開明少年叢書

大大小小

王峻岑著

大大小小

王峻岑著

大大小小

民國三十七年十二月初版

每册定價金圓五角五分

著作者 王峻岑

發行者 上海福州路 開明書店 代表人范洗人

印刷者 開明書店

(69 P.) W 峙

我怎樣寫成了這本書

代序——並告讀者

二十五年一月，開明書店創刊了一個新的雜誌，名字叫做「新少年」。「新少年」和「中學生」可以說是一對姊妹刊物，一個相當於初中一年級以下的程度，一個相當於初中二年級以上的程度。以中等學生爲對象的雜誌並不是沒有，然而在內容上充實且又活潑的，那就不能不推舉這兩份雜誌。

「新少年」不但爲學生們所愛好，而且對於成人也是一個親切的朋友；至少，在我個人就有這樣的感覺。它使我感到興奮；但是同時也帶來了遺憾，因爲裏面沒有關於數學的文章。慢慢的這個遺憾變成了我的一件心事。我想：我能不能寫一點？

但是，這個最大的困難卻在取材。可是終於我作了一個計劃。我想從數學史上找出幾個人物來，每科選擇一個。一方面談故事，一方面說明各科的內容，而且在時代的順序上可能還得到關於數學發展的瞭解。

於是我寫成了兩篇，一篇是「一個最喜歡數的人」，講畢達哥拉斯（Pathagoras）；一篇是「兩千多年的一位算學先生」，談歐幾里德（Euclid）。然而這兩篇稿子結果退回來了，原因倒很簡單。因爲刊物既然是給初中一年級以下的同學看，那麼關於代數和幾何的材料就勢必不合適。這件事情雖然使我非常作難，然而寫作的興趣卻並沒有失掉。曾經化費了不少的心思，終於我又寫出了一篇「單位」，也就是這本書裏「標準的選擇」的一篇原稿。

當着這篇稿子登出來的時候，編者還特別寫了幾句介紹。至少，關於這類體材寫作的困難，編者是十分清楚的。

但是這篇文字，在我個人看起來並不滿意，因爲裏邊還不免摻雜了些理化的常識，這仍然不很合乎理想。接着我又寫了第二篇，那就是「逢十進一」；看起來似乎比前一篇進步一點。

慢慢的思路稍微有點開展，於是我又寫出了「從大小談到算學的發展」，「從普遍談到算學的研究」，「四則和六則」，以及「圖案似的乘法」。此外還有兩篇，那卻是講的三角和幾何。

這時候我的心裏有了一個新的主張。我以爲，儘管比較深一點的材料不應當用，可是講明一個科目發展的趨勢和概況卻是必要的。我常常這樣想：一個好的教師不應當僅僅講明白了課本，同時還應當指示給學生一個進展的方向。只有這樣，纔能夠使學生進修。因此在敍述的範圍上，我就決定不想再受以前那樣的拘束。但是這又增加了一個新的困難，就是寫作的技術問題。

於是採用了各種不同的形式，有時候用故事，有時候用討論，有時候用講話，就好像聊天那樣的談話。往往在詞句上的修改，比內容還要費心思。然而這也同時又帶來了一個新的趣味。怎樣把深的東西講的淺，怎樣把困難的事實說的容易懂，雖然有點費力氣，卻是一件極好玩的工作。

接着，就到了七七事變的前夕，整個局面一天比一天緊張起來。當時雜誌的編者主張，一切內容要配合時勢。這時候我纔注意到學科和生活的聯繫。在這本書裏，有一篇「算命的算學」，那就是一個例子。現在看起來，內容也許有點過時，然而那正是一篇可以紀念的文字。除去取例以外，我想那個判斷的決定，還是值得一看的。

終於一二八的砲火毀壞了一切文化的事業。「新少年」停刊了，我的幾篇稿子也同

時遭到了砲火的毀滅。

八年抗戰，在我個人的生活上說，是一個可怕的夢。在這個可怕的夢裏，我常常回憶到那些舊作。它給我安慰，同時也給我悵望。我想，事實上不會再寫出那些稿子來了，不但生活不允許，而且心情也不允許。但是我的心裏卻還有一個憧憬。

勝利以後纔知道「新少年」又復刊了，然而名稱改成「開明少年」。當着這個雜誌見到了以後，就和見到隔絕八年的老朋友一樣。不過這時候的「開明少年」，也和剛剛復員回來的人有點相似，一切還待整理。

慢慢的「開明少年」充實起來了，它已經不是復活而是新生。這個新的生機使我又恢復了寫作的動念。於是我就開始整理舊的材料，結果寫成「大大小小」。

接着我又繼續的寫下去，那就是：「兩個特殊的數」，「不必要的算式」，「差不多先生」，「數字的意義」和「大小之比」，除此以外，還有幾篇故事。

這以前，顯然的這件工作是毫無計劃的，想到了什麼便寫什麼。但是以後我見到，目前的同學更需要思想上的營養，同時坊間關於算學的補充讀物比以前更覺貧乏。就拿算術一類的本子來說，除了習題詳解還是習題詳解。解來解去，頂多不過是學到一些零

零星星的技術。但是大部份的同學連這一點也得不到，許多習題詳解結果變成了應付考試的武器，所謂「臨陣磨槍」的那枝槍，既然有了這件法寶，那就索性更不好好的學習了。這是一件極可怕的事實！

於是我決心把已經發表過的文字編成一本書。

但是事前既然沒有整個的計劃，編起來就又遇到不少的麻煩。文字的形式既不一致，而且在內容上也沒有系統。所以我就重新設計。我預備把故事一類的文字單另彙集，這樣剩下的在形式上就統一了。然後再把其餘的幾篇重加修改，同時覺得另外還需要有些補充。

根據這個設計，我又補充了「數來數去的加和減」，「搞不清楚的除法」，以及還沒有發表過的「種種還原」和「學習的關鍵」。把整個的次序整理起來，結果就完成了現在這本小册子。雖然還不合乎理想，可是關於算術的各方面，大致的都已經講到了。不過內容還不大整齊，所以索性把這個書名也叫做「大大小小」。

