初中臨時教材

代數学

上册

$$X=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

東北書店印行

上冊目錄

第一章 文字初步的運算

第二章 簡易方程式

第三章 正負數

第四章 多項式的基本運算(加法和減法)

第五章 一元一次方程式

第六章 聯立一次方程式

第七章 一次函數的圖解

第八章 續多項式的基本運算(乘法和除法)

第九章 分 解 因 式

第十章 最高最公因式和最低公倍式

第十一章 分 式

代　數　學

上　册

第　一　章

文字初步的運算

1. 代數學的目的

代數學是繼續算術而研究數目的科學，除用亞拉伯數字代表數目以外，還用文字代表數目，使研究的途徑簡易明瞭，並且記述起來，可以包括種種情形而有普遍性。

什麼叫做文字？就是英文字母a，b　c……等等。a或b以及其他每一個文字，都可以代1，2，3……等等數目，但在一個題中，只代一個定數，不換題時，不能任意更換。

例如：　這個教室有a個桌子。

這"a"代替桌子的數目，桌子多，牠代的數目大；桌子少，牠代的數目小，但只代一個定數，不能同時代兩個不相同的數，因爲事實上這個教室的桌子，是一個定數。

2. 乘　法

用例說明於下：

〔例 1〕　這個教室有40個桌子，共有多少桌腿？

答：　4×40個桌腿，即160個桌腿。

〔例 2〕　那個教室有a個桌子，共有多少桌腿？

答：　$4\times a$個桌腿。

這種答法，初學的人，必定要生疑問：

（1）　a到底代多少數？

（2）　$4\times a$又是多少？

（3）　$4\times a$既然不知道是多少數目，怎樣能作答數？

解釋如下：

（1）　那個教室有多少桌子，牠就代表多少數，既然代表一個數，就當作一數看待，不必一定要知道是多少。

（2）　a既代一個數，$4\times a$當然也代一個數，和4×40是一樣的，自然可以作答數。

疑問發生的原因：

這都由於學了算術，得到的觀念，是數字的運算；加之，日常生活中所用的數，與算術上的又是一樣，所以遇到用文字代替數目，總覺得文字和數字不同，不知多寡，無從算起，影響得連這都不會答了。

在代數學上，文字和數字相乘，或者文字和文字相乘，中間的乘號，通常省略不寫，所以$4\times a$寫作$4a$，$a\times b$寫作ab，但數字和數字相乘，中間的乘號便不能省略，如4×3，若把乘號省略，就與43沒有分別了。

$4\cdot a$是4乘a的意思，"·"是乘號，不是小數點。為要分別小數點與乘號，在習慣上，乘號比較小數點位置略高，例如$4\cdot6$與4.6，

前者爲4乘6，後者爲4小數點6。

$4a$的意思既然明白，同樣就可得$5\times b=5b$，是5個b的意思；$a\times b=ab$，就是a個b的意思，如此類推。

3. 乘法的交換定則

在算術上，知

$$4\times 3=3\times 4,$$

$$5\times 6=6\times 5.$$

不但這樣的式子總是兩端相等，就是無論幾個任何數相乘，牠們的順序都可以這樣調換，不影響牠們的乘積，文字既然能代數目，同理便可得

$$4a=a4,$$

$$ab=ba.$$

在乘法中這樣的調換，就叫做乘法的交換定則。

由交換定則，知數字和文字相乘，把數字寫在文字的前邊也是一樣的，所以$b\times 5$通常寫爲$5b$，不寫爲$b5$，文字和文字相乘，通常以字母的次序排列之，所以$b\times a$寫爲ab，但有特別情形時，不在此限。

4. 因　式

$5b$是5和b相乘得來的，把5和b都叫做$5b$的因式，同樣，$3ab$的因式是$3, a, b, 3a, 3b$和ab。

1乘a時，應當寫爲$1a$，但通常只寫a，不寫1。因1乘任何數與不乘一樣，同樣，$1\times b\times c$只寫爲bc。

a的因式是1和a；bc的因式是$1, b$和c。

5. 乘法的指數定則

知$a\times a$可以寫爲aa，$a\times a\times a$可以寫爲aaa，假如500個a相乘，就要連寫500個 a，爲簡便計，把連乘的個數寫在文字的右角上，表明多少文字連乘的意思，這右角上的數，叫做指數，原數叫做底數。

$$\therefore^{*}\quad a\times a=a^2,\qquad a\times a\times a=a^3,$$

$$500\text{個}a\text{相乘}=a^{500}.$$

a右角上的2，3與500是指數，a是底數。

a^1讀a的一次方，a^2讀a的二次方（或平方），a^3讀a的三次方（或立方），a^4讀a的四次方，a^r讀a的r次方，餘類推。

因任何數的一次方與牠自已相等，故$a^1=a$。通常指數是1時，省略不寫，就是這個原故，絕對不是零次方，要注意！

$$\because^{*}\quad 3^2\times 3=3\times 3\times 3=3^3=3^{2+1},$$

$$\therefore\quad 3^2\times 3=3^{2+1}=3^3.$$

$$\because\quad 2^2\times 2^3=2\times 2\times 2\times 2\times 2=2^5=2^{2+3},$$

$$\therefore\quad 2^2\times 2^3=2^{2+3}=2^5.$$

同理，得　　$a^2\times a^3=a^{2+3}=a^5$，

$$b^2\times b^5=a^{2+5}=b^7.$$

由上式得指數的定則 I：

同文字相乘的積，等於以同文字作底數，以指數的和爲指數。

---

* "∴"代故字；"∵"代因字

習　　題

下列各式於省略乘號後，應怎樣寫法？

1. $15\times a$.　2. $a\times 15$.　3. $a\times x$.　4. $x\times a$.

5. $a\times c\times 1$.　6. $1\times x\times a$.　7. $x\times y\times b$.

8. $y\times m\times c$.　9. $18m$，$3bc$，$5xy$ 是什麼意思？

化簡下列各式：

10. $b\times bbb$.　11. $m^3\times m^4$.　12. $a^2\times a^2\times a^2$.

13. $x^4\times x^4$.　14. $c\times c^2\times c^3\times c^4$.　15. $3\times y^3\times y^4$.

16. 1隻鷄多少足？2隻鷄多少足？m隻鷄多少足？

17. 1間房子租金a元，2間房子租金多少？3間租金多少？n間租金多少？

18. 1斤是16兩，2斤是多少兩？4 斤是多少兩？a 斤是多少兩？

19. $35m$和$11mn$的因式是什麼？

20. a和b的因式是什麼？

6. 以零作乘數的意義

0×2的意思就是2個0相加，但無論多少0相加，總是0.

$$\therefore\quad 0\times 2=0+0=0.$$

$$0\times a=\underbrace{0+0+0+0+0+\cdots\cdots}_{\text{共有}a\text{個}}=0.$$

同理　$a\times 0=0\times a=0$，$0\times a\times m=0\times m=0$.

7. 係 數

把一式的因式，分成兩組，用一組作主體，其餘一組，叫做牠的係數。

〔例 1〕 在$3x$式中，以x作主體，3為係數；這種係數，叫做數字係數。

〔例 2〕 在ax式中，以x作主體，a為係數；以a作主體，x為係數，這種係數，叫做文字係數。

由例 2 知在一式中，係數原沒有一定，總要看以什麼為主體，才能決定。在一式中，因為所取的主體不同，就有幾種係數。

〔例 3〕 在a式中，以a為主體，係數是1，並不是沒有係數。在ab式中，以ab為主體，係數也是1。

8. 同類項及異類項

（1） 項 在一式中，被"+"號或"−"號分開的部分，連上前面的符號，叫做項。

例如： 在$3a-5x$中，$3a$算一項，$-5x$算一項。

（2） 同類項及異類項。二項或許多項，除係數以外，文字次數完全一樣的，叫做同類項；反之，叫做異類項。

例如： $3x^2$和$1.5x^2$；$6a^2x$與$8a^2x$都是同類項。但$3a^2x$與$3ax^2$不是同類項，是異類項。

9. 同類項的加減法

每本書價為x角，甲買3本，乙買5本，共需多少角？

甲買3本所需角數$=3x$，

乙買5本所需角數$=5x$.

$3x$是3個x的意思，$5x$是5個x的意思，所以$3x$加$5x$是$8x$. 即

$3x+5x=(3+5)x=8x$……共需的角數。

同理　　$8a-5a=(8-5)a=3a$.

由上式知同類項加減時，只加減牠們的係數，而後把文字附上。

例如：　1. $5x-3x=(5-3)x=2x$.

2. $5a^2+6a^2-3a^2=(5+6-3)a^2$

$=8a^2$.

3. $5m-4m-m=(5-4-1)m$

$=0\times m=0$.

在$3x+5x$式中，被"+"號把全式分成兩部分，故叫做二項式；如只有一項時，叫做單項式；如有三項時，叫做三項式，二項以上的式子，叫做多項式：

【練習】　說明下式的錯誤。

1. $5x-3x=5-3=2$.

2. $3n^2+5n^2=(3+5)n^4=8n^4$.

3. $3a^2+a+5a=(3+1+5)a^2=9a^2$.

習　　題

1. 單項式n的係數是什麼？

2. $3y$和$\frac{1}{2}mn$的係數是什麼？

化簡下列各式：

3. $m+m+m$. 4. $6a+4a$. 5. $2x+3x+4x$.

6. $7a+6a-a$. 7. $3x^3+3x^3-2x^3$. 8. $\frac{3}{2}a+\frac{3}{5}a-\frac{1}{2}a$.

9. $3a^2x+15a^2x-7a^2x$. 10. $\frac{1}{2}x+x-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x$.

11. $8abc$，$7a+6a-a$和$3x^3+x^3$，各是幾項式？

12. 甲乙兩汽車，每小時都行x里，甲車行15小時，乙車行7小時；問甲乙兩車共行多少里？

13. 羊一頭價a元，甲買3頭，乙買8頭，問甲乙各需洋多少？共需洋多少？

14. 書三冊，第一冊價m角，第二冊較第一冊貴一倍，第三冊較第二冊貴2倍；問共價洋多少？

10. 異類項的加減法

項不同類，不能加減牠們的係數；如係相加，用加號連之，如係相減，用減號連之，即是結果。

例如： $2a$和$3x$不是同類項，相加得$2a+3x$；相減得$2a-3x$，不能再簡單。

同樣，$a+b$和$a-b$也不能再簡單，因爲項不同類。

如要簡單 $3x-2x+y+5y$ 這個式子，把同類的項加減後，即是結果。

$$\therefore\ 3x-2x+y+5y=(3-2)x+(1+5)y=x+6y。$$

【練習】 說明下式的錯誤：

1. $3m+2n=(3+2)mn=5mn$.

2. $3ac+5ab=(3+5)abc=8abc$.

習　　題

化簡下列各式：

1. $2b+b-3x$.　　2. $2a+3a+4b-b$.

3. $4a-2a+5b-3b-3c$.　　4. $7m-3m+3n-2n-2p$.

5. $2a+15a+21b-3b+c-c$.

6. $4xy-3xy+10y-9y+2x-x$.

7. $47x-25x-22x+63y-45y+12y+z+3z-2z$.

8. a隻鷄，b隻兎，共有多少足？

9. 甲每小時行a里，行了3小時；乙每小時行b里，行了2小時；問甲乙二人共行多少里？

10. 某人現年18歲，過2年後是多少歲？過a年後是多少歲？

11. 甲乙兩班的學生都是a個，甲班有女生b個，乙班有女生c個；問甲乙兩班各有男生多少？

12. 假設c是奇數，牠前面的那一個奇數是什麼？後面的那一個奇數是什麼？

11. 乘法的結合定則

在算術上，知

$$\begin{aligned}5\times3\times6&=(5\times3)\times6\\&=5(3\times6)\\&=90.\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}a\times b\times c&=(a\times b)c\\&=a(b\times c).\end{aligned}$$

即三個數相乘，可以任意分組乘之，其積不變，不但三個數相

乘如此，就是三個以上的數相乘也是如此，這就叫做乘法的結合定則。

12. 單項式的乘法

(i) 某家有電燈5盞，每月每盞電費x角，11個月共需洋多少？

1盞燈每月電費$=1\times x$角，

5盞燈每月電費$=5\times x$角。

$\therefore$ 5盞燈11個月電費$=11\times 5x$角$=55x$角。

(ii) 某家有電燈5盞，每月每盞電費x角，a個月共需洋多少？

1盞燈a個月的電費$=a\times x$角。

$\therefore$ 5盞燈a個月的電費$=5\times ax=5ax$角。

(iii) 某家有電燈5盞，每月每盞電費x角，$3a$個月共需洋多少？

5盞燈1個月的電費$=1\times 5x$角。

$\therefore$ 5盞燈$3a$個月的電費$=3a\times 5x$角。

由交換定則，得

$$3a\times 5x=3\times 5\times a\times x$$
$$=15ax.$$

所以單項式乘單項式，等於數字乘數字，文字乘文字，再連乘之，即得結果。

〔例1〕 $3ab\times 5ax=3\times 5\times a\times a\times b\times x=15a^2bx.$

〔例2〕 $15xy^7\times 3x^5y^6z=15\times 3\times x\times x^5\times y^7\times y^6\times z$

$$=45x^6y^{13}z.$$

13. 單項式的除法

除法是乘法的逆算。

$\because\ 4\times a=4a,\quad \therefore\ \dfrac{4a}{4}=\dfrac{4\times a}{4}=a,$

$$\frac{4a}{a}=\frac{4\times a}{a}=4.$$

同樣 $\because\ 3\times b\times c=3bc,$

$$\therefore\ \frac{3bc}{3}=\frac{3\times b\times c}{3}=bc,$$

$$\frac{3bc}{b}=\frac{3\times b\times c}{b}=3c,$$

$$\frac{3bc}{c}=\frac{3\times b\times c}{c}=3b,$$

$$\frac{3bc}{bc}=\frac{3\times b\times c}{b\times c}=3.$$

由上式知單項式除單項式，把相同的因式約去，即得商，如無公因式可約時，以被除式作分子，除式作分母，以表商式。

14. 除法的指數定則

$\because\ a\times a=a^2,\qquad \therefore\ \dfrac{a^2}{a}=\dfrac{a\times a}{a}=a^1=a^{2-1}.$

即 $\qquad a^2\div a=a^{2-1}=a.$

$\because\ a\times a\times a=a^3,\qquad \therefore\ \dfrac{a^3}{a}=\dfrac{a\times a\times a}{a}=a^2=a^{3-1}.$

即 $\qquad a^3\div a=a^{3-1}=a^2.$

$\because\ a^2\times a^3=a^5,\qquad \therefore\ \dfrac{a^5}{a^2}=\dfrac{a\times a\times a\times a\times a}{a\times a}=a^3=a^{5-2}.$

即　　$a^5 \div a^2 = a^{5-2} = a^3$.

由上式得指數定則II：

同文字相除，商的指數等於被除數的指數減去除數的指數。

〔例1〕　$\dfrac{30a^3x^5}{5a^2x^4} = 6a^{3-2}x^{5-4} = 6ax$.

〔例2〕　$\dfrac{30a^2x^4}{5a^3x^5}$這式子怎樣簡單？

依指數定則，則得其商式為

$$6a^{2-3}x^{4-3}.$$

2減3及4減5現在尙不會運算，待學了負數以後，自然會算故現時如遇到這樣的題，其運算法為約去同因式。

$$\therefore \quad \frac{30a^2x^4}{5a^3x^5} = \frac{6}{ax}$$

任何數的零次方是什麼意義呢？先看下例。

數　字　的

$\dfrac{9}{9} = 1$,

即　　$\dfrac{3^2}{3^2} = 1$.

由指數定則II，得

$3^2 \div 3^2 = 3^{2-2} = 3^0$,

$\therefore \quad 3^0 = 1$,

$\dfrac{5^2}{5^2} = \dfrac{25}{25} = 1$,

即　$5^2 \div 5^2 = 5^{2-2} = 5^0$,

$\therefore \quad 5^0 = 1$.

文　字　的

$\dfrac{a^2}{a^2} = \dfrac{a \times a}{a \times a} = 1$,

由指數定則II，得

$a^2 \div a^2 = a^{2-2} = a^0$,

$\therefore \quad a^0 = 1$.

$\dfrac{b^3}{b^3} = \dfrac{b \times b \times b}{b \times b \times b} = 1$,

即　$b^3 \div b^3 = b^{3-3} = b^0$,

$\therefore \quad b^0 = 1$.

所以任何數的零次方都是 1。

習　　題

計算下列各式：

1. $5x^2\times 7x^5$.　　2. $4a^3\times 5x^3$.

3. $7ab\times 8a^3b^2$.　　4. $x^3y^3\times 6a^2x^4$.

5. $5a^2x\times 8cx$.　　6. $5x^3y^3\times 6x^3a^3$.

7. $8ab\div 4a$.　　8. $2m^2n\div 3m$.

9. $35a^{11}\div 7a^7$.　　10. $15x^2y\div 3xy$.

11. $4a^2b^2c^2\div ab^2c^2$.　　12. $\dfrac{a^2}{a}\times\dfrac{b^2}{b}$.

13. $\dfrac{a^2}{b}\times\dfrac{b^2}{a}$.　　14. $\dfrac{4xy^2z}{xyz}\times xz$.

15. 學生m個，每10人分一組，共分幾組？每20人分一組，共分幾組？每p個人分一組，共分幾組？

第二章

簡易方程式

15. 方程式

方程式之意義，可藉下例說明之：

〔例 1〕　甲年齡的3倍是36。間甲現年多少？

把這個題的意思用式子表示出來，是

$$3\times ? =36\cdots\cdots(1)$$

猜這“？”代表什麼數？

〔例 2〕　某數的2倍加上4，等於14，求某數是多少？

把這個題的意思用式子表示出來，是

$$2\times ? +4=14\cdots\cdots(2)$$

猜這“？”又代表什麼數？

代數上通常用末後的幾個字母x，y，z等等代表未知數，現在用x代表未知數，即(1)，(2)中的“？”則

(1)　變為　　$3x=36\cdots\cdots(3)$

(2)　變為　　$2x+4=14\cdots\cdots(4)$

(3)式中的x，一望而知其為12，且祇能為12；(4)式中的x，一望而知其為5，且祇能為5；這些式子通稱為方程式。

16. 公 理

解方程式須藉下列四條公理：

I. 相等兩量，各加同量，其和仍相等；

II. 相等兩量，各減同量，其差仍相等；

III. 相等兩量，各以同量乘之，其積仍相等；

IV. 相等兩量，各以同量除之，其商仍相等。

17. 解 法

在§15中所計算的問題，因爲很簡單，故方程式中的未知數還容易猜，假如複雜些，就不容易猜了，故不得不研究一種有規則的運算法。

〔例1〕 求$3x=36$中x值，就得用公理IV。

兩端用3除之，即得 $x=12$.

〔例2〕 求$2x+4=14$中x值，其步驟如下：

若將兩端各減4，仍相等，得下式，

$$2x+4-4=14-4. \qquad (公理II)$$

即 $2x=10$.

兩端用2除之，得 $x=5$. (公理IV)

爲什麼兩端減4不加4？學者自答之。

〔例3〕 解$3x-4=8$.

兩端加4，得

$$3x+4-4=4+8. \qquad (公理I)$$

即 $3x=12$.

兩端用 3 除之，得　　$x=\frac{12}{3}=4$.　　（公理IV）

爲什麼兩端加 4 不減 4？學者自答之。

〔例 4〕　解 $\frac{x}{2}=-6$.

兩端用 2 乘，　　$x=-12$.　　（公理III）

18. 校　算

求得 x 之值，以之代入原方程式中，而考其兩端是否相等，以檢查有無錯誤；這種手續叫做核算。

例如：

$$3x-8=x+12.$$

$$3x-x=12+8. \quad \text{（公理I, II）}$$

$$2x=20.$$

$$x=10. \quad \text{（公理IV）}$$

將 x 之值代入原方程式中，則

左端 $=3\times10-8=22$；

右端 $=10+12=22$.

結果相等，故 x 之值適合方程式。

習　　題

求下列方程式中的未知數：

1. $x-40=100$.　　2. $4x=2x+6$.

3. $14=x+8$.　　4. $y-5=4$.

5. $y+3=7$.　　6. $2y-4=0$.

7. $2z=18$.　　8. $n+3=11-2$.

9. $3w-3=27$.　　　　10. $121=r+20$.

11. 從某數的3倍中減去5得28，求某數。

12. 有一個數用 6 乘後，再加上13，結果是 79；問這個數是多少？

13. 從一個數的 8 倍中減24，剩40；問原數是多少？

14. 某數用 5 乘後，比23多12；求某數。

15. 某數的 4 倍與11的差是37；求某數。

16. 兄年爲弟年的 2 倍，5 年前兄爲 9 歲；問弟現年多少？

17. 父年爲子年的 3 倍，父子年齡的和爲40；求父子各年幾何？

18. 某人買書 9 冊，付洋 6 元，還找回 1.5 元；問每冊價洋多少？

第 三 章

正 負 數

19. 負 數

1. 某人每日得工資五角，用去三角，還餘多少？

2. 某工人每日得工資3角，用去5角，够不够用？

兩題的答數，都是2角：一個是餘下的，一個是短少的，意義恰相反。在代數學上表意義相反的兩數，用正負兩種數來分別。餘下的通常用正數表之，符號是“+”；短少的通常用負數表之，符號是“—”。有了正負數以後，第一題的算式寫作$5-3=+2$，第二題的算式寫作$3-5=-2$。

不論正負號，只論數值的大小，叫做絕對值，符號是“| |”。

例如：　-5的絕對值用$|-5|$記之，等於5。上邊兩題答數的絕對值爲$|+2|=|-2|=2$。

因此我們知道“+”和“—”這兩個符號，在代數學上都有兩種用法：（*1*）用在運算方面的叫做運算符號，和算術上的意義一樣；（*2*）用在分別數的性質時，叫做性質符號。

正負數應用到量上的說明：

1. 如每日的時間，用正午爲標準，下午6時爲$+6$時，則上午8時爲-4時。

2. 假設往北是正的，則往南就是負的。用鄭州爲標準，到北平的方向便是正的，到漢口的方向便是負的。

3. 假設用海平面爲標準，高於海平面的爲正，低於海平面的爲負。

20. 正負數之大小

數的大小用記號>(大於)或<(小於)表出來。

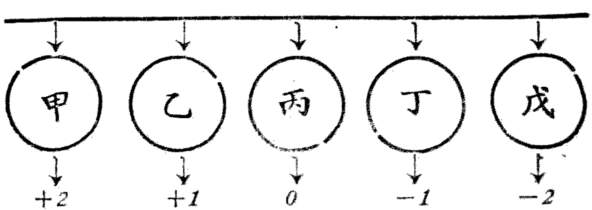
例如：　　　　5大於3就寫爲

$5>3$，或$3<5$。

由上節既知代數上比算術上多了一種負數。那末，牠們自已的大小如何？牠們和正數的大小又如何？總應當知道，現在舉一個實際問題來說明正負數的大小：

假設有甲乙丙丁戊五個人，每日收入都是10元；甲每日支出8元，其餘的人，順次每人每日多支出1元，他們的剩餘各如何？

剩 餘 的 數 目



因爲收入是一樣的，所以支出得多，就剩餘得少，於是得

$$(+2)>(+1)>0>(-1)>(-2).$$

這個式子表明正數大小的次序，和算術上的數是一樣的；負數的絕對值愈大，數值愈小，並且表明凡正數皆大於零，凡負數皆小

於零。所以就得正負數和零大小的次序如下：

$$\cdots>+4>+3>+2>+1>0>-1>-2>-3>-4>\cdots$$

習 題

用正負數的意義，說明下列各題：

1. 某井底比海平面高 7 尺。
2. 上午10時和下午 2 時。
3. 甲錶比乙錶每小時快10分，比丙錶每小時慢 5 分。
4. 由鄭州向東行20里，或由鄭州向西行30里。
5. 戰線向前進 5 里。
6. 戰線向後退10里。
7. 排列0，−25，−3，5，12的次序。
8. 排列$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，5，−4的次序。

21. 加法的法則

正數加正數

甲每月收入100元(+100)，又收入50元(+50)；問每月共收入多少？

答： 每月共收入150元(+150)。

旣知答數爲+150，研究怎樣得來。

負數加負數

甲每月還乙洋100元(−100)還丙洋50元(−50)；問每月共還多少？

答： 每月共還洋150元(−150)。

旣知答數爲−150，研究怎樣得來？

+150恰等於收入洋數的絕對值之和，添上正號，故得算式如下：

$$\begin{array}{rr} \text{性質符號} \leftarrow & +100 \\ \text{運算符號} \leftarrow +) & +\ 50 \\ \hline & +150 \end{array}$$

−150恰等於還債洋數的絕對值之和，添上負號，故得算式如下：

$$\begin{array}{rr} \text{性質符號} \leftarrow & -100 \\ \text{運算符號} \leftarrow +) & -\ 50 \\ \hline & -150 \end{array}$$

由上例得同性質數相加的法則：

I. 求絕對值的和；　II. 符號仍舊。

例如：

1. 求$+3a$與$+5a$的和。

$$\begin{array}{rr} & +3a \\ +) & +5a \\ \hline & +8a \end{array}$$

2. 求$-3a$與$-5a$的和。

$$\begin{array}{rr} & -3a \\ +) & -5a \\ \hline & -8a \end{array}$$

正數與負數相加

某人由南京向北行30里（+30）後，向南行20里（−20）；問他距南京多少里？

答：　在南京北邊10里（+10）。

因+10恰等於所行里數的絕對值之差，添上絕對值大的符號，故得算式如下：

$$\begin{array}{rr} \text{性質符號} \leftarrow & +30 \\ \text{運算符號} \leftarrow +) & -20 \\ \hline & +10 \end{array}$$

某人由南京向北行20里（+20）後，向南行30里（−30）；問他距南京多少里？

答？　在南京南邊10里（−10）。

因−10恰等於所行里數的絕對值之差，添上絕對值大的符號，故得算式如下：

$$\begin{array}{rr} \text{性質符號} \leftarrow & +20 \\ \text{運算符號} \leftarrow +) & -30 \\ \hline & -10 \end{array}$$

由上例得兩個異性質數相加的法則：

I. 求絕對值的差；　II. 用絕對值大的符號。

如兩個以上的異性質數相加，可每次取兩個，依法則加之。

例如：

1. 求$+80x$與$-50x$的和。

$$\begin{array}{rr} & +80x \\ +) & \underline{-50x} \\ & +30x \end{array}$$

2. 求$+50x$與$-80x$的和。

$$\begin{array}{rr} & +50x \\ +) & \underline{-80x} \\ & -30x \end{array}$$

3. 求$+30b$，$-25b$與$+70b$的和。

$$\begin{array}{rr} & +30x \\ +) & \underline{-25b} \\ & +\ 5b \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & +\ 5b \\ +) & \underline{+70b} \\ & +75b \end{array}$$

以上正負性質的數相加，都叫做代數和，所以代數和與算術的和，就不能完全一樣，因爲代數上的數有正負兩種性質，加起來可以增大，也可以反而變小。

【練習】　兩個什麼性質的數加起來大？兩個什麼性質的數加起來反而小？

習　　題

求下列各題中諸數的和：

1. $+5$，$+10$.
2. $+5$，-10.
3. -5，-10.
4. -70，-80.
5. -8，$+5$，$+3$.
6. $+5$，-8，$+3$.
7. -5，$+8$，-6，$+15$.
8. $-3a$，$-7a$.
9. $15b$，$-16b$.
10. $+17x$，$-18x$.
11. 0，$-2x$.
12. 0，$-x$，$+x$.

13. $-3y, 0$。　　14. $+1, 0, +1, -3$。

15. $+3m, -2m, +m, -4m$。

16. $+3a, +b, -5a, -10b$。

17. 甲從某地向東行30里後，向西行20里，又向東行10里；問甲距某地多少里？其方向如何？

18. 甲從某地向東行3個a里後，向西行2個a里，又向東行1個a里；問甲距某地多少里？其方向如何？

22. 代數式的正項和負項

我們知道$3a-3x+b$是三項式；$3a$是首項，$-3x$是第二項，$+b$是末項（§9）。

在代數上，式的首項是正的，通常把"+"號省略不寫，故$3a$即$+3a$。

因首末兩項都含"+"號，就叫做正項；第二項含"−"號，就叫做負項，所以項的正負，以牠前邊的符號來定。

例如：$-3a+3b-7$的首末兩項含負號，所以是負項，第二項含正號，所以是正項。

23. 式和項的關係

拿一個多項式來研究，牠的成分，不出下列三種情形：

(1) 都是正項組織成的；

(2) 都是負項組織成的；

(3) 正項和負項組織成的。

所以一個多項式的全式（不含括弧的），普遍的來說，就是表

明正項和負項的代數和，常把運算的加號省略不寫。

因此前§21的運算式：

$$\begin{array}{r} +3a \\ +)\ +5a \\ \hline +8a \end{array}$$

可以寫爲$3a+(+5a)=8a$，

即 $3a+5a=8a$．

$$\begin{array}{r} -3a \\ +)\ -5a \\ \hline -8a \end{array}$$

可以寫爲$-3a+(-5a)=-8a$，

即 $-3a-5a=-8a$．

同樣，$80x+(-50x)=30x$， 即$80x-50x=30x$；

$50x+(-80x)=-30x$， 即$50x-80x=-30x$；

$30b+(-25b)+(+70b)=75b$，即$30b-25b+70b=75b$．

24. 加法的交換定則

在算術上，知

$$3+5=5+3.$$

同樣，知 $a+b=b+a$．

這就是兩個數相加，不因其相加的次序而變，不但兩個數相加如此，就是三個以上的數相加，也是如此，這就叫做加法的交換定則。

25. 加法的結合定則

在算術上，知

$$3+5+7=(3+5)+7=3+(5+7)$$
$$=15.$$

同樣，知 $a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$．

這就是三個數相加，可以分組加之，其和不變，不但三個數相

加是如此，就是三個以上的數相加，也是如此，這就叫做加法的結合定則。

習 題

化簡下列各式：

1. $3a+b-5a-10b$. 2. $4a^2-5a-15a^2+5$.

