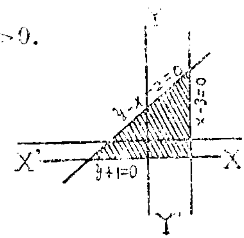
$(x-4)(x+2)>0$

$\therefore\quad x>4$ 或 $x<-2.$

8. 解：$(x+1)(x-3)(x-6)>0$

左邊三因式之值全爲正式,保有二因式之值爲負，此不等式能滿足，故得 $-1<x<3$ 或 $x>6.$

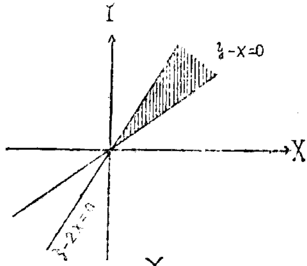
9. 解：$y-x-2<0,\ x-3<0$ 及 $y+1>0.$



適合不等式 $y-x-2<0$ 之各點位於直線 $y-x-2=0$ 之下；適合不等式 $x-3<0$ 之各點位於直線 $x-3=0$ 之左；適合不等式 $y+1>0$ 之各點位於直線 $y+1=0$ 之上.故適合三不等式之各點，其圖形位於 $y-x$

$-2=0$, $x-3=0$, $y+1=0$ 三線所成之三角形間.

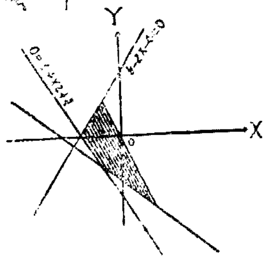
10. 解: $y-x>0$, $y-2x<0$.



不等式 $y-x>0$ 之圖形位在直線 $y-x=0$ 之上, $y-2x<0$ 之圖形位在直線 $y-2x=0$ 之下. 故適合兩不等式之各點, 其圖形位在第一象限內 $y-x=0$ 及 $y-2x=0$ 二直線之間.

11. 解: $x+y+3>0$, $y-2x-4<0$,

$y+2x+4>0$.



適合不等式 $x+y+3>0$, $y-2x-4<0$ 及 $y+2x+4>0$ 之各對 x, y 值, 其圖形位於直線 $x+y+3=0$ 之上, $y-2x-4=0$ 之下及 $y+2x+4=0$ 之上, 卽圖中繪平行線之部份.

12. 證明 x 爲任何值時, $x^2+2x+5>0$ 皆正確不誤.

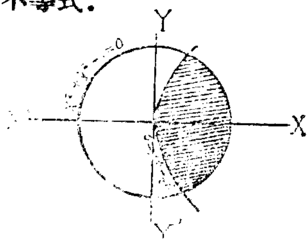
$$x^2+2x+5>0$$

$$x^2+2x+1+4>0$$

$$\therefore\quad (x+1)^2+4>0.$$

答: 無論 x 爲何值, 均能適合此不等式.

13. 解: $x^2+y^2-1<0$, $y^2-4x<0$.



不等式 $x^2+y^2<1$ 之圖形爲圓 $x^2+y^2=1$ 之內部又不等式 $y^2<4x$ 之圖形爲拋物線 $y^2=4x$ 之右面部份故適合二不等式之解爲圓及拋物線間之部份塗以黑線.

XVIII. 一次不定方程式

習　題　LIV

原本第 346 頁

1. 解: $6x-17y=18$

$$x=3+2y+\frac{5}{6}y$$

若 x 均爲整數,則 $\frac{5}{6}y$ 必爲整數。

設　$\frac{5}{6}y=u$, 卽 $5y-6u=0$

$$y=u+\frac{u}{5}$$

同理　$\frac{u}{5}$ 必爲整數,命其爲 v, 故

$\frac{u}{5}=v$, 卽 $u=5v$

當 $v=1$ 時,　$u=5$,

$y=6$, $x=20$.

答: 其普通整數解爲 $x=20+17t$, $y=6+6t$; t 爲 $-1, 0, 1, 2, \cdots\cdots$ 時, x 及 y 之値皆爲正整數解。

2. 解: $43x-12y=158$

$$y=-13+3x+\frac{-2+7x}{12}$$

設　$\frac{-2+7x}{12}=u$　$7x-12u-2=0$

$$x=u+\frac{2+5u}{7}$$

當 $u=1$ 時,　$x=2$,　$y=-6$.

答: 其普通整數解爲 $x=2-12t$, $y=-6-43t$; t 爲 $-1, -2, \cdots\cdots$ 時, x, y 之値皆爲正整數解。

3. 解: $16x+39y=1$

$$x=-2y+\frac{1-7y}{16}$$

設　$\frac{1-7y}{16}=u$　$16u+7y=1$

$$y=-2u+\frac{1-2u}{7}$$

當 $u=-3$ 時,　$y=7$, $x=-17$.

答：其普通整數解爲 $x=-17+39t,\ y=7-16t$，無正整數解。

4. 解：$72x+23y=845$

$$y=36-3x+\frac{17-3x}{23}$$

設 $\frac{17-3x}{23}=u \quad 3x+23u=17$

$$x=5-7u+\frac{2-2u}{3}$$

當 $u=1$ 時，$x=-2 \quad y=43.$

答：其普通整數解爲 $x=-2+23t,\ y=43-72t$，無正整數解。

5. 解：$49x-27y=28$

$$y=x-1+\frac{22x-1}{27}$$

設 $\frac{22x-1}{27}=u \quad 22x-27u=1$

$$x=u+\frac{5u+1}{22}$$

設 $\frac{5u+1}{22}=v \quad 22v-5u=1$

$$u=\frac{22v-1}{5}=4v+\frac{2v-1}{5}$$

當 $v=3$ 時，$u=13,\ x=16,\ y=28.$

答：其普通整數解爲 $x=16-27t,\ y=28-49t$，t 爲 $0, -1, -2\cdots\cdots$ 時，x, y 之值爲正整數解。

6. 解：$47x-97y=501$

$$x=10+2y+\frac{31+3y}{47}$$

設 $$31+3y=47u$$

$$y=15u-10+\frac{2u-1}{3}$$

當 $u=2$ 時，$y=21,\ x=54.$

答：其普通整數解爲 $x=54-97t,\ y=21-47t$，t 爲 $0, -1, -2\cdots\cdots$ 時，x, y 之值爲正整數解。

7. 解: $\begin{cases} 2x+5y-8z=27 & \cdots\cdots(1) \\ 3x+2y+z=11 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$8\times(2)+(1)$, $26x+21y=115$

$$y=5-x+\frac{10-5x}{21}$$

設 $$\frac{10-5x}{21}=u$$

$$x=2-4u-\frac{u}{5}$$

當 $u=0$ 時, $x=2,\ y=3.$

故 $x=2+21t,\ y=3-26t.$

將 x, y 之值代入 (2) 式,得 $z=-11t-1$

答: 其普通整數解為 $x=2+21t,\ y=3-26t,\ z=-1-11t$, 無正整數解.

8. 解: $\begin{cases} 5x+2y=42 & \cdots\cdots(1) \\ 3y-7z=2 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$

$3\times(1)-2\times(2)$, $15x+14z=122$

$$z=-x+8+\frac{10-x}{14}$$

$$\therefore\ x=10+14t,\ z=-2-15t$$

代入 (2) 式,得 $y=-4-35t.$

答: 其普通整數解為 $x=10+14t,\ y=-4-35t,\ z=-2-15t.$ 無正整數解.

9. 解: $4x+3y=2z+3$

$$z=2x+y-1+\frac{y-1}{2}$$

$$y-1+2u$$

$$\therefore\ y=1+2u,$$

$$z=2x+3u,$$

$$x=x.$$

答: 其普通整數解為 $x=x,\ y=2u+1,\ z=2x+3u$, 當 x, u 為正值時, x, y, z 之值皆為正整數解.

10. 解: $2x+3y+4z=17$

$$x=8-y-2z-\frac{y-1}{2} \quad\cdots\cdots(1)$$

$$y-1=2u$$

$$y=1+2u\cdots\cdots(2)$$

將 (2) 代入 (1) 式,得 $x=7-3u-2z\cdots\cdots(3)$

再設 $z=v$ 代入 (3) 式,得

$$x=7-3u-2v$$

故其普通整數解爲 $x=7-3u-2v,\ y=1+2u,\ z=v.$

當 $u=0,\quad v=0;\quad x=7,\quad y=1,\quad z=0.$

$u=0,\quad v=1;\quad x=5,\quad y=1,\quad z=1.$

$u=0,\quad v=2;\quad x=3,\quad y=1,\quad z=2.$

$u=0,\quad v=3;\quad x=1,\quad y=1,\quad z=3.$

$u=1,\quad v=0;\quad x=4,\quad y=3,\quad z=0.$

$u=2,\quad v=0;\quad x=1,\quad y=5,\quad z=0.$

$u=1,\quad v=1;\quad x=2,\quad y=3,\quad z=1.$

$u=1,\quad v=2;\quad x=0,\quad y=3,\quad z=2.$

答: 其正整數解爲 7, 1, 0; 5, 1, 1; 3, 1, 2; 1, 1, 3; 4, 3, 0; 1, 5, 0; 2, 3, 1; 0, 3, 2.

11. 解: $3x+7y=1043$

$$x=347-2y+\frac{2-y}{3}$$

$$2-y=3u$$

$$\therefore\quad y=2-3u,$$

$$x=343+7u.$$

當 $u=0,\ -1,\ -2,\cdots\cdots-49$ 時, $x,\ y$ 之值爲正整數。

答: 此方程式有 50 正解。

12. 解: 設 x 與 y 爲二正分式之分子。

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=\frac{41}{35},\ \text{即}\ 7x+5y=41$$

$$\therefore\quad y=8-x+\frac{1-2x}{5},$$

$$x=-2u+\frac{1-u}{2}.$$

當 $u=-1$ 時, $x=3,\quad y=4.$

故其普通整數解爲 $x=3+5t,\ y=4-7t$, 當 t 爲 0 時,其正整數解爲 $x=3,\ y=4$.

答: $\frac{41}{35}=\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$.

13. 解: 設 x 與 y 各爲牛與羊之頭數。

$$7x+6y=110$$

$$y=18-x+\frac{2-x}{6}$$

$$2-x=6u$$

$$x=2-6u$$

當 $u=0$ 時, $x=2,\quad y=16$.

故其普通整數解爲 $x=2+6t,\ y=16-7t$, 當 t 爲 0, 1, 2 時, x, y 之値爲正整數解,即 $x, y=2, 16;\ 8, 9;\ 14, 2$。

答: 此人購牛 2 頭,羊 16 頭;或牛 8 頭,羊 9 頭;或牛 14 頭,羊 2 頭。

14. 解: 設 x, y 與 z 爲所求之三部。

$$\begin{cases} x+y+z=23 & \cdots\cdots(1) \\ 3x+2y+5z=79 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$5\times(1)-(2)$, $\quad 2x+3y=36$

$$x=18-y-\frac{y}{2}$$

設 $y=2u$ 時, $\quad x=18-3u$

代入 (1) 式,得 $\quad z=5+u$

當 u 爲 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 時,則 x, y, z 之値爲正整數解。

答: 所求之三部爲 18, 0, 5; 15, 2, 6; 12, 4, 7; 9, 6, 8; 6, 8, 9; 3, 10, 10; 及 0, 12, 11.

15. 解: 設 x, y, z 爲此最小數値被 5, 7, 9 所除得之各商.

$$5x+4=7y+6=9z+8$$

$$5x-7y=2 \cdots\cdots(1)$$

$$5x-9z=4 \cdots\cdots(2)$$

$(2)-(1)$, $\quad 7y-9z=2$

$$y=z+\frac{2z+2}{7}$$

$$z=3u-1+\frac{u}{2}$$

當 $u=2$ 時，　　$z=6,\quad y=8.$

故其普通整數解爲 $y=8-9t,\ z=6-7t.$

代入 (1) 式，得　　$5x+63t=58$

$$x=11-12t+\frac{3-3t}{5}$$

$$t=1-u-\frac{2u}{3}$$

$$u=v+\frac{v}{2}$$

當 $v=2$ 時，　$u=3,\quad t=-4.$

$$\therefore\quad x=62,\ y=44,\ z=34.$$

答：所求之數爲 $62\times5+4=314.$

16. 解：設二桿之長爲 l, 從零端至其等份最近之處，一爲 x 等份，一爲 y 等份。故其距離一爲 $\frac{x}{250}l$, 一爲 $\frac{y}{253}l$, 是以此部份間之距離爲 $\left(\frac{x}{250}-\frac{y}{253}\right)l$ 即 $\frac{253x-250y}{250\cdot253}l$. 因分子不能爲零，故此分數於 $253x-250y=\pm1$ 時最小：$253x-250y=\pm1$ 之普通整數解爲 $x=167-250t,\ y=169-253t.$

答：所求之値爲 $x=167,\ y=169$, 卽一桿之 167 份與另一桿之 169 份相處最近。

XIX. 比及比例　變數法

習　題　LV

原本第 350 頁

1. 解：(a) $15:24=20:b$

$$\therefore\quad b=\frac{24\times20}{15}=32.$$

(b) $15:24=24:c$

$\therefore \quad c=\frac{24\times24}{15}=\frac{192}{5}.$

(c) $5a^3b^2 : x = x : 20ab^2$

$x^2=20ab^2\times5a^3b^2=100a^4b^4$

$\therefore \quad x=\pm10a^2b^2.$

(d) $\sqrt{12} : x = x : \sqrt{75}$

$x^2=30$

$\therefore \quad x=\pm\sqrt{30}.$

2. 解: $3x-2y=x-5y$

$2x=-3y$

$\therefore \quad x : y = -3 : 2,$

$x+y : x-y=(-3+2) : (-3-2)=1 : 5.$

3. 解: $2x^2-5xy-3y^2=0$

$(x-3y)(2x+y)=0$

$x=3y$ 及 $2x=-y$

$\therefore \quad x : y = 3 : 1$ 及 $-1 : 2,$

$y : x = 1 : 3$ 及 $2 : -1.$

4. 解: $ax+by=-cz$ ……………………(1)

$a'x+b'y=-c'z$ ……………………(2)

$c'\times(1)-c\times(2)$, $c'ax+bc'y=ca'x+b'cy$

$(bc'-b'c)y=(ca'-c'a)x$

$x : y = bc'-b'c : ca'-c'a.$

同理　$x : z = bc'-b'c : ab'-a'b.$

$\therefore \quad x : y : z = bc'-b'c : ca'-c'a : ab'-a'b.$

5. 解: $a : b = c : d$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=r$

$a=br,\ c=dr$ ……………………(1)

即　$b=\frac{a}{r},\ d=\frac{c}{r}$ ……………………(2)

將 (1) 代入 $ab+cd$, 得 $ab+cd=b^2r+d^2r=(b^2+d^2)r$

將 (2) 代入 $ab+cd$, 得 $ab+cd=a\left(\frac{a}{r}\right)+c\left(\frac{c}{r}\right)=\frac{a^2+c^2}{r}$

$$\therefore\quad (ab+cd)^2=(b^2+d^2)(a^2+c^2)$$

即 $$a^2+c^2 : ab+cd = ab+cd : b^2+c^2.$$

答: $ab+cd$ 爲 a^2+c^2 與 b^2+d^2 之比例中項.

6. 解: $(a^2+b^2)cd=(c^2+d^2)ab$

$$\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{c^2+d^2}{2cd}$$

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}=\frac{c^2+d^2+2cd}{c^2+d^2-2cd}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

$$\therefore\quad a:b=c:d.$$

7. 解: $$a:b=c:d$$

$$a+b:b=c+d:d$$

$$\sqrt{a+b}:\sqrt{b}=\sqrt{c+d}:\sqrt{d}$$

又 $$\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{c}:\sqrt{d}$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}:\sqrt{b}=\sqrt{c}+\sqrt{d}:\sqrt{d}$$

$$\therefore\quad \sqrt{a}+\sqrt{b}:\sqrt{a+b}=\sqrt{c}+\sqrt{d}:\sqrt{c+d}.$$

8. 解: $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=r$$

$$x=ar,\ y=br,\ z=cr$$

按 § 987, $$r=\frac{x+y+z}{a+b+c}$$

$$\therefore\quad \frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=\frac{a^3r^3}{a^3}+\frac{b^3r^3}{b^3}+\frac{c^3r^3}{c^3}$$

$$=3r^3=3\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}.$$

9. 解: 設 $$\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}\neq\frac{a_3}{b_3}\neq\cdots\cdots$$

且 $\frac{a_r}{b_r}$ = 最大值, $\frac{a_s}{b_s}$ = 最小值.

$$\frac{l_1a_1}{l_1b_1}<\frac{l_1a_r}{l_1b_r},\quad l_1a_1<\frac{a_r}{b_r}l_1b_1;$$

$$\frac{l_2a_2}{l_2b_2}<\frac{l_2a_r}{l_2b_r},\quad l_2a_2<\frac{a_r}{b_r}l_2b_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

相加　$l_1a_1+l_2a_2+\cdots\cdots<\frac{a_r}{b_r}(l_1b_1+l_2b_2+\cdots\cdots)$

$\therefore\quad l_1a_1+l_2a_2+\cdots\cdots:l_1b_1+l_2b_2+\cdots\cdots<a_r:b_r.$

同理　$\frac{l_1a_1}{l_1b_1}>\frac{l_1a_s}{l_1b_s},\ l_1a_1>\frac{a_s}{b_s}l_1b_1;$

$\frac{l_2a_2}{l_2b_2}>\frac{l_2a_s}{l_2b_s},\ l_2a_2>\frac{a_s}{b_s}l_2b_2;$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

相加　$l_1a_1+l_2a_2+\cdots\cdots>\frac{a_s}{b_s}(l_1b_1+l_2b_2+\cdots\cdots)$

$\therefore\quad l_1a_1+l_2a_2+\cdots\cdots:l_1b_1+l_2b_2+\cdots\cdots>a_s:b_s.$

答：$l_1a_1+l_2a_2+\cdots\cdots l_na_n:l_1b_1+l_2b_2+\cdots\cdots+l_nb_n$ 介於 $a_s:b_s$ 及 $a_r:b_r$ 之間。

10. 解：已知　$\frac{a-b}{k}=\frac{b-c}{l}=\frac{c-a}{m}$

分子分母各相加，得

$$\frac{a-b}{k}=\frac{b-c}{l}=\frac{c-a}{m}=\frac{0}{k+l+m}$$

$\therefore\quad k+l+m=0.$

11. 解：已知　$\frac{x}{mz-ny}=\frac{y}{nx-lz}=\frac{z}{ly-mx}$

$$\frac{x^2}{(mz-ny)x}=\frac{y^2}{(nx-lz)y}=\frac{z^2}{(ly-mx)z}=\frac{x^2+y^2+z^2}{0}$$

$\therefore\quad x^2+y^2+z^2=0.$

12. 解：$a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$

$$\frac{l_1a_1^n}{l_1b_1^n}=\frac{l_2a_2^n}{l_2b_2^n}=\frac{l_3a_3^n}{l_3b_3^n}=\frac{l_1a_1^n+l_2a_2^n+l_3a_3^n}{l_1b_1^n+l_2b_2^n+l_3b_3^n}$$

$$\therefore\quad \frac{(l_1a_1^n+l_2a_2^n+l_3a_3^n)^{\frac{1}{n}}}{(l_1b_1^n+l_2b_2^n+l_3b_3^n)^{\frac{1}{n}}}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

13. 解：(1)　$\frac{x^2+ax-a}{x^2-ax+a}=\frac{2x^2+a}{2x^2-a}$

按 §686,3,　$2x^2:2a(x-1)=4x^2:2a$

故　　$x^2[2a(x-1)-a]=0$

$\therefore\quad x=0,\ 0,\ \frac{3}{2}.$

(2) $$\frac{2x^3-3x^2+2x+2}{2x^3-3x^2-2x-2}=\frac{3x^3-x^2+10x-26}{3x^3-x^2-10x+26}$$

按 § 686,3, $4x^3-6x^2:4x+4=6x^3-2x^2:20x-52$

故 $x^2[(2x-3)(5x-13)-(x+1)(3x-1)]=0$

$x^2(7x^2-43x+40)=0$

$x^2(x-5)(7x-8)=0$

$\therefore\quad x=0,\ 0,\ 5,\ \frac{8}{7}.$

14. 解: 設此三份爲 $2x,\ 3x,\ 5x.$

$$2x+3x+5x=520$$

$$x=52$$

$$\therefore\quad 2x=104,$$

$$3x=156,$$

$$5x=260.$$

答: 所求之三份爲 104, 156, 260.

15. 解: 設 x 與 y 爲自 A 與 B 桶中所取出之酒量。

$$\frac{3}{8}x+\frac{3}{10}y=6 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{5}{8}x+\frac{7}{10}y=12 \quad\cdots\cdots(2)$$

(1)×5, $$\frac{15}{8}x+\frac{15}{10}y=30 \quad\cdots\cdots(3)$$

(2)×3, $$\frac{15}{8}x+\frac{21}{10}y=36 \quad\cdots\cdots(4)$$

(4)−(3), $$\left[\frac{21}{10}-\frac{15}{10}\right]y=6$$

$\therefore\quad y=10$ 加侖.

代入 (1) 式,得 $x=8$ 加侖.

答: 須自 A 桶中取出 8 加侖, B 桶中取出 10 加侖.

習題 LVI

原本第 353 頁

1. 解: 設 y 與 x 成正變, $x=5$ 時, $y=-2$.

$$y=cx$$
$$-2=c\cdot 5$$
$$c=-\frac{2}{5}$$
$$\therefore\ y=-\frac{2}{5}x$$
$$=-\frac{2}{5}\times 7=-\frac{14}{5}.$$

2. 解: 設 y 與 x^2 成反變, $x=2$ 時, $y=1$.

$$y=\frac{c}{x^2}$$
$$1=\frac{c}{4}$$
$$c=4\ \text{及}\ y=\frac{4}{x^2}$$
$$3=\frac{4}{x^2}$$
$$x^2=\frac{4}{3}$$
$$\therefore\ x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

3. 解: 設 y 爲一常數與另一項之和,此項與 x^2 成正變. 又當 $x=1$ 時, $y=1$; $x=2$ 時, $y=0$.

$$y=b+ax^2 \cdots\cdots(1)$$
$$1=b+a \cdots\cdots(2)$$
及
$$0=b+4a \cdots\cdots(3)$$

從 (2) 及 (3), 得 $b=\frac{4}{3},\ a=-\frac{1}{3}.$

代入 (1) 式,得 $y=\frac{4}{3}-\frac{x^2}{3}.$

答: 所求之方程式爲 $x^2+3y-4=0$.

4. 解: 設 y 與 x^2 成正變,與 z^3 成反變;又 $x=-1$, $z=2$ 時, $y=1$.

$$y=c\cdot\frac{x^2}{z^3}$$

$$1=c\cdot\frac{1}{8}$$

$$c=8,\ y=8\cdot\frac{x^2}{z^3}$$

當 $x=3,\ z=-1;\quad y=8\cdot 9/-1=-72.$

5. 解：設 y 與 x 成正變。

$$y=cx$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2+c^2x^2}{cx^2}=\frac{1+c^2}{c}$$

因 $\frac{1+c^2}{c}$ 爲常數，故 $x^2+y^2\sim xy$.

6. 解：設 y 之平方與 z 之立方成正變，又 z 與 x 成反變。

$$y^2=cz^3 \qquad z=\frac{c'}{x}$$

$$y=\sqrt{cz^3}\quad \sqrt{x^3}=\sqrt{\left(\frac{c'}{z}\right)^3}$$

$$yx\cdot\sqrt{x}=\sqrt{c\cdot c'^3}$$

$$\therefore\quad xy\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$$

7. 解：設 z 示工資之元數，y 示人數，x 示週數；則

$$z=c\cdot xy$$

$$108=c\cdot 3\cdot 4$$

$$c=9$$

$$z=9xy$$

$$135=9\cdot 5\cdot x$$

$$\therefore\quad x=3.$$

答：須作工 3 星期。

8. 解：設 V 爲圓盤之體積，r 爲其半徑，h 爲其厚度。

$$V=c\cdot hr^2$$

$$V_1=c\cdot 3\cdot 24^2=1728c$$

$$V_2=c\cdot 2\cdot 36^2=2592c$$

$$1728c+2592c=c\cdot h\cdot 48^2$$

即　$4320=2304h$

$$\therefore \quad h=\frac{15}{8}.$$

答：其厚度爲 $\frac{15}{8}$.

9. 解：設 R 及 r 爲底與斷面之半徑，x 爲所求之高度；則

$$x:a=r:R \quad\cdots\cdots(1)$$

又　$$\pi r^2=\frac{1}{2}\pi R^2 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$r=\frac{\sqrt{2}}{2}R \quad\cdots\cdots(3)$$

代入 (1) 式，　$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

又如　$$\frac{1}{3}\pi xr^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\pi aR^2$$

則　$$\frac{r^2}{R^2}=\frac{a}{2x} \quad\cdots\cdots(4)$$

將 (1) 平方，得　$$\frac{r^2}{R^2}=\frac{x^2}{a^2} \quad\cdots\cdots(5)$$

從 (4) 及 (5)，　$$2x^3=a^3$$

$$\therefore \quad x=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}a.$$

答：斷面面積爲底之半時距其頂端爲 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$，若將此圓錐體分爲二等份時，則其高度爲 $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}a$.

XX. 等差級數

習　題　LVII

原本第 356 頁

1. 解：(1)　3, 6, 9……

$a=3,\quad d=3,\quad n=20$

$\therefore\quad l=a+(n-1)d=3+19\cdot 3=60,$

$S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{20}{2}(3+60)=630.$

(2) $-3,\ -1\frac{1}{2},\ 0\cdots\cdots$

$a=-3,\quad d=\frac{3}{2},\quad n=20$

$\therefore\quad l=-3+(20-1)\times\frac{3}{2}=25\frac{1}{2},$

$S=\frac{20}{2}\left(-3+\frac{51}{2}\right)=5\times 45=225.$

2. **解**：(1) $1,\ 2,\ 3\cdots\cdots$

$S=\frac{n}{2}[1+\{1+(n-1)\cdot 1\}]=\frac{n}{2}(n+1).$

(2) $1,\ 3,\ 5,\cdots\cdots$

$S=\frac{n}{2}[1+\{1+(n-1)\cdot 2\}]=\frac{n}{2}\cdot 2n=n^2.$

(3) $2,\ 4,\ 6\cdots\cdots$

$S=\frac{n}{2}[2+\{2+(n-1)\cdot 2\}]=n(n+1).$

3. **解**：$r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots$時，

$6r+1=1,\ 7,\ 13,\ 19\cdots\cdots$

$S=\frac{n}{2}[1+\{1+(n-1)6\}]$

$=n[1+(n-1)3]$

$=n(3n-2).$

4. **解**：$a+4d=1,\quad a+7d=2$

$a=-\frac{1}{3},\quad d=\frac{1}{3}$

$\therefore\quad l=-\frac{1}{3}+9\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{3}.$

答：所求之等差級數爲 $-\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2,\ \frac{7}{3},\ \frac{8}{3}$

5. **解**：$a=-1,\ l=2,\ n=5+2=7$

$2=-1+6d \quad \therefore \quad d=\frac{1}{2}.$

答：所求之等差中項爲 $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}.$

6. 解：設 $n=16$, $a=0$, $d=\frac{4}{3}$.

$$\therefore \quad l=0+(16-1)\frac{4}{3}=15\times\frac{4}{3}=20,$$

$$S=\frac{16}{2}(0+20)=16\cdot 10=160.$$

7. 解：設 $n=7$, $l=-7$, $d=-\frac{5}{3}$.

$$\therefore \quad a=l-(n-1)d=-7-(7-1)\left(-\frac{5}{3}\right)=-7+10=3,$$

$$S=\frac{7}{2}(3-7)=-14.$$

8. 解：設 $n=12$, $a=-\frac{5}{3}$, $l=31\frac{1}{3}$.

$$\therefore \quad d=\frac{l-a}{n-1}=\frac{31\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}{12-1}=\frac{33}{11}=3,$$

$$S=\frac{12}{2}\left(-\frac{5}{3}+\frac{94}{3}\right)=6\times\frac{89}{3}=178.$$

9. 解：設 $a=2$, $l=-23\frac{1}{2}$, $S=-559$.

$$\therefore \quad n=\frac{2S}{a+l}=\frac{-1118}{-\frac{43}{2}}=52,$$

$$d=\frac{l-a}{n-1}=\frac{-\frac{47}{2}-2}{52-1}=-\frac{1}{2}.$$

10. 解：設 $n=7$, $a=\frac{3}{7}$, $S=45$.

$$\therefore \quad l=\frac{2S}{n}-a=\frac{90}{7}-\frac{3}{7}=\frac{87}{7}=12\frac{3}{7},$$

$$d=\frac{\frac{87}{7}-\frac{3}{7}}{6}=\frac{84}{42}=2.$$

11. 解：設 $a=4,\ d=\frac{1}{5},\ l=9\frac{2}{5}$.

$$\therefore\quad n=\frac{l-a+d}{d}=\frac{\frac{47}{5}-\frac{20}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}}=28,$$

$$S=\frac{28}{2}\left(4+\frac{47}{5}\right)=14\times\frac{67}{5}=187\frac{3}{5}.$$

12. 解：設 $n=9,\ a=-4,\ S=135$.

$$a+l=\frac{2S}{n}=\frac{2\times135}{9}=30$$

$$l-a=(n-1)d=-32$$

$$\therefore\quad l=\frac{30-32}{2}=-1,$$

$$a=\frac{30+32}{2}=31.$$

13. 解：設 $n=10,\ l=-2,\ S=115$.

$$\therefore\quad a=\frac{2S}{n}-l=\frac{2\times115}{10}+2=25,$$

$$d=\frac{-2-25}{9}=\frac{-27}{9}=-3.$$

14. 解：設 $d=5,\ l=-47,\ S=-357$.

$$-47=a+(n-1)5=a+5n-5$$

$$a+5n=-42 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$-357=\frac{n}{2}(a-47)$$

$$n(a-47)=-714\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 及 (2) 式， $a=-72,\ n=6$.

15. 解：設 $a=-10,\ d=7\ \ S=20$.

$$l=-10+(n-1)7=7n-17\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$20=\frac{n}{2}(-10+l)=-5n+\frac{n}{2}l \quad \cdots\cdots(2)$$

將 (1) 代入 (2) 式，得　$7n^2-27n-40=0$

$$(n-5)(7n+8)=0$$

$$\therefore\quad n=5,$$

$$l=35-17=18.$$

16. 證：$\because$　$a^2,\ b^2,\ c^2$ 爲等差級數

$$\therefore\quad b^2-a^2=c^2-b^2$$

$$(b-a)(b+a)=(c-b)(c+b)$$

$$\frac{b-a}{b+c}=\frac{c-b}{a+b}$$

$$\frac{b-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c-b}{(a+b)(c+a)}$$

$$\frac{b+c-c-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c+a-a-b}{(a+b)(c+a)}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}.$$

故　$\frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a},\ \frac{1}{a+b}$ 亦爲等差級數.

17. 證：$S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$$\frac{S}{n}=\frac{1}{2}(a+l)=a+\frac{n-1}{2}d$$

若 n 爲奇數時，則 $n-1$ 爲偶數，故 $\frac{S}{n}$ 之商爲整數. 故 n 個連續數之和能以 n 除盡.

18. 解：

$$S_1=a+(a+d)+(a+2d)$$
$$=3a+3d$$
$$S_2=(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)+(a+6d)$$
$$=4a+18d$$
$$3a+3d=\frac{1}{2}[4a+18d]$$
$$=2a+9d$$

$6d=a$

$\therefore\quad d=\frac{a}{6}=\frac{1}{6}.$

答：所求之等差級數爲 $1, 1\frac{1}{6}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{5}{6}, 2, \cdots\cdots.$

19. 解：設三數爲 a, $a+d$ 與 $a-d$.

$a+a+d+a-d=15 \cdots\cdots(1)$

$a^2+(a+d)^2+(a-d)^2=83 \cdots\cdots(2)$

從 (1) 式，$a=5.$

代入 (2) 式，得 $25+25+10d+d^2+25-10d+d^2=83$

$2d^2=8$

$\therefore\quad d=2.$

答：所求之三數爲 3, 5, 7.

20. 解：9 之倍數中含有三位數字者必在於 108 與 999 之間，故 $a=108$, $l=999$, $d=9$.

$999=108+9n-9=9n+99$

$n=111-11=100$

$\therefore\quad S_n=\frac{100}{2}(108+999)=50\times1107=55350.$

21. 解：設 $a=130$, $d=130\cdot\frac{4}{100}$, $n=11$.

$l=130+(11-1)130\frac{4}{100}=182$

$\therefore\quad S=\frac{11}{2}(130+182)=11\times156=\$1716.$

22. 解：設 n 小時後二人相遇.

$4n+\frac{n}{2}\left[2+\left\{2+(n-1)\frac{1}{2}\right\}\right]=72$

$n^2+23n-288=0$

$(n-9)(n+32)=0$

$\therefore\quad n=9$ 小時.

答：二人於 9 小時後相遇，其相遇之點距 A 起行之處爲 $4n$ 卽 36 哩.

XXI. 等比級數

習　題　LVIII

原本第 360 頁

1. 解: $a=2,\ r=-3,\ n=5$

$\therefore\quad l=ar^{n-1}=2(-3)^4=2\times 81=162,$

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{2(1+3^5)}{1+3}=122.$$

2. 解: $a=4,\ r=\frac{3}{2},\ n=4$

$$\therefore\quad l=4\left(\frac{3}{2}\right)^3=4\times\frac{27}{8}=13\frac{1}{2},$$

$$S=\frac{4\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]}{1-\frac{3}{2}}=\frac{4\left[1-\frac{81}{16}\right]}{-\frac{1}{2}}=\frac{65}{2}=32\frac{1}{2}.$$

3. 解: (a)　$12-6+3-\cdots\cdots$

$a=12,\ r=-\frac{1}{2}$

$$\therefore\quad S=\frac{a}{1-r}=\frac{12}{1+\frac{1}{2}}=8.$$

(b)　$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots\cdots$

$a=1,\ r=-\frac{1}{2}$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

(c)　$\frac{5}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots$

$$a=\frac{5}{3},\quad r=\frac{1}{5}$$

$$\therefore\quad S=\frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{25}{12}.$$

4. 解：(a) $0.341341\cdots\cdots$

$$0.341\dot{3}4\dot{1}\cdots=\frac{341}{1000}+\frac{341}{1000000}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad 0.341\dot{3}4\dot{1}\cdots=\frac{0.341}{1-0.0001}=\frac{0.341}{0.9999}=\frac{341}{999}.$$

(b) $0.0567272\cdots\cdots$

$$0.05672\dot{7}\dot{2}=0.056+\frac{72}{100000}+\frac{72}{10000000}+\cdots\cdots$$

$$=0.056+\frac{0.00072}{1-0.01}$$

$$=0.056+\frac{1}{1375}$$

$$=\frac{78}{1375}.$$

(c) $8.45164516\cdots\cdots$

$$8.4516\dot{4}51\dot{6}=8+\left[\frac{4516}{10000}+\frac{4516}{100000000}+\cdots\cdots\right]$$

$$=8+\frac{0.4516}{1-0.0001}$$

$$=8+\frac{4516}{9999}$$

$$=8\frac{4516}{9999}.$$

5. 解：題設 $a=-0.03,\ r=10,\ n=6.$

$$\therefore\quad l=2r^{n-1}=(-0.03)10^5=-3000,$$

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{-0.03(1-10^6)}{1-10}=-3333.33.$$

6. 解：題設 $n=7,\ a=48,\ l=\frac{3}{4}$.

$$\frac{3}{4}=48r^6 \quad \therefore \quad r=\frac{1}{2},$$

$$S=\frac{48\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{381}{4}=95\frac{1}{4}.$$

7. 解：題設 $a=\frac{1}{16},\ r=2,\ l=8$.

$$8=\frac{1}{16}\cdot 2^{n-1} \qquad 128=2^{n-1}$$

$$2^7=2^{n-1} \qquad \therefore \quad n=8,$$

$$S=\frac{\frac{1}{16}[1-2^8]}{1-2}=\frac{255}{16}.$$

8. 解：題設 $n=5,\ r=-3,\ l=81$.

$$81=a(-3)^4=81a$$

$$\therefore \quad a=1,$$

$$S=\frac{1\cdot[1+3^5]}{1+3}=\frac{244}{4}=61.$$

9. 解：題設 $a=54,\ r=\frac{1}{3},\ S=80\frac{2}{3}$.

$$80\frac{2}{3}=\frac{54\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=81\left[1-\frac{1}{3^n}\right]$$

$$242=243-243\cdot\frac{1}{3^n}$$

$$3^n=243=3^5$$

$$\therefore \quad n=5,$$

$$l=54\times\frac{1}{3^4}=\frac{2}{3}.$$

10. 解：題設 $n=4,\ a=-3,\ S=-468$.

$$-468=\frac{-3(1-r^4)}{1-r}=-3(1+r+r^2+r^3)$$

$$r^3+r^2+r-155=0$$

$$(r-5)(r^2+6r+31)=0$$

$\therefore\quad r=5,$

$$l=-3\cdot5^3=-375.$$

11. 解：題設 $a=-\frac{9}{16},\ l=-\frac{16}{9},\ S=-\frac{781}{144}.$

$$S=\frac{a-rl}{1-r}$$

$$-\frac{781}{144}=\frac{-\frac{9}{16}+\frac{16}{9}r}{1-r}=\frac{-81+256r}{144(1-r)}$$

$$525r=700$$

$\therefore\quad r=\frac{4}{3}.$

$$-\frac{16}{9}=-\frac{9}{16}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}=\frac{256}{81}=\left(\frac{4}{3}\right)^4$$

$\therefore\quad n=5.$

12. 解：題設 $n=6,\ r=-\frac{2}{3},\ S=\frac{665}{216}.$

$$\frac{665}{216}=\frac{a\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^6\right]}{1+\frac{2}{3}}=\frac{a\left[1-\frac{64}{729}\right]}{\frac{5}{3}}=\frac{133}{243}a$$

$\therefore\quad a=\frac{45}{8},$

$$l=\frac{45}{8}\left(-\frac{2}{3}\right)^5=-\frac{20}{27}.$$

13. 解：題設 $r=\frac{3}{2},\ l=30\frac{3}{8},\ S=83\frac{1}{8}.$

$$S=\frac{a-rl}{1-r}$$

$$\frac{665}{8}=\frac{a-\frac{3}{2}\cdot\frac{243}{8}}{1-\frac{3}{2}}=\frac{16a-729}{-8}$$

$$-665=16a-729$$

$$\therefore\quad a=4.$$

$$\frac{243}{8}=4\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$n-1=5$$

$$\therefore\quad n=6.$$

14. 解：題設 $n=4,\ l=\frac{54}{25},\ S=\frac{544}{25}.$

$$\frac{54}{25}=ar^{4-1}=ar^3 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{544}{25}=\frac{a(r^4-1)}{r-1} \quad\cdots\cdots(2)$$

從 (2) 式， $$\frac{544}{25}=a(r^3+r^2+r+1)\quad\cdots\cdots(3)$$

(3) ÷ (1)， $$272r^3=27(r^3+r^2+r+1)$$

$$245r^3-27r^2-27r-27=0$$

$$(5r-3)(49r^2+24r+9)=0$$

$$\therefore\quad r=\frac{3}{5}.$$

$$\frac{54}{25}=a\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}a$$

$$\therefore\quad a=10.$$

15. 解：題設 $n=5,\ l=48,\ S=93.$

$$48=ar^{5-1}=ar^4\quad\cdots\cdots(1)$$

$$93=\frac{a(r^5-1)}{r-1}\quad\cdots\cdots(2)$$

從 (2) 式， $$93=a(r^4+r^3+r^2+r+1)\quad\cdots\cdots(3)$$

(3) ÷ (1), $93r^4 = 48(r^4 + r^3 + r^2 + r + 1)$

$31r^4 = 16(r^4 + r^3 + r^2 + r + 1)$

$15r^4 - 16r^3 - 16r^2 - 16r - 16 = 0$

$(r-2)(15r^3 + 14r^2 + 12r + 8) = 0$

$\therefore \quad r = 2.$

代入 (1) 式，得 $a = 3.$

16. 解：$\frac{a^3}{b}$ 與 $\frac{b^3}{a}$.

$$x = \sqrt{\frac{a^3}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b^3}{a}} = \sqrt{a^2b^2} = ab.$$

17. 解：$a = 5,\ l = 405,\ n = 3 + 2 = 5$

$405 = 5r^4 \quad \therefore \quad r = \sqrt[4]{81} = 3.$

答：所求之等比中項爲 15, 45, 135.

18. 解：$ar^3 = 3$ ……(1)

$ar^6 = -\frac{3}{8}$ ……(2)

(2) ÷ (1), $r^3 = -\frac{1}{8} \quad \therefore \quad r = -\frac{1}{2}.$

代入 (1) 式，得 $a \times \frac{1}{4} = 3 \quad \therefore \quad a = 12.$

答：其第七項爲 $12\left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}.$

19. 解：$\begin{cases} a + ar^3 = 133 & \text{……(1)} \\ ar + ar^2 = 70 & \text{……(2)} \end{cases}$

從 (1) 式，$a(1 + r^3) = 133$ ……(3)

從 (2) 式，$ar(1 + r) = 70$ ……(4)

(1) ÷ (2), $\frac{1 - r + r^2}{r} = \frac{133}{70}$

$70r^2 - 203r + 70 = 0$

$(14r - 35)(5r - 2) = 0$

$\therefore \quad r = \frac{5}{2}.$

代入 (3) 式，得 $a = 8.$

答：所求之等比級數爲 8, 20, 50, 125.

20. 解: $\begin{cases} a(1+r+r^2)=7 \quad\cdots\cdots(1) \\ a^2(1+r^2+r^4)=91 \quad\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(2)÷(1), $a(1-r+r^2)=13 \quad\cdots\cdots(3)$

(3)−(1), $ar=-3$

$$r=-\frac{3}{a}$$

代入 (1) 式,得 $a^2-10a+9=0$

$(a-1)(a-9)=0$

$\therefore\ a=1,\ r=-3.$

答: 所求之三數爲 1, −3, 9.

21. 解: $\begin{cases} a+a+d+a-d=36 \quad\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{a+4}{a-d+1}=\dfrac{a+d+43}{a+4} \quad\cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (1) 式, $a=12.$

代入 (2) 式,得 $\dfrac{16}{13-d}=\dfrac{55+d}{16}$

$d^2+42d-459=0$

$\therefore\ d=9$ 或 $-51.$

答: 所求之三數爲 3, 12, 21; 或 63, 12, −39.

22. 解: 設此四數爲 $a,\ a+d,\ a+2d,\ \dfrac{(a+2d)^2}{a+d}.$

$\begin{cases} a+\dfrac{(a+2d)^2}{a+d}=16 \quad\cdots\cdots(1) \\ a+d+a+2d=8 \quad\cdots\cdots(2) \end{cases}$

從 (2) 式, $a=\dfrac{8-3d}{2}$

代入 (1) 式,得 $\dfrac{8-3d}{2}+\dfrac{(a+2d)^2}{a+d}=16$

$4d^2+16d-128=0$

$d^2+4d-32=0$

$(d-4)(d+8)=0$

$\therefore\ d=4$ 及 $-8,$

$a=(8-12)/2=-2.$

答: 所求之數爲 −2, 2, 6, 18.

23. 解: $a=15$ 呎, $r=\frac{2}{3}$, $n=\infty$

$$15,\ 15\left(\frac{2}{3}\right),\ 15\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ 15\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdots\cdots$$

設 S 爲所求之距離,故

$$S=15+2\left[15\left(\frac{2}{3}\right)+15\left(\frac{2}{3}\right)^2+15\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots\right]$$

$$=15+2\cdot15\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots\right]$$

$$=15+30\left[\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right]$$

$$=15+30\times2=75 \text{ 呎。}$$

答: 此球所經過之距離爲 75 呎。

XXII. 調和級數

習題 LIX

原本第 363 頁

1. 解: 此調和級數之相對等差級數爲 $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, 3; 故

$$a=\frac{5}{3},\quad d=\frac{2}{3}.$$

答: 所求之二項爲 $\frac{3}{11}$ 與 $\frac{3}{13}$.

2. 解: 設 x 爲所求之調和中項.

$$x=\frac{2ab}{a+b} \qquad \text{(p. 362, § 707)}$$

$$\therefore\quad x=\frac{2\cdot\frac{3}{4}\cdot5}{\frac{3}{4}+5}=\frac{30}{23}.$$

3. 解：其相對之等差級數中之二項爲 $\frac{1}{10}$ 與 $\frac{1}{15}$；故

$$a=\frac{1}{10},\quad l=\frac{1}{15},\quad n=4+2=6$$

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{10}+5d\quad\therefore\quad d=-\frac{1}{150}.$$

是以 $\frac{1}{10}$ 與 $\frac{1}{15}$ 之間各項爲 $\frac{14}{150},\frac{13}{150},\frac{12}{150},\frac{11}{150}.$

答：所求調和中項爲 $\frac{75}{7},\frac{150}{13},\frac{75}{6},\frac{150}{11}.$

4. 解：設所求之第三項爲 x，則

$$\frac{1}{x}-\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{x}$$

$$\therefore\quad x=2.$$

5. 解：設二數爲 a 與 b.

$$4=\frac{a+b}{2}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{15}{4}=\frac{2ab}{a+b}\quad\cdots\cdots(2)$$

(1)×(2)，$15=ab$　∴　$a=\frac{15}{b}$

代入 (1) 式，得　$b^2-8b+15=0$

$$(b-3)(b-5)=0$$

$$\therefore\quad b=3,\ 5;$$

$$a=5,\ 3$$

答：所求之二數爲 5 與 3.