編這一本書有幾個目的，我希望讀者能夠知道：對於一件事實應當怎樣去看，對於一個問題應當怎樣去想；對於一個科目的研究要知道它是怎樣的往前發展，同時又和別

的科目有什麼聯繫；而且還要知道，有了一種知識以後，在生活的態度和方式上應當怎樣去運用。

一般人總以爲算學是最死板最討厭的東西，可是在事實上並不完全是這樣的。一個人鑽在知識的圈子裏去到處碰壁，這是一件最苦惱的事情。如果能夠跳出圈子來，把握住這個圈子，於是知識纔能夠被我們消化了，吸收了，然後轉化成一個生活的能力。所謂讀死書，死讀書，讀書死，這是一個最大的悲劇。我們要讀活書，活讀書，讀書活。

也許這個理想太高，然而這個看法是對的！至少，我是同情這個主張的。要想達到這個目的，我們必須先讓思想靈活起來！——不過這本小冊子卻不見得能夠達到這個任務。好在我們彼此都是正在學習，我們可以按照這個方向走。

爲什麼我要把這個經過詳詳細細的寫出來呢？第一，我告訴你，我自己是在怎樣的學習。第二，這本書雖然勉強可以作爲一本補充讀物，但是這裏面卻絕不是習題詳解那樣的內容。我希望看這本書的人，能夠拋開看習題詳解的那種心理，也許結果是會更有益處的。

但是我自己覺得，最大的遺憾就是講到的還不夠完全。而且在寫作的技術上，無疑的是越來越壞了；這倒是因爲生活的壓迫而影響到心情的緣故。

我希望大家都能夠參加這個工作，讓我們彼此毫無拘束的發表我們自己的意見。只有這樣，我們彼此纔能進步。而且，像以往那種拘泥的態度，和現在這種偷懶取巧的心理，假設不來一個澈底的掃除，那麼我們對於科學的研究是永遠不會發展的。

這是我要預先告訴讀者的話。

目次

大大小小

「有限的無窮」和「無限的無窮」

所有課外作業，再沒有比算術更叫人頭痛的了。因爲算術一科，處處都是「頂眞」。一個習題想錯了不行，寫錯了算式不行，就是答數錯了那麼一點點也不行。教算術的先生們眞是要命，不曉得他們幹嗎要那樣頂眞。

可是話又說回來，算術固然頂眞，卻並不是沒有方法去對付的。要想對付一門頂眞的功課，最要緊的還是我們自己有一個「頂眞的態度」。實在說起來，越是頂眞的事情越容易對付，因爲凡是頂眞的東西都是最規矩的，它不會閃爍其辭，模稜兩可。

所謂「頂眞的態度」是什麼呢？最要緊的就是要「澈底的追問」。對於所見所聞，無論大小都給它一個詳盡的盤查，要問明白來源去路，要搞淸楚前因後果。這就是頂眞態度的第一步。

現在讓我們提出一個最簡單的例子。

大家都知道，算術裏研究的是數目，要想研究數目，第一先要把數目擺在我們眼前，這就需要「記數法」。在一千四五百年之前，印度人就開始應用一到九和零的記號，憑了這十個簡單的記號，無論多麼大的數目都能表示出來。可是一直到了十七世紀，我們纔知道應用小數點；有了小數點，無論多麼小的數目，就同樣的能夠擺在我們眼前。——憑了這個「記數法」的法寶，我們纔能把大大小小的數，都收在我們的手掌裏，去分析，去處理，去運算，去研究；然後，數目纔成了我們有力的工具。

爲什麼記數法有這樣大的本領呢？說穿了也很簡單，記數法的原理不過是「定位」。同是一個數，在個位上是個，在十位上就是在個位上的十倍，在百位上就是在個位上的百倍，在千位上就是在個位上的千倍。每一位有一位的單位，那就是大家最熟悉的個，十，百，千，萬；萬以上是十萬，百萬，千萬，萬萬，十萬萬，百萬萬。這都是大家已經知道的。可是照這樣下去，勢必要遇到萬萬萬，萬萬萬萬，萬萬……萬，連我們自己也搞不清到底是多少萬了。這是多麼麻煩的事情！

爲什麼不像萬以下那個樣子，每一位都給它起一個另外的名字呢？

這個問題問得很有道理，萬以上的位也應該有一個數名。實際上，不但有，而

多。萬以上，是億，兆，京，垓，秭，穰，溝，澗，正，載，極。這些都是中國的古名，從億到載叫做「黃帝十等數」，據說是黃帝起的名字。

從個到萬，都是十進位，逢十進一。從萬到極，卻有好幾種說法。按照原來的規定，共分下中上三等：下等數是十進位制，十萬叫億，十億叫兆；中等數是萬萬進位制，萬萬叫億，萬萬億叫兆，萬萬兆叫京；至於上等數又不同了，萬萬叫億，億億叫兆，兆兆叫京，京京叫垓，——像這樣的進位制還不多見，越來越大，我們可以把它叫做「遞增進位」。可是現在通用的進位制卻不是上面那三種，它是「萬進位制」，那就是：萬萬叫億，萬億叫兆，萬兆叫京，萬京叫垓，萬垓叫秭，萬秭叫穰，萬穰叫溝，萬溝叫澗，萬澗叫正，萬正叫載，萬載叫極。

現在比一大的數，已經有了不少的名字，那麼比一小的數，是不是也有很多的名字呢？這是第二個問題。

當然啦，我們知道比一小的數叫做「小數」，關於小數的位有：分，厘，毫，絲，忽；忽以下還有微，纖，沙。在這裏可注意的是：「分」原來是分開的意思，是個動詞；「厘」是一個簡筆字，原來是「釐」，釐就是「氂」，是牛馬的尾巴，那就是表示

從牛馬的尾巴上，取一根毛的寬度；「毫」，也可以寫成「豪」，是兔子毛；「絲」是蠶吐的絲，「忽」是蜘蛛吐的絲，這些都是拿具體的東西來表示長度的。所以它們的本義是：十忽爲絲，十絲爲毫，十毫爲厘，十厘爲分，十分爲寸，十寸爲尺，尺就是長度的單位。因爲以後把十分之一個叫做「分」，所以分以下的名字也都借來表示小數的單位了。滿十倍進一位，叫做十進位制；從一到分，從分到厘到毫，分十份退一位，這可以叫做「十退位制」。