3. $3xy-4a+5xy+8a$. 4. $3x^2-5-4x^3-5x-x^2+x^3$.

26. 單括弧

括在括弧內的項，不管是多少項，都要當作一項看待。

I. 括弧前邊是"+"號。

從§25，知$7+(11-15)=7+11-15=3$；

$$80x+(30x-45x)=80x+30x-45x=65x,$$

就可以得到去掉括弧的法則：

式中括弧前邊是正號，去掉牠時，括弧內各項的符號不變。

反之，也可以得到添加括弧的法則：添加前邊帶正號的括弧，括在括弧內的各項的符號也不變。

例如： 1. $3+5-7+1=3+(5-7+1)$

或 $=3+5+(-7+1)$

2. $3a-2b-a+b=3a+(-2b-a+b)$

或 $=3a-2b+(-a+b)$.

II. 括弧前邊是"−"號。

$8-(4+3)$的意思，是從8減去4與3之和，結果為1；如從8先減去4後，再減去3，其結果也是1。

於是， $8-(4+3)=8-4-3=1$。

同樣， $5a-(3a+a)$的意思，是從$5a$減去$3a$，再減去a。

於是， $5a-(3a+a)=5a-3a-a=a$。

$8-(4-3)$的意思，是從8減去4與3之差，結果是7；如從8減去4後，再加上3，其結果也是7。

於是， $8-(4-3)=8-4+3=7$。

同樣， $5a-(3a-a)$的意思，是從$5a$減去$3a$，再加上a。

於是， $5a-(3a-a)=5a-3a+a=3a$。

由上例得法則如下：

式中括弧前邊是負號，去掉牠時，要變括弧內各項的符號（正的變爲負的，負的變爲正的）。

添加前邊帶負號的括弧時，括在括弧裏邊的各項，都要變符號。

例如： 1. $3+5-7+1=3-(-5+7-1)$

或 $=3+5-(7-1)$。

2. $3a-2b-a+b=3a-(2b+a-b)$

或 $=3a-2b-(a-b)$。

III. 括弧前邊符號的變換。

上邊講的是去括弧或加弧括時，括弧內符號的變換法則；這裏是講不去括弧的符號變換，但原則是一樣。

例如： 原式爲$+(5-2)$。想把括弧前邊的“+”號變爲“−”號，同時把括弧內各項的符號亦都變了，所得式之值與原式之值相同：

$$+(5-2)=+5-2=-(-5+2)=3.$$

同理， $-(5-2)=-5+2=+(-5+2)=-3$。

$$+(a-b)=+a-b=-(-a+b).$$

$$-(a-b)=-a+b=+(-a+b).$$

由上例得法則：

把一式括弧前邊的符號，由"+"號變爲"−"號，或由"−"號變爲"+"號，同時變換括弧各項內符號，其值不變。

〔練習〕 說明下邊算式的錯誤在什麼地方：

1. $-(-5+2)(-7+1)=+(5-2)(7-1)$

$$=3\times6=18.$$

2. $(5-2+1)=-(5+2-1)=-6.$

習 題

去掉括弧後，化簡下列各式：

1. $5+(7+8)$.　　2. $5-(7-8)$.

3. $5x+(x-2a)$.　　4. $2a-(a+3x)$.

5. $a+b-(a+b)$.　　6. $x-y-(y-x)$.

7. $3a+4b-(3b+a)-(5a-8b)$.

8. $2a-(3a-2b)+(2a-3b)-(a-2b)$.

9. $3ab+5cd-4ac-6bd-(3ab+6cd-3ac-5bd)$.

10. $\frac{1}{2}a-b+\frac{1}{3}a-\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\right)$.

11. $-a-3b-\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}c\right)$.

12. $-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{2}y-\frac{1}{6}\right)$.

下列各題的括弧裏邊，應當寫什麼式子？

13. $5+7+8=5+(\quad)$.　　14. $a-b-c-\ =a-(\quad)$.

15. $x+3y-5=(\quad)-5$.　　16. $x-5y+9=9-(\quad)$.

27. 減法的法則

由前節，知

$$-7m-(10m+2m)=-7m-10m-2m=-19m.$$

$$-7m-(10m-2m)=-7m-10m+2m=-15m.$$

從上兩式知道減去就是把減式的正負號改變後，依§21的法則與被減式相加。

例如：　從$6x$減去$-4x$，把$-4x$變為$4x$後，加到$6x$上，得$10x$，即是結果。

注意：　代數學上把減式各項的符號變後，就成了代數和；所有式中的正負號，都是性質符號。

習　　題

求下列各題中兩數的差（第一數減第二數）：

1. $+7$，$+5$.　　2. $+7$，-5.

3. -7，-5.　　4. -7，$+5$.

5. $+15x$，$+21x$.　　6. $+81a$，$-59a$.

7. $-b$，$-11b$.　　8. $-8y$，$-4y$.

9. 0，$+9n$.　　10. 0，$-13m$.

11. $-17c$，0.　　12. $+13d$，0.

13. $-25s$，$-9s$.　　14. $-2z$，$-4z$.

15. 某人有國幣40元，買書用去17元，購衣服用去6元，又代

友人還賬25元；問此人現有圓幣多少元？

28.　乘法的法則

正數乘正數

甲每小時向東行5里（+5），由某村起行；問2小時後（+2），甲距某村多少里？

答：　在某村東10里（+10）。

算式是$(+5)\times(+2)=+10$。

負數乘負數

甲每小時向西行5里（−5），現在行到某村；問2小時前（−2），距某村多少里？

答：　在某村東10里（+10）。

算式是$(-5)\times(-2)=+10$。

由上例得兩個同性質數相乘的法則：

I.　求絕對值的乘積；　　II.　符號是正的。

如兩個以上的同性質數相乘，可每次取兩個，依法則乘之。

例如：

$$(+a)(+b)=ab,$$

$$(-a)(-b)=ab,$$

$$(+a)(+b)(+c)=ab(+c)=abc.$$

負數乘正數

甲每小時向東行5里（+5），現在行到某村；問2小時前（−2），距某村多少里？

答：　在某村西10里（−10）。

算式是$(+5)(-2)=-10$。

正數乘負數

甲每小時向西行5里（−5），現在行到某村；問2小時後（+2），距某村多少里？

答：　在某村西10里（−10）。

算式是$(-5)(+2)=-10$。

由上例得兩個異性質數相乘的法則：

I.　求絕對值的乘積；　　II.　符號是負的。

如兩個以上的異性質數相乘，可每次取兩個數，依法則乘之。

例如：
$$a(-b)=-ab,$$
$$(-a)b=-ab,$$
$$a(-b)(-c)=-ab(-c)=abc,$$
$$(-a)(-b)(-c)=ab(-c)=-abc,$$
$$(-a)(-b)(-c)(-d)=(ab)(cd)$$
$$=abcd.$$

由上例得正負數相乘的法則：

I. 求絕對值的乘積；

II. 奇個負數相乘，其乘積的符號爲負；偶個負數相乘，其乘積的符號爲正；正數相乘，無論奇個或偶個，其乘積的符號都是正。

習　　題

求下列各式的乘積：

1. $(+7)\times(+8)$.　　2. $(-7)\times(-8)$.

3. $(+6)\times(-2)$.　　4. $(-6)(+2)$.

5. $(+16)(-\frac{1}{2})$.　　6. $(-3a)(+3)$.

7. $(+3x)(-3)$.　　8. $(-ab)(+c)$.

9. $(+6m)(-5ft)$.　　10. $(-5)(-6)(-3)$.

11. $(-2)(-2)(+2)$.　　12. $(-5)(-6)(-3)$.

13. $(-2)(-1)(+1)(-1)(-1)$.

14. $(-2b)(+b)(-4c)(-2x)$.

15. 某人由徐州每小時向北行5里，2小時後，距徐州多少里？

16. 某人每小時向北行a里，現在行到徐州；問2小時以前，在徐州何方？距多少里？

29. 負數的乘方

數 字 的	文 字 的
$(-1)^2=(-1)(-1)=1^2=1$，	$(-a)^2=(-a)(-a)=a^2$；
$(-1)^3=(-1)^2(-1)$	$(-a)^3=(-a)^2(-a)$
$=(+1)(-1)=-1$，	$=a^2(-a)=-a^3$，
$(-1)^4=(-1)^2(-1)^2$	$(-a)^4=(-a)^2(-a)^2$
$=(+1)(+1)=+1$，	$=a^2\times a^2=a^4$，
$(-1)^5=(-1)^4(-1)$	$(-a)^5=(-a)^4(-a)$
$=(+1)(-1)=-1$，	$=a^4(-a)=-a^5$，
…………	…………

由上式知道負數的奇次方仍爲負數，偶次方則爲正數。

30. 乘法分配定則

1. 甲年$3x$歲，乙年$2x$歲，他們年齡和的3倍是多少？

甲乙年齡的和$=3x+2x$，

甲乙年齡和的3倍$=3(3x+2x)$

$$=3\times5x=15x。$$

2. 如把上題改爲甲年3倍與乙年3倍，共是多少？

甲年3倍$=3\times3x$，

乙年3倍$=3\times2x$；

甲年3倍與乙年3倍的和$=3\times3x+3\times2x$

$$=9x+6x=15x。$$

兩題的答數既相等，

$$\therefore\quad 3(3x+2x)=3\times 3x+3\times 2x.$$

同樣
$$m(a+b)=ma+mb,$$
$$m(a-b)=ma-mb.$$

所以單項式乘多項式，等於分乘各項後所得積的代數和，這就叫做乘法的分配定則，也就是單項式乘多項式的法則。

知道了乘法的分配定則，便可得到括弧前邊有乘數時，去掉括弧的法則：

括弧前邊有乘數去掉牠時，用括弧前邊的乘數乘括弧以內的各項。

例如：　1. $-2(3a+2b)=-2\times 3a+(-2)\times 2b$

$$=-6a-4b.$$

2. $3x-\frac{1}{3}(6x^2-21x+9y)=3x-\frac{1}{3}\times 6x^2+\frac{1}{3}\times 21x-\frac{1}{3}\times 9y$

$$=3x-2x^2+7x-3y$$
$$=10x-2x^2-3y.$$

習　　題

去括弧後，化簡下列各式：

1. $2x(x-5)$.　　2. $5(a-b)$.

3. $-5(a-b)$.　　4. $(3x-5y)\times 3y$.

5. $-3x(3x-5y)$.　　6. $-3x(-x-y+z)$.

7. $(-a^2bc+ab^2c-abc^2)+2(-ab)$.

8. $2(a+b+c)-3(a-b+c)-(b+c-a)$.

9. $\frac{3}{4}x(2x-3y+4z)-\frac{5}{6}x(3x-\frac{1}{5}y-z)$.

下列各式中括弧內應當寫進什麼式子：

10. $3x-3y=3(\quad)$.　　11. $ax-bx=x(\quad)$.

12. $ax-3x-2a+4=x(\quad)-2(\quad)$.

13. $a^3b^2c-a^2b^3c+a^2b^2c^2=-ab(\quad)$.

14. 甲年a歲，乙年爲甲的2倍；問他們年齡和的3倍是多少？

31. 除法的法則

1. 同性質的數相除。

∵ $(+5)\times(+2)=+10$，　∴ $(+10)\div(+2)=+5$；

$(+5)\times(-2)=-10$，　$(-10)\div(-2)=+5$.

由上式得法則：

I. 求絕對值的商；　II. 符號是正的。

例如： 1. $(+6a)\div(+3a)=+\frac{|+6a|}{|+3a|}=\frac{6a}{3a}=2$.

2. $(-6a)\div(-3a)=+\frac{|-6a|}{|-3a|}=\frac{6a}{3a}=2$.

II. 異性質的數相除。

∵ $(-5)\times(-2)=+10$，　∴ $(+10)\div(-2)=-5$；

$(-5)\times(+2)=-10$，　$(-10)\div(+2)=-5$.

由上式得法則：

I. 求絕對值的商；　II. 符號是負的。

例如： 1. $(-8x)\div(+2)=-\frac{|-8x|}{|+2|}=-\frac{8x}{2}=-4x$.

2. $(+8x)\div(-2)=-\dfrac{|+8x|}{|-2|}=-\dfrac{8x}{2}=-4x$.

習　　題

求下列各式的商：

1. $(+15)\div(+5)$.　　2. $(+21)\div(-7)$.

3. $(-21)\div(+7)$.　　4. $(+15)\div(-5)$.

5. $(-12)\div(-4)$.　　6. $(+27)\div(-9)$.

7. $(+3)\div(-2)$.　　8. $(+2)\div(-3)$.

9. $(-27)\div\left(-\dfrac{3}{2}\right)$　　10. $(+5)\div\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

11. $(-3a)\div(-a)$.　　12. $(-3xy)\div(+y)$.

32. 除法分配定則

1. 甲某每月把房租$3a$元和利金$9a$元收到後，分給三個兒子使用；問每人得多少？

房租與利金的和$=3a+9a=12a$，

$\therefore\ \dfrac{3a+9a}{3}=\dfrac{12a}{3}=4a$……每人分得的元數。

2. 如把上題改爲房租收到後，即分用之；利金收到後，再分用之；問每人兩次共得多少？

第一次每人分得的元數$=\dfrac{3a}{3}=a$，

第二次每人分得的元數$=\dfrac{9a}{3}=3a$，

$\therefore\ a+3a=4a$……每人兩次共分得的元數。

兩題的答數旣相等，

$$\therefore\quad \frac{3a+9a}{3}=\frac{3a}{3}+\frac{9a}{3}.$$

同樣，

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c},$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}.$$

所以單項式除多項式，等於分除各項後所得商的代數和，這就叫做除法的分配定則，也就是單項式除多項式的法則。

例如： 1. 求x除x^2-2xy的商。

$$\frac{x^2-2xy}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{2xy}{x}=x-2y.$$

2. 求$\frac{1}{2}a$除$2a^2-\frac{1}{3}ab$的商。

$$\frac{2a^2-\frac{1}{3}ab}{\frac{1}{2}a}=\frac{2a^2}{\frac{1}{2}a}-\frac{\frac{1}{3}ab}{\frac{1}{2}a}$$

$$=2\times\frac{2}{1}a-\frac{1}{3}\times\frac{2}{1}b=4a-\frac{2}{3}b.$$

習 題

求下列各式的商：

1. $(x^3-3x^2+x)\div x$.
2. $(x^6-7x^5+4x^4)\div x^2$.
3. $(a^2-ab-ac)\div a$.
4. $(a^3-a^2b-a^2b^2)\div a^2$.
5. $(15x^3-25x^2)\div(-5x^2)$.
6. $(34b^3c^2-51b^2c^3)\div 17bc$.
7. $(4x^4y^4-8x^2y^2+6xy^3)\div(-2xy)$.

8. $(nm^3-9m^2n-12mn^2)\div(-3m)$.

9. $\left(-3a^2+\frac{9}{2}ab-6ac\right)\div(-3a)$.

10. $\left(-\frac{5}{3}x^2+\frac{5}{3}xy+\frac{10}{3}x\right)\div\left(-\frac{5}{6}x\right)$.

33. 重複括弧

式中含重複括弧，去掉時，從外向裏，或從裏向外都可以；最便當的方法，是從裏向外一個一個的去掉牠們。

例如：$a-[b-\{a-(a+b)\}]=a-[b-\{a-a-b\}]$

$$=a-[b+b]$$

$$=a-2b.$$

習　題

去掉下列式中的括弧：

1. $a-[2a-\{3b-(4c-2a)\}]$.
2. $-[-\{-(-x)\}]-\{-(-y)\}$.
3. $-5x-[3y-\{2x-(2y-x)\}]$.
4. $2a-\{5b+(3c-a)\}-\{5a-(b+c)\}$.
5. $-\{5x-(11y-3x)\}-\{5y-(3x-6y)\}$.
6. $3a-[a+b-\{a+b+c-(a+b+c+d)\}]$.

34. 代數式的數值

1. 代數式 用（＋），（－），（×），（÷），（$\sqrt{\ }$）等運算符號

聯接文字或文字與數字所成的算式，叫做代數式，如$3ab$，$2a^2x+3b-4y$，$\sqrt{ab}+c^2$都是代數式。

11. 求代數式的數值法　假如代數式中文字代表的數值已經知道，代入式中，計算後，得到的結果，叫做代數式的數值。

例如：　1. 假設$a=4$，求$3a$的數值。

$$3a=3\times4=12.$$

12就是$a=4$時，$3a$這個代數式的數值。

2. 假設$x=5$，求$x^2-10x+2$的數值。

$$x^2-10x+2=5^2-10\times5+2=-23.$$

-23就是$x=5$時，$x^2-10x+2$的數值。

3. 假設$a=6$，$x=7$，$z=5$；求$\frac{1}{3}ax-2z$的數值。

$$\frac{1}{3}ax-2z=\frac{1}{3}\times6\times7-2\times5$$

$$=4.$$

習　　題

假設$a=7$，$b=2$，$c=0$，$x=5$，$y=3$；求下列各代數式的數值：

1. $4ax^2$.　　2. x^3b.　　3. a^2cy.

4. a^2-b^3.　　5. a^2-bc.　　6. $cx-y^2$.

7. $\frac{1}{20}ab^3x$.　　8. $\frac{1}{9}x^2-cy^4$.

假設$a=2$，$b=3$，$c=1$，$d=0$；求下列各代數式的數值：

9. $2a^2+3b^2-4c^4$.　　10. $a^2+b^2+c^2+d^2$.

11. $6ab-3bc-5cd$. 12. $6a+5b-8c+9d$.

13. 假設$x=0，3，6$時；求$x^2-9x+20$的數值。

14. 假設$x=\frac{1}{3}，\frac{3}{2}$時；求$6x^3-11x^2+3x$的數值。

第　四　章

多項式的基本運算（加法和減法）

35.　整式的次數

凡不含有帶根號文字且無文字作分母的代數式，叫做整式，如 $3a+b-c$ 和 $\frac{1}{3}a^2-a-\frac{1}{7}$ 都是整式，但 $\frac{x}{3a}+\frac{y}{b}-\frac{2z}{c}$ 如就 x，y，z 而說，亦是整式。

I.　項的次數。

在 $3x^3y$ 項中，文字乘方的和爲 4，就叫做 4 次項，如就 x 來說，叫做 x 的 3 次項；如就 y 來說，叫做 y 的一次項。

由上知項的次數，就是各文字乘方相加的數目。

II.　整式的次數

在一式中，最高次項是幾次，就叫做幾次式，如在 $x^2y^3+x^2y-y^2$ 式中，最高次項的次數是 5，就叫做 5 次式，如就 x 來說，叫做 x 的 2 次式；如就 y 來說，叫做 y 的 3 次式。

如 $3x^2-2x-4$ 是 2 次式，也是 x 的 2 次式，因爲全式只含一個文字的緣故，-4 叫做絕對項或 x 的零次項；因 x^0 等於 1，故 $-4x^0$ 仍等於 -4。在 y^2-3y+5 式中，$+5$ 可以說是 y 的零次項。

習　　題

1. $3ab^2-7bc^3-8$是幾次式？是a或b的幾次式？

2. $3x^4-5x^3-6x+5$是幾次式？是x的幾次式？各項是幾次項？

3. $5x^3y-16x^2y^2+7xy-5y+3x-5$是幾次式？是$x$的幾次式？是$y$的幾次式？$-5y$項是$x$的幾次項？$+3x$項是$y$的幾次項？

36. 升冪式和降冪式

一個數的乘方，又叫做乘冪。如a^2，就叫做a的2乘冪；b^7就叫做b的7乘冪。如此類推。

多項式各項的乘冪，漸漸升高，叫做升冪式；如$5+6a-7a^2+3a^3$就是a的升冪式。相反的，叫做降冪式：如$5x^4-4x^3+3x^2-2x+1$就是x的降冪式。

在$a^2+2ab+b^2$式中，如就a來說，是降冪式；如就b來說，是升冪式。故一式含幾個文字時，不論怎樣排列都可以，需要什麼文字時，就用什麼文字的冪序排列。

習　　題

把下邊的式子，排列成x或a的降冪式，y或b的升冪式：

1. $5-7x^4+3x-9x^2$.　　2. $a^5-11+a^4-3a+5a^2$.

3. $xy-15+x^2y+6xy^2+x^3+y^3$.

4. $a^3+abc+2ab^2c-3a^2bc+b^3+c^3-7abc^2$.

37. 多項式加減法

1. 加法

(1) 橫式運算法 把應加的式子，以括弧括住，用"+"號與被加的式子相連；再去掉括弧，合併同類項，即得結果。

例如： 求$4x-3y$與$3x+2y$的和。

$$4x-3y+(3x+2y)=4x-3y+3x+2y=7x-y.$$

(2) 縱式運算法 把各式的同類項，寫在同一縱行內；合併同類項，即得結果。

例如： 求$5a-c$，$4b+7c^2$與$2a-3b-5c^2-c$的和。

$$\begin{array}{rrrrr} & 2a & -3b & -5c^2 & -c \\ & 5a & & & -c \\ +) & & 4b & +7c^2 & \\ \hline & 7a & +b & +2c^2 & -2c \end{array}$$

II. 減法

(1) 橫式運算法 把應減的式子，以括弧括住，用"−"號連在被減式的後邊，然後去掉括弧，依§9的法則合併同類項，即得結果。

例如： 從$6x+2y-5$式中減去$4x-3y+10$。

$$6x+2y-5-(4x-3y+10)=6x+2y-5-4x+3y-10$$
$$=2x+5y-15,$$

(2) 縱式運算法 把減式各項的符號改變後，與被減式的同類項寫在同一縱行內（被減式在上，減式在下），依§9的法則合併同類項，即得結果。

例如： 1. 從$6x+2y-5$式中減去$4x-3y+10$。

$$\begin{array}{rrrr} & 6x & +2y & -5 \\ +) & -4x & +3y & -10 \\ \hline & 2x & +5y & -15 \end{array}$$

(i) $6x+(-4x)=2x$.

(ii) $2y+3y=5y$.

(iii) $-5+(-10)=-15$.

2. 從x^3-1式中減去$3x^2-2x$。

$$
\begin{array}{rl}
 & x^3 \qquad\qquad\quad -1 \\
+) & \underline{\qquad -3x^2+2x \qquad} \\
 & x^3-3x^2+2x-1
\end{array}
$$

(i) $x^3+0=x^3$。

(ii) $0+(-3x^2)=-3x^2$。

(iii) $0+2x=2x$。

(iv) $-1+0=-1$。

習 題

求下列各式的和：

1. x^2+xy，x^2-2xy　　2. $7a^2-15$，$3a^2+25$。

3. x^3-x^2+x-1，$2x^2-x+1$。

4. $-a+\frac{2}{3}b$，$\frac{3}{4}a-b$。

5. $9x^2-7x+5$，$-14x^2+15x+6$，$20x^2-40x-17$。

6. $a^2-ab+bc$，$ab+b^2-ac$，$ac-bc+c^2$。

7. $6x^3-2x+1$，$2x^3+x+6$，x^3-7x^2+2x-4。

8. a^3-a^2+3a，$3a^3+4a^2+8a$，$5a^3-6a^2-11a$。

9. $x^3-4x^2y+6xy^2$，$2x^2y-3xy^2+2y^3$，$y^3+3x^2y+4xy^2$。

10. $-\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$，$\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b$，$-2a-b$。

求下列各式的差：

11. 從$5x^2+xy$　減去$2x^2+8xy-7y^2$。

12. 從$2a-3b-c$　減去$4a-3b+c$。

13. 從$15x+10y-18z$　減去$2x-8y+z$。

14. 從$25a-16b-18c$　減去$4a-3b+15c$。

15. 從$-2x^3-2x^2-3x+2$　減去x^3-x+1。

第五章

一元一次方程式

38. 方程式的定義

在第二章我們對於方程式，僅作初步介紹，在此應有進一步之研究：

I. 等式

兩個代數式相等時，用等號連結起來，就叫作等式，在等號兩旁的式子，叫做左端和右端。

例如：$\underbrace{x+4}_{\text{左端}}=\underbrace{7}_{\text{右端}}$，$\underbrace{a(a-b)}_{\text{左端}}=\underbrace{a^2-ab}_{\text{右端}}$都是等式。

等式分爲恆等式，方程式兩種：

II. 恆等式

在等式$a(a-b)=a^2-ab$中：

假如用2代a，3代b，得

左端$=2(2-3)=-2$；

右端$=2^2-2\times 3=-2$。

∴ 兩端相等。

假如用5代a，4代b，得

左端$=5(5-4)=5$；

右端$=5^2-4\times 5=5$。

∴ 兩端相等。

在上式中，無論用什麼數代上式中的a和b，兩端總是相等；這

種等式，叫做恆等式。

由上例得恆等式的條件：

用無論什麼數代等式中的文字，兩端恆相等，就是恆等式。

III. 方程式

在等式$x+4=7$中：

假如用2代x，得

左端$=2+4=6$，

但右端爲7.

∴　兩端不相等。

假如用1代x，得

左端$=1+4=5$。

∴　兩端仍不能相等。

假如用4代x，得

左端$=4+4=8$.

∴　兩端還不能相等。

假如用3代x，得

左端$=3+4=7$.

∴　兩端相等。

可見在上式中，$x=3$，兩端才能相等，除3以外。再沒有數，能使兩端相等，這種等式，叫做方程式。

方程式中僅有數字的項，叫做已知項或已知數。已知數亦可用a，b，c等文字代之。方程式中能求的數，叫做未知數，常用x，y，z等文字代之。

代未知數的文字，叫做方程式的元。

39. 方程式的次數

方程式中只有一個未知數，牠的次數是1時，叫做一元一次方程式；牠的次數是2時，叫做一元二次方程式，如此類推。

例如：　在$x+4=7$中，x的次數是1，所以是一元一次方程式；在$x^2+6x+7=0$中，x的次數是2，所以是一元二次方程式。

故方程式的次數，以所含未知數之最高次數定之（參閱§35）。

40. 解方程式

求方程式的未知數，等於什麼數兩端才能相等，叫做解方程式。求得的未知數之值，叫做方程式的根。

41. 移項法則

把方程式的項由左端移到右端，或由右端移到左端，都叫做移項。

方程式中含未知數的項，常常不在同一端，沒法合併；已知數的項，也有這樣的情形，所以要移項。

I. 移加作減，移減作加（這是根據等量公理I和II得來的）。

舉例說明於下：

例如：　1. 解 $x+3=5$.

兩端減3，得　　　$x=5-3$.

這樣的做法，實際上等於把左端的"+3"移到右端當"−3"。

2. 解 $x-3=5$.

兩端加3，得　　　$x=5+3$.

這無異把左端的"−3"移到右端當"+3"。

II. 移乘作除，移除作乘（這是根據等量公理III和IV得來的。

舉例說明於下：

例如：　1. 解 $3x=15$.

用移乘作除，則得

$$x=\frac{15}{3}=5.$$

2. 解 $\frac{x}{4}=20.$

用移除作乘，則得

$$x=20\times4=80.$$

由上邊的例子，知道有了移項法則，解方程式時，要方便得多了。

注意：

(1) $3x+1=5,$

$$x+1\neq\frac{5}{3}.$$

(2) $\frac{x}{4}+1=20.$

$$x+1\neq20\times4.$$

42. 一元一次方程式的解法

(a) 不含數字分數的一元一次方程式的解法：

I. 有括弧時，先去掉括弧；

II. 移未知數項於一端，已知數項於另一端；

III. 合併同類項；

IV. 用未知數的係數除兩端，即得未知數的數值；

V. 核算。

〔例 1〕 解 $3x-8=10.$

解： 移項， $3x=10+8.$

合併同類項，　　$3x=18$.

用 3 除兩端，　　$x=6$.

核算：　用6代原方程式中的x，得

$$\text{左端}=3\times6-8=10.$$

∴　知$x=6$不誤。

〔例2〕　解　$2(2x-3)=-2+8x$.

解：

$$4x-6=-2+8x, \qquad \mathrm{I}$$

$$4x-8x=-2+6, \qquad \mathrm{II}$$

$$-4x=4. \qquad \mathrm{III}$$

$$\therefore\quad x=-1. \qquad \mathrm{IV}$$

〔註〕　以後凡核算不寫出的，都是留作讀者練習。

〔例3〕　解　$5x-6(x-5)=2(x+5)+5(x-4)$.