6. 解：設二數爲 a 與 b.

$$4=\sqrt{ab}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{16}{5}=\frac{2ab}{a+b}\quad\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，　$ab=16\quad\cdots\cdots(3)$

代入 (2) 式，得 $a+b=10$ ……(4)

$a=10-b$

代入 (3) 式，得 $b^2-10b+16=0$

$(b-8)(b-2)=0$

$\therefore\ b=8,\ 2;$

$a=2,\ 8.$

答：所求之二數爲 2 與 8.

7. 證：$\because$ $a,\ b,\ c$ 爲調和級數。

$\therefore$ $\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}$ 爲等差級數。

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$$

$$\frac{a+b+c}{b}-\frac{a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{c}-\frac{a+b+c}{b}$$

$$\frac{a+c}{b}+1-\frac{b+c}{a}-1=\frac{a+b}{c}+1-\frac{a+c}{b}-1$$

$$\frac{a+c}{b}-\frac{b+c}{a}=\frac{a+b}{c}-\frac{a+c}{b}$$

故 $\frac{b+c}{a},\ \frac{c+a}{b},\ \frac{a+b}{c}$ 爲等差級數。

是以 $\frac{a}{b+c},\ \frac{b}{c+a},\ \frac{c}{a+b}$ 爲調和級數。

8. 證：設 $a,\ b,\ c$ 爲該三數。

$$\frac{1}{\frac{b}{2}}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}$$ ……(1)

$$\frac{a-\frac{b}{2}}{a\frac{b}{2}}=\frac{1}{c}$$ ……(2)

$$\frac{a-\frac{b}{2}}{\frac{b}{2}}=\frac{a}{c}\cdots\cdots(3)$$

又 $$\frac{1}{\frac{b}{2}}-\frac{1}{c}=\frac{1}{a}\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{c-\frac{b}{2}}{\frac{b}{2}}=\frac{c}{a}\cdots\cdots(5)$$

(5)×(3), $$\frac{a-\frac{b}{2}}{\frac{b}{2}}=\frac{\frac{b}{2}}{c-\frac{b}{2}}$$

9. 證: 已知 $$x=\frac{2ab}{a+b}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{\frac{2ab}{a+b}-a}+\frac{1}{\frac{2ab}{a+b}-b}$$

$$=\frac{a+b}{ab-a^2}+\frac{a+b}{ab-b^2}$$

$$=\frac{a+b}{a-b}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

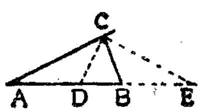
$$=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

10. 證: $\because\quad AC:CB=AD:DB$

及 $AC:CB=AE:EB$

$\therefore\quad AD:DB=AE:EB$

$AD\times EB=DB\times AE$



但 $EB=AE-AB$

$DB=AB-AD$

$\therefore\quad AD(AE-AB)=AE(AB-AD)$

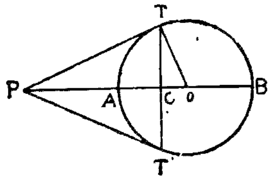
$AD\cdot AE-AD\cdot AB=AE\cdot AB-AE\cdot AD$

$\therefore \quad 2AD\cdot AE = AB(AE+AD)$

$\therefore \quad AB = \dfrac{2AD\cdot AE}{AE+AD}.$

故 $AD,\ AB,\ AE$ 爲調和級數。

11. 證：聯 TO 與 $T'O$.



$\because \quad PC \perp TT'$

$\therefore \quad \overline{PC}^2 = \overline{PT}^2 - \overline{TC}^2$

$= \overline{PT}^2 - (\overline{TO}^2 - \overline{OC}^2)$

$= \overline{PT}^2 - \overline{TO}^2 + \overline{OC}^2$

$\because \quad TO = \dfrac{PB-PA}{2},\ OC = PB - PC - \dfrac{PB-PA}{2}$

$\therefore \quad \overline{PC}^2 = \overline{PT}^2 - \left(\dfrac{PB-PA}{2}\right)^2 + \left(PB - PC - \dfrac{PB-PA}{2}\right)^2$

$= \overline{PT}^2 + PA\cdot PB + \overline{PC}^2 - PC(PA+PB)$

但 $\overline{PT}^2 = PA\cdot PB$

$2PA\cdot PB = PC(PA+PB)$

$\therefore \quad PC = \dfrac{2PA\cdot PB}{PA+PB}.$

故 PC 爲 PA 與 PB 之調和中項。

XXIII. 遞差法，高階等差級數，插入法

習題 LX

原本第 369 頁

1. 解：$a_1 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ d_3 = d_4 = \cdots = 0,\ n = 20$

$$a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2+\cdots$$

$$+\frac{(n-1)\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots r}d_r$$

$$a_{20}=1+19\times 1+\frac{19\times 18}{1\cdot 2}\times 1=191$$

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d_1+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots(r+1)}d_r$$

$$S_{20}=20+\frac{20\times 19}{1\cdot 2}+\frac{20\times 19\times 18}{1\cdot 2\cdot 3}=1350.$$

2. 解: $a_1=3,\ d_1=5,\ d_2=2,\ d_3=d_4=\cdots=0,\ n=80$

$$a_{80}=3+(80-1)5+\frac{(80-1)(80-2)}{1\cdot 2}\cdot 2$$

$$=3+395+6162=6560$$

$$S_{80}=80\times 3+\frac{80\times 79}{2}\cdot 5+\frac{80\times 79\times 78}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2$$

$$=240+15800+164320=180360.$$

3. 解: (1) 3, 0, -1, 0, 3……

-3, -1, 1, 3……

2, 2, 2……

故此等差級數爲二次。

$$a_{18}=3+(18-1)(-3)+\frac{(18-1)(18-2)}{2!}\cdot 2=224.$$

(2) 10, 38, 88, 166, 278, 430……

28, 50, 78, 112, 152……

22, 28, 34, 40……

6, 6, 6……

故此等差級數爲三次。

$$a_{20}=10+(20-1)28+\frac{(20-1)(20-2)}{2!}\cdot 22$$

$$+\frac{(20-1)(20-2)(20-3)}{3!}\cdot 6=10118.$$

(3) 285, 204, 140, 91, 55……

-81, -64, -49, -36……

17, 15, 13……

-2, -2……

故此等差級數爲三次。

$$a_{12}=285+(12-1)(-81)+\frac{(12-1)(12-2)}{2!}\cdot 17$$
$$+\frac{(12-1)(12-2)(12-3)}{3!}(-2)=-1.$$

(4) 2, 20, 90, 272, 650, 1332……

18, 70, 182, 378, 682……

52, 112, 196, 304……

60, 84, 108……

24, 24……

故此等差級數爲四次。

$$a_{10}=2+(10-1)18+\frac{(10-1)(10-2)}{2!}\cdot 52$$
$$+\frac{(10-1)(10-2)(10-3)}{3!}\cdot 60$$
$$+\frac{(10-1)(10-2)(10-3)(10-4)}{4!}\cdot 24=10100.$$

4\. 解：(a) 6, 24, 60, 120, 210……

18, 36, 60, 90……

18, 24, 30……

6, 6……

故此數串爲三次。

$a=6$, $d_1=18$, $d_2=18$, $d_3=6$

$$a_n=6+(n-1)18+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 18+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\cdot 6$$
$$=6+18n-18+9n^2-27n+18+n^3-6n^2+11n-6$$

$$=n^3+3n^2+2n=n(n+1)(n+2)$$

$$S_n=6n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 18+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot 18$$

$$+\frac{6n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{4}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

(b)　16, 108, 384, 1000, 2160, 4116……

92, 276, 616, 1160, 1956……

184, 340, 544, 796……

156, 201, 252……

48, 40……

故此數串爲四次。

$a=16,\ d_1=92,\ d_2=184,\ d_3=156,\ d_4=48$

$$a_n=16+(n-1)92+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 184$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\cdot 156$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\cdot 48$$

$$=2n^4+6n^3+6n^2+2n$$

$$=2n(n+1)^3.$$

5.　解：$S_{14}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3}=560,$

$$a_{14}=1+(14-1)2+\frac{(14-2)(14-1)}{2!}=105.$$

6.　解：$S_{15}-S_6=\frac{15(15+1)(30+1)}{3!}-\frac{6(6+1)(12+1)}{3!}=1149.$

7.　解：$S_{12}=\frac{12(12+1)(3\cdot 5+2\cdot 12-2)}{3!}=962$ 粒。

8.　解：$253=1+(n-1)2+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}=\frac{n^2+n}{2}$

$$n^2+n-506=0$$

$$(n+23)(n-22)=0$$

$\therefore \quad n=22$

$$S_{22}=\frac{22(22+1)(22+2)}{3!}=2024 \text{ 粒。}$$

9. 解：$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3!}=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$.

$$7n+14=8n+4$$

$\therefore \quad n=10$

$$S_{10}=\frac{10(10+1)(10+2)}{3!}=220$$

$$S'_{10}=\frac{10(10+1)(20+1)}{3!}=385.$$

10. 解：$a_1=9,\ d_1=11,\ d_2=2,\ a_n=240$

$$240=9+(n-1)11+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 2$$

$$=9+11n-11+n^2-3n+2$$

$$n^2+8n-240=0$$

$$(n-12)(n+20)=0$$

$\therefore \quad n=12$

$$S_{12}=\frac{12(12+1)(27+24-2)}{3!}=1274.$$

11. 證：$a_1=1,\ d_1=7,\ d_2=12,\ d_3=6$

$$S_n=n+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 7+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 12$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cdot 6$$

$$=\frac{n^2+2n^3+n^4}{4}=\frac{n^2(1+2n+n^2)}{4}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

但 $\quad 1+2+3+\cdots+n=n+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$

故 $\quad 1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$

12. 證：$a_1=1,\ d_1=15,\ d_2=50,\ d_3=60,\ d_4=24.$

$$S_n=n+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 15+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 50$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cdot 60$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cdot 24$$
$$=\frac{n(6n^4+15n^3+10n^2-1)}{30}$$
$$=\frac{n}{30}(2n^2+3n+1)(3n^2+3n-2)$$
$$=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

故　$1^4+2^4+\cdots+n^4=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$

13. **解:** (1)　$\phi(n)=n^2-n+1$

$\phi_1(n)=(n+1)^2-(n+1)+1-(n^2-n+1)=2n$

$\phi_2(n)=2(n+1)-2n=2$

命　$n=1,\quad 2,\quad 3,\quad 4$

$n^2-n+1=1,\quad 3,\quad 7,\quad 13\cdots\cdots$

$2n=2,\quad 4,\quad 6,\quad 8\cdots\cdots$

$2=2,\quad 2,\quad 2,\quad 2\cdots\cdots$

故此級數爲二次。

$a_1=1,\quad d_1=2,\quad d_2=2$

$$S_n=n+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 2$$
$$=\frac{n^3+2n}{3}=\frac{n(n^2+2)}{3}.$$

(2)　$\phi(n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$$\phi_1(n)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$
$$=\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\phi_2(n)=\frac{(n+2)(n+3)}{2}-\frac{(n+1)(n+2)}{2}=n+2$$

$$\phi_3(n)=(n+3)-(n+2)=1$$

命 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35\cdots\cdots$

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21\cdots\cdots$

$n+2=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\cdots\cdots$

$1=1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\cdots\cdots$

故此級數爲三次.

$$a_1=1,\ d_1=3,\ d_2=3,\ d_3=1$$

$$S_n=n+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 3+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.$$

14. 證: 1 3, 6, 10…; 1, 4, 9, 16…; 1, 5, 12, 22…; 示此數串中之第 k 個之 n 項與前 n 項之和爲

$$\frac{n(kn-k+2)}{2} \text{ 與 } \frac{n(n+1)(kn-k+3)}{6}$$

第 k 數串之第二次差之各項皆爲 k,

故其第一次差爲 $1,\ 1+k,\ 1+2k,\ 1+3k,\cdots\cdots$

第 k 數串爲 $1,\ 2+k,\ 3+3k,\ 4+6k,\cdots\cdots$

由此得知 $a_1=1,\ d_1=1+k,\ d_2=k$

$$\therefore\quad a_n=1+(n-1)(1+k)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot k$$

$$=\frac{kn^2-kn+2n}{2}=\frac{n(kn-k+2)}{2},$$

$$S_n=n+\frac{n(n-1)}{2!}(1+k)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot k$$

$$=\frac{n}{6}\{6+3(n-1)(1+k)+(n-1)(n-2)k\}$$

$$=\frac{n}{6}(n+1)(kn-k+3).$$

15. 證：由 § 713, 知一 $(r+s)$ 次之等差級數可以 $x=1, 2, 3\cdots$ 各値代入一 $(r+s)$ 次之多項式，示爲 $f(x)$ 而得；同理一 s 次之等差級數可以 $x=1, 2, 3\cdots$ 各値代入一 s 次之多項式，設爲 $\phi(x)$ 而得.故該 $(r+s)$ 次之等差級數之各項加以上述 s 次等差級數之對應項所組成之等差級數可以 $x=1, 2, 3\cdots$ 各値代入 $f(x)+\phi(x)$ 而得，因 $f(x)+\phi(x)$ 仍爲 $(r+s)$ 次。故按 § 714, $(r+s)$ 次之等差級數與一較低方次，設爲 s 次之等差級數之對應項相加而得之等差級數，其方次仍爲 $(r+s)$ 次。

16. 證：設 x 示一次等差級數之通項，則按 § 713, 得

$$x=c+zd$$

其中 $z=1, 2, 3\cdots\cdots$

$$\therefore\quad f(x)=f(c+zd)\equiv F(z)$$

因 $c+zd$ 爲一次　$\therefore$　$F(z)$ 爲 n 次

因此按 § 714, 以一次等差級數之連續各項代 x 代入 $f(x)$ 中，所得之級數爲 n 次。

又設 x 示 r 次等差級數之通項，則按 § 713, 得

$$x=c_0z^r+\cdots+c_r$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(x)&\equiv a_0x^n+\cdots+a_n\\&=a_0(c_0z^r+\cdots+c_r)^n+\cdots+a_n\\&=a_0c_0z^{rn}+\cdots\cdots\\&\equiv F(z).\end{aligned}$$

因 $F(z)$ 爲 rn 次，故按 § 714, 以 r 次等差級數之連續各項代 x 代入 $f(x)$, 可得一 rn 次之等差級數。

習　　題　　LXI

原本第 374 頁

1. 解：

	$x=$	$-3,$	$-2,$	$-1,$ 0
	$y=$	$-20,$	$6,$	$0,$ 4
第一次差		$26,$	$-6,$	4
第二次差		$-32,$	10	

第三次差　　42

$y=-20+(x+3)26-16(x+2)(x+3)+7(x+1)(x+3)(x+2)$

$=7x^3+26x^2+23x+4$

當 $x=-\frac{5}{2}$ 時，$y=7\left[-\frac{5}{2}\right]^3+26\left[-\frac{5}{2}\right]^2+23\left[-\frac{5}{2}\right]+4$

$=-\frac{3}{8}$

當 $x=-\frac{1}{2}$ 時，$y=7\left[-\frac{1}{2}\right]^3+26\left[-\frac{1}{2}\right]^2+23\left[-\frac{1}{2}\right]+4$

$=-\frac{15}{8}.$

2. 解：設 $f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$ ……(1)

$f(4)=b_0+4b_1+16b_2+64b_3=10$ ……(2)

$f(6)=b_0+6b_1+36b_2+216b_3=-12$ ……(3)

$f(7)=b_0+7b_1+49b_2+343b_3=-20$ ……(4)

$f(8)=b_0+8b_1+64b_2+512b_3=-18$ ……(5)

從 (2), (3), (4) 與 (5) 各式，得

$b_0=-90,\ b_1=73,\ b_2=-16,\ b_3=1$

代入 (1) 式，得 $f(x)=-90+73x-16x^2+x^3$

$f(12)=-90+73\cdot12-16\cdot144+1728=210.$

3. 解：$x_1,\ x_2,\ x_3=25,\ 26,\ 27$

$y_1,\ y_2,\ y_3=625,\ 676,\ 729$

第一次差　　51,　53

第二次差　　2

$$y=625+(26.54-25)\,51+\frac{(26.54-25)(26.54-26)}{2}\cdot2$$

$=625+78.54+0.8316=704.3716.$

4. 解：$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4=2,\ 3,\ 4,\ 5$

$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4=8,\ 27,\ 64,\ 125$

第一次差　　19, 37, 61

第二次差　　18, 24

第三次差　　6

$$y=8+(4.8-2)19+\frac{(4.8-2)(4.8-3)}{2!}\cdot18$$

$$+\frac{(4.8-2)(4.8-3)(4.8-4)}{3!}\cdot 6=110.592.$$

5. 解：$x_1, x_2, x_3, x_4=22,\ 23,\ 24,\ 25$

$y_1, y_2, y_3, y_4=0.04546,\ 0.04348,\ 0.04167,\ 0.04$

第一次差 $-0.00198,\ -0.00181,\ -0.00167$

第二次差 $0.00017,\ 0.00014$

第三次差 -0.00003

$$y=0.04546+(23.6-22)(-0.00198)+\frac{(23.6-22)(23.6-23)}{2!}$$

$$\times(0.00017)+\frac{(23.6-22)(23.6-23)(23.6-24)}{3!}(-0.00003)$$

$$=0.04237552.$$

6. 解：$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5=432,\ 433,\ 434,\ 435,\ 436$

$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5=20.7846,\ 20.8087,\ 20.8327,\ 20.8566,\ 20.8806$

第一次差 $0.0241,\ 0.0240,\ 0.0239,\ 0.0240$

第二次差 $-0.0001,\ -0.0001,\ 0.0001$

第三次差 $0\quad 0.0002$

第四次差 0.0002

$$y=20.7846+(435.7-432)(0.0241)$$

$$+\frac{(435.7-432)(435.7-433)}{2!}(-0.0001)+0$$

$$+\frac{(435.7-432)(435.7-433)(435.7-434)(435.7-435)}{4!}$$

$$\times 0.0002=20.7846+0.0892-0.0005+0.0001$$

$$=20.8734.$$

7. 解：$x_1, x_2, x_3, x_4=-2,\ 0,\ 4,\ 5$

$y_1, y_2, y_3, y_4=-5,\ 3,\ -2,\ -4$

$$y=5\frac{(x-0)(x-4)(x-5)}{(-2-0)(-2-4)(-2-5)}+3\frac{(x+2)(x-4)(x-5)}{(0+2)(0-4)(0-5)}$$

$$-2\frac{(x+2)(x-0)(x-5)}{(4+2)(4-0)(4-5)}-4\frac{(x+2)(x-0)(x-4)}{(5+2)(5-0)(5-4)}$$

$$=-\frac{5x^3-45x^2+100x}{84}+\frac{3x^3-21x^2+6x+120}{40}$$

$$+\frac{2x^3-6x^2-20x}{24}-\frac{4x^3-8x^2-32x}{35}$$

$$=\frac{2520-806x-9x^2-13x^3}{840}.$$

XXIV. 對數

習題 LXII

原本第 378 頁

1. 解: (a) $\log_2 4=x \qquad 2^x=4=2^2 \qquad \therefore \quad x=2.$

(b) $\log_4 2=x \qquad 4^x=2=4^{\frac{1}{2}} \qquad \therefore \quad x=\frac{1}{2}.$

(c) $\log_{\sqrt{2}} 8=x \qquad \sqrt{2}^x=8=\sqrt{2}^6 \qquad \therefore \quad x=6.$

(d) $\log_5 625=x \qquad 5^x=625=5^4 \qquad \therefore \quad x=4.$

(e) $\log_3 729=x \qquad 3^x=729=3^6 \qquad \therefore \quad x=6.$

(f) $\log_{10} 0.001=x \qquad 10^x=0.001=10^{-3} \qquad \therefore \quad x=-3.$

(g) $\log_2 \frac{1}{64}=x \qquad 2^x=\frac{1}{64}=2^{-6} \qquad \therefore \quad x=-6.$

(h) $\log_2 0.125=x \qquad 2^x=0.125=2^{-3} \qquad \therefore \quad x=-3.$

(i) $\log_a \sqrt[3]{a^{-2}}=x \qquad a^x=\sqrt[3]{a^{-2}}=a^{-\frac{2}{3}} \qquad \therefore \quad x=-\frac{2}{3}.$

(j) $\log_8 128=x \qquad 8^x=128=8^{\frac{7}{3}} \qquad \therefore \quad x=\frac{7}{3}.$

(k) $\log_{a^2} a^3=x \qquad a^{2x}=a^3 \qquad \therefore \quad x=\frac{3}{2}.$

2. 解: (a) $\log_{10} 12=\log_{10} 3+2\log_{10} 2=0.4771+0.6020$
$=1.0791.$

(b) $\log_{10}\frac{9}{2}=2\log_{10} 3-\log_{10} 2=0.6532.$

(c) $\log_{10}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log_{10} 2=0.1505.$

(d) $\log_{10}\sqrt[3]{6}=\frac{1}{3}[\log_{10} 2+\log_{10} 3]=0.2594$

3. 解：$\log_a 600^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}\log_a 600=\frac{1}{6}[\log_a 2^3+\log_a 3+\log_a 5^2]$

$$=\frac{1}{6}[3\log_a 2+\log_a 3+2\log_a 5].$$

4. 解：(1)　$b^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{1}{2}}/d^{\frac{4}{5}}$　　(2)　$\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt{b^6}}\div\sqrt{b^3\sqrt{a^{-3}}}$

(1)　$\log_a b^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{1}{2}}-\log_a d^{\frac{4}{5}}=\log_a b^{\frac{2}{3}}+\log_a c^{-\frac{1}{2}}-\log_a d^{\frac{4}{5}}$

$=\frac{2}{3}\log_a b-\frac{1}{2}\log_a c-\frac{4}{5}\log_a d.$

(2)　$\log_a(a^{-2}\sqrt{b^6})^{\frac{1}{3}}-\log_a(b^3\sqrt{a^{-3}})^{\frac{1}{2}}$

$=\log_a(a^{-\frac{2}{3}})(b^6)^{\frac{1}{6}}-\log_a(b^{\frac{3}{2}})(a^{-\frac{3}{4}})$

$=\log_a a^{-\frac{2}{3}}+\log_a b-\log_a b^{\frac{3}{2}}-\log_a a^{-\frac{3}{4}}$

$=-\frac{2}{3}\log_a a+\log_a b-\frac{3}{2}\log_a b+\frac{3}{4}\log_a a$

$=\frac{1}{12}\log_a a-\frac{1}{2}\log_a b=\frac{1}{12}-\frac{1}{2}\log_a b.$

5. 證：$\log_3\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\cdot 9^{-\frac{2}{3}}}}=\frac{31}{18}.$

$\log_3\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\cdot 9^{-\frac{2}{3}}}}=\log_3\left[81\sqrt[4]{729\cdot 9^{-\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{3}}$

$=\log_3[81\cdot 729^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-\frac{2}{12}}]^{\frac{1}{3}}=\log_3[3^4\cdot 3^{\frac{6}{4}}\cdot 3^{-\frac{4}{12}}]^{\frac{1}{3}}$

$=\log_3[3^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{9}}]=\log_3 3^{\frac{31}{18}}=\frac{31}{18}.$

6. 證：$\log_a\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=2\log_a(x+\sqrt{x^2-1}).$

$\log_a\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\log_a\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-x^2+1}$

$=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})^2=2\log_a(x+\sqrt{x^2-1}).$

習　題　LXIII

原本第389頁

1. 解: $79\times470\times0.982$.

$\log(79\times470\times0.982)=\log79+\log470+\log0.982$

$=1.89763+2.67210+\overline{1}.99211=4.56184.$

答: $79\times470\times0.982=36460.$

2. 解: $(-9503)\times(-0.0086578)=9503\times0.0086578.$

$\log(9503\times0.0086578)=\log9503+\log0.0086578$

$=3.97786+\overline{3}.93739=1.91625.$

答: $(-9503)\times(-0.0086578)=82.28.$

3. 解: $1375600\times8799000.$

$\log(1375600\times8799000)=\log1375600+\log8799000$

$=6.13851+6.94443=13.08294.$

答: $1375600\times8799000=1.210\times10^{13}.$

4. 解: $0.0356\times(-0.00049)=-(0.0356\times0.00049).$

$\log(0.0356\times0.00049)=\log0.0356+\log0.00049$

$=\overline{2}.55145+\overline{4}.69020=\overline{5}.24145.$

答: $0.0356\times(-0.00049)=-1.744\times10^{-5}.$

5. 解: $\frac{8075}{364.9}$.

$\log8075+\operatorname{colog}364.9=3.90715+\overline{3}.43791$

$=1.34506.$

答: $\frac{8075}{364.9}=22.13.$

6. 解: $\frac{0.00542}{0.04708}$.

$\log0.00542-\log0.04708=\overline{3}.7340-\overline{2}.67284$

$=\overline{1}.06116.$

答: $\frac{0.00542}{0.04708}=0.1151.$

7. 解: $\frac{24617}{-0.00054}$.

$\log24617+\operatorname{colog}0.00054=4.3912+3.2676$

$=7.6588.$

答：$\dfrac{24617}{-0.00054}=-4.558\times10^7.$

8. 解：$\dfrac{0.643\times7095}{67\times9\times0.462}.$

$\log 0.643+\log 7095+\text{colog } 67+\text{colog } 9+\text{colog } 0.462$
$=1.80821+3.85095+\bar{2}.17393+\bar{1}.04576+0.33536$
$=1.21421.$

答：$\dfrac{0.643\times7095}{67\times9\times0.462}=16.38.$

9. 解：$\dfrac{9097\times5.4086}{-225\times593\times0.8665}.$

$\log 9097+\log 5.4086+\text{colog}225+\text{colog}593+\text{colog}0.8665$
$=3.9589+0.7331+\bar{3}.6478+\bar{3}.2268+0.0622$
$=\bar{1}.6288.$

答：$\dfrac{9097\times5.4086}{-225\times593\times0.8665}=-0.4255.$

10. 解：$(2.388)^5.$

$5\log 2.388=5\times0.37804=1.89020.$

答：$(2.388)^5=77.66$

11. 解：$(0.57)^{-4}.$

$-4\log 0.57=-(4\times\bar{1}.7569)=-(\bar{1}\,0236)$
$=0.9764.$

答：$(0.57)^{-4}=9.472.$

12. 解：$\left(\dfrac{19}{11}\right)^9.$

$9(\log 19+\text{colog } 11)=9(1.2788+\bar{2}.9586)$
$=2.1366.$

答：$\left(\dfrac{19}{11}\right)^9=137.$

13. 解：$(1.014)^{25}.$

$25\log 1.014=25(0.00904)=0.15100.$

答：$(1\,014)^{25}=1.413.$

14. 解：$\sqrt{67.54},$

$$\frac{1}{2}\log 67.54=\frac{1}{2}(1.82956)=0.91478.$$

答: $\sqrt{67.54}=8.218.$

15. 解: $\sqrt[3]{-0.30892}.$

$$\frac{1}{3}\log(-0.30892)=-\frac{1}{3}(\bar{1}.48985)=-(\bar{1}.82995).$$

答: $\sqrt[3]{-0.30892}=-0.6761.$

16. 解: $8^{\frac{5}{4}}.$

$$\frac{5}{4}\log 8=\frac{5}{4}(0.90309)=1.12886.$$

答: $8^{\frac{5}{4}}=13.46.$

17. 解: $(0.001)^{\frac{2}{3}}.$

$$\frac{2}{3}\log 0.001=\frac{2}{3}(\bar{3}.0000)=\bar{2}.0000.$$

答: $(0.001)^{\frac{2}{3}}=0.01.$

18. 解: $\left(29\frac{9}{11}\right)^{\frac{1}{2}}.$

$$\frac{1}{2}\log\frac{328}{11}=\frac{1}{2}(\log 328+\text{colog } 11)$$

$$=\frac{1}{2}(2.51587+\bar{2}.9586)=\frac{1}{2}(1.4745)=0.73725.$$

答: $\left(29\frac{9}{11}\right)^{\frac{1}{2}}=5.461.$

19. 解: $\sqrt{\frac{5}{6}}\times\sqrt[3]{\frac{79}{45}}.$

$$\frac{1}{2}(\log 5+\text{colog } 6)+\frac{1}{3}(\log 79+\text{colog } 45)$$

$$=\frac{1}{2}(0.6990+\bar{1}.2218)+\frac{1}{3}(1.8976+\bar{2}.3468)$$

$$=0.04187.$$

答: $\sqrt{\frac{5}{6}}\times\sqrt[3]{\frac{79}{45}}=1.101.$

20. 解: $\sqrt{0.1}\div(0.009)^{\frac{3}{5}}$.

$$\frac{1}{2}\log 0.1+\frac{3}{5}\text{colog } 0.009=-0.50000+1.22745$$

$=0\ 72745.$

答: $\sqrt{0.1}\div(0.009)^{\frac{3}{5}}=5.34.$

21. 解: $(0.00068)^{-\frac{5}{4}}$.

$$-\frac{5}{4}\log 0.00068=-\frac{5}{4}\times\bar{4}.83251=0.95936.$$

答: $(0.00068)^{-\frac{5}{4}}=9108.$

22. 解: $\left(6\frac{2}{3}\right)^{3.4}$.

$$3.4(\log 20+\text{colog } 3)=4.42350+\bar{2}.377792$$

$=2.80129.$

答: $\left(6\frac{2}{3}\right)^{3.4}=632.8.$

23. 解: $(-9306)^{\frac{3}{7}}=-(9306)^{\frac{3}{7}}$.

$$\frac{3}{7}\log 9306=\frac{3}{7}\times 3.96874=1.70089.$$

答: $(-9306)^{\frac{3}{7}}=-50.22.$

24. 解: $(0.0057)^{2.5}$.

$$2.5\log 0.0057=2.5\times\bar{3}.7659=\bar{6}.389675.$$

答: $(0.0057)^{2.5}=2.453\times 10^{-6}.$

25. 解: $(5648)^{\frac{1}{2}}\times(-0.94)^{\frac{1}{3}}$.

$$\frac{1}{2}\log 5648+\frac{1}{3}\log 0.94=1.87595+\bar{1}.99103$$

$=1.86698.$

答: $(5648)^{\frac{1}{2}}\times(-0.94)^{\frac{1}{3}}=-73.6.$

26. 解: $28927^3\div(0.8)^{\frac{2}{5}}$.

$$3\log 28927+\frac{2}{5}\text{colog } 0.8=13.383915+0.03876$$

$=13.422675.$

答：$28927^3 \div (0.8)^{\frac{2}{3}} = 2.647 \times 10^{13}$.

27. 解：$\dfrac{\sqrt[7]{0.0476} \times \sqrt[5]{222}}{\sqrt[3]{5059 \times 0.0088}}$.

$$\frac{1}{7}\log 0.0476 + \frac{1}{5}\log 222 + \frac{1}{3}(\operatorname{colog} 5059 + \operatorname{colog} 0.0088)$$

$$= \bar{1}.8111 + 0.4693 + \bar{1}.45049 = \bar{1}.73089.$$

答：$\dfrac{\sqrt[7]{0.0476} \times \sqrt[5]{222}}{\sqrt[3]{5059 \times 0.0088}} = 0.5381$.

28. 解：$\dfrac{\sqrt[6]{943 \times 7298}}{\sqrt[5]{0.00006 \times 0.99}}$.

$$\frac{1}{6}(\log 943 + \log 7298) + \frac{1}{5}(\operatorname{colog} 0.00006 + \operatorname{colog} 0.99)$$

$$= \frac{1}{6}(2.9745 + 3.86318) + \frac{1}{5}(4.2218 + 0.0044)$$

$$= 1.13961 + 0.84524 = 1.98485.$$

答：$\dfrac{\sqrt[6]{943 \times 7298}}{\sqrt[5]{0.00006 \times 0.99}} = 96.57$.

29. 解：$\sqrt{\dfrac{854 \times \sqrt[3]{0.042}}{7.9856 \times \sqrt[4]{0.0005}}}$.

$$\frac{1}{2}\log 854 + \frac{1}{6}\log 0.042 + \frac{1}{2}\operatorname{colog} 7.9856 + \frac{1}{8}\operatorname{colog} 0.0005$$

$$= 1.46575 + \bar{1}.770541 + \bar{1}.54884 + 0.41263$$

$$= 1.197761.$$

答：$\sqrt{\dfrac{854 \times \sqrt[3]{0.042}}{7.9856 \times \sqrt[4]{0.0005}}} = 15.77$.

30. 解：$\sqrt[3]{\dfrac{7^{\frac{1}{4}} \times 92^{\frac{1}{5}} \times (0.01)^{\frac{1}{2}}}{(0.00026)^5 \times 5968^{\frac{1}{3}}}}$.

$$\frac{1}{12}\log 7 + \frac{1}{15}\log 92 + \frac{1}{6}\log 0.01 + \frac{5}{3}\operatorname{colog} 0.00026$$

$$+ \frac{1}{9}\operatorname{colog} 3968$$

$=0.07042+0.13099-0.3333+5.9750+\bar{1}.58046$
$=5.42357.$

答: $\sqrt[3]{\dfrac{7^{\frac{1}{4}}\times 92^{\frac{1}{5}}\times(0.01)^{\frac{1}{2}}}{(0.00026)^5\times 5968^{\frac{1}{3}}}}=2.652\times 10^5.$

習 題 LXIV

原本第392頁

1. 解: $\log_5 555=\dfrac{\log 555}{\log 5}=\dfrac{2.7443}{0.6990}=3.92603,$

$$\log_7 0.0463=\frac{\log 0.0463}{\log 7}=\frac{\bar{2}.6656}{0.8451}=-1.578,$$

$$\log_{100} 47=\frac{\log 47}{\log 100}=\frac{1.6721}{2}=0.83605.$$

2. 解: (1) $3^x=729$

$$x=\log_3 729=\frac{\log 729}{\log 3}=\frac{2.8627}{0.4771}=6.$$

(2) $a^{x^2+2}=a^{3x}$

$$x^2-3x+2=0$$
$$(x-1)(x-2)=0$$
$\therefore\quad x=1$ 及 $2.$

(3) $213^x=516^{-x+4}$

$$\log_{213} 516^{-x+4}=x$$
$$(-x+4)\log_{213} 516=x$$
$$\frac{x}{4-x}=\log_{213} 516=\frac{\log 516}{\log 213}=\frac{2.7126}{2.3284}$$
$$10.8504=5.041x$$
$\therefore\quad x=2.152.$

3. 解: (1) $\log x+\log(x+3)=1$

$$\log[x(x+3)]=\log 10$$
$$x^2+3x-10=0$$
$$(x+5)(x-2)=0$$
$\therefore\quad x=-5$ 及 $2.$

(2) $\log x^2+\log x=2$

$$\log x^3=2$$

$$\log x=\frac{2}{3}=0.6666$$

$$\therefore\quad x=4.642.$$

(3) $\log(1-2x)^3-\log(3-x)^3=6$

$$3\log(1-2x)-3\log(3-x)=6$$

$$\log\frac{1-2x}{3-x}=2=\log 100$$

$$\frac{1-2x}{3-x}=100$$

$$1-2x=300-100x$$

$$98x=299$$

$$\therefore\quad x=\frac{299}{98}=3.051.$$

(4) $x^{\log x}=2$

$$(\log x)^2=\log 2=0.3010$$

$$\log x=\sqrt{0.3010}=0.549$$

$$\therefore\quad x=3.537.$$

4. 解：$A=P(1+r)^n=7500\left[1+\frac{5}{100}\right]^{35}$

$\log A=\log 7500+35\log 1.05=4.6171$

$\therefore\quad A=41410.$

答：本利和爲 41410 元。

5. 解：$A=P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}=5500\left[1+\frac{3}{200}\right]^{40}$

$\log A=\log 5500+40\log 1.015=4.004$

$\therefore\quad A=10010.$

答：本利和爲 10010 元。

6. 證：$A=P\left[1+\frac{5}{100}\right]^{15}=P\times 2.079\cdots\cdots$

故知十五年後，本利和多於原數之二倍。

$$A=P\left[1+\frac{5}{100}\right]^{95}=P\times 103.09\cdots\cdots$$

故知九十五年後，本利和多於原數之一百倍。

7　解：$A=P(1+r)^n$

$$1250=P\left(1+\frac{4}{100}\right)^{15}$$

$$\log 1250=\log P+15\log 1.04$$

$$\log P=3.0969-15\times0.0170=2.8419$$

$$\therefore\quad P=694.8.$$

答：本金爲 694.8 元。

8.　解：$A=200[1.035+(1.035)^2+\cdots\cdots+(1.035)^{25}]$

按 § 701，　$A=200\times1.035\times\dfrac{(1.035)^{25}-1}{1.035-1}$

$$=200\times1.035\times1.363\div0.035$$

$$\log A=\log 200+\log 1.035+\log 1.363+\text{colog } 0.035$$

$$=2.30103+0.01494+0.13450+1.45593$$

$$=3.90640.$$

$$\therefore\quad A=8030.$$

答：此人於二十五年後共得總數 8030 元。

9.　解：$P=\dfrac{A}{r}\left[1-\dfrac{1}{(1+r)^n}\right]=\dfrac{1200}{0.04}\left[1-\dfrac{1}{(1.04)^{30}}\right]$

$$=\frac{1200}{0.04}\times\frac{2.236}{3.236}$$

$$=30000\times\frac{2.236}{3.236}=20730\text{ 元。}$$

$$P=\frac{A}{r}=\frac{1200}{0.04}=30000\text{ 元。}$$

10.　解：已知 $b=\sqrt{(c+a)(c-a)}$；$c=586.4,\ a=312.2.$

$$\log b=\frac{1}{2}[\log(c+a)+\log(c-a)]$$

$$=\frac{1}{2}[2.95357+2.43807]=2.69582$$

$$\therefore\quad b=496.4.$$

面積 $A=\frac{1}{2}ab$

$\log A=\log a+\log b+\text{colog } 2$

$=2.49446+2.69582+\bar{1}.6990=4.88928$

$\therefore\quad A=77500.$

11. 解: 已知 $s=(a+b+c)/2,\ A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;

$a=416.8,\ b=424,\ c=25.68.$

$$s=\frac{416.8+424+25.68}{2}=433.24$$

$$\log A=\frac{1}{2}[\log s+\log(s-a)+\log(s-b)+\log(s-c)]$$

$$=\frac{1}{2}[2.63647+1.21588+0.96570+2.610216]$$

$$=3.714268.$$

$\therefore\quad A=5179.$

12. 解: 設 $\pi=3.1416$

$\log S=\log 4+\log\pi+\log r^2$

$=0.6021+0.94715+2.7458$

$=3.84505.$

$\therefore\quad S=6998.$

$\log V=\log 4+\log\pi+\log r^3+\text{colog } 3$

$=0.6021+0.49715+4.1187+\bar{1}.5223$

$=4.74085.$

$\therefore\quad V=55050.$

XXV. 排列及組合

習題 LXV

原本第405頁

1. 解: $C_1^3\cdot C_1^2\cdot C_1^4=3\cdot2\cdot4=24$

2. 解: $P_5^6=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2=720.$

3. 解: $P_3^8=8\cdot7\cdot6=336.$

4\. 解: $C_4^{10}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=210,$

$P_4^{10}=10\cdot9\cdot8\cdot7=5040.$

5\. 解: $C_3^{100}=\frac{100\cdot99\cdot98}{1\cdot2\cdot3}=161700.$

6\. 解: $3C_2^5=3\cdot\frac{5\cdot4}{1\cdot2}=30.$

7\. 解: $N=\frac{7!}{3!2!}=420.$

8\. 解: (1) $C_1^3\cdot C_1^6\cdot7!=70720.$

(2) $9!-8!=322560.$

(3) $P_3^3\cdot P_6^6=3!6!=4320.$

9\. 解: (1) $\frac{P_9^9}{3!}=\frac{9!}{3!}=60480.$

(2) $\frac{P_9^9}{6!}=\frac{9!}{6!}=504.$

(3) $\frac{P_9^9}{3!6!}=\frac{9!}{3!6!}=84.$

10\. 解: $\frac{3!}{2!}P_2^5=\frac{3\cdot2}{2\cdot1}\cdot5\cdot4=60.$

11\. 解: $C_3^6\cdot C_6^9=1680.$

12\. 解: $C_2^3+C_2^3=3+3=6.$

13\. 解: (1) $7+7^2+7^3=7+49+343=399.$

(2) $P_1^7+P_2^7+P_3^7=7+7\cdot6+7\cdot6\cdot5=259.$

14\. 解: 1, 3, 5 三字處於尾端之方法爲 P_1^3 即 3, 故所求之排列爲 $3\cdot P_4^5=360.$

15\. 解: (1) $3\cdot4\cdot P_2^8+2\cdot5\cdot P_2^8=672+560=1232.$

(2) $4\cdot P_2^8=4\cdot56=224.$

16\. 解: $C_1^5+C_2^5+C_3^5+C_4^5+C_5^5=2^5-1=31.$

17\. 解: $3!\cdot C_6^{15}\cdot C_5^9\cdot C_4^4$

$=3!\cdot\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$

$=3!\cdot630630=3783780.$

18. 解：$\frac{11!}{6!5!}=11\cdot 6\cdot 7=462$.

19. 解：2, 2, 2; 3, 3, 3; 4, 4; 1, 5, 6, 7.

(1) 四數碼中有三字相同，其組合爲 $C_1^2\cdot C_1^6$，故共有 $2\times 6\frac{4!}{3!}=48$ 種安排。

(2) 有兩對文字相同，其組合爲 $C_2^3=3$，故共有 $3\frac{4!}{2!2!}=18$ 種安排。

(3) 有二相同文字與二不同文字，其組合爲 $C_1^3\cdot C_2^6$，故共有 $3\cdot C_2^6\frac{4!}{2!}=540$ 種安排。

(4) 有四不同文字，故有 $P_4^7=840$ 種安排。

答：所求數共 $48+18+540+840=1446$.

20. 解：$C_8^{15}\cdot C_7^{12}(8+7)!=6435\times 792\times 15!$
$=5096520\times 15!$

21. 解：$2C_4^{11}+C_3^{11}=660+165=825$.

22. 解：(1) $C_1^6\cdot C_3^5=6\cdot 10=60$.

(2) $C_1^6\cdot C_3^5+C_2^6\cdot C_2^5+C_3^6\cdot C_1^5+C_4^6=60+150+100+15$
$=325$.

23. 解：$C_2^{10}\cdot C_2^{12}=45\cdot 66=2970$.

24. 證：若 n 點中無三點在同一直線者，則所聯之直線數目爲 C_2^n，但有 m 個點位於同一直線上，故須自 C_2^n 減去 C_2^m，又此 m 個點相聯爲一直線，故所作成之直線數目爲 $C_2^n-C_2^m+1$.

25. 解：$\frac{(16-1)!}{2\cdot 5!6!5!}=\frac{15!}{2\cdot 5!6!5!}=63063$.

26. 解：$C_5^{10}(5-1)!(5-1)!=252\cdot 4!4!=145152$.

27. 解：$2\cdot C_2^6\cdot C_2^5=2\cdot 15\cdot 10=300$.

28. 解：(1) $P_1^5\cdot P_1^5\cdot P_1^5\cdots\cdots$ 至第十五項 $=5^{15}$.

(2) $\frac{15!}{3!3!3!3!3!}=\frac{15}{(3!)^5}$.

29. 解：$\frac{5!}{3!2!}4!4!=10\cdot 24\cdot 24=5760$.