現在我們知道，大數裏最大的叫極，小數裏最小的叫沙，那麼比極更大，比沙更小的叫做什麼呢？這是我們要提出的第三個問題。

比極更大，比沙更小的數名，有是有，可是太奇怪了。一萬萬個極叫做一個「恆河沙」，一萬萬個恆河沙叫做一個「阿僧祇」。至於比沙更小的，還有塵，埃，渺，漠，模糊，逡巡，須臾，瞬息，彈指，刹那，六德，虛，空，淸，淨。由大到小，都是萬萬退位制；反過來說，由小到大，也就是萬萬進位制。

可是這些數名有點別扭，不像中國話；這個猜想一點也不錯。這裏面可以注意的有兩點：一點是，表示小的單位，連具體的東西也找不到了，於是只好利用時間來表示，

例如瞬息，彈指，刹那；連時間的表示也想不出來了，只好用虛，空，清，淨那一類抽象的名辭。第二點，所謂「恆河沙」，「阿僧祇」，以及「彈指」，「刹那」這些數名的確不是中國話，這都是從印度流傳過來的。恆河是印度的一條河，兩岸都是沙，以河沙來表示數量之多。「阿」是「無」的意思，「僧祇」是「數」的意思，阿僧祇不是說沒有數，它是說沒有法去數的「數」。這是譯音，同時還有譯義的叫做「無央數」或是「無盡數」，此外還有「不可思議數」，「無量數」，都是表示那些數不淸的大數。至於「彈指」以下的七個數，也都是從印度流傳過來的。印度的文化跟着佛教的傳播，使中國文化發生了變化，這是一個明顯的例證。

現在我們要提出第四個問題了，所謂一個恆河沙，一個阿僧祇到底有多大；一個淸，一個淨到底有多小呢？這個問題卻不好答覆，我們實在沒法去想像。不過我們倒可以想一想一個阿僧祇或是淨，應當用怎樣一個數字去表示。

按照通用的習慣，從個到萬，一共五位，從十萬到億是四位，從十億到兆又是四位，所以從個到極一共5＋4×11＝49位。從極到恆河沙，從恆河沙到阿僧祇各有八位，所以阿僧祇應當是第49＋8×2＝65位，那就是說，一個阿僧祇是一後面要帶着六

十四個零的一個數。反過來說，個以下是分，分以下是厘，所以沙應當是小數點以後第八位，沙以下統是萬萬退位，所以淨就應當在小數點以後第 16×8＝128 位，那就是說，一個淨，在小數點以後要寫一百二十七個零。因此，一個阿僧祇和一個淨中間，總共要隔 64＋127＝191 個零。

要是極用上等極，從個到極就要 8193 位，從個到阿僧祇共計 8193＋8×2＝8209 位，所以從淨到阿僧祇就是 8209＋128＝8337 位，兩個數字之間，相隔八千三百三十五個零。假如寫在一條紙條上，平均一位數占市尺一分，這兩個數字共長八丈三尺三寸五分。兩手一伸叫一「托」，約計五尺，這條紙條大約需要十七托。……你能想像這樣一個數字嗎？

這且不提，讓我們再問一下：大數裏的阿僧祇算是最大了，可是算不算頂大的數呢？當然不是！只要阿僧祇加一就比阿僧祇大，阿僧祇加二又比阿僧祇加一大了，所以實在說起來，大數是無窮的。同樣的，小數裏面的淨算是最小的了，可還不是頂小的數，因爲淨被十除，就又要退一位了，所以小數也是無窮的。不過小數的無窮卻和大數的無窮又不一樣。大數更大，無窮無限，應當是「無限的無窮」；可是小數任憑怎樣

小，總不能比「沒有」更小，那就是不能小於「零」。所以小數更小，無窮卻有限，應當是「有限的無窮」。「有限的無窮」和「無限的無窮」，這裏面有一個重要的差別。

講到這裏，關於大大小小的盤查就可以告一段落了。

逢十進一

從「二進位制」到「萬進位制」

對於任何問題，如果仔細想來，都是很有意思的。現在我們且談一個很小的問題。大家都知道，我們隨便寫幾個數目字，這些字所代表的實際數目，是和它所在的地位有關係的。同是一個三，在個位上是「三」，在十位上是「三十」，在百位數上卻又變成「三百」。這並不稀奇，因為我們的記數法是採用的「十進位制」。這種「逢十進一」的老規矩，也是大家用慣了，而且用了那麼久的歷史。——然而問題也就在這兒：第一，為什麼記數必須得進位呢？第二，進位又為什麼必須十進位呢？

第一個問題很簡單，因為這不過是為了便利的緣故。當然我們可以把每一個數目都給它起一個各不相同的名字，就好像十以下的數目一樣，但是那卻太麻煩了，我們不想那麼笨。

第二個問題卻有意思極了。進位制是為了方便，十進位呢，這個也可以說是為了方

便，卻也可以說是受了自然的限制。這個問題和前一個不大相同，因為這和我們計算的工具有了關係。

在上古的時候，我們對於數目的需要很少。最簡單的時候，甚至於只知道「一」和「二」，「二」以上呢，便是「多」。在中國也是這樣，所謂「三」，不但是代表一二三的「三」，另外還有一個意思是當做「再三」講；「再三」，也就是表示「多」。還有，最顯明的莫過於「三人為众」，從众多的「众」字的構造上表現得最清楚了。不僅像這樣，而且在那個時候，對於抽象的數目還弄不大清楚，一個數目後邊必須跟着所指明的那件東西。譬如說，量寬窄呢便有「一指」「一匝」（就是把手伸開，從拇指指尖到小指指尖的距離），小的有「一個米粒」，大的有「一托」（就是把兩臂平伸，從左手指尖到右手指尖的距離）；量高矮呢，便有「一人來高」；量面積呢，便有「一巴掌大」；量容積呢，便有「一摟多粗」。在外國也是這樣，馬來人（Malay）和阿悌人（Aztecs）不說一二三……，他們說「一個石塊，兩個石塊，……」；牛斯人（Niues）不說一二三……，他們說「一個水果，兩個水果，……」；塞文人（Javans）卻又變成「一個穀粒，兩個穀粒，……」了。這個原因也很簡單，因為他們還不能把一二三……