解：

$$5x-6x+30=2x+10+5x-20, \qquad \mathrm{I}$$

$$5x-6x-2x-5x=10-20-30, \qquad \mathrm{II}$$

$$-8x=-40. \qquad \mathrm{III}$$

$$\therefore\quad x=5. \qquad \mathrm{IV}$$

〔例4〕　解　$0.9x-5=0.2x-2(x-2)$.

解：

$$0.9x-5=0.2x-2x+4, \qquad \mathrm{I}$$

$$0.9x-0.2x+2x=4+5, \qquad \mathrm{II}$$

$$2.7x=9. \qquad \mathrm{III}$$

$$\therefore\quad x=3\frac{1}{3}. \qquad \mathrm{IV}$$

【練習】　指出下邊運算的錯誤：

解方程式　$6x-15=2x-7$。

解：

$$6x-2x=15-7,$$

$$4x=8 \therefore x=2.$$

習 題

解下列各方程式：

1. $3x+15=x+25$.　　2. $2x-3=3x-7$.

3. $0.3x+4=0.5(x-2)$.　　4. $0.2x+3=16-(0.2x-3)$.

5. $2x-\{3+(x-7)\}=8$.

6. $x-[3+\{x-(3+x)\}]=0$.

7. $8(x-1)+17(x-3)=4(x-9)+4$.

8. $97-5(x+20)=-1-8(x+3)$.

9. $157-21(x+3)=163-15(2x-5)$.

10. $8(x-3)-(6-2x)=2(x+2)-5(5-x)$.

11. $5x-(3x-7)-\{4-2x-(6x-3)\}=0$.

12. $3(5-6x)-5[x-5\{1-3(x-5)\}]=23$.

13. $25x-19-[3-(4x-5)]=3x-(6x-5)$.

(*b*) 含數字分數的一元一次方程式的解法：

用分母的L.C.M.乘式中各項，化去分母後，用(*a*)的解法解之。

〔例1〕 解 $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x=\frac{8}{3}x-3$.

解： 分母的L.C.M.$=2\times3=6$.

用6乘全式，$\frac{5}{2}\times6-\frac{3}{2}x\times6=\frac{8}{3}x\times6-3\times6$,

$$15-9x=16x-18,$$

$$-9x-16x=-18-15,$$

$$-25x=-33.$$

$$\therefore\quad x=\frac{33}{25}=1\frac{8}{25}.$$

〔例2〕　解　$\frac{1}{3}x+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}x\right)=\frac{3}{5}x-\frac{2}{3}$。

解：　去括弧，$\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}+\frac{2}{3}x=\frac{3}{5}x-\frac{2}{3}$。

分母的L.C.M.$=3\times5=15$。

用15乘全式，

$$15\times\frac{1}{3}x+15\times\frac{2}{5}+15\times\frac{2}{3}x=15\times\frac{3}{5}x-15\times\frac{2}{3},$$

$$5x+6+10x=9x-10,$$

$$5x+10x-9x=-10-6,$$

$$6x=16.$$

$$\therefore\quad x=-2\frac{2}{3}.$$

習　　題

解下列各方程式：

1.　$\frac{x}{4}+\frac{x-3}{3}=30$。　　2.　$\frac{x+19}{5}=3+\frac{x}{4}$。

3.　$\frac{x-4}{7}=\frac{x}{5}-2$。　　4.　$\frac{x-1}{8}=1+\frac{x+1}{18}$，

5.　$\frac{x+5}{6}-\frac{x+1}{9}=\frac{x+3}{4}$　　6.　$\frac{x-8}{7}+\frac{x-3}{3}+\frac{5}{21}=0$。

7. $\frac{4(x+2)}{5}=7+\frac{5}{3}x.$　　8. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=7\frac{5}{6}.$

9. $3+\frac{x}{0.5}=7-\frac{x}{0.2}.$　　10. $1.5=\frac{0.36}{0.2}-\frac{0.09x-0.18}{0.9}.$

11. $\frac{3}{16}(x-1)-\frac{5}{12}(x-4)=\frac{2}{5}(x-6)+\frac{5}{48}.$

12. $x+\frac{5}{3}(x-7)-\frac{6}{7}(x-8)=3x-14\frac{1}{3}.$

13. $\frac{7}{5}x-\frac{1}{14}(x-11)=\frac{3}{7}(x-25)+34.$

14. $\frac{1}{5}(x-8)+\frac{4+x}{4}+\frac{x-1}{7}=7-\frac{23-x}{5}.$

15. $\frac{x}{4}-\frac{x+10}{5}+4\frac{3}{4}=x-1-\frac{x-2}{3}.$

43. 解應用問題的步驟

解應用問題，困難的地方，就是怎樣依照題意列出方程式，只要列出方程式，解之，即得解答。

第一步　把題中的話語，怎樣變成式子？

例如：　1.　什麼數比x多5？式子是$x+5$.

2.　x比15大多少？式子是$x-15$.

3.　現年x歲，5年後是多少歲？

過一年增加1歲，故5年後爲$(x+5)$歲。

4.　有銀200元分給甲乙二人，甲得x元，乙得多少元？

在200元中把甲得的x元減了，就是乙應得元數，式子是$200-x$.

5. 水1小時流x里，船在靜水中1小時行a里；船1小時順流和逆流各行多少里？

順流行時，船1小時行a里，水向下沖x里和起來共行$(a+x)$里。

逆流行時，船本來能行a里，但被水流的力量要阻抗的少行x里，故只能行$a-x$里。

6. 有洋1000元，年利是百分之x；問一年的利息是多少？

一元的利息一年是百分之x，1000元的利息，自然是

$$\frac{x}{100}\times 1000.$$

7. 騎兵一隊，共有馬蹄x個；問這隊騎兵人馬各多少？

8. 米x石，一人15日食完，問每日食多少？

9. 教室長x尺，寬比長多1尺，面積是多少？

10. 6小時行x里，1小時行多少里？

11. 一日做事的三分之一，x日做多少？

12. 有5元的鈔票x張，共是多少元？

第二步 I. 怎樣用x代題中要找的數，有直接和間接的兩種：

(1) 直接的

〔例1〕 把國幣80元分給甲乙二人，甲分得的3倍比乙分得的5倍，多104元；問甲乙各得多少？

(a) 先看題中要求的是什麼數？

要求的是甲乙各分得的元數。

(b) 怎樣用未知數去代替？

知甲乙二人共分80元，故用x代甲分得的元數，或乙分得的元

數都可以，假如用 x 代甲分得的元數，則 $80-x$ 必定是乙分得的元數。

這樣代替，甲乙分得的元數，雖未算出，已用兩個式子表示出來了，只要 x 求出後，甲乙分得的元數，自然就會知道，至於怎樣列方程式和求 x，容後再講。

（2）　間接的

〔例2〕　糖若干斤，其中2分之1是每斤4角，4分之1是每斤3角，其餘的是每斤2角，共值國幣13元，問各多少斤？

這題問的是各種糖有多少斤，但不能用3個未知數代牠們，因為這樣一來，變成三元的方程式，現在尚不會解，只好用間接的方法去代。

把糖的總斤數用 x 代之，則每斤4角的糖有 $\frac{1}{2}x$ 斤，每斤3角的糖有 $\frac{1}{4}x$ 斤，每斤2角的糖有 $\left\{x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x\right)\right\}$ 斤，x 求出後，各種糖的斤數，自然可以算出。

II.　怎樣依題意列方程式。

（1）　先把題中的話語，都弄清楚，方能明瞭其中的關係；

（2）　用 x 代替要找的數，把題中的話語，儘可能的變成式子；

（3）　由題意找相當的關係，用等號連結之，即為方程式。

找關係用等號連結，這是解應用問題最難的地方，但一般的情形，不出下邊所述三範圍：

（1）　有些題已說明相等的關係，用等號連結，即為方程式。

例如：　父年為子年的4倍，10年後，父年等於子年的2倍，求父子的年齡。

設 x 爲子的歲數

題中的話語	變成式子
父年爲子年的 4 倍10年後	$4x$…………父 $x+10$……子 $4x+10$……父
10年後子年的 2 倍	$2(x+10)$

題上說明10年後，父年等於子年的 2 倍，故得方程式如下：

$$4x+10=2(x+10).$$

(ii)　有些題已說明多少（或大小）的關係。

(a)　假如知道所多的數目，看那一個大，就從那個上減去，自然相等，即得方程式。

例如：　在例 1 題中：

題中的話語	變成式子
把80元分給甲乙	x…………甲 $80-x$……乙
甲的 3 倍	$3x$
乙的 5 倍	$5(80-x)$

題上說明甲的 3 倍比乙的 5 倍多 104 元，故把多下的在甲的 3 倍中減去，即得方程式如下：

$$3x-104=5(80-x).$$

(b)　假如知道所少的數目，看那一個小，就給那一個加上，自然相等，即得方程式。

例如：　某數的 3 倍比 20 少 5，求某數。

設 x 爲某數，則 $3x$ 爲某數的 3 倍。

題上說明 3 倍比20少 5 ，故在 3 倍上加 5 ，即得方程式如下：

$$3x+5=20.$$

(iii) 有些題不說明 (i) 或 (ii) 的關係，找相等的關係列方程式，就要難些，現在僅舉一例說明找法，以後再分類的講述。

例如： 在例 2 題中：

題中的話語	變成式子
糖若干斤	x
2 分之 1 是每斤 4 角	$\frac{1}{2}x\times 0.4$……………值的元數
4 分之 1 是每斤 3 角	$\frac{1}{4}x\times 0.3$……………值的元數
其餘的斤數是每斤價 2 角	$\left\{x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x\right)\right\}\times 0.2$…值的元數

題中沒有相等或大小的關係，但有共價13元，由這總價可以找出相當的關係，得方程式如下：

$$\frac{1}{2}x\times 0.4+\frac{1}{4}x\times 0.3+\left\{x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x\right)\right\}\times 0.2=13.$$

第三步 列方程式時，必須單位相同。

例如： 上邊例 2 兩端都是以元為單位 。 假如左端用元為單位，右端用角為單位，結果便生錯誤。

第四步 在解題中，所設的未知數，只代表數，不代表量，故需要標明單位時，務必註明，非常重要。

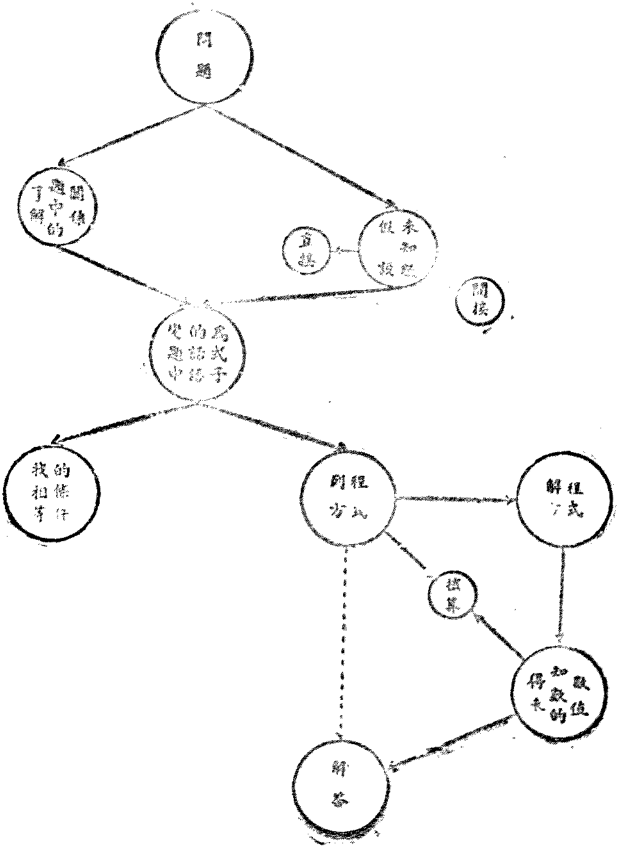
例如： 在例 2 中，假如設 x = 糖的總數，那就不對，因不知道是斤數，還是擔數，還是兩數，故需要註明。

第五步　核算。

(i)　把求得的數代入原方程式中，看解方程式時，有無錯誤；

(ii　再看合題意不合，就是合理不合。如求人數而得下分數或負數，即為不合理，不是方程式沒列對，便在運算上有錯誤。

解應用問題之運算手續圖



44. 應用問題解法

現在把應用問題分類解之如下：

I. 數目問題

（1） 三個連續奇數的和為27，求這三個連續奇數。

解： 連續的奇數相差是2，故設 x ＝中間的一個奇數，則 $x-2, x+2$，是其餘兩個奇數，依題意得方程式：

$$(x-2)+x+(x+2)=27.$$

解之，得 $x=9$。

$9-2=7, 9+2=11$，故7，9，11為所要求的三個連續奇數。

〔註〕 以後解應用問題，得到方程式後，若把解法省略了，就是留作讀者練習。

（2） 二數和為49，小數的2倍比大數多14，求二數。

設 x ＝小數，則 $49-x$ ＝大數。

題上說明小數的2倍比大數多14，故從小數的2倍中減去14，得方程式：

$$2x-14=49-x.$$

解之，得 $x=21$。

故知小數為21，大數為28。

（3） 二數的差為8，大數上加2，恰等於小數的3倍；求這二數。

（4） 二數的和為[illegible]，大數比小數多[illegible]，求這二數。

（5） 三個連續數的和為[illegible]，求這三數。

（6） 三個連續偶數的和為30，求這三數。

(7)　某數4分之1比5分之1多27，求某數。

II. 年齡問題

(8)　父子年齡的和爲84歲，已知父年等於子年的3倍；問父子各多少歲？

解：　設子年爲x歲，則父年爲$84-x$歲。

父年等於子年的3倍，就是列方程式的條件，故得方程式：

$$84-x=3x.$$

解之，得　　$x=21.$

故知父年63歲，子年21歲。

(9)　父子年齡的和爲80歲，已知子年的2倍比父年多10；問父子各多少歲？

(10)　甲現年爲乙現年的5倍，5年後爲乙的3倍；求甲乙的歲數。

(11)　父年[illegible]歲，子年6歲；幾年後父年爲子年的2倍？

III. 分配問題

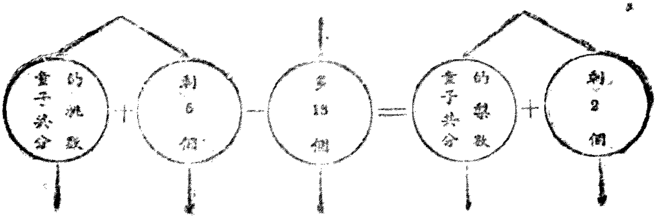
(12)　[illegible]每人各桃8個，梨5個，還剩餘桃5個，梨[illegible]個，[illegible]多15[illegible]，[illegible]，桃和梨各是多少？

解：　設x=[illegible]。

題上說明[illegible]多少的關係，就是列方程式的條件。*

* 圖解[illegible]中的關係，說列方程式，便利教授；讀者通曉時，宜省略這步手續。

桃數－桃比梨多的數目＝＝梨數



$$8x+5-18=5x+2$$

解之，得　　$x=5$……童子的數目；

$$8x+5=8\times5+5=45\text{……桃數，}$$

$$5x+2=5\times5+2=27\text{……梨數。}$$

核算：（i）把x的數值代入原方程式，得

左端$=8\times5+5-18=27$；

右端$=5\times5+2=27$。

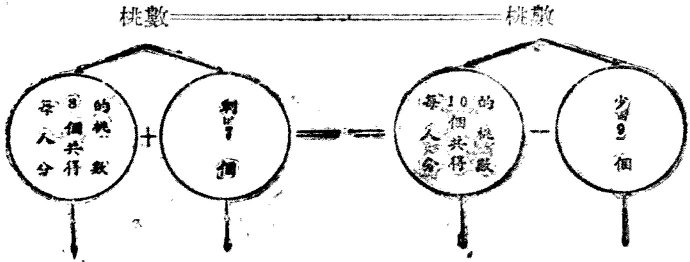
故知解方程式無錯誤。

（ii）因45個桃，5個童子分之，每人分得8個剩5個；27個梨，5個童子分之，每人分得5個剩2個。故知無誤。

（13）若干童子分若干桃，假如每人分8個，剩7個；假如每人分10個，少9個；問童子和桃各多少？

解：無論怎樣分法，桃的數目總是不變，這就是列方程式的條件。

設童子的數目為x。



$$8x + 7 = 10x - 9$$

解之，得　　　　　$x=8$……童子的數目，

$$8x+7=8\times8+7=71\text{……桃數。}$$

(14)　童子若干人分蜜柑若干：每人分4個，剩3個；每人分5個，少2個；問童子和蜜柑各多少？

(15)　甲乙丙三人分金若干元：知甲乙共得60元，甲丙共得80元，乙丙共得62元；問三人各得多少元？

(16)　童子若干人分桃和梨：每人分桃4個，梨[illegible]個，剩桃2個，梨6個；只知梨比桃少10個；問童子，桃和梨各幾何？

(17)　男10人，女3人，童子20人，分洋38元，知男子一人分得的數比童子一人的多2角；女子一人分得的數爲一個童子的[illegible]倍；問各得多少？

IV.　買賣問題

買賣問題約可分爲賠賺問題，物價與物量關係問題兩大類：

(a)　賠賺問題

(18)　某人以若干元買馬，後以24元6角賣出，損失1.8成；問馬的原價幾何？

設馬的原價爲x元，則$0.18x$元爲賠本的洋數，買價和賣價的差

數，等於賠本的洋數，就是這種問題列方程式的條件。

共需的洋數 － 共賣得的洋數 ═ 賠本的洋數
$$x \quad - \quad 24.6 = 0.18x$$

解之，得 $x=30$，即馬的原價為30元。

(19) 某人以每頭 2.5 元的價購羊若干頭，其後加 2 成賣出，獲利 2.8 元；問共買羊幾頭？

設共買羊 x 頭，則共需的洋數為$2.5x$元，共賣得的洋數為$(2.5+0.2)x$ 元，賣價減買價等於獲利的洋數，就是這種問題列方程式的條件。

共賣得的洋數 － 共需的洋數 ═ 賺利的洋數
$$(2.5+0.2)x \quad - \quad 2.5x = 2.8$$

解之，得 $x=14$，即買了羊14頭。

(b) 物價與物量的問題

(20) 某人買馬 2 匹，牛 5 頭；馬每匹較牛每頭的價貴 8 元，共用洋 135 元；問每匹馬和每頭牛各價洋多少？

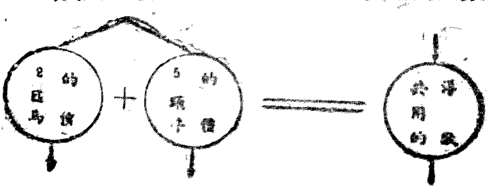
各物價的總和等於共用的洋數，即是列方程式的條件。

設每頭牛的價為 x 元，

則每匹馬的價為$x+8$元。

列方程式的條件是：

各物價的和 ═ 共用的元數



$$2(x+8) \quad + \quad 5x = 135$$

解之，得　　$x=17, x+8=17+8=25$。

即每匹馬25元，每頭牛17元。

(21)　某人以國幣若干元買布20疋，若每疋貴5元，則少買4疋。求每疋的原價和共用的元數。

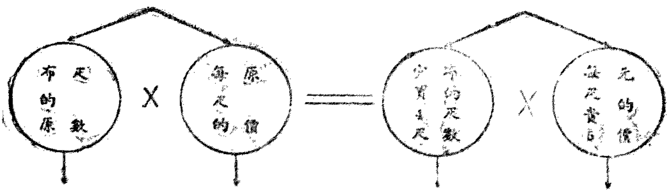
物價貴了，就買的少；物價賤了，就買的多。但購買者所出的元數，總是不變，這就是列方程式的條件。

設每疋的原價爲 x 元。

則每疋貴5元後的價爲 $x+5$ 元。

列方程式的條件是：

共用的元數————————共用的元數



$$20 \times x = (20-4) \times (x+5)$$

解之，得　　$x=20, 20\times 20=400$。

即每疋原價20元，共用400元。

(22)　以1元6升之價買米若干石，若1元賤1升賣之，則賠洋6元；問原買米多少？

(23)　某人買地若干方丈，每方丈價洋1元，其後地價騰貴3倍，某人留地75方丈，餘數賣出，獲利150元，問原買地若干方丈？

(24)　買書2種，共10冊，A種每冊價1元，B種每冊價5角，共付洋8元，求A，B兩種的冊數。

(25)　絹每尺的價錢是棉布每尺的5倍，買絹2丈3尺，棉布5丈，共用洋13.2元，問每尺的價錢各多少？

（26） 某人以錢若干買鷄卵，每個價洋 1.5 分；若一個鷄卵減價 3 釐，則可多買 5 個，問初次共買若干？

V. 行程問題

在行程問題中，有時間，速度和距離這三種要素，牠們的關係式是：

距離＝速度×時間。

因此我們知道計算這類問題時，列方程式的條件，約分下列三種：

(i) 距離＝距離。

(ii) 時間＝時間。

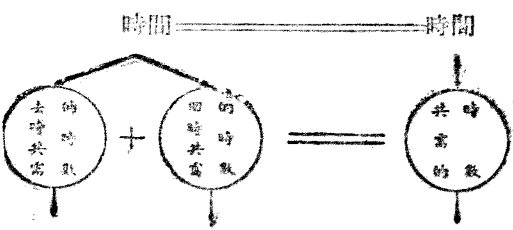
(iii) 速度＝速度。

(a) 關於一人（或一物）的行程問題

（27） 甲乙兩地相距若干里，去時每小時行 3 里，回時每小時行 2 里，來回共需20小時。求甲乙兩地的距離。

設 x 甲乙兩地相距的里數。

速度知道，距離雖不知道，但用 x 代了以後，就算知道；剩下的僅是時間問題，故用條件 ii 列方程式。



$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 20$$

解之，得 $x = 24$……里數。

(b) 關於兩人（或兩物）的行程問題

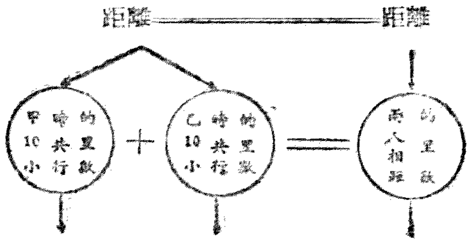
(1) 相遇問題

(28) 甲乙二人相距 130 里，同時相向而行，知甲比乙每小時多行 1 里，10小時後相遇。求甲乙每小時各行多少里？

甲乙兩人不在同一的地方，相向而行，相遇的條件是要兩人共行的距離和牠們原來相距的距離相等，這就是列方程式的條件。

設 x = 乙每小時所行的里數，

則 $x+1$ = 甲每小時所行的里數。



$$10(x+1) \quad + \quad 10x = 130$$

解之，得　　$x=6$……乙每小時所行的里數，

$x+1=7$……甲每小時所行的里數。

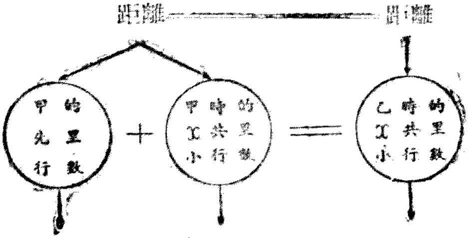
(2) 追及問題

關於這類的問題，約可分為兩種：(i) 兩人在同一地方而不同時起行；(ii)兩人不在同一地方而同時起行。

關於(i)類問題，一人要追及他一人，要他們兩人走的距離相等，才會可能。這就是列方程式的條件。

(29) 甲每小時行 2 里，從某地出發，先行 4 小時，乙從某地出發追之，但知乙每小時比甲多行 1 里，問乙幾小時後才能追及甲？

設 x = 乙追及甲所需的時數。



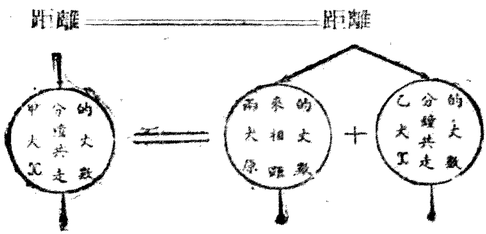
$$2\times 4 \quad + \quad 2\times x = (2+1)\times x$$

解之，得　　　　$x=8$ 小時。

關於(ii)類問題列方程式的條件是追者須較被追者多走他們原來相距的路程。

(30)　甲乙兩犬相距130丈，甲犬每分鐘行20丈，乙犬每分鐘比甲犬少行2丈，問幾分鐘後，甲犬追及乙犬？

設 $x=$ 甲犬追及乙犬所需鐘點的分數。



$$20x = 130 \quad + \quad (20-2)x$$

解之，得　　　　$x=65$……分鐘。

(31)　某人步行10里後，坐汽車行若干里，又騎馬行了坐汽車所行路的2倍，總計行70里；問坐汽車行多少里？

(32)　甲乙二人同時從兩地相向而行，每小時甲行5里，乙行3里；甲行到兩地相距的中心，離乙尚有5里。求兩地的距離。

(33)　甲乙二人相距 150 里，每小時甲行 7 里，乙行 8 里：假如同時相向而行，問幾小時後相會？

(34)　甲乙二人從某地出發，每小時甲行 7 里，乙行 5 里；甲讓乙先走 4 小時，由後追之。問多少時能追及？

(35)　乙比甲每小時多行 1 里；甲先行 4 小時，乙由後追之。8 小時追及，問甲乙每小時各行多少里？

VI.　水程問題

水程問題和行程問題所不同的地方，水程有順流和逆流的分別，故解這類題時，要注意是逆流還是順流。

順流速度＝船在靜水中的速度＋水流速度，

逆流速度＝船在靜水中的速度－水流速度。

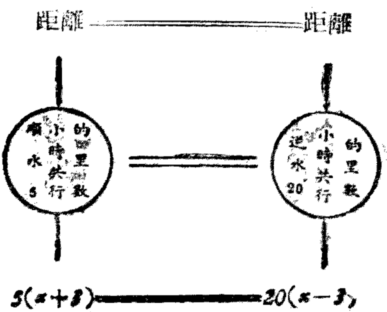
(36)　每小時水流 3 里，一船順水 5 小時所行的路，逆水行時，需20小時；求所行的里數。

解：　設 x＝船在靜水中每小時所行的里數；

則　$x+3$＝順水每小時船行的里數，

　　$x-3$＝逆水每小時船行的里數。

來回行的路相等，就是列方程式的條件。



解之，得　　　　　　$x=5$。

$$5(x+3)=5(5+3)=40\cdots\cdots\text{所行的里數。}$$

（37）　甲坐船到乙處，需3小時，回來須6小時，但知船在靜水中每小時行7里，求每小時水流的速度。

（38）　有一船在靜水中每小時行5里，今在每小時水流2里的河中，上下一次共需10小時，求這河的長和上行所需的時數。

VII. 鐘錶問題

這是一種圓周上的行程問題。

解這類問題時，題中的話語特別簡單，要用鐘錶上許多常識，才能計算。

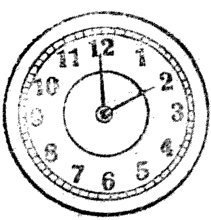
一點鐘共60分，錶上每1小格是1分。

長針走12分，短針走1分。相隔15分即成直角；相隔30分即成直線。

（a）　相重　算長短兩針，相重的問題，同算直線運動的追及問題一樣，列方程式的條件是相離＝距離。

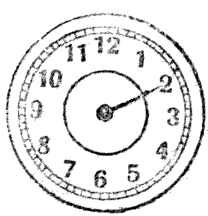
（39）　2點與3點間，何時兩針相重？

原來兩針位置圖



（I）

相重時兩針位置圖



（II）

解：設長針走 x 分與短針相重，則短針走 $\frac{x}{12}$ 分。

2 點鐘時，長針離短針10分；要長針趕上短針，就是長針走的距離等於短針走的距離加上原來相隔的距離，故得方程式如下：

$$x=10+\frac{x}{12}.$$

解之，得　　　　　$x=10\frac{10}{11}$分。

如答$10\frac{10}{11}$分相重，那就不對，因不知道是幾點的$10\frac{10}{11}$分相重，故須要答 2 點$10\frac{10}{11}$分相重。

(*b*)　成直角　兩針成直角，就是相隔 15 分的意思。

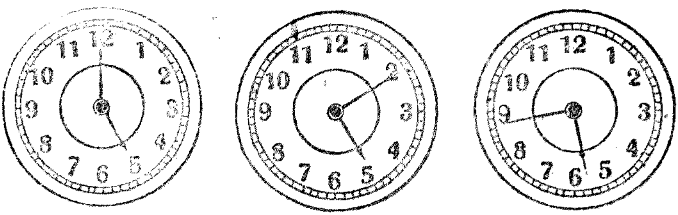
4 點到 8 點，每 1 點鐘內成兩次直角；未重以前一次，重了以後一次。

12點到 3 點，重了以後才有成直角的時候。

9 點到12點，未重以前有成直角的時候；但重了以後就沒有。

(40)　5 點與 6 點間，兩針何時成直角？

兩針在 5 時的位置　　未重以前兩針成直角的位置　　重後兩針成直角的位置



(I)　　　　(II)　　　　(III)