30. 解: $C_6^{10}\cdot C_3^5+[C_5^{10}\cdot C_1^3\cdot C_3^5+C_6^{10}\cdot C_2^5\cdot C_1^3]$
$+[C_4^{10}\cdot C_2^3\cdot C_3^5+C_6^{10}\cdot C_1^5\cdot C_2^3+C_5^{10}\cdot C_1^3\cdot C_2^5\cdot C_1^2]$
$+[C_3^{10}\cdot C_3^3\cdot C_3^5+C_6^{10}\cdot C_3^3+C_4^{10}\cdot C_2^3\cdot C_2^5\cdot C_1^1+C_5^{10}\cdot C_1^3\cdot C_1^5\cdot C_2^2]$
$=2100+7560+6300+6300+3150+15120+1200$
$+210+6300+3700=52010.$

31. 解: 按 §763, 六字母之排列爲 $6!$, 一字母佔其特別地位而另一字母不佔其特別地位之排列爲 $2\times 4\times 4!$. 因一特別地位可選二特別字母中之一, 另一特別地位可選其他四字母中之一, 其他四地位爲其餘四字母所佔之排列爲 $4!$ 故也. 又二字母各佔其特別地位之排列爲 $4!$, 故六字母中二字母均不佔其特別地位之排列爲

$$6!-2\times 4\times 4!-4!$$

卽 $$6!-2\times 5!+4!.$$

32. 解: $C_4^{6+4-1}=C_4^9=126.$

33. 解: $C_5^{6+5-1}=C_5^{10}=252.$

34. 解: (1) $P_4^{10}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=5040.$

(2) $P_4^{10}/3!=\dfrac{5040}{6}=840.$

(3) $P_5^{10}/2!2!=\dfrac{5040\times 6}{4}=7560.$

35. 證: $C_n^{n+4-1}=C_3^{n+3}=\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!}.$

XXVI. 多項式定理

習　題　LXVI

原本第 409 頁

1. 解: 在 $(a+b+c+d)^3$ 展開式中之項可分三類, 卽 abc, a^2b 與 a^3, 其係數各爲 $3!$, $\dfrac{3!}{2!}$ 與 $\dfrac{3!}{3!}$. 故收集其同類之各項, 得 $(a+b+c+d)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6\Sigma abc.$

2. 解: 在 $(a+b+c+d)^5$ 展開式中之項可分六類, 卽 a^5, a^4b,

a^3b^2, a^3bc, a^2b^2c, a^2bcd, 其係數各爲 1, $\frac{5!}{4!}$, $\frac{5!}{3!2!}$, $\frac{5!}{3!}$, $\frac{5!}{2!2!}$, $\frac{5!}{2!}$. 故收集其同類各項，得

$$(a+b+c+d)^5=\Sigma a^5+5\Sigma a^4b+10\Sigma a^3b^2+20\Sigma a^3bc$$
$$+30\Sigma a^2b^2c+60\Sigma a^2bcd.$$

3. 解：(1) $\frac{12!}{5!4!2!}=83160.$

(2) $\frac{12!}{4!4!4!}=34650.$

(3) $\frac{12!}{5!5!2!}=16632.$

4. 解：$\frac{10!}{2!3!4!}=12600.$

5. 解：$\frac{8!}{4!3!}\cdot 1^4\cdot 3^3\cdot 2^1=280\cdot 54=15120.$

6. 解：展開式中之通項 $=\frac{10!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!}x^{\beta+2\gamma+3\delta}$ ……………(1)

其中 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=10$ ……………(2)

欲求 x^6 之一項，須設

$\beta+2\gamma+3\delta=6$ ……………(3)

從 (2) 及 (3) 式，得

$\alpha, \beta, \gamma, \delta=7, 1, 1, 1;$
$=8, 0, 0, 2;$
$=7, 0, 3, 0;$
$=4, 6, 0, 0;$
$=6, 3, 0, 1;$
$=6, 2, 2, 0;$
$=5, 4, 1, 0.$

答：可求之係數爲

$$\frac{10!}{7!}+\frac{10!}{8!2!}+\frac{10!}{7!3!}+\frac{10!}{4!6!}+\frac{10!}{6!3!}+\frac{10!}{6!2!2!}+\frac{10!}{5!4!}$$
$$=720+45+120+210+840+1260+1260$$
$$=4455.$$

7. 解：展開式中之通項 $=\frac{9!}{\alpha!\beta!\gamma!}1^{\alpha}(-1)^{\beta}\cdot 3^{\gamma}\cdot x^{\beta+2\gamma}$ ……(1)

其中　$\alpha+\beta+\gamma=9$ ……(2)

欲求 x^7 之一項，須設

$\beta+2\gamma=7$ ……(3)

從 (2) 及 (3) 式，得

$$\alpha\ \beta\ \gamma=2,\ 7,\ 0;$$
$$=3,\ 5,\ 1;$$
$$=4,\ 3,\ 2;$$
$$=5,\ 1,\ 3.$$

答：所求之係數爲

$$-\frac{9!}{2!7!}-\frac{9!}{3!5!}\times 3-\frac{9!}{4!3.2!}\times 3^2-\frac{9!}{5!3!}\times 3^3$$
$$=-36-1512-11340-13608$$
$$=-26496.$$

XXVII. 可　能　率

習　題　LXVII

原本第 414 頁

1. 解：$\because\quad \frac{3}{8}=\frac{a}{m}=\frac{a}{a+b}$

$\therefore\quad a=3,\ b=5.$

答：其偏於失敗之優勝比爲 5 對 3，其不能發生之可能率爲 $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$.

2. 解：A 之勝利可能率爲 $\frac{10}{10+9}=\frac{10}{19}$,

A 之失敗可能率爲 $1-\frac{10}{19}=\frac{9}{19}$.

3. 解：其可能率爲 $\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}$.

答：其希望值爲 $60\times\frac{5}{8}=37.50$ 元。

4. 解：一事件之可能情形祇爲成與敗。然此二情形成敗之方法數絕不相等，卽其一較另一或多或少。故此事件之機會不能爲 $\frac{1}{2}$，而可能率之定義並非無理者。

5. 解：(1) 取得白球之方法有 C_1^7；取得任一球之方法有 C_1^{16}，故取得白球之機會爲 C_1^7/C_1^{16} 卽 $\frac{7}{16}$.

同理，取得黑球之機會爲 C_1^6/C_1^{16} 卽 $\frac{3}{8}$；取得紅球之機會爲 C_1^3/C_1^{16} 卽 $\frac{3}{16}$.

(2) 二球皆爲黑球之機會爲 C_2^6/C_2^{16} 卽 $\frac{1}{8}$.

一球爲白球，另一球爲紅球之機會爲 $C_1^3\cdot C_1^7/C_2^{16}$ 卽 $\frac{7}{40}$.

(3) 全爲紅球之機會爲 C_3^3/C_3^{16} 卽 $\frac{1}{560}$.

三球中無紅球之機會爲 C_3^{13}/C_3^{16} 卽 $\frac{143}{280}$.

三球中白、黑、紅各一之機會爲 $C_1^7\cdot C_1^6\cdot C_1^3/C_3^{16}$ 卽 $\frac{9}{40}$.

(4) 僅一球爲白色，其餘非白色之機會爲 $C_1^7\cdot C_3^9/C_4^{16}$ 卽 $\frac{21}{65}$.

僅二球爲白色，其餘非白色之機會爲 $C_2^7\cdot C_2^9/C_4^{16}$ 卽 $\frac{27}{65}$.

(5)　其機會爲 $C_5^7 \cdot C_3^6 \cdot C_2^3 / C_{10}^{16}$ 即 $\frac{45}{286}$.

6.　解：以二骰子能擲出 36 種情形，其中有 6 種成對，故其機會爲 $\frac{6}{36}$ 即 $\frac{1}{6}$.

以三骰子擲出一對之機會爲 $\left(6\times5\times\frac{3!}{2!}+6\right)\Big/216$ 即 $\frac{4}{9}$.

7.　證：二骰子現 1, 6; 2, 5; 3, 4 皆成七點。

故其機會爲　$\frac{P_2^2+P_2^2+P_2^2}{36}=\frac{1}{6}$.

因任一骰子均可現 1, 2, 3, 4, 5, 6 而合成七點，而其他各點則否，如任一骰子現 6 後即不能合成 6 及 6 以下之點；故七點最易擲得。

8.　解：二骰子全無一點之機會爲 $\frac{5^2}{6^2}=\frac{25}{36}$.

故二骰子至少有一爲一點之機會爲 $1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$.

二骰子均爲一點之機會爲 $\frac{1}{36}$.

故僅有一骰子爲一點之機會爲 $\frac{11}{36}-\frac{1}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

9.　解：兩字皆含六字母，且所含 a, t, r 三字母相同。從兩字中均取 a 之機會爲 $\frac{1}{6^2}$. 因有 3 對相同，故二字中各取一字母，所取字母相同之機會爲 $\frac{3\times1}{36}=\frac{1}{12}$.

10.　解：二張中有一張票數爲偶數，其乘積即爲偶數。因可能情形有 C_2^9, 故乘積爲偶數之機會爲 $(C_2^9-C_2^5)/C_2^9$ 即 $\frac{13}{18}$. 式中 C_2^5 乃乘積爲奇數之方法。

其乘積爲奇數時之機會爲 C_2^5/C_2^9 即 $\frac{5}{18}$.

11. 解: (1) $\dfrac{C_2^6}{C_5^9}=\dfrac{15}{126}=\dfrac{5}{42}$.

(2) $\dfrac{C_1^3\cdot C_4^6}{C_5^9}=\dfrac{45}{126}=\dfrac{5}{14}$.

(3) $\dfrac{C_5^6}{C_5^9}=\dfrac{6}{126}=\dfrac{1}{21}$.

12. 解: (1) $\dfrac{4^4}{C_4^{52}}=\dfrac{256}{270725}$.

(2) $\dfrac{4}{C_4^{52}}=\dfrac{4}{270725}$.

13. 解: 任何一組,如梅花,輪爲將牌的機會爲 $\dfrac{1}{4}$.

52 張中一手拿得預定的一組,如梅花,四張及其餘每組各三張的機會爲 $\dfrac{C_4^{13}\cdot C_3^{13}\cdot C_3^{13}\cdot C_3^{13}}{C_{13}^{52}}$.

故一手拿得四張預定的將牌,如梅花及其餘每組各三張的機會爲

$$\frac{1}{4}\times\frac{C_4^{13}\cdot C_3^{13}\cdot C_3^{13}\cdot C_3^{13}}{C_{13}^{52}}=\frac{10\times 143^4\cdot 13!39!}{52!}.$$

14. 解: 1, 1, 3; 與 1, 2, 2 之情形皆爲五點. 但 1, 1, 3; 與 1, 2, 2 各有 $\dfrac{3!}{2!}$ 卽 3 種方法能被擲出,故其機會爲 $\dfrac{3+3}{216}$ 卽 $\dfrac{1}{36}$.

1, 1, 1; 與 1, 1, 2 之情形皆較五點爲小. 但 1, 1, 2 有 $\dfrac{3!}{2!}$ 卽 3 種方法能被擲出,故其機會爲 $\dfrac{1+3}{216}$ 卽 $\dfrac{1}{54}$.

15. 解: 其機會爲 $\dfrac{2\cdot P_6^6}{(8-1)!}$ 卽 $\dfrac{2}{7}$.

習題 LXVIII

原本第 422 頁

1. 解: (1) $\frac{3}{15}\cdot\frac{7}{15}\cdot\frac{5}{15}=\frac{7}{225}$.

(2) $P_3^3\cdot\frac{7}{225}=\frac{42}{225}=\frac{14}{75}$.

2. 解: $\frac{C_1^3\cdot C_2^{12}}{C_1^{15}\cdot C_2^{14}}=\frac{3}{15}\cdot\frac{15-3}{15-1}\cdot\frac{15-4}{15-2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{11}{13}=\frac{66}{455}$.

3. 解: $\$1\times\frac{C_2^5}{C_2^{12}}+\$2\times\frac{C_2^4}{C_2^{12}}+\$10\times\frac{C_2^3}{C_2^{12}}+\$1.5\times\frac{5.4}{C_2^{12}}$

$+\$5.5\times\frac{5.3}{C_2^{12}}+\$6\times\frac{4.3}{C_2^{12}}=\frac{236.5}{66}=\$3.58.$

4. 解: $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{C_3^7}{C_3^8}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{35}{56}=1-\frac{35}{112}=\frac{77}{112}=\frac{11}{16}$.

答: 開此門之機會爲 $\frac{11}{16}$.

5. 解: (1) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$.

(2) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{4}\right)$

$+\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{3}{4}$

$=\frac{1+2+3}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

(3) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$

$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{3}{4}$

$=\frac{2+6+3}{24}=\frac{11}{24}$.

(4) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

6. 解: 可能情形爲 6×6 卽 36, 擲得七點與十一點之情形共有 8 卽 1,6; 6,1; 2,5; 5,2; 3,4; 4,3; 5,6; 6,5 是也. 故其成功之機會爲 $\frac{8}{36}$ 卽 $\frac{2}{9}$, 是以其偏於優勝比爲 7 對 2.

7. 解: (1) 可能情形爲 $6\cdot6\cdot6=216$, 擲得十點之情形有六種即 1, 3, 6; 1, 4, 5; 2, 2, 6; 2, 3, 5; 2, 4, 4; 3, 3, 4; 但 1, 3, 6; 1, 4, 5; 2, 3, 5 各有 $3!$ 次; 2, 2, 6; 2, 4, 4; 3, 3, 4 各有 $\frac{3!}{2!}$ 次, 共爲 27 次.

答: 擲得十點之機會爲 $\frac{27}{216}$ 即 $\frac{1}{8}$, 而所求之優勝比爲 $7:1$.

(2) 擲得五點或不滿五點之情形有 1, 1, 3; 1, 2, 2; 1, 1, 2; 1, 1, 1. 故擲得不大於五點之機會爲

$$\frac{3\times\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{3!}}{216}=\frac{10}{216}.$$

答: 大於五點之機會爲 $\frac{206}{216}$, 而擲三骰子大於五點之優勝比爲 $206:10$ 即 $103:5$.

8. 解: 和爲十二之情形有 1, 2, 9; 1, 3, 8; 1, 4, 7; 1, 5, 6; 2, 3, 7; 2, 4, 6; 3, 4, 5 七種.

故其和爲十二之機會爲 $7/C^{11}_3=\frac{7}{165}$.

所取三票中, 有一票或三票其票數爲奇數時, 三數之和爲奇數.

答: 所求機會爲 $(6C^5_2+C^6_3)/C^{11}_3$ 即 $\frac{16}{33}$.

9. 解: A 之機會爲 $\frac{6}{36}+\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{6}{36}+\frac{3}{36}\right)\right]=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{13}{24}$,

B 之機會爲 $\frac{3}{36}+\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{6}{36}+\frac{3}{36}\right)\right]=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{11}{24}$.

答: 二人機會之比爲 $13:11$.

10. 解: 1, 5; 5, 1; 2, 4; 4, 2; 3, 3 皆爲六點.

1, 6; 6, 1; 2, 5; 5, 2; 3, 4; 4, 3 皆爲七點.

故第一循環 A 之機會爲 $\frac{5}{36}=\frac{30}{216}$,

B 之機會爲 $\frac{6}{16}\left(1-\frac{5}{36}\right)=\frac{31}{216}$

因各循環 A, B 二人機會之比相同，故二人機會之比爲 30 : 31.

11. 解: (1) 當球不復置入時:

A 第一次之機會爲

$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$,

B 第一次之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{4}{11}=\frac{8}{33}$,

C 第一次之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{28}{165}$;

A 於第二次獲勝之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{56}{495}$,

B 於第二次獲勝之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{7}{99}$,

C 於第二次獲勝之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{99}$;

A 於第三次獲勝之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{99}$,

B 於第三次獲勝之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{495}$,

C 於第三次獲勝之機會爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}=\frac{1}{495}$.

(此袋中僅存白球四枚)

答: A 之總機會爲

$$\frac{1}{3}+\frac{56}{495}+\frac{2}{99}=\frac{231}{495}=\frac{7}{15},$$

B 之總機會爲

$$\frac{8}{33}+\frac{7}{99}+\frac{4}{495}=\frac{159}{495}=\frac{53}{195},$$

C 之總機會爲

$$\frac{28}{165}+\frac{4}{99}+\frac{1}{495}=\frac{105}{495}=\frac{7}{33}.$$

(2)　當球重置入時:

A 在第一循環之機會爲

$$\frac{4}{12}\quad 即\quad \frac{1}{3},$$

B 在第一循環之機會爲

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{12}\quad 即\quad \frac{2}{9},$$

C 在第一循環之機會爲

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{12}\quad 即\quad \frac{4}{27}.$$

因三人在各循環中機會之比相同，故三人機會之比爲 $\frac{1}{3}:\frac{2}{9}:\frac{4}{27}$ 即 $9:6:4$.

答: A 之機會爲 $\frac{9}{19}$, B 之機會爲 $\frac{6}{19}$, C 之機會爲 $\frac{4}{19}$.

12.　解: $\frac{5}{100}\times 100+\frac{10}{100}\times 50+\frac{20}{100}\times 5=11$ 元.

13.　解: 白球自 A 袋中置入 B 袋之機會爲 $C_2^4/C_3^5=\frac{3}{5}$,

白球在 B 袋中不被拿出之機會爲 $C_3^8/C_3^9=\frac{2}{3}$.

故二次拿取後,球仍在 B 袋中之機會爲 $\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$.

答: 白球在 A 袋中之機會爲 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

14. 解：於二袋中之任意一袋，拿一次而得一白球之機會為

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{m}+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{n}=\frac{an+bm}{2mn}$$

將所有之球置於一袋中，拿一次而得一白球之機會為

$$\frac{a+b}{m+n}.$$

答：知此二種之機會不相同。

15. 解：$1-\left[\left(\frac{1}{10}\right)^5+C_4^5\left(\frac{1}{10}\right)^4\left(\frac{9}{10}\right)+C_3^5\left(\frac{1}{10}\right)^3\left(\frac{9}{10}\right)^2\right.$

$$\left.+C_2^5\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^3+C_1^5\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^4\right]=\frac{59049}{100000}.$$

16. 解：$C_5^5\left(\frac{2}{3}\right)^5+C_4^5\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)+C_3^5\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^5+5\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)+10\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$=\frac{192}{243}=\frac{64}{81}.$$

17. 解：$1\times\left(\frac{3}{5}\right)^8+8\left(\frac{3}{5}\right)^7\left(\frac{2}{5}\right)+28\left(\frac{3}{5}\right)^6\left(\frac{2}{5}\right)^2+56\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^3$

$$=\frac{3^5}{5^8}(27+144+336+448)=955\times\frac{3^5}{5^8}$$

$$=\frac{191\times 3^5}{5^7}.$$

18. 解：$1\times\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\times 1+\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\times 1$

$$+\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)\times 1+\cdots\cdots$$

$$=1\times\frac{1}{6}\left[1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\cdots\cdots\right]$$

$$=1\times\frac{1}{6}\left[\frac{1}{1-5/6}\right]=\frac{1}{6}\times 6=1\ \text{元}.$$

19. 解：(1)　$\frac{3}{4}\times C_5^8\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{5103}{32768}.$

(2) $\left(\frac{3}{4}\right)^6+C_5^6\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+C_5^7\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)$

$+C_5^8\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)+C_5^9\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)$

$$=\frac{177147+649539+1082565}{4194304}$$

$$+\frac{721710+336798}{4194304}=\frac{1012581}{1048576}.$$

20. 解：在上列條件下，A 勝該局之比數有 6：4 及 6：5 兩種；如 A 以 6：4 勝，則 A 須連勝四盤，其機會為

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$$

如 A 以 6：5 勝，則後 5 盤內 A 須勝第五盤，且前四盤中 A 須勝任何三盤，其機會為

$$C_3^4\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\frac{3}{4}=\frac{81}{256}$$

∴ A 勝該局之機會為

$$\frac{81}{256}+\frac{81}{256}=\frac{81}{128}.$$

21. 解：若 B 欲獲勝，必須得到二點，其機會為 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

故分款時，A 之機會為 $\frac{3}{4}$，B 之機會為 $\frac{1}{4}$.

是以 A 應得款　$64\times\frac{3}{4}=48$ 元，

B 應得款　$64\times\frac{1}{4}=16$ 元。

XXVIII. 算學歸納法

習　題　LXIX

原本第 425 頁

1. 證：$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=a\frac{1-r^n}{1-r}$.

當式中僅有一項時，此公式爲正確者，即 $a=a\frac{1-r}{1-r}$.

當式中有二項時，此公式仍爲正確者，即 $a+ar=a\frac{1-r^2}{1-r}$.

今設式中有 k 項時，上式仍爲正確，即

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{k-1}=a\frac{1-r^k}{1-r}.$$

二邊加以 ar^k，得下列公式

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{k-1}+ar^k=a\frac{1-r^k}{1-r}+ar^k$$

$$=\frac{a-ar+ar^k-ar^{k+1}}{1-r}=a\frac{1-r^{k+1}}{1-r}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) 式示式中含有 k 項時如爲正確，則含有 $(k+1)$ 項時亦爲正確。今式中有一項時旣屬正確，是以此式有二、三，……任何項時皆爲正確，即

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

2. 證：$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$.

當 n 爲一定值，如 1, 2 或 3 時，此公式爲正確者. 設 n 爲一特別值 k 時，此公式仍爲正確者，故

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=k(k+1)(2k+1)/6\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

二邊各加以 $(k+1)^2$，得

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2$$

$$=k(k+1)(2k+1)/6+(k+1)^2$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+2+1)}{6}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) 式示 $n=k$ 時如爲正確，則 $n=k+1$ 時亦爲正確. 今 $n=1, 2\cdots\cdots$ 時旣屬正確，是以此公式於 $n=1, 2\cdots\cdots$ 或任何數值時皆爲正確.

3. 證：$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=n^2(n+1)^2/4$.

當 n 爲一定值，如 1, 2 或 3 時，此公式皆爲正確. 設 n 爲一特別值 k 時，此公式仍爲正確者，故

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3=k^2(k+1)^2/4\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

兩邊各加以 $(k+1)^3$，得

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3$$

$$=k^2(k+1)^2/4+(k+1)^3$$

$$=\frac{(k+1)^2[k^2+4(k+1)]}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\quad\cdots\cdots(2)$$

(2) 式示 $n=k$ 時如屬正確，則 $n=k+1$ 時亦爲正確。今該式於 $n=1,2,\cdots\cdots$ 時既屬正確，則當 n 爲 $2,3,\cdots\cdots$ 或任何值時皆爲正確。

4. 證：$1+3+6+\cdots\cdots+n(n+1)/2!=n(n+1)(n+2)/3!$

當 n 爲一定值，如 1, 2 或 3 時，此公式皆爲正確。設 n 爲一特別值 k 時，此公式仍爲正確者，故

$$1+3+6+\cdots\cdots+k(k+1)/2!=k(k+1)(k+2)/3!\cdots(1)$$

兩邊各加以 $(k+1)(k+2)/2!$，得

$$1+3+6+\cdots\cdots+\frac{k(k+1)}{2!}+\frac{(k+1)(k+2)}{2!}$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}+\frac{(k+1)(k+2)}{2!}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3!}\quad\cdots\cdots(2)$$

(2) 式示 $n=k$ 時，(1) 式如屬正確，則 $n=k+1$ 亦爲正確。今 $n=1,2,$ 時，(1) 式既屬無誤，則 n 爲 $2,3\cdots\cdots$ 或任何値時，皆正確不誤。

XXIX. 方程論

習題 LXX

原本第 431 頁

1. 解：(1) $a,\ -b,\ a+b$

$$(x-a)(x+b)(x-a-b)=0$$

$$\therefore\quad x^3-2ax^2+(a^2-ab-b^2)x+a^2b+ab^2=0.$$

(2) $3,\ 4,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ 0$

$$(x-3)(x-4)(2x-1)(3x+1)x=0$$
$$(x^2-7x+12)(6x^2-x-1)x=0$$
$$\therefore\quad 6x^5-43x^4+78x^3-5x^2-12x=0.$$

2. 證: $x^4+8x^3+18x^2-27=0$

$$\begin{array}{l|l} 1+8+18+0-27 & \underline{-3} \\ \quad -3-15-9+27 & \\ \hline 1+5+\ 3-9+0 & \underline{-3} \\ \quad -3-\ 6+9 & \\ \hline 1+2-\ 3+0 & \underline{-3} \\ \quad -3+\ 3 & \\ \hline 1-1+\ 0 & \end{array}$$

$$\therefore\quad x^4+8x^3+18x^2-27=(x+3)^3(x-1).$$

故 -3 爲此方程式之三重根。

3. 證: $4x^5-23x^3+33x^2-17x+3=0.$

$$\begin{array}{l|l} 4+\ 0-23+33-17+3 & \underline{1} \\ \qquad 4+\ 4-19+14-3 & \\ \hline 4+\ 4-19+14-\ 3+0 & \underline{1} \\ \qquad 4+\ 8-11+\ 3 & \\ \hline 4+\ 8-11+\ 3+\ 0 & \underline{\frac{1}{2}} \\ \qquad 2+\ 5-\ 3 & \\ \hline 4+10-\ 6+\ 0 & \\ 2+\ 5-\ 3 & \underline{\frac{1}{2}} \\ \qquad 1+\ 3 & \\ \hline 2+\ 6+\ 0 & \\ 1+\ 3 & \end{array}$$

$$\therefore\quad 4x^5-23x^3+33x^2-17x+3$$
$$=(x-1)^2(2x-1)^2(x+3)=0.$$

故 1 與 $\frac{1}{2}$ 爲此方程式之二重根。

4. 解: $x^5-5x^4-5x^3+4x^2-7x-250=0$

$$\begin{array}{l|l} 1-5-5+\ 4-\ 7-250 & \underline{6} \\ \quad 6+6+\ 6+60+318 & \\ \hline 1+1+1+10+53+\ 68 & \end{array}$$

以 $x-6$ 除之，吾人僅得正係數，而以 $x-7$ 除之則否。故 6 為其上界。

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & -5 & -5 & +4 & -7 & -250 & -2 \\ & -2 & +14 & -18 & +28 & +42 & \\ \hline 1 & -7 & +9 & -14 & +21 & -292 & \end{array}$$

以 $x+2$ 除之，吾人得一正負相間之係數，而以 $x+3$ 除之則否。故 -2 為其下界。

5. 證：$2x^4-3x^3+4x^2-10x-3=0$

此方程式所能有之有理根為 ± 1, ± 3, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$. 若吾人以此根除原方程式，則知無能除盡者。故知此方程式無有理根。

6. 解：$x^3-x^2-14x+24=0$

可為該方程式之有理根者有 ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 24. 今以 2, 3 先試之知其為根。

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & -14 & +24 & 2 \\ & 2 & +2 & -24 & \\ \hline 1 & +1 & -12 & +0 & 3 \\ & 3 & +12 & & \\ \hline 1 & +4 & +0 & & \end{array}$$

答：其根為 2, 3 與 -4.

7. 解：$x^3-2x^2-25x+50=0$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & -25 & +50 & 2 \\ & 2 & +0 & -50 & \\ \hline 1 & +0 & -25 & +0 & 5 \\ & 5 & +25 & & \\ \hline 1 & +5 & +0 & & \end{array}$$

答：其根為 2, 5 與 -5.

8. 解：$3x^3-2x^2+2x+1=0$

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -2 & +2 & +1 & -\frac{1}{3} \\ & -1 & +1 & -1 & \\ \hline 3 & -3 & +3 & +0 & \\ 1 & -1 & +1 & & \end{array}$$

$\therefore \quad 3x^3-2x^2+2x+1=(3x+1)(x^2-x+1)=0.$

答：其根爲 $-\frac{1}{3}, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

9. 解：$2x^4+7x^3-2x^2=x$

$$2x^4+7x^3-2x^2-x=x(2x^3+7x^2-2x-1)=0$$

$$\begin{array}{l|l} 2+7-2-1 & \frac{1}{2} \\ \quad 1+4+1 & \\ \hline 2+8+2+0 & \\ 1+4+1 & \end{array}$$

$\therefore \quad 2x^4+7x^3-2x^2-x=x(2x-1)(x^2+4x+1)=0.$

答：其根爲 $0, \frac{1}{2}, -2\pm\sqrt{3}.$

10. 解：$x^4+4x^3+8x^2+8x+3=0$

$$\begin{array}{l|l} 1+4+8+8+3 & -1 \\ \quad -1-3-5-3 & \\ \hline 1+3+5+3+0 & -1 \\ \quad -1-2-3 & \\ \hline 1+2+3+0 & \end{array}$$

$x^2+2x+3=0 \qquad \therefore \quad x=-1\pm\sqrt{2}i.$

答：其根爲 $-1, -1, -1\pm\sqrt{2}i.$

11. 解：$2x^4+7x^3+4x^2-7x-6=0$

$$\begin{array}{l|l} 2+7+\ 4-\ 7-6 & 1 \\ \quad 2+\ 9+13+6 & \\ \hline 2+9+13+\ 6+0 & -1 \\ \quad -2-\ 7-\ 6 & \\ \hline 2+7+\ 6+\ 0 & -2 \\ \quad -4-\ 6 & \\ \hline 2+3+\ 0 & \end{array}$$

答：其根爲 $1, -1, -2, -\frac{3}{2}.$

12. 解：$3x^4+11x^3+9x^2+11x+6=0$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3 & +11 & +9 & +11 & +6 & \underline{-3} \\
 & -9 & -6 & -9 & -6 & \\
\hline
3 & +2 & +3 & +2 & +0 & \underline{-\tfrac{2}{3}} \\
 & -2 & +0 & -2 & & \\
\hline
3 & +0 & +3 & +0 & & \\
1 & +0 & +1 & & &
\end{array}
$$

$x^2+1=0$　　$\therefore$　$x=\pm i.$

答：其根爲 $-3,\ -\dfrac{2}{3},\ \pm i.$

13. 解：$x^5-9x^4+2x^3+71x^2+81x+70=0$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & -9 & +2 & +71 & +81 & +70 & \underline{-2} \\
 & -2 & +22 & -48 & -46 & -70 & \\
\hline
1 & -11 & +24 & +23 & +35 & +0 & \underline{5} \\
 & 5 & -30 & -30 & -35 & & \\
\hline
1 & -6 & -6 & -7 & +0 & & \underline{7} \\
 & 7 & +7 & +7 & & & \\
\hline
1 & +1 & +1 & +0 & & &
\end{array}
$$

$x^2+x+1=0$　　$\therefore$　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

答：其根爲 $-2,\ 5,\ 7,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

14. 解：$2x^5-8x^4+7x^3+5x^2-8x+4=0$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
2 & -8 & +7 & +5 & -8 & +4 & \underline{-1} \\
 & -2 & +10 & -17 & +12 & -4 & \\
\hline
2 & -10 & +17 & -12 & +4 & +0 & \underline{2} \\
 & 4 & -12 & +10 & -4 & & \\
\hline
2 & -6 & +5 & -2 & +0 & & \underline{2} \\
 & 4 & -4 & +2 & & & \\
\hline
2 & -2 & +1 & +0 & & &
\end{array}
$$

$2x^2-2x+1=0$　　$\therefore$　$x=(1\pm i)/2.$

答：其根爲 $-1, 2, 2, (1\pm i)/2$.

15. 解：$x^5+3x^4-15x^3-35x^2+54x+72=0$

$$\begin{array}{l}
1+3-15-35+54+72 \mid \underline{-1} \\
\quad -1-\ 2+17+18-72 \\
\overline{1+2-17-18+72+\ 0} \mid \underline{2} \\
\quad\quad 2+\ 8-18-72 \\
\overline{1+4-\ 9-36+\ 0} \mid \underline{3} \\
\quad\quad 3+21+36 \\
\overline{1+7+12+\ 0} \mid \underline{-3} \\
\quad -3-12 \\
\overline{1+4+\ 0}
\end{array}$$

答：其根爲 $-1\ 2, 3, -3, -4$.

16. 解：$12x^4-32x^3+13x^2+8x-4=0$

$$\begin{array}{l}
12-32+13+8-4 \mid \underline{2} \\
\quad\quad 24-16-6+4 \\
\overline{12-\ 8-\ 3+2+0} \mid \underline{\tfrac{1}{2}} \\
\quad\quad\quad 6-\ 1-2 \\
\overline{12-\ 2-\ 4+0} \\
\quad 6-\ 1-\ 2 \mid \underline{-\tfrac{1}{2}} \\
\quad\quad -\ 3+\ 2 \\
\overline{\quad 6-\ 4+\ 0} \\
\quad 3-\ 2
\end{array}$$

答：其根爲 $2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$.

17. 解：$x^5-7x^4+10x^3+18x^2-27x-27=0$

$$\begin{array}{l}
1-7+10+18-27-27 \mid \underline{-1} \\
\quad -1+\ 8-18+\ 0+27 \\
\overline{1-8+18+\ 0-27+\ 0} \mid \underline{-1} \\
\quad -1+\ 9-27+27 \\
\overline{1-9+27-27+\ 0} \mid \underline{3} \\
\quad\quad 3-18+27 \\
\overline{1-6+\ 9+\ 0} \mid \underline{3} \\
\quad\quad 3-\ 9 \\
\overline{1-3+\ 0}
\end{array}$$

答：其根爲 $-1,\ -1,\ 3\ \ 3,\ 3.$

18. 解：$2x^4-17x^3+25x^2+74x-120=0$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -17 & +25 & +74 & -120 & -2 \\
 & -4 & +42 & -134 & +120 & \\ \hline
2 & -21 & +67 & -60 & +0 & 4 \\
 & 8 & -52 & +60 & & \\ \hline
2 & -13 & +15 & +0 & & 5 \\
 & 10 & -15 & & & \\ \hline
2 & -3 & +0 & & &
\end{array}$$

答：其根爲 $-2,\ 4,\ 5,\ \frac{3}{2}.$

19. 解：$4x^5-9x^3+6x^2-13x+6=0$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
4 & +0 & -9 & +6 & -13 & +6 & -2 \\
 & -8 & +16 & -14 & +16 & -6 & \\ \hline
4 & -8 & +7 & -8 & +3 & +0 & \frac{1}{2} \\
 & 2 & -3 & +2 & -3 & & \\ \hline
4 & -6 & +4 & -6 & +0 & & \frac{3}{2} \\
 & 6 & +0 & +6 & & & \\ \hline
4 & +0 & +4 & +0 & & & \\
2 & +0 & +2 & & & &
\end{array}$$

答：其根爲 $-2,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \pm i.$

20. 解：$x^5+8x^4+3x^3-80x^2-52x+240=0$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & +8 & +3 & -80 & -52 & +240 & 2 \\
 & 2 & +20 & +46 & -68 & -240 & \\ \hline
1 & +10 & +23 & -34 & -120 & +0 & 2 \\
 & 2 & +24 & +94 & +120 & & \\ \hline
1 & +12 & +47 & +60 & +0 & & -3 \\
 & -3 & -27 & -60 & & & \\ \hline
1 & +9 & +20 & +0 & & & -4 \\
 & -4 & -20 & & & & \\ \hline
1 & +5 & +0 & & & &
\end{array}$$

答：其根爲 $2,\ 2,\ -3,\ -4,\ -5.$

21. 解：$2x^5+11x^4+23x^3+25x^2+16x+4=0$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2+ & 11+ & 23+ & 25+ & 16+ & 4 & \underline{-2} \\
- & 4- & 14- & 18- & 14- & 4 & \\
\hline
2+ & 7+ & 9+ & 7+ & 2+ & 0 & \underline{-2} \\
- & 4- & 6- & 6- & 2 & & \\
\hline
2+ & 3+ & 3+ & 1+ & 0 & & \underline{-\frac{1}{2}} \\
- & 1- & 1- & 1 & & & \\
\hline
2+ & 2+ & 2+ & 0 & & & \\
1+ & 1+ & 1 & & & &
\end{array}$$

$x^2+x+1=0 \qquad \therefore \quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

答：其根爲 $-2, -2, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

22. 解：$6x^4-89x^3+359x^2-254x+48=0$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6- & 89+ & 359- & 254+ & 48 & \underline{6} \\
 & 36- & 318+ & 246- & 48 & \\
\hline
6- & 53+ & 41- & 8+ & 0 & \underline{8} \\
 & 48- & 40+ & 8 & & \\
\hline
6- & 5+ & 1+ & 0 & & \underline{\frac{1}{2}} \\
 & 3- & 1 & & & \\
\hline
6- & 2+ & 0 & & & \\
3- & 1 & & & &
\end{array}$$

答：其根爲 $6, 8, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$.

23. 解：$10x^4+41x^3+46x^2+20x+3=0$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
10+ & 41+ & 46+ & 20+ & 3 & \underline{-\frac{1}{2}} \\
- & 5- & 18- & 14- & 3 & \\
\hline
10+ & 36+ & 28+ & 6+ & 0 & \underline{-\frac{3}{5}} \\
- & 6- & 18- & 6 & & \\
\hline
10+ & 30+ & 10+ & 0 & & \\
1+ & 3+ & 1 & & &
\end{array}$$

$x^2+3x+1=0 \qquad \therefore \quad x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$

答：其根爲 $-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{5}, \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

24. 解：$36x^4-108x^3+107x^2-43x+6=0$

$$\begin{array}{l}
36-108+107-43+6 \mid \tfrac{1}{2} \\
\quad 18-45+31-6 \\
\hline
36-90+62-12+0 \mid \tfrac{1}{3} \\
\quad 12-26+12 \\
\hline
36-78+36+0 \mid \tfrac{2}{3} \\
\quad 24-36 \\
\hline
36-54+0 \\
2-3
\end{array}$$

答：其根為 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$.

25. 解：$12x^5+20x^4+29x^3+77x^2+69x+18=0$

$$\begin{array}{l}
12+20+29+77+69+18 \mid -\tfrac{1}{2} \\
\quad -6-7-11-33-18 \\
\hline
12+14+22+66+36+0 \mid -\tfrac{2}{3} \\
\quad -8-4-12-36 \\
\hline
12+6+18+54+0 \mid -\tfrac{3}{2} \\
\quad -18+18-54 \\
\hline
12-12+36+0 \\
1-1+3
\end{array}$$

$x^2-x+3=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$.

答：其根為 $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$.

26. 解：$2x^6+7x^5+8x^4+7x^3+2x^2-14x-12=0$

$$\begin{array}{l}
2+7+8+7+2-14-12 \mid 1 \\
\quad 2+9+17+24+26+12 \\
\hline
2+9+17+24+26+12+0 \mid -1 \\
\quad -2-7-10-14-12 \\
\hline
2+7+10+14+12+0 \mid -2 \\
\quad -4-6-8-12 \\
\hline
2+3+4+6+0 \mid -\tfrac{3}{2} \\
\quad -3+0-6 \\
\hline
2+0+4+0 \\
1+0+2
\end{array}$$

$x^2+2=0 \qquad \therefore \quad x=\pm\sqrt{2}i$.

答：其根為 $1, -1, -2, -\frac{3}{2}, \pm\sqrt{2}i$.

27. 解：$2x^6+11x^5+24x^4+22x^3-8x^2-33x-18=0$

$$\begin{array}{l}
2+11+24+22-\ 8-33-18\ \underline{|\ 1}\\
\quad\ \ 2+13+37+59+51+18\\
\hline
2+13+37+59+51+18+\ 0\ \underline{|-1}\\
\ \ -\ 2-11-26-33-18\\
\hline
2+11+26+33+18+\ 0\ \underline{|-2}\\
\ \ -\ 4-14-24-18\\
\hline
2+\ 7+12+\ 9+\ 0\ \underline{|-\tfrac{3}{2}}\\
\ \ -\ 3-\ 6-\ 9\\
\hline
2+\ 4+\ 6+\ 0\\
1+\ 2+\ 3
\end{array}$$

$x^2+2x+3=0 \qquad \therefore\quad x=-1\pm\sqrt{2}i.$

答：其根爲 $1,\ -1,\ -2,\ -\dfrac{3}{2},\ -1\pm\sqrt{2}i.$

28. 解：$5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4=0$

$$\begin{array}{l}
5-\ 7-\ 8-\ 1+\ 7+8-4\ \underline{|\ 1}\\
\quad\ 5-\ 2-10-11-4+4\\
\hline
5-\ 2-10-11-\ 4+4+0\ \underline{|-1}\\
\ \ -\ 5+\ 7+\ 3+\ 8-4\\
\hline
5-\ 7-\ 3-\ 8+\ 4+0\ \underline{|\ 2}\\
\quad 10+\ 6+\ 6-\ 4\\
\hline
5+\ 3+\ 3-\ 2+\ 0\ \underline{|\ \tfrac{2}{5}}\\
\quad\ 2+\ 2+\ 2\\
\hline
5+\ 5+\ 5+\ 0\\
1+\ 1+\ 1
\end{array}$$

$x^2+x+1=0 \qquad \therefore\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

答：其根爲 $1,\ -1,\ 2,\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

習　題　LXXI

原本第 435 頁

1. 解：其第三根爲 $\alpha=\dfrac{7}{2}-[1+i+1-i]=\dfrac{7}{2}-2=\dfrac{3}{2}.$

2. 解：(1)　$8x^3-14x^2-21x+27=0$

設 $\alpha/\beta,\ \alpha,\ \alpha\beta$ 代表此方程式之三根。

$$\frac{\alpha}{\beta}+\alpha+\alpha\beta=\frac{14}{8}=\frac{7}{4} \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\alpha^2+\alpha^2\beta=-\frac{21}{8} \quad\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\alpha\cdot\alpha\beta=-\frac{27}{8} \quad\cdots\cdots(3)$$

從 (3) 式， $\alpha^3=-\dfrac{27}{8}$

$$\therefore\quad \alpha=-\frac{3}{2}.$$

代入 (1) 式，得 $-\dfrac{3}{2\beta}-\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\beta}{2}=\dfrac{7}{4}$

$$6\beta^2+13\beta+6=0$$

$$(3\beta+2)(2\beta+3)=0$$

$$\therefore\quad \beta=-\frac{2}{3},\quad -\frac{3}{2}.$$

答：其根爲 $1,-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}$.

(2) $x^3+x^2+3x+27=0$

設 $\dfrac{\alpha}{\beta}$, α, $\alpha\beta$ 代表此方程式之三根。

$$\frac{\alpha}{\beta}+\alpha+\alpha\beta=-1 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\alpha^3=-27 \quad\cdots\cdots(2)$$

從 (2) 式， $\alpha=-3.$

代入 (1) 式，得 $-\dfrac{3}{\beta}-3-3\beta=-1$

$$3\beta^2+2\beta+3=0$$

$$\therefore\quad \beta=\frac{1\pm2\sqrt{2}i}{3}.$$

答：其根爲 $1+2\sqrt{2}i,\ -3,\ 1-2\sqrt{2}i$.

3. 解：(1) $x^3+6x^2+7x-2=0$

設 $\alpha-\beta$, α, $\alpha+\beta$ 爲三根。

$$\alpha-\beta+\alpha+\alpha+\beta=-6 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\alpha(\alpha^2-\beta^2)=2 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，　$\alpha=-2.$

代入 (2) 式，得　$\beta^2=5$　$\therefore$　$\beta=\pm\sqrt{5}.$

答：其三根為 $-2-\sqrt{5},\ -2,\ -2+\sqrt{5}.$

(2)　$x^3-9x^2+23x-15=0$

設 $\alpha-\beta,\ \alpha,\ \alpha+\beta$ 為三根。

$$\alpha-\beta+\alpha+\alpha+\beta=9 \cdots\cdots(1)$$

$$\alpha(\alpha^2-\beta^2)=15 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，　$\alpha=3.$

代入 (2) 式，得　$\beta^2=4$

$$\therefore\quad \beta=\pm 2.$$

答：其根為 1, 3, 5.

4. 證：設其根為 $\alpha,\ -\alpha,\ \beta.$

$\alpha-\alpha+\beta=-p$　$\therefore$　$\beta=-p \cdots\cdots(1)$

$-\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta=q$　$\therefore$　$\alpha^2=-q \cdots\cdots(2)$

$\alpha(-\alpha)\beta=-r$　$\therefore$　$\alpha^2\beta=r \cdots\cdots(3)$

將 (1), (2) 代入 (3) 式，得　$pq=r.$

故此方程式之一根為另一根之負數之條件為 $pq=r.$

5. 解：設其根為 $\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha},\ \beta.$

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta=-p \cdots\cdots(1)$$

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\cdot\beta+\alpha\beta=q \cdots\cdots(2)$$

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\beta=-r \cdots\cdots(3)$$

從 (3) 式，　$\beta=-r \cdots\cdots(4)$

代入 (1) 式，得　$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=-p+r \cdots\cdots(5)$

從 (2) 式，　$\left(\dfrac{1}{\alpha}+\alpha\right)\beta+1=q \cdots\cdots(6)$

將 (4), (5) 代入 (6) 式，得

$$(-p+r)(-r)+1=q$$

$$\therefore\quad r^2-pr+q-1=0.$$

答：其條件爲 $r^2-pr+q-1=0$.