看成一個能夠脫離開物體而自己獨立的東西。

人類像這樣簡單的時候，當然用不着什麼大數，——因此所謂進位制，也就很簡單。最簡單的一個是「二進位制」。在最早的錫勒數字(Syriac numerals)：一是丨，二是乙，三是乙丨，四是乙乙，這就是一種「二進位制」。在非洲也有人這樣表示，三是「二一」，四是「二二」，五是「二二一」，六是「二二二」。就是現在在我們的習慣裏也有這種遺留，譬如說，筷子論「雙」，茶碗論「對」，對聯論「副」，排隊的時候，兩個人叫做一「伍」。

二以上便是「四進位制」，這個倒不很多見。只知道在南美洲有些人數數，是一二三四，四一，四二，……這樣數下去的。我們用的一年四季，一個圓周四個象限，也可以作爲一個例證。

四以上是「五進位制」；五以上便是「十進位制」了。這兩種有聯帶的關係，也就是我們最先提出的問題。

上面已經說過，上古人數數的時候，必須借用具體的東西；在計算的工具上來講，最簡單最方便的便是我們的手指了。如果用一隻手，按手指來數，數到五便非另作記號

不可，這就是五進位制的起源。如果用兩隻手，那便是十進位制的原因了。這些事情都很平常，只要想一想，到現在我們的小弟弟或是小妹妹，不還是用手指來學數數麼？同時又因爲，只要人類一知道利用手指，那麼馬上就會利用兩隻手，因此十進位制是比五進位制還要來得更廣泛，更普遍。

知道了五進位制和十進位制，便很容易想到「二十進位制」的起源了。那就是人們不但利用了手，而且利用了脚。我們想，如果天氣永遠很好，譬如在熱帶，我們又永遠赤了脚，那麼坐在地下，擲了手指再擲脚指，計算起來倒也很有趣的。不過這到底有些不大方便，因此二十進位制是比五進位制更加少了。在非洲，有些地方，五便叫做「一手手指」，十叫做「雙手手指」，二十叫做「手脚全指」。在南美洲，有些地方便把五乾脆叫做「手」，六是「手一」，七是「手二」。在格林蘭，他們便把二十乾脆叫做「一個人」，四十叫做「兩個人」；同樣的，在達曼人(Tamancs)便把二十一叫做「兩個人零一個手指」；這些都是表現得非常具體的。

其實，只要我們一注意鐘錶上的羅馬數字，便可以看出來，一是I，五是V，十是X，其餘的都依此爲標準；這就是「五進位制」。平常我們也常這樣數着：「一五，

一十，十五，二十，」這也就是逢五進一。因此我們說，五、十、二十，利用手脚來定進位制，這是人類的一個方便，同時也可以說是受了自然的一種限制。如果我們的指頭不這樣整齊，那麼我們的計算就不能統一了；但是如果指頭的數目一律再少或是再多，那麼我們也就不一定採用「十進位制」了。

除此以外，進位制還有許多，不妨順便談談。一種是「六進位制」，不過不多見，偶而在非洲的部落裏可以見到。一種是「十二進位制」，這倒是常用的一種，而且還很早，特別是關於測量應用一方面！因爲十二是可以用二、三、四、六、都除得盡，這自然是一種方便。在古代羅馬人採用它，在現在我們也有：十二叫做「一打」；一呎十二吋，一鎊十二先令，一年十二個月，這些都是。

十二以上便是「六十進位制」了。三千年前巴比倫便採用它，到現在我們還用着：一度六十分；一分六十秒。

除去以上所說的以外，還有很多，不過不很純粹，不很普遍。譬如：「三進位制」，在軍隊裏，一團三營，一營三連；在童子軍的編制裏，一中隊分三小隊。「七進位制」，七天是一週。還有，我國舊俗，死人後的喪期也是以七天作爲一「七」。「九進位制」，

我們有冬至以後九天稱爲一「九」，總共九「九」。關於九「九」還有許多歌謠，大家應該是很熟悉的了。

上面我們已經見到：有「二進位制」，「三進位制」，「四進位制」，「五進位制」，「六進位制」，「七進位制」，「八進位制」，「九進位制」，「十進位制」，「十二進位制」，和「二十進位制」。再以上呢？還有，——譬如三十天一月，是「三十進位制」。九十度一個直角，一百八十度一個平角，是「九十進位制」。再以上便又有很普遍的進位制了，這些都是以後纔有的。

論面積，有「一百進位制」；論體積，有「一千進位制」。同時一百年又叫做一世紀。一百畝又叫做一頃。至於一千，普通以爲數已夠大，譬如說「一諾千金」。千已經是一個很大的數，所以普通應用裏，千進位制便不多見了。惟有在西洋記數法裏，三位一進，是千進位制。他們說：個、十、百、千、十千、百千。然而我們的記數法是：個、十、百、千、萬、十萬、百萬、千萬。四位一進，這又是「萬進位制」。

數目到了萬進位制，再回頭看一看原始的二進位制，使我們不禁感覺到數目的進展是大有可觀了！

標準的選擇

銀河直徑的單位大得出奇
X線波長的單位小得出奇

我們對於算學總算有了一點常識，而且還會計算一些題目，那麼，讓我再提出一個簡單的問題來問你：「單位是什麼呢？」

「單位是一！」大概你一定會很爽直的回答出來。這個回答雖然不能算錯，然而只好算是對了一半。

其實，這個問題也太含糊不清楚。我們必須：第一要說明「單位」的意義是什麼；第二要說明「單位」是怎樣規定的。

我們知道，算學裏邊的數目，是用來表示「量」的多少的。要想表示一個量的多少，便不能不預先規定下一個標準。譬如說，這兒有一堆桃，那兒也有一堆桃。我們選擇一個最簡單最方便的規定，拿着「一個桃」爲標準。於是，在這兒，一個桃，兩個