解： 5 點到 6 點，兩針成兩次直角：未重以前成直角，就是長針走的沒趕上短針，還差15分，即是與趕上相比較，少走15分的意思，故在相重方程式的右端減去15，即得需要的方程式如下：

$$x=25+\frac{x}{12}-15.$$

解之，得 $$x=10\frac{10}{11}\text{分}。$$

答： 5點$10\frac{10}{11}$分兩針成直角。

重了以後成直角，就是長針走的趕上短針以後，還多走了15分，故在相重方程式的右端加上15，即得需要的方程式如下：

$$x=25+\frac{x}{12}+15。$$

解之，得 $$x=43\frac{7}{11}\text{分}。$$

答：5點$43\frac{7}{11}$分兩針成直角。

(a) 成直線 直線是兩個直角的意思， 故解成直線問題時，如在未重以前成直線，就在相重方程式的右端減去30；如在重了以後成直線，就在相重方程式的右端加上30。

(41) 6點與7點間，兩針何時相重？

(42) 8點與9點間，兩針何時成直角。

(43) 3點與4點間，兩針何時成直角？

(44) 8點與9點間，兩針何時相隔18分？

(45) 10點與11點間，兩針何時相隔37分？

(46) 10點與11點間，兩針何時成直線？

VIII. 工作問題

解這類問題時，假定事情爲1，把每人每日能做全事的幾分之幾，先要算出。

(i) 如問數人合做事的日數，列方程式的條件是：

每人所做的事情相加＝一事。

(ii)　如兩人換着做，列方程式的條件是：

兩人所做事情的和＝一事。

(iii)　如問一人獨做的日數，列方程式的條件是：

一人所做的事＝一事。

(47)　甲10日做成的事，乙須12日做成；問二人合做，幾日可成？

解：　設 x＝二人合做所需的日數，

甲一日做的事情爲 $\frac{1}{10}$，

乙一日做的事情爲 $\frac{1}{12}$。

$$\begin{array}{ccccc} \text{甲做的事情} & + & \text{乙做的事情} & = & \text{一事} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{10}x & + & \frac{1}{12}x & = & 1 \end{array}$$

解之，得　$x=5\frac{5}{11}$……合做所需的日數。

(48)　有一工程，甲獨作45日可完，乙獨作30日可完，今乙作22日後，讓甲去作，問須多少日可完？

解：　設 x＝乙作後甲作完的日數，

$\frac{1}{45}$＝甲每日所做的工程，

$\frac{1}{30}$＝乙每日所做的工程。

$$\begin{array}{ccccc} \text{乙先作的工程} & + & \text{甲後作的工程} & = & \text{全工程} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{30}\times 22 & + & \frac{1}{45}\times x & = & 1 \end{array}$$

解之，得　$x=12$……甲作完的日數。

（49）　有一工程，甲獨作4日可完，乙獨作8日可完；問兩人合作，幾日可成？

（50）　甲20日做成的事，乙須30日做成。如甲先做若干日後，換乙繼續做之，知乙比甲多做6日；問甲做了幾日？

（51）　一事，甲乙合做，12日可成；甲丙合做，15日可成；乙丙合做，20日可成。問三人合做，幾日可成？

（52）　有一工程，甲獨做45日可完，乙獨做30日可完；如乙獨做10日後，再添上甲合做。問幾日可完？

IX．混合問題

（a）　用不相同價值的物品混合後，以平均價值出售，求各物品的數量時，列方程式的條件是：

各物品價值的和＝總售價。

（53）　上等酒每升7角，下等酒每升5角，配這兩種酒共取1石混合之，每升以平均價值6角5分出售；問兩種酒各應取多少？

解：　設 x＝上等酒應取的升數。

則 $100-x$＝下等酒應取的升數。

上等酒的價值＋下等酒的價值＝總售價

$$7x \quad + \quad (100-x)5 = 100\times 6.5$$

解之，得　$x=75$升＝7斗5升……上等酒，

$100-x=25$升＝2斗5升……下等酒。

（b）　如只講混合各物的關係，不講價值時，列方程式的條件是：

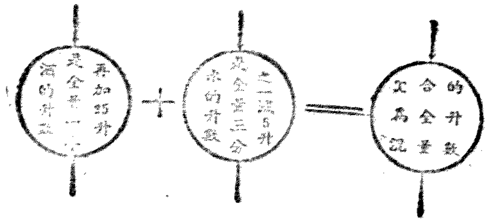
（i）　各物品量相加＝混合量。

（ii）　各物品自己的數量＝各物品自己的數量。

(54)　有水酒混合液，酒的升數比全量的一半多25升；水的升數比全量的3分之1少5升。問酒水各多少？

解：　設 x＝全量的升數

酒量　＋　水量 ═══ 混合量



$$\left(\frac{1}{2}x+25\right)+\left(\frac{1}{3}x-5\right)=x$$

解之，得　　$x=120$

酒的升數$=\frac{1}{2}x+25=\frac{1}{2}\times120+25=85$升$=8$斗$5$升；

水的升數$=\frac{1}{3}x-5=\frac{1}{3}\times120-5=35$升$=3$斗$5$升。

(55)　有酒水混合液，酒佔百分之80；如加水10升，則酒佔百分之70。問酒水各多少？

解：　設 x＝未加水以前全量的升數。

因酒量沒變，用作下列方程式的條件：

$$\begin{array}{ccc}\text{酒量} & & \text{酒量}\\ \downarrow & & \downarrow\\ (\text{未加水以前的酒量}) & = & (\text{加水以後的酒量})\\ \downarrow & & \downarrow\\ \frac{80}{100}\times x & = & \frac{70}{100}(x+10)\end{array}$$

解之，得　　$x=70$。

酒的升數 $= \frac{80}{100} \times x = \frac{80}{100} \times 70 = 56$升$=5$斗$6$升，

水的升數 $=70$升-56升$=14$升$=1$斗4升。

（56）上下兩種酒混合成一石，每升售洋2角7分。知上等酒每升3角，下等酒每升2角；問各應取多少？

（57）今有水酒混合液，酒佔百分之65；若加酒15升，則酒佔百分之80。問水和酒各多少？

（58）今有銀銅合質：銀比全量3分之1多15兩；銅比全量4分之1少5兩。問銀銅各若干？

X．水管注水問題

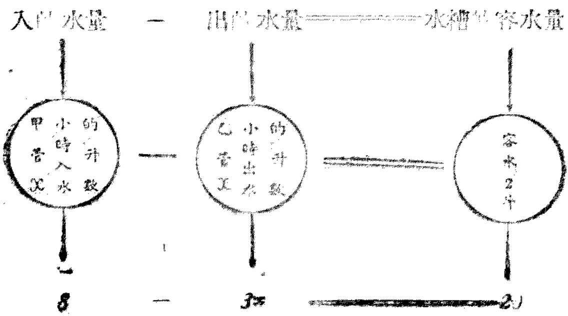
這類問題分兩種：

（a）一管入水，一管出水，多少小時注滿？列方程式的條件是：

入的水量－出的水量＝注滿的水量。

（59）一水槽可容水2斗，有甲乙兩管，甲管每小時入水8升，乙管每小時出水3升；問兩管齊開，多少小時注滿？

解：　設 x＝注滿的時數。



解之，得 $x=4$……小時。

〔註〕 假如有注入的水管，又有流出的水管，原來注滿水，同時各管齊開，多少小時流盡？列方程式的條件是：

注滿的水量＋入水量－出水量＝0。

(b) 數管齊開或一管獨開，多少小時注滿？列方程式的條件是：

數管（或一管）注入的水量＝注滿的水量。

(60) 一水桶有甲乙丙三管：開甲管2小時可注滿，開乙管3小時可注滿，開丙管5小時可注滿；開三管齊開，多少小時可注滿？

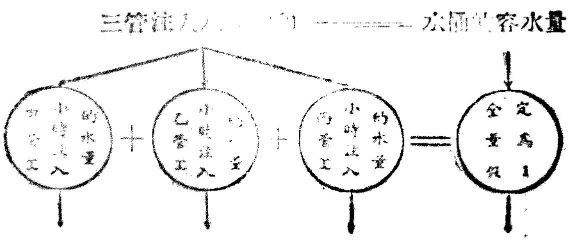
解： 設 x＝三管齊開，注滿的時數。

水桶的容量未說明，假定為1；

則甲管每小時注入全量$\frac{1}{2}$，

乙管每小時注入全量$\frac{1}{3}$，

丙管每小時注入全量$\frac{1}{5}$。



$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x = 1$$

解之，得　　　$x=58\frac{2}{31}$分。

(61) 有一水桶，容水3.6斗，底有小孔，每小時漏0.4斗；上有一孔，每小時注入1.2斗。問多少小時可注滿？

(62) 一水槽有甲乙丙三管；開甲管3小時可注滿，開乙管4小時可注滿，開丙管5小時可注滿，問三管齊開，多少小時可注滿？

(63) 有酒桶，先漏去3分之1，後取出3斤，桶裏恰剩一半，問原有酒多少斤？

(64) 一水槽有甲乙丙三管，三管齊開，15分可注滿。知甲管比乙管每分鐘多注1升，乙管比丙管每分鐘多注0.5升；又知水槽的容量爲240升，求各管每分鐘注入的升數。

XI. 利息問題

∵ 利息＝本金×利率×時間。

∴ 列方程式的條件有四種：

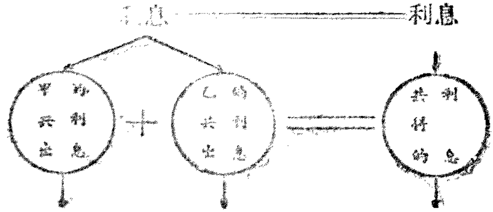
(1) 利息＝利息。　　(2) 本金＝本金。

(3) 利率＝利率。　　(4) 時間＝時間。

(65) 250000元分借於甲乙二人，甲出利百分之4，乙出利百分之3.5，共得利9000元，問甲乙各借多少元？

解：　設 x＝甲借的元數，

則$250000-x$＝乙借的元數。



$$\frac{4}{100}\times x \quad + \quad \frac{3.5}{100}\times(250000-x)=9000$$

解之，得　　$x=50000$元……甲借的，

$250000-50000=200000$元……乙借的。

(66)　把9000元分存甲乙兩銀行，甲行年利百分之4，乙行年利百分之5，一年間利金共[illegible]；問各存多少元？

(67)　1000元分借于甲乙二人，甲出年利百分之3，乙出年利百分之4；如把二人所借的錢數交換，則多得利2元。問各借多少元？

45.　補助未知數

例題：　兎行4步時，犬只能行3步；犬2步的距離，等於兎3步；兎先行50步，問犬行多少步可以趕上？

解：　設 $x=$ 犬趕上兎時應行的步數，

$a=$ 犬每步的尺數。

走的快慢的關係

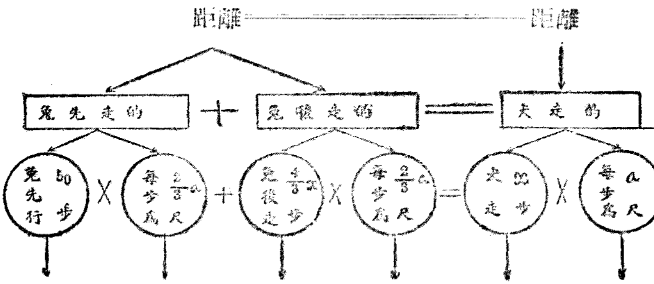
犬	兎
行3步	行4步
行1步	行$\frac{4}{3}$步

步大小的關係

犬	兎
2步	3步
1步	$\frac{3}{2}$步

行 x 步	行$\frac{4}{3}x$步	1步a尺	1步$\frac{2}{3}a$尺

犬趕上兎，就是兩個走的距離相等，即是列方程式的條件。



$$50\times\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}x\times\frac{2}{3}a=x\times a$$

各項都有a，故用a除之，得

$$50\times\frac{2}{3}+\frac{8}{9}x=x.$$

解之，得　　　　$x=300$步。

這個題中如僅設一個未知數，不容易列方程式，故用 a 再代一個未知數，把方程式列成，但解時即刻消去，牠的功效是幫助着把方程式列出來，在解法中，不發生阻礙，所以把這種假設數，叫做補助未知數。

解上邊列題的主要點：

（1）　犬走x步，兎走多少步要算出；

（2）　犬一步是a尺，兎一步是多少尺，也要算出。

1.　犬走 4 步時，兎走 5 步；犬 5 步等於兎 8 步；如兎先走84步，問犬走多少步才能趕上？

3. 有一人划船，在每小時水流 3 里的河流中，行往某處；知去時所需的時數，為回來的 4 倍；求船在靜水中每小時的速度。

習　　題

1. 龜鶴共42隻，足共108；問各是多少？

2. 某工人一年的工資是公司股票 3 張和現金108元；5個月的工資是股票 1 張和現金95元。問股票 1 張價值多少？

3. 甲乙兩種酒，每瓶的價值，乙為甲的 7 分之 4 ，若甲種每瓶落價 2 角，則30瓶乙種酒和20瓶甲種酒的價值相等，求甲乙兩種酒每瓶的價值。

4. 有貧民若干人，若每人給與銅元50枚，則短少 100 枚；若每人給與40枚，則餘5 枚。問人數是多少？

5.一工程，甲獨作 8 日做完，乙獨作12日做完；甲乙合作，中途甲因事休息 2 日，問幾日才能做完？

6. 某公司資本若干元，第一年經費1000元，其餘金得利 6 分之 1 ；第二年經費1000元，其餘金得利 5 分之 1 ；第三年經費1000元，其餘金得利 8 分之 1 ，第四年的資本比原資本多1700元。問原資本是多少？

7. 馬車前輪的周圍是3.25尺，後輪是 3.8 尺；行若干距離，前輪比後輪多轉 143 次？

8. 某人第一次賣去鷄卵的數目，比原有的一半多 7 個；第二次賣去的數目，比餘下的一半多 7 個；第三次賣去的數目，比餘下的一半多 7 個，恰賣完，問原有鷄卵是多少？

9. 甲乙兩桶，容同量的麥酒，今從甲桶取出 3 斗 4 升，乙桶

取出 8 斗，則甲桶所餘的酒，爲乙桶所餘的 2 倍，問甲乙兩桶各容多少？

10. 一矩形教室，長比寬多2尺，若長減 4 尺，寬增 8 尺，面積不變；問教室的長寬各多少？

11. 兎走 5 步的距離，等於犬走 2 步的距離；兎走2步，犬走 1 步。如兎在犬前80步（兎步），問犬行多少步能追及兎？

12. 犬走1步，兎能走 5 步；犬 2 步的距離，等於兎 3 步的距離。兎先走 100 步，犬由後追之，幾步可以追及？

13. 兵一隊列成正方陣，餘 31 人；若每行每列增 1 人，則短少24人。求兵的總數。

14. 兵一隊，等分爲兩支隊：第一支隊列成三層的中空方陣，第二支隊列成五層的中空方陣，恰可塡入三層方陣的中空處，求兵的總數。

第六章

聯立一次方程式

46. 聯立方程式

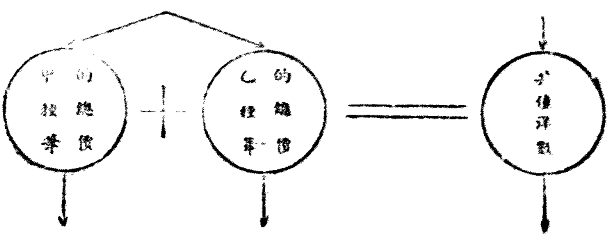
【問題】 甲種筆5枝，乙種筆4枝，共價1.6元；甲種筆7枝，乙種筆5枝，共價2.15元，要求甲乙兩種筆每枝的價值。

這時候甲乙兩種筆每枝的價值都不知道，用一個未知數來代替是不行的，故非兩個不可。

假設　　甲種筆每枝價　x元，

　　　　乙種筆每枝價　y元。

價值 ———————— 價值



$$5x + 4y = 1.6 \cdots\cdots(1)$$

$$7x + 5y = 2.15 \cdots\cdots(2)$$

方程式(1)和(2)都是從一個問題中得來，故兩式中的x一定代表一樣的數；y也是如此。有這種情形的方程式，叫做聯立方程式。

上邊兩個方程式，都是一次的，含兩個未知數，叫做二元聯立一次方程式；如有三個方程式，含三個未知數，都是一次的，而且這三個未知數的數值同時能適合這三個方程式時，就叫做三元聯立一次方程式，如此類推。

假設$x+y=5$……（1）和$x-y=1$……（2）的x和y求出來是3和2，適合（1），同時又適合（2），這3和2就叫做這兩個聯立方程式的解。知道聯立方程式，求牠的解，叫做解聯立方程式。

47. 二元聯立一次方程式的解法

解聯立方程式的主要目的，是要想個法子把方程式的未知數，消得剩下一個，用解一元一次方程式的方法，先求一個未知數的數值；其餘的未知數，利用所求出來的未知數，都可求出。

解法（1）加減消元法。

〔例 1〕 解 $2x+y=18$……………………（1）

$3x+5y=34$……………………（2）

假如想消去x，把兩個方程式中x的係數變成一樣，兩式相減，便可達到目的。

（1）×3， $6x+3y=54$……………………（3）

（2）×2， $6x+10y=68$……………………（4）

（4）－（3）， $7y=14$。

$\therefore$ $y=2$……………………（5）

把（5）中y的數值代入（1），得

$2x+2=18$，

$2x=16$，

$$\therefore \quad x=8.$$

〔例2〕　解　$4x-3y=6$ ……………………………… (1)

$3x+12y=33$ ……………………………… (2)

解：　如想消去y。

(1) ×4，　$16x-12y=24$ ……………………………… (3)

(3) ＋ (2) ，　$19x=57$.

$\therefore \quad x=3$ ……………………………… (4)

把 (4) 中x的數值代入 (2) ，得

$$3\times3+12y=33,$$

$$12y=24.$$

$$\therefore \quad y=2.$$

核算：　把$x=3$和$y=2$代入原方程式中，得

(1) 的左端$=4\times3-3\times2=6$，

(2) 的左端$=3\times3+12\times2=33$.

兩端均相等，故知合所求。

由上例得解法：

I. 把含未知數的項移到一端，不含未知數的項，移到另一端。

II. 想消那個未知數，即把兩式中牠的係數變成一樣。

變法 (i) 如想消去的未知數，係數是互質數，即用牠互乘兩全式；

(ii) 如想消去的未知數，係數有公因數，求牠們的最小公倍數，用第一式的係數（要消去未知數的），除得的商乘第一式，用第二式的係數（要消去未知數的），除得的商乘第二式。

III. 如想消去的未知數項是同號就相減；異號就相加。

IV. 消去一未知數後，所得的方程式，是一元一次的，解之得一個未知數的數值。

V. 用求得的未知數的數值，代入任一原方程式中，即得餘一未知數的數值。

解法（2） 代入消元法。

例如： 解 $2x+y=18$ ……………………………… (1)

$3x+5y=34$ ……………………………… (2)

由（1），得 $y=18-2x$ ……………………………… (3)

把（3）中 y 的數值代入（2），得

$$3x+5(18-2x)=34,$$

即

$$3x-10x=34-90.$$

$$-7x=-56.$$

$$\therefore\ x=8.$$

把 x 的數值代入（3），得

$$y=18-2\times 8=2.$$

由上例得解法：

I. 由任一式中，先求出一未知數的數值（假定另一未知數爲已知），代入另一方程式中，得一元一次方程式。

II. 解之，得一個未知數的數值。

III. 用求得的未知數的數值，代入（1）或（2），他一未知數，即可求出。

〔練習〕 試用上邊的兩種解法，求§46問題的解答。

習　　題

解下列各方程式：

1. $\begin{cases} 3x+4y=10, \\ 4x+3y=9. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y=13, \\ 3x+y=14. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x+7y=29, \\ x+3y=11. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-y=9, \\ 3x-7y=19. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x+6y=17, \\ 6x+5y=16. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-10=-y, \\ 7x-53=-8y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 8x-y=34, \\ x-53=-8y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 15x+7y=29, \\ 9x+15y=39. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 14x-39=3y, \\ 6x+17y=35. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 28x-33=23y, \\ 63x-101=25y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 35x+17y=86, \\ 56x-17=13y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 15x+77y=92, \\ 55x-22=33y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x=7y, \\ 7x+5y=74. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x-7y=0, \\ 12y=5x-1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 19x=-17y, \\ 2x-53=y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x=7y-21, \\ 21x-9y=75. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 6y-5x=18, \\ 12x-9y=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 8x-5y=0, \\ 13x=8y+1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 39x-8y=99 \\ 52x-80=15y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 93x+15y=123, \\ 15x+93y=201. \end{cases}$

21. $\begin{cases}5x+10y-3x-11y=14, \\ 7x-9y-3x+12y-38=0.\end{cases}$

22. $\begin{cases}42x-2y=28x-31, \\ 9y-10x=37+15y.\end{cases}$

48. 雜題解法

〔例1〕 解 $5(x+2y)-(3x+11y)=14 \cdots\cdots (1)$

$7x-9y-3(x-4y)=38 \cdots\cdots (2)$

解： 去括弧，由（1）得 $5x+10y-3x-11y=14,$

即 $2x-y=14 \cdots\cdots (3)$

去括弧，由（2）得 $7x-9y-3x+12y=38$

即 $4x+3y=38 \cdots\cdots (4)$

（3）×3， $6x-3y=42 \cdots\cdots (5)$

$$10x=80.$$

$$\therefore\quad x=8.$$

把x的數值代入（3），得

$$2\times8-y=14.$$

$$\therefore\quad y=2.$$

〔例2〕 解 $\frac{x}{13}-\frac{y}{7}=6x-10y-8=0.$

解： $\frac{x}{13}-\frac{y}{7}=0 \cdots\cdots (1)$

$6x-10y=8 \cdots\cdots (2)$

從（1）去分母，得 $7x-13y=0 \cdots\cdots (3)$

從（2），得 $3x-5y=4 \cdots\cdots (4)$

（3）×3， $21x-39y=0 \cdots\cdots (5)$

(4)×7，　$21x-35y=28$ ……………………… (6)

(6)－(5)，　$4y=28$ ……………………… (6)

∴　$y=7$.

從(3)，得　$7x=13y$

$=13\times7=91$.

∴　$x=13$.

〔例3〕　解　$\begin{cases} x+y=8 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x-y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

這種題的解法最簡單，相加後，用2除之，即得x的數値；相減後，用2除之，即得y的數値。

∴　$x=5, y=3$.

這種題將來解二元聯立高次方程式時，用處很多，應特別記住！

習　　題

解下列各方程式

1. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+y=16, \\ x+\dfrac{y}{4}=14. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=5, \\ x-y=4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{5x}{6}-y=3, \\ x-\dfrac{5y}{6}=8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-5=y, \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{5}=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{7}=10, \\ \dfrac{x}{3}+y=50 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{2}{5}x-\dfrac{1}{12}y=3, \\ 4x-y=20. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{5}=1\dfrac{3}{7}, \\ x+\dfrac{y}{3}=4\dfrac{2}{3} \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{5}y=4, \\ \dfrac{1}{7}x+\dfrac{1}{15}y=3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3(4x+7y)=87, \\ 2(x+3y)=22. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5(x+2y)-(3x+y)=31, \\ 3(3x-7y)-(2x-y)=48. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3\left(\dfrac{5x}{6}-y\right)=9, \\ 8\left(x-\dfrac{5y}{6}\right)=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x-7y=0, \\ \dfrac{2}{7}x+\dfrac{5}{3}y=7. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{4}=0, \\ 3x+\dfrac{1}{2}y=17. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x=3y, \\ \dfrac{x}{3}+y=34. \end{cases}$

15. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=3x-7y-37=0.$

16. $\dfrac{x+1}{10}=\dfrac{3y-5}{2}=\dfrac{x-y}{8}.$

17. $\dfrac{x}{13}-\dfrac{y}{17}=6x-10y-8=0.$

18. $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{8-y}{4}=\dfrac{3(x+y)}{8}.$

49. 同值方程式

例如： 解 $x+y=6$ ………………………… (1)

$2x+2y=12$ ………………………… (2)

解： (1)×2， $2x+2y=12$ ………………………… (3)

(2)−(3)， $0=0.$

因（2）是（1）的 2 倍，再沒有什麼差別。即（1）和（2）是一個方程式，所以其解不定。這種方程式，叫做同值方程式。

50.　矛盾方程式

例如：　解

$$x=2y \quad\cdots\cdots (1)$$

$$x=2y-3 \quad\cdots\cdots (2)$$

解：　移項，

$$x-2y=0 \quad\cdots\cdots (3)$$

$$x-2y=-3 \quad\cdots\cdots (4)$$

$(3)-(4)$，

$$0=3 \quad\cdots\cdots (5)$$

0 不能等於 3，即是這種聯立方程式，求不出來解答。原因是 x 既等於 $2y$，同時絕不能等於 $2y-3$。這種方程式，叫做矛盾方程式。

51.　三元聯立一次方程式的解法

解法：

I.　任取兩個方程式，消去一未知數；再任取兩個方程式（與前邊取的不要完全相同），消去同樣的未知數，得二元聯立一次方程式。

II.　用解二元聯立一次方程式的方法，即得兩個未知數的數值。

III.　把求得的兩個數值，代到任一原方程式中，即得第三個未知數的數值。

例如：　解

$$6x+2y-5z=13 \quad\cdots\cdots (1)$$

$$3x+3y-2z=13 \quad\cdots\cdots (2)$$

$$7x+5y-3z=26 \quad\cdots\cdots (3)$$

解：　消去y.

從（1）和（2），得　　$12x-11z=13$ ………………（4）

從（1）和（3），得　　$16x-19z=13$ ………………（5）

從（4）和（5）消去x，得　　$13z=13$.

$$\therefore \quad z=1.$$

把z的數值代入（4），得

$$12x-11\times 1=13.$$

$$\therefore \quad x=2.$$

把x和z的數值代入（1），得

$$6\times 2+2y-5\times 1=13.$$

$$\therefore \quad y=3.$$

核算：　把$x=2, y=3, z=1$代入（1），（2）和（3），得

（1）的左端$=6\times 2+2\times 3-5\times 1=12+6-5=13$，

（2）的左端$=3\times 2+3\times 3-2\times 1=6+9-2=13$，

（3）的左端$=7\times 2+5\times 3-3\times 1=14+15-3=26$，

故知$x=2, y=3, z=1$合所求。

習　　題

解下列各方程式：

1. $\begin{cases} 3x+5y+z=26 & \cdots\cdots (1) \\ 6x+3y+4z=39 & \cdots\cdots (2) \\ 9x+4y+4z=50 & \cdots\cdots (3) \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x+3y-5z=3, \\ 3z-y-4x=1, \\ x+y-z=1. \end{cases}$　　3. $\begin{cases} x-3y+2z=0, \\ 3x+2y-5z=22, \\ x-y-z=2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=4, \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y-\frac{1}{5}z=1, \\ \frac{1}{4}z-\frac{1}{6}y-\frac{1}{2}x=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{3}=\frac{x+y}{2}, \\ x+y+z=27. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{y-z}{3}=\frac{y-x}{2}=5z-4x, \\ y+z=2x+1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+z-5)=y-z \\ \qquad =2x-11 \\ \qquad =9-(x-2z). \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+20=\frac{3y}{2}+10 \\ \qquad =2x+5 \\ \qquad =110-(y-z). \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y=28, \\ x+z=30, \\ y+z=32. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-y=2, \\ y-z=3, \\ x+z=9. \end{cases}$

11. $\begin{cases} u+x+y+z=1, \\ 2u+2x-3y+z=2, \\ u-3x-6y+4z=1, \\ 3u+x-8y-z=0. \end{cases}$

（9，10兩題先相加，後再消去未知數。）

52. 應用問題的解法

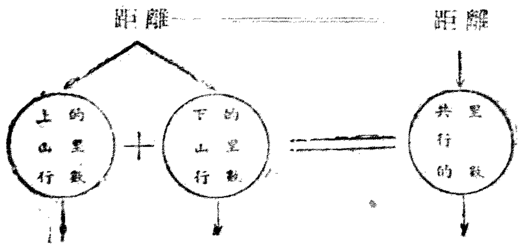
解應用問題的步驟，和一元一次的應用問題一樣；所不同的地方，就是如係二元的題，要假設兩個未知數，得兩個方程式；如係三元的，要假設三個未知數，得三個方程式，如此類推。

解一元一次方程式的應用問題時，方程式兩端的質量和單位要一樣，但解聯立方程式的應用問題時，只要每個方程式兩端的質量和單位相同，不必要幾個方程式都一樣。

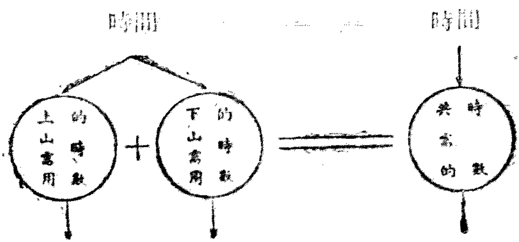
例如：　一汽車上山，每小時行15里；下山每小時行30里；10小時共行210里，問上下山各需多少小時？

設　　　　　　x＝上山的時數，

　　　　　　　y＝下山的時數。



$$15x \quad + \quad 30y \quad = \quad 210 \quad \cdots\cdots(1)$$



$$x \quad + \quad y \quad = \quad 10 \quad \cdots\cdots(2)$$

例題一：　兩位數的兩個數字的和為10，如加18，適為原數數字倒置後的數，求這個數。

解：　設　　　x＝個位上的數字，

　　　　　　　y＝十位上的數字；

則　　　　$10y+x$＝所求的數，

　　　　　$10x+y$＝所求原數數字倒置後的數。

依題意得方程式：

$$x+y=10 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$10y+x+18=10x+y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解之，得　　$x=6, y=4$.