6. 解：設其根爲 $\alpha, \alpha, \beta, \beta$.

$$2\alpha+2\beta=-4 \cdots\cdots(1)$$

$$\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=10 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，$\beta=-2-\alpha \cdots\cdots(3)$

代入 (2) 式，得 $\alpha^2+2\alpha+3=0$

$\therefore \quad \alpha=-1\pm\sqrt{2}i.$

代入 (5) 式，得 $\beta=-1\pm\sqrt{2}i.$

7. 解：設其根爲 $\frac{1}{\alpha-\beta}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha+\beta}$, 則根爲 $\alpha-\beta, \alpha$ 及 $\alpha+\beta$ 之方程式爲

$$9x^3-18x^2-13x+14=0$$

$$\alpha-\beta+\alpha+\alpha+\beta=\frac{18}{9}=2 \cdots\cdots(1)$$

$$\alpha(\alpha^2-\beta^2)=-\frac{14}{9} \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，$\alpha=\frac{2}{3}.$

代入 (2) 式，得 $\frac{4}{9}-\beta^2=-\frac{7}{3}$

$\therefore \quad \beta=\pm\frac{5}{3}.$

答：所求之三根爲 $\frac{3}{7}, \frac{3}{2}, -1.$

8. 解：設其根爲 $2\alpha, 3\alpha, \beta, \beta+1$.

$$2\alpha+3\alpha+\beta+\beta+1=1$$

$$5\alpha+2\beta=0 \cdots\cdots(1)$$

$$6\alpha^2\beta^2+6\alpha^2\beta=720$$

$$\alpha^2\beta^2+\alpha^2\beta=120 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，$\beta=-\frac{5}{2}\alpha \cdots\cdots(3)$

代入 (2) 式，得 $5\alpha^4-2\alpha^3-96=0$

$$(\alpha+2)(5\alpha^3-12\alpha^2+24\alpha-48)=0$$

$\therefore \quad \alpha=-2.$

代入 (3) 式，得　　$\beta=5.$

答：其根爲 $-4,\ -6,\ 5,\ 6.$

9. 解：(1)　$-\alpha,\ -\beta,\ -\gamma.$

設 p', q', r' 爲所求方程式之係數

$$-p'=-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=p$$
$$q'=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=q$$
$$-r'=-\alpha\beta\gamma=r.$$

答：所求之方程式爲 $x^3-px^2+qx-r=0.$

(2)　$k\alpha,\ k\beta,\ k\gamma.$

$$-p'=k(\alpha+\beta+\gamma)=-kp$$
$$q'=k^2\alpha\beta+k^2\alpha\gamma+k^2\beta\gamma=k^2q$$
$$-r'=k^3\alpha\beta\gamma=-k^3r.$$

答：所求之方程式爲 $x^3+kpx^2+k^2qx+k^3r=0.$

(3)　$\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma}.$

$$-p'=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{q}{r}$$
$$q'=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{p}{r}$$
$$-r'=\frac{1}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}=-\frac{1}{r}.$$

答：所求之方程式爲 $rx^3+qx^2+px+1=0.$

(4)　$\alpha+k,\ \beta+k,\ \gamma+k.$

$$-p'=(\alpha+\beta+\gamma)+3k=-p+3k$$
$$q'=(\alpha+k)(\beta+k)+(\alpha+k)(\gamma+k)+(\beta+k)(\gamma+k)$$
$$=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+2k(\alpha+\beta+\gamma)+3k^2$$
$$=q-2kp+3k^2$$
$$-r'=(\alpha+k)(\beta+k)(\gamma+k)$$
$$=\alpha\beta\gamma+k(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)+k^2(\alpha+\beta+\gamma)+k^3$$
$$=-r+kq-k^2p+k^3.$$

答：所求之方程式爲

$$x^3+(p-3k)x^2+(q-2kp+3k^2)x+(r-kq+k^2p-k^3)=0.$$

(5)　$\alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2.$

$$-p'=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=p^2-2q$$
$$q'=\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta\gamma^2$$
$$=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-2(\alpha\beta^2\gamma+\alpha^2\beta\gamma+\alpha\beta\gamma^2)$$
$$=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=q^2-2pr$$
$$-r'=\alpha^2\beta^2\gamma^2=(\alpha\beta\gamma)^2=r^2.$$

答：所求之方程式爲 $x^3-(p^2-2q)x^2+(q^2-2pr)x-r^2=0.$

(6) $-\frac{1}{\alpha^2},\ -\frac{1}{\beta^2},\ -\frac{1}{\gamma^2}$

$$-p'=-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}=-\frac{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$
$$=-\frac{q^2-2pr}{r^2}$$
$$q'=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2\gamma^2}+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$
$$=\frac{p^2-2q}{r^2}$$
$$-r'=\frac{-1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=-\frac{1}{r^2}.$$

答：所求之方程式爲 $r^2x^3+(q^2-2pr)x^2+(p^2-2q)x+1=0.$

10. 解：(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{4}{2}\right)=\frac{17}{4}.$$

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\alpha^2\gamma)-6\alpha\beta\gamma$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta+\gamma)\times(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{4}{2}\right)+3\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{37}{8}.$$

(3) $\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=1.$

(4) $\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+\beta\gamma^2+\gamma\beta^2+\gamma^2\alpha+\alpha^2\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-3\alpha\beta\gamma$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}.$

11. 解：(1) $\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\frac{\beta}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}=\frac{4-2}{3}=\frac{2}{3}.$

(2) $\frac{\alpha\beta}{\gamma}+\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{1-2\cdot3\cdot2}{3}=-\frac{11}{3}.$

(3) $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

$=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$

$=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=8-8+2-3=-1.$

(4) $(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)$

$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)-\alpha^2\beta^2\gamma^2$

$=[(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)][(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2$

$-2(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma]-(\alpha\beta\gamma)^2$

$=(4-2)(1-2\cdot2\cdot3)-9=-31.$

(5) $\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+\beta\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+\gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$

$=\frac{\alpha^2\gamma+\alpha^2\beta}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta^2\alpha+\beta^2\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\gamma^2\beta+\gamma^2\alpha}{\alpha\beta\gamma}$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=\frac{2\cdot 1-3\cdot 3}{3}=-\frac{7}{3}.$$

習題 LXXII

原本第 443 頁

1. 解: $x^7+3x^4-2x^2+6x+7=0.$

將偶次方各項之符號變換,得所求之方程式

$x^7-3x^4+2x^2+6x-7=0.$

2. 解: 以 -2 乘 $2x^4+x^3-4x^2-6x+8=0$ 之各根, 又以 3 除其各根。

(1) $2x^4+(-2)x^3-4(-2)^2x^2-6(-2)^3x+(-2)^4\cdot 8=0$

$2x^4-2x^3-16x^2+48x+128=0$

$x^4-x^3-8x^2+24x+64=0.$

(2) $2x^4+\left(\frac{1}{3}\right)x^3-4\left(\frac{1}{3}\right)^2x^2-6\left(\frac{1}{3}\right)^3x+\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot 8=0$

$162x^4+27x^3-36x^2-18x+8=0.$

3. 解: $5x^6-x^4+3x^3+9x+10=0.$

$10x^6+9x^5+3x^3-x^2+5=0.$

4. 解: $2x^5+x^4-3x^2+6=0.$

(1) 以 $y+2$ 代替 x, 或用綜合除法以 2 除之, 皆可得所求之方程式.

$2+\ 1+0\ -\ 3+\ 0+\ 6\ \underline{|2}$

$2+\ 5+10+17+34+74$ $\qquad c_5=74$

$2+\ 9+28+73+180$ $\qquad c_4=180$

$2+13+54+181$ $\qquad c_3=181$

$2+17+88$ $\qquad c_2=88$

$2+21$ $\qquad c=2 \qquad c_1=21$

答: 所求之方程式為

$2x^5+21x^4+88x^3+181x^2+180x+74=0.$

(2) 以 $y-1$ 代替 x，或用綜合除法以 -1 除之，皆可得所求之方程式.

$2+1+0-3+0+6\ \lfloor -1$

$2-1+1-4+4+2$

$2-3+4-8+12$

$2-5+9-17$

$2-7+16$

$2-9$

答：所求之方程式爲 $2x^5-9x^4+16x^3-17x^2+12x+2=0$.

5. 解：$x^4-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{25}-\dfrac{1}{48}=0$ ……(1)

將其各根乘以 k，得

$$x^4-k\frac{x^3}{3}+k^2\frac{x^2}{4}+k^3\frac{x}{25}-k^4\frac{1}{48}=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

k 之最小值爲 $3\cdot2\cdot5=30$；代入 (2) 式，得

$$x^4-10x^3+225x^2+1080x-16875=0.$$

6. 解：$3x^4-36x^3-x-7=0$.

以 $y+k$ 代替 x，得 $3y^4+12(k-3)y^3+\cdots\cdots=0$，若缺少 x^3 一項，則 $k-3=0$，即 $k=3$.

將 $3x^4-36x^3-x-7=0$ 之各根減 3，得 $3x^4-162x^2-647x-733=0$，即所求之方程式也.

7. 解：(1) $x^3+6x^2+9x+10=0$.

以 $y+k$ 代替 x，得 $y^3+3(k+2)y^2+3(k^2+4k+3)y+(k^3+6k^2+9k+10)=0$ ……(1)

$k^2+4k+3=0 \quad \therefore \quad k=-3$ 及 -1.

代入 (1) 式，得 $y^3-3y^2+10=0$ ……(2)

$y^3+3y^2+6=0$ ……(3)

故 (2), (3) 兩式爲所求之方程式也.

(2) $x^3-x^2-x-3=0$.

以 $y+k$ 代替 x，得 $y^3+(3k-1)y^2+(3k^2-2k-1)y+(k^3-k^2-k-3)=0$ ……(1)

$3k^2-2k-1=0 \quad \therefore \quad k=1$ 及 $-\frac{1}{3}$.

代入(1)式，得 $y^3+2y^2-4=0$ ……………………(2)

$27y^3-54y^2-76=0$ ……………………(3)

故(2)，(3)兩式爲所求之方程式也。

8. 解：設 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 爲 $x^4+x^3-x+2=0$.

$y=x^2 \quad \therefore \quad x=\pm\sqrt{y}.$

$(\pm\sqrt{y})^4+(\pm\sqrt{y})^3-(\pm\sqrt{y})+2=0$

$y^2\pm y\sqrt{y}\mp\sqrt{y}+2=0$

$\pm\sqrt{y}(y-1)=-(y^2+2)$

$y(y^2-2y+1)=y^4+4y^2+4.$

答：所求之方程式爲 $y^4-y^3+6y^2-y+4=0.$

9. 解：設 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 爲 $x^4+3x^3+2x^2-1=0.$

$\beta+\gamma+\delta=\alpha+\beta+\gamma+\delta-\alpha=-3-\alpha$

$\alpha+\gamma+\delta=\alpha+\beta+\gamma+\delta-\beta=-3-\beta$

$\alpha+\beta+\delta=\alpha+\beta+\gamma+\delta-\gamma=-3-\gamma$

$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\beta+\gamma+\delta-\delta=-3-\delta$

設 $y=-3-x \quad \therefore \quad x=-y-3.$

代入原方程式中，得

$(-y-3)^4+3(-y-3)^3+2(-y-3)^2-1=0.$

化簡之，得所求之方程式爲

$y^4+9y^3+29y^2+39y+17=0.$

10. 解：設 α,β,γ 爲 $x^3+px^2+qx+r=0.$

(1) $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma},\ \dfrac{\beta\gamma}{\alpha},\ \dfrac{\gamma\alpha}{\beta}.$

$\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\gamma^2}=-\dfrac{r}{\gamma^2},\quad \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}=-\dfrac{r}{\alpha^2},\quad \dfrac{\gamma\alpha}{\beta}=-\dfrac{r}{\beta^2}$

設 $y=-\dfrac{r}{x^2} \quad \therefore \quad x=\pm\sqrt{-\dfrac{r}{y}}.$

代入原方程式中，得

$$\left(\pm\sqrt{-\frac{r}{y}}\right)^3+p\left(\pm\sqrt{-\frac{r}{y}}\right)^2+q\left(\pm\sqrt{-\frac{r}{y}}\right)+r=0$$

$$\pm\sqrt{-\frac{r}{y}}\left(-\frac{r}{y}+q\right)=\frac{pr}{y}-r$$

$$-\frac{r}{y}\left(-\frac{r}{y}+q\right)^2=\left(\frac{pr}{y}-r\right)^2$$

$$-q(r^2-2qry+q^2y^2)=yr^2(p^2-2py+y^2)$$

$\therefore\quad ry^3+(q^2-2pr)y^2+r(p^2-2q)y+r^2=0.$

(2) $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma},\quad \dfrac{\beta}{\gamma+\alpha},\quad \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}.$

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma-\alpha}=\frac{\alpha}{-p-\alpha},$$

$$\frac{\beta}{\gamma+\alpha}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma-\beta}=\frac{\beta}{-p-\beta},$$

$$\frac{\gamma}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma-\gamma}=\frac{\gamma}{-p-\gamma}.$$

設 $y=\dfrac{x}{-p-x}\qquad \therefore\quad x=\dfrac{-py}{1+y}.$

代入原方程式中,得 $\left(\dfrac{-py}{1+y}\right)^3+p\left(\dfrac{-py}{1+y}\right)^2+q\left(\dfrac{-py}{1+y}\right)+r=0$

$$-p^3y^3+p^3y^2+p^3y^3-pqy-2pqy^2$$
$$-pqy^3+r+3ry+3ry^2+ry^3=0.$$

$\therefore\quad (r-pq)y^3+(p^3-2pq+3r)y^2+(3r-pq)y+r=0.$

11. **解:** 設 α,β,γ 爲 $x^3+2x^2+3x+4=0.$

(1) $\beta^2+\gamma^2,\ \gamma^2+\alpha^2,\ \alpha^2+\beta^2.$

$$\begin{aligned}\beta^2+\gamma^2&=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2\\&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha^2\\&=p^2-2q-\alpha^2=-2-\alpha^2,\end{aligned}$$

$$\gamma^2+\alpha^2=-2-\beta^2,\quad \alpha^2+\beta^2=-2-\gamma^2.$$

設 $y=-2-x^2\qquad \therefore\quad x=\pm\sqrt{-2-y}.$

$$(-2-y)\sqrt{-2-y}+2(-2-y)+3\sqrt{-2-y}+4=0$$
$$(1-y)\sqrt{-2-y}=2y$$
$$(1-2y+y^2)(-2-y)=4y^2$$

$\therefore\quad y^3+4y^2-3y+2=0.$

(2) $\alpha(\beta+\gamma),\ \beta(\gamma+\alpha),\ \gamma(\alpha+\beta).$

$$\begin{aligned}\alpha(\beta+\gamma)&=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-\beta\gamma=3-\beta\gamma\\&=3-\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha}=3+\frac{4}{\alpha},\end{aligned}$$

$$\beta(\gamma+\alpha)=3+\frac{4}{\beta},\quad \gamma(\alpha+\beta)=3+\frac{4}{\gamma}.$$

設 $y=3+\frac{4}{x}$ $\therefore$ $x=\frac{4}{y-3}$.

$$\left(\frac{4}{y-3}\right)^3+2\left(\frac{4}{y-3}\right)^2+3\left(\frac{4}{y-3}\right)+4=0$$

$$64+32(y-3)+12(y-3)^2+4(y-3)^3=0$$

$\therefore$ $y^3-6y^2+17y-8=0.$

(3) $\beta\gamma+\frac{1}{\alpha},\ \gamma\alpha+\frac{1}{\beta},\ \alpha\beta+\frac{1}{\gamma}.$

$$\beta\gamma+\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha\beta\gamma+1}{\alpha}=\frac{-4+1}{\alpha}=\frac{-3}{\alpha},$$

$$\gamma\alpha+\frac{1}{\beta}=\frac{-3}{\beta},\quad \alpha\beta+\frac{1}{\gamma}=\frac{-3}{\gamma}.$$

設 $y=\frac{-3}{x}$ $\therefore$ $x=-\frac{3}{y}$.

$$\left(-\frac{3}{y}\right)^3+2\left(-\frac{3}{y}\right)^2+3\left(-\frac{3}{y}\right)+4=0$$

$$-27+18y-9y^2+4y^3=0$$

$\therefore$ $4y^3-9y^2+18y-27=0.$

(4) $\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha},\ \frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta},\ \frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}.$

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma-2\alpha}=\frac{\alpha}{-2-2\alpha},$$

$$\frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}=\frac{\beta}{-2-2\beta},\quad \frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}=\frac{\gamma}{-2-2\gamma}.$$

設 $y=\frac{x}{-2-2x}$ $\therefore$ $x=\frac{-2y}{2y+1}$.

$$\left(\frac{-2y}{2y+1}\right)^3+2\left(\frac{-2y}{2y+1}\right)^2+3\left(\frac{-2y}{2y+1}\right)+4=0$$

$$-8y^3+8y^2(2y+1)-6y(2y+1)^2+4(2y+1)^3=0$$

$\therefore$ $8y^3+16y^2+9y+2=0.$

(5) $\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right),\ \beta\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right),\ \gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right).$

$$\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=\alpha\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$=\frac{\alpha(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)}{\alpha\beta\gamma}-1=\frac{-3\alpha}{4}-1,$$

$$\beta\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)=\frac{-3\beta}{4}-1,\quad \gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{-3\gamma}{4}-1.$$

設　$y=\frac{-3x}{4}-1 \qquad \therefore \quad x=-\frac{4}{3}(1+y).$

$$\left[-\frac{4(1+y)}{3}\right]^3+2\left[-\frac{4(1+y)}{3}\right]^2+3\left[-\frac{4(1+y)}{3}\right]+4=0$$

$$-64(1+y)^3+96(1+y)^2-108(1+y)+4\cdot 27=0$$

$$-64y^3-96y^2-108y+32=0$$

$\therefore \quad 16y^3+24y^2+27y-8=0.$

12. 解：(1)　$x^4+3x^3-13x^2-6x+28=0.$

$1+3-13-\ 6+28\ |\ 2$

$1+5-\ 3-12+\ 4$

$1+7+11+10$

故 2 爲其上界。

$1+3-13-\ 6+28\ |\ 1$

$1+4-\ 9-15+13$

$1+5-\ 4-19$

19 前之符號爲負，示 1 非上界。

$1+3-13-\ 6+\ 28\ |\ -6$

$1-3+\ 5-36+244$

故 -6 爲其下界。

$1+3-13-6+28\ |\ -5$

$1-2-\ 3+9-17$

17 前之符號爲負，示 -5 非下界。

(2)　$2x^5-120x^2-38x+27=0.$

$2-\ 0-\ 0-120-\ 38+27\ |\ 4$

$2+\ 8+32+\ 8-\ 6+\ 3$

$2+16+96+392+1562$

故 4 爲其上界。

$2-0-\ 0-120-\ 38+\ 27\ |\ 3$

$2+6+18-\ 66-236-681$

681 前之符號爲負，示 3 非上界。

2+0+0−120−38+27 | −1

2−2+2−122+84−57

故 −1 爲其下界。

(3) $x^4-29x^2+50x+12=0.$

1+0−29+50+12 | 4

1+4−13−2+4

1+8+19+74

故 4 爲其上界。

1+0−29+50+12 | 3

1+3−20−10−18

18 前之負號示 3 非上界。

1+0−29+50+12 | −7

1−7+20−90+642

故 −7 爲其下界。

1+0−29+50+12 | −6

1−6+7+8−36

36 前之負號示 −6 非下界。

(4) $2x^5-26x^3+60x^2-92=0.$

2+0−26+60+0−92 | 2

2+4−18+24+48+4

2+8−2+20+88

2+12+22+64

故 2 爲其上界。

2+0−26+60+0−92 | 1

2+2−24+36+36−56

−56 示 1 非上界。

2+0−26+60+0−92 | −5

2−10+24−60+300−1592

故 −5 爲其下界。

2+0−26+60+0−92 | −4

2−8+6+36−144+484

484 前之負號示 −4 非下界。

(5) $x^4-14x^3+44x^2+28x-92=0$.

$1-14+44+\ 28-\ 92\ |\underline{9}$

$1-\ 5-\ 1+\ 19+\ 79$

$1+\ 4+35+334$

故 9 爲其上界.

$1-14+44+28-\ 92\ |\underline{8}$

$1-\ 6-\ 4-\ 4-124$

-124 示 8 非上界.

$1-14+44+\ 28-\ 92\ |\underline{-2}$

$1-16+76-124+156$

故 -2 爲其下界.

$1-14+44+28-92\ |\underline{-1}$

$1-15+59-31-61$

-61 示 -1 非下界.

(6) $3x^6-5x^3+77x^2-50x-110=0$.

$3+\ 0+\ 0-35+77-50-110\ |\underline{2}$

$3+\ 6+12-11+55+60+\ 10$

$3+12+36+61$

故 2 爲其上界.

$3+0+0-35+77-50-110\ |\underline{1}$

$3+3+3-32+45-\ 5-115$

-115 示 1 非上界.

$3+0+0-35+\ 77-\ 50-110\ |\underline{-1}$

$3-3+3-38+115-165+\ 55$

故 -1 爲其下界.

習 題 LXXIII

原本第 449 頁

1. 解: 設 α,β 爲其另二根.

$$1+2i+1-2i+\alpha+\beta=\frac{1}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\alpha\beta(1+2i)(1-2i)=\frac{5}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

從 (1) 式， $\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$ ……(3)

從 (2) 式， $\alpha\beta=\frac{1}{2}$ ……(4)

從 (3) 及 (4)，$\alpha=-1$，$\beta=-\frac{1}{2}$

答：其四根爲 -1，$-\frac{1}{2}$，$1\pm 2i$.

2. 解：$2x^4-11x^3+17x^2-10x+2=0$.

按 § 825，知 $2-\sqrt{2}$ 亦爲其一根。

$[x-(2+\sqrt{2})][x-(2-\sqrt{2})]=0$

$x^2-4x+2=0$

$\frac{2x^4-11x^3+17x^2-10x+2}{x^2-4x+2}=0$

$2x^2-3x+1=0$

$(2x-1)(x-1)=0$

$\therefore\quad x=\frac{1}{2}, 1.$

答：其根爲 $\frac{1}{2}$，1，$2\pm\sqrt{2}$.

3. 解：$[x-(-5+2i)][x-(-5-2i)]$

$\times[x-(-1+\sqrt{5})][x-(-1-\sqrt{5})]=0$

$[x^2+10x+29][x^2+2x-4]=0$

$\therefore\quad x^4+12x^3+45x^2+18x-116=0.$

4. 解：此方程式之其他數根爲 $-\sqrt{2}+i$，$\sqrt{2}-i$，$-\sqrt{2}-i$.

$[x-(\sqrt{2}+i)][x-(\sqrt{2}-i)]$

$\times[x-(-\sqrt{2}+i)][x-(-\sqrt{2}-i)]=0$

$[x^2-2\sqrt{2}x+3][x^2+2\sqrt{2}x+3]=0$

$\therefore\quad x^4-2x^2+9=0.$

5. 解：(1) $x^4+1=0$.

因 $v=0$，$v'=0$； 故 $n-(v+v')=4-(0+0)=4$，是以 $x^4+1=0$ 無實根，僅有四虛根。

(2) $x^4-x^2-1=0$.

因 $v=1$，$v'=1$； 故 $n-(v+v')=4-(1+1)=2$，是以此方程式至少有二虛根或四虛根，正根與負根皆僅有一個或均無。

	正根數	負根數	虛根數
根之可能情形	1	1	2
	0	0	4

* 註：如應用本習題問題 15，正負根數亦必爲 1，不得爲 0.

(3) $x^4+2x^3+x^2+x+1=0$.

因 $v=0, v'=4$；故 $n-(v+v')=4-(0+4)=0$，是以此方程式之負根不能超過四個，且無正根。

	正根數	負根數	虛根數
	0	4	0
根之可能情形	0	2	2
	0	0	4

(4) $x^4-2x^3+x^2-x+1=0$.

因 $v=4, v'=0$；故 $n-(v+v')=4-(4+0)=0$，是以此方程式之正根不能超過四個，且無負根。

	正根數	負根數	虛根數
	4	0	0
根之可能情形	2	0	2
	0	0	4

(5) $x^7+x^5+x^3-x+1=0$.

因 $v=2, v'=1$；故 $n-(v+v')=7-(2+1)=4$，是以此方程式至少有四虛根，正根不能超過二個，負根不能超過一個。

	正根數	負根數	虛根數
根之可能情形	2	1	4
	0	1	6

(6) $x^7+x^4-x^2-1=0$.

因 $v=1, v'=2$；故 $n-(v+v')=7-(1+2)=4$，是以此方程式至少有四虛根，正根不能超過一個，負根不能超過二個。

	正根數	負根數	虛根數
根之可能情形	1	2	4
	1	0	6

(7) $x^5-4x^2+3=0$.

因 $v=2, v'=1$；故 $n-(v+v')=5-(2+1)=2$，是以此方程式至少有二虛根，正根不能超過二個，負根不能超過一個。

正根數 負根數 虛根數

根之可能情形	2	1	2
	0	1	4

(8) $x^{3n}-x^{2n}+x^n+x+1=0.$

當 n 爲奇數時，$v=2,\ v'=1$；故 $3n-(v+v')=3n-3$，是以此方程式至少有 $3n-3$ 虛根，正根不能超過二個，負根不能超過一個.

	正根數	負根數	虛根數
根之可能情形	2	1	$3n-3$
	0	1	$3n-1$

當 n 爲偶數時，$v=2,\ v'=4$；故 $3n-(v+v')=3n-6$，是以此方程式至少有 $3n-6$ 虛根，正根不能超過二個，負根不能超過四個.

	正根數	負根數	虛根數
	2	4	$3n-6$
	0	4	$3n-4$
根之可能情形	2	2	$3n-4$
	0	2	$3n-2$
	2	0	$3n-2$
	0	0	$3n$

6. 證：於一完全方程式中，變號與連號數之和適等於其方次，卽 $v+v'=n$.
又設正根數爲 a，負根數爲 b.
因所有根均爲實根，故 $a+b=n=v+v'$.
由笛卡兒法則，$a\leq v,\ b\leq v'$.
因 $a+b=v+v'$；故 $a=v,\ b=v'$.
卽正根與變號之數相等，負根與連號之數相等.

7. 解：$x^5+3x^4-15x^3-35x^2+54x+72=0.$
因此方程式有二變號與三連號，故知此方程式有二正根與三負根.

8. 證：對於方程式 $x^{2n}+1=0,\ v+v'=0$，故無實根.
(1) 對於方程式 $x^{2n+1}+1=0,\ v=0,\ v'=1.$
故此方程式有一負根與 $2n$ 個虛根.
(2) 對於方程式 $x^{2n}-1=0,\ v=1,\ v'=1.$

故此方程式至少有 $2n-2$ 個虛根，正根與負根均不能超過一個。

(3) 對於方程式 $x^{2n+1}-1=0, v=1, v'=0.$

故此方程式有一正根與 $2n$ 個虛根。

9. 證：若一方程式僅含 x 之偶次方，且皆爲正係數，則 $v=0$, $v'=0$；故知此方程式不能有正根或負根。

10. 證：設 $f(x)=x^{2n-1}+x^{2n-3}+x^{2n-5}+\cdots\cdots+x^{2n-(2n-1)}=0$；因 $f(x)$ 之係數皆爲正數，故 $v=0$；又因 $f(-x)$ 之係數皆爲負數，故 $v'=0.$

$$f(x)=x(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots\cdots+1)=0.$$

故 $f(x)$ 除 0 外，無其他實根。

11. 證：$x^3+px+q=0.$

$$f(x)=x^3+px+q=0 \qquad \therefore \quad v=0.$$

$$f(-x)=x^3+px-q=0 \qquad \therefore \quad v'=1.$$

故此方程式至少有二虛根而僅有二虛根；故該方程式有一實根，且爲負根。

12. 證：一不完全方程式之變號與連號之數必不能完全發現，故其實根之數必少於其方次，所餘卽虛根，但虛根皆對對發生，故此方程式有二或二以上之虛根。

13. 證：設 $f(x)=b_0x^n-b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}-b_3x^{n-3}+b_4x^{n-4}$

$$-b_5x^{n-5}+\cdots\cdots-b_{n-1}x+b_n.$$

從 $f(x)$，知於二不相連之異符號，如 b_0x^n 與 $-b_3x^{n-3}$ 間，有三變號，於二不相連之同符號，如 $-b_3x^{n-3}$ 與 $-b_5x^{n-5}$ 間，無變號；又如 $-b_1x^{n-1}$ 與 $-b_5x^{n-5}$ 間，有二變號。故知二不相連之異符號間，其變號爲奇數；二不相連之同符號間，其變號爲偶數或無變號。

14. 證：一含有實係數之方程式有一負根 $-a$，卽此方程式有一因式爲 $(x+a)$；若有一虛根 $\alpha-\beta i$，則必有另一虛根 $\alpha+\beta i$ 故此方程式又有一因式爲 $[x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)]$ 於 $(x+a)$, $[x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)]$,$\cdots\cdots$ 中，其常數項爲正者，故其乘積中之常數項亦爲正者。於此乘積中，如上所述者，其第一項與常數項皆爲正者，故於二者間之變號必爲偶數。

15. 證：設 $\phi(x)$ 爲對應於負根及虛根之因式之乘積，由上題，已知 $\phi(x)$ 中變號數必爲偶數。今如乘以對應於一正根之因

式於 $\phi(x)$，則其乘積增 $2m+1$ 個變號，如乘以對應於 p 個正根之因式，則其乘積增 p 或 $p+2s$ 個變號，m 及 s 均爲正整數，故如變號數大於正根數，則所餘之變號數必爲偶數。

16. 證：$x^4+x^3-x^2+x-1=0$.

此完全方程式中有 3 變號與一連號，故此方程式最多有 3 正根與一負根。由上題，知變號數如超過正根數，則所餘之數必爲偶數，故正根數如不爲 3 必爲 1. 同理可證負根數必爲 1，因連號數如超過負根數，則超過之數必爲偶數，故負根數必不得爲 0 也。

17. 證：$f(x)=x^{2n}+x^{2n-2}+\cdots\cdots-1=0$.

因此方程式之絕對項爲負數，故知此方程式之變號數必爲奇數，故由本習題問題 15，知正根數不得爲 0，而至少有一個或單數個，又當此方程式變爲 $f(-x)=0$ 時，其變號數亦爲奇數，故知 $f(x)=0$ 之負根數不得爲 0 而至少爲 1，是以絕對項爲負數之偶次方方程式，必有一正根與一負根。

習題 LXXIV

原本第 453 頁

1. 解：$2x^3-3x^2-9x+8=0$.

按笛卡兒法則，§ 830，此方程式正根不能超過二個，負根不能超過一個。

$f(0)=8,\quad f(1)=-2,\quad f(2)=-6,\quad f(3)=8;$

$f(0)=8,\quad f(-1)=12,\ f(-2)=-2.$

答：其根位於 0 與 1，2 與 3，-1 與 -2 之間。

2. 解：$x^3+x^2-4x-2=0$.

此方程式正根不能超過二個，負根不能超過一個。

$f(0)=-2,\quad f(1)=-4,\quad f(2)=2;$

$f(0)=-2,\quad f(-1)=2,\quad f(-2)=2,\quad f(-3)=-8.$

答：其根位於 1 與 2，0 與 -1，-2 與 -3 之間。

3. 解：$x^3-3x^2-2x+5=0$.

此方程式正根不能超過二個，負根不能超過一個。

$f(0)=5,\quad f(1)=1,\quad f(2)=-3,\ f(3)=-1,\ f(4)=13;$

$f(0)=5,\quad f(-1)=3,\ f(-2)=-11.$

答：其根位於 1 與 2，3 與 4，-1 與 -2 之間。

4. 解：$2x^3+3x^2-10x-15=0$.

此方程式正根不能超過一個，負根不能超過二個。

$f(0)=-15,\quad f(1)=-20,\quad f(2)=-7,\ f(3)=36;$

$f(0)=-15,\quad f(-1)=-4,\quad f(-2)=1,\ f(-3)=-12$

答：其根位於 2 與 3，-1 與 -2，-2 與 -3 之間。

5. 解：$x^3-4x^2-4x+12=0$.

此方程式正根不能超過二個，負根不能超過一個。

$f(0)=12,\ f(1)=5,\ f(2)=-4,\ f(3)=-9,$

$f(4)=-4,\ f(5)=17;$

$f(0)=12,\ f(-1)=11,\ f(-2)=-4.$

答：其根位於 1 與 2，4 與 5，-1 與 -2 之間。

6. 解：$x^3+13x^2+54x+71=0$.

此方程式負根不能超過三個。

$f(0)=71,\quad f(-1)=29,\quad f(-2)=7,\quad f(-3)=-1,$

$f(-4)=-1,\quad f(-5)=1,\quad f(-6)=-1.$

答：其根位於 -2 與 -3，-4 與 -5，-5 與 -6 之間。

7. 解：$x^3+5x+19=0$.

此方程式負根不能超過一個，而且必有一個。

$f(0)=19,\quad f(-1)=13,\quad f(-2)=1,\quad f(-3)=-23.$

答：其根位於 -2 與 -3 之間。

8. 解：$x^4-95=0$.

此方程式正根不能超過一個，負根不能超過一個。

$f(0)=-95,\quad f(1)=-94,\quad f(2)=-79,$

$f(3)=-14,\quad f(4)=161;$

$f(0)=-95,\quad f(-1)=-94,\quad f(-2)=-79,$

$f(-3)=-14,\quad f(-4)=161.$

答：其根位於 3 與 4，-3 與 -4 之間。

9. 解：$x^4-8x^3+14x^2+4x-8=0$.

此方程式正根不能超過三個，負根不能超過一個。

$f(0)=-8,\quad f(1)=3,\quad f(2)=8,\quad f(3)=-7,$

$f(4)=-24,\ f(5)=-13,\ f(6)=88;$

$f(0)=-8,\quad f(-1)=11.$

答：其根位於 0 與 1，2 與 3，5 與 6，0 與 -1 之間。

10. 解：$x^4+5x^3+x^2-13x-7=0$.

此方程式正根不能超過一個，負根不能超過三個.

$f(0)=-7,\quad f(1)=-13,\quad f(2)=27;$

$f(0)=-7,\quad f(-1)=3,\quad f(-2)=-1,$

$f(-3)=-13,\ f(-4)=-3,\ f(-5)=23.$

答：故其根位於 1 與 2, 0 與 -1, -1 與 -2, -4 與 -5 之間.

11. 解：$x^4-11x^3+32x^2-4x-46=0$.

此方程式正根不能超過三個，負根不能超過一個.

$f(0)=-46,\quad f(1)=-28,\quad f(2)=2,\quad f(3)=14.$

$f(4)=2,\quad f(5)=-16,\quad f(6)=2;$

$f(0)=-46,\quad f(-1)=2.$

答：其根位於 1 與 2, 4 與 5, 5 與 6, 0 與 -1 之間.

12. 解：$x^5+2x^4-16x^3-24x^2+48x+32=0$.

此方程式正根不能超過二個，負根不能超過三個.

$f(0)=32,\ f(1)=43,\ f(2)=-32,\ f(3)=-67,\ f(4)=352;$

$f(0)=32,\quad f(-1)=-23,\quad f(-2)=-32,$

$f(-3)=23,\quad f(-4)=-32.$

答：其根位於 1 與 2, 2 與 1, 0 與 -1, -2 與 -3, -3 與 -4 之間.

13. 證：設 x 之數值極大時，$f(x)$ 之符號爲其最高方次項之正號.

(1) 任一實係數方程式 $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n=0$ 必有正根負根各一，式中之 n 爲偶數，b_n 爲負數.

當 $x=-\infty$ 時，$f(x)$ 爲正值；$x=0$ 時，$f(x)$ 爲負值，故 $f(x)$ 有一負根位於 $-\infty$ 與 0 之間. 又此方程式之虛根必對對發生，以 k 表示之. 但 $1+k$ 必小於 n, 且 $1+k$ 爲奇數，n 爲偶數，故 $n-(1+k)$ 亦必爲奇數，至少須爲 1, 此卽正根之數也. 是以此方程式必有一正根與一負根.

(2) 方程式 $k^2(x-b)(x-c)+l^2(x-c)(x-a)+m^2(x-a)(x-b)-(x-a)(x-b)(x-c)=0$ 之四根，位於 $-\infty$ 與 a, a 與

b, b 與 c, c 與 ∞ 之間，且設 a, b, c, k, l, m 俱爲實數，又 $a<b<c$.

設 $$f(x)\equiv k^2(x-b)(x-c)+l^2(x-c)(x-a)+m^2(x-a)(x-b)$$
$$-x(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

$$f(-\infty)=-,\qquad f(a)=k^2(a-b)(a-c)=+,$$
$$f(b)=l^2(b-c)(b-a)=-,\ f(c)=m^2(c-a)(c-b)=+,$$
$$f(\infty)=-.$$

故此四根位於 $-\infty$ 與 a, a 與 b, b 與 c, c 與 ∞ 之間。

14. 證：$f(x)=0$, $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^3}$, $f\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{-a^2+3a-1}{a^3}$,

$$f(1)=+.$$

若 $a\geqq 3$, $\frac{1}{a^3}=+$, $\frac{-a^2+3a-1}{a^3}=-$,

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=+,\ f\left(1-\frac{1}{a}\right)=-,\ f(1)=+.$$

故 $a\geqq 3$ 時，則有一根位於 $\frac{1}{a}$ 與 $1-\frac{1}{a}$ 之間，另一根位於 $1-\frac{1}{a}$ 與 1 之間。

15. 證：當 $a\geqq 5$ 時，

$$f(0)=-,\ f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^4}=+,$$

$$f\left(1-\frac{2}{a}\right)=\frac{-a^4+6a^3-32a+16}{a^4}=-,\ f(1)=+.$$

故此方程式之根位於 0 與 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a}$ 與 $1-\frac{2}{a}$, $1-\frac{2}{a}$ 與 1 之間。

習　題　LXXV

原本第 459 頁

1. 解: $x^3+x-3=0$.

```
1+0+1-3 |1.213411
  1+1+2
1+1+2-1
  1+2
1+2+4                      f(0.2)=-, f(0.3)=+
  1
1+30+400-1000 |2
   2+ 64+ 928
1+32+464-  72
   2+ 68                   72/532 = 0.1+
1+34+532
   2
1+360+53200-72000 |1
    1+  361-53561
1+361+53561-18439
    1+  362                18439/53923 = 0.3+
1+362+53923
    1
0.001+3⁴.63+5392.3-18439 |0.003411
            12+16212       2227/5416 = 0.4+
       4+ 5404- 2227
            12
     0.01+5412.6- 2227
                 2168      59/542 = 0.1+
             54.2-  59
                    54     5/54 = 0.1+
              5.4-   5
                     5
               5-    0
```

答：此根爲 1.213411.

2. 解：$x^3+2x-20=0$.

1+0+ 2−20 | 2.469547

2+ 4+12

1+2+ 6− 8

2+ 8

1+4+14

2

1+60+1400−8000 | 4　　　$f(0.4)=-$, $f(0.5)=+$

4+ 256+6624

1+64+1656−1376

4+ 272

1+68+1928

4

1+720+192800−1376000 | 6　　　$f(0.6)=-$, $f(0.7)=+$

6+ 4356+1182936

1+726+197156− 193064

6+ 4392　　　$\frac{193064}{201548}=0.9+$

1+732+201548

6

0.001+7.38+20154.8−193064 | 0.009547

63+181962

7+ 20218− 11102

63　　　$\frac{11102}{20281}=0.5+$

0.07+ 2028.1− 11102

10140　　　$\frac{962}{2028}=0.4+$

2028.8− 962

812　　　$\frac{150}{203}=0.7+$

20.3− 150

140

20− 10

答：此根爲 2.469547.

3. 解：$x^3+6x^2+10x-2=0$.

1+6+10−2 | 0.179981　　　$f_1(0.1)=-$, $f_1(0.2)=+$

1+60+1000−2000 | 1

1+ 61+1061

1+61+1061− 939

1+ 62

1+62+1123　　　$f_2(0.7)=-$, $f_2(0.8)=+$

1

1+630+112300−939000 | 7

7+ 4459+817313

1+637+116759−121687

7+ 4508

1+644+121267　　　$f_3(0.9)=-$, $f_3(1)=+$

7

1+ 6510+12126700−121687000 | 0.009981

9+ 58671+109668339

1+ 6519+12185371− 12018661

9+ 58752

1+ 6528+12244123

9

0.001+65.37+1224412.3− 12018661

$$\frac{12018661}{12244123}=0.9+$$

585+ 11024973

65+ 1224997− 993688

$$\frac{993688}{1225582}=0.8+$$

585

1.65+ 122558.2− 993688

8+ 980528

1+ 122566− 13160

8

0.01+ 12257.4− 13160

$$\frac{13160}{122574}=0.1+$$

```
                            12257
          12257 -             903
```

答: 其根爲 0.179981.

4. 解: $3x^3+5x-40=0.$

```
3+  0+  5-40  |2.137812
    6+12+34
3+  6+17- 6
    6+24
3+12+41
    6
3+180+4100-6000  |1
    3+ 183+4283
3+183+4283-1717
    3+ 186
3+186+4469
    3
3+1890+446900-1717000  |3
      9+   5697+1358791
3+1899+452597-  359209
      9+   5724
3+1908+458321
```

(按 § 842)

```
 9
19+45832-359209  |0.007812
       133+321755
19+45965-  37454
       133
    4609-  37454
           36872
     460-    582
             460
      46-    122
              92
       5-     30
```

答：其根爲 2.137812.

5. 解：$x^3+10x^2+8x-120=0.$

$$
\begin{array}{l}
1+10+\ 8-120 \mid 2.768345 \\
\quad\ 2+24+\ 64 \\
\hline
1+12+32-\ 56 \\
\quad\ 2+28 \\
\hline
1+14+60 \\
\quad\ 2 \\
\hline
1+160+6000-56000 \mid 7 \\
\quad\ 7+1169+50183 \\
\hline
1+167+7169-\ 5817 \\
\quad\ 7+1218 \\
\hline
1+174+8387 \\
\quad\ 7 \\
\hline
1+1810+838700-5817000 \mid 6 \\
\quad\ 6+\ 10896+5097576 \\
\hline
1+1816+849596-\ 719424 \\
\quad\ 6+\ 10932 \\
\hline
1+1822+860528 \\
\quad\ 6 \\
\hline
18+86053-719424 \mid 0.008345 \\
\quad 144+689576 \\
\hline
18+86197-\ 29848 \\
\quad 144 \\
\hline
8634-\ 29848 \\
\quad 25902 \\
\hline
863-\ 3946 \\
\quad 3452 \\
\hline
86-\ 494 \\
\quad 430 \\
\hline
9-\ 64
\end{array}
$$

答：其根爲 2.768345.

6. 解：$2x^3-x^2-9x+1=0.$

```
2-1-9+1 |-1.945341
 -2+3+6
2-3-6+7
 -2+5
2-5-1
 -2
2- 70- 100+7000 |-9
 - 18+ 792-6228
2- 88+ 692+ 772
 - 18+ 954
2-106+1646
 - 18
2-1240+164600+772000 |-4
 -   8+  4992-678368
2-1248+169592+ 93632
 -   8+  5024
2-1256+174616
 -   8
2-13+17462+93632 |-0.005341
        65-87635
 -13+17527+ 5997
        65
      1759+ 5997
         - 5277
       176+  720
         -   704
        18+   16
         -    18
         2-    2
```

答：其根為 -1.945341.

7\. 解：$x^3+x^2-5x-1=0$.

```
1+1-5-1 |1.903211
```

$$\begin{array}{r}
1+2-3 \\
\hline
1+2-3-4 \\
1+3 \\
\hline
1+3+0 \\
1 \\
\hline
1+40+\quad 0-4000 \;|\; 9 \\
9+441+3969 \\
\hline
1+49+441-\quad 31 \\
9+522 \\
\hline
1+58+963 \\
9 \\
\hline
1+6700+9630000-31000000 \;|\; 3 \\
3+\quad 20109+28950327 \\
\hline
1+6703+9650109-\quad 2049673 \\
3+\quad 20118 \\
\hline
1+6706+9670227 \\
3 \\
\hline
67+967023-2049673 \;|\; 0.000211 \\
134+1934314 \\
\hline
67+967157-\quad 115359 \\
134 \\
\hline
96729-\quad 115359 \\
96729 \\
\hline
9673-\quad 18630 \\
9673 \\
\hline
-\quad 8957
\end{array}$$

答：其根爲 1.903211.

8. 解：$x^3-2x^2-23x+70=0.$

$$\begin{array}{r}
1-\quad 2-23+70 \;|\; -5.134578 \\
-\quad 5+35-60 \\
\hline
1-\quad 7+12+10 \\
-\quad 5+60 \\
\hline
1-12+72
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\quad -\ 5 \\
\hline
1-170+7200+10000 \quad |\ -1 \\
\quad -\ 1+171-7371 \\
\hline
1-171+7371+2629 \\
\quad -\ 1+172 \\
\hline
1-172+7543 \\
\quad -\ 1 \\
\hline
1-1730+754300+2629000 \quad |\ -3 \\
\quad -\ 3+5199-2278497 \\
\hline
1-1733+759499+350503 \\
\quad -\ 3+5208 \\
\hline
1-1736+764707 \\
\quad -\ 3 \\
\hline
-17+76471+350503 \quad |\ -0.004578 \\
\qquad 68-306156 \\
\hline
-17+76539+44347 \\
\qquad 68 \\
\hline
\qquad 7661+44347 \\
\qquad\quad -38305 \\
\hline
\qquad 766+6042 \\
\qquad\quad -5362 \\
\hline
\qquad 77+680 \\
\qquad\quad 616 \\
\hline
\qquad 8+64
\end{array}
$$

答：其根爲 -5.134578.

9. 解：$x^4-10x^2-4x+8=0$.

$$
\begin{array}{l}
1-0-10-4+8 \quad |\ 3.236067 \\
\quad 3+9-3-21 \\
\hline
1+3-1-7-13 \\
\quad 3+18+51 \\
\hline
1+6+17+44 \\
\quad 3+27 \\
\hline
1+9+44
\end{array}
$$

```
       3
1+120+4400+44000−130000 |2
     2+ 244+ 9288+106576
1+122+4644+53288− 23424
     2+ 248+ 9784
1+124+4892+63072
     2+ 252
1+126+5144
     2
1+1280+514400+63072000−234240000 |3
      3+  3849+ 1554747+193880241
1+1283+518249+64626747− 40359759
      3+  3858+ 1566321
1+1286+522107+66193068
      3+  3867
1+1289+525974
      3
      1+5260+6619307−40359759 |0.006067
            6+  31596+39905418
      1+5266+6650903−  454341
            6+  31632
      1+5272+6682535
            6
            53+ 668254−  454341
                     0+        0
            1+   66825−  454341
                     6+  400986
                6683.1−   53355
                          46781
                  6683−    6574
```

答：其根爲 3.236067.