桃，……一共五個桃。在那兒，一個桃，兩個桃，……一共十個桃。這樣數了起來，不但每一堆的桃數知道了，而且兩堆桃數還有一個多少的比較。像這樣，這個表明桃數多少的「基本的標準」，在算學裏便叫做「單位」。

我們又知道，數有兩種，一種是不名數，一種是名數。在不名數裏，無論數大數小，最簡單最基本的單位是「一」，這是不錯的；但是在名數裏邊，那就要看那是表明什麼量。因爲凡是名數，都是指明一種具體的東西，所以它的單位，數目「一」的後面還要寫明那個具體的東西的「標準」。譬如「一尺」，或是「一寸」：尺和寸便是那個標準的「距離」。——所以上面那個答案，只算說對了一半。

但是在不名數裏，那就是在純粹的數裏，單位也不只是「一」。一〇〇裏的「一」是一百，一〇〇〇〇裏的「一」是一萬。因爲我們的計數法是十進位制，所以第一位的單位是「一」，第二位的單位是「十」。這就是說，在不同的位上有不同的單位；至於「一」呢，不過是這許多輔助單位的最簡單的一個基本單位。——因此，上面說對了一半的那一個答案，還是沒有說得很完全。

在不名數裏有許多不同的單位，在名數裏就更複雜了。量長度，有公尺市尺；量容

量，有公升市升；量重量，有公斤市斤；量時間有小時；量角度有度數。在算術裏已告訴我們，這不過是普通用的一般的單位。以上還有更大的單位；以下還有更小的單位。

在科學裏，把這許多的單位選出三個「基本單位」：那就是量長度的單位用厘米(centimeter 公分)，量質量的單位用克 (gram 公分)，量時間的單位用秒 (second)。按照英文原字字首的排列，又叫做 C.G.S. 系單位，或是簡稱 C.G.S. 制。

關於質量和時間，當然還有大大小小的輔助單位，這些都常見。不過關於長度的輔助單位倒很驚人！最大的有「光速」，就是用光每秒鐘進行的距離為標準，等於三○○○○○○○○米突，那就是等於三百萬萬厘米。更大的是「光年」，那就是光經過一年的時間所進行的距離，合算起來，將近一萬萬萬萬米突，這是多麼大的數呵！然而我們知道，地球屬於太陽系，太陽系又屬於銀河系，據說銀河系的直徑約有二百萬光年。你能想得出這是多麼大麼？——反過來，最小的有「μ」(micron)，一μ等於一厘米的萬分之一。還有更小的是「埃」(Ångström)，一埃等於一厘米的萬萬分之一。這又是多麼小的數呵！然而，我們又聽說，X射線的波長，卻不過是千分之四埃，合算起來，只不過千萬萬分之四厘米。你又能想得出這是多麼小麼？

以上所說的都是單純的單位，另外還有兩種複雜的單位。一種是用單純的單位「合成」一個複雜的單位，一種是用單純的單位「表明」出一個複雜的單位；這恰好像是化學裏邊的，一種是化合物，一種是混合物。

我們知道，面積的單位有一平方公尺，或是一平方尺。一平方尺是表明長一尺寬一尺的正方形面積，這裏面包含有兩個單純的長度單位。同樣的，體積單位便包含三個單純的長度單位。這是第一種。又如表明速度要用兩種單位，一個是時間，一個是距離，聲在空氣裏的速度大約是每秒三三〇〇〇厘米，秒是時間單位，厘米是距離單位，一個也不能少。同樣的，加速度也是這樣，有兩個時間單位，一個距離單位：這一類的單位格外多。這是第二種。但是我們要注意，這兩種並沒有多大的區別，因爲我們常常爲了簡便起見，把這兩三個單位表明的複雜單位，單給它起一個名字，變成第一種。譬如速度有「每秒厘米」，加速度有「每秒每秒厘米」。在物理學裏，密度的單位有「克立方厘米」，工作的單位有「呎磅」，工作能力的單位有「馬力」，這些都是很好的說明。

在科學裏，這些可以用基本單位表明的複雜單位，統統叫做「誘導單位」。說到這裏，關於單位的解釋，大致可以說是完全了！

但是最後，我們還要格外指明，關於單位的選擇，不僅是為了實際的需要，而且也是為了應用的方便。假設用普通的單位去表示一個極大的數目，那就勢必要接連不斷的一個圈一個圈的畫下去；反過來說，如果去表示一個極小的數目，然而用了一個極大的單位，那麼在小數點以後，還是要一個圈一個圈的往下圈。——這都是不必要的浪費！因此關於單位的選擇也是相對的；同時這也就是複名數的來源。

例如在抗戰以前的物價，平常都是拿元作為單位，元以下的角分厘便是小數。但是到了現在，隨便去買點什麼，一萬兩萬的也算不了什麼；翻開無論哪一本帳簿，千元以下的數目幾乎都變成了零。因此在一般人的嘴裏，往往是「萬」變成「元」，「千」變成了「角」，「三塊五」就是「三萬五」，「十二」和「十五」就是「十二萬」和「十五萬」。其實物價上漲何止萬倍，拿萬作為單位，不過是說起來比較方便些。如果物價再漲，說不定「一塊五」就是「十五萬」或是「一百五十萬」；口頭上的表示和物價的上昇也是「水漲船高」的。

假設不把這一點搞清楚，那麼我們對於目前課本裏的例題就沒法去瞭解。明明是一萬塊錢一枝的鉛筆，書本上卻說是一角，明明兩萬五千塊錢一瓶的墨水卻說二角五；這在小學生看起來，豈不是都變成些鬼話了麼？

兩個特殊的數

「一」和「零」是兩個稀奇古怪的數
一個太老實，一個太調皮

我們初到學校裏來，碰到許多許多的同學們，彼此不認識。可是日久天長了，不但摸清了每一個人的脾氣，而且有了很好的交情。對於數目也是這個樣，最初也許覺得很討厭，可是久而久之，便會和它們發生了情感；而且漸漸的會感覺出來，有許多地方，數目也和人一樣，至少有些相似之點。

一個人一個人的湊起來，叫做人類；一個整數一個整數的湊起來，叫做「整數系」。人類按照性別分做男性和女性，一個人，非男卽女；整數按照它的性質也可以分成兩大類，不是奇數，便是偶數。