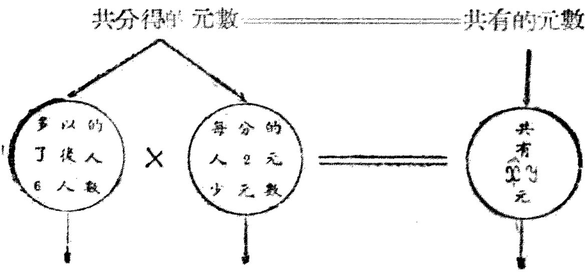
$$\therefore\quad 所求的數=10\times4+6=46.$$

核算：　$x=6, y=4$ 相加爲 10，$46+18=64$，64是46的數字倒置後的數。

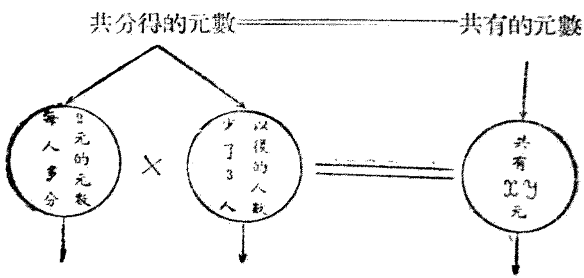
故知46爲所求的數。

例題二：　人數與元數，都不知道。如人數多6個，則每人少分2元；如人數少3個，則每人多分2元求人數與元數。

解：　設x=人數，y=每人分得的元數。



$$(x+6)\quad\times\quad(y-2)=xy \cdots\cdots (1)$$



$$(x-3)\quad\times\quad(y+2)=xy \cdots\cdots (2)$$

化簡（1）和（2），得　　$6y-2x=12$ ………………… (3)

$2x-3y=6$ …………………… (4)

解之，得　　$x=12, y=6$.

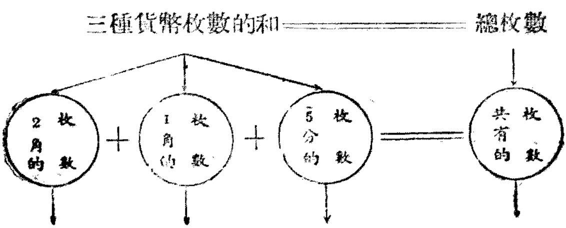
答：　12人，72元。

例題三：　某人有2角，1角和5分的貨幣三種，共10枚，合洋1元；如以5分的換成1角的，1角的換成5分的，則共有8枚問三種各有幾枚？

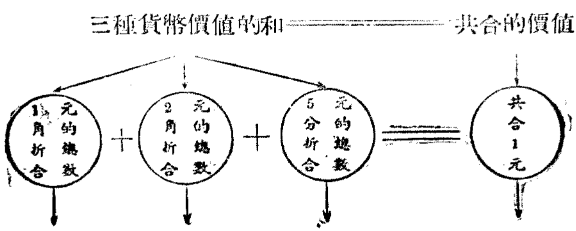
解：　設　　x＝2角的枚數，

y＝1角的枚數，

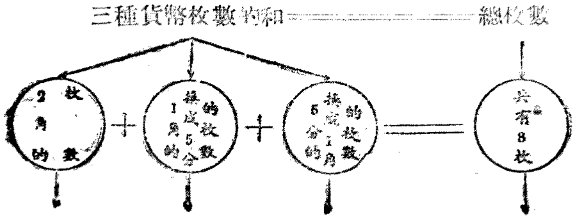
z＝5分的枚數。



$$x+y+z=10 \quad \cdots\cdots (1)$$



$$x\times 0.2+y\times 0.1+z\times 0.05=1 \quad \cdots\cdots (2)$$



$$x + 2y + \tfrac{1}{2}z = 8 \cdots\cdots(3)$$

解之，得　$x=3, y=1, z=6$.

答：2角的有3枚，1角的有1枚，5分的有6枚。

習　題

1. 把本節第一個問題中上山和下山的時數求出來。

2. 大小二數的和爲36，其差比小數的 $\frac{1}{3}$ 多2；求二數。

3. 有龜鶴一籠，牠們的頭共是5個，足共是16隻；問有幾個龜？有幾個鶴？

4. 有一兩位數，等於8倍兩數字的和；如減45，則爲原數的易位數，求這兩位數。

5. 設絨4丈，絲3丈的價共爲33元；絨5丈，絲6丈的價共爲48元。問絨絲每丈各價多少？

6. 有人買6匹馬，7頭牛，共用1000元；又買11匹馬，13頭牛，共用1844元。問馬和牛各價多少？

7. 有一三位數，數字的和爲16，百位和十位的數字等於個位的數；如加上594於原數，百位上的數字與個位上的數字易位。求這三位數。

8.　甲乙二人比較年齡：*7* 年前甲 *3* 倍於乙；*7* 年後甲 *2* 倍於乙。問現年各多少？

9.　一室中有男女若干人，從男子看去，女人比男人少 *1* 人；從女子看去，男人恰較女人多 *1* 倍。問男女各幾人？

10.　甲乙二人共有國幣*150*元；因甲用去一半，乙用去 *3* 分之 *2*，則二人共有國幣*60*元。問二人原各有若干元？

11.　有一矩形，若寬增 *2* 丈，長增*3*丈，則面積增多*64*方丈；若寬增 *3* 丈，長增 *2* 丈，則面積增多*68*方丈。問長寬各多少？

12.　有銅與銀的合質：銀比全量的$\frac{2}{5}$多 *42*兩；銅比全量的$\frac{4}{9}$少*8*兩。問銅銀各幾兩？

13.　問一個人和他妹妹的年齡，那人答道：“我的年齡增*3*歲，則 *2* 倍於妹妹現在的年齡；如妹妹年齡減 *5* 歲，則我的年齡爲她的 $3\frac{1}{6}$ 倍”求二人的年齡。

14.　某人借洋若干元，依單利計算，六年應還本利和*5200*元，十年應還本利和*6000*元。求所借的元數和年利率。

15.　有一工程，甲乙丙三人作之，*3* 日可成；若甲乙二人合作，*32*日可成；乙丙二人合作，*120*日可成。求各人獨作的日數。

16.　童子若干人分鉛筆若干枝：其中*4*人各取 *4* 枝，餘者各取 *3* 枝，則剩*16*枝；若有一人只取 *2* 枝，則餘者恰可得 *6* 枝。問童子，鉛筆各幾何？

17.　甲乙丙三人，甲乙同作*6*日，共得工資*42*元；丙甲同作 *9* 日，共得工資*54*元；乙丙同作*15*日，共得工資*75*元，問每人每日工資多少？

18.　某人有三子，他的年齡恰等於三子年齡的和；再過*9*年，

爲長子與次子的和；又過3年，則等於長子與末子的和；又過3年，則爲次子與末子的和。問父子現年各多少？

第七章

一次函數的圖解

53. 直線上點的位置

I. 橫方向線

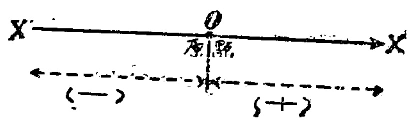
甲說徐州在東邊，乙說在西邊；甲說徐州明明白白的在鄭州東邊，乙說明明白白的在海州西邊，我們拿地圖來一看，都說的對，不同的原因是甲用鄭州作標準，乙用海州作標準，所以定一地方或一點的位置，非先定標準點不可，這標準點叫做原點，就是起點的意思。

例如：說徐州在鄭州東，鄭州做了標準點，就是原點；徐州在海州西，海州做了標準點，即是原點。

由上例知道原點可以任意選擇。

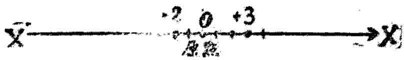
表東西方向的線，叫做橫方向線。

在橫方向線上選定原點後，如表東邊（或右邊）距離的數爲正的，則表西邊（或左邊）距離的數爲負的，這是通常的選定法，不是非這樣不可的，如下圖：



例如：　求原點右邊3尺（＋3）和左邊2尺（－2）兩點的位置。

假定在方向線上取一線分代表一尺，則由原點向右量3單位線分得（＋3）的位置；向左量2單位線分得（－2）的位置，如下圖。



II.　縱方向線

表南北方向的線，叫做縱方向線。

在縱方向線上，選定原點後，如表北邊（或上邊）距離的數爲正的，則表南邊（或下邊）距離的數爲負的，如左圖：

例如：　求原點上邊3尺（＋3）和下邊2尺（－2）兩點的位置。

由原點0向上量3線分得（＋3）的位置；向下量2線分得（－2）的位置（假定一線分代表一尺）。

由此可知凡實數均可以方向線上之點表出；反言之，方向線上之點可表對應實數。

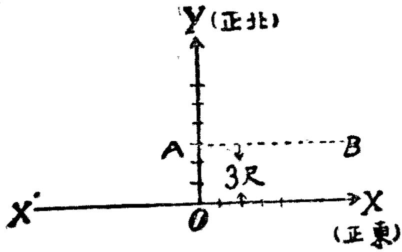
54.　平面上點的位置

假如在教室內，以東西和南北兩牆根當作縱橫兩方向線，牆角當作原點，提出問題如下：

問甲生的坐位在什麼地方？

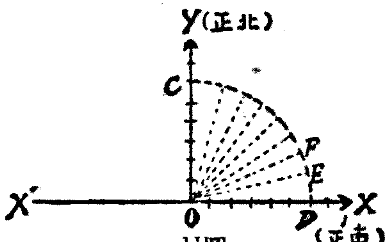
生答離東西牆（橫方向線）3尺。

這種答法，似乎明白，但實際上仍沒法知道他的坐位，因離東西牆3尺的地方不止一處，如圖 I 中AB線上的點，都適合甲生的回答。



I 圖

乙生說，這樣沒法定位置，需要知道距原點的遠近才成，於是再問甲生距原點多少尺？他答6尺。



II圖

在圖II中CD弧上的點，都距原點6尺，故用甲生的回答，還是不能定他所在的位置。

由上例知道定一點在平面上的位置，用一個方向距離是不行的。如在圖 I 中，知道距橫方向線的遠近，還要知道距縱方向線的遠近，才能定甲生的坐位；如在圖II中，知道距原點的遠近，還要知道角度的大小，才能定甲生的坐位。

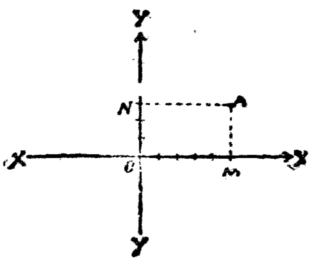
用圖II的條件定點的位置，初等代數學上暫不討論，現在講用圖 I 的條件來定點的位置，通常取相交的兩直線作標準，牠們的交點，就選爲原點；牠們自己叫做坐標軸。

坐標軸若是交成直角的，叫做直角坐標。在初等代數學上，都

用這種坐標軸。橫標方向線，簡稱為橫軸或 x 橫；縱標方向線，簡稱為縱軸或 y 軸。坐標軸方向，橫軸以向右為正，向左為負；縱軸以向上為正，向下為負。

例如：　知甲生的坐位離 x 軸 3 尺，離 y 軸 5 尺。求甲生的位置。

在方格紙上選定一線分為一單位。



（i）　由原點在 x 軸上向右量 5 單位，得M點；再由M點向上量 3 單位，得A點，即甲生的位置。

（ii）　或由原點在 y 軸上向上量 3 單位，得N點；再由N點向右量 5 單位，得A點，即甲生的位置。

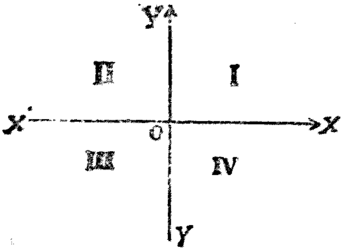
（iii）　或由原點起，在 x 軸上向右量 5 單位，得M點，在 y 軸上向上量 3 單位，得N點；再由N，M兩點各畫一直線與 x 軸和 y 軸平行，交點A，即甲生的位置。

上邊三個方法，都是用 $OM=5$ 和 $ON=3$ 來決定A點的位置，故通常用A（$5,3$）表A點。括弧內的 5 和 3，叫做A點的坐標，5 叫做A點的橫坐標，3 叫做A點的縱坐標。

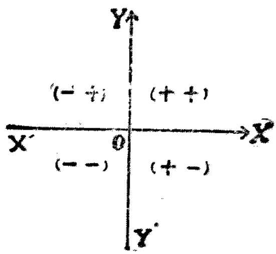
任意點P在平面上的位置，以其距 y 軸和 x 軸之距離來決定，即用橫坐標 x 和縱坐標 y 之值來決定，故用P（x,y）表之，橫坐標記在前邊，縱坐標記在後邊，是一定的不可任意交換。

兩軸相交，把一平面分為四部分，每一部分叫做一象限，順次

稱爲第一象限，第二象限，第三象限，第四象限，如下圖：

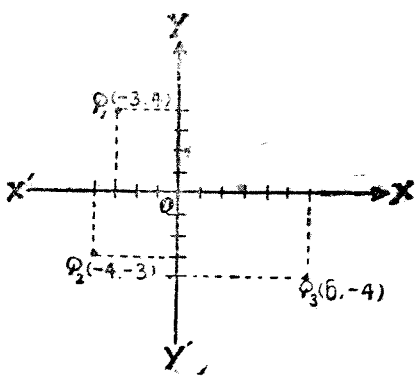


各象限內坐標的正負如下：



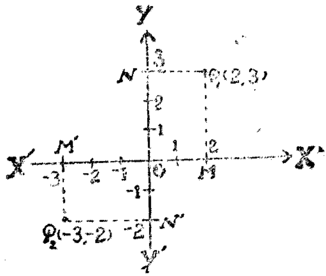
〔例 1〕　求 P_1（−3，4）P_2（−4，−3）和 P_3（6，−4）各點的位置。

先作XX′ YY′ 軸．自原點O向左量3線分．假定一線分爲單位；又向上量 4 線分，各自分點作 YY′ XX′ 的平行線，相交於 P_1．



• 同理，自原點向左量4，向下量3，作平行線相交，即得P_2之位置，依法求P_3（$6,-4$）之位置。

〔例2〕　求下圖中P_1及P_2兩點的坐標。



由P_1作二線，各平行於x軸、y軸，交x軸於M點，y軸於N點。因OM是2線分長，ON是3線分長，故知P_1的坐標爲$(2,3)$，同理，知P_2的坐標爲（$-3,-2$）

習　　題

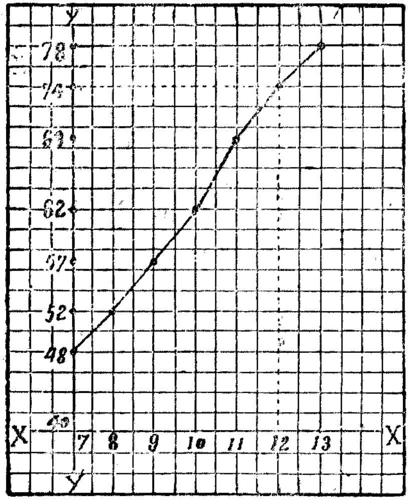
求下列各點的位置：

1. P（$5,-4$）.　　2. P（$-3,-7$）.
3. P（$-2,1$）.　　4. P（$-10,5$）.
5. P（$5,-a$）.　　6. P（$a,-b$）.
7. P（$-2a,-3b$）.　　8. P（$2x,-3y$）.

55.　實際的應用

統計年齡不同的小孩子平均的體重，得下表：

年齡	7	8	9	10	11	13
體重的磅數	48	52	57	62	69	78



用上邊的統計，製圖如左：

y 軸上的數代表磅數；每一線分作兩磅，由40磅起算。

x 軸上的數代表年齡；每兩線分算一歲，由原點起就是7歲。

由左圖知小孩子年齡越大，身體越重；並且知12歲的小孩子平均體重是74磅左右。

習　　題

任選兩量關係的統計表製圖。

56. 函　數

在代數學中，通常用$a, b, c, \cdots\cdots$表確定的常數，以$x, y, z, \cdots\cdots$表不確定的變數。如一變數之值是依他一變數之值而決定的，則後者叫做自變數，而前者叫做依變數；如 $y=ax^2+bx+c$，任與 x 一值，可得y一對應值；x為自變數，y為依變數。

如一代數式之值是依所含變數之值而決定的，則這式叫做這變數的函數；函數符號爲f（　）。

例如：　$5x+6$，牠的數值完全依靠x的數值的大小而定，所以把這個式子，叫做x的函數，通常用符號$f(x)$表之，即

$$f(x)=5x+6.$$

同樣，y^2+5y+8，這個式子是y的函數，用$f(y)$表之，即

$$f(y)=y^2+5y+8.$$

$x+y+3$這個式子的數值的大小，不但依靠x數值的大小，還依靠y數值的大小而定，所以就把牠叫做x和y的函數，用$f(x,y)$表之，即

$$f(x,y)=x+y+3.$$

如同時有幾個不同的x的函數，便要用符號$f(x)$，$F(x)$，$\phi(x)$……表之，以示區別，但其使用法以及性質，都與$f(x)$是一樣的。

例如：　$5x+3$和$8x-4$是不同的x的函數，用符號表之，爲

$$f(x)=5x+3\text{和}F(x)=8x-4.$$

代數式是什麼文字的幾次式，就可叫做那個文字的幾次函數。

例如：　$f(x)=x+3$是x的一次函數；$\phi(x)=x^2+5x+6$是x的二次函數；$F(x,y)=x+y+3$是x和y的一次函數。

函數的範圍很廣，本章只講簡易的一次函數的圖解。

57. 求函數值

求函數值的法子，和§34求代數式的數值的法子一樣。

例如：　1.　設$f(x)=2x+1$，求$x=1,2,3$時，$f(x)$的數值。

$f(1)=2\times1+1=3$；　　$f(2)=2\times2+1=5$；

$f(3)=2\times 3+1=7$.

2. 設 $y=x+3$，$x=1,2,3\cdots\cdots$時，y的數值。

x	1	2	3	4	5	……
y	4	5	6	7	8	……

3. $x=1,2,3\cdots\cdots$時，求$4x-1$的數值。

x	1	2	3	4	5	……
$4x-1$	3	7	11	15	19	……

習 題

$x=1,-2,3,-4,5$時，求下列各函數的值：

1. $f(x)=3x-7$. 2. $f(x)=16-(2x-3)$.

3. $f(x)=8(x-3)-(6-2x)$.

4. $f(x)=2(x+2)-5(5-x)$.

5. $f(x)=3(x-1)^2-3(x^2-1)$.

6. $f(x)=2(x+1)^2-2(x+3)^2$.

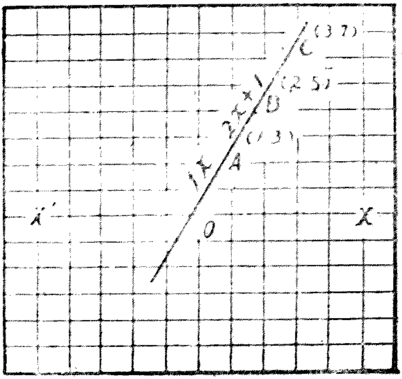
7. $f(x)=0.5x-0.8$. 8. $f(x)=0.16x-0.008$.

9. $\phi(x)=x^2-6x-7$. 10. $\phi(x)=5x^2-x+10$.

58. 一次函數的圖解

由變數x的每一數值，求出函數的相應數值，作爲一點的坐標；可求出許多點的位置，聯這些點得一直線，即表一次函數。凡一次函數的變跡均爲直線。

如把上節例1圖解之：



x	y
1	3
2	5
3	7
⋮	⋮

令$y=f(x)=2x+1$.

任與x之值1，2,3,……，則可得

$$y=f(x)$$

相應之值，3,5,7,……

將x各值作爲橫坐標；y相應各值作爲縱坐標。

由此可得A(1,3)；B(2,5)；C(3,7)，……諸點，聯綫爲即$f(x)=2x+1$的圖解。

習　　題

圖解§57習題中1—8的函數。

59.　圖解二元一次聯立方程式

例如：　圖解　　$3x+2y=16$……………………………(1)

$5x-3y=14$……………………………(2)

由(1)，得$y=\dfrac{16-3x}{2}=f(x)$.

假設$x=0$,則$y=f(0)=8$得一點的坐標。

由(2)，得$y=\dfrac{14-5x}{-3}=f(x)$.

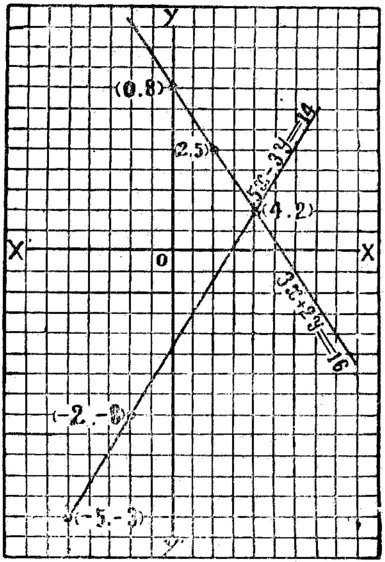
假設　$x=-2$,

則　　$y=-8$；

同樣，$x=2$，則 $y=f(2)=5$ 又得一點的坐標。

$x=-5$，則 $y=-13$。

（1）和（2）各表一直線，牠們交點的坐標爲（4，2）。這4和2能適合（1）和（2），故知 $x=4$，$y=2$ 爲方程式的解。



60.　圖解二元一次同值方程式

例如：　圖解　$x+y=8$ ……………………（1）

$2x+2y=16$ ……………………（2）

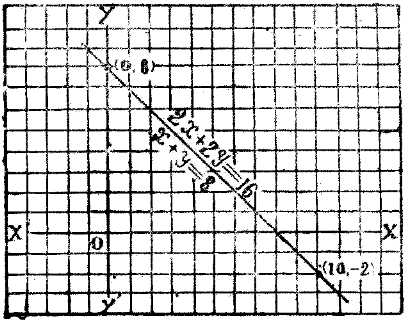
由（1），得 $y=f(x)=8-x$。

假設　$x=0$。

由（2），得 $y=f(x)=\dfrac{16-2x}{2}$。

假設　$x=0$，

則　$f(0)=8$；	則　$f(0)=8$；
$x=10$，	$x=10$，
則　$f(10)=-2$。	則　$f(10)=-2$。

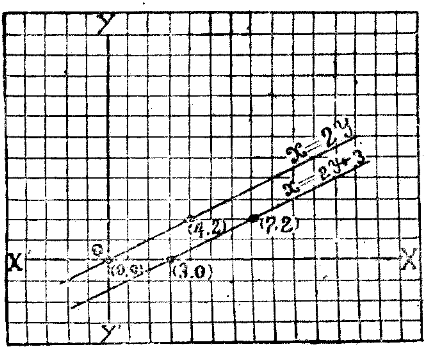


由(1)和(2)得到各點的坐標一樣，故只能畫一直線，可以無窮長，適合這線的點有無窮個；故同値方程式即不定方程式有無窮個根。

61.　圖解二元一次矛盾方程式

例如：　圖解　$x=2y$ ·································· (1)

$x=2y+3$ ································· (2)



在(1)中：

$\begin{cases} y=0, \\ x=0; \end{cases}$　$\begin{cases} y=2, \\ x=4. \end{cases}$

在(2)中：

$\begin{cases} y=0, \\ x=3; \end{cases}$　$\begin{cases} y=2, \\ x=7. \end{cases}$

故由(1)和(2)所畫的線平行而不能相交，所以矛盾方程式沒有解答。

習 題

圖解下列各方程式：

1. $\begin{cases} y=4x, \\ 2x+y=18. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=2, \\ 3x+3y=6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 3x-5y=15. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y=2x+3, \\ x+y=6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y=6, \\ 2x+2y=12. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x-3y=0, \\ x-3y=3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+y=10, \\ 7x+8y=53. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 6y-5x=8, \\ 12x-9y=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x+4y=10, \\ 4x+y=9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+2y=13, \\ 3x+y=14. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+y=10, \\ 7x+8y=62. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 6y-5x=18, \\ 12x-9y=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 8x=5y, \\ 13x=8y+1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 19x-12y=0, \\ 2x-y=53. \end{cases}$

第八章

續多項式的基本運算（乘法和除法）

62. 多項式乘法

I. 一個作乘式，一個作被乘式。

II. 把乘式與被乘式各按同一文字同一順序排列。

III. 被乘式寫在上邊，乘式寫在下邊，由左邊對齊。

IV. 用乘式的每項乘被乘式的各項，把所得的乘積，寫在橫線下面，同類項寫在同一縱項內。

V. 求各同類項的代數和。

〔例 1〕　以 $x+2$ 乘 $2x+5$.

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x+5 \\
\times) & x+2 \\
\hline
 & 2x^2+5x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2x+5)\times x \\
+) & \qquad 4x+10 \cdots\cdots (2x+5)\times 2 \\
\hline
 & 2x^2+9x+10
\end{array}
$$

被乘式和乘式含同文字時，在未乘以前，最好排列成同文字的升冪或降冪式；如有缺項時，應當留空位，或用零補充之。

〔例 2〕　以 x^3-1-2x 乘 $4x-3$.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^3 \qquad\quad -2x-1 \\
\times) & 4x-3 \\
\hline
 & 4x^4 \qquad\quad -8x^2-4x
\end{array}
$$

$$\begin{array}{r} +)\quad -3x^3 \qquad +6x+3 \\ \hline 4x^4-3x^3\quad -8x^2+2x+3 \end{array}$$

或

$$\begin{array}{r} x^3+0-2x-1 \\ \times)\quad 4x-3 \\ \hline 4x^4+0-8x^2-4x \\ +)\quad -3x^3+0+6x+3 \\ \hline 4x^4-3x^3-8x^2+2x+3 \end{array}$$

積的次數是被乘式的次數與乘式的次數之和。

習　　題

求下列各題的乘積：

1. $a+5$和$a-3$.　　2. $x+1$和$x-5$.

3. x^2+5和$x-7$.　　4. $x+y-2$和$x-y+2$.

5. a^2+ab+b^2和$a-b$.　　6. $a+b$和$a-b$.

7. $\frac{1}{2}x^2+5$和$x-\frac{1}{3}$.　　8. $0.5x-1$和$x+0.8$.

9. x^3-2x+1和x^2+x+1.

10. x^3+x^2+1+x和x^2-x+1.

11. $x^2y+3xy-7y^2$和x^2y+xy^2.

12. $-xy+y+x^2$ 和$\frac{1}{2}x-y$.

63. 乘方的指數定則

$$(a^2)^3=a^2\times a^2\times a^2=a^6=a^{2\times 3}.$$

$$\therefore\quad (a^2)^3=a^{2\times 3}=a^6.$$

$$(a^2b^3)^3=a^2b^3\times a^2b^3\times a^2b^3=a^6b^9=a^{2\times 3}b^{3\times 3}.$$

$$\therefore\quad (a^2b^3)^3=a^{2\times3}b^{3\times3}=a^6b^9.$$

同樣，
$$(a^2)^m=a^{2\times m}=a^{2m},$$
$$(a^n)^m=a^{n\times m}=a^{mn},$$
$$(a^mb^n)^p=a^{m\times p}b^{n\times p}=a^{mp}b^{np}.$$

由上例得指數定則III：

乘方的乘方，等於以其指數相乘作爲乘積的指數。

【練習】　指出下列各式的錯誤：

1. $(ab)^3=a^{1+3}b^{1+3}=a^4b^4$.

2. $(3b^3)^2=3b^{3\times2}=3b^6$.

3. $(a^2)^2=a^{2+2}=a^4$.

習　　題

計算下列各式：

1. $(m^3)^5$.　　2. $(x^7)^2$.　　3. $(3m^3)^4$.

4. $(2x^7)^2$.　　5. $(x^3y^4)^3$.　　6. $(7ab^2c)^2$.

7. $(ab^m)^2$.　　8. $(x^2y^n)^3$.　　9. $(x^mb^n)^4$.

10. $(a^pb^2)^n$.　　11. $(2a^pb^2)^n$.　　12. $(x^{2n})^{2m}$.

64. 乘算公式一

1. 二數和的平方

假設a代一個數，b代一個數，則二數的和爲$a+b$.