10. 解：$x^4+6x^3+12x^2-11x-41=0.$

$1+6+12-11-41 \mid -2.157451$

−2− 8− 8+38
1+4+ 4−19− 3
−2− 4+ 0
1+2+ 0−19
−2+ 0
1+0+ 0
−2
1−20+ 0−19000−30000 | −1
− 1+21− 21+19021
1−21+21−19021−10979
− 1+22− 43
1−22+43−19064
− 1+23
1−23+66
− 1
1−240+ 6600−19064000−109790000 | −5
− 5+ 1225− 39125+ 95515625
1−245+ 7825−19103125 −14274375
− 5+ 1250− 45375
1−250+ 9075−19148500
− 5+ 1275
1−255+10350
− 5
104−1914850−14274375 | −0.007451
− 728+13409046
104−1915578− 865329
− 728
1− 191631+ 865329
− 4+ 766540
1− 191635− 98789
− 4
− 19164− 98789
95820
− 1916− 2962

```
                              1916
                   192 -      1053
```

答：其根爲 -2.157451.

11. 解：$x^3-3x^2-4x+13=0$.

將已知方程式之各根減 2，所得之新方程式爲

$x^3+3x^2-4x+1=0$.

```
1+30-400+1000 |3
   3+ 99- 903
1+33-301+  97
   3+108
1+36-193
   3
1+390-19300+97000 |5
    5+ 1975-86625
1+395-17325+10375
    5+ 2000
1+400-15325
    5
    4-1533+10375 |0.006885
         24- 9054
    4-1509+ 1321
         24
     - 149+ 1321
           - 1192
     -  15+  129
           -  120
     -   2+    9
           -    9
                0
1+30-400+1000 |6
   6+216-1104
1+36-184- 104
   6+252
1+42+ 68
```

```
          6
1+480+  6300−104000 | 9
       9+  4401+100809
1+489+11201−   3191
       9+  4482
1+498+15683
       9
     5+1568−3191 | 0.002021
         10+3156
     5+1578−  35
         10
        159−  35
               0
         16−  35
              32
           2−  3
               2
            −  1
```

答：其二根為 2.356885 與 2.692021.

12. 解：$x^3-3x^2-4x+10=0$

此方程式僅能有二正根與一負根。

$f(0)=10,\ f(1)=4,\ f(2)=-2,\ f(3)=-2,\ f(4)=10;$

$f(0)=10,\ f(-1)=10,\ f(-2)=-2.$

故此三根位於 1 與 2, 3 與 4, −1 與 −2 之間。

(1)
```
1−3−4+10 | 1.602
  1−2− 6
1−2−6+ 4
  1−1
1−1−7
  1
1+  0−700+4000 | 6
    6+ 36−3984
1+  6−664+  16
```

6+ 72
1+12−592
6
1+1800−5920000+16000000 | 2
2+ 3604−11832792
1+1802−5916396+ 4167208
2+ 3608
1+1804+5912788
2
1+1806

(2) 1−3−4+10 | 3.292
3+0−12
1+0−4− 2
3+9
1+3+5
3
1+60+500−2000 | 2
2+124+1248
1+62+624− 752
2+128
1+64+752
2
1+660+75200−752000 | 9
9+ 6021+730989
1+669+81221− 21011
9+ 6102
1+678+87323　　$x=\frac{21011}{87323}=0.2+$
9
1+687

(3) 1−3−4+10 | −1.895
−1+4+ 0
1−4+0+10
−1+5
1−5+5

$$
\begin{array}{l}
\quad -1 \\
\hline
1-60+\ 500+10000\ \underline{|-8} \\
\quad -\ 8+\ 544-\ 8352 \\
\hline
1-68+1044+\ 1648 \\
\quad -\ 8+\ 608 \\
\hline
1-76+1652 \\
\quad -\ 8 \\
\hline
1-840+165200+1648000\ \underline{|-9} \\
\quad -\ \ 9+\ \ 7641-1555569 \\
\hline
1-849+172841+\ \ 92431 \\
\quad -\ \ 9+\ \ 7722 \\
\hline
1-858+180563 \\
\quad -\ \ 9 \\
\hline
1-867
\end{array}
\qquad x=\frac{-92431}{180563}=-0.5+
$$

答： 其根為 1.602, 3.292 與 −1.895.

13. 解： $x^3+x^2-2x-1=0$.

此方程式正根不能超過一個，負根不能超過二個。

$f(0)=-1,\ f(1)=-1,\ f(2)=7;$

$f(0)=-1,\ f(-1)=1,\ f(-2)=-1.$

故其根位於 1 與 2, 0 與 −1, −1 與 −2 之間。

(1)
$$
\begin{array}{l}
1+1-2-1\ \underline{|1.246} \\
\quad\ \ 1+2+0 \\
\hline
1+2+0-1 \\
\quad\ \ 1+3 \\
\hline
1+3+3 \\
\quad\ \ 1 \\
\hline
1+40+300-1000\ \underline{|2} \\
\quad\ \ \ 2+\ 84+\ 768 \\
\hline
1+42+384-\ 232 \\
\quad\ \ \ 2+\ 88 \\
\hline
1+44+472 \\
\quad\ \ \ 2 \\
\hline
1+460+47200-232000\ \underline{|4}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l}
\quad\;\; 4+\ 1856+196224 \\
\hline
1+464+49056-\ 35776 \\
\quad\;\; 4+\ 1872 \\
\hline
1+468+50928 \\
\quad\;\; 4 \\
\hline
1+472
\end{array}
\qquad x=\frac{35776}{50928}=0.6+$$

(2)

$$\begin{array}{l}
1+\ 1-\ \ 2-\ \ \ 1 \ \big|\, -0.445 \\
\quad\ 0+\ \ 0+\ \ \ 0 \\
\hline
1+10-200-1000 \ \big|\, -4 \\
-\ 4-\ 24+\ 806 \\
\hline
1+\ 6-224-\ 104 \\
-\ 4-\ \ 8 \\
\hline
1+\ 2-232 \\
-\ 4 \\
\hline
1-20-23200-104000 \ \big|\, -4 \\
-\ 4+\ \ \ 96+\ 92416 \\
\hline
1-24-23104-\ 11584 \\
\quad\ 4+\ \ 112 \\
\hline
1-28-22992 \\
-\ 4 \\
\hline
1-32
\end{array}
\qquad x=\frac{-11584}{22992}=-0\,5+$$

(3)

$$\begin{array}{l}
1+1-2-1 \ \big|\, -1.802 \\
-1+0+2 \\
\hline
1+0-2+1 \\
-1+1 \\
\hline
1-1-1 \\
-1 \\
\hline
1-20-100+1000 \ \big|\, -8 \\
-\ 8+224-\ 992 \\
\hline
1-28+124+\ \ \ 8 \\
-\ 8+288 \\
\hline
1-36+412
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad -\ 8 \\ \hline 1-440+41200+8000 \ \underline{|-0} \\ \qquad\quad 0+\quad 0+\quad 0 \\ \hline 1-4400+412000+80000 \end{array} \qquad \frac{-80000}{412000}=-0.2$$

答：其根爲 1.246, -0.445, -1.802.

14. 解：$x^3-3x+1=0$.

此方程式正根不能超過二個，負根不能超過一個。

$f(0)=1,\ f(1)=-1,\ f(2)=3;$

$f(0)=1,\ f(-1)=3,\ f(-2)=-1.$

故其根位於 0 與 1, 1 與 2, -1 與 -2 之間。

(1)

$$\begin{array}{l} 1+0-\quad 3+\quad 1 \ \underline{|0.347} \\ \quad 0+\quad 0+\quad 0 \\ \hline 1+0-300+1000 \ \underline{|3} \\ \quad 3+\quad 9-\ 873 \\ \hline 1+3-291+\ 127 \\ \quad 3+\ 18 \\ \hline 1+6-273 \\ \quad 3 \\ \hline 1+\ 90-27300+127000 \ \underline{|4} \\ \qquad 4+\ 376-107696 \\ \hline 1+\ 94-26924+\ 19304 \\ \qquad 4+\ 392 \\ \hline 1+\ 98-26532 \\ \qquad 4 \\ \hline 1+102 \end{array} \qquad x=\frac{19304}{26532}=0.7+$$

(2)

$$\begin{array}{l} 1+0-3+1 \ \underline{|1.532} \\ \quad 1+1-2 \\ \hline 1+1-2-1 \\ \quad 1+2 \\ \hline 1+2+0 \\ \quad 1 \\ \hline 1+30+\quad 0-1000 \ \underline{|5} \\ \qquad 5+175+875 \\ \hline 1+35+175-125 \end{array}$$

$5+200$

$1+40+375$

5

$1+450+37500-125000 \quad |\underline{3}$

$3+\ 1359-116577$

$1+453+38859-\ \ 8423$

$3+\ 1368$

$1+456+40227 \qquad\qquad x=\dfrac{8423}{40227}=0.2+$

3

$1+459$

(3) $1+0-3+1 \quad |\underline{-1.879}$

$-1+1+2$

$1-1-2+3$

$-1+2$

$1-2+0$

-1

$1-30+\ \ 0+3000 \quad |\underline{-8}$

$-\ 8+304-2432$

$1-38+304+\ 568$

$-\ 8+368$

$1-46+672$

$-\ 8$

$1-540+67200+568000 \quad |\underline{-7}$

$-\ \ 7+\ 3829-497203$

$1-547+71029+\ 70797$

$-\ \ 7+\ 3878$

$1-554+74907 \qquad\qquad x=\dfrac{-70797}{74907}=-0.9+$

$-\ \ 7$

$1-561$

答：其根爲 0.347, 1.532；−1.879.

15. 解：$x^4+5x^3+x^2-13x-7=0.$

此方程式之正根不能超過一個，負根不能超過三個。

$f(0)=-7,\ f(1)=-13,\ f(2)=27;$

$f(0)=-7$, $f(-1)=3$, $f(-2)=-1$, $f(-3)=-13$,
$f(-4)=-3$, $f(-5)=83$.

故其根位於 1 與 2, 0 與 −1, −1 與 −2, −4 與 −5 之間。

(1) 1+5+ 1−13− 7 | 1.558
1+ 6+ 7− 6
1+6+ 7− 6−13
1+ 7+14
1+7+14+ 8
1+ 8
1+8+22
1
1+ 90+2200+ 8000−130000 | 5
5+ 475+13375+106875
1+ 95+2675+21375− 23125
5+ 500+15875
1+100+3175+37250
5+ 525
1+105+3700
5
1+1100+370000+37250000−231250000 | 5
5+ 5525+ 1877625+195638125
1+1105+375525+39127625− 35611875
5+ 5550+ 1905375
1+1110+381075+41033000
5+ 5575
1+1115+386650
5
1+1120

$$x=\frac{35611875}{41033000}=0.8+$$

(2) 1+50+100−13000−70000 | −0.578
− 5−225+ 625+61875
1+45−125−12375− 8125
− 5−200+ 1625
1+40−325−10750

$-5-175$

$1+35-500$

-5

$1+300-50000-10750000-81250000 \quad | -7$

$-7-2051+364357+72699501$

$1+293-52051-10385643+8550499$

$-7-2002+378371$

$1+286-54053-10007272$

$-7-1953$

$1+279-56006$

-7

$1+272$

$$x=\frac{-8550499}{10007272}=-0.8+$$

(3) $1+5+1-13-7 \quad | -1.904$

$-1-4+3+10$

$1+4-3-10+3$

$-1-3+6$

$1+3-6-4$

$-1-2$

$1+2-8$

-1

$1+10-800-4000+30000 \quad | -9$

$-9-9+7281-29529$

$1+1-809+3281+471$

$-9+72+6633$

$1-8-737+9914$

$-9+153$

$1-17-584$

-9

$1-26$

$$x=\frac{-471}{9914}=-0.04$$

(4) $1+5+1-13-7 \quad | -4.075$

$-4-4+12+4$

$1+1-3-1-3$

$-4+12-36$

$1-3+9-37$

$$\begin{array}{l} -4+28 \\ \hline 1-7+37 \\ -4 \\ \hline 1-1100+370000-37000000-300000000 \quad \lfloor -7 \\ -\quad 7+\quad 7749-\quad 2644243+277509701 \\ \hline 1-1107+377749-39644243-\quad 22490299 \\ -\quad 7+\quad 7798-\quad 2698829 \\ \hline 1-1114+385547-42343072 \\ -\quad 7+\quad 7847 \\ \hline 1-1121+393394 \\ -\quad 7 \\ \hline 1-1128 \end{array} \qquad x=\frac{-22490299}{42343072}=-0.5+$$

答：其根爲 1.558, −0.578, −1.904, −4.075.

16. 解：$x^3-17=0$.

$f(0)=-17,\ f(1)=-16,\ f(2)=-9,\ f(3)=10.$

故其根位於 2 與 3 之間。

$$\begin{array}{l} 1+0+\ 0-17 \quad \lfloor 2.5712 \\ \quad 2+\ 4+\ 8 \\ \hline 1+2+\ 4-\ 9 \\ \quad 2+\ 8 \\ \hline 1+4+12 \\ \quad 2 \\ \hline 1+60+1200-9000 \quad \lfloor 5 \\ \quad 5+\ 325+7625 \\ \hline 1+65+1525-1375 \\ \quad 5+\ 350 \\ \hline 1+70+1875 \\ \quad 5 \\ \hline 1+750+\ 187500-1375000 \quad \lfloor 7 \\ \quad 7+\quad 5299+1349593 \\ \hline 1+757+\ 192799-\quad 25407 \\ \quad 7+\quad 5348 \\ \hline 1+764+\ 198147 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad 7 \\ \hline 8+19815-25407 \ \underline{|1} \\ \qquad\quad 8+19823 \\ \hline 8+19823-\ 5584 \\ \qquad\quad 8 \\ \hline \quad 1983-\ 5584 \end{array} \qquad x=\frac{5584}{19831}=0.2+$$

答：$\sqrt[3]{17}=2.5712$

17. 解：(1) $x^3-24=0$；其根位於 2 與 3 之間。

$$\begin{array}{l} 1+0+\ 0-24 \ \underline{|2.884} \\ \quad 2+\ 4+\ 8 \\ \hline 1+2+\ 4-16 \\ \quad 2+\ 8 \\ \hline 1+4+12 \\ \quad 2 \\ \hline 1+60+1200-16000 \ \underline{|8} \\ \quad 8+\ 544+13952 \\ \hline 1+68+1744-\ 2048 \\ \quad 8+\ 608 \\ \hline 1+76+2352 \\ \quad 8 \\ \hline 1+840+235200-2048000 \ \underline{|8} \\ \quad 8+\ 6784+1935872 \\ \hline 1+848+241984-\ 112128 \\ \quad 8+\ 6848 \\ \hline 1+856+248832 \\ \quad 8 \\ \hline 1+864 \end{array} \qquad x=\frac{112128}{248832}=0.4+$$

答：$2\sqrt[3]{3}=2.884.$

(2) $x^4-87=0$；其根位於 3 與 4 之間。

$$\begin{array}{l} 1+0+\ 0+\ \ 0-87 \ \underline{|3.054} \\ \quad 3+\ 9+\ 27+81 \\ \hline 1+3+\ 9+\ 27-\ 6 \end{array}$$

3+18+ 81
1+6+27+108
3+27
1+9+54
3
6+1200+540000+108000000−600000000 |5
5+ 6025+ 2730125+553650625
1+1205+546025+110730125− 46349375
5+ 6050+ 1760375
1+1210+552075+112490500
5+ 6075
1+1215+558150
5
1+1220

$x=\frac{46349375}{112490500}=0.4+$

答: $\sqrt[4]{87}=3.054.$

13. 解: $x^3+x^2-2500=0.$

$f(0)=-2500,\ f(10)=-1400,\ f(20)=5900.$

1+ 1− 0−2500 |10
10+110+1100
1+11+110−1400
10+210
1+21+320
10
1+31+320−1400 |3
3+102+1266
1+34+422− 134
3+111
1+37+533
3

$f(3)=-134$

$f(4)=440$

$x=\frac{134}{533}=0.2+$

1+400+53300−134000 |2
2+ 804+108208
1+402+54104− 25792
2+ 808
1+404+54912

$$\frac{2}{1+406} \qquad x=\frac{25792}{54912}=0.4+$$

答：其實根為 13.24.

19. 解：$x^3+5x^2-6x+1=0.$

依笛卡兒法則，知此方程式有二正根與一負根。

$f(0)=1,\ f(1)=1,\ f(2)=17\cdots\cdots.$

依 §803，知 1 為此方程式之上限，故該方程式如有正根在 0 與 1 之間，至少必有二正根。由計算，知 $f(0.2)=+$，$f(0.3)=-$，$f(0.4)=-$，…，$f(0.8)=-$，$f(0.9)=+$；故知該方程式有兩正根，一位於 0.2 與 0.3 之間，一位於 0.8 與 0.9 之間，又 $f(-6)=+$，$f(-7)=-$，故 -6 與 -7 間有一負根。

20. 解：$3x^5+x^4-14x^3-x^2+9x-2=0.$

$$\begin{array}{l|l}
3+1-14-1+9-2 & \frac{2}{3} \\
\quad\ \ 2+\ 2-8-6+2 & \\
\hline
3+3-12-9+3,\ \ 0 & \\
1+1-\ \ 4-3+1 & -1 \\
\ \ -1+\ \ 0+4-1 & \\
\hline
1+0-\ \ 4+1,\ \ 0 &
\end{array}$$

$\phi(x)=x^3-4x+1=0,$

$\phi(0)=+,\ \ \phi(1)=-,$

$\phi(2)=+,\ \ \phi(-2)=+,$

$\phi(-3)=-$

$\therefore$ 0 與 1 間，1 與 2 間，-2 與 -3 間有根。

$$\begin{array}{l|l}
1+0-400+1000 & 0.254 \\
\quad\ 2+\ \ \ 4-\ \ 792 & \\
\hline
1+2-396+\ \ 208 & \\
\quad\ 2+\ \ \ 8 & \\
\hline
1+4-388 & \\
\quad\ 2 & \\
\hline
1+60-38800+208000 & 5 \\
\quad\ \ 5+\ \ \ 325-192375 & \\
\hline
1+65-38475+\ \ 15625 & \\
\quad\ \ 5+\ \ \ 450 & \\
\hline
1+70-37925 & \\
\quad\ \ 5 & \\
\hline
1+75 &
\end{array}$$

$$x=\frac{15625}{37925}=0.4+$$

$$\begin{array}{l|l}
1+0-4+1 & 1.8608 \\
\quad\ 1+1-3 & \\
\hline
1+1-3-2 &
\end{array}$$

1+2
1+2−1
1
1+30−100−2000 | 8
8+304+1632
1+38+204− 368
8+368
1+46+572
8
1+540+57200−368000 | 6
6+ 3276+362856
1+546+60476− 5144
6+ 3312
1−552+63788
6
1+558

$$x=\frac{5144}{63788}=0.08$$

1+0−4+1 | −2.114
−2+4+0
1−2+0+1
−2+8
1−4+8
−2
1−60+800+1000 | −1
− 1+ 61− 861
1−61+861+ 139
− 1− 62
1−62+923
− 1
1−630+92300+139000 | −1
− 1+ 631− 92931
1−631+92931+ 46069
− 1+ 632
1−632+93563

$$\frac{-\quad 1}{1-633} \qquad\qquad x=\frac{-46069}{93563}=-0.4$$

答：其根爲 $\frac{2}{3}$, -1, 0.254, 1.860, -2.114.

習 題 LXXVI

原本第464頁

1. 解：$2x^5-4x^4+x^2-20x.$

$$f'(x)=10x^4-16x^3+2x-20$$
$$f''(x)=40x^3-48x^2+2$$
$$f'''(x)=120x^2-96x$$
$$f^{iv}(x)=240x-96$$
$$f^{v}(x)=240$$

2. 解：$f(x)=x^4-2x^3+1.$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+f'''(x)\frac{h^3}{3!}+f^{iv}(x)\frac{h^4}{4!}$$
$$=(x^4-2x^3+1)+(4x^3-6x^2)h+(12x^2-12x)\frac{h^2}{2!}$$
$$+(24x-12)\frac{h^3}{3!}+24\frac{h^4}{4!}$$
$$=(x^4-2x^3+1)+2(2x^3-3x^2)h+6(x^2-x)h^2$$
$$+2(2x-1)h^3+h^4.$$

3. 解：$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}$

$$+\cdots\cdots+f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

(1) $f(x)=x^4+x^2+1,\quad f'(x)=4x^3+2x,\quad f''(x)=12x^2+2,$
$f'''(x)=24x,\quad f^{iv}(x)=24;$
$f(-1)=3,\quad f'(-1)=-6,\quad f''(-1)/2!=7,$
$f'''(-1)/3!=-4,\quad f^{iv}(-1)/4!=1.$

故 $x^4+x^2+1=3-6(x+1)+7(x+1)^2-4(x+1)^3+(x+1)^4.$

(2) $f(x)=x^5-32,\quad f'(x)=5x^4,\quad f''(x)=20x^3,$
$f'''(x)=60x^2,\quad f^{iv}(x)=120x,\quad f^{v}(x)=120;$
$f(2)=0,\quad f'(2)=80,\quad f''(2)/2!=80,\quad f'''(2)/3!=40,$

$f^{iv}(2)/4!=10,\quad f^{v}(2)/5!=1.$

故 $x^5-32=80(x-2)+80(x-2)^2+40(x-2)^3+10(x-2)^4+(x-2)^5.$

(3) $f(x)=x^3+1,\quad f'(x)=3x^2,\quad f''(x)=6x,\quad f'''(x)=6;$
$F(x)=x^2+1,\quad F'(x)=2x,\quad F''(x)=2;$
$f(1)=2,\quad f'(1)=3,\quad f''(1)/2!=3,\quad f'''(x)/3!=1;$
$F(1)=2,\quad F'(1)=2,\quad F''(1)/2!=1.$

故 $\dfrac{x^3+1}{x^2+1}=\dfrac{2+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3}{2+2(x-1)+(x-1)^2}.$

4. 解：(1) $x^3-3x-2=0.$
$f(x)=x^3-3x-2=0$
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)=0$
故其最高公因式 $\phi(x)=x+1=0$
是以 $f(x)=0$，有 -1 之二重根與另一根爲 $0-2(-1)$ 或 2；即 $-1,-1,2.$

(2) $9x^3+12x^2-11x+2=0.$
$f(x)=9x^3+12x^2-11x+2=0$
$f'(x)=27x^2+24x-11=0$
$\phi(x)=3x-1=0$

故 $f(x)=0$，有 $\dfrac{1}{3}$ 之二重根與另一根 $\left(-\dfrac{12}{9}-\dfrac{2}{3}\right)$ 或 -2；

即 $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ -2.$

(3) $4x^4+12x^2+9=0.$
$f(x)=4x^4+12x^2+9=0$
$f'(x)=16x^3+24x=0$
$\phi(x)=4x^2+6=0$

故 $f(x)=0$，有 $\pm\dfrac{\sqrt{6}i}{2}$ 之二重根；即 $\pm\dfrac{\sqrt{6}i}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{6}i}{2}.$

(4) $x^4-4x^3+8x+4=0.$
$f(x)=x^4-4x^3+8x+4=0$
$f'(x)=4x^3-12x^2+8=0$
$\phi(x)=x^2-2x-2=0$
故 $f(x)=0$，有 $1\pm\sqrt{3}$ 之二重根；即 $1\pm\sqrt{3},1\pm\sqrt{3}.$

(5) $2x^4-12x^3+19x^2-6x+9=0.$

$f(x)=2x^4-12x^3+19x^2-2x+9=0$

$f'(x)=8x^3-36x^2+38x-6=0$

$\phi(x)=x-3=0$

故 $f(x)=0$, 有 3 之二重根，其餘二根爲 $2x^2+1=0$ 之根即 $\pm\frac{\sqrt{2}i}{2}$.

(6) $x^5-x^3-4x^2-3x-2=0.$

$f(x)=x^5-x^3-4x^2-3x-2=0$

$f'(x)=5x^4-3x^2-8x-3=0$

$\phi(x)=x^2+x+1=0$

故 $f(x)=0$,有 $(-1\pm\sqrt{3}i)/2$ 之二重根,其餘一根爲

$-2\left(\frac{-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$ 卽 2.

(7) $x^4-2x^3-x^2-4x+12=0.$

$f(x)=x^4-2x^3-x^2-4x+12=0$

$f'(x)=4x^3-6x^2-2x-4=0$

$\phi(x)=x-2=0$

故 $f(x)=0$, 有 2 之二重根,其餘二根爲 $-1\pm\sqrt{2}i$.

(8) $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0.$

$f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$

$f'(x)=5x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0$

$\phi(x)=(x-1)^2(x+1)=0$

故 $f(x)=0$, 有 1 之三重根，-1 之二重根；卽 1, 1, 1, -1, -1.

(9) $3x^5-2x^4+6x^3-4x^2+3x-2=0.$

$f(x)=3x^5-2x^4+6x^3-4x^2+3x-2=0$

$f'(x)=15x^4-8x^3+18x^2-8x+3=0$

$\phi(x)=x^2+1=0$

故 $f(x)=0$, 有二重根 $\pm i$, 其餘一根爲 $\frac{2}{3}$.

5. 證 $x^n-a^n=0.$

$f(x)=x^n-a^n=0$

$f'(x)=nx^{n-1}=0$

$\phi(x)=1$

此方程式與其第一次導來式皆無公因式，故 $f(x)=0$ 不能有重根。

6. 解: $x^3-12x+a=0$.

$$f(x)=x^3-12x+a=0$$
$$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=0$$
$$x^2=4 \quad \therefore \quad x=\pm 2$$

將 x 之值代入 $f(x)=0$, 得

$$\pm 8 \mp 24+a=0$$
$$\therefore \quad a=\pm 16.$$

7. 解: $3x^3+ax^2+x+b=0$.

$$f(x)=3x^3+ax^2+x+b=0$$
$$f'(x)=9x^2+2ax+1=0$$
$$f''(x)=18x+2a=2(9x+a)=0$$
$$x=-\frac{a}{9} \tag{1}$$

代入 $f'(x)$, 得 $\quad a^2=9 \quad \therefore \quad a=\pm 3.$

代入 (1) 式,得 $\quad x=\mp\frac{3}{9}=\mp\frac{1}{3}.$

將 a 與 x 之值代入 $f(x)$,得

$$\mp\frac{3}{27}\pm\frac{3}{9}\mp\frac{1}{3}+b=0$$
$$\therefore \quad b=\pm\frac{1}{9}.$$

故 a 與 b 之值爲 $3, \frac{1}{9}$ 或 $-3, -\frac{1}{9}$; 其根爲 $-\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{3}$.

8. 證: $x^4+qx^2+s=0$.

$$f(x)=x^4+qx^2+s=0$$
$$f'(x)=4x^3+2qx=2x(2x^2+q)=0$$

$f'(x)=0$ 之根爲 $0, \sqrt{\frac{q}{2}}, -\sqrt{\frac{q}{2}}$, 故 $f'(x)=0$ 無二重根。是以 $f(x)=0$ 不能有一三重根。

9. 解: $x^5-px^2+r=0$.

$$f(x)=x^5-px^2+r=0$$
$$f'(x)=5x^4-2px=x(5x^3-2p)=0$$

$\therefore \quad x=\sqrt[3]{\frac{2p}{5}}$.

代入 $f(x)=0$, 得 $\frac{2p}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{2p}{5}\right)^2}-p\sqrt[3]{\left(\frac{2p}{5}\right)^2}+r=0$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2p}{5}\right)^2}\left[\frac{2p}{5}-p\right]=-r$$

$$\left(\frac{2p}{5}\right)^2\left(-\frac{3p}{5}\right)^3=-r^3$$

$$\frac{-108p^5}{3125}=-r^3$$

$\therefore \quad 108p^5=3125r^3$.

10. **解:** 設 $f(x)=a_0(x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+b_3x^{n-3}+\cdots+b_{n-1}x+b_n)$ ……(1)

$f'(x)=a_0[nx^{n-1}+b_1(n-1)x^{n-2}+b_2(n-2)x^{n-3}+\cdots+b_{n-1}]$ ……(2)

如 $f(x)$ 能被 $f'(x)$ 除盡,則

$kf(x)=(x+b)f'(x)$ ……(3)

將 (3) 兩邊 x 同次方項的係數相等,得

$k=n$

$kb_1=nb+b_1(n-1) \qquad \therefore \quad b_1=nb$

$kb_2=bb_1(n-1)+b_2(n-2) \qquad \therefore \quad b_2=\frac{(n-1)b}{2}b_1=\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}b^2$

$kb_3=bb_2(n-2)+b_3(n-3) \qquad \therefore \quad b_3=\frac{(n-2)b}{3}b_2=\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}b^3$

$kb_n=bb_{n-1} \qquad \therefore \quad b_n=\frac{\underline{|n}}{n\,\underline{|n-1}}b^n=b^n$

將 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 之值代入 (1) 式,得

$$f(x)=a_0\left[x^n+nbx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}b^2x^{n-2}+\cdots+b^n\right]$$
$$=a_0(x+b)^n\equiv(a'x+b')^n.$$

11. 解: $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$ 及 $x^4+x^3-x-1=0$

$f_1(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1=0$

$f_2(x)=x^4+x^3-x-1=0$

$\phi(x)=x^2+x+1=0$ ……………………………… (1)

故其公共根爲$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

以 (1) 式除此二方程式,得下列二式:

$x^2+1=0$ ……………………………… (2)

$x^2-1=0$ ……………………………… (3)

從 (2) 式,得 $x=\pm i$; 從 (3) 式,得 $x=\pm 1$.

故第一方程式之根爲$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\pm i$;

第二方程式之根爲$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, ± 1.

12. 解: $x^3-20x-16=0$, $x^3-x^2-3x-1=0$.

$f_1(x)=x^3-20x-16=0$

$f_2(x)=x^3-x^2-3x-1=0$

以 2 乘 $f_2(x)=0$ 之各根,得一方程式

$f_3(x)=x^3-2x^2-12x-8=0$.

$f_1(x)=0$ 與 $f_3(x)=0$ 之 H. C. F. 爲 $\phi(x)=x^2-4x-4=0$

$\therefore\quad x=2\pm\sqrt{4+4}=2\pm2\sqrt{2}$

故　$f_1(x)=0$ 之根爲 $2\pm2\sqrt{2}$ 與 -4,

$f_2(x)=0$ 之根爲 $1\pm\sqrt{2}$ 與 -1.

13. 證: 設該方程有一無理重根 $a+\sqrt{b}$, 則 $a-\sqrt{b}$ 亦必爲其重根, 因方程之係數爲有理也; 如是該三次方程將有 4 個根, 此爲不合理; 故該方程如有重根, 則該重根必爲有理者.

14. 證: 設該方程有一重根, 且爲無理者, 如 $a+\sqrt{b}$, 則 $a-\sqrt{b}$ 亦必爲其重根; 故 $f(x)$ 必成爲 $(x-a+\sqrt{b})^2(x-a-\sqrt{b})^2$, 卽 $[(x-a)^2-b]^2$ 爲一完全平方. 故 $f(x)=0$, 如 $f(x)$ 不爲一完全平方,不得有無理重根.

15. 證: 由 849 節,知 $f(x)$ 可化爲

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{\underline{|2}}(x-a)^2$$
$$+\cdots\cdots\frac{f^{r-1}(a)}{\underline{|r-1}}(x-a)^{r-1}+\frac{f^r(a)}{\underline{|r}}(x-a)^r$$
$$+\cdots\cdots\frac{f^n(a)}{\underline{|n}}(x-a)^n+\cdots\cdots$$

如 $f(x)=0$ 有一 r 次重根 a, 則 $f(x)$ 必為 $(x-a)^r$ 除盡。

$\therefore\quad f(a)=f'(a)=f''(a)=\cdots\cdots=f^{r-1}(a)=0$

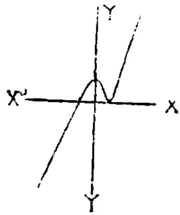
即 a 為 $f'(x)=0,\ f''(x)=0,\ \cdots\cdots f^{r-1}(x)=0$ 之根。

習 題 LXXVII

原本第471頁

1. 解: $f(x)=(x+1)(x-2)^2=x^3-3x^2+4$.

當 $x=-\infty$, $f(x)=-\infty$; 當 x 位於 $-\infty$ 與 -1 之間, $f(x)$ 為負; 當 $x=-1, f(x)=0$; 當 x 位於 -1 與 2 之間, $f(x)$ 為正; 當 $x=2, f(x)=0$; 當 x 位於 2 與 ∞ 之間, $f(x)$ 為正; 當 $x=\infty$, $f(x)=\infty$.

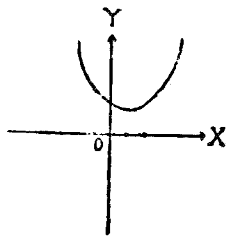


$f'(x)=3x^2-6x$ 之根為 0 與 2, 當 $x<0$ 與 $x>2$ 時, $f'(x)$ 為正,故 $f(x)$ 之值繼續增加, 但 x 位於 0 與 2 之間, $f'(x)$ 為負。故 $f(x)$ 之值繼續減少。

$f''(x)=6x-6$; 當 $x=0$ 與 2. $f'(x)=0$, $f''(0)=-6<0$, $f(0)=4$ 為 $f(x)$ 之最大值, $f''(2)=6>0$, $f(2)=0$ 為 $f(x)$ 之最小值。

2. 解: (1) $2x^2-x+1$.

$f(x)=2x^2-x+1=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$.



當 $x=\pm\infty$, $f(x)=\infty$; 當 $x=$ 任何值時, $f(x)$ 為正, 故其曲線不經過 x 軸。

$f'(x)=4x-1$, 故 $x=\frac{1}{4}$ 時 $f'(x)$ 為 0.

當 x 在 $-\infty$ 與 $\frac{1}{4}$ 間, $f'(x)<0$, $\therefore f(x)$

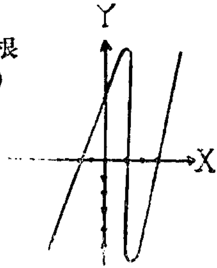
之值常減；當 x 在 $\frac{1}{4}$ 與 ∞ 間，$f'(x)>0$，$\therefore$ $f(x)$ 之值常增。

當 $x=\frac{1}{4}$ 時，$f'(x)=0$，$f''(x)=4>0$.

故當 $x=\frac{1}{4}$ 時，有一最小值 $f\left(\frac{1}{4}\right)$ 即 $\frac{7}{8}$.

(2)　$(x+1)(x-2)(2x-1)=2x^3-3x^2-3x+2$.

當 $x=-\infty$，$f(x)=-\infty$；當 x 位於 $-\infty$ 與 -1 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=-1$，$f(x)=0$；當 x 位於 -1 與 $\frac{1}{2}$ 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=\frac{1}{2}$，$f(x)=0$；當 x 位於 $\frac{1}{2}$ 與 2 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=2$，$f(x)=0$；當 x 位於 2 與 ∞ 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=\infty$，$f(x)=\infty$.



$f'(x)=6x^2-6x-3=3(2x^2-2x-1)$，其根爲 $(1\pm\sqrt{3})/2$，當 $x<(1+\sqrt{3})/2$，$f(x)$ 爲負，$\therefore$ $f(x)$ 之值漸減，$x>(1+\sqrt{3})/2$.
$f'(x)$ 爲正，故 $f(x)$ 之值漸增。

$f''(x)=12x-6=6(2x-1)$.

設　$x=(1+\sqrt{3})/2=1.366$，$f'(x)=0$，

　　$f''(x)=6\sqrt{3}>0$.

設　$x=(1-\sqrt{3})/2=0.366$，$f'(x)=0$，$f''(x)=-6\sqrt{3}<0$.

故當 $x=(1+\sqrt{3})/2$ 時，有一最小值 $-3\sqrt{3}$；$x=(1-\sqrt{3})/2$ 時，有一最大值 $3\sqrt{3}$.

(3)　$x^3-12x+14$.

$f(x)=x^3-12x+14$ 之三根爲 $1.3+$，$2.3+$，$-3.2+$.

當 $x=-\infty$，$f(x)=-\infty$；當 x 位於 $-\infty$ 與 $-3.2+$ 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=-3.2+$，$f(x)=0$；當 x 位於 $-3.2+$ 與 $1.3+$ 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=1.3+$，$f(x)=0$；當 x 位於 $1.3+$ 與 $2.3+$ 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=2.3+$，$f(x)=0$；當 x 位於 $2.3+$ 與 ∞ 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=\infty$，$f(x)=\infty$.

$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)$，$f''(x)=6x$.

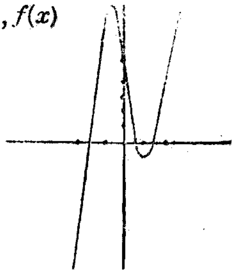
設　$x=-2$，　$f'(x)=0$，　$f''(x)=-12<0$.

設　$x-2$，　$f'(x)=0$，　$f''(x)=12>0$.

故當 x 在 $-\infty$ 與 -2 及 2 與 ∞ 之間，$f'(x)>0$ 而 $f(x)$ 之值

漸增；當 x 在 -2 與 2 之間，$f'(x)<0$，$f(x)$ 之值漸減。

又當 $x=-2$ 時，有一最大值 30；$x=2$ 時，有一最小值 -2。



(4) x^3-5x^2+3x+9.

$f(x)=x^3-5x^2+3x+9=(x+1)(x-3)^2$.

當 $x=-\infty$，$f(x)=-\infty$；當 x 位於 $-\infty$ 與 -1 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=-1$，$f(x)=0$；當 x 位於 -1 與 3 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=3$，$f(x)=0$；當 x 位於 3 與 ∞ 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=\infty$，$f(x)=\infty$.

$$f'(x)=3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3).\quad f''(x)=6x-10.$$

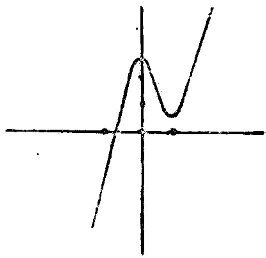
設 $x=\frac{1}{3}$，$f'(x)=0$，$f''(x)=-8<0$；

$x=3$，$f'(x)=0$，$f''(x)=8>0$.

故當 $x=\frac{1}{3}$ 時，有一最大值；$x=3$ 時，有一最小值。

(5) x^3-3x^2+5.

$f(x)=x^3-3x^2+5$. 此方程式有一負根位於 -1 與 -2 之間，名之曰 a，其餘二根爲虛根。



當 $x=-\infty$，$f(x)=-\infty$；當 x 位於 $-\infty$ 與 a 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=a$，$f(x)=0$；當 x 位於 a 與 ∞ 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=\infty$，$f(x)=\infty$.

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2),\quad f''(x)=6x-6.$$

設 $x=0$，$f'(x)=0$，$f''(x)=-6<0$；

$x=2$，$f'(x)=0$，$f''(x)=6>0$.

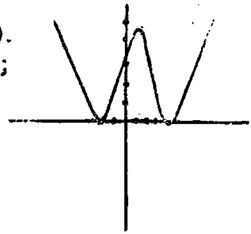
故當 $x=0$ 時，有一最大值；$x=2$ 時，有一最小值。

(6) $(x+1)^2(x-2)^2$.

$$f(x)=(x+1)^2(x-2)^2=x^4-2x^3-3x^2+4x+4.$$

當 $x=\pm\infty$，$f(x)=\infty$；當 $x=-1$ 或 2 時，$f(x)=0$；當 $x<-1$ 或 $x>2$ 時，$f(x)$ 爲正；當 x 位於 -1 與 2 之間，$f(x)$ 爲正，即 x 之任何值，$f(x)$ 皆爲正。

$f'(x)=4x^3-6x^2-6x+4$
$\quad=2(2x-1)(x-2)(x+1),$
$f''(x)=12x^2-12x-6=6(2x^2-x-1).$

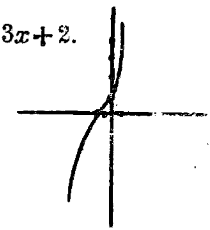


設　$x=\frac{1}{2},\quad f'(x)=0,\ f''(x)=-9<0;$
　　$x=-1,\ f'(x)=0,\ f''(x)=12>0;$
　　$x=2,\quad f'(x)=0,\ f''(x)=30>0.$

故當 $x=\frac{1}{2}$ 時,有一最大值 $\frac{81}{16}$, $x=-1$ 或 2 時,有一最小值 0.

(7)　$(x^2+x+1)(x+2)$.

$f(x)=(x^2+x+1)(x+2)=x^3+3x^2+3x+2.$



此方程式有一負根爲 -2,其餘二根爲虛根。

當 $x=-\infty$, $f(x)=-\infty$; 當 x 位於 $-\infty$ 與 -2 之間,$f(x)$ 爲負;當 $x=-2$, $f(x)=0$; 當 x 位於 -2 與 ∞ 之間,$f(x)$ 爲正;當 $x=\infty$, $f(x)=\infty$.

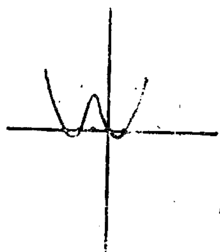
$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2,\ f''(x)=6(x+1).$

設　$x=-1,\ f'(x)=0,\ f''(x)=0.$

故此方程式無最大值,亦無最小值。

(8)　$x(x-1)(x+2)(x+3)$.

$f(x)=x(x-1)(x+2)(x+3)=x^4+4x^3+x^2-6x.$



當 $x=\pm\infty$, $f(x)=\infty$; 當 x 位於 $-\infty$ 與 -3 之間, $f(x)$ 爲正; 當 $x=-3$, $f(x)=0$; 當 x 位於 -3 與 -2 之間, $f(x)$ 爲負;當 $x=-2$, $f(x)=0$; 當 x 位於 -2 與 0 之間, $f(x)$ 爲正;當 $x=0$, $f(x)=0$; 當 x 位於 0 與 1 之間, $f(x)$ 爲負;當 $x=1$, $f(x)=0$;當 x 位於 1 與 ∞ 之間, $f(x)$ 爲正;當 $x=\infty$, $f(x)=\infty$.

$f'(x)=4x^3+12x^2+2x-6=2(x+1)(2x^2+4x-3),$
$f''(x)=12x^2+24x+2.$

設　$x=-1,\ f'(x)=0\ f''(x)=-10<0.$

設　$x=-(2\pm\sqrt{10})/2, f'(x)=0,\ f''(x)=(35\pm 13\sqrt{10})/2>0.$

故當 $x=-1$ 時,有一最大值; $x=-(2\pm\sqrt{10})/2$ 時,有二最小值。

3. 解:

(1) $$y=\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)} \quad (\text{圖 I})$$

x	-1,	$-\frac{1}{2}$,	0,	$\frac{1}{2}$,	1,	$\frac{3}{2}$,	2,	$\frac{5}{2}$,	3,	$\frac{7}{2}$,	4
y	$\frac{1}{6}$,	$\frac{3}{35}$,	0,	$-\frac{1}{15}$,	0,	1,	∞,	-15,	∞,	$\frac{35}{3}$,	6

(2) $$y=\frac{x(x-2)}{(x-1)(x-3)} \quad (\text{圖 II})$$

x	-1,	$-\frac{1}{2}$,	0,	$\frac{1}{2}$,	1,	$\frac{3}{2}$,	2,	$\frac{5}{2}$,	3,	$\frac{7}{2}$,	4
y	$\frac{3}{8}$,	$\frac{5}{21}$,	0,	$-\frac{3}{5}$,	$\pm\infty$,	1,	0,	$-\frac{5}{3}$,	$\pm\infty$,	$\frac{21}{5}$,	$\frac{8}{3}$.

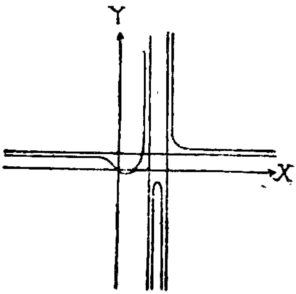


圖 I.

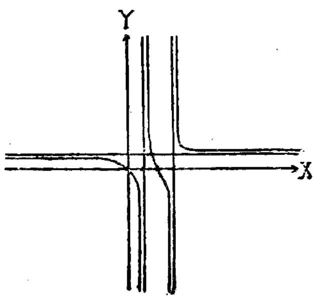


圖 II.

習題 LXXVIII

原本第477頁

1. 解: $x^3-6x^2+5x+13=0$.

$f(x)=x^3-6x^2+5x+13$, $f_1(x)=3x^2-12x+5$.