又如在農業社會裏，一個人對於家庭的組織是十分重視的，到了相當年齡的人，如果沒有結婚便是一個很大的缺陷，因此成家和立業，同是人生最高的理想。一個人不但

要成家，而且最好能維持一個大的家庭，不管家裏邊的家務多麼繁重，精神多麼痛苦，可是生在農業社會裏，這個大家庭制度就必須要維持下去。因此對於一個人的祝詞，多福多壽之外，還要多男子，而五世同堂就更要掛匾慶賀了。但是等到農業社會發展到工業社會的時候，人的生活形式就發生了變化，原有的家庭制度沒法維持了，大家庭化成了小家庭，獨身的光棍兒纔不被人藐視。——幹嗎要說這些閒話？因爲整數還有另外一個分類，相當於一個人的有無家族。

我們知道，一個數除去一和本身以外沒有約數的叫做「質數」，凡不是質數的便是「複數」，所謂複數就是許多質數相乘而合成的數，所以複數也叫做「合數」。質數好比獨身的數，複數便是有家族的數。

說到這裏，我們的聯想可就越來越多了。譬如說：一個數有它的倍數和約數。就好像一個人有他的兄弟或姊妹一樣。一個人的哥哥的哥哥還是他的哥哥，一個人的弟弟的弟弟還是他的弟弟；對於整數，一個數的約數的約數還是它的約數，一個數的倍數的倍數還是它的倍數，——這不是很好玩的事情嗎？

這且不提。卻說整數裏邊，現在要向大家介紹兩個個性最特殊，脾氣最古怪的數。

是誰呢？那就是「一」和「零」！

「一」和「零」？——太熟了！天天見面。見面是見面，可是它們的脾氣恐怕你還有點摸不清楚。我且問你：「一」是什麼？「零」是什麼？這卻有點不好說。

年齡大一點的同學要費思索了，可是一位低年級的小朋友卻能夠勇敢而嚴正的回答我：

「一」是一個「數」！

不錯，「一」是一個「數」。我們現在能夠毫不遲疑的承認它是一個「數」。可是在很早的時候，人們卻不一定這樣想。試問，什麼時候我們纔知道有「數」呢？當着我們去計算的時候纔知道有「數」；換一句話說，就是在我們去數東西的時候，纔知道了「數」！東西多的時候纔需要去數，東西只有一個的時候，根本就用不着去數。所以認識「一」也是一個「數」，這件事情並不太早，甚至於到了十八世紀還有人說：「一不是數。」

不過「一」的確是一個「數」，不但是「數」，而且還是個「整數」；不但是「整數」，而且還是「整數開始的一個數」。

同樣的，「零」也是一個「數」。可是「零」的意義是「沒有」；「沒有」也是一個「數」，這比「一」更難說了。我們可以這樣想：整數要從「一」開始，所以「一是整數開始的一個數」。可是，要想表示「一」，最明顯的譬如說我們要用一根線的長去表示「一」，那麼應當從什麼地方開始呢？這個開始的地方它應當用怎樣的一個數去表示呢？——這個開始的地方，它的數便是「零」。所以我們說：「零就是『一』開始的一數。」那個意義也就是說：「零是『整數開始的那一個數』的開始的一個數。」這句話有點別扭，不大好說也不大好懂。可是這種情形沒法避免，我們要知道，越是最簡單的東西越不容易懂，平常所謂，不說還明白，越說就越糊塗了。

現在我們再換一個說法。首先，「一」和「零」都是一個數，這句話你可以承認。同時我們又知道，任何數除自己，結果總是「一」：任何數減自己，結果總是「零」。所以我們說：「一就是任何數自除之商，零就是任何數自減之差。」用算式表示，甲代表任何數；

$$甲 \div 甲 = 1, \qquad 甲 - 甲 = 0$$

現在我們要進一步，看一看它們的性情了。平常要想瞭解一個人的個性，需要從他

的行動上去觀察，所以要想認識「一」和「零」的性情，也要在它們的運算上去觀察。

第一，讓我們先看看，它們自己和自己發生關係的時候是什麼情形：

$1+1\neq 1$，　$1-1=0$，　$1\times 1=1$，　$1\div 1=1$

$0+0=0$，　$0-0=0$，　$0\times 0=0$，　$0\div 0=?$

在這裏：一加一不等於一，這很簡單；一減一結果是零，所以說，零和一是有極密切的關係的。除此以外都沒有什麼；不過零除零卻是——

「零除零還是零！」有人這樣說。

「不；零除零是一！」也有人這樣說。

可是，別慌，這個問題不簡單，咱們暫且留到後面再說。

第二，讓我們再看看，它們和另外的數發生關係的時候是個什麼情形。假如甲代表另外的一個數，不是「一」也不是「零」，那麼：

甲$+1=$甲右數，　甲$\times 1=$甲，　甲$+0=$甲，　甲$\times 0=0$

甲$-1=$甲左數，　甲$\div 1=$甲，　甲$-0=$甲，　甲$\div 0=?$

二加一是三，三加一是四，所以任何數加一是它「右邊」的一個數；七減一是六，六減

一是五，所以任何數減一是它「左邊」的一個數。其餘的都沒有什麼，只有「零除甲」又是一個問題。

我們知道，加減乘除不是四個獨立的運算，減是加的還原，除是乘的還原。所以用「除數」去除「被除數」求商，就和找一個數乘「除數」能等於「被除數」，實在是同一個問題。那就是說：

$0 \div 0 = ?$ 和 $? \times 0 = 0$, 是同一個問題，

$甲 \div 0 = ?$ 和 $? \times 0 = 甲$, 也是同一個問題。

但是任何數乘零都是零，不等於非零的數，所以：

$0 \div 0 = 任何數$, $甲 \div 0 \neq 任何數$

第一個答數是什麼都行，第二個答數是什麼也不行。這是一個奇蹟！

從上面這些關係裏，我們可以對於一和零的個性作個有趣味的對照：

第一，對於任何數，在加減的時候，「一」具有左右兩可的猶豫性，而「零」則具有消滅自己的犧牲性。

($甲+1=甲右數$, $甲-1=甲左數$; $甲+0=甲$, $甲-0=甲$.)