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times)\ \ a+b \\ \hline a^2+ab \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

由實際乘得a,b二數和的平方爲$a^2+2ab+b^2$.

如把b換成c，得

$$\begin{array}{r} a+c \\ \times)\quad a+c \\ \hline a^2+ac\qquad \\ ac+c^2 \\ \hline a^2+2ac+c^2 \end{array}$$

所得的乘積，與上邊乘積的形式一樣，僅是b的地方換成c.

如把a換成m，得

$$\begin{array}{r} m+b \\ \times)\quad m+b \\ \hline m^2+mb\qquad \\ mb+b^2 \\ \hline m^2+2mb+b^2 \end{array}$$

所得乘積的形式，還是一樣，僅是a的地方換成m.

所以無論兩個什麼數相加的平方，總是上邊的形式，就把牠作爲二數的平方和之公式。

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad\text{……………………（公式1）}$$

（二數和的平方，等於二數平方和，加上二數乘積的2倍。）

〔例1〕 $(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$.

〔例2〕 $(a+3b)^2=a^2+2a\times 3b+(3b)^2$

$=a^2+6ab+9b^2$.

〔例3〕 $(3a+5b)^2=(3a)^2+2\times 3a\times 5b+(5b)^2$

$=9a^2+30ab+25b^2$.

〔例4〕 $(x^2+y^3)^2=(x^2)^2+2x^2y^3+(y^3)^2$

$=x^4+2x^2y^3+y^6$.

II. 二數差的平方

$$\begin{array}{r} a-b \\ \times)\quad a-b \\ \hline a^2-ab\qquad \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

$\therefore\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ……………… （公式 2）

（二數差的平方，等於二數平方和，減去二數乘積的 2 倍。）

〔例 1〕　$(c-d)^2=c^2-2cd+d^2$.

〔例 2〕　$(a-3b)^2=a^2-2a\times 3b+(3b)^2$

$$=a^2-6ab+9b^2.$$

〔例 3〕　$(x-y^2)^2=x^2-2x\times y^2+(y^2)^2$

$$=x^2-2xy^2+y^4.$$

〔例 4〕　$\left(\frac{1}{2}x-w\right)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-2\times\frac{1}{2}x\times w+w^2$

$$=\frac{1}{4}x^2-xw+w^2.$$

習　　題

應用公式，求下列各式的平方：

1. $3a+7$.　2. $3a-7$.　3. $2a+5b$.
4. $2a-5b$.　5. $5ab+c$.　6. $5ab-c$.
7. $3a^2+7$.　8. $3a^2-7$.　9. $3x^2+y^2$.
10. $3x^2-y^2$.　11. a^2y+z^2.　12. x^2y-z^2.
13. $\frac{1}{3}x+y$.　14. $\frac{1}{3}x-y$.　15. $\frac{1}{5}x+\frac{1}{7}y$.
16. $\frac{1}{5}x-\frac{1}{7}y$.　17. $0.5x+0.8$.　18. $0.5x-0.8$.

III.　多項式的平方

(a)　三項式的平方

$$(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$$

$$=(a+b)^2+2\times c(a+b)+c^2$$

〔把（$a+b$）當作一數看待〕

$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

例如：　求 $3a-x+y$ 的平方。

$$(3a-x+y)^2$$

$$=(3a)^2+(-x)^2+y^2+2\times 3a(-x)+2(-x)y+2\times 3a\times y$$

$$=9a^2+x^2+y^2-6ax-2xy+6ay$$

（b）　四項式的平方

$$(a+b+c+d)^2$$

$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

總之，多項式的平方，等於各項平方之和，再加上每兩項相乘積之二倍。

習　　題

求下列各式的平方：

1. $3a+7b+c$.　　2. $2a+5b-m$.

3. $5ab-c+1$.　　4. $a-\frac{1}{2}+b$.

5. $2x^2+x-1$.　　6. $2a-b-c$.

7. $5x+6y-3c$.　　8. $y^3-m^2-n^2$.

9. $x^2+m^2+n^2$.　　10. $7x+3y+8z$.

11. $\frac{2}{3}a^2-x+\frac{3}{2}$.　　12. $a+b+c+d+e$.

65.　乘算公式二

二數和與差之積

$$\begin{array}{r@{}l} & a+b \\ \times) & a-b \\ \hline & a^2+ab \\ & \quad -ab-b^2 \\ \hline & a^2 \qquad -b^2 \end{array}$$

$\therefore\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2$……………………（公式 3）

（二數和與二數差的乘積，等於二數平方的差）

〔例 1〕 $(5+3)(5-3)=5^2-3^2=25-9=16$.

〔例 2〕 $(a+3b)(a-3b)=a^2-(3b)^2$

$$=a^2-9b^2.$$

〔例 3〕 $(2a+3b)(2a-3b)=(2a)^2-(3b)^2$

$$=4a^2-9b^2.$$

〔例 4〕 $(x+y+z)(x+y-z)=\{(x+y)+z\}\{(x+y)-z\}$

$$=(x+y)^2-z^2$$

〔把 $(x+y)$ 當作一數看待〕

$$=x^2+2xy+y^2-z^2.$$

〔例 5〕 $(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2)^2-(b^2)^2$

$$=a^4-b^4.$$

【練習】　指明下式的錯誤：

1. $(a+m)(a+m)=a^2+m^2$.

2. $(a-m)(a-n)=a^2-mn$.

3. $(x^2+y^2)(x^2-y)=x^{2+2}-y^{2+1}=x^4-y^3$

或 $=x^{2\times 2}-y^{2\times 1}=x^4-y^2$.

習　　題

求下列各式的乘積：

1. $(7-9)(7-9)$。　　2. $(a+3)(a-3)$。

3. $(2a+b)(2a-b)$。　　4. $(5a+2b)(5a-2b)$。

5. $(1+2m)(1-2m)$。　　5. $(x^2+y)(x^2-y)$。

7. $(a+b+c)(a+b-c)$。　　8. $(3x+2y+z)(3x+2y-z)$。

9. $(x^2+3+2x)(2x+x^2-3)$。

10. $(xy+x^2+y^2)(y^2-x^2+xy)$。

66. 乘算公式三

I. 二數和的立方

$$\begin{array}{rr}
 & a+b \\
\times) & a+b \\ \hline
 & a^2+ab \\
+) & +ab+b^2 \\ \hline
 & a^2+2ab+b^2
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{rr}
 & a^2+2ab+b^2 \\
\times) & a+b \\ \hline
 & a^3+2a^2b+ab^2 \\
+) & a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline
 & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{array}$$

$\therefore\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ……………（公式 4）

〔例 1〕 $(2+4)^3=2^3+3\times2^2\times4+3\times2\times4^2+4^3$

$=8+48+96+64=216$.

〔例 2〕 $(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$。

〔例 3〕 $(3a+2x)^3=(3a)^3+3(3a)^2(2x)+3(3a)(2x)^2+(2a)^3$

$=27a^3+54a^2x+36ax^2+8x^3$

〔例 4〕 $(a^2+xy)^3=(a^2)^3+3(a^2)^2xy+3a^2(xy)^2+(xy)^3$

$=a^6+3a^4xy+3a^2x^2y^2+x^3y^3$.

II. 二數差的立方

$$\begin{array}{rr} & a-b \\ \times) & a-b \\ \hline & a^2-ab \\ +) & -ab+b^2 \\ \hline & a^2-2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & a^2-2ab+b^2 \\ \times) & a-b \\ \hline & a^3-2a^2b+ab^2 \\ +) & -a^2b+2ab^2-b^3 \\ \hline & a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{array}$$

$\therefore\ (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$………（公式 5）

〔例 1〕　$(5-2)^3=5^3-3\times5^2\times2+3\times5\times2^2-2^3$

$=125-150+60-8=27$。

〔例 2〕　$(3a-2x)^3=(3a)^3-3(3a)^2(2x)+3(3a)(2x)^2-(2x)^3$

$=27a^3-54a^2x+36ax^2-8x^3$。

習　　題

求下列各式的立方：

1．$6+7$。　　2．$6-7$。　　3．$3x+5y$。

4．$3x-5y$。　　5．$2ab+3c$。　　6．$2ab-3c$。

7．$4x^2+5y^2$。　　8．$4x^2-5y^2$。　　9．$2a^2+3b^2$。

10．$2a^2-3b^2$。　　11．$5x^2+4y^3$。　　12．$5x^2-4y^3$。

13．$a+\frac{2}{3}b$。　　14．$\frac{1}{3}x^2+3y$。　　15．$\frac{1}{6}a^2-3c$。

67．乘算公式四

I．

$$\begin{array}{rr} & a^2+ab+b^2 \\ \times) & a-b \\ \hline & a^3+a^2b+ab^2 \\ +) & -a^2b-ab^2-b^3 \\ \hline & a^3\qquad\qquad-b^3 \end{array}$$

$\therefore\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$……………（公式 6）

〔例 1〕　$(5-3)(5^2+5\times3+3^2)=5^3-3^3$

$$=125-27=98.$$

不用公式算，結果還是一樣。

$$(5-3)(5^2+5\times3+3^2)=2(25+15+9)=98.$$

〔例 2〕　$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$.

〔例 3〕　$(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

$$=(2x-3y)\{(2x)^2+2x\times3y+(3y)^2\}$$

$$=(2x)^3-(3y)^3=8x^3-27y^3.$$

〔例 4〕　$(3x-y^2)(9x^2+3xy^2+y^4)$

$$=(3x-y^2)\{(3x)^2+3x\times y^2+(y^2)^2\}$$

$$=(3x)^3-(y^2)^3=27x^3-y^6.$$

【練習】　指出下列各式的錯誤：

1. $(2x-3y)(4x^2+5xy+9y^2)$

$$=(2x-3y)\{(2x)^2-(2x)(3y)+(3y)^2\}$$

$$=(2x)^3-(3y)^3=8x^3-27y^3.$$

2. $(3a-5b)(9a^2+15ab+25b^2)$

$$=(3a-5b)\{(3a)^2+(5a)(3b)+(5b)^2\}$$

$$=(3a)^3-(5b)^3.$$

II.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & a^2 & -ab & +b^2 & \\
\times) & a & +b & & \\
\hline
 & a^3 & -a^2b & +ab^2 & \\
+) & & a^2b & -ab^2 & +b^3 \\
\hline
 & a^3 & & & +b^3
\end{array}$$

$\therefore$　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ ………………（公式 7）

〔例 1〕　$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$.

〔例 2〕　$(a^2+3b^2)(a^4-3a^2b^2+9b^4)$

$$=(a^2+3b^2)\{(a^2)^2-a^2(3b^2)+(3b^2)^2\}$$
$$=a^6+(3b^2)^3=a^6+27b^6。$$

習　　題

應用公式，求下列各式的乘積：

1. $(a-3)(a^2+3a+9)$。
2. $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$。
3. $(2a^2-b^2)(4a^4+2a^2b^2+b^4)$。
4. $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$。
5. $(3x-8y)(9x^2+24xy+64y^2)$。
6. $(7x+3y^2)(49x^2-21xy^2+9y^4)$。
7. $(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}$。
8. $(x+y-z)\{(x+y)^2+(x+y)z+z^2\}$。

68.　乘算公式五

I.

$$\begin{array}{rl}
 & x+9 \\
\times) & x+7 \\ \hline
 & x^2+9x \\
+) & 7x+63 \\ \hline
 & x^2+7x+9x+63 = x^2+(7+9)x+63
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & x-9 \\
\times) & x+7 \\ \hline
 & x^2-9x \\
+) & 7x-63 \\ \hline
 & x^2+7x-9x-63 = x^2+(7-9)x-63
\end{array}$$

$\boxed{兩首項的積}$　$\boxed{兩末項的代數和}$　$\boxed{兩末　的積}$

同樣，$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$……………（公式 8）

由上邊得乘積各項的觀察法：

I. 首項＝兩乘式首項相乘；

II. 末項＝兩乘式末項相乘；

III. 中項＝兩乘式末項的代數和乘首項。

〔例 1〕 $(x+5)(x-8)=x^2+(5-8)x-40$

$$=x^2-3x-40.$$

〔例 2〕 $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=x^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$

$$=x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}.$$

習　　題

用觀察法，求下列各式的乘積：

1. $(x+5)(x+10)$.　　2. $(x+5)(x-5)$.

3. $(x-7)(x-10)$.　　4. $(x+7)(x+10)$.

5. $(x+8)(x-4)$.　　6. $(x-12)(x-1)$.

7. $(x+12)(x-1)$.　　8. $(-x-2)(-x-3)$.

9. $(-x+7)(x-7)$.　　10. $(-x+21)(x-21)$.

11. $\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$　　12. $\left(x-\frac{1}{7}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

13. $\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$　　14. $\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{1}{10}\right)$.

II·

$$\begin{array}{rr} & 2x+3 \\ \times) & 5x+7 \\ \hline & 10x^2+15x \\ & 14x+21 \\ \hline & 10x^2+29x+21 \\ & \downarrow \\ & 3\times5+2\times7 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 2x-3 \\ \times) & 5x-7 \\ \hline & 10x^2-15x \\ & -14x-21 \\ \hline & 10x^2-29x-21 \\ & \downarrow \\ & -3\times5-2\times7 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 2x-3 \\ \times) & 5x+7 \\ \hline & 10x^2-15x \\ & 14x-21 \\ \hline & 10x^2-\quad x-21 \\ & \downarrow \\ & -3\times5+2\times7 \end{array}$$

同樣，$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$………(公式9)

由上邊得乘積各項的觀察法：

I.　首項＝兩乘式首項相乘；

II.　末項＝兩乘式末項相乘；

III.　中項＝乘式首末兩項交互相乘的代數和（同號相加，異號相減）。

〔例1〕 $(2x+3)(x-3)=2x\times x+3x-3\times 2x+3\times(-3)$

$$=2x^2-3x-9.$$

〔例2〕 $\left(3x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=3x\times x+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times 3\right)x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)$

$$=3x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}.$$

習　　題

用觀察法，求下列各題的乘積：

1. $(2x+5)(x+2)$.　　2. $(2x-5)(x-2)$.
3. $(2x+5)(2x-1)$.　　4. $(3x+7)(2x-3)$.
5. $(4x-3)(2x+3)$.　　6. $(3x-2)(2x+9)$.
7. $\left(4x-\frac{1}{3}\right)\left(3x+\frac{1}{8}\right)$.　　8. $\left(2x-\frac{1}{7}\right)\left(7x+\frac{1}{10}\right)$.
9. $(3x-2y)(3x+y)$.　　10. $(3x+2y)(3x+2y)$.
11. $(2x+7y)(2x-5y)$.　　12. $(5x+3a)(4x-3a)$.
13. $(2x+5a)(x-5a)$.　　14. $(2x^2+a^2)(x^2-a^2)$.
15. $(y^2+7)(y^2-6)$.　　16. $(x^2-3)(2x^2+5)$.
17. $(m^2-5)(4m^2-2)$.　　18. $(xy-5)(xy+8)$.
19. $(abc-7)(abc+1)$.

69. 多項式除法

求$a+b$除$2a^2+3ab+b^2$的商式.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2a+b \\
\cline{2-2}
a+b) & 2a^2+3ab+b^2 \\
 & 2a^2+2ab \cdots\cdots\cdots\cdots (a+b)\times 2a \\
\cline{2-2}
 & \qquad ab+b^2 \\
 & \qquad ab+b^2 \cdots\cdots\cdots (a+b)\times b \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

由上例得法則：

I. 先把除式和被除式，用同文字的升冪或降冪排列。

II. 首商　用除式首項除被除式首項得首商，用首商乘除式各項所得的乘積從被除式中減去，得第一餘式。

III. 次商　用除式首項除第一餘式的首項，得次商。

用次商乘除式各項所得的乘積從第一餘式中減去，有餘再繼續依法做去：如最後餘式爲零，則爲能除盡；如最後餘式不爲零，而爲低於除式的次數之式（就某文字說），則爲除不盡，這時候商之表示法，在後面再說明。

〔例 1〕　用$x-a$除x^3-a^3，被除式有缺項時，應當留空位，或補零。

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+ax+a^2 \\
\cline{2-2}
x-a) & x^3+0+0-a^3 \\
 & x^3-ax^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (x-a)\times x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad ax^2 \\
 & \qquad ax^2-a^2x \cdots\cdots\cdots\cdots (x-a)\times ax \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad a^2x-a^3 \\
 & \qquad\qquad a^2x-a^3 \cdots\cdots\cdots (x-a)\times a^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

商式的次數，是被除式的次數與除式的次數之差。

〔例 2〕　用 $x+1$ 除 x^3+3x^2+x+5。

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 \qquad\quad +1 \\
\hline
x+1) & x^3+\ x^2+x+5 \\
 & x^3+\ x^2 \\
\hline
 & \qquad\quad +x+5 \\
 & \qquad\quad +x+1 \\
\hline
 & \qquad\qquad +4
\end{array}
$$

最後餘式的次數比除式的次數低，故不能再除，把這個 4 個叫做剩餘，關於這個問題，在後邊還有敘述。

習　　題

求下列各式的商：

1. $(2x^2+3x-35)\div(2x-7)$.

2. $(42a^2-25a-3)\div(6a-1)$.

3. $(4x^2+23x+15)\div(4x+3)$.

4. $(15a^2+17ax-4x^2)\div(3a+4x)$.

5. $(x^2+2xy+y^2)\div(x+y)$.

6. $(x^3+y^3)\div(x+y)$.　　7. $(a^3-b^3)\div(a-b)$.

8. $(x^3-x^2-12-9x)\div(3x+x^2+3)$.

9. $(6m^3-m^2-14m+3)\div(3m^2-4m-1)$.

解下列各方程式：

10. $(x+1)^2-(x^2-1)=22$.

11. $3(x-1)^2-3(x^2-1)=x-15$.

12. $(x+1)(2x+3)=2(x+1)^2+8$.

13. $6(x^2-3x+2)-2(x^2-1)=4(x+1)(x+2)$.

14. $(x+15)(x-3)-(x^2-6x+9)=30-15(x-1)$.

15. $84+(x+4)(x-3)(x+5)=(x+1)(x+2)(x+3)$.

16. $(x+1)(x+2)(x+6)=x^3+9x^2+4(7x-1)$.

70. 剩餘的處理法

以$x+1$除$2x+3x^2+1$

$$
\begin{array}{lrl}
 & 3x\ -1 & \cdots\cdots\text{商式} \\
\text{除式}\cdots\cdots x+1\,) & 3x^2+2x+1 & \cdots\cdots\text{被除式} \\
 & 3x^2+3x & \\
\hline
 & -\ x+1 & \\
 & -\ x-1 & \\
\hline
 & 2 & \cdots\cdots\text{剩餘}
\end{array}
$$

把被除式和除式依同文字的降冪序排列後，實行除法，若所得的餘式比除式的次數低時，我們就知道這個除式除不盡被除式，通常把這種餘式，叫做剩餘。

代數學上處理剩餘的方法，和算術上一樣；也是把剩餘作分子，除式作分母，寫做分式，加到已得的商式後邊，如上例，得

$$\frac{3x^2+2x+1}{x+1}=3x-1+\frac{2}{x+1}$$

故以多項式B除多項式A，假如商爲Q，剩餘爲R，則得除算公式如下：

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}.\quad\therefore\quad A=B\times Q+R\ \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

71. 剩餘定理

〔例1〕　求 $x-2$ 除 $3x^2$ | 　〔例2〕　求 $x-a$ 除 $3x^2$

$+2x+1$的剩餘。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x+8 \\ \hline
x-2 & 3x^2+2x+1 \\
 & 3x^2-6x \\ \hline
 & \quad 8x+1 \\
 & \quad 8x-16 \\ \hline
 & \qquad 17 \cdots\cdots \text{剩餘}
\end{array}
$$

若以2代被除式中的x，則得

$2x^2+2x+1=3\times 2^2+2\times 2+1=17$。

由公式(A)，得

$3x^2+2x+1$

$=(x-2)(3x+8)+17$。

令　$x=2$，則$x-2=0$。

因之　$(x-2)(3x+8)=0$。

$\therefore$　$3\times 2^2+2\times 2+1=17$

$=\mathrm{R}$。

$+2x+1$的剩餘。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x+(3a+2) \\ \hline
x-a & 3x^2+2x+1 \\
 & 3x^2-3ax \\ \hline
 & (3a+2)x+1 \\
 & (3a+2)x-a(3a+2) \\ \hline
 & \text{剩餘}\cdots\cdots 3a^2+2a+1
\end{array}
$$

若以a代被除式中的x，則得

$3x^2+2x+1=3a^2+2a+1$。

由公式(A)，得

$3x^2+2x+1$

$=(x-a)(3x+3a+2)$

$+3a^2+2a+1$。

令$x=a$，則$x-a=0$。

因之$(x-a)(3x+3a+2)=0$。

$\therefore$　$3\times a^2+2\times a+1$

$=3a^2+2a+1=\mathrm{R}$。

由上例得定理（一）：

含x的多項式，依x的降冪序排列，用x的一次二項式$x-a$除牠；那末，所得的剩餘，必等於用a代多項式中的x所得的數值。

〔例3〕　$x-2$能除盡x^2-3x+2。

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-1 \\ \hline
x-2 & x^2-3x+2 \\
 & x^2-2x \\ \hline
 & \quad -x+2 \\
 & \quad -x+2 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}
$$

〔例4〕　$a+2$能除盡x^3+8。

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x+4 \\ \hline
x+2 & x^3 \qquad\qquad +8 \\
 & x^3+2x^2 \\ \hline
 & \quad -2x^2 \\
 & \quad -2x^2-4x \\ \hline
 & \qquad\quad 4x+8 \\
 & \qquad\quad 4x+8 \\ \hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

這是用實際除法，知其能除盡。

用2代被除式中的x，則$R=2^2-3\times2+2=0$.

這是用公式(A)和定理(一)證明能除盡。

這是用實際除法，知其能除盡。

用-2代被除式中的x，則$R=(-2)^3+8=0$.

這是用公式(A)和定理(一)證明能除盡。

由上例得定理(二)：

含x的多項式，依x的降冪序排列，若能以x的一次二項式$x-a$除盡；那末，用a代多項式中的x，則多項式必爲零，即剩餘爲零。

【練習】　爲什麼例3用2代被除式中的x，例4用-2代被除式中的x？

習　　題

下列各式，用後式除前式，實行除法，求其商和剩餘：

1. $7x-8$, $x-1$.　　2. $6a^3+2x+1$, $x+2$.

3. $3x^3+5x+7$, $x-2$.　　4. x^3+27, $x-3$.

5. 試用剩餘定理，求上列各題的剩餘。

試以剩餘定理(二)，決定下列各式的後式能不能除盡前式：

6. $x^2-7x+12$, $x-3$.　　7. $x^2-7x+12$, $x-2$.

8. x^3-3x^2+4, $x+1$.　　9. a^3+b^3, $a+b$.

10. 5^3+1爲6的倍數，何故？

11. 10^3-1必爲11和9的倍數，試證之。

第 九 章

分 解 因 式

72. 質因式

一個代數式除常數及其自身以外，沒有其他因式時，叫做質式。例如：$a, a+b, a^2+c$都是質式。因式成質式的叫做質因式。

73. 分解因式

把一個式子化爲諸質因式連乘的積形狀時，叫做分解因式。

〔例 1〕 分解a^2-b^2.

分解a^2-b^2，就是問a^2-b^2是些什麼質因式乘起來的。由（公式3），知$a+b$乘$a-b$得a^2-b^2，所以a^2-b^2可以分解爲$a+b$與$a-b$.

$$\therefore \quad a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

〔例 2〕 分解$ab+ac$.

$$\because \quad a\text{乘}b+c\text{得}ab+ac,$$

$$\therefore \quad ab+ac=a(b+c).$$

分解因式是初等代數學的重要部分，因爲計算分式和解高次方程式……等都要應用牠，讀者務須練習純熟。

74. 各項有公因式的分解法

如一式的各項，有公共因式，把牠括在括弧外邊，用牠除原式

各項所得的商式，寫在括弧內邊，就是分解後所得的結果。

〔例 1〕 分解$am+bm-cm$.

各項的公共因式是m,

$$\therefore \quad am+bm-cm=m(a+b-c).$$

〔例 2〕 分解$2a^2b+4ab^2+6ab$.

公共因式是$2ab$,

$$\therefore \quad 2a^2b+4ab^2+6ab=2ab(a+2b+3).$$

〔例 3〕 分解$(a+b)^2+2(a+b)$.

公共因式是$a+b$,

$$\therefore \quad (a+b)^2+2(a+b)=(a+b)(a+b+2).$$

〔例 4〕 分解$(a+b)(x+y-z)-(a-b)(z-y-x)$.

式中好像沒有公共因式，但把後邊括弧前邊的符號變了，$x+y-z$就是公共因式。

因爲$(z-y-x)$和$(x+y-z)$各項的符號完全相反，所以才能這樣的變號。

$$\therefore \quad (a+b)(x+y-z)-(a-b)(z-y-x)$$
$$=(a+b)(x+y-z)+(a-b)(x+y-z)$$
$$=(x+y-z)(a+b+a-b)$$
$$=2a(x+y-z).$$

習 題

分解下列各式的因式：

1. a^3-ax.　　2. x^3-x^2.

3. $a^3-a^2b^2$.　　4. $5ax-5a^2x^2$.

5. $5x-25x^2y$.　　6. $16x+64xy^2$.

7. $3x^3-216x^2$. 8. $-6x^3-2x^4-4x^5$.

9. $x^3-x^2y+xy^2$. 10. $3a^4-3a^3b+6a^2b^2$.

11. $5x^5-10a^2x^3-15a^3x^3$. 12. $7a-7a^3+14a^4+21a^5$.

13. $38a^3x^5-57a^4x^2$. 14. $2a(a+b)-2c(a+b)$.

15. $(x-y)^2-3x(y-x)$. 16. $(a-b)c+(b-a)c^2$

17. $ax^2(b-c)-3x(c-b)$.

18. $(x+y)^2(b-c)-(x+y)(c-b)$.

19. $m(x+y)(b+c-a)-(x+y)(a-b-c)$.

20. $-(a-b)^2=+(-a+b)^2$,對不對？

21. $-(a-b)^3=+(-a+b)^3$,對不對？

22. 分解$(a-b)^2-(b-a)^3$.

75. 分類分解法

〔例 1〕 分解$ma+mb+na+nb$.

依含m和不含m的項分爲兩類，則

$$原式=(ma+mb)+(na+nb)$$

$$=m(a+b)+n(a+b).$$

分解到這裏，$a+b$成爲公共因式，用上節的分解法，得

$$原式=(m+n)(a+b).$$

〔例 2〕 分解$x^2-ax+bx-ab$.

如用b分類，就是把含b的項括在一括弧內，不含b的項括在一括弧內，得下式：

$$原式=(x^2-ax)+(bx-ab)$$

$$=x(x-a)+b(x-a)$$

$$=(x-a)(x+b).$$

同樣，用a分類，得下式：

$$\text{原式}=(x^2+bx)-(ax+ab)$$
$$=x(x+b)-a(x+b)$$
$$=(x-a)(x+b).$$

【練習】 讀者試用x分類，看能不能分解？

〔例 3〕 分解a^3x-a^2+ax-1.

用x分類，得下式：

$$\text{原式}=(a^3x+ax)-(a^2+1)$$
$$=ax(a^2+1)-(a^2+1)$$
$$=(a^2+1)(ax-1)$$

〔例 4〕 分解$x^5-x^4-2x^3+2x^2+5x-5$.

如用x分類，得下式：

$$\text{原式}=(x^5-x^4-2x^3+2x^2+5x)-5$$
$$=x(x^4-x^3-2x^2+2x+5)-5.$$

上式再不能分解，故知用x分類不對。如把每兩項括在一起，得下式：

$$\text{原式}=(x^5-x^4)-(2x^3-2x^2)+(5x-5)$$
$$=x^4(x-1)-2x^2(x-1)+5(x-1)$$
$$=(x-1)(x^4-2x^2+5).$$

由上例可知無論怎樣分類，都可以，但需要各括弧內有共同因式，才能分解，這就是分類的標準。

習 題

分解下列各式的因式：

1. $xa+xb+ma+mb$.　　2. ax^3+x^2+ax+1.

3. $x^3-a^2x^2-b^2x+a^2b^2$.

4. $8x^2+12ax+10bx+15ab$.

5. $x^3+bx^2-a^2x^2-a^2b$. 6. $xy(a^2+b^2)-ab(x^2+y^2)$.

7. $a^2bc+b^2c^2-ab^3-ac^3$. 8. $3x^4+4x^3-21x-28$.

9. $6a^4x^3+a^3x-6a^3x^3-a^2x^2$.

10. $x^3-(2a-b)x^2-(2ab-a^2)x+a^2b$.

11. $(2a^2+3y^2)x+(2x^2+3a^2)y$.

12. $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$.

13. $2a+(a^2-4)x-2ax^2$.