$3-12+5$	$1-6+5+13$	$1-2$
$6-24+10$	$3-18+15+39$	$\therefore f(x)=x^3-6x^2+5x+13$
$6-21$	$3-12+5$	$f_1(x)=3x^2-12x+5$
$-3+10$	$-6+10+39$	$f_2(x)=2x-7$
$-6+20$	$-6+24-10$	$f_3=1$
$-6+21$	$-14+49$	$3-3$
-1	$\therefore f_2=2-7$	
$\therefore f_3=1$		

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3
$x=-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x=0$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$

故 $f(x)=0$, 有二正根與一負根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3
$x=0$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x=1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x=2$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x=3$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x=4$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x=-1$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x=-2$	$-$	$+$	$-$	$+$

答：二正根位於 3 與 4 之間，負根位於 -1 與 -2 之間。

2. 解：$x^3-4x^2-10x+41=0$.

$f(x)=x^3-4x^2-10x+41$, $f_1(x)=3x^2-8x-10$.

3 − 8 − 10	1 − 4 − 10 + 41	1 − 4
76 − 736 − 920	3 − 12 − 30 + 123	
76 − 987	3 − 8 − 10	∴ $f(x)$
251 − 920	− 4 − 20 + 123	$=x^3-4x^2-10x+41$
23092 − 84640	− 12 − 60 + 369	$f_1(x)=3x^2-8x-10$
23092 − 82579	− 12 + 32 + 40	$f_2(x)=92x-329$
− 2061	− 92 + 329	$f_3=2061$
∴ $f_3=2061$	∴ $f_2=92-329$	3 + 251

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3
$x=-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$

故 $f(x)=0$, 有二正根與一負根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x=1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x=2$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x=3$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x=4$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x=-1$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x=-2$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x=-3$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x=-4$	$-$	$+$	$-$	$+$

答：二正根位於 3 與 4 之間，負根位於 −3 與 −4 之間。

3. 解：$x^3+5x+2=0$.

$f(x)=x^3+5x+2$, $f_1(x)=3x^2+5$.

3+ 0+ 5	1+0+ 5+2	1
15+ 0+ 25	3+0+15+6	∴ $f_2(x)=-5x-3$
15+ 9	3+0+ 5	$f_3=-152$
− 9+ 25	10+6	
−45+125	∴ $f_2=-5-3$	−3+9
−45− 27		
152		
∴ $f_3=-152$		

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3
$x=-\infty$	−	+	+	−
$x=0$	+	+	−	−
$x=\infty$	+	+	−	−

故 $f(x)=0$, 有一負根與二虛根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3
$x=0$	+	+	−	−
$x=-1$	−	+	+	−

答：此負根位於 0 與 −1 之間。

4. 解：$x^3+3x^2+8x+8=0$.

$f(x)=x^3+3x^2+8x+8$, $f_1(x)=3x^2+6x+8$.

3+ 6+ 8	1+3+ 8+ 8	1+1
15+30+ 40	3+9+24+24	
15+24	3+6+ 8	∴ $f_2(x)=-5x-8$
6+ 40	3+16+24	$f_3=-152$
30+200	3+ 6+ 8	
30+ 48	10+16	−3−6
152	∴ $f_2=-5-8$	
∴ $f_3=-152$		

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3
$x=-\infty$	−	+	+	−
$x=0$	+	+	−	−
$x=\infty$	+	+	−	−

故 $f(x)=0$, 有一負根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3
$x=0$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x=-1$	$-$	$+$	$-$	$-$
$x=-2$	$-$	$+$	$+$	$-$

答：此負根位於 -1 與 -2 之間。

5. 解：$x^3-x^2-15x+28=0.$

$f(x)=x^3-x^2-15x+28$，$f_1(x)=3x^2-2x-15.$

$3-$	$2-$	15	$1-1-15+\ 28$	1
$276-$	$184-$	1380	$3-3-45+\ 84$	$\therefore\ f_2=92x-237$
$276-$	711		$3-2-15$	
	$527-$	1380	$-1-30+\ 84$	-1
	$48484-$	126960	$-3-90+252$	$f_3=2061$
	$48484-$	124899	$-3+\ 2+\ 15$	
	$-$	2061	$-92+237$	3
	$\therefore\ f_3=2061$		$\therefore\ f_2=92-237$	

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3
$x=-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$

故 $f(x)=0$，有二正根與一負根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x=1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x=2$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x=3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x=-1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x=-2$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x=-3$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x=-4$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x=-5$	$-$	$+$	$-$	$+$

答：二正根位於 2 與 3 之間，負根位於 -4 與 -5 之間。

6. 解：$x^4-4x^3-5x^2+18x+20=0.$

$f(x)=x^4-4x^3-5x^2+18x+20,$

$f_1(x)=4x^3-12x^2-10x+18$

```
  4 -  12 -  10 +  18  | 1 -  4 -  5 + 18 + 20  | 1 - 1
 44 - 132 - 110 + 198  | 4 - 16 - 20 + 72 + 80  |
 44 -  88 - 196        | 4 - 12 - 10 + 18       |
 ---------------------------------------------
     -  44 +  86 + 198 |   -  4 - 10 + 54 + 80  |
     -  44 +  88 + 196 |   -  4 + 12 + 10 - 18  |
 ---------------------------------------------
          -   2 +   2  |       - 22 + 44 + 98   |
   ∴ f3 = 1 - 1        |       - 11 + 22 + 49   |
                       |  ∴ f2 = 11 - 22 - 49   | 4 - 4
                       |         11 - 11        | 11 - 11
                       |  ----------------------
                       |            - 11 - 49   |
                       |            - 11 + 11   |
                       |  ----------------------
                       |                 - 60   |
                       |     ∴ f4 = 60          |
```

$\therefore\ f_2(x)=11x^2-22x-49,\ f_3(x)=x-1,\ f_4=60.$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4
$x=-\infty$	+	−	+	−	+
$x=0$	+	+	−	−	+
$x=\infty$	+	+	+	+	+

故 $f(x)=0$，有二正根與二負根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4
$x=0$	+	+	−	−	+
$x=1$	+	+	−	+	+
$x=2$	+	−	−	+	+
$x=3$	+	−	−	+	+
$x=4$	+	+	+	+	+
$x=-1$	+	+	−	−	+
$x=-2$	+	−	+	−	+

答：二正根位於 3 與 4 之間，二負根位於 -1 與 -2 之間。

7. 解：$2x^4-3x^2+3x-1=0.$

$f(x)=2x^4-3x^2+3x-1,\ f_1(x)=8x^3-6x+3.$

$8+0-6+3$	$2+0-3+3-1$	1
$48+0-36+18$	$8+0-12+12-4$	
$48-72+32$	$8+0-6+3$	
$72-68+18$	$-6+9-4$	
$72-108+48$	$\therefore\ f_2=6-9+4$	$8+2$
$40-30$	$24-36+16$	-6
$\therefore\ f_3=-4+3$	$24-18$	
	$-18+16$	
	$-36+32$	9
	$-36+27$	
	5	
	$\therefore\ f_4=-5$	

$\therefore\ f_2(x)=6x^2-9x+4,\ f_3(x)=-4x+3,\ f_4=-5.$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4
$x=-\infty$	+	−	+	+	−
$x=0$	−	+	+	+	−
$x=\infty$	+	+	+	−	−

故 $f(x)=0$, 有一正根與二負根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4
$x=0$	−	+	+	+	−
$x=1$	+	+	+	−	−
$x=-1$	−	+	+	+	−
$x=-2$	+	−	+	+	−

答：正根位於 0 與 1 之間，二負根位於 −1 與 −2 之間.

3. 解：$x^4-8x^3+19x^2-12x+2=0.$

$f(x)=x^4-8x^3+19x^2-12x+2,\ f_1(x)=4x^3-24x^2+38x-12.$

$4-24+38-12$	$1-8+19-12+2$	
$20-120+190-60$	$4-32+76-48+8$	$1-2$
$20-80+32$	$4-24+38-12$	
$-40+158-60$	$-8+38-36+8$	
$-40+160-64$	$-8+48-76+24$	
$-2+4$	$-10+40-16$	
$\therefore\ f_3=1-2$	$\therefore\ f_2=5-20+8$	$-2-4$

1−2	5−20+ 8	5
	5−10	
	−10+ 8	−10
	−10+20	
	−12	
	∴ $f_4=12$	

$\therefore\ f_2(x)=5x^2-20x+8$

$f_3(x)=x-2$

$f_4=12$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4
$x=-\infty$	+	−	+	−	+
$x=0$	+	−	+	−	+
$x=\infty$	+	+	+	+	+

故 $f(x)=0$，有四正根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4
$x=0$	+	−	+	−	+
$x=1$	+	+	−	−	+
$x=2$	+	+	−	+	+
$x=3$	+	−	−	+	+
$x=4$	+	+	+	+	+

答：二根位於 0 與 1 之間，二根位於 3 與 4 之間。

9 解：$x^4-12x^2+12x-3=0$.

$f(x)=x^4-12x^2+12x-3$, $f_1(x)=4x^3-24x+12$.

4+0−24+12	1+0−12+ 12− 3	
4−6+ 2	4+0−48+ 48− 12	1
6−26+12	4+0−24+ 12	
6− 9+ 3	−24+ 36− 12	
−17+ 9	∴ $f_2=$ 2− 3+ 1	2+3
∴ $f_3=17-9$	34− 51+ 17	2
	34− 18	
	−33+ 17	
	−561+289	−3
	−561+397	
	− 8	
	∴ $f_4=8$	

$\therefore\ f_2(x)=2x^2-3x+1,\ f_3(x)=17x-9,\ f_4=8.$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4
$x=-\infty$	+	−	+	−	+
$x=0$	−	+	+	−	+
$x=\infty$	+	+	+	+	+

故 $f(x)=0$，有三正根與一負根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4
$x=0$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x=1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x=2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x=3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x=-1$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x=-2$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x=-3$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x=-4$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

答：二正根位於 0 與 1 之間，一正根位於 2 與 3 之間，負根位於 -3 與 -4 之間。

10. 解：$x^4+2x^3-6x^2-8x+9=0$.

$f(x)=x^4+2x^3-6x^2-8x+9$, $f_1(x)=4x^3+6x^2-12x-8$.

$4+\ 6-\ 12-\ 8$	$1+2-\ 6-\ 8+\ 9$	
$2+\ 3-\ 6-\ 4$	$2+4-\ 12-\ 16+\ 18$	1
$30+45-\ 90-\ 60$	$2+3-\ 6-\ 4$	$\therefore f_2(x)=15x^2$
$30+36-\ 80$	$1-\ 6-\ 12+\ 18$	$+18x-40$
$9-\ 10-\ 60$	$2-\ 12-\ 24+\ 36$	1
$45-\ 50-300$	$2+\ 3-\ 6-\ 4$	
$45+\ 54-120$	$-\ 15-\ 18+\ 40$	$f_3(x)=26x+45$
$-104-180$	$\therefore f_2=\ 15+\ 18-\ 40$	$2+3$
$\therefore f_3=\ 26+\ 45$	$390+\ 468-\ 1040$	15
	$390+\ 675$	$f_4=17725$
	$-\ 207-\ 1040$	
	$-5382-27040$	207
	$-5382-\ 9315$	
	-17725	
	$\therefore f_4=17725$	

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4
$x=-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

故 $f(x)=0$ 有二正根與二負根。

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4
$x=0$	+	−	−	+	+
$x=1$	−	−	−	+	+
$x=2$	+	+	+	+	+
$x=-1$	+	+	−	+	+
$x=-2$	+	+	−	−	+
$x=-3$	+	−	+	−	+

答：此方程式之一正根位於 0 與 1 之間，一正根位於 1 與 2 之間，二負根位於 −2 與 −3 之間。

11. 解：$4x^3-2x-5=0$.

$f(x)=4x^2-2x-5$, $f_1(x)=12x^2-2$.

$12+\ \ 0-\ \ 2$	$4+0-2-\ \ 5$	
$12+\ 45$	$12+0-6-15$	1
$-\ 45-\ \ 2$	$12+0-2$	
$-180-\ \ 8$	$-4-15$	$\therefore\ f_2(x)=4x+15$
$-180-675$		$f_3=-677$
667	$\therefore\ f_2=4+15$	$3-45$
$\therefore\ f_3=-667$		

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3
$x=-\infty$	−	+	−	−
$x=\infty$	+	+	+	−

答：$f(x)=0$, 有一實根。

12. 解：$x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$, $f_1(x)=4x^3+3x^2+x+1$.

$4+3+\ 2+\ 1$	$1+1+1+\ 1+\ 1$	
$4+8+12$	$4+4+4+\ 4+\ 4$	1
$-5-10+\ 1$	$4+3+2+\ 1$	
$-5-10-15$	$1+2+\ 3+\ 4$	$\therefore\ f_2(x)$
16	$4+8+12+16$	1 $\quad =-x^2-2x-3$
$\therefore\ f_3=-16$	$4+3+\ 2+\ 1$	$f_3=-16$
	$5+10+15$	
	$\therefore\ f_2=-1-2-3$	$-4+5$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3
$x=-\infty$	+	−	−	−
$x=\infty$	+	+	−	−

答：$f(x)=0$，無實根。

13. 解：$x^n+1=0$.

$f(x)=x^n+1,\quad f_1(x)=nx^{n-1}$.

$n+0+\cdots\cdots$至 $(n-1)$ 項	$1+0+\cdots\cdots+1$
	$n+0+\cdots\cdots+n$
	$n+0+\cdots\cdots$
	n
	$\therefore f_2=-n$

(1) 當 n 爲偶數時：

	$f(x)$	$f_1(x)$	f_2
$x=-\infty$	+	−	−
$x=\infty$	+	+	−

答：當 n 爲偶數時，無實根。

(2) 當 n 爲奇數時：

	$f(x)$	$f_1(x)$	f_2
$x=-\infty$	−	+	−
$x=\infty$	+	+	−

答：當 n 爲奇數時，有一實根。

14. 解：$x^4-6x^3+x^2+14x-14=0$.

$$f(x)=x^4-6x^3+x^2+14x-14,$$

$$f_1(x)=4x^3-18x^2+2x+14.$$

4−	18+	2+	14
2−	9+	1+	7
10−	45+	5+	35
10−	18+	14	
	− 27−	9+	35
	−135−	45+	175
	−135+	243−	189
	−	288+	364
	∴ $f_3=$	72−	91
		−13896+	17563
		−13896+	36288
			−18725
	∴ $f_4=18725$		

1−	6+	1+	14−	14	
2−	12+	2+	28−	28	1
2−	9+	1+	7		
	− 3+	1+	21−	28	
	− 6+	2+	42−	56	−3
	− 6+	27−	3−	21	
		− 25+	45−	35	
∴ $f_2=$		5−	9+	7	2−27
		360−	648+	504	5
		360−	455+	444	
			−193+	60	72

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	f_4
$x=-\infty$	+	−	+	−	+
$x=\infty$	+	+	−	+	+

答：$f(x)=0$，有二實根。

15. 證：題設該方程有 n 個不同的實根，故 $V_{-\infty}-V_{\infty}=n$，式中 $V_{-\infty}$ 示 $x=-\infty$ 時之變號數，V_{∞} 示 $x=\infty$ 時之變號數。

$$\because\quad V_{\infty}\geq 0,\qquad\therefore\quad V_{-\infty}\geq n.$$

因有二項方可生一變號，故史篤姆函數中至少有 $n+1$ 項。又因 $f(x)$ 爲 n 項，故史篤姆函數中至多有 $n+1$ 項。故該史篤姆函數之項數必爲 $n+1$. 因此 $V_{-\infty}=n$ 而 $V_{\infty}=0$，故各函數首項之符號相同。
故此史篤姆函數爲 $n+1$ 項。

16. 證：

$$f(x)=x^3+px+q=0$$
$$f_1(x)=3x^2+p=0$$
$$f_2(x)=-2p^2x-9q=0$$
$$f_3(x)=-4p^2q-27r^3=0$$

$f(x)=0$ 之各根爲實根，且不相等之條件爲 $-p>0$ 與 $4p^3+27q^2<0$. 但前者包括於後者之中，故其條件爲

$$4p^3+27q^2<0.$$

習題 LXXIX

原本第 482 頁

1. 解：$f(x)=x^3+\dfrac{a_1}{a_0}x^2+\dfrac{a_2}{a_0}x+\dfrac{a_3}{a_0}=0$

$$f_1(x)=3x^2+2\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}$$

$$\frac{f(x)}{x-\beta_1}=x^2+\left(\beta_1+\frac{a_1}{a_0}\right)x+\beta_1^2+\frac{a_1}{a_0}\beta_1+\frac{a_2}{a_0}$$

$$\frac{f(x)}{x-\beta_2}=x^2+\left(\beta_2+\frac{a_1}{a_0}\right)x+\beta_2^2+\frac{a_1}{a_0}\beta_2+\frac{a_2}{a_0}$$

$$\frac{f(x)}{x-\beta_3}=x^2+\left(\beta_3+\frac{a_1}{a_0}\right)x+\beta_3^2+\frac{a_1}{a_0}\beta_3+\frac{a_2}{a_0}$$

$$3x^2+2\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}=3x^2+\left(s_1+3\frac{a_1}{a_0}\right)x+\left(s_2+\frac{a_1}{a_0}s_1+3\frac{a_2}{a_0}\right)$$

$$s_1+3\frac{a_1}{a_0}=2\frac{a_1}{a_0} \qquad \therefore \quad s_1=-\frac{a_1}{a_0}.$$

$$s_2+\frac{a_1}{a_0}s_1+3\frac{a_2}{a_0}=\frac{a_2}{a_0} \qquad \therefore \quad s_2=\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-2\frac{a_2}{a_0}.$$

以 x^{k-3} 乘已知方程式，然後以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 之值挨次代替 x，將所得結果加之，得下式：

$$s_k+\frac{a_1}{a_0}s_{k-1}+\frac{a_2}{a_0}s_{k-2}+\frac{a_3}{a_0}s_{k-3}=0.$$

設 $k=3$, $s_3+\frac{a_1}{a_0}s_2+\frac{a_2}{a_0}s_1+3\frac{a_3}{a_0}=0$ (見 p. 430—10).

$$\therefore \quad s_3=-(a_1^3-3a_0a_1a_2+3a_0^2a_3)/a_0^3.$$

設 $k=4$, $s_4+\frac{a_1}{a_0}s_3+\frac{a_2}{a_0}s_2+\frac{a_3}{a_0}s_1=0.$

$$\therefore \quad s_4=(a_1^4-4a_0a_1^2a_2+4a_0^2a_1a_3+2a_0^2a_2^2)/a_0^4.$$

2. 解：根為 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 之方程式為 $rx^3+qx^2+px+1=0$,

$$\therefore \quad b_1=\frac{q}{r}, \quad b_2=\frac{p}{r}, \quad b_3=\frac{1}{r}.$$

$$s_1=\Sigma 1/\alpha=-\frac{q}{r}$$

$$s_2=\Sigma 1/\alpha^2=\frac{q^2}{r^2}-\frac{2p}{r}$$

$$s_3=\Sigma 1/\alpha^3=-(q^3-3pqr+3r^2)/r^3$$

$$\Sigma\alpha\beta^2=s_1s_2-s_3=\frac{3r-pq}{r^2}.$$

3. 解：設 α, β, γ 為 $x^3-2x^2+3x-1=0$ 之各根。

α', β', γ' 為所求方程式之各根。

$$s'_1=\alpha'+\beta'+\gamma'=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=s_3$$

$$s'_2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=\alpha^6+\beta^6+\gamma^6=s_6$$
$$s'_3=\alpha'^3+\beta'^3+\gamma'^3=\alpha^9+\beta^9+\gamma^9=s_9$$
$$s'_1=-b'_1=-b_1s_2-b_2s_1-3b_3=-7$$
$$s'_2=b'^2_1-2b'_2=-b_1s_5-b_2s_4-b_3s_3=25$$
$$s'_3=-b'_1s'_2-b'_2s'_2-3b'_3=-b_1s_8-b_2s_7-b_3s_6=70$$
$$\therefore\quad b'_1=7,\ b'_2=(-25+49)/2=12,$$
$$b'_3=70-155+84=-1.$$

答：所求之方程式爲 $x^3+7x^2+12x-1=0$.

4. 解：(1) $s_1=-b_1=1,\ s_2=b_1^2-2b_2=1-6=-5$.

$$s_3=-b_1s_2-b_2s_1-3b_3=-(5+3+12)=-20,$$
$$s_4=-b_1s_3-b_2s_2-b_3s_1=-20+15-4=-9.$$

(2) $\Sigma\alpha^3\beta^2=s_3s_2\quad s_{3+2}=(-5)(-20)-71=29.$

(3) $\Sigma\alpha^3\beta\gamma=\Sigma\alpha^3\cdot\Sigma\beta\gamma-\Sigma\alpha^4\beta=s_3(s_1^2-s_2)/2-(s_4s_1-s_5)$
$=(-20)(1+5)/2-(-9\times1-71)=-60+80=20.$

(4) $\Sigma\alpha^3\beta^2\gamma=s_3s_2s_1+2s_{3+2+1}-s_{3+2}s_1-s_{3+1}s_2-s_{2+1}s_3=-60.$

(5) $\Sigma 1/\alpha^4=s_{-4}=-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{-111}{64}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{17}{16}\right)$

$$-\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{449}{256}.$$

(6) $\Sigma\alpha^2\beta^2/\gamma=s_2s_2s_{-1}+2s_3-s_4s_{-1}-s_1s_2-s_1s_2=-\frac{111}{4}.$

XXX. 普通三次及四次方程

習題 LXXX

原本第 491 頁

1. 解：$x^3-9x-28=0$.

$$p=-9,\qquad q=-28.$$

$\therefore\quad A=14+\sqrt{196-27}=27,\ B=14-\sqrt{196-27}=1,$

答：其根為 $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{1}$, $\omega\sqrt[3]{27}+\omega^2\sqrt[3]{1}$, $\omega^2\sqrt[3]{27}+\omega\sqrt[3]{1}$；
即 4, $-2\pm i\sqrt{3}$.

2. 解：$x^3-9x^2+9x-8=0$.
以 $x=y+3$ 代入原方程式，得 $y^3-18y-35=0$.

$$p=-18,\qquad q=-35.$$

$$\therefore\ A=\frac{35}{2}+\sqrt{\frac{1225}{4}-216}=\frac{35+19}{2}=27,$$

$$B=\frac{35-19}{2}=8.$$

答：原方程式之根為 $3+\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{8}$, $3+3\omega+2\omega^2=-\omega^2$,
$3+3\omega^2+2\omega=-\omega$；即 8, $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

3. 解：$x^3-3x-4=0$.

$$p=-3,\qquad q=-4.$$

$$\therefore\ A=2+\sqrt{4-\frac{27}{27}}=2+\sqrt{3},\ B=2-\sqrt{3}.$$

答：其根為 $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$, $\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$, $\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}$.

4. 解：$4x^3-7x-6=0$.

$$x^3-\frac{7}{4}x-\frac{3}{2}=0\qquad p=-\frac{7}{4},\ q=-\frac{3}{2}.$$

$$\therefore\quad A=\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{343}{1728}}=\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{972-343}{1728}}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{24}\sqrt{\frac{629}{3}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{72}\sqrt{1887}.$$

$$B=\frac{3}{4}-\frac{1}{72}\sqrt{1887}.$$

答：其根為 $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$, $\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}$, $\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$.

5. 解：$x^3+3x^2+9x-1=0$.
以 $x=y-1$ 代入原方程式，得 $y^3+6y-8=0$.

$$p=6,\qquad q=-8.$$

$$\therefore\ A=4+\sqrt{16+8}=4+2\sqrt{6},\ B=4-2\sqrt{6}.$$

答：原方程式之根為 $-1+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$,
$-1+\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}$, $-1+\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$.

6. 解: $3x^3-9x^2+14x+7=0.$

以 $x=y+1$ 代入原方程式,得 $3y^3+5y+15=0$, 即

$$y^3+\frac{5}{3}y+5=0 \qquad p=\frac{5}{3},\ q=5.$$

$$\therefore\ A=-\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{125}{729}}=-\frac{5}{2}+\frac{5}{54}\sqrt{749},$$

$$B=-\frac{5}{2}-\frac{5}{54}\sqrt{749}.$$

答: 原方程式之根爲 $1+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$, $1+\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}$, $1+\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$.

7. 解: $x^4+x^2+6x+1=0.$

$$a=1,\quad b=6,\quad c=1.$$

代入 $u^3-au^2-4cu+(4ac-b^2)=0$, 得

$$u^3-u^2-4u-32=0.$$

此三次方程式之一根爲 4, 設 $u_1=4$.

應用 $x^2\pm\sqrt{u_1-a}\,x+\left(\frac{u_1}{2}\mp\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0$, 得

$$x^2+\sqrt{3}x+2-\sqrt{3}=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$x^2-\sqrt{3}x+2+\sqrt{3}=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式, $x=\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{-5+4\sqrt{3}}}{2}.$

從 (2) 式, $x=\dfrac{\sqrt{3}\pm i\sqrt{5+4\sqrt{3}}}{2}.$

答: 此方程式之根爲 $(-\sqrt{3}\pm\sqrt{-5+4\sqrt{3}})/2$, $(\sqrt{3}\pm i\sqrt{5+4\sqrt{3}})/2$.

8. 解: $x^4-4x^3+x^2+4x+1=0.$

以 $x=y+1$ 代入原方程式,得 $y^4-5y^2-2y+3=0.$

$$a=-5,\quad b=-2,\quad c=3.$$

$$u^3+5u^2-12u-64=0.$$

其一根爲 4 $\qquad\therefore\ u_1=-4.$

$$y^2+y-1=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$y^2-y-3=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，　$y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

從 (2) 式，　$y=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

答：此方程式之根爲 $1+\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $1+\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$;

即 $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

9. 解：$x^4+12x-5=0$.

$$a=0,\quad b=12,\quad c=-5.$$

$$u^3+20u-144=0.$$

其一根爲 4　$u_1=4$.

$$x^2+2x-1=0 \cdots\cdots(1)$$

$$x^2-2x+5=0 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，　$x=-1\pm\sqrt{2}$.

從 (2) 式，　$x=1\pm 2i$.

答：此方程式之根爲 $-1\pm\sqrt{2}$,　$1\pm 2i$.

10. 解：$x^4+8x^3+11x^2-11x+2=0$.

以 $x=y-2$ 代入原方程式，得 $y^4-12y^2+5y+24=0$.

$$a=-12,\quad b=5,\quad c=24$$

$$u^3+12u^2-96u-1177=0.$$

其一根爲 -11　$\therefore\ u_1=-11$.

$$y^2+y-8=0 \cdots\cdots(1)$$

$$y^2-y-3=0 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，　$y=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$.

從 (2) 式，　$y=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

答：此方程式之根爲 $-2+\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$, $-2+\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$;

即 $\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$, $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

11. 解: $3x^6-2x^5+6x^4-2x^3+6x^2-2x+3=0.$

$$3x^3-2x^2+6x-2+6/x-2/x^2+3/x^3=0.$$

$$3\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0.$$

以 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 代入此方程式,得

$$3(y^3-3y)-2(y^2-2)+6y-2=0$$

即 $$3y^3-2y^2-3y+2=0.$$

$$(y-1)(y+1)(3y-2)=0.$$

$$\therefore\quad y=1,\quad -1,\quad 2/3.$$

$x+\dfrac{1}{x}=1$ 即 $x^2-x+1=0$ ……………………(1)

$x+\dfrac{1}{x}=-1$ 即 $x^2+x+1=0$ ……………………(2)

$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{3}$ 即 $3x^2-2x+3=0$ ……………………(3)

從 (1), (2), (3) 式,得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{1+2\sqrt{2}i}{3};$

即所求之根也。

12. 解: $2x^8-9x^7+18x^6-30x^5+32x^4-30x^3+18x^2-9x+2=0$

$$2x^4-9x^3+18x^2-30x+32-30/x+18/x^2-9/x^3+2/x^4=0.$$

$$2\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-9\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+18\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-30\left(x+\frac{1}{x}\right)+32=0.$$

以 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 代入此方程式,得

$$2(y^4-4y^2+2)-9(y^3-3y)+18(y^2-2)-30y+32=0.$$

$$2y^4-9y^3+10y^2-3y=0.$$

$$y(y-1)(y-3)(2y-1)=0.$$

$$\therefore\quad y=0,\quad 1,\quad 3,\quad \frac{1}{2}.$$

$x+\dfrac{1}{x}=0$ 即 $x^2+1=0$ ……………………………(1)

$x+\dfrac{1}{x}=1$ 即 $x^2-x+1=0$ ……………………………(2)

$$x+\frac{1}{x}=3 \text{ 卽 } x^2-3x+1=0 \cdots\cdots(3)$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \text{ 卽 } 2x^2-x+2=0 \cdots\cdots(4)$$

從 (1), (2), (3), (4) 式，得 $x=\pm i,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2},$

$\frac{1\pm\sqrt{15}i}{4}$；卽所求之各根也.

13. 解：$6x^7-x^6+2x^5-7x^4-7x^3+2x^2-x+6=0.$

此倒數方程式有 1, 1 與 -1 各根，以 $(x-1)^2(x+1)$ 除原方程式，得 $6x^4+5x^3+13x^2+5x+6=0.$

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+13=0.$$

以 $y=x+\frac{1}{x}$ 代入此方程式，得

$$6(y^2-2)+5y+13=0.$$
$$6y^2+5y+1=0.$$
$$(2y+1)(3y+1)=0.$$
$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}.$$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2} \text{ 卽 } 2x^2+x+2=0 \cdots\cdots(1)$$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{3} \text{ 卽 } 3x^2+x+3=0 \cdots\cdots(2)$$

從 (1), (2) 式，得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{4},\ \frac{-1\pm\sqrt{35}i}{6}.$

答：所求之各根爲 1, 1, -1, $\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{4},\ \frac{-1\pm\sqrt{35}i}{6}.$

14. 解：$x^7-1=0$ 有一根爲 1, 以 $x-1$ 除之，得

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$
$$x^3+x^2+x+1+1/x+1/x^2+1/x^3=0.$$
$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

以 $z=x+\frac{1}{x}$ 代入此方程式，得

$$(z^3-3z)+(z^2-2)+z+1=0.$$

$$\therefore\quad z^3+z^2-2z+1=0.$$

15. 解：$x^3+3ax^2+3bx+c=0.$

以 $x=y-a$ 代入原方程式，得

$$y^3+(3b-3a^2)y+2a^3-3ab+c=0.$$

$$p=3(b-a^2),\qquad q=2a^3-3ab+c.$$

$$\therefore\quad A=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ B=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

若其根均為實根，則 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\geqq 0.$

即 $$\frac{(2a^3-3ab+c)^2}{4}+\frac{3^3(b-a^2)^3}{27}\geqq 0.$$

即 $$\frac{(2a^3-3ab+c)^2}{4}+(b-a^2)^3\geqq 0.$$

上式乃所求之條件也。

16. 解：(1) $x^5-1=0.$

$$x^5=1=\cos(2k\pi)+i\sin(2k\pi).$$

$$\therefore\quad x=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5},$$

其中 $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

(2) $x^6+1=0.\qquad x^6-(-1)=0.$

$$x^6=-1=\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi).$$

$$\therefore\quad x=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6},$$

其中 $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$

17. 解：(1) $x^3-3x-1=0.$

$$p=-3,\qquad q=-1.$$

$$r=\left(-\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{27}{27}\right)^{\frac{1}{2}}=1.$$

$$\cos\theta = -\frac{q}{2}\left(-\frac{27}{p^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{27}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{2} = 60^\circ.$$

$$\therefore\quad x_1 = 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3} = 2\cos 20^\circ,$$

$$x_2 = 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+360^\circ}{3} = 2\cos 140^\circ,$$

$$x_3 = 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+720^\circ}{3} = 2\cos 260^\circ.$$

(2) $x^3 - 6x - 4 = 0.$

$$p = -6,\qquad q = -4.$$

$$r = \left(\frac{216}{27}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}.\qquad \cos\theta = 2\left(\frac{27}{216}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ.$$

$\therefore\ x_1 = 2\sqrt{2}\cos 15^\circ,\ x_2 = 2\sqrt{2}\cos 135^\circ,\ x_3 = 2\sqrt{2}\cos 255^\circ.$

18. 解：設 h 表柱體之高，s 表其底之長；則

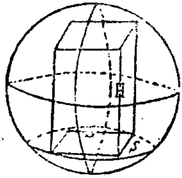
$$2s^2 + h^2 = 27 \cdots\cdots(1)$$

$$h \times s^2 = 27 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，　$s^2 = \dfrac{27-h^2}{2}.$

代入 (2) 式，得　$h^3 - 27h + 54 = 0.$

$\therefore\ h = 3.$



答：其高度爲 3.

19. 解：設底之半徑爲 r，高度爲 h；則

$$50\pi = \pi r^2 h \cdots\cdots(1)$$

$$105\pi r/2 = 2\pi r h + 2\pi r^2 \cdots\cdots(2)$$

從 (1) 式，　$h = 50/r^2 \cdots\cdots(3)$

代入 (2) 式，得 $4r^2 - 105r + 200 = 0.$

$$\therefore\ r = 2\frac{1}{2}.$$

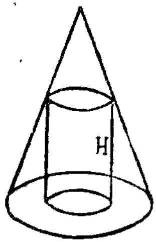
代入 (3) 式，得　$h = 8.$

答：其底之半徑爲 $2\frac{1}{2}$，高度爲 8.

20. 解：設 h 爲圓柱體之高度，r 爲其底之半徑；則

$$\pi r^2h=\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}\pi\,4^2\times 6=\frac{128\,\pi}{9}\cdots\cdots(1)$$

$$4:r=6:(6-h)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$



從 (2) 式，　$r=\frac{2(6-h)}{3}$.

代入 (1) 式，得　$4(6-h)^2h=128$.

$$h^3-12h^2+36h-32=0\cdots\cdots(3)$$

從 (3) 式，　$h=2$.

答：圓柱體之高度爲 2.

XXXI. 行列式及消去法

習題　LXXXI

原本第 497 頁

1. 解：$\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & p & s \\ r & s & p \end{vmatrix}=p^3+qsr+rsq-q^2p-s^2p-r^2p$

$=p^3-p(q^2+s^2+r^2)+2qrs.$

2. 解：$\begin{vmatrix} 1 & x & a \\ 1 & y & b \\ 1 & z & c \end{vmatrix}=yc+xb+az-ay-bz-cx$

$=(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z.$

3. 解：$\begin{vmatrix} p & -q & r \\ q & p & -s \\ -r & s & p \end{vmatrix}=p^3-qsr+qrs+r^2p+s^2p+q^2p$

$=p(p^2+r^2+s^2+q^2).$

4. 解：$\begin{vmatrix} 0 & -q & -r \\ q & 0 & -s \\ r & s & 0 \end{vmatrix}=qrs-qrs=0.$

5. 解：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+2^3+3^3-1\cdot2\cdot3-1\cdot2\cdot3-1\cdot2\cdot3$

$= 36-18 = 18.$

6. 解：$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0+45-8-0-5+42 = 74.$

7. 解：$\begin{vmatrix} 8 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

$= 8(-15)-9(-10) = -120+90 = -30.$

8. 證：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2,$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3,$

$-\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= -b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 - c_1b_2a_3 + c_1a_2b_3 + a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3.$

故此三行列式皆相等.

9. 證：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$

左 $= a_1b_2c_3 + c_1a_2b_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3,$

右 $= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$

$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + c_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$

∴　左式 = 右式.

10. 解：(1) $a_1b_2c_3d_4-a_2b_1c_3d_4$.

(2) $a_1b_2c_3d_4-a_1b_3c_2d_4$.

(3) $-a_2b_3c_4d_1$.

(4) $a_1b_2c_3d_4+a_1b_3c_4d_2+a_1b_4c_2d_3-a_1b_4c_3d_2-a_1b_3c_2d_4-a_1b_2c_4d_3$.

(5) $a_1b_2c_3d_4-a_1b_4c_3d_2+a_2b_4c_3d_1-a_2b_1c_3d_4+a_4b_1c_3d_2-a_4b_2c_3d_1$.

11. 解：(1) $a_2b_4c_3d_1e_5$. 其倒置之數爲四，故其號爲 $+$.

(2) $a_4b_2c_1d_5e_3$. 其倒置之數爲五，故其號爲 $-$.

(3) $a_5b_4c_3d_2e_1$. 其倒置之數爲十，故其號爲 $+$.

(4) $c_4d_2a_3e_4b_5$. 其字母之倒置數爲五，附屬字無，故其號爲 $-$.

(5) $c_1d_2e_3a_4b_5$. 其字母之倒置數爲六，附屬字無，故其號爲 $+$.

(6) $d_3a_2e_4b_1c_5$. 其字母之倒置數爲五，附屬字之倒置數爲四，倒置數之和爲九，故其號爲 $-$.

習　題　LXXXII

原本第 501 頁

1. 解：(1) $\begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix}=3\cdot4\cdot5\begin{vmatrix} 2 & 14 & 9 \\ 2 & -7 & 9 \\ 4 & 7 & 27 \end{vmatrix}$

$=3\cdot4\cdot5\cdot2\cdot7\cdot9\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-22680.$

(2) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0.$

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}=a\cdot d\cdot f\cdot b\cdot c\cdot e\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$=4abcdef.$

2. 證明: $\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$

$$左=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ka_2 & a_2 & a_3 \\ kb_2 & b_2 & b_3 \\ kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} la_3 & a_2 & a_3 \\ lb_3 & b_2 & b_3 \\ lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1 & ma_3 & a_3 \\ b_1 & mb_3 & b_3 \\ c_1 & mc_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ka_2 & ma_3 & a_3 \\ kb_2 & mb_3 & b_3 \\ kc_2 & mc_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} la_3 & ma_3 & a_3 \\ lb_3 & mb_3 & b_3 \\ lc_3 & mc_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3. 證: (1) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a+c & d+b & b \\ a & a+c & d+b & b \\ a & a+c & d+b & d \\ c & a+c & d+b & d \end{vmatrix} = 0.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & p+s \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & p & q+r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p & q & p+q+r+s \\ 1 & q & r & p+q+r+s \\ 1 & r & s & p+q+r+s \\ 1 & s & p & p+q+r+s \end{vmatrix} = 0.$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3 & 1-1 & 4+2 & -1-1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. 證明: $\begin{vmatrix} 1 & p & p^3 \\ 1 & q & q^3 \\ 1 & r & r^3 \end{vmatrix} = (p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r).$

設 $p=q$, 則此行列式 Δ 爲 0, 故 $p-q$ 爲 Δ 之一因式. 因行列式對於 p, q, r 爲對稱,故 $(q-r)(r-p)$ 亦爲因式;又因行列式爲 4 次的齊次式,故 $(p-q)(q-r)(r-p)$ 須再乘以一次的齊次對稱式,即 $k(p+q+r)$ 方得 Δ, 即

$$\Delta=(p-q)(q-r)(r-p)k(p+q+r).$$

因 Δ 中 qr^3 項之係數爲 1, 乘積中 qr^3 項之係數爲 k.

$$\therefore \quad k=1.$$

故　$\Delta=(p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r).$

5. 證明：$\Delta=\begin{vmatrix} (b+c)^2+a(b+c) & ab & ac \\ (c+a)^2+b(c+a) & (c+a)^2 & bc \\ (a+b)c+(a+b)^2 & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} b+c & ab & ac \\ c+a & (c+a)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2 & c+a & a+b \\ c+a & (c+a)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2[2(c+a)^2(a+b)^2+2bc(c+a)(a+b)$$
$$-(a+b)^2(c+a)^2-(c+a)^2(a+b)^2-2b^2c^2]$$
$$=(a+b+c)^2[2a^2bc+2ab^2c+2abc^2]$$
$$=2abc(a+b+c)^3.$$

習　題　LXXXIII

原本第 507 頁

1. 解：$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 9 \\ 7 & 5 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & -4 \end{vmatrix}=0.$

2. 解：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & -7 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -3 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & -7 & 17 \end{vmatrix}=51-55=-4$$

3. 解：$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 10 \\ 6 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 30 \\ 12 & 4 & 8 & 20 \end{vmatrix}=3\cdot 2\cdot 10\cdot 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$$=240\begin{vmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & -14 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

4. 解:
$$\begin{vmatrix} 6 & -4 & 10 & 28 \\ 18 & 6 & -30 & 21 \\ 12 & 24 & 40 & 28 \\ 9 & -2 & 20 & 14 \end{vmatrix}=3\cdot2\cdot10\cdot7\cdot3\cdot4\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{5040}{4}\begin{vmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 8 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -8 \end{vmatrix}=5040\begin{vmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{5040}{3}\begin{vmatrix} 19 & 9 \\ 11 & -6 \end{vmatrix}=5040[(-19)2-11\cdot3]=-357840.$$

5. 解:
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b & -a & -0 \\ -a & 0 & b \\ 0 & b & -a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ab-ab & -a^2+bc & b^2-ac \\ b^2-ac & -ab+ab & bc-a^2 \\ bc-a^2 & -ac+b^2 & ab-ab \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & bc-a^2 & b^2-ac \\ b^2-ac & 0 & bc-a^2 \\ bc-a^2 & b^2-ac & 0 \end{vmatrix}.$$

6. 解:
$$\begin{vmatrix} p & 0 & r \\ p & q & 0 \\ 0 & q & r \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ a & b & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ap+cr & ap & cr \\ ap & ap+bq & bq \\ cr & bq & bq+cr \end{vmatrix}.$$

7. 解:

$$\begin{vmatrix} a & -a & a & a \\ -b & b & b & b \\ c & c & -c & c \\ d & d & d & -d \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & -a & a & a \\ -b & b & b & b \\ c & c & -c & c \\ d & d & d & d \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & -a & a^2+ab & ac+ad \\ -b & b & ab+b^2 & bc+bd \\ c & c & -ac+bc & -c^2+cd \\ d & d & ad-bd & cd-d^2 \end{vmatrix}.$$

8. 解:
$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ m & n & l \\ n & l & m \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} l & m & n \\ m & n & l \\ n & l & m \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} l & m & n \\ m & n & l \\ n & l & m \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} l^2+m^2+n^3 & lm+mn+nl & ln+ml+nm \\ ml+nm+ln & m^2+n^2+l^2 & mn+nl+lm \\ nl+lm+mn & nm+ln+ml & n^2+l^2+m^2 \end{vmatrix}.$$

9. 證明：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^3.$

$$左=\begin{vmatrix} a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3 & a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3 & a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3 \\ b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3 & b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 & b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3 \\ c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3 & c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3 & c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^3.$$

10. 證：$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots\cdots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots\cdots a_{nn}.$$

習 題 LXXXIV

原本第511頁

1. 解：$\begin{cases} 2x+3y-5z=3, \\ x-2y+z=0, \\ 3x+y+3z=7. \end{cases}$

$$x=\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-70}{-49}=\frac{10}{7},$$

$$y=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-49}{-49}=1,$$

$$z=\begin{vmatrix}2&3&3\\1&-2&0\\3&1&7\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2&3&-5\\1&-2&1\\3&1&3\end{vmatrix}=\frac{-28}{-49}=\frac{4}{7}.$$

2. 解：$\begin{cases}2x+4y-3z=3,\\3x-8y+6z=1,\\8x-2y-9z=4.\end{cases}$

$$x=\begin{vmatrix}3&4&-3\\1&-8&6\\4&-2&-9\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2&4&-3\\3&-8&6\\8&-2&-9\end{vmatrix}=\frac{6\times49}{6\times49}=1,$$

$$y=\begin{vmatrix}2&3&-3\\3&1&6\\8&4&-9\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2&4&-3\\3&-8&6\\8&-2&-9\end{vmatrix}=\frac{3\times49}{6\times49}=\frac{1}{2},$$

$$z=\begin{vmatrix}2&4&3\\3&-8&1\\8&-2&4\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2&4&3\\3&-8&6\\8&-2&9\end{vmatrix}=\frac{2\times49}{6\times49}=\frac{1}{3}.$$

3. 解：$\begin{cases}ax+by+cz=d,\\a^2x+b^2y+c^2z=d^2,\\a^3x+b^3y+c^3z=d^3.\end{cases}$

$$x=\begin{vmatrix}d&b&c\\d^2&b^2&c^2\\d^3&b^3&c^3\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=\frac{d\cdot b\cdot c(d-b)(b-c)(c-d)}{a\cdot b\cdot c(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{d(d-b)(d-c)}{a(a-b)(a-c)},$$

$$y=\begin{vmatrix}a&d&c\\a^2&d^2&c^2\\a^3&d^3&c^3\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=\frac{d(d-c)(d-a)}{b(b-c)(b-a)},$$

$$z=\begin{vmatrix}a&b&d\\a^2&b^2&d^2\\a^3&b^3&d^3\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=\frac{d(d-a)(d-b)}{c(c-a)(c-b)}.$$

4. 解：$\begin{cases}2x-4y+3z+4t=-3,\\3x-2y+6z+5t=-1,\\5x+8y+9z+3t=9,\\x-10y-3z-7t=2.\end{cases}$

$$x=\begin{vmatrix}-3&-4&3&4\\-1&-2&6&5\\9&8&9&3\\2&-10&-3&-7\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2&-4&3&4\\3&-2&6&5\\5&8&9&3\\1&-10&-3&-7\end{vmatrix}=1,$$

$$y=\begin{vmatrix}2&-3&3&4\\3&-1&6&5\\5&9&9&3\\1&2&-3&-7\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2&-4&3&4\\3&-2&6&5\\5&8&9&3\\1&-10&-3&-7\end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

$$z=\begin{vmatrix}2&-4&-3&4\\3&-2&-1&5\\5&8&9&3\\1&-10&2&-7\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2&-4&3&4\\3&-2&6&5\\5&8&9&3\\1&-10&-3&-7\end{vmatrix}=\frac{1}{3},$$

$$t=\begin{vmatrix}2&-4&3&-3\\3&-2&6&-1\\5&8&9&9\\1&-10&-3&2\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2&-4&3&-3\\3&-2&6&-1\\5&8&9&9\\1&-10&-3&2\end{vmatrix}=-1.$$

5. 解: $\begin{cases}x+2y-z=0,\\3x-y+4z=0,\\4x+y+3z=0.\end{cases}$

因 $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&-1&4\\4&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\4&1&3\\4&1&3\end{vmatrix}=0.$

又 $A_1=\begin{vmatrix}-1&4\\1&3\end{vmatrix}=-3-4=-7,$

$A_2=-\begin{vmatrix}3&4\\4&3\end{vmatrix}=7,$

$A_3=\begin{vmatrix}3&-1\\4&1\end{vmatrix}=7.$

故 $x:y:z=-1:1:1.$

6. 解: $\begin{cases}a_1x+b_1y+(ka_1+lb_1)z=0,\\a_2x+b_2y+(ka_2+lb_2)z=0,\\a_3x+b_3y+(ka_3+lb_3)z=0.\end{cases}$

因 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&ka_1+lb_1\\a_2&b_2&ka_2+lb_2\\a_3&b_3&ka_3+lb_3\end{vmatrix}=0.$

又 $A_1=\begin{vmatrix}b_2&ka_2+lb_2\\b_3&ka_3+lb_3\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}b_2&a_2\\b_3&a_3\end{vmatrix}+l\begin{vmatrix}b_2&b_2\\b_3&b_3\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}b_2&a_2\\b_3&a_3\end{vmatrix},$

$A_2=-\begin{vmatrix}a_2&ka_2+lb_2\\a_3&ka_3+lb_3\end{vmatrix}=l\begin{vmatrix}b_2&a_2\\b_3&a_3\end{vmatrix},$

$A_3=-\begin{vmatrix}b_2&a_2\\b_3&a_3\end{vmatrix}.$

若 $b_2a_3-a_2b_3\neq 0$, 則 $x:y:z=k:l:-1$.