第二，對於任何數，在乘的時候，「一」具有隨人調遣的服從性，而「零」則具有獨斷獨行的獨裁性。

($\text{甲}\times1=\text{甲}$；　$\text{甲}\times0=0.$)

第三，一和一，零和零，在除的時候，「一」具有固執的拘束性，而「零」則具有無所謂的隨便性。

($1\div1=1$；　$0\div0=\text{任何數}.$)

第四，對於任何數，在除的時候，「一」具有毫無成見的依賴性，懦弱的不能支配性，而「零」則具有剛愎的強制性，頑固的搗亂性。

($\text{甲}\div1=\text{甲}$；　$\text{甲}\div0\neq\text{任何數}.$)

一和零，這兩個數的個性是有多麼顯著的不同！一個是極端的懦弱，一個卻又是極端的剛愎；一個太老實，一個太調皮。尤其是，因為在除法裏，零除零等於什麼都行，以外的數除零，等於什麼都不行，所以大家約定好，——在除法裏，什麼數都可以作除數，惟有零不能作除數；換一句話說，在除法的活動裏，我們要開除了零的學籍！這是一件頂要緊的事情，我們要好好的記住。不然的話，它就會在暗地裏給你搗亂，許多算題裏

的錯誤，大半都和零有關係！

最後我還要告訴你兩件事情：一，因爲在整數系裏，奇數的左邊是偶數，偶數的左邊是奇數；「一」既然是奇數，所以「零」就應當是偶數。二，一除了一以外沒有約數，所以「一」是質數；可是「零」的約數卻有無窮多，所以「零」又是個複數。假如給它們開一個玩笑的話，我們可以說：「一」是一個男性（奇數），「零」是一個女性（偶數）；「一」是一個光棍兒（質數），「零」卻有一個很大的家族（是複數）。「一」和「零」就是這樣兩個稀奇古怪的數。

數字的意義

數字有些另外的意義
在算術班上從來不會講到

數是什麼？數就是表示「多少」的一個觀念。

數字是什麼呢？數字就是表示「數」的一個記號。如一，二，三，四，五……要多少有多少。

現在我問你：這些數字是什麼意思呢？

什麼意思？怪事！這還用得着問麼？

是的，這句話我承認。這些數字的意義你都明白。——可是除去表明多少的觀念以外，有時候卻還有些另外的意義，這些都是我們在算術班上從來講不到，而在別處卻又常常遇到的。

現在讓我們把這些說法，整理起來看一看。

先說一。一是整數開始的一個數，所以字典上說：「一，數之始也。」但是除去這個本義以外，它卻是解釋最多的一個數字。

(1)因爲一是整數的一個基本數，一切整數都是從一發展出來的，所以有時候，我們就把一看成一切東西的來源，所謂「一生二，二生三，三生萬物」。漢書上說，一是「萬物之始」，就是這個意思。至於這個一到底是個什麼東西，我們實在搞不清楚。因爲大家相信，一切萬物都是從一個地方來的，所以就拿一來代表那個本源。譬如小孩子剛會說話的時候，知道的東西很少，他只能夠說：我吃「那個」，我唱「那個」，我穿「那個」，我要「那個」。「那個」可以代表一切；這個一也就彷彿是個「那個」。

(2)說一，就有個「總括」的意思。譬如說：「一切」都好，「一包」在內，「一齊」動員，「一網」打盡，「一概」不提，「一覽」無餘，「一筆」勾銷，「一生」，「一世」，「一輩子」，「一直」到「一股腦兒」都在內，都是「全體」的意思。

(3)說一，就有個「肯定」的意思。譬如說：「一準」到校，「一定」及格，「說一不二」，「有一無二」，「一心無二」，「一清二白」，「一刀兩斷」，「一是一，二是二」，絕不猶豫含糊。

（4）說一，是表示「單純」。譬如說：他們倆「一模一樣」，咱們大夥兒「一心一意」的，「一個勁兒」，絕沒有別的意思。

（5）說一，是表示「微少」。譬如說：「一鱗一爪」，「一星一點」，弄個「一官半職」，養個「一男半女」，這都是表示少的意思。

一既然表示少，所以在時間上就表示短促。例如：「一朝一夕」，「一時一刻」，「一剎半剎」，「一早一晚」，「一年半載」。

時間短促，在動作上就表示快，表示敏捷。例如：往下「一按」，往上「一撲」，往旁邊「一躲」，從後面「一抄」，伸手「一抓」，用腳「一踢」，用頭「一頂」，照着腦門兒「一錘」，——這一錘下來，只須「一坐」，「一扭」，「一歪」，「一閃」，就地「一滾」，縱身「一跳」，往前「一竄」，撒腿「一跑」，「一溜煙」就跑沒了影。這都是描寫的快，快，非常之快。像這一類的辭，可以找到很多很多。