76. 利用乘算公式分解法

1. $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$. (公式1，公式2)

〔例1〕 求$x^2+4xy+4y^2$的因式.

$$x^2+4xy+4y^2=x^2+2(2x)y+(2y)^2=(x+2y)^2.$$

〔例2〕 求$9x^2-6xy+y^2$的因式。

$$原式=(3x)^2-2(3x)y+y^2=(2x-3y)^2.$$

〔例3〕 分解$4x^2-12xy+9y^2$

$$原式=(2x)^2-2(2x)(3y)+(3y)^2=(2x-3y)^2$$

〔例4〕 分解$2xy-x^2-y^2$.

$$原式=-(x^2-2xy+y^2)=-(x-y)^2.$$

習 題

分解下列各式的因式：

1. $x^2+2ax+a^2$. 2. $a^2-2ax+x^2$。

3. y^2+9+6y。 4. $16+x^2+8x$.

5. $4-4y+y^2$. 6. $b^2+b+\frac{1}{4}$.

7. $5x^2-10xy+5y^2$. 8. $-4a^2-9b^2-12ab$.

9. $-18a^2-27a^4-3$. 10. $x^3-2x^2y+xy^2$.

11. $-9x^3-36x^4-4x^5$. 12. $3a^4-6a^3b+3a^2b^2$.

13. $5ax^4-10a^2x^3+5a^3x^2$. 14. $-7a-7a^3+14a^2$.

15. $(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$.

16. $c^2+(a-b)^2-2(a-b)c$.

17. $2(x+y)(x-y)-(x-y)^2-(x+y)^2$.

18. $(x+y)^2-2(x^2-y^2)+(x-y)^2$.

19. $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$.

II. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. (公式 3)

〔例 1〕 分解x^2-b^2.

$$x^2-b^2=(x-b)(x+b).$$

〔例 2〕 分解$4x^2-9y^2$.

$$\text{原式}=(2x)^2-(3y)^2$$
$$=(2x+3y)(2x-3y).$$

〔例 3〕 分解$(x+b)^2-m^2$.

$$\text{原式}=(x+b+m)(x+b-m).$$

〔例 4〕 分解$b^2-x^2+4a(a-b)$.

分解因式時,常常遇到沒有共同因式,也不能用乘算公式分解牠,倘使把牠打亂重整理一次,就依然能分解了。如本例先去括弧,得

$$\text{原式}=b^2-x^2+4a^2-4ab$$
$$=b^2-4ab+4a^2-x^2$$

$$=(b-2a)^2-x^2$$

$$=(b-2a+x)(b-2a-x).$$

習　　題

分解下列各式的因式後，能化簡時，化簡之：

1. x^2-4.　　2. a^2-31.　　4. $1-25x^2$.

4. y^2-25x^2.　　5. $36x^2-25b^2$.　　6. p^2q^2-36.

7. $121a^2-81x^2$.　　8. $a^2b^4c^6-x^{16}$.　　9. $(b+c)^2-9a^2$.

10. $(x+y)^2-(x-y)^2$.

11. $x^2+4x+4-y^2-2y-1$.

12. $2xy-x^2-y^2+a^2+b^2-2ab$.

13. $x^4-x^2-9-2a^2x^2+a^4+6x$.

14. $x^4+4x^2y+16y^4$.

15. $(1+a^2)(1-b^2)-4ab$.

III. $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.　　（公式6，公式7）

〔例1〕　分解x^3+27y^3.

原式$=x^3+(3y)^3$

$$=(x+3y)(x^2-3xy+9y^2).$$

〔例2〕　分解$8x^3-125y^3$.

原式$=(2x)^3-(5y)^3$

$$=(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2).$$

習　　題

分解下列各式的因式：

1. x^3-y^3.　　2. x^3+8y^3.

3. $1-343x^3$.　　4. a^3b^3-512.

5. $x^3y^6+z^3$.　　6. x^9-27y^3.

7. $8a^6b^3+125x^6$.　　8. $x^3y^6-216z^{12}$.

9. $(a+b)^3+c^6$.　　10. $(a+b)^3+(x-y)^3$.

11. $(a+b)^3-(b-a)^3$.

IV. $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

我們知道一個式子加上一式，同時又減掉牠，這個式子的數值不變，利用這種辦法，我們就可以把許多驟然看去不能分解因式的代數式，變做a^2-b^2的形式，來分解牠們。

〔例1〕　分解$x^4+x^2y^2+y^2$的因式。

$$\begin{aligned}x^4+x^2y^2+y^4&=x^4+x^2y^2+y^4+x^2y^2-x^2y^2\\&=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2\\&=(x^2+y^2)^2-(xy)^2\\&=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)\\&=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).\end{aligned}$$

〔例2〕　分解$a^4-27a^2b^2+b^4$的因式.

本例不必加減，只要把中項分做$-2a^2b^2$和$-25a^2b^2$，就對了。

$$\begin{aligned}a^4-27a^2b^2+b^2&=a^4-2a^2b^2+b^4-25a^2b^2\\&=(a^2-b^2)^2-(5ab)^2\\&=(a^2+5ab-b^2)(a^2-5ab-b^2).\end{aligned}$$

〔例3〕　分解a^4+4的因式.

本例若變做$(a^2)^2+2^2$，仍然是不能分解；因為由剩餘定理，我們知道a^2+b^2，無論用什麼式子都除不盡牠。所以須用加減$4a^2$的辦

法，把本例變做a^2-b^2一樣的形式，才能分解。

$$
\begin{aligned}
a^4+4 &= a^4+4a^2+4-4a^2 \\
&= (a^2+2)^2-(2a)^2 \\
&= (a^2-2a+2)(a^2+2a+2).
\end{aligned}
$$

習 題

求下列各式的因式：

1. x^4+x^2+1.　　2. $x^8+x^4y^4+y^8$.

3. x^4-11x^2+1.　　4. $x^4+6x^2y^2+25y^4$.

5. x^8+x^4+1.　　6. $x^4-23x^2y^2+y^4$.

7. $x^8-7x^4y^2+y^4$.　　8. x^4-27x^2+1.

9. x^8+16.　　10. x^4-3x^2+1.

77. 二次三項式分解法一

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b). \qquad \text{（公式8）}$$

I.　　首項＝兩因式首項的乘積；

II.　　末項＝兩因式末項的乘積；

III.　中項的係數＝兩因式末項的代數和。

故欲分解二次三項式x^2+px+q爲因式時，祗須把末項q分爲a，b兩因式，使牠們的代數和等於中項的係數p，則此式即可分解爲$(x+a)$，$(x+b)$兩因式。

上邊的分解法，只能適用於二次項的係數是1時，要注意！

〔例1〕 分解

$$\begin{array}{cccc}
 & x^2 \,+\, 12x & +35 & \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
 & x\times x & 7\times 5 & \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
 & (x+7) & (x\ +5) & \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
\because & 7 \quad + & 5 & =12
\end{array}$$

$$\therefore\quad x^2+12x+35=(x+7)(x+5).$$

〔例2〕 分解

$$\begin{array}{cccc}
 & x^2 \,-\, 10x & +24 & \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
 & x\times x & 4\times 6 & \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
 & (x\ +4) & (x\ +6) & \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
\because & 4 \quad + & 6 & =+10
\end{array}$$

$$\therefore\quad x^2-10x+24=(x+4)(x+6).$$

$$\begin{array}{cccc}
 & x^2 \,-\, 10x & +24 & \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
 & x\times x & (-4)\times(-6) & \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
 & (x\ -4) & (x\ -6) & \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
\because & -4 & -3 & =-10
\end{array}$$

$$\therefore\quad x^2-10x+24=(x-4)(x-6).$$

由例一，知：

中末兩項都是正時，末項要分爲兩個正的。

由例二，知：

中項是負，末項是正時，末項要分爲兩個負的。

〔例3〕分解 $x^2+5x-24$。

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{x^2+5x-24} \\
\downarrow & & \downarrow \\
x\times x & & -8\times 3 \\
\downarrow & & \downarrow \\
(x\ -8) & & (x\ +3) \\
\downarrow & & \downarrow \\
-8 & & +\ 3=-5 \\
 & & \neq 5
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{x^2+5x-24} \\
\downarrow & & \downarrow \\
x\times x & & 3\times 8 \\
\downarrow & & \downarrow \\
(x\ -3) & & (x\ +8) \\
\downarrow & & \downarrow \\
-3 & & +8=5
\end{array}
$$

$$\therefore\quad x^2+5x-24=(x-3)(x+8).$$

由例三，知：

中項是正，末項是負時，末項要分爲一正一負，還要取絕對値大的爲正。

〔例4〕　分解$x^2-2x-24$。

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{x^2-2x-24} \\
\downarrow & & \downarrow \\
x\times x & & -4\times 6 \\
\downarrow & & \downarrow \\
(x\ -4) & & (x\ +6) \\
\downarrow & & \downarrow \\
-4 & & +6=2 \\
 & & =-2
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{x^2-2x-24} \\
\downarrow & & \downarrow \\
x\times x & & -6\times 4 \\
\downarrow & & \downarrow \\
(x\ -6) & & (x\ +4) \\
\downarrow & & \downarrow \\
-6 & & +4=-2
\end{array}
$$

$$\therefore\quad x^2-2x-24=(x-6)(x+4).$$

由例四，知：

中末兩項都是負時，末項要分爲一正一負，還要取絕對値大的爲負。

習　　題

分解下列各式的因式：

1.　x^2-x-2.　　　　2.　x^2-x-6.

3.　x^2+2x-3.　　　　4.　$x^2+3x-40$.

5. $x^2-4x-12$.　　　6. $x^2+9x-36$.

7. $x^2-22x+121$.　　　8. $110-x-x^2$.

9. $240-x-x^2$.　　　10. $x^4-a^2x^2-462a^4$.

11. $x^4-a^2x^2-2a^4$.　　　12. $x^4+162x+6561$.

13. $m^2-22mn+105n^2$.　　　14. $144-24ax+a^2x^2$.

15. $240+14ay-a^2y^2$.　　　16. $x^2+2ax+a^2-b^2$.

17. $x^2-2cx+c^2-d^2$.　　　18. $x^2+2(a+b)x+(a+b)^2$.

19. $380-x-x^2$.　　　20. $1+2x+x^2-c^2$.

78. 二次三項式分解法二

$$acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d).\qquad \text{（公式 9）}$$

$$\begin{array}{c} a \quad\; b \\ \times \\ c \quad\; d \\ \hline bc+ad \end{array}$$

由上式，知：

1. x^2的係數＝兩因式x係數的乘積；

2. 末項＝兩因式末項的乘積；

3. x的係數＝兩因式x的係數與兩末項交互相乘的代數和。

分解法：

I. 把x^2的係數分成兩因式，寫在一行。

II. 把末項分成兩因式，寫在另一行（在前行的右邊）。

III. 用直線對角連之，在一直線上兩式相乘，牠們的代數和，假如等於x的係數，即合所求。

IV. 由左向右，取上一列的兩個數，作爲一個因式x的係數和

絕對項；取下一列的兩個數，作爲其他一個因式 x 的係數和絕對項。

這法子，又叫做十字分解法。

〔例 1〕 分解$3x^2+17x+24$.

把3分解開，得$3=3\times1$；把24分解開，得$24=3\times8=4\times6=2\times12=1\times24$.

取3分解的因式寫爲一行；取24的一組因式另寫一行，用IV求合所求的因式，程序如下。

$$\begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \\ \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 6 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{18+4=22} \end{array} & \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & 12 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{36+2=38} \end{array} & \begin{array}{cc} 3 & 8 \\ 1 & 3 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{9+8=17} \end{array} \end{array}$$

由上邊的試驗，知(3)合所求。

$$\therefore\quad 3x^2+17x+24=(3x+8)(x+3).$$

〔例 2〕 分解$7x^2-19x-6$.

$7=7\times1$；

$-6=2\times(-3)$.

$$\begin{array}{cc} 7 & 2 \\ 1 & -3 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-21+2=-19} \end{array}$$

$$\therefore\quad 7x^2-19x-6=(7x+2)(x-3).$$

習　　題

分解下列各式的因式：

1. $12x^2-x-20$.　　2. $35x^2+x-12$.

3. $6x^2-11x-2$.　　4. $15x^2+x-2$.

5. $16-24x-27x^2$　　6. $8x^2-38x+35$.

7. $3x^2+41x+26$. 8. $18x^2-33x+5$.

9. $20-9x-20x^2$. 10. $4x^2+6x-4$.

11. $15x^2-77x+10$. 12. $12x^2-26xy-10y^2$.

13. $2x^2-5xy+3y^2$. 14. $24x^2-29xy-4y^2$.

15. $16a^2+42ab+27b^2$. 16. $6(x+y)^2-11(x+y)-2$.

17. $16m^2-218mn+27n^2$. 18. $(a+b)x^2+(a-2b)x-3b$.

19. $mnx^2+(mb+nc)x+bc$. 20. $bcx^2+(bp-cq)x-pq$.

21. $\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{3}$. 22. $\frac{2}{5}x^2+2x+2\frac{1}{2}$.

23. $0.15x^2-0.11x+0.02$.

79. 分解因式的定理

把剩餘定理(二)倒轉過來，我們就可得分解因式的定理：

含x的多項式，若以a代x，牠的值爲零時，則$x-a$必爲牠的因式(以$-a$代x，牠的值爲零時，則$x+a$必爲牠的因式)。

〔例 1〕 分解x^3-3x+2.

絕對項$+2$的因數是-1，-2，$+1$和$+2$.

我們先用-1和-2代原式中的x，原式的値都不爲零；故知-1和-2沒有用處，再以$+1$代x，則

$$x^3-3x+2=1^3-3\times 1+2=0.$$

故知原式含有因式$x-1$.

依剩餘定理(二)，知道$x-1$能除盡原式，除之，得商式爲x^2+x-2，較原式低一次。

$$\therefore\quad x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$$
$$=(x-1)(x-1)(x+2)$$
$$=(x-1)^2(x+2).$$

由是得分解含 x 三次以上的多項式的因式法則如下：

I. 求絕對項的因數。

II. 用各因數代多項式中的x,看牠的値能不能等於零(代進去不能使多項式爲零的因數，就棄掉不用)。

III. 某因數a代進去能使多項式爲零，那末多項式就含有$x-a$這個因式。

IV. 用求得的一次二項式$x-a$,除多項式，得一個較原式低一次的商式。

V. 照這樣分解商式的因式，分解到不能再分解(即成了質因式)時爲止。

〔例 2〕 分解x^3-7x-6的因式。

由分解因式的定理，知道$x-1$爲原式的一個因式， $x-1$除原式，得x^2+x-6.

$$\therefore \quad x^3-7x-6=(x-1)(x^2+x-6).$$

依§77的分解法分解x^2+x-6,得$(x-2)(x+3)$.

$$\because \quad x^3-7x-6=(x-1)(x-2)(x+3).$$

〔例 3〕 分解$x^3+x^2+17x+15$的因式。

因爲原式中的各係數的和爲$1+1-17+15=0$,故知用1代x，則原式$=0$.依分解因式的定理，知$x-1$爲一個因式，由此，得

$$x^3+x^2-17x+15=(x-1)(x^2+2x-15)$$
$$=(x-1)(x-3)(x+5).$$

這個例用分類分解法亦能分解，讀者自行練習。

習 題

分解下列各式的因式：

1. x^3+x+30.　　2. x^3-4x^2+8.

3. x^3+x^2+x+1.　　4. $x^3+6x^2+11x+6$.

5. x^3+x^2-4x-4.　　6. $x^3+7x^2-14x+8$.

7. $2x^3-3x^2-2x+3$.　　8. $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$.

80.　$a^n \pm b^n$的分解法

$$\because \quad (a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3,$$

$$(a\pm b)(a^3\mp a^2b+ab^2\mp b^3)=a^4-b^4,$$

$$(a\pm b)(a^4\mp a^3b+a^2b^2\mp ab^3+b^4)=a^5\pm b^5.$$

由上得 n 爲奇數時，

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1});$$

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

n爲偶數時，

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

或　$$=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots ab^{n-2}-b^{n-1});$$

a^n+b^n 不含有因式$a+b$或因式$a-b$.

〔例 1〕　分解a^6-1.

$$x^6-1=x^6-1^6=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

或　$$=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$$

$$=(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)$$

$$=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

〔例 2〕　分解x^5+y^5.

$$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4).$$

〔例 3〕　分解a^5-b^5.

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4).$$

習　　題

分解下列各式的因式：

1. x^4-1.　2. x^4+1.　3. x^5+1.

4. x^6+y^6.　5. x^7-y^7.　6. a^3+b^3.

7. m^9-n^9.　8. $(ab)^{10}-c^{10}$.

綜括前面諸法，一式之因式分解不外下列幾個步驟：

(1) 如各項有公因式，先括出之；再依別法分解餘一式。

(2) 將其式各項分爲幾群，使各群有一公因式，而括出之；如此式有一因式已知（見下因式定理），則可依此因式分其式各項爲若干群，而括出公因式。

(3) 如其式爲完全平方，則直接利用公式$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$而分解因式；如爲不完全平方，則於式中同加減一式，或將某項分裂配成完全平方，而全式變爲a^2-b^2之形，即可分解因式。

(4) 如其式爲二次三項式；則由x^2+px+q，求出a,b兩式，務使$ab=q$，且$a+b=q$，即可分解爲$(x+a)(x+b)$矣；又或由ax^2+bx+c，求出l,l',m,m'四式，務使$ll'=a$，$mm'=c$，且$lm'+l'm=b$，即可分解爲$(lx+m)(l'x+m')$。此外，二次式亦可於式中同加減一式，使成a^2-b^2之形而分解因式，此爲一般分解法，前二法爲觀察法。

(5) 如其式爲一元高次式，則用因式定理，先將絕對項分解因式，一一代入原式x中，試驗何者能使原式爲零（假設爲a），則$x-a$爲原式之一因式；再用除法，或用分群法，以得他一因式；

如有因式，再分解之。

(6) 如其式為高次二項式，則用 $a^n \pm b^n$ 公式，先括出 $a \pm b$ 因式(注意 n 為奇數或為偶數)，再依別法分解餘一式。

(7) 有時一式帶有括弧而不能分解；如各括弧內文字僅符號相反，則將某括弧前符號改變；使成相同因式；否則，將括弧去掉，依分群法，括出公因式，或用別法分解因式。

複 習 題

分解下列各式的因式：

1. x^3-x^2-5x+6.　　2. x^3-7x+6.

3. $(a+b)^3+c^3$.　　4. $(x+y)^3-(x-y)^3$.

5. $(a-b)x-(x^2-ab)$.　　6. $4a(3x+8a)-27x^2$.

7. $24+2x(1-x)$.　　8. $x^2(y-z)+y^2(z-x)$.

9. $xy(a-b+c)-yz(b-c-a)+zx[(b-c)^2-a^2]$.

10. $a(a^2-1)-b(b^2-1)+ab(a-b)$.

11. $a^3+b^3+c^3-3abc$.

〔示意〕 於式中加減 $3a^2b+3ab^2$。

第　十　章

最高公因式和最低公倍式

81　最高公因式

同時能除盡幾個代數式的式子，叫做這幾個代數式的公因式。

(1)　$12x^3=3\times4\times x^3$；

$16x^4=4\times4\times x^3\times x$.

上邊兩式的公因式是：

$2x$，

$4x$，

$2x^2$，

$2x^3$，

$4x^3$.

(2)　$x^4-16=x^4-4^2$

$=(x^2+4)(x^2-4)$

$=(x^2+4)(x+2)(x-2)$；

$x^2-4=(x+2)(x-2)$.

上邊兩式的公因式是：

$x+2$，

$x-2$，

x^2-4.

上邊的公因式中次數有高的，有低的；係數有大的，有小的，次數最高並且係數最大的，叫做最高公因式，簡寫爲H.C.F.

(1)的H.C.F.是$4x^3$，(2)的H.C.F.是x^2-4.

82.　求法一

I.　把所與各式分解爲質因式連乘積。

II.　選取因式：

(i) 同因式只選取一個方次最低的；

(ii) 不同的，都不選。

III. 選取後，連乘之，即是H.C.F.

〔例1〕 求$35a^3b^2c$和$21a^2b^3d$的H.C.F.

$$35a^3b^2c=5\times7\times a^3\times b^2\times c;$$

$$21a^2b^3d=3\times7\times a^2\times b^3\times d.$$

選取因式： 7是公共的，故選取； a^2和b^2是公共因式中，方次最低的，故選取；c和d不是公共的因式，故不選取。

$$\therefore\quad \text{H.C.F.}=7\times a^2\times b^2=7a^2b^2.$$

〔例2〕 求$2x^4-12x^3+18x^2$與$4x^5-36x^3$的H.C.F.

$$2x^4-12x^3+18x^2=2x^2(x^2-6x+9)$$

$$=2x^2(x-3)^2;$$

$$4x^5-36x^3=4x^3(x^2-9)$$

$$=2^2x^3(x+3)(x-3).$$

選取因式： 2和 x^2是方次最低的公因式，故選取；$x-3$是方次最低的公因式；故選取。

$$\therefore\quad \text{H.C.F.}=2x^2(x-3).$$

〔例3〕 求下邊三個式子的H.C.F.：

1. $ax^2+2a^2x+a^3$, 2. $2a^2x^2-4a^3x-6a^4$,

3. $3a^3x^2+6a^4x+3a^5$.

$$ax^2+2a^2x+a^3=a(x^2+2ax+a^2)$$

$$=a(x+a)^2;$$

$$2a^2x^2-4a^3x-6a^4=2a^2(x^2-2ax-3a^2)$$

$$=2a^2(x+a)(x-3a);$$

$$3a^3x^2+6a^4x+3a^5=3a^3(x^2+2ax+a^2)$$
$$=3a^3(x+a)^2.$$

選取因式：　a和$x+a$是方次最低的公因式，故都選取。

$\therefore$　H.C.F.$=a(x+a)$.

習　　題

求下列各式的H.C.F.：

1. a^2bc, ab^2c, abc^2.
2. $12m^5n^4, 16m^2n^5p^2$.
3. a^2+ab, a^2-b^2.
4. $2x^2-2xy, x^3-x^2y$.
5. $a^3b-ab^3, a^5b^2-a^2b^5$.
6. a^2-4x^2, a^2+2ax.
7. a^2bx+ab^2x, a^2b-b^3.
8. $4x^2+2xy, 12x^2y-3y^3$.
9. $x^2+x, (x+1)^2, x^3+1$.
10. $a^2-x^2, a^2-ax, a^2x-ax^2$.
11. $x^2-2xy+y^2, (x-y)^3$.
12. x^3+a^2x, x^4-a^4.
13. x^2+3x+2, x^2-4.
14. $x^2-x-20, x^2-9x+20$.
15. $x^2-18x+45, x^2-9$.
16. $2x^2-7x+3, 3x^2-7x-6$.
17. $12x^2+x-1, 15x^2+8x+1$.
18. $2x^2-x-1, 3x^2-x-2$.
19. $2x^2+9x+4, 2x^2+11x+5, 2x^2-3x+2$.
20. $3x^4+8x^3+4x^2, 3x^5+11x^4+6x^3, 3x^4+5x^3+2x^2$.

83. 求法二

x^2-a^2和$2(x-a)$的H.C.F.是$x-a$.

假設用y(不是兩式的因式)乘x^2-a^2，得x^2y-a^2y.

x^2y-a^2y和$2(x-a)$的H.C.F.仍是$x-a$.

所以求H.C.F.時，只要不是各式的因式，先乘任一式，與H.C.F.沒有關係。

(1)　$2x^2+4x+2=2(x^2+2x+1)$

$$=2(x+1)^2;$$

(2)　$x^2-2x-3=(x+1)(x-3).$

$$\therefore \quad \text{H.C.F.}=x+1.$$

假設先用2除(1)，得x^2+2x+1，再求H.C.F.知仍爲$x+1$.所以在未求H.C.F.以前，只要不是公共因式，約去後與H.C.F.沒有關係。

同理，用任一式中不含的因式，乘其餘的式子，與H.C.F.沒有關係。

如兩式不易分解時，用輾轉互除法求之，最後能除盡的除式，即爲兩式的H.C.F.

輾轉互除法：

1. 用低次式作除式，高次式作被除式。

2. 用第一餘式除除式。

3. 用第二餘式除第一餘式。

4. 如此繼續互除，除到餘式爲零時，則此最後除式即兩式的H.C.F.

5. 在互除的運算中，被除式或除式，可以任用數字乘或除以便利運算。

6. 在互除的運算中，如遇到除式，爲不含文字的式子時，即是兩式無H.C.F.

例如：　求 $12x^3-x^2-30x-16$與 $6x^3-2x^2-13x-6$的H.C.F.

F.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
2x & 6x^3-2x^2-13x-6 & 12x^3-\ \ x^2-30x-16 & 2 \\
 & 6x^3-8x^2-\ \ 8x\quad\ & 12x^3-4x^2-26x-12 & \\
\hline
2 & 6x^2-\ \ 5x-6 & 3x^2-\ \ 4x-\ \ 4 & x \\
 & 6x^2-\ \ 8x-8 & 3x^2+\ \ 2x\qquad & \\
\hline
 & 3x+2 & -\ \ 6x-\ \ 4 & -2 \\
 & & -\ \ 6x-\ \ 4 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ H.C.F. $=3x+2$.

求三個以上代數式的H.C.F.時，先取第一，第二兩式來求，次以求得的H.C.F.和第三式再求，如此類推，最後所得的 H.C.F.，即原來各代數式的H.C.F.

習　　題

求下列各式的H.C.F.：

1. $x^3+2x^2-13x+10, x^3+x^2-10x+8$.

2. $x^3-5x^2-99x+40, x^3-6x^2-86x+35$.

3. $x^3+2x^2-8x-16, x^3+3x^2-8x-24$.

4. $x^3+4x^2-5x-20, x^3+6x^2-5x-30$.

5. $x^3-x^2-5x-3, x^3-4x^2-11x-6$.

6. $x^3+3x^2-8x-24, x^3+3x^2-3x-9$.

7. $a^3-5a^2x+7ax^2-3ax^3, a^3-3ax^2+2x^3$.

8. $x^4-2x^3-4x-7, x^4+x^3-3x^2-x+2$.

9. $2x^3-5x^2+11x+7, 4x^3-11x^2+25x+7$.

10. $2x^3+4x^2-7x-14, 6x^3-10x^2-21x+35$.

11. $3x^4-3x^3-2x^2-x-1, 9x^4-3x^3-x-1$.

12. $2x^4-2x^3+x^2+3x-6, 4x^4-2x^3+3x-9$.

13. $3x^3-3ax^2+2a^2x-2a^3, 3x^3+12ax^2+2a^2x+8a^3$.

14. $2a^3-9a^2x+9ax^2-7x^3, 4x^3-20a^2x+20ax^2-16x^3$.

15. $10x^3+25ax^2-5a^3, 4x^3+9ax^2-2a^2x-a^3$.

16. $x^5-x^3-x+1, x^7+x^6+x^4-1$.

17. $1+x+x^3-x^5, 1-x^4-x^6+x^7$.

18. $6-8a-32a^2-18a^3, 20-35a-95a^2-40a^3$

19. $3x^5-5x^3+2, 2x^5-5x^2+3$.

20. $4x^5-6x^3-28x, 6x^4+10x^3-17x^2-35x-14$.

84. 最低公倍式

同時能被幾個代數式除盡的式子，就叫做這幾個代數式的公倍式。

1. x和$3x^2$的公倍式，是：

$$3x^2, \qquad 6x^3,$$
$$12x^6, \qquad 15x^6,$$
$$\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots.$$

但次數最低，係數最小的是$3x^2$，把這個式子叫做x和$3x^2$的最低公倍式，簡寫爲L.C.M.

2.
$$4x^2y-y=y(4x^2-1)$$
$$=y(2x+1)(2x-1);$$
$$2x^2-x=x(2x-1).$$

上邊兩式的公倍式，是：

$$xy(2x+1)(2x-1),$$
$$2x^2y^2(2x+1)(2x-1),$$

$$3x^2y^2(2x+1)^2(2x-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

但L.C.M $=xy(2x+1)(2x-1)$.

85.　求法一

I.　把所與各式分解爲質因式連乘積。

II.　選取因式：

(i)　選取一切不相同的因式；

(ii)　如有相同的因式，只取其方次最高者。

III.　選取後連乘之，即是L.C.M.

〔例1〕　求$24x^2y$和$72bx^3y$的L.C.M.

$$24x^2y=3\times2^3x^2y;$$

$$72bx^3y=3^2\times2^3bx^3y.$$

選取因式：　2^3，b和y都選取；3^2和x^3爲同因式中次數最高的，故選取。

$$\therefore\quad \text{L.C.M.}=2^3\times3^2\times b\times x^3\times y$$

$$=72bx^3y.$$

〔例2〕　求$3a^2+9ab$和$a^3+6a^2b+9ab^2$的L.C.M.

$$3a^2+9ab=3a(a+3b);$$

$$a^3+6a^2b+9ab^2=a(a^2+6ab+9b^2)$$

$$=a(a+3b)^2.$$

選取因式：　3，a和$(a+3b)^2$被選取。

$$\therefore\quad \text{L.C.M.}=3a(a+3b)^2.$$

86.　求法二

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2);$$

$$x^2-1=(x-1)(x+1).$$

$$\therefore\quad \text{H.C.F.}=x-1.$$

$$\text{L.C.M.}=(x-1)(x+1)(x+2).$$

假如原式相乘，用牠們的H.C.F.除之，結果得

$$\frac{(x^2-3x+2)(x^2-1)}{x-1}=(x^2-3x+2)(x+1)$$

$$=(x-1)(x+2)(x+1).$$

和牠們的L.C.M.相等，由此得求法二：

兩式相乘，用牠們的H.C.F.除之，即得牠們的L.C.M.