7. 解: $\begin{cases}4x+3y+z=\lambda x,\\ 3x-4y+7z=\lambda y,\\ x+7y-6z=\lambda z.\end{cases}$ 卽 $\begin{cases}(4-\lambda)x+3y+z=0,\\ 3x-(4+\lambda)y+7z=0,\\ x+7y-(6+\lambda)z=0.\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}4-\lambda & 3 & 1\\ 3 & -(4+\lambda) & 7\\ 1 & 7 & -(6+\lambda)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-\lambda & \lambda & 1\\ 3 & -\lambda & 7\\ 1 & -\lambda & -(6+\lambda)\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}7-\lambda & 0 & 8\\ 3 & -1 & 7\\ -2 & 0 & -(13+\lambda)\end{vmatrix}=\lambda(75-6\lambda-\lambda^2).$$

若此組方程式爲符合,則 Δ 必等於零,卽

$$\lambda(75-6\lambda-\lambda^2)=0.$$
$$\therefore\quad \lambda=0.$$
$$\lambda^2+6\lambda-75=0.$$
$$\therefore\quad \lambda=-3\pm\sqrt{84}=-3\pm 2\sqrt{21}.$$

習 題 LXXXV

原本第 519 頁

1. 解: $6x^2+5x-6=0$ 及 $2x^3+x^2-9x-9=0$.

$$D=\begin{vmatrix}6 & 5 & -6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 5 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 5 & -6\\ 2 & 1 & -9 & -9 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -9 & -9\end{vmatrix}=-2\cdot 3\begin{vmatrix}0 & 2 & 21 & 27 & 0\\ 0 & 6 & 5 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 5 & 2\\ 1 & 1 & -9 & -9 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -9 & 3\end{vmatrix}$$

$$=2\cdot 3\cdot 2\begin{vmatrix}1 & 21 & 27 & 0\\ 3 & 5 & -6 & 0\\ 0 & 6 & 5 & 2\\ 1 & -5 & -14 & 1\end{vmatrix}=12\begin{vmatrix}1 & 21 & 27 & 0\\ 3 & 5 & -6 & 0\\ -2 & 16 & 33 & 0\\ 1 & -5 & -14 & 1\end{vmatrix}$$

$$=12\begin{vmatrix}1 & 21 & 27\\ 0 & -58 & -87\\ 0 & 58 & 87\end{vmatrix}=0.$$

$$\begin{vmatrix}6 & 5 & -6 & 0\\ 0 & 6 & 5 & -6\\ 1 & -9 & -9 & 0\\ 2 & 1 & -9 & -9\end{vmatrix}\div-\begin{vmatrix}0 & 5 & -6 & 0\\ 0 & 6 & 5 & -6\\ 2 & -9 & -9 & 0\\ 0 & 1 & -9 & -9\end{vmatrix}=-\frac{3}{2}.$$

2. 解: $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ 及 $b_0x^2+b_1x+b_2=0$.

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

3. 解：$ax^3+bx^2+cx+d=0$ 及 $x^3=1$.

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b & c & d+a & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} c & d+a & b & 0 \\ b & c & d+a & 0 \\ a & b & c & d \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} d+a & b & c \\ c & d+a & b \\ b & c & d+a \end{vmatrix}$$

$$=-[(a+d)^3+b^3+c^3-3bc(a+d)].$$

4. 解：(1) $x^3+px+q=0$.

$f(x)=x^3+px+q=0,\qquad f'(x)=3x^2+p=0.$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q \\ 0 & -2p & -3q & 0 \\ 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -2p & -3q & 0 \\ 0 & -2p & -3q \\ 3 & 0 & p \end{vmatrix}=4p^3+27q^2.$$

(2) $ax^3+bx^2+c=0$.

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & c \\ 3a & 2b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a & 2b & 0 \end{vmatrix}\div a=\begin{vmatrix} a^2 & ab & 0 & ac \\ -ab & 0 & -3ac & 0 \\ 3a^2 & 2ab & 0 & 0 \\ 0 & 3a^2 & 2ab & 0 \end{vmatrix}\div a^4$$

$$=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot ac}{a^4}\begin{vmatrix} a & b & 0 & 1 \\ -b & 0 & -3c & 0 \\ 3a & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 2b & 0 \end{vmatrix}=-c\begin{vmatrix} -b & 0 & -3c \\ 3a & 2b & 0 \\ 0 & 3a & 2b \end{vmatrix}$$

$$=c(4b^3+27a^2c).$$

5. 解: $f(x)=x^3+x^2-8x-12=0,\quad f'(x)=3x^2+2x-8=0.$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -8 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & -12 \\ 3 & 2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -8 & -12 \\ -1 & 16 & 36 & 0 \\ 3 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$=2\cdot4\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & -3 \\ -1 & 16 & 18 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 17 & 14 & -3 \\ -1 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=8\begin{vmatrix} 17 & -3 & -3 \\ -1 & 9 & 9 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

故 $f(x)=0$, 有一二重根。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -8 & -12 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -8 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & -12 \\ 3 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$=2\cdot4\cdot2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \div (3\cdot4\cdot2\cdot2)\begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -17 & 4 & 11 \\ -25 & 8 & 25 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \div 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 13 & 7 \end{vmatrix} = -\frac{6\times25}{3\times25}=-2.$$

6. 解: $f(x)=x^2-3xy+2y^2-16x-28y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$f(x)=x^2-xy-2y^2-5x-5y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -(3y+16) & (2y^2-28y) & 0 \\ 0 & 1 & -(3y+16) & (2y^2-28y) \\ 1 & -(y+5) & -(2y^2+5y) & 0 \\ 0 & 1 & -(y+5) & -(2y^2+5y) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -(3y+16) & (2y^2-28y) \\ (2y+11) & -(4y^2-23y) & 0 \\ 1 & -(y+5) & -(2y^2+5y) \end{vmatrix}=0.$$

$8y^4-26y^3-115y^2-4y^4+4y^3+478y^2+1540y+8y^4-158y^3$
$+644y^2-12y^3-160y^3-677y^2-880y=0.$

$$-330y^3+330y^2+660y=0.$$

$$y^3-y^2-2y=0.$$
$$y(y^2-y-2)=0.$$
$$y(y+1)(y-2)=0.$$
$$\therefore\quad y=0,\ -1,\ 2.$$

設 $y=0$ 代入 (1) 式,得 $x(x-16)=0.$

代入 (2) 式,得 $x(x-5)=0.$

故有一公解 $(0,\ 0)$

設 $y=-1$ 代入 (1) 式,得 $(x-10)(x-3)=0.$

代入 (2) 式,得 $(x-3)(x-1)=0.$

故有一公解 $(3,\ -1)$

設 $y=2$ 代入 (1) 式,得 $(x+2)(x-24)=0.$

代入 (2) 式,得 $(x+2)(x-9)=0.$

故有一公解 $(-2,\ 2)$

答. $x, y=0, 0;\ 3, -1;\ -2, 2$ 爲兩方程之解答.

XXXII. 無窮級數之收斂

例題之解答

原本第 526 頁

1. 解: (1) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{\sqrt{2^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1)

級數 (1) 爲 P 級數,其中 $P=\dfrac{3}{2}>1$; 故級數 (1) 爲收斂.

(2) $\dfrac{2}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{4}{3\cdot4\cdot5}+\dfrac{6}{4\cdot5\cdot6}+\cdots+\dfrac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots$ (1)

設
$$u_n=\frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$
$$v_n=\frac{2}{n^2}.$$
$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}<1$$

$\therefore$ $\Sigma\ v_n$ 爲收斂,故級數 (1) 爲收斂.

(3) $\dfrac{1}{a(a+b)}+\dfrac{1}{(a+b)(a+2b)}+\dfrac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\cdots\cdots$ (1)

設 $u_n=\dfrac{1}{[a+(n-1)b][a+nb]}=\dfrac{1}{a^2-ab+2nab+n(n-b)b^2}$,

$$v_n=\frac{1}{b^2n^2+(2ab-b^2)n+a^2-ab}.$$

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{b^2n^2}{b^2n^2+(2ab-b^2)n+a^2-ab}.$$

當 n 十分大時，$\dfrac{u_n}{v_n}<2$, 不論 n 之值如何，因 $\Sigma\dfrac{1}{b^2n^2}$ 爲收斂，故級數 (1) 爲收斂。

2. 解：(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n}+$ ………………… (1)

級數 (1) 之各項爲調和級數各項之半，故爲發散級數。

(2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2a+b}+\dfrac{1}{3a+b}+$ ……………………………………(1)

設

$$u_n=\frac{1}{na+b},$$

$$v_n=\frac{1}{n}.$$

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{n}{na+b}=\frac{1}{a+\dfrac{b}{n}}>\frac{1}{2a}.$$

因 $\Sigma\dfrac{1}{n}$ 爲發散，故級數 (1) 爲發散。

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+$ ………………(1)

設

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

$$v_n=\frac{1}{n+1}.$$

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}>1.$$

故級數 (1) 爲發散。

(4) $\dfrac{2}{1+2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{1+3\sqrt{3}}+\dfrac{4}{1+4\sqrt{4}}+$ ………………(1)

設　$u_n=\dfrac{n+1}{1+(n+1)\sqrt{n+1}}$,

$v_n=\dfrac{1}{n+1}$.

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{(n+1)^2}{1+(n+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{n+1}}{\dfrac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}+1}>1.$$

∴　級數 (1) 爲發散。

3. 解: (1)　$u_n=\dfrac{2n-1}{(n+1)(n+2)}$.

$$\frac{1}{2\cdot3}+\frac{3}{3\cdot4}+\frac{5}{4\cdot5}+\frac{7}{5\cdot6}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設　$v_n=\dfrac{1}{n}$.

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{2n^2-n}{n^2+3n+2}=\frac{2-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}.$$

當 n 等於 5 以下之各值時, $\dfrac{u_n}{v_n}>1$.

∴　級數 (1) 爲收斂。

(2)　$u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$.

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{10}+\frac{\sqrt{4}}{17}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設　$v_n=\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{n^2}{n^2+1}<1.$$

∵　$\Sigma\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 爲收斂,　∴ Σu_n 爲收斂。

(3) $$u_n=\frac{n^2-(n-1)^2}{n^3+(n+1)^3}=\frac{2n-1}{2n^3+3n^2+3n+1}.$$

$$\frac{1}{9}+\frac{3}{35}+\frac{5}{91}+\frac{7}{189}+\cdots\cdots.$$

設 $$v_n=\frac{1}{n^2}.$$

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{2n^3-n^2}{2n^3+3n^2+3n+1}<1.$$

∴ Σu_n 爲收斂。

習　題　LXXXVI

原本第530頁

1. 解: $$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots\cdots.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}+1}}{\frac{1}{2^n+1}}=\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}.$$

$$\lim\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}=\frac{1}{2}<1.$$

答: 此級數爲收斂級數。

2. 解: $$\frac{1}{1}+\frac{1\cdot2}{1\cdot3}+\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot3\cdot5}+\cdots\cdots.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}}{\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}}=\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}<1.$$

答: 此級數爲收斂級數。

3. 解: $$\frac{2}{2\cdot3}+\frac{4}{3\cdot4}+\frac{6}{4\cdot5}+\cdots\cdots.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{2(n+1)}{(n+2)(n+3)}}{\dfrac{2n}{(n+1)(n+2)}}=\frac{(n+1)^2}{n(n+3)}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+3n}.$$

$$a'-a=3-2=1.$$

答：此級數爲發散級數。(參看 § 953)

4. 解：$\frac{2}{3}+2\left(\frac{2}{3}\right)^2+3\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)}{n}=\frac{2n+2}{3n}=\frac{2+\frac{2}{n}}{3}.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{3}<1.$$

答：此級數爲收斂級數。

5. 解：$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt[n+2]{3}}}{\dfrac{1}{\sqrt[n+1]{3}}}=\frac{3^{\frac{1}{n+1}}}{3^{\frac{1}{n+2}}}=3^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}=3^{\frac{1}{n^2+3n+2}}>1.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$$

答：此級數爲發散級數。

6. 解：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{a^2+2}+\cdots\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a^2+n-1}{a^2+n}=\frac{n+(a^2-1)}{n+a^2}.$$

$$a^2-(a^2-1)=1.$$

答：此級數爲發散級數。

7. 解：$\frac{2}{4}+\frac{2\cdot4}{4\cdot7}+\frac{2\cdot4\cdot6}{4\cdot7\cdot10}+\cdots+\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+1)}+\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n+2)}{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+4)}}{\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+1)}}=\frac{2n+2}{3n+4}=\frac{2+\dfrac{2}{n}}{3+\dfrac{4}{n}}.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{3}<1.$$

答：此級數爲收斂級數．

8. 解：$\dfrac{2}{4}+\dfrac{2\cdot3}{4\cdot5}+\dfrac{2\cdot3\cdot4}{4\cdot5\cdot6}+\cdots+\dfrac{2\cdot3\cdot4\cdots(n+1)}{4\cdot5\cdot6\cdots(n+3)}+\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{2\cdot3\cdot4\cdots(n+1)(n+2)}{4\cdot5\cdot6\cdots(n+3)(n+4)}}{\dfrac{2\cdot3\cdot4\cdots(n+1)}{4\cdot5\cdot6\cdots(n+3)}}=\frac{n+2}{n+4}.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1,\quad a'-a=4-2=2>1.$$

答：此級數爲收斂級數．

9. 解：$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}+\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots+\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}+\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n+2)}}{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}}=\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{2+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{2}{n}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2n+1}},$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1,\quad a'-a=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1.$$

答：此級數爲發散級數．

10. 解：$u_n=\dfrac{n+1}{n(n+2)}.$

其前四項爲　$\dfrac{2}{1\cdot3}+\dfrac{3}{2\cdot4}+\dfrac{4}{3\cdot5}+\dfrac{5}{4\cdot6}+\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{n+2}{(n+1)(n+3)}}{\dfrac{n+1}{n(n+2)}}=\frac{n^3+4n^2+4n}{n^3+5n^2+7n+3}.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1, \text{ 而 } \quad a'-a=5-4=1.$$

答：此級數為發散級數。

11\. 解：$u_n=\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$.

其前四項為 $\quad \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}}+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{28}}+\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{65}}+\cdots,$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{(n+1)^3+1}}}{\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^3+1}}}=\left(\frac{n^4+n^3+n+1}{n^4+3n^3+3n^2+2n}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\cdots\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{1+\dfrac{\frac{2}{3}}{n}+\cdots}.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1, \text{ 而 } \quad a_n=\frac{2}{3}<1.$$

答：此級數為發散級數。

或設 $\qquad v_n=\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3}}$.

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{\sqrt[3]{n}\cdot\sqrt[3]{n^3}}{\sqrt[3]{n^3+1}}=\sqrt[3]{\frac{n^4}{n^3+1}}.$$

$$\lim\frac{u_n}{v_n}=\infty .$$

因 $\Sigma\dfrac{1}{n}$ 為發散，$\therefore$ Σu_n 為發散。

12\. 解：$u_n=\sqrt{n^2+1}-n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

其前四項為 $(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{10}-3)+(\sqrt{17}-4)$.

設 $\qquad v_n=\dfrac{1}{3n}$.

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{3n}{\sqrt{n^2+1}+n}>1.$$

因 Σv_n 爲發散，故 Σu_n 亦爲發散。

13. 解：$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n}{2n+3}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{\frac{3}{2}}{n}},\qquad a_n=\frac{3}{2}>1.$$

答：此級數爲收斂級數。

14. 解：$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3n^3-2n^2}{3n^3+n^2+1}=\frac{n^3-\frac{2}{3}n^2}{n^3+\frac{1}{3}n^2+\frac{1}{3}}$.

$$a'-a=\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=1.$$

答：此級數爲發散級數。

15. 解：$1+\frac{3}{5}x+\frac{3\cdot6}{5\cdot8}x^2+\frac{3\cdot6\cdot9}{5\cdot8\cdot11}x^3+\cdots$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3n}{3n+2}x=\frac{3}{3+\frac{2}{n}}x.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=x.$$

答：$x<1$ 時，此級數爲收斂級數。

16. 解：$\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^3}+\frac{x^3}{1+x^4}+\cdots$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{x^n}{1+x^{n+1}}}{\frac{x^{n-1}}{1+x^n}}=\frac{x+x^{n+1}}{1+x^{n+1}}.$$

欲 $\frac{x+x^{n+1}}{1+x^{n+1}}<1$，則　$x<1$.

答：$x<1$ 時，此級數爲收斂級數。

17. 證：$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)n}=\dfrac{a+n}{n}>1.$

當 a 爲正值時，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，$\lim\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1.$

故當 a 爲正值時，此級數乃爲發散級數。

18. 證：$\because\ \sqrt[n]{u_n}<r.$

$\therefore\ u_n<r^n.$

卽 $n=1$ 時，$u_1<r;$

$n=2$ 時，$u_1<r^2;$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots$

$n=k$ 時，$u_k<r^k.$

相加，得 $u_1+u_2+\cdots+u_k+\cdots<r+r^2+\cdots+r^k+\cdots$

當 $r<1$，Σr^n 爲收斂，故 Σu_n 亦爲收斂。

習題 LXXXVII

原本第 534 頁

1. 解：(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}-\cdots.$

設 $|u_n|=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}.$

因 $|u_n|<|u_{n-1}|,$

且 $\lim u_n=\lim\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0.$

答：此級數爲收斂級數。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-\cdots.$

$$\lim\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}=1>0.$$

答：此級數爲發散級數。

(3) $\frac{3}{3}-\frac{3\cdot5}{3\cdot6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{3\cdot6\cdot9}-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{3\cdot6\cdot9\cdot12}+\cdots.$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{2n+3}{3(n+1)}\right|.$$

$$\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2}{3}.$$

答：此級數爲收斂級數。

2. 解：(1) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1-3x}+\cdots+\frac{1}{1+(-1)^n nx}+\cdots\cdots(1)$

當 $x=1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\cdots(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 時，級數中有一項等於 ∞，故該級數爲發散。

當 $x=0$ 時，該級數變爲 $1+1+1+\cdots$，故爲發散。

當 $x=0,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots$ 以外之其他任一定值時，在該級數中必能取得一項，說 k 項，使 $|kx|>1$，故該級數在 k 項以後成一間號級數。

因 $$\lim|u_n|=\lim\left|\frac{1}{1+(-1)^n nx}\right|=0.$$

故該間號級數欲爲收斂僅須

$$\left|\frac{1}{1+(-1)^{n+1}(n+1)x}\right|<\left|\frac{1}{1+(-1)^n nx}\right|,$$

卽 $$|1+(-1)^n nx|<|1+(-1)^{n+1}(n+1)x|.$$

當 $(-1)^{n+1}(n+1)x>0$ 及 $(-1)^n nx<0$ 時，上列不等式對 x 之任何值均能成立。

當 $(-1)^{n+1}(n+1)x<0$ 及 $(-1)^n nx>0$ 時，上列不等式可寫成 $$1+n|x|<(n+1)|x|-1$$

卽 $$|x|>2\quad 或\quad -2>x>2.$$

$\therefore\ -2>x>2$ 時，不等式方能成立，而級數爲收斂。

(2) $\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+2x^4}+\frac{x^5}{1+3x^6}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{1+nx^{2n}}+\cdots.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{x^{2n+1}}{1+(n+1)x^{2n+2}}}{\dfrac{x^{2n-1}}{1+nx^{2n}}}=\frac{x^2+nx^{2n+2}}{1+(n+1)x^{2n+2}}.$$

因 $x=$ 任何值時，$x^2+nx^{2n+2}<1+nx^{2n+2}+x^{2n+2}$，

即 $$x^2<1+x^{2n+2}.$$

$\therefore$ x 爲任何值時，級數均爲收斂。

3. 解：
$$\because \quad |a_n|<c.$$
$$\therefore \quad |a_n|\cdot|u_n|<c|u_n|$$

故 $|a_1u_1|+|a_2u_2|+|a_3u_3|+\cdots<c|u_1|+c|u_2|+c|u_3|+\cdots$ $=c\{|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\}$，因 $c\{|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\}$ 爲收斂級數，故 $|a_1u_1|+|a_2u_2|+|a_3u_3|+\cdots$ 亦爲收斂級數。

$$\therefore \quad a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+\cdots \text{爲收斂級數。}$$

4. 證：$|x|<2$ 時，該級數之斂散未決，今用下法可證明其亦爲收斂。

設
$$S_{2n}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+2x}+\cdots+\frac{1}{1+(-1)^{2n-1}(2n-1)x}+\frac{1}{1+(-1)^{2n}2nx}\cdots\cdots(1)$$

$$S_{2n+1}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+2x}+\cdots+\frac{1}{1+(-1)^{2n}2nx}+\frac{1}{1+(-1)^{2n+1}(2n+1)x}\cdots\cdots(2)$$

又設
$$S'_n=\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+2x}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{1+(-1)^{2n-1}(2n-1)x}+\frac{1}{1+(-1)^{2n}2nx}\right]$$
$$=\frac{2+x}{1+x-2x^2}+\cdots+\frac{2+x}{1+x-2n(2n-1)x^2}\cdots\cdots(3)$$

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{1+(-1)^{2n+1}(2n+1)x},$$

$$\lim S_{2n+1}=\lim S_{2n}+\lim\frac{1}{1+(-1)^{2n+1}(2n+1)x}=\lim S_{2n}.$$

又
$$S_n'=S_{2n},$$
$$\lim S_n'=\lim S_{2n}=\lim S_{2n+1}.$$

故級數 (1) 與下列級數

$$\frac{2+x}{1+x-2x^2}+\cdots+\frac{2+x}{1+x-2n(2n-1)x^2}+\cdots\cdots\quad(4)$$

之斂散情形相同。

$$\frac{u'_{n+1}}{u'_n}=\frac{1+x-2n(2n-1)x^2}{1+x-(2n+2)(2n+1)x^2}$$
$$=\frac{4x^2n^2-2x^2n-x-1}{4x^2n^2+6x^2n+2x^2-x-1}$$
$$=\frac{n^2-\frac{1}{2}n-\frac{x+1}{4x^2}}{n^2+\frac{3}{2}n+\frac{2x^2-x-1}{4x^2}},$$
$$a'-a=\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=2>1.$$

∴ 級數 (4) 因而級數 (1) 除 $x=0,\ 1,-\frac{1}{2},\cdots$等值以外對 x 之任何值均爲收斂。

$$S=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots$$
$$=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots$$
$$=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)\cdots.$$

因括號中各量均爲正，故 (a_1-a_2), $(a_1-a_2)+(a_3-a_4)$,…較 S 小及 a_1, $a_1-(a_2-a_3)$, $a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)$,…較 S 大。故 $a_1, a_1-a_2, a_1-a_2+a_3$,…之和相間地大於及小於 S.

習　題　LXXXVIII

原本第538頁

1. 解：$1+mx+\frac{m^2x^2}{2!}+\frac{m^3x^3}{3!}+\cdots$.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\frac{m^n}{n!}}{\frac{m^{n+1}}{(n+1)!}}=\frac{n+1}{m}.$$

$$\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=\infty.\quad\therefore\ \mu=\infty.$$

2. 解：$2(2x)^2+3(2x)^3+2(2x)^4+3(2x)^5+\cdots$

$$=[2(2x)^2+2(2x)^4+\cdots]+[3(2x)^3+3(2x)^5+\cdots].$$

$$\lim\frac{2(2x)^{2n+2}}{2(2x)^{2n}}=\lim 4x^2<1,\ x^2<\frac{1}{4},\ |x|<\frac{1}{2}.$$

$$\lim\frac{3(2x)^{2n+3}}{3(2x)^{2n+1}}=\lim 4x^2<1,\ x^2<\frac{1}{4},\ |x|<\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \mu=\frac{1}{2}.$$

3. 解：$mx+\frac{m(m-2)}{2!}x^2+\frac{m(m-2)(m-4)}{3!}x^3+\cdots.$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{m(m-2)(m-4)\cdots(m-2n+2)}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{m(m-2)\cdots(m-2n)}$$

$$=\frac{n+1}{m-2n}.$$

$$\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\frac{n+1}{m-2n}=-\lim\frac{1+1/n}{2-m/n}=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \mu=\frac{1}{2}.$$

4. 解：$\frac{3x}{x+4}+\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{x+4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{x+4}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(\frac{3x}{x+4}\right)^{n+1}\cdot n}{(n+1)\left(\frac{3x}{x+4}\right)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{3x}{x+4}\right)$$

$$\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{3x}{x+4}\right|.$$

如 $|3x|<|x+4|$，則級數爲收斂。

當 $x>0$ 時，$|3x|<|x+4|$ 可寫成

$$3x<x+4.$$

$$x<2.$$

當 $x<0$ 時，設 $x=-y$，故 $|3x|<|x+4|$ 可寫成

$$|-3y|<|4-y|.$$

$$3y<4-y.$$

$$y<1.$$

$$x > -1.$$

$\therefore$ $-1<x<2$ 時,級數 (1) 爲收斂.

當 $x=2$ 時,級數 (1) 成爲 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$.

$\therefore$ 級數 (1) 爲發散.

當 $x=-1$ 時,級數 (1) 成爲 $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots$.

$\therefore$ 級數 (1) 爲收斂.

故 $-1\leq x<2$ 時,級數 (1) 爲收斂.

5. 解: $\frac{x}{x^2+1}+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3+\cdots$.

此乃 $\frac{x}{x^2+1}$ 之冪級數,於 $\left|\frac{x}{x^2+1}\right|<1$ 時將爲收斂.因 $|x|$ 恆小於 $|x^2+1|$,故此級數於 x 爲任何值時,皆爲收斂者.

6. 解: $\cdots(3x)^{-3}+(3x)^{-2}+(3x)^{-1}+1+2x+(2x)^2+(2x)^3+\cdots$.

此級數中之 $(3x)^{-1}+(3x)^{-2}+(3x)^{-3}+\cdots$ 爲 $(3x)^{-1}$ 之等比冪級數.於 $|(3x)^{-1}|<1$ 卽 $|x|>\frac{1}{3}$ 時,爲收斂者.

又此級數中之 $1+2x+(2x)^2+(2x)^3+\cdots$ 爲 $(2x)$ 之等比冪級數.於 $|x|<\frac{1}{2}$ 時,爲收斂者.

故此已知級數,於 $\frac{1}{3}<|x|<\frac{1}{2}$ 時,爲收斂者.

XXXIII. 無窮級數之演算

習 題 LXXXIX

原本第 551 頁

1. 證:

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
 & f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots & & \\
 & f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots & & \\
\hline
f(x)\cdot f(x)=1+1 & x+1 & x^2+1 & x^3+\cdots \\
+1 & +1 & +1 & \\
 & +1 & +1 & \\
 & & +1 &
\end{array}
$$

$\therefore$ $(1+x+x^2+\cdots)^2=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$.

2. 證：

$$
\begin{array}{r}
f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots \\
f(x)\cdot f(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
f(x)\cdot f(x)\cdot f(x)=1+2 & x+3 & x^2+4 & x^3+\cdots \\
+1 & +2 & 3 & \\
 & +1 & 2 & \\
 & & 1 &
\end{array}
$$

$$\therefore\ (1+x+x^2+\cdots)^3=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots.$$

3. 證：

$$
\begin{array}{r|l}
1+0+1+0+1+\cdots & 1+1+1+\cdots \\
\cline{2-2}
1+1+1+1+1+\cdots & 1-1+1-\cdots \\
\cline{1-1}
-1+0-1+0-\cdots & \\
-1-1-1-1-\cdots & \\
\cline{1-1}
1+0+1+\cdots & \\
1+1+1+\cdots & \\
\cline{1-1}
-1+0-\cdots &
\end{array}
$$

$$\therefore\ (1+x^2+x^4+\cdots)/(1+x+x^2+\cdots)=1-x+x^2-\cdots.$$

4. 解： $1-x+2x^2=(1+a_1x+a_2x^2+\cdots)^2.$

$$
\begin{array}{r}
f(x)=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots \\
f(x)=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|r|r|l}
[f(x)]^2=1+a_1 & x+a_2 & x^2+a_3 & x^3+a_4 & x^4+\cdots \\
+a_1 & +a_1^2 & +a_1a_2 & +a_1a_3 & \\
 & +a_2 & +a_1a_2 & +a_2^2 & \\
 & & +a_3 & +a_1a_3 & \\
 & & & +a_4 &
\end{array}
$$

$$1-x+2x^2=1+2a_1x+(2a_2+a_1^2)x^2+(2a_3+2a_1a_2)x^3$$
$$+(2a_4+2a_1a_3+a_2^2)x^4+\cdots.$$

$$2a_1=-1,\qquad 2a_2+a_1^2=2,$$
$$2a_3+2a_1a_2=0,\qquad 2a_4+2a_1a_3+a_2^2=0.$$
$$\therefore\ a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=\frac{7}{8},\ a_3=\frac{7}{16},\ a_4=-\frac{21}{64}.$$
$$\therefore\ (1-x+2x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}x^2+\frac{7}{16}x^3-\frac{21}{64}x^4+\cdots.$$

5. 解： (1) $(8-3x)^{\frac{1}{3}}$.

設 $(8-3x)^{\frac{1}{3}}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3a^3+\cdots.$

$$8-3x=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)^3$$

$$=a_0^3+3a_0^2a_1x+(3a_0^2a_2+3a_0a_1^2)x^2$$
$$+(3a_0^2a_3+6a_0a_1a_2+a_1^3)x^3+\cdots.$$

$a_0^3=8 \qquad \therefore \quad a_0=2.$

$3a_0^2a_1=-3 \qquad \therefore \quad a_1=-\frac{1}{4}.$

$3a_0^2a_2+3a_0a_1^2=0 \qquad \therefore \quad a_2=-\frac{1}{32}.$

$3a_0^2a_3+6a_0a_1a_2+a_1^3=0 \qquad \therefore \quad a_3=-\frac{5}{768}.$

$$\therefore \quad (8-3x)^{\frac{1}{3}}=2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{32}x^2-\frac{5}{768}x^4\cdots.$$

(2) $(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}}$.

設 $(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}}=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots.$

$(1+x-x^2)^3=(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)^2.$

$$1+3x-5x^3+3x^5-x^6=1+2a_1x+(a_1^2+2a_2)x^2$$
$$+(2a_1a_2+2a_3)x^3+\cdots.$$

$$2a_1=3, \quad a_1^2+2a_2=0, \quad 2a_1a_2+2a_3=-5.$$

$$\therefore \quad a_1=\frac{3}{2}, \quad a_2=-\frac{9}{8}, \quad a_3=-\frac{13}{16}.$$

$$\therefore \quad (1+x-x^2)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2-\frac{13}{16}x^3-\cdots.$$

6. 解：(1) $\dfrac{2+x-3x^2+5x^3}{1+2x+3x^2}$.

$$\begin{array}{r|l}
2+1-3+\ 5 & 1+2+3 \\
2+4+6 & 2-3-3+20-\cdots \\
\hline
-3-9+\ 5 & \\
-3-6-\ 9 & \\
\hline
-3+14 & \\
-3-\ 6-9 & \\
\hline
20+9 &
\end{array}$$

答：此級數之商為 $2-3x-3x^2+20x^3-\cdots$.

(2) $\dfrac{x+5x^2-x^3}{1-x+x^2-x^3}$.

$$\begin{array}{l|l} 1+5-2 & 1-1+1-1 \\ \underline{1-1+1-1} & \overline{\quad 1+6+4-1+\cdots} \\ \quad 6-2+1 & \\ \quad \underline{6-6+6-6} & \\ \qquad 4-5+6 & \\ \qquad \underline{4-4+4-4} & \\ \qquad\ -1+2+4 & \end{array}$$

答：此級數之商爲 $x+6x^2+4x^3-x^4+\cdots$.

7. 解：(1) $\dfrac{3x^2+x^3}{1+x+x^2}$.

設 $\dfrac{3x^2+x^3}{1+x+x^2}=3x^2+a_1x^3+a_2x^4+a_3x^5+\cdots$.

$$3x^2+x^3=(1+x+x^2)(3x^2+a_1x^3+a_2x^4+a_3x^5+\cdots)$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} 3x^2+x^3=3x^2+a_1 & x^3+a_2 & x^4+a_3 & x^5+\cdots \\ \qquad\qquad\qquad +3 & \quad +a_1 & \quad +a_2 & \\ & \quad +3 & \quad +a_1 & \end{array}$$

$3+a_1=1,\quad 3+a_1+a_2=0,\quad a_1+a_2+a_3=0.$

$\therefore\ a_1=-2,\quad a_2=-1,\quad a_3=3$

答：$\dfrac{3x^2+x^3}{1+x+x^2}=3x^2-2x^3-x^4+3x^5+\cdots$.

(2) $\dfrac{x+5x^4}{x^3+2x^4+3x^5}$.

設 $\dfrac{x+5x^4}{x^3+2x^4+3x^5}=a_0x^{-2}+a_1x^{-1}+a_2+a_3x+\cdots$.

$$x+5x^4=(x^3+2x^4+3x^5)(a_0x^{-2}+a_1x^{-1}+a_2+a_3x+\cdots)$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} x+5x^4=a_0x+\ a_1 & x^2+\ a_2 & x^3+\ a_3 & x^4+\cdots \\ \qquad\qquad\quad +2a_0 & \quad +2a_1 & \quad +2a_2 & \\ & \quad +3a_0 & \quad +3a_1 & \end{array}$$

$a_0=1,\quad a_1+2a_0=0,\quad a_2+2a_1+3a_0=0,$

$a_3+2a_2+3a_1=5.$

$\therefore\ a_0=1,\quad a_1=-2,\quad a_2=1,\quad a_3=9.$

答：$\dfrac{x+5x^4}{x^3+2x^4+3x^5}=-x^{-2}-2x^{-1}+1+9x+\cdots$.

8. 解：(1) $\dfrac{9x-22}{(x^2-4)(x-3)}$.

按 §57, $\frac{9x-22}{(x^2-4)(x-3)}=\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-3}$.

但 $\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}=-\frac{1}{2}-\frac{x}{2^2}-\frac{x^2}{2^3}-\frac{x^3}{2^4}-\frac{x^4}{2^5}-\cdots$

於 $|x|<2$ 時，此級數爲收斂。

$$\frac{-2}{x+2}=-\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}=-1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}-\frac{x^4}{2^4}+\cdots$$

於 $|x|<2$ 時，此級數爲收斂。

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1}=-\frac{1}{3}-\frac{x}{3^2}-\frac{x^2}{3^3}+\frac{x^3}{3^4}-\frac{x^4}{3^5}+\cdots$$

於 $|x|<3$ 時，此級數爲收斂。

$$\therefore\quad \frac{6x-22}{(x^2-4)(x-3)}=-\frac{11}{6}+\frac{5x}{36}-\frac{89x^2}{216}+\frac{65x^3}{1296}-\frac{761x^4}{7776}+\cdots$$

於 $|x|<2$ 時，此級數爲收斂。

(2) $\frac{5x+6}{(2x+3)(x+1)^2}$.

$$\frac{5x+6}{(2x+3)(x+1)^2}=\frac{-6}{2x+3}+\frac{3}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}.$$

但 $\frac{-6}{2x+3}=-2\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-1}=-2+\frac{2^2x}{3}-\frac{2^3x^2}{3^2}+\frac{2^4x^3}{3^3}-\frac{2^5x^4}{3^4}+\cdots$

於 $|x|<\frac{3}{2}$ 時，此級數爲收斂。

$$\frac{3}{x+1}=3(1+x)^{-1}=3-3x+3x^2-3x^3+3x^4-\cdots$$

於 $|x|<1$ 時，此級數爲收斂。

$$\frac{1}{(x+1)^2}=(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\cdots$$

於 $|x|<1$ 時，此級數爲收斂。

$$\therefore\quad \frac{5x+6}{(2x+3)(x+1)^2}=2-\frac{11}{3}x+\frac{46}{9}x^2-\frac{173}{27}x^3+\frac{616}{81}x^3+\cdots$$

於 $|x|<1$ 時，此級數爲收斂。

9. 解：(1) $\frac{2x+3}{2x^2+x-15}$.

$$\begin{array}{r|l} 2x+3 & 2x^2+x-15 \\ \cline{2-2} 2x+1-\frac{15}{x} & x^{-1}+x^{-2}+7x^{-3}+4x^{-4}+\cdots \\ \hline 2+\frac{15}{x} & \\ 2+\frac{1}{x}-\frac{15}{x^2} & \\ \hline \frac{14}{x}+\frac{15}{x^2} & \\ \frac{14}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{105}{x^3} & \\ \hline \frac{8}{x^2}+\frac{105}{x^3} & \end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{2x+3}{2x^2+x-15}=x^{-1}+x^{-2}+7x^{-3}+4x^{-4}+\cdots.$$

$$2x^2+x-15=(2x-5)(x+3).$$

答：級數 $x^{-1}+x^{-2}+7x^{-3}+4x^{-4}+\cdots$ 於 $|x|<\frac{5}{2}$ 時，爲收斂。

(2) $\dfrac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$.

$$\begin{array}{r|l} 1+0+0+0+1 & 1+1+1+1+1 \\ \cline{2-2} 1+1+1+1+1 & 1-1+0+0+1+0-1+\cdots \\ \hline -1-1-1+0 & \\ -1-1-1-1-1 & \\ \hline 1+1 & \end{array}$$

答：$\dfrac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=1-x^{-1}+x^{-4}-x^{-6}+\cdots.$

10. 解：(1) $y=x+x^2+x^3+x^4+\cdots.$

設 $x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+b_4y^4+\cdots.$

$$x=b_1(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)+b_2(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)^2$$
$$+b_3(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)^3+\cdots$$

$$=b_1x+\left.\begin{array}{r}b_1\\+b_2\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{r}b_1\\+2b_2\\+b_3\end{array}\right|x^3+\left.\begin{array}{r}b_1\\+3b_2\\+3b_3\\+b_4\end{array}\right|x^4+\cdots$$

$$\therefore\quad b_1=1,\quad b_2=-1,\quad b_3=1\cdots,$$

答: $x=y-y^2+y^3-y^4+\cdots.$

(2) $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.$

設 $x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\cdots.$

$$x=b_1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$
$$+b_2\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)^2$$
$$+b_3\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)^3+\cdots$$

$$=\begin{array}{l|l|l|l} b_1x-\frac{b_1}{2} & x^2+\frac{b_1}{3} & x^3-\frac{b_1}{4} & x^4+\cdots \\ \quad+b_2 & \quad-b_2 & \quad+\frac{11b_2}{12} & \\ & \quad+b_3 & \quad+\frac{3}{2}b_3 & \\ & & \quad+b_4 & \end{array}$$

$$\therefore\quad b_1=1,\quad b_2=\frac{1}{2},\quad b_3=\frac{1}{8},\quad b_4=\frac{1}{24}\cdots,$$

答: $x=y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{24}y^4+\cdots.$

11. 解: 設 $x=b_1(y-1)+b_2(y-1)^2+b_3(y-1)^3+\cdots.$

$$x=b_1\left\{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)-1\right\}$$
$$+b_2\left\{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)-1\right\}^2$$
$$+b_3\left\{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)-1\right\}^3+\cdots$$

$$=\begin{array}{l|l|l|l} b_1x+\frac{b_1}{2} & x^2+\frac{b_1}{3} & x^3+\frac{b_1}{4} & x^4+\cdots \\ \quad+b_2 & \quad+b_2 & \quad+\frac{11b_2}{12} & \\ & \quad+b_3 & \quad+\frac{2}{3}b_3 & \\ & & \quad+b_4 & \end{array}$$

$$\therefore\quad b_1=1,\quad b_2=-\frac{1}{2},\quad b_3=\frac{1}{6},\quad b_3=-\frac{1}{24}.$$

答：$x=(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{6}(y-1)^3-\frac{1}{24}(y-1)^4+\cdots.$

12. 解：設 $x=b_1y^{\frac{1}{2}}+b_2(y^{\frac{1}{2}})^2+b_3(y^{\frac{1}{2}})^3+b_4(y^{\frac{1}{2}})^4+\cdots$

$$=b_1y^{\frac{1}{2}}+b_2y+b_3y^{\frac{3}{2}}+b_4y^2+\cdots$$

$$=b_1(x^2+3x^3)^{\frac{1}{2}}+b_2(x^2+3x^3)+b_3(x^2+3x^3)^{\frac{3}{2}}+\cdots$$

$$=b_1x+\left.\begin{array}{l}\frac{3b_1}{2}\\ +\ b_2\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}\frac{9b_1}{8}\\ +3b_2\\ +\ b_3\end{array}\right|x^3+\left.\begin{array}{l}\frac{27b_1}{16}\\ \\ +\ \frac{9b_3}{2}\\ +\ b_4\end{array}\right|x^4+\cdots$$

$$\therefore\quad b_1=1,\quad b_2=-\frac{3}{2},\quad b_3=\frac{45}{8},\quad b_4=-27\cdots.$$

答：$x=y^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}y+\frac{45}{8}y^{\frac{3}{2}}-27y^2+\cdots.$

13. 解：(1) $x^2+y^2+y-3x=0.$

當 $x=0$ 時，方程式 $x^2+y^2+y-3x=0$ 化爲 $y^2+y=0$，又此方程式僅有一根爲 0，故 y 値以 x 表示之方程式之解答中於 $x=0$ 時卽消失者，亦僅有一。

設此解答於展開時爲 x 升項之級數，且其第一項爲 ax^μ；故

$$y=ax^\mu+\cdots.$$

將此式代入原方程式中，得下式

$$x^2+a^2x^{2\mu}+\cdots+ax^\mu+\cdots-3x=0.$$

此式爲恆等式，其方次相同，各項係數之和必爲零．

故此間必有二項爲最低方次；又因 μ 爲正或 0，故此二項必爲 ax^μ 與 $-3x$．是以 $\mu=1$，$a-3=0$ 卽 $a=3$．

設 $y=3x+bx^2+cx^3+\cdots$，代入原方程式中，得

$$(a-3)x+(10+b)x^2+(6b+c)x^3+\cdots=0.$$

$$a-3=0,\quad 10+b=0,\quad 6b+c=0.$$

$$\therefore\quad a=3,\quad b=-10,\quad c=60.$$

答：$y=3x-10x^2+60x^3+\cdots.$

(2) $x^3+y^3-xy=0$.

當 $x=0$, 方程式 $x^3+y^3-xy=0$ 化爲 $y^3=0$, 故其三根均爲 0. 故吾人能求得以 x 表示 y 之三方程式焉。

設 ax^μ 爲一展開式中之首項,故

$$y=ax^\mu+\cdots.$$

代入原方程式中,得下式

$$x^3+a^3x^{3\mu}+\cdots-x(ax^\mu+\cdots)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此式內三指數 3μ, $\mu+1$ 與 3 中至少有二指數必須相等,且均較小於另一指數。

設 $3\mu=\mu+1$, $\therefore\ \mu=\frac{1}{2}$, 此乃 μ 之一可能値,蓋於 $\mu=\frac{1}{2}$ 時, 3μ 與 $\mu+1$ 俱小於 3 故也。

設 $\mu+1=3$, $\therefore\ \mu=2$, 此亦爲 μ 之一可能値, 蓋於 $\mu=2$ 時, $\mu+1$ 與 3 俱小於 3μ 故也。

設 $3\mu=3$, $\therefore\ \mu=1$, 此非 μ 之可能値, 蓋於 $\mu=1$ 時, 3μ 與 3 俱大於 $\mu+1$ 故也。

故 μ 必爲 $\frac{1}{2}$ 與 2 中之一。

於 $\mu=\frac{1}{2}$ 時, (1) 式化爲 $x^3+a^3x^{\frac{3}{2}}+\cdots-ax^{\frac{3}{2}}+\cdots=0$.

故 $a^3-a=0$, 若 $a\neq 0$, 則 $a=\pm 1$.

於 $\mu=2$ 時, (1) 式化爲 $x^3+a^3x^6+\cdots-ax^3+\cdots=0$, 故 $1-a=0$, 卽 $a=1$.

設所求之解答爲 $y=x^{\frac{1}{2}}-bx^2-cx^{\frac{3}{2}}+\cdots$,

$y=-x^{\frac{1}{2}}-bx^2+cx^{\frac{7}{2}}+\cdots$, $y=x^2+bx^5+cx^8+\cdots$.

代入 $x^3+y^3-xy=0$ 中以定 b, c 之値,得所求之解答爲

$$y=x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{8}x^{\frac{7}{2}}+\cdots,$$

$$y=-x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^{\frac{7}{2}}+\cdots,\ y=x^2+x^5+3x^8+\cdots.$$

14. 證: $\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\cdots$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{x^3}{(1-x^3)^2}+\cdots.$$

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots.$$

$$\frac{2x^2}{1-x^2}=2x^2+2x^4+2x^6+2x^8+2x^{10}+\cdots,$$

$$\frac{3x^3}{1-x^3}=3x^3+3x^6+3x^9+3x^{12}+3x^{15}+\cdots.$$

$$\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\cdots=x(1+2x+3x^2+\cdots)$$

$$+x^2(1+2x^2+3x^4+\cdots)+x^3(1+2x^3+3x^6+\cdots)+\cdots$$

$$=x(1-x)^{-2}+x^2(1-x^2)^{-2}+x^3(1-x^3)^{-2}+\cdots$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{x^3}{(1-x^3)^2}+\cdots.$$

XXXIV. 二項級數,指數級數及對數級數

習題 XC

原本第 559 頁

1. 解: $\log_e(n+1)=\log_e n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}\right.$

$$\left.+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right].$$

(1) 設 $n=3$,

$$\log_e 4=\log_e 3+2\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3\cdot 7^3}+\frac{1}{5\cdot 7^5}+\cdots\right)$$

$$=\log_e 3+\frac{2}{7}+\frac{2}{1029}+\frac{2}{84035}+\cdots$$

$$=1.0986+0.2857+0.0019+\cdots$$

$$=1.3862.$$

(2) 設 $n=4$,

$$\log_e 5=\log_e 4+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\cdots\right)$$
$$=\log_e 4+\frac{2}{9}+\frac{2}{2187}+\frac{2}{295245}+\cdots$$
$$=1.3862+0.2222+0.0009+\cdots$$
$$=1.6093.$$

2. 證：$e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots.$

設 $x=-1$, $e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots$

$$=(1-1)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\cdots$$
$$=\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}+\frac{6}{7!}+\cdots.$$

3. 證：$f(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

$$\phi(x)=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
f(x)\cdot\phi(x)=1+1 & x+\frac{1}{2!} & x^2+\frac{1}{3!} & x^3+\cdots \\
-1 & -\ 1 & -\frac{1}{2!} & \\
 & +\frac{1}{2!} & +\frac{1}{2!} & \\
 & & +\frac{1}{3!} &
\end{array}$$

故 $\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)=1.$

4. 證：$e^{ix}+e^{-ix}=\left\{1+ix+\frac{i^2x^2}{2!}+\frac{i^3x^3}{3!}+\cdots\right\}$

$$+\left\{1-ix+\frac{i^2x^2}{2!}-\frac{i^3x^3}{3!}+\cdots\right\}$$
$$=2-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^6}{6!}+\cdots.$$

故 $\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots.$

5. 證：$e^{ix}-e^{-ix}=\left\{1+ix+\frac{i^2x^2}{2!}+\frac{i^3x^3}{3!}+\cdots\right\}$

$-\left\{1-ix+\frac{i^2x^2}{2!}-\frac{i^3x^3}{3!}+\cdots\right\}$

$=2ix+\frac{2i^3x^3}{3!}+\frac{2i^5x^5}{5!}+\cdots.$

故 $\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots.$

6. 證：$(1-x)^{-n}$ 之展開式中第 $r+1$ 項為

$\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}(-1)^rx^r$

$=\frac{(-1)^rn(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}(-1)^rx^r$

$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}x^r.$

7. 解：在通項，$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}8^{n-r}x^r$ 中於 $r=4$ 時，得 x^4 項。

$=\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)\left(\frac{2}{3}-3\right)}{4!}8^{\frac{2}{3}-4}x^4$

$=\frac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{4!}8^{-\frac{10}{3}}x^4$

$=\frac{-56}{8\cdot3^5\cdot2^{10}}x^4=-\frac{7}{3^5\cdot2^{10}}x^4.$

8. 解：$\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-1)^r(x^{\frac{1}{2}})^r.$

$\because\ \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^r=x^3=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^6 \qquad \therefore\ r=6.$

$\therefore\ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)\left(-\frac{11}{2}\right)}{6!}x^3$

$$=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2^6\cdot6!}x^3=\frac{231}{2^{10}}x^3.$$

9. 解: (1) $(9-4x^2)^{\frac{1}{2}}=3\left(1-\frac{4}{9}x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=3\left\{1+\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{9}x^2\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{4}{9}x^2\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\left(-\frac{4}{9}x^2\right)^3+\cdots\right\}$$
$$=3\left\{1-\frac{2}{9}x^2-\frac{2}{81}x^4-\frac{4}{729}x^6-\cdots\right\}$$
$$=3-\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{27}x^4-\frac{4}{243}x^6-\cdots.$$

故該級數於 $\frac{4}{9}|x^2|<1$ 即 $|x|<\frac{3}{2}$ 時,收斂。

(2) $(12+x+x^2)^{\frac{2}{3}}=12^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{x}{12}+\frac{x^2}{12}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$=12^{\frac{2}{3}}\left\{1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{12}+\frac{x^2}{12}\right)+\frac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)}{2!}\left(\frac{x}{12}+\frac{x^2}{12}\right)^2+\cdots\right\}$$
$$=12^{\frac{2}{3}}\left\{1+\frac{1}{18}x+\frac{71}{1296}x^2+\cdots\right\}$$
$$=12^{\frac{2}{3}}+\frac{12^{\frac{2}{3}}}{18}x+\frac{71\cdot12^{\frac{2}{3}}}{1296}x^2+\cdots.$$

故該級數於 $\left|\frac{x^2}{12}\right|+\left|\frac{x}{12}\right|<1$ 時,收斂。

但 $\left|\frac{x^2}{12}\right|+\left|\frac{x}{12}\right|<1$, 則 $|x^2|+|x|<12$,

$$|x^2|+|x|+\left(\frac{1}{2}\right)^2<12+\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$
$$|x|+\frac{1}{2}<\frac{7}{2}\qquad\therefore\quad|x|<3.$$

即 $|x|<3$ 時,此級數乃收斂。

10. 解: $(1-x+2x^2)^{\frac{3}{4}}\{1-(x-2x^2)\}^{\frac{3}{4}}$

$$=1-\frac{3}{4}(x-2x^2)+\frac{\frac{3}{4}(\frac{3}{4}-1)}{2!}(x-2x^2)^2-\frac{\frac{3}{4}(\frac{3}{4}-1)}{3!}$$

$$\times(x-2x^2)^3+\frac{\frac{3}{4}(\frac{3}{4}-1)(\frac{3}{4}-2)(\frac{3}{4}-3)}{4!}(x-2x^2)^4\cdots$$

$$=1-\frac{3}{4}x+\frac{45}{32}x^2+\frac{43}{128}x^3-\frac{333}{2048}x^4\cdots.$$

11. 解：$(8+3x)^{\frac{2}{3}}(9-2x)^{-\frac{1}{2}}=8^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{3}{8}x\right)^{\frac{2}{3}}\cdot 9^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2}{9}x\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$=\frac{4}{3}\left\{1+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{8}x\right)+\frac{\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})}{1\cdot 2}\left(\frac{3}{8}x\right)^2+\cdots\right\}$$

$$\times\left\{1-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{9}x\right)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2}\left(-\frac{2}{9}x\right)^2+\cdots\right\}$$

$$=\frac{4}{3}\left\{1+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\cdots\right\}\left\{1+\frac{1}{9}x+\frac{1}{54}x^2\cdots\right\}$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{13}{27}x+\frac{53}{1296}x^2+\cdots.$$

於 $\frac{3}{8}|x|<1$ 卽 $|x|<\frac{8}{3}$ 時，爲收斂。

12. 解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{3x}$.

$$\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{3x}=\frac{1+2x+\frac{4}{2!}x^2+\cdots-1+2x-\frac{4}{2!}x^2+\cdots}{3x}$$

$$=\frac{4x+\frac{16}{3!}x^3+\frac{64}{5!}x^5+\cdots}{3x}=\frac{4+\frac{16}{3!}x^2+\cdots}{3}.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{3x}=\frac{4}{3}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-(1+4x)^{\frac{1}{4}}}$.

$$\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-(1+4x)^{\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6+\cdots\right)-\left(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+\frac{5}{81}x^6+\cdots\right)}{\left(1+x-x^2+\frac{5}{3}x^3+\cdots\right)-\left(1+x-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+\cdots\right)}$$

$$=\frac{\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{72}x^4+\cdots}{\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{6}x^3+\cdots}.$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-(1+4x)^{\frac{1}{4}}}=\frac{5}{3}.$$

13. 證: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=e^x.$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{nx(nx-1)}{2!n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!n^3}+\cdots$$

$$=1+x+\frac{n^2x^2-nx}{2!n^2}+\frac{n^3x^3-3n^2x^2+2nx}{3!n^3}+\cdots$$

$$=1+x+\frac{x^2-x/n}{2!}+\frac{x^3-3x^2/n+2x/n^2}{3!}+\cdots.$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x.$$

14. 證: $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=e^2.$

$$(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=e+\frac{1}{x}(e^x)^{\frac{1}{x}-1}\cdot x+\frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{2!}(e^x)^{\frac{1}{x}-2}\cdot x^2$$

$$+\frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-2\right)}{3!}(e^x)^{\frac{1}{x}-3}\cdot x^3+\cdots$$

$$= e + e^{1-x} + \frac{1-x}{2!}e^{1-2x} + \frac{1-3x+2x^2}{3!}e^{1-3x} + \cdots$$

$$= e\left\{1 + e^{-x} + \frac{1-x}{2!}e^{-2x} - \frac{1-3x+2x^2}{3!}e^{-3x} + \cdots\right\}.$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e\left\{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right\} = e\cdot e = e^2.$$

15. 解：$\log_e(1+x+x^2) = \log_e\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right) = \log_e(1-x^3) - \log_e(1-x)$

$$= -x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3} - \frac{x^{12}}{4} - \cdots - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots\right)$$

$$= -x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3} - \frac{x^{12}}{4} - \cdots + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots.$$

此展開式於 $|x|+|x^2|<1$ 時，爲收斂；卽於

$$|x|+|x^2|+(\tfrac{1}{2})^2<1+(\tfrac{1}{2})^2$$

$$|x|+\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$|x|<(\sqrt{5}-1)/2$ 時也。

16. 證：$\log_e\frac{m}{n} = \frac{m-n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)^3 - \cdots.$

$$\log_e\frac{m}{n} = \log_e\left(1+\frac{m-n}{n}\right)$$

$$= \frac{m-n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)^3 - \cdots.$$

17. 證：$\log_e\frac{n^2}{n^2-1} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{3n^6} + \cdots.$

$$\log_e\frac{n^2}{n^2-1} = -\log_e\frac{n^2}{n^2-1} = -\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{3n^6} + \cdots.$$

18. 證：$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} + \cdots = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\cdots=-\log_e\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=-\log_e\frac{n}{n+1}=\log_e\frac{n+1}{n}=\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots.$$

XXXV. 循環級數

習 題 XCI

原本第563頁

1. 解：當 $n=4$, $a_4+2\times5-1\times(-3)+3\times2=0$.

$\therefore\ a_4=-19$.

當 $n=5$, $a_5+2(-19)-5+3(-3)=0$.

$\therefore\ a_5=52$.

答：所求之二項爲 $-19x^3+52x^4$.

2. 解：(1) $1+3x+2x^2-x^3-3x^4+\cdots$.

設所求之關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$.

$2+3p+q=0$ (1) $-1+2p+3q=0$ (2)

$-3-p+2q=0$ (3) $\therefore =p-1,\ q=1$.

故所求之關係式爲 $a_n-a_{n-1}+a_{n-2}=0$.

當 $n=5$, $a_5+3-1=0$ $\therefore\ a_5=-2$.

當 $n=6$, $a_6+2-3=0$ $\therefore\ a_6=1$.

答：故所求之二項爲 $-2x^5+x^6$.

(2) $2-5x+4x^2+7x^3-26x^4+\cdots$.

設所求之關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$.

$4-5p+2q=0$ (1) $7+4p-5q=0$ (2)

$-26+7p+4q=0$ (3) $\therefore\ p=2,\ q=3$.

故所求之關係式爲 $a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}=0$.

當 $n=5$, $a_5+2(-26)+3\cdot7=0$ $\therefore\ a_5=31$.

當 $n=6$, $a_6+2\cdot31+3(-26)=0$ $\therefore\ a_6=16$.

答：所求之二項爲 $31x^5+16x^6$.

(3) $1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-21x^5+\cdots$.

設所求之關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0$.

$-10+6p-3q+r=0$ (1) $15-10p+6q-3r=0$ (2)

$-21+15p-10q+6r=0$ (3) $\therefore p=3,\ q=3,\ r=1$.

故所求之關係式爲 $a_n+3a_{n-1}+3a_{n-2}+a_{n-3}=0$.

當 $n=6$, $a_6+3(-21)+3(15)-10=0$ $\therefore a_6=28$.

當 $n=7$, $a_7+3\cdot28+3(-21)+15=0$ $\therefore a_7=-36$.

答：所求之二項爲 $28x^6-36x^7$.

3. 解：(1) $2+x+5x^2+7x^3+17x^4+\cdots$.

設其關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$.

$5+p+2q=0$ (1) $7+5p+q=0$ (2)

$17+7p+5q=0$ (3) $\therefore p=-1,\ q=-2$.

故其關係式爲 $a_n-a_{n-1}-2a_{n-2}=0$.

設
$$\begin{aligned} S_n&=2+x+5x^2+7x^3+17x^4+\cdots \\ -xS_n&=-2x-x^2-5x^3-7x^4-\cdots\cdots \\ -2x^2S_n&=-4x^2-2x^3-10x^4-\cdots\cdots\cdots \\ \hline (1-x-2x^2)S_n&=2-x \end{aligned}$$

故所求之母函數爲

$$S=\frac{2-x}{1-x-2x^2}=\frac{2-x}{(1-2x)(1+x)}$$

$$=\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1+x}=(1-2x)^{-1}+(1+x)^{-1}.$$

於 $|x|<\frac{1}{2}$ 時, $(1-2x)^{-1}=1+2x+4x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots$,

又 $|x|<1$ 時, $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-\cdots(-1)^nx^n+\cdots$.

答：其普通項爲 $\{2^nx^n+(-1)^nx^n\}$ 即 $\{2^n+(-1)^n\}x^n$.

(2) $3+7x+17x^2+43x^3+113x^4+\cdots$.

設其關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$.

$17+7p+3q=0$ (1) $43+17p+7q=0$ (2)

$113+43p+17q=0$ (3) $\therefore p=-5,\ q=6$.

故其關係式爲 $a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2}=0$.

設 $S_n=3+7x+17x^2+43x^3+113x^4+\cdots$

$-5xS_n=-15x-35x^2-85x^3-\cdots$

$6x^2S_n=18x^2+42x^3+\cdots$

$(1-5x+6x^2)S_n=3-8x$

故其母函數為 $S=\dfrac{3-8x}{1-5x+6x^2}=\dfrac{2}{1-2x}+\dfrac{1}{1-3x}$

$=2(1-2x)^{-1}+(1-3x)^{-1}.$

於 $|x|<1$ 時, $2(1-2x)^{-1}=2\{1+2x+4x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots\}$,

又 $|x|<\frac{1}{3}$ 時, $(1-3x)^{-1}=1+3x+3^2x^2+\cdots+3^nx^n+\cdots$.

答: 其普通項為 $(2^{n-1}x^n+3^nx^n)$ 卽 $(2^{n+1}+3^n)x^n$.

4. 證: 此級數之母函數為

$$\frac{a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2}{1+px+qx^2+rx^3}.$$

設 $S_n=a_0x+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{n-1}x^{-1}$

$pxS_n=pa_0x+pa_1x^2+pa_2x^3+\cdots+pa_{n-2}x^{n-1}+pa_{n-1}x^n$

$px^2S_n=qa_0x^2+qa_1x^3+\cdots+qa_{n-3}x^{n-1}+qa_{n-2}x^n$
$+qa_{n-1}x^{n+1}$

$rx^3S_n=ra_0x^3+\cdots+ra_{n-4}x^{n-1}+ra_{n-3}x^n+ra_{n-2}x^{n+1}$
$+ra_{n-1}x^{n+2}$

$(1+px+qx^2+rx^3)S_n=a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2$
$+(pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3})x^n$
$+(qa_{n-1}+ra_{n-2})x^{n+1}+ra_{n-1}x^{n+2}.$

若已知方程式為收斂者,則 a^n 漸近 0.

$$\therefore\quad S=\frac{a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2}{1+px+qx^2+rx^3}.$$

5. 解: 設其關係式為 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0.$

$24+11p+2q+r=0$ (1)　$85+24p+11q+2r=0$ (2)

$238+85p+24q+11r=0$ (3)

$\therefore p=-1,\ q=-5,\ r=-3.$

故其關係式為 $a_n-a_{n-1}-5a_{n-2}-3a_{n-3}=0.$

設
$$\begin{aligned} S_n &= 1+2x+11x^2+24x^3+85x^4+\cdots\cdots \\ -xS_n &= \quad -x-2x^2-11x^3-24x^4-\cdots\cdots \\ -5x^2S_n &= \quad -5x^2-10x^3-55x^4-\cdots\cdots \\ -3x^3S_n &= \quad -3x^3-5x^4-\cdots\cdots \\ \hline (1-x-5x^2-3x^3)S_n &= 1+x+4x^2 \end{aligned}$$

答：其母函數為 $S=\dfrac{1+x+4x^2}{1-x-5x^2-3x^3}$,

其普通項為 $\{3^n+(-1)^n n\}x^n$.

6. 證：設其關係式為 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$.

$(a+2d)+p(a+d)+qa=0$ ……………………………(1)

$(a+3d)+p(a+2d)+q(a+d)=0$ ……………………(2)

$(a+4d)+p(a+3d)+q(a+2d)=0$ …………………(3)

$\therefore \quad p=-2, \qquad q=1.$

故其關係式為 $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0$.

$a+(a+d)x+(a+2d)x^2+(a+3d)x^3+\cdots\cdots$ 式中之任何連續三項係數皆能以公式 $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0$ 聯絡之，故知級數為二次之循環級數

設
$$\begin{aligned} S_n &= a+(a+d)x+(a+2d)x^2+(a+3d)x^3+\cdots\cdots \\ -2xS_n &= \quad -2ax-2(a+d)x^2-2(a+2d)x^3-\cdots\cdots \\ x^2S_n &= \quad ax^2+(a+d)x^3+\cdots\cdots \\ \hline (1-2x+x^2)S_n &= a-(a-d)x \end{aligned}$$

$\therefore \quad S=\dfrac{a-(a-d)x}{1-2x+x^2}$.

7. 證：設其關係式為 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0$.

$16+9p+4q+r=0$ ……………………………(1)

$25+16p+9q+4r=0$ ……………………………(2)

$36+25p+16q+9r=0$ ……………………………(3)

$\therefore \quad p=-3, \quad q=3, \quad r=-1.$

故其關係式為 $a_n-3a_{n-1}+3a_{n-2}-a_{n-3}=0$.

$1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots\cdots$ 式中之任何連續三項之係數皆能以公式 $a_n-3a_{n-1}+3a_{n-2}-a_{n-3}=0$ 聯絡之，故知級數為三次之循環級數。

設 $$S_n=1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots\cdots$$
$$-3xS_n=\quad -3x-12x^2-27x^3-\cdots\cdots$$
$$3x^2S_n=\quad 3x^2+12x^3+\cdots\cdots$$
$$-x^3S_n=\quad -x^3-\cdots\cdots$$
$$(1-3x+3x^2-x^3)S_n=1+x$$
$$\therefore\quad S=\frac{1+x}{1-3x+3x^2-x^3}=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

8. 證：設其關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0.$
$$20+12p+6q+2r=0\cdots\cdots(1)$$
$$30+20p+12q+6r=0\cdots\cdots(2)$$
$$42+30p+20q+12r=0\cdots\cdots(3)$$
$$\therefore\quad p=-3,\quad q=3,\quad r=-1.$$
故其關係式爲 $a_n-3a_{n-1}+3a_{n-2}-a_{n-3}=0.$

$1\cdot2+2\cdot3x+3\cdot4x^2+4\cdot5x^3+\cdots\cdots$式中之任何連續三項之係數皆能以公式 $a_n-3a_{n-1}+3a_{n-2}-a_{n-3}=0$ 聯絡之，故知級數爲三次之循環級數。

用題 4 之公式 $S=\dfrac{a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2}{1+px+qx^2+rx^3}$，得

$|x|<1$ 時，$$S=\frac{2}{1-3x+3x^2-x^3}.$$

XXXVI. 無窮連乘積

習　題　XCII

原本第 565 頁

1. 證：(1) $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{9}{8}\cdot\dfrac{17}{16}\cdots\cdots$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{16}\right)\cdots\cdots.$$
$$\because\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\text{爲收斂者.}$$
$$\therefore\quad \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{17}{16}\cdots\cdots\text{亦爲收斂者.}$$

(2) $\frac{5}{4}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{26}{25}\cdots\cdots$

$$=\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{16}\right)\left(1+\frac{1}{25}\right)\cdots\cdots.$$

$\therefore$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots\cdots$

$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots$為收斂者。

$\therefore$ $\frac{5}{4}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{26}{25}\cdots\cdots$亦為收斂者。

2. 解：(1) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{n^2}\right)=\left(1+\frac{x}{1^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{x^3}{3^2}\right)\cdots\cdots.$

$$\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots\cdots=x\left(1+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{3^2}+\cdots\cdots\right).$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2x}{(n+1)^2}=\frac{n^2x}{n^2+2n+1}=\frac{x}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=x.$$

故此乘積於 $x\leqq 1$ 時，為收斂。

(2) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{n!}\right)=\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x^3}{3!}\right)\cdots\cdots.$

$$\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots=x\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\cdots\right).$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^n/(n+1)!}{x^{n-1}/n!}=\frac{x}{n+1}$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{\infty}.$$

故此乘積於 $\frac{x}{\infty}<1$ 卽 $x<\infty$ 時，為收斂。

(3) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)=\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x^2}{9}\right)\left(1+\frac{x^3}{27}\right)\cdots\cdots.$

$$\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+\frac{x^3}{27}+\cdots\cdots=x\left(\frac{1}{3}+\frac{x}{3^2}+\frac{x^2}{3^3}+\cdots\cdots\right).$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^n/3^{n+1}}{x^{n+1}/3^n}=\frac{x}{3}.$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{3}.$$

故此乘積於 $\frac{x}{3}<1$ 卽 $x<3$ 時,爲收斂.

3. 證: $\lim\frac{a(a+1)(a+2)\cdots\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots\cdots(b+n)}=\infty$ 或 0.

$$\lim\frac{a(a+1)(a+2)\cdots\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots\cdots(b+n)}$$

$$=\lim\frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{a+2}{b+2}\cdots\cdots\frac{a+n}{b+n}.$$

當 $a>b$: 設 $a-b=a'$,

$$\lim\frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{a+2}{b+2}\cdots\cdots\frac{a+n}{b+n}$$

$$=\lim\left(1+\frac{a'}{b}\right)\left(1+\frac{a'}{b+1}\right)\left(1+\frac{a'}{b+2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{a'}{b+n}\right).$$

$\because\quad \frac{a'}{b}+\frac{a'}{b+1}+\frac{a'}{b+2}+\cdots\cdots+\frac{a'}{b+n}$ 爲發散者.

$\therefore\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{a+2}{b+2}\cdots\cdots\frac{a+n}{b+n}$ 亦爲發散者.

$$\therefore\quad \lim\frac{a(a+1)(a+2)\cdots\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots\cdots(b+n)}=\infty.$$

當 $a<b$: 設 $b-a=b'$,

$$\lim\frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{a+2}{b+2}\cdots\cdots\frac{a+n}{b+n}$$

$$=\lim\left(1-\frac{b'}{b}\right)\left(1-\frac{b'}{b+1}\right)\left(1-\frac{b'}{b+2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{b'}{b+n}\right).$$

按 § 1001, 例題 1,

$$\lim\left(1-\frac{b'}{b}\right)\left(1-\frac{b'}{b+1}\right)\left(1-\frac{b'}{b+2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{b'}{b+n}\right)=0.$$

$$\therefore\quad \lim\frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{a+2}{b+2}\cdots\cdots\frac{a+n}{b+n}=0.$$

XXXVII. 連分式

習題 XCIII

原本第 575 頁

1. 解: $3+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5}$.

$p_1=a_1,\ p_2=a_1a_2+1,\ p_3=a_1a_2a_3+a_1+a_3,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots,\quad p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2};$

$q_1=1,\quad q_2=4,\qquad q_3=a_2a_3+1,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots,\quad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}.$

$\therefore\quad p_1=3,\ p_2=13,\ p_3=16,\ p_4=93;$

$q_1=1,\ q_2=4,\quad q_3=5,\quad q_4=29.$

答: 其近值爲 $\frac{3}{1},\ \frac{31}{4},\ \frac{16}{5}\ \frac{93}{29}.$

2. 解: $\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{10+}\frac{1}{12}.$

應用公式 $p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}$ 及 $q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}.$

$p_1=0,\ p_2=1,\ p_3=1,\ p_4=4,\ p_5=41,\ p_6=496;$

$q_1=1,\ q_2=1,\ q_3=2,\ q_4=7,\ q_5=72,\ q_6=871.$

答: 其近值爲 $\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{7},\ \frac{41}{72},\ \frac{496}{871}.$

3. 解: $\frac{10}{12}.$

$$\begin{array}{r|r|r|l} 5 & 10 & 12 & 1 \\ & 10 & 10 & \\ \hline & 0 & 2 & \end{array}$$

$\therefore\quad \frac{10}{12}=\frac{1}{1+}\frac{1}{5}.$

4. 解: $\frac{457}{56}.$

$$\begin{array}{r|r|r|l} 8 & 457 & 56 & 6 \\ & 448 & 54 & \\ \hline 4 & 9 & 2 & 2 \\ & 8 & 2 & \\ \hline & 1 & 0 & \end{array}$$

$\therefore\quad \frac{457}{56}=8+\frac{1}{6+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}.$

5. 解：$\frac{142}{513}$.

1	142	512	3
	87	425	
1	55	87	1
	32	55	
2	23	32	1
	18	23	
1	5	9	1
	4	5	
	1	4	4
		4	
		0	

$$\therefore \quad \frac{142}{513}=\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4}.$$

6. 解：$3.54=\frac{354}{100}$.

1	354	100	1
	300	54	
3	54	46	5
	46	40	
7	8	6	3
	6	6	
	2	0	

$$\therefore \quad 3.54=3+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3}.$$

7. 解：$0.1457=\frac{1457}{10000}$.

1	1457	10000	6
	1258	8742	
3	199	1258	6
	192	1194	
7	7	64	9
	7	63	
	0	1	

$$\therefore \quad 0.1457=\frac{1}{6+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{9+}\,\frac{1}{7}.$$

8. 解：$\frac{233}{177}$.

1	233	177	3
	177	168	
6	56	9	4
	54	8	
2	2	1	
	2		
	0		

$$\therefore \quad \frac{233}{177}=1+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2}.$$

$p_1=1,\quad p_2=4,\quad p_3=25,\quad p_4=104;$

$q_1=1,\quad q_2=3,\quad q_3=19,\quad q_4=79.$

故其第四近值爲 $\frac{104}{79}$，其錯誤 $<1/79^2$.

9. 解：$\frac{421}{972}$.

3	421	972	2
	390	842	
5	31	130	4
	30	124	
	1	6	6
		6	
		0	

$$\therefore\ \frac{421}{972}=\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4}+\frac{1}{5+}\frac{1}{6}.$$

$p_1=0,\quad p_2=1,\quad p_3=3,\quad p_4=13;$

$q_1=1,\quad q_2=2,\quad q_3=7,\quad q_4=30.$

故其第四近值爲 $\frac{13}{30}$，其錯誤 $<1/30^2$.

10. 解：$\frac{23456}{31827}$.

2	23456	31827	1
	16742	23456	
4	6714	8371	1
	6628	6714	
3	86	1657	19
	69	1634	
2	17	23	1
	12	17	
5	5	6	1
	5	5	
	0	1	

$$\therefore\ \frac{23456}{31827}=\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{19+}\frac{1}{3}+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5}.$$

$p_1=0,\quad p_2=1,\quad p_3=2,\quad p_4=3;$

$q_1=1,\quad q_2=1,\quad q_3=3,\quad q_4=4.$

故其第四近值爲 $\frac{3}{4}$，其錯誤 $<\frac{1}{4\cdot 19}$.

11. 解：$\sqrt{17}=4+(\sqrt{17}-4)=4+\frac{1}{\sqrt{17}+4}$,

$$\sqrt{17}+4=8+(\sqrt{17}-4)=8+\frac{1}{\sqrt{17}+4}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{17}=4+\frac{1}{8+}\frac{1}{8+}\cdots\cdots.$$

故其第五近值爲 $\frac{17684}{4289}$, 其錯誤$<\frac{1}{4289^2}$.

12. 解: $\sqrt{26}=5+(\sqrt{26}-5)=5+\frac{1}{\sqrt{26}+5}$,

$$\sqrt{26}+5=10+(\sqrt{26}-5)=10+\frac{1}{\sqrt{26}+5}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{26}=5+\frac{1}{10+}\frac{1}{10+}\cdots\cdots.$$

$$5,\ \frac{51}{10},\ \frac{515}{101},\ \frac{5201}{1020},\ \frac{52525}{10301}.$$

故其第五近值爲 $\frac{52525}{10301}$, 其錯誤$<\frac{1}{10301^2}$.

13. 解: $\sqrt{6}=2+(\sqrt{6}-2)=2+\frac{2}{\sqrt{6}+2}=2+\frac{1}{\frac{\sqrt{6}+2}{2}}$,

$$\frac{\sqrt{6}+2}{2}=2+\frac{\sqrt{6}-2}{2}=2+\frac{1}{\sqrt{6}+2},$$

$$\sqrt{6}+2=4+(\sqrt{6}-2)=4+\frac{1}{\frac{\sqrt{6}+2}{2}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{6}=2+\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\cdots\cdots.$$

$$2,\ \frac{5}{2},\ \frac{22}{9},\ \frac{49}{20},\ \frac{218}{89}.$$

故其第五近值爲 $\frac{218}{89}$, 其錯誤$<\frac{1}{89^2}$.

14. 解: $\sqrt{38}=6+(\sqrt{38}-6)=6+\frac{1}{\frac{\sqrt{38}+6}{2}}$,

$$\frac{\sqrt{38}+6}{2}=6+\frac{(\sqrt{38}-6)}{2}=6+\frac{1}{\sqrt{38}+6},$$

$$\sqrt{38}+6=12+(\sqrt{38}-6)=12+\frac{1}{\frac{\sqrt{38}+6}{2}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{38}=6+\frac{1}{6+}\frac{1}{12+}\frac{1}{6+}\frac{1}{12+}\cdots\cdots.$$

$$6,\ \frac{37}{6},\ \frac{450}{73},\ \frac{2737}{444},\ \frac{33294}{5401}.$$

故其第五近值爲 $\frac{33294}{5401}$，其錯誤$<\frac{1}{5401^2}$.

15. 解：$\sqrt{105}=10+(\sqrt{105}-10)=10+\frac{5}{\sqrt{105}+10}$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{150}+10}{5}},$$

$$\frac{\sqrt{105}+10}{5}=4+\frac{\sqrt{105}-10}{5}=4+\frac{1}{\sqrt{105}+10},$$

$$\sqrt{105}+10=20+\sqrt{105}-10=20+\frac{1}{\frac{\sqrt{105}+10}{5}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{105}=10+\frac{1}{4+}\frac{1}{20+}\cdots\cdots.$$

16. 解：$\sqrt{23}=4+\sqrt{23}-4=4+\frac{1}{\frac{\sqrt{23}+4}{7}},$

$$\frac{\sqrt{23}+4}{7}=1+\frac{\sqrt{23}-3}{7}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{23}+3}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{23}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{23}-3}{2}=3+\frac{1}{\frac{\sqrt{23}+3}{7}},$$

$$\frac{\sqrt{23}+3}{7}=1+\frac{\sqrt{23}-4}{7}=1+\frac{1}{\sqrt{23}+4},$$

$$\sqrt{22}+4=8+\sqrt{23}-4=8+\frac{1}{\frac{\sqrt{23}+4}{7}}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{23}}=\frac{1}{4+}\frac{\dot{1}}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{\dot{1}}{8+}\cdots\cdots.$$

17. 解: $\sqrt{19}=4+\sqrt{19}-4=4+\frac{1}{\frac{\sqrt{19}+4}{3}},$

$$\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-2}{3}=2+\frac{1}{\frac{\sqrt{19}+2}{5}},$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-3}{5}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{19}+3}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{19}-3}{2}=3+\frac{1}{\frac{\sqrt{19}+3}{5}},$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-2}{5}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{19}+2}{3}},$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-4}{3}=2+\frac{1}{\sqrt{19}+4},$$

$$\sqrt{19}+4=8+\sqrt{19}-4=8+\frac{1}{\frac{\sqrt{19}+4}{3}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{19}=4+\frac{\dot{1}}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{\dot{1}}{8+}\cdots\cdots.$$

18. 解: $\sqrt{71}=8+\sqrt{71}-8=8+\frac{1}{\frac{\sqrt{71}+8}{7}},$

$$\frac{\sqrt{71}+8}{7}=2+\frac{\sqrt{71}-6}{7}=2+\frac{1}{\frac{\sqrt{71}+6}{5}},$$

$$\frac{\sqrt{71}+6}{5}=2+\frac{\sqrt{71}-4}{5}=2+\frac{1}{\frac{\sqrt{71}+4}{11}},$$

$$\frac{\sqrt{71}+4}{11}=1+\frac{\sqrt{71}-7}{11}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{71}+7}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{71}+7}{2}=7+\frac{\sqrt{71}-7}{2}=7+\frac{1}{\frac{\sqrt{71}+7}{11}},$$

$$\frac{\sqrt{71}+7}{11}=1+\frac{\sqrt{71}-4}{11}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{71}+4}{5}}.$$

$$\frac{\sqrt{71}+4}{5}=2+\frac{\sqrt{71}-6}{5}=2+\frac{1}{\frac{\sqrt{71}+6}{7}}.$$

$$\frac{\sqrt{71}+6}{7}=2+\frac{\sqrt{71}-8}{7}=2+\frac{1}{\sqrt{71}+8},$$

$$\sqrt{71}+8=16+\sqrt{71}-8=16+\frac{1}{\frac{\sqrt{71}+8}{7}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{71}=8+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{7+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{16+}\cdots\cdots.$$

19. 解: $3\sqrt{3}=5+3\sqrt{3}-5=5+\dfrac{1}{\frac{3\sqrt{3}+5}{2}},$

$$\frac{3\sqrt{3}+5}{2}=5+\frac{3\sqrt{3}-5}{2}=5+\frac{1}{3\sqrt{3}+5},$$

$$3\sqrt{3}+5=10+3\sqrt{3}-5=10+\frac{1}{\frac{3\sqrt{3}+5}{2}}.$$

$\therefore\quad 3\sqrt{3}=5+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\cdots\cdots.$

20. 解：$\frac{\sqrt{10}-2}{2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{10}+2}{3}},$

$$\frac{\sqrt{10}+2}{3}=1+\frac{\sqrt{10}-1}{3}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{10}+1}{3}},$$

$$\frac{\sqrt{10}+1}{3}=1+\frac{\sqrt{10}-2}{3}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{10}+2}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{10}+2}{2}=2+\frac{\sqrt{10}-2}{2}=2+\frac{1}{\frac{\sqrt{10}+2}{3}}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{10}-2}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots.$$

21. 解：$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{3+2\sqrt{2}}{1}=5+(2\sqrt{2}-2)=5+\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}+2}{4}},$

$$\frac{2\sqrt{2}+2}{4}=1+\frac{2\sqrt{2}-2}{4}=1+\frac{1}{2\sqrt{2}+2},$$

$$2\sqrt{2}+2=4+2\sqrt{2}-2=4+\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}+2}{4}}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=5+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots.$$

22. 解：$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots.$

$$x=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3+x}=\frac{7+2x}{10+3x}.$$

$$3x^2+8x-7=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{37}-4}{3}.$$

23. 解: $\frac{\dot{1}}{2+}\frac{1}{1+}\frac{\dot{1}}{3+}\cdots\cdots$.

$$x=\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+x}=\frac{11+3x}{4+x}.$$

$$3x^2+10x-4=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{37}-5}{3}.$$

24. 解: $3+\frac{1}{4+}\frac{\dot{1}}{5+}\frac{\dot{1}}{2+}\cdots\cdots$.

$$y=3+\frac{1}{4+x}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x=\frac{1}{5+}\frac{1}{2+x}=\frac{2+x}{11+5x}.$$

$$5x^2+10x-2=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{35}-5}{5}.$$

代入 (1) 式,得 $y=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{\sqrt{35}-5}{5}}=\dfrac{3\sqrt{35}+50}{\sqrt{35}+15}$.

25. 解: $\dot{2}+\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{\dot{1}}{5+}\cdots\cdots$.

$$x=2+\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5+}\frac{1}{x}=\frac{157x+30}{68x+13}.$$

$$34x^2-72x-15=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{1806}+86}{34}.$$

26. 解: $\frac{1}{2+}\frac{1}{7+}\frac{\dot{1}}{1+}\frac{1}{2+}\frac{\dot{1}}{1+}\cdots\cdots$.

$$y=\frac{1}{2+}\frac{1}{7+x},$$

$$x=\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+x}=\frac{3+2x}{4+3x}.$$

$$3x^2+2x-3=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{\sqrt{10}-1}{3},$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{7+\frac{\sqrt{10}-1}{3}}=\frac{20+\sqrt{10}}{43+2\sqrt{10}}.$$

27. 證: $\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{2a+}\frac{1}{2a+}\cdots\cdots.$

$$\sqrt{a^2+1}=a+(\sqrt{a^2+1}-a)=a+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}+a},$$

$$\sqrt{a^2+1}+a=2a+(\sqrt{a^2+1}-a)=2a+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}+a}.$$

$$\therefore \quad \sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{2a+}\frac{1}{2a+}\cdots\cdots.$$

28. 證: $\sqrt{a^2+2}=a+\frac{1}{a}+\frac{1}{2a+}\frac{1}{a}+\frac{1}{2a+}\cdots\cdots.$

$$\sqrt{a^2+2}=a+(\sqrt{a^2+2}-a)=a+\frac{1}{\frac{\sqrt{a^2+2}+a}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{a^2+2}+a}{2}=a+\frac{\sqrt{a^2+2}-a}{2}=a+\frac{1}{\sqrt{a^2+2}+a},$$

$$\sqrt{a^2+2}+a=2a+\sqrt{a^2+2}-a=2a+\frac{1}{\frac{\sqrt{a^2+2}+a}{2}}.$$

$$\therefore \quad \sqrt{a^2+2}=a+\frac{1}{a}+\frac{1}{2a+}\frac{1}{a}+\frac{1}{2a+}\cdots\cdots.$$

29. 證: $\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots$

$$=\frac{-(abc+a-b+c)+\sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)}.$$

設 $x=\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+x}=\frac{bc+bx+1}{abc+(ab+1)x+a+c}.$

$$(ab+1)x^2+(abc+a+c-b)x-(bc+1)=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-(abc+a-b+c)+\sqrt{(abc+a-b+c)^2+4(ab+1)(bc+1)}}{2(ab+1)}$$

$$=\frac{-(abc+a-b+c)+\sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)}.$$

30. 解：$x^2+x-1=0$.

此方程式之正根爲 $x=\dfrac{-1+\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots\cdots.$$

31. 證：$\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{p_1}{q_1}+\dfrac{1}{q_1q_2}-\dfrac{1}{q_2q_3}+\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{q_{n-1}q_n}$.

因 $\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}+\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_{n-2}}+\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{(-1)^2}{q_2q_1}+\frac{p_1}{q_1}$$

$$\therefore\quad \frac{p_n}{q_n}=\frac{p_1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{q_{n-1}q_n}.$$

32. 證：$\dfrac{1}{a_2+}\dfrac{1}{a_3+}\cdots\cdots=\dfrac{1}{q_1q_2}-\dfrac{1}{q_2q_3}+\dfrac{1}{q_3q_4}-\cdots\cdots$.

因 $\dfrac{p_n}{q_n}=a_1+\dfrac{1}{a_2+}\dfrac{1}{a_3+}\cdots\cdots=\dfrac{p_1}{q_1}+\dfrac{1}{q_1q_2}-\dfrac{1}{q_2q_3}+\dfrac{1}{q_3q_4}-\cdots\cdots$

但 $\dfrac{p_1}{q_1}=a_1$，故

$$\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots=\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\frac{1}{q_3q_4}-\cdots\cdots.$$

33. **解：** $\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots.$

$p_1=1,\quad p_2=3,\quad p_3=7,\quad p_4=17,$

$p_5=41,\quad p_6=99,\quad p_7=239,\quad p_8=577;$

$q_1=1,\quad q_2=2,\quad q_3=5,\quad q_4=12,$

$q_5=26,\quad q_6=70,\quad q_7=169,\quad q_8=408.$

答： 此分數爲 $\frac{577}{408}$, 其錯課 $<\frac{1}{408^2}$.

34. **解：**

7	100000000	314159265	3
	99114855	300000000	
1	885145	14159265	15
	882090	13277175	
	3055	882090	288
		879840	
		2250	

故 $3.14156265\cdots\cdots=3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{288}+\cdots\cdots.$

$p_1=3,\quad p_2=22,\quad p_3=333,\quad p_4=355;$

$q_1=1,\quad q_2=7,\quad q_3=106\quad q_4=113,\quad q_5=32650.$

答： 所求之分數爲 $\frac{355}{113}$, 其錯課 $<\frac{1}{113\times32650}<0.000001.$

35. **解：**

2	271828	100000	1
	200000	71828	
2	71828	28172	1
	56344	15484	
1	15484	12688	4
	12688	11184	
1	2796	1504	
	1504		
	1292		

故 $2.71828\cdots\cdots=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots.$

$p_1=2,\quad p_2=3,\quad p_3=8,\quad p_4=11,\quad p_5=19,\quad p_6=37;$
$q_1=1,\quad q_2=1,\quad q_3=3,\quad q_4=4,\quad q_5=7,\quad q_6=32.$

答：其第六近值爲 $\frac{87}{32}$，其錯誤 $<\frac{1}{32^2}$.

36 解：

1	214	127	1
	127	87	
2	87	40	5
	80	35	
1	7	5	2
	5	4	
2	2	1	
	2		
	0		

故 $\frac{214}{127}=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2}.$

其近值爲 $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{27}{16}, \frac{32}{19}, \frac{91}{54}, \frac{214}{127}$

$91\cdot127-214\cdot54=1,$

$546\cdot127-324\cdot214=6.$

$\therefore\quad x=546+214t,$

$y=324+127t.$

37. 解：

1	235	412	1
	177	235	
19	58	177	3
	57	174	
	1	3	3
		3	
		0	

故 $\frac{412}{235}=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{19+}\frac{1}{3}.$

其近值爲 $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{135}{77}, \frac{412}{235}.$

$135\cdot235-412\cdot77=1,$

$135\cdot235\cdot10-412\cdot77\cdot10=10.$

$\therefore\quad x=1350+412t,$

$\quad\;\; y=-770-235t.$

38. 解:

1	517	323	1
	323	194	
1	194	129	1
	129	65	
1	65	64	64
	64	64	
	1	0	

$$\frac{517}{323}=1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{64}.$$

其近值爲 $\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{517}{323}.$

$517\cdot5-323\cdot8=1,$

$517\cdot5\cdot31-323\cdot8\cdot31=31,$

$317\cdot155-323\cdot248=31.$

$\therefore\quad x=155+323t,$

$\quad\;\; y=248+517t.$