例如： 知$x-4$是x^2-5x+4與x^2-6x+8的H.C.F.，求牠們的L.C.M.

$$\text{L.C.M.}=\frac{(x^2-5x+4)(x^2-6x+8)}{x-4}$$

$$=\frac{(x-4)(x-1)(x-2)(x-4)}{x-4}$$

$$=(x-1)(x-2)(x-4).$$

上題用求法一，仍得L.C.M.$=(x-1)(x-2)(x-4)$.

求三個以上代數式的L.C.M.時，先求第一，第二兩式的L.C.M.；次以求得的L.C.M.和第三式再求，如此類推，最後所得的L.C.M.即原來各代數式的L.C.M.

習　　題

求下列各式的L.C.M.：

1. x, x^2+x.　　　　2. x^2, x^2-3x.

3.　$3x^2, 4x^2+8x$.　　4.　$21x^3, 7x^2(x+1)$.

5.　x^2-1, x^2+x.　　6.　$a^2+ab, ab+b^2$.

7.　$4x^2y, 2x^2+x$.　　8.　$6x^2-2x, 9x^2-3x$.

9.　x^2+4x+4, x^2+5x+6.　10.　x^2-5x+4, x^2-6x+8.

11.　$x^2-x-6, x^2+x-2, x^2-4x+3$.

12.　$x^2+x-42, x^2-11x+30, x^2+2x-35$.

13.　$8x^2-38xy+35y^2, 4x^2-xy-5y^2, 2x^2-5xy-7y^2$.

14.　$(3x-5x^2)^2, 6-7x-5x^2, 4x+4x^2+x^3$.

15.　$m^4+m^2n^2+n^4, m^3n+n^4, (m^2-mn)^3$.

16.　假如知$4x-5$，是$4x^3+7x^2-3x-15$與$8x^4-6x^3-x^2+15x-25$的H.C.F.；求L.C.M.

17.　假如知x^2+2x-3，是$2x^4+x^3-20x^2-7x+24$與$2x^4+3x^3-13x\ -7x+15$的H.C.F.；求L.C.M.

18.　假如知$2x+1$，是$6x^3+x^2-5x-2$與$6x^3+5x^2-3x-2$的H.C.F.；求L.C.M.

19.　先求$6x^2-13x+6, 2x^2+5x-12$與$6x^2-x-12$的H.C.F.；再求L.C.M.

20.　先求$4x^3-10x^2+4x+2$與$3x^4-2x^3-3x+2$的H.C.F.再求L.C.M.

第十一章

分　式

87. 分式

算術上的分數，是表兩數相除的商數，例如$\frac{2}{3}$，就是3除2的意思。代數學上的分式，也是表兩代數式相除的商式，被除式叫做分子，除式叫做分母。例如$\frac{x^2-3}{x+5}$，也是$x+5$除x^2-3的意思，x^2-3是分子，$x+5$是分母，所以算術上的分數的一切法則和原理，都能應用到代數學上來。

88. 約分

I. 定理

在算術上，如　　$\frac{4}{6}=\frac{4\div 2}{6\div 2}=\frac{2}{3}$.

同理，　　$\frac{mc}{md}=\frac{mc\div m}{md\div m}=\frac{c}{d}$,

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x-1}{x-3}.$$

故知分式的分子和分母用同式(不等於零)除之，分式的數值不變。

11.　約分

把分子和分母的公共因式約去，叫做約分。

由上邊定理，知任何分式，只要分子和分母有公共因式，都可以約分，與牠的數值沒有關係。

用分子和分母的H.C.F.去除，才能把公共因式約完，故得約分法如下：

I.　求分子和分母的H.C.F.

II.　用求得的H.C.F.除分子和分母。

〔例 1〕　化簡 $\frac{12ax}{16ay}$.

分子和分母的H.C.F.是$4a$，用$4a$除分子和分母，即得結果。

$$\therefore\ \frac{12ax}{16ay}=\frac{3x}{4y}.$$

〔例 2〕　化簡 $\frac{x^2+10x+21}{x^2-2x-15}$.

$$x^2+10x+21=(x+3)(x+7);$$
$$x^2-2x-15=(x+3)(x-5).$$
$$\therefore\ \text{H.C.F.}=x+3.$$
$$\therefore\ \frac{x^2+10x+21}{x^2-2x-15}=\frac{(x+3)(x+7)}{(x+3)(x-5)}=\frac{x+7}{x-5}$$

約分後的分式，叫做簡分式。

【練習】　指出下邊運算的錯誤：

1.　$\frac{x^2-3}{x^2-5}=\frac{\cancel{x^2}-3}{\cancel{x^2}-5}=\frac{3}{5}$.

2.　$\frac{x^2-a^2-1}{x^2-a^2-2}=\frac{\cancel{(x-a)(x+a)}-1}{\cancel{(x-a)(x+a)}-2}=\frac{1}{2}$

3. $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+5x-6}=\dfrac{\cancelto{1}{x^2}-2\cancel{x}-\cancelto{1}{3}}{\cancel{x^2}+5\cancel{x}-\cancelto{2}{6}}=\dfrac{1-2-1}{5-2}=-\dfrac{2}{3}$

4. 約分是約去分子和分母的公因式，還是約去分子和分母的同類項？

習　　題

化簡下列各分式：

1. $\dfrac{3x^2y}{6xy^2}$.　　2. $\dfrac{4abc}{8bc^2}$.

3. $\dfrac{xy^2z}{x^2yz}$.　　4. $\dfrac{92m^2n^2p^2}{115m^4np}$.

5. $\dfrac{5ab(x^2-y^2)}{15(abx+aby)}$.　　6. $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-15}$.

7. $\dfrac{-x^2+6x-5}{x^2-9x+8}$.　　8. $\dfrac{2x^2-7x+3}{3x^2-7x-6}$.

9. $\dfrac{x^2-5x}{x^2-4x-5}$.　　10. $\dfrac{3x^5+11x^4+6x^3}{3x^4-16x^3-12x^2}$.

11. $\dfrac{a^3x-a^2bx-6ab^2x}{a^2bx^2-4ab^2x^2+3b^3x^2}$.　12. $\dfrac{5x^3+2x^2-15x-6}{7x^3-4x^2-21x+12}$.

13. $\dfrac{4x^4-21x^2+25}{4x^4-9x^2+30x-25}$.

14. $\dfrac{3x^3+27ax^2+78a^2x-72a^3}{2x^3+10ax^2-4a^2x-48a^3}$.

15. $\dfrac{ax^3-5a^2x^2-99a^3x+40a^4}{x^4-6ax^3-86a^2x^2+35a^3x}$.

89. 通分

I. 定理

在算術上，知　　$\dfrac{2}{3}=\dfrac{2\times4}{3\times4}=\dfrac{8}{12}$.

同理，　　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{am}{bm}$；$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a(m+n)}{b(m+n)}$.

故知分式的分子和分母，用同式（不等於零）乘之，分式的數值不變。

II. 通分

把許多分式的分母變成一樣的，還要各分式的數值不變，就叫做通分。

例如：　要把$\dfrac{3}{4x}$和$\dfrac{5}{3x^2}$通分，就是要把分母變成一樣的。

由上定理，知　　$\dfrac{3}{4x}=\dfrac{3\times3x}{4x\times3x}=\dfrac{9x}{12x^2}$.

$$\frac{5}{3x^2}=\frac{5\times4}{3x^2\times4}=\frac{20}{12x^2}.$$

$12x^2$恰是$4x$和$3x^2$的L.C.M，第一分式分子上應乘的數是牠自己的分母除$12x^2$所得的商$3x$，同樣第二分式分子上應乘的數是4，故得通分法如下：

I. 求諸分母的L.C.M.作爲公分母。

II. 用每一分母除公分母，除得的商乘牠的分子。作爲新分子。

〔例 1〕　把$\dfrac{a}{a-b}$和$\dfrac{b}{a+b}$通分.

$a-b$和$a+b$的L.C.M.是a^2-b^2，故用a^2-b^2作公分母。

$a-b$除a^2-b^2，得$a+b$.

$$\therefore \quad \frac{a}{a-b}=\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}.$$

$a+b$除a^2-b^2，得$a-b$.

$$\therefore \quad \frac{b}{a+b}=\frac{b(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

〔例2〕 把$\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$，$\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$和$\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$通分。

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2);$$

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3);$$

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

$$\text{L.C.M.}=(x-1)(x-2)(x-3).$$

$$\therefore \quad 公分母=(x-1)(x-2)(x-3).$$

用第一分式的分母除公分母，得$x-3$.

$$\therefore \quad \frac{x+3}{x^2-3x+2}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{x^2-9}{(x-1)(x-2)(x-3)};$$

用第二分式的分母除公分母，得$x-2$,

$$\therefore \quad \frac{x+2}{x^2-4x+3}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{x^2-4}{(x-1)(x-2)(x-3)};$$

用第三分式的分母除公分母，得$x-1$,

$$\therefore \quad \frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

習 題

把下列各組分式通分：

1. $\dfrac{2x}{x+y}$和$\dfrac{3x}{x^2-y^2}$. 2. $\dfrac{5}{3a-3}$和$\dfrac{7}{4a+4}$.

3. $\frac{a}{yz}$，$\frac{b}{zx}$和$\frac{c}{xy}$。 4. $\frac{6}{3a+5b}$和$\frac{9}{2a-3b}$.

5. $\frac{1}{(a-b)(a-c)}$，$\frac{1}{(a-b)(b-c)}$和$\frac{1}{(a-c)(b-c)}$。

6. $\frac{a-3b}{a^2+3ab+2b^2}$和$\frac{a-b}{a^2+5ab+6b^2}$.

7. $\frac{3-2x}{2x+3}$，$\frac{12}{4x^2-9}$和$\frac{2x+3}{2x-3}$。

8. $\frac{1}{x^2-x-2}$，$\frac{1}{x^2+x-2}$和$\frac{8x}{x^2-4}$。

9. $\frac{1}{(a+b)(a+2b)}$，$\frac{1}{(a+b)(a+3b)}$和$\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}$。

10. $\frac{3}{x^2-1}$，$\frac{4}{2x+1}$和$\frac{4x+2}{2x^2+3x+1}$.

11. $\frac{x}{x^2+3x+2}$，$\frac{2}{x^2+9x+14}$和$\frac{12}{x^2+10x+21}$.

12. $\frac{1}{a^2-ab+b^2}$，$\frac{1}{a^2+ab+b^2}$和$\frac{1}{a^4+a^2b^2+b^4}$.

13. $\frac{1}{x+1}$，$\frac{1}{(x+1)(x+2)}$和$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2}$.

90. 分式加減法

(a) 分母相同時的加減法：

I. 仍用相同的分母做分母。

II. 如分式相加，就把分子相加做分子；如分式相減，就把分子相減做分子。

III. 化簡所得的結果。

〔例 1〕 $\frac{a}{d}+\frac{b}{a}=\frac{a+b}{d}$.

〔例 2〕 $\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$.

〔例 3〕 $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-2b}{a-b}=\frac{a+b-(a-2b)}{a-b}$

$$=\frac{a+b-a+2b}{a-b}$$

$$=\frac{3b}{a-b}$$

(b) 分母不同時的加減法：

I. 通分

II. 用(a)的方法運算。

〔例 1〕 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{ba}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

〔例 2〕 $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{ba}=\frac{ad-bc}{bd}$

〔例 3〕 $\frac{10}{9-x^2}-\frac{2}{3+x}-\frac{1}{3-x}=\frac{10}{9-x^2}-\frac{2(3-x)}{9-x^2}-\frac{3+x}{9-x^2}$

$$=\frac{10-2(3-x)-(3+x)}{9-x^2}$$

$$=\frac{10-6+2x-3-x}{9-x^2}$$

$$=\frac{1+x}{9-x^2}.$$

(c) 整式與分式的加減法：

I. 用分母乘整式。

II. 如係相加，就把所得乘積加到分子上做新分子；如係整式減分式時，就把分子從所得乘積中減去做新分子；如係分式減整

式時，就把所得乘積從分子中減去做新分子。

III．化簡所得的結果。

〔例 1〕 $a+\dfrac{c}{b}=\dfrac{ab+c}{b}$.

〔例 2〕 $a-\dfrac{c}{b}=\dfrac{ab-c}{b}$.

〔例 3〕 $$(x+1)-\frac{x^2-3}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)-(x^2-3)}{x-1}$$

$$=\frac{x^2-1-x^2+3}{x-1}=\frac{2}{x-1}.$$

〔例 4〕 $$\frac{x^2-3}{x-1}-(x+1)=\frac{x^2-3-(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$=\frac{x^2-3-x^2+1}{x-1}=-\frac{2}{x-1}.$$

【練習】 (a) 指出下列各式的錯誤：

1. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}$.

2. $3x-\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{3x-2x-1}{x-1}=\dfrac{x-1}{x-1}=1$.

3. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1+1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{2}{x^2-1}$.

(b) 試從 $\dfrac{2a}{x+1}$ 減去 $2a$.

習　　題

計算下列各式：

1. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}$.　　2. $\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x-4}$.

3. $\dfrac{a}{x+a}-\dfrac{b}{x+b}$.　　　4. $\dfrac{x+3}{x+4}-\dfrac{x+1}{x+2}$.

5. $\dfrac{x+a}{x-2a}-\dfrac{x^2+2a^2}{x^2-4a^2}$.　　　6. $\dfrac{5}{1+2x}-\dfrac{3x}{1-2x}-\dfrac{4-13x}{1-4x^2}$.

7. $\dfrac{1}{x^2-9x+20}-\dfrac{1}{x^2-11x+30}$.

8. $\dfrac{2}{x^2-3x+2}+\dfrac{2}{x^2-x-2}-\dfrac{1}{x^2-1}$.

9. $\dfrac{x-3}{x+2}-\dfrac{x-2}{x+3}+\dfrac{1}{x-1}$.

10. $\dfrac{3}{x^2-1}+\dfrac{4}{2x+1}+\dfrac{4x+2}{2x^2+3x+1}$.

11. $(x^2+xy+y^2)-\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$.

12. $(x^2-xy+y^2)-\dfrac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2}$.

13. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

14. $\dfrac{3}{x^2-5x+6}-\dfrac{15}{x^2-9x+14}-\dfrac{12}{x^2-10x+21}$.

15. $\dfrac{5(2x-3)}{11(6x^2+x-1)}+\dfrac{7x}{6x^2+7x-3}-\dfrac{12(3x+1)}{11(4x^2+8x+3)}$.

91. 分式符號的變化

分式的符號：(1) 分子的符號，(2) 分母的符號，(3) 分式的符號。

分式$\dfrac{a}{b}$是表b除a的商數，如把分子和分母都變爲負的，商數仍是正的，與分式的數值沒有關係。

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}.$$

如把分式的符號和分子，同時變成負的，得$-\frac{-a}{b}$；但知

$$-\frac{-a}{b}=-\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}.$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=-\frac{-a}{b}.$$

同理，得　$\frac{a}{b}=-\frac{a}{-b}$

所以每次變分式中兩個符號，牠的數值不變。

〔例 1〕　$\frac{b-a}{y-x}=\frac{-(b-a)}{-(y-x)}=\frac{-b+a}{-y+x}=\frac{a-b}{x-y}.$

〔例 2〕　$\frac{x-x^2}{2y}=-\frac{-(x-x^2)}{2y}=-\frac{x^2-x}{2y}.$

〔例 3〕　$\frac{3x}{4-x^2}=-\frac{3x}{-(4-x^2)}=-\frac{3x}{x^2-4}.$

化簡分式時的應用：

〔例 1〕　化簡　$\frac{5}{3x-3}+\frac{3x-1}{1-x^2}+\frac{1}{2x+2}.$

因第一分式的分母$=3(x-1)$，

第三分式的分母$=2(x+1)$。

故把第二分式的分母變爲x^2-1時，求公分母時，必定簡便，

因之，得

$$\frac{5}{3x-3}+\frac{3x-1}{1-x^2}+\frac{1}{2x+2}=\frac{5}{3(x-1)}-\frac{3x-1}{-(1-x^2)}+\frac{1}{2(x+1)}$$

$$=\frac{10(x+1)-6(3x-1)+3(x-1)}{6(x^2-1)}$$

$$=\frac{10x+10-18x+6+3x-3}{6(x^2-1)}$$

$$=\frac{13-5x}{6(x^2-1)}.$$

〔例2〕　化簡　$\frac{a}{x+a}+\frac{2x}{x-a}+\frac{a(3x-a)}{a^2-x^2}$.

公分母是x^2-a^2最便當，故把第三分式和牠的分母的符號同時改變，得

$$\frac{a}{x+a}+\frac{2x}{x-a}+\frac{a(3x-a)}{a^2-x^2}=\frac{a}{x+a}+\frac{2x}{x-a}-\frac{a(3x-a)}{-(a^2-x^2)}$$

$$=\frac{a(x-a)+2x(x+a)-a(3x-a)}{x^2-a^2}$$

$$=\frac{ax-a^2+2x^2+2ax-3ax+a^2}{x^2-a^2}$$

$$=\frac{2x^2}{x^2-a^2}.$$

【練習】　指出下列各式的錯誤：

1.　$\frac{1}{ab}=-\frac{1}{(-a)(-b)}$.

2.　$\frac{1}{(b-c)(b-a)}=-\frac{1}{(c-b)(a-b)}$.

習　　題

化簡下列各式：

1.　$\frac{1}{4x-4}-\frac{1}{5x+5}+\frac{1}{1-x^2}$.

2.　$\frac{2}{1+a}-\frac{2}{1-a}-\frac{5a}{a^2-1}$.

3. $\dfrac{x^2-y^2}{xy}-\dfrac{xy-y^2}{xy-x^2}$.

4. $\dfrac{3-2x}{2x+3}-\dfrac{2x-3}{3-2x}+\dfrac{12}{4x^2-9}$.

5. $\dfrac{a+c}{(a-b)(x-a)}+\dfrac{b+c}{(b-a)(x-b)}$.

6. $\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^2}+\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{y-x}$.

7. $\dfrac{3}{x+a}-\dfrac{1}{x+3a}+\dfrac{3}{a-x}+\dfrac{1}{x-3a}$.

8. $\dfrac{3}{8(1-x)}+\dfrac{1}{8(1+x)}-\dfrac{1-x}{4(1+x^2)}-\dfrac{3}{4(x^2-1)}$.

9. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

10. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{3}{x(x^2-1)}$.

11. $\dfrac{1}{4a^3(a+x)}-\dfrac{1}{4a^3(x-a)}+\dfrac{1}{2a^2(a^2+x^2)}-\dfrac{a^4}{a^8-x^8}$.

12. $\dfrac{a^2+ac}{a^2c-c^3}-\dfrac{a^2-c^2}{a^2c+2ac^2+c^3}+\dfrac{2c}{c^2-a^2}-\dfrac{3}{a+c}$.

13. $\dfrac{y+z}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{z+x}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{x+y}{(z-x)(z-y)}$.

14. $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}$.

92. 分式乘法

(a) 分式乘分式的法則：

I. 如分子，分母有公因式，彼此互約之。

II． 分子乘分子，分母乘分母。

〔例 1〕 $\frac{3a}{4b}\times\frac{8c}{9a}=\frac{\cancel{3a}}{\cancel{4}b}\times\frac{\cancel{4}\times 2c}{\cancel{3a}\times 3}=\frac{2c}{3b}$.

〔例 2〕 $\frac{2a}{(a+b)^2}\times\frac{3(a^2-b^2)}{2ab}=\frac{\cancel{2a}}{(a+b)\cancel{(a+b)}}$

$\times\frac{3(a-b)\cancel{(a+b)}}{\cancel{2a}b}=\frac{3(a-b)}{b(a+b)}$.

（b） 分式乘整式的法則：

I． 如整式和分母有公共因式，先約之。

II． 用整式乘分子。

〔例 1〕 $\frac{8a}{9b}\times 3b=\frac{8a}{\cancel{3b}\times 3}\times\cancel{3b}=\frac{8a}{3}$.

〔例 2〕 $(3ax-2a^2)\times\frac{x-a}{6x^2-ax-2a^2}$

$=a\cancel{(3x-2a)}\times\frac{x-a}{\cancel{(3x-2a)}(2x+a)}$

$=\frac{a(x-a)}{2x+a}$

習　　題

計算下列各式：

1． $\frac{16x^2-9a^2}{x^2-4}\times\frac{x-2}{4x-3a}$.　　2． $\frac{a^3}{bc}\times\frac{b^3}{ca}\times\frac{c^3}{ab}$.

3． $\frac{x^2+5x+6}{x^2-1}\times\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.　4． $\frac{25a^2-b^2}{9a^2x^2-4x^2}\times\frac{x(3a+2)}{5a+b}$.

5． $\frac{x^2+3x+2}{x^2+9x+20}\times\frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+6}$.

6． $\frac{2x^2+5x+2}{x^2-4}\times\frac{x^2+4x}{2x^2+9x+4}$.

7. $\dfrac{2x^2-x-1}{2x^2+5x+2}\times\dfrac{4x^2+x-14}{16x^2-49}$.

8. $\dfrac{b^4-27b}{2b^2+5b}\times\dfrac{4b^2-2b}{2b^2-11b+15}$.

9. $\dfrac{x^2-18x+80}{x^2-5x-50}\times\dfrac{x^2-6x+7}{x^2-15x+56}\times\dfrac{x+5}{x-1}$.

10. $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a^2+ab-ac}\times\dfrac{a}{(a+c)^2-b^2}\times\dfrac{(a-b)^2-c^2}{ab-b^2-bc}$.

11. $\dfrac{x^2-8x-9}{x^2-17x+72}\times\dfrac{x^2-25}{x^2-1}\times\dfrac{x^2-9x+8}{x^2+4x-5}$.

12. $\dfrac{4x^2+x-14}{6xy-14y}\times\dfrac{4x^2}{x^2-4}\times\dfrac{x-2}{4x-7}\times\dfrac{3x^2-x-14}{2x^2+4x}$.

13. $\dfrac{4x^2-16x+15}{2x^2+3x+1}\times\dfrac{x^2-6x-7}{2x^2-17x+21}\times\dfrac{4x^2-1}{4x^2-20x+25}$.

14. $\dfrac{(a^2+ax)^3}{x^2-a^2}\times\dfrac{(a-x)^2}{a^5+a^2x^3}\times\dfrac{a^2-ax+x^2}{a^3+2a^2x+ax^2}$.

93. 分式除法

(a) 分式除分式的法則：

I. 把做除式的分式顛倒後，乘被除式。

II. 用分式乘法運算。

〔例 1〕 $\dfrac{ac}{3b}\div\dfrac{3a}{4b}=\dfrac{ac}{3b}\times\dfrac{4b}{3a}=\dfrac{4c}{9}$.

〔例 2〕 $$\frac{2x+a}{9x^2-4a^2}\div\frac{2x+a}{3ax+2x^2}=\frac{2x+a}{9x^2-4a^2}\times\frac{3ax+2a^2}{2x+a}$$

$$=\frac{2x+a}{(3x+2a)(3x-2a)}\times\frac{a(3x+2a)}{2x+a}$$

$$=\frac{a}{3x-2a}$$

(*b*) 分式除整式的法則：

I. 把分式顚倒後，乘整式。

II. 用分式乘整式的法則運算。

例如：$(2a+3)\div\frac{2a+3}{bc}=\cancel{(2a+3)}\times\frac{bc}{\cancel{2a+3}}=bc$。

(*c*) 整式除分式的法則：

I. 用整式乘分母。

II. 約爲簡分式。

〔例 1〕 $\frac{3a}{b}\div 3abc=\frac{\cancel{3a}}{b\times\cancel{3a}bc}=\frac{1}{b^2c}$。

〔例 2〕 $\frac{x^2-4}{ax+2a}\div(x-2)=\frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}}{a\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}=\frac{1}{a}$

【練習】 指出下列各式中的錯誤：

1. $(x-5)\div\frac{1}{x^2-4x-5}=\cancel{(x-5)}\div\frac{1}{\cancel{(x-5)}(x+1)}=\frac{1}{x+1}$

2. $\frac{x-a}{x^2-a^2}\div(x+a)=\frac{(x-a)(x+a)}{x^2-a^2}=1$

習 題

計算下列各式：

1. $\frac{5a^2b}{6xy}\div\frac{3ab^2}{4x^2y}$。

2. $\frac{a+b}{a-b}\div\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$。

3. $\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\div\frac{(b-a)^2}{b^2-a^2}$。

4. $\frac{x^3-y^3}{a-b}\div\frac{x^2+xy+y^2}{a^2-b^2}$。

5. $\frac{2x^2+13x+15}{4x^2-9}\div\frac{2x^2+11x+5}{4x^2-1}$。

6. $\dfrac{x^2-14x-15}{x^2-4x-45}\div\dfrac{x^2-12x-45}{x^2-6x-27}$.

7. $\dfrac{x^3-6x^2+36x}{x^2-49}\div\dfrac{x^4+216x}{x^2-x-24}$.

8. $\dfrac{2x^2-x-1}{2x^2+5x+2}\div\dfrac{16x^2-49}{4x^2+x-14}$.

9. $\dfrac{1+8x^3}{(2-x)^2}\times\dfrac{4x-x^3}{1-4x^2}\div\dfrac{(1-2x)^2+2x}{2-5x+2x^2}$.

10. $\dfrac{2}{1-x^2}\div\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)$.

11. $\dfrac{x^4-8x}{x^2-4x-5}\times\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-2x}\div\dfrac{x^2+2x+4}{x-5}$.

12. $\dfrac{x^2-64}{x^2+24x+128}\times\dfrac{x^2+12x-64}{x^3-64}\div\dfrac{x^2-16x+64}{x^2+4x+16}$.

13. $\dfrac{m^3+4m^2n+4mn^2}{3m^2n-5mn^2-2n^3}\times\dfrac{m^2-4n^2}{9m^2-3mn+n^2}\div\dfrac{(m+2n)^2}{27m^3+n^3}$.

14. $\dfrac{a^4-x^4}{a^2-2ax+x^2}\div\dfrac{a^2x+x^3}{a^3-x^3}\times\dfrac{a^4+a^2x^2+x^4}{a^2x-ax^2+x^3})$.

15. $\dfrac{a^3+8a^2b+15ab^2}{(64a^3-b^3)(a^3+b^3)}\div\dfrac{4a^2+21ab+5b^2}{16a^4-17a^2b^2+b^4}$

$$\div\frac{a^2+2ab-3b^2}{a^3-a^2b-ab^2}.$$

94. 繁分式

分子和分母是分式的，叫做繁分式。

(a)分子和分母都是單項分式的運算法則：

I. 把分母的分式顛倒後，乘分子。

II. 能約時，約爲簡分式。

例如：
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

(b) 分子和分母是多項式的分式的運算法則：

I. 把分子和分母的分式，化爲簡分式。

II. 用(a)的運算法則計算。

〔例 1〕
$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}=\frac{\frac{ad+bc}{bd}}{\frac{ad-bc}{bd}}$$
$$=\frac{ad+bc}{bd}\times\frac{bd}{ad-bc}=\frac{ad+bc}{ad-bc}.$$

〔例 2〕
$$\frac{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}=\frac{\frac{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}}{\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2}}$$
$$=\frac{\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}}{\frac{4ab}{a^2-b^2}}$$
$$=\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}\times\frac{a^2-b^2}{4ab}$$
$$=\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

〔例 3〕
$$\frac{1}{x-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{x-\frac{1}{\frac{x^2+1}{x}}}=\frac{1}{x-\frac{x}{x^2+1}}$$
$$=\frac{1}{\frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}}$$

$$=\frac{x+1}{x^3}.$$

習 題

化簡下列各式：

1. $\dfrac{\dfrac{m}{n}-\dfrac{a}{m}}{\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}}$.

2. $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$.

3. $\dfrac{a+\dfrac{b}{d}}{x-\dfrac{y}{d}}$.

4. $\dfrac{1-\dfrac{y^2}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}$.

5. $\dfrac{a}{b+\dfrac{c}{d}}$.

6. $\dfrac{x+5+\dfrac{6}{x}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{x^2}}$.

7. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{9}{x}-x}$.

8. $\dfrac{2x^2-x-6}{\dfrac{4}{x^2}-1}$.

9. $\dfrac{a}{x\div\dfrac{m}{x+\dfrac{m}{z}}}$.

10. $1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}$.

11. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1+x}{x-\dfrac{1}{x}}}$.

12. $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}$.

13. $\dfrac{2-4x}{4x-2-\dfrac{4x}{1+\dfrac{2x-1}{\dfrac{4x}{4x-1}}}}$.

14. $$\frac{x^2}{1-\cfrac{1}{x^2+\cfrac{\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}}}+\frac{x^2-2}{1-\cfrac{1}{x^2-\cfrac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}}}.$$

代數學（上）

1948·8·初版　哈·5000

定價：　　元