再說二，二是兩個一。二又是第二個整數，所以就有「其次」的意思。

譬如說：有大門就有「二門」；有大花臉就有「二花臉」；正房以外有偏房，偏房又叫做「二房」；老藍以下有淺藍，淺藍又叫做「二藍」。

再說三，三是三個，三是第三。

數起來，一而再，再而三，所以三就是「多」的意思。譬如說：「三思」而後行，殺了個「三出三進」，結果是「三戰三北」，這都是多的意思，不一定恰好都是三次。

三既然表示多，再和別的數連起來，那就更多了。所以又表示繁多。譬如說：「三頭六臂」，「三妻四妾」。

三既是表示多，多就有個總括的意思。譬如說：走遍了「三街六巷」，找遍了「三親六故」，那就是說，大街小巷，遠親近鄰，都包括在內了。

同時，二和三，都不是一，所以又有不定的意思。

譬如說：詩經上有「二三其德」，表示一個人沒有定性，他是靠不住的。

再說：如果他有「三心兩意」，那麼「三年五載」是不準回來了。要是有個「三長兩短」，那麼「三朋四友」也都幫不上忙。——這都是表示不一定。

再就是，二和三都是屬於開頭的幾個數字，所以有時候又表示少。

譬如說：「兩三個」，「三兩個」，十之「二三」，「三言兩語」，「三拳兩脚」，

「三腳兩步」，「三三兩兩」，以及「三五成羣」。

三和四也常連在一起，表示紊亂，不正常，而且又有點瞧不起的意思。

譬如說：這個傢伙，說起話來「顛三倒四」的，作起事來，「差三落四」的，見了人「低三下四」的；像這樣一個「不三不四」的人，一定會搞得「三差兩錯」的。

接着說四，四的意思比較簡單。

四表示週全；——例如「四平八穩」，「四通八達」，「四面八方」。

四也可以表示紊亂；例如「四分五裂」。

再說五，五的意思也比較簡單。

五表示繁多，例如「五顏六色」，「五花八門」，「五光十色」，「五行八作」。

再說六，六倒是沒有什麼別的意思。勉強找一個，四五六叫做「六順」，那是說的一個順序。

再說七。七有「七巧」。因爲七月七是個巧日，所以七是個巧數；但是除此以外還沒有多少別的用法。

但是七和八卻是常常連在一起，專門表示紊亂。譬如說：「七上八下」，「七大八

小」，「七手八脚」，「七死八活」，「亂七八糟」，「七拼八湊」，「七零八落」，「七折八扣」，「歪七扭八」，「七大姑八大姨」，「七嘴八舌頭」。

我們表示紊亂常用七和八，但是英語裏卻是只用六和七，例如：on six and seven; at sixes and sevens; to sixes and sevens，都是「亂七八糟」的意思。

再說八。八是四的兩倍，四有週全的意思，八當然是更週全了。例如：「八面威風」，「八面玲瓏」。

再說九。九是三的平方，三表示多，九當然表示更多了。這在對照的比較上，表現得最清楚，例如：「九牛一毛」，「九死一生」。

末了說到十。因爲逢十進一，我們用的是十進位制，所以十就表示完全。譬如說：「十分」，「十成」，「十足」，這都是「十全」的意思。

同時十和八九連起來，例如「十拿九穩」，「十之八九」，因爲「八九不離十」，所以就有差不多的意思。

然後再說到百，千，萬。這些都是十的方數。

因爲一，二，三，開頭的那些數既表示少，那麼後邊的這些數就應當都表示多了。

嘗如在時間上表示長久：「百代」，「百年」，「百歲」，「千秋」，「千古」，「萬年」，「萬古」，「萬歲」。

在距離上表示遼遠：「百尺」，「百丈」，「千丈」，「萬丈」，「千里」，「萬里」。

至於表示繁多的那就更多了。

百有「百工」，「百家」，「百行」，「百官」，「百城」，「百頃」，以及「老百姓」；還有「醜態百出」，「百無禁忌」。

千有「千金」，「千刀」；萬有「萬衆」，「萬福」，「萬安」，「萬狀」，「萬象」，「萬全」，「萬能」，「萬急」，「萬幸」，「萬有」，「萬事」，「萬物」，「萬變」，「萬籟」。

至於百千萬連接起來，那就更——更多了！

例如：「百發百中」，「百戰百勝」，「千方百計」，「千瘡百孔」，「千奇百怪」，「千錘百練」，「千山萬水」，「千門萬戶」，「千秋萬歲」，「千頭萬緒」，「千言萬語」，「千思萬想」，「千呼萬喚」，「千辛萬苦」，「千刀萬剮」，「千妥

萬妥」，「千難萬難」，以及「成千成萬」，「整千整萬」的「千變萬化」，還有俗語裏的「千頃宅子萬頃地」。至於「千萬」，「萬萬」，「千千萬萬」，那都是說多，多到不能再多了。

還有，一個大數和一個小數放在一塊，可以對照比較，印象加深。

例如：「一舉兩得」，「一了百了」，「一順百順」，「一呼百諾」，「一刻千金」，「一日千里」，「一落千丈」，「一髮千鈞」，「一本萬利」。反過來說，就有：「九牛一毛」，「九死一生」，「百不居一」，「萬無一失」。

還有許多數字接連起來又可以表示一個「動態」。例如：「一一」介紹，「一來一往」，「一鎗一刀」，「一唱三歎」，「一板三眼」，像這樣「接二連三」的說下來，又有，「三天兩頭」，「三番兩次」，「三脚兩步」的跑，「再三再四」的勸，「三番五次」的請，「三令五申」，「三轉九彎」，——簡直是「一五一十」的說不清。

至於小說裏的「一不作二不休」，「一波未平一波又起」，以及小調裏的「一步兩步連三步」，都是利用數字可以給我們一個活潑的印象。

又像袁子才的費宮人刺虎歌，描寫費宮人行刺的動作：「一刀初刺虎猶縱，三刀四

刀虎不動。」利用連續數字表示連續動態；因爲中間缺少了一個「二」，便覺得急忙緊張，這又是多麼使人驚心動魄的一個鏡頭呵！

但是最後我還要告訴你兩個例，第一個是大家最熟悉的一首詩，描寫野外散步，——

一去二三里，
煙村四五家，
亭臺六七座，
八九十枝花。

利用表示不定數的數字，來表現一種悠閒的情緒。另外一個是描寫目前生活的困難，——

一貧如洗，
兩袖清風，
三餐不飽，
四處奔走，
五內如焚，
六神無主，

七竅生煙，
八面受窘，
九轉迴腸，
——十足要命！

利用數字的累進，使我們在情感上的壓力越來越重。兩相比較，一個是那麼閒散，無拘無束；一個是那麼逼迫嚴重，使每一個人都覺得不能夠再忍受下去了！

看到數字在情緒上的作用，我們對於「數字」的認識會有更進一步的了解。

數來數去的加和減

科學的任務在節省思想
就好像用機器減輕勞力一樣

「數」是數目，是一個名詞。但是「勞駕，請你數一數！」這樣一來，它就又變成了一個動詞。

名詞的「數」是「數目」，動詞的「數」是「計數」。這正好說明它們倆的關係。數的認識是和計數分不開的。假設一堆東西，不經過計數的手續，那麼我們就搞不清楚它究竟是有多少。

譬如在上體育課的時候，每一次開始，我們先要整隊，然後立正，向右看齊，向前——看，報數！

於是一二三四五六七八九十……

四十五！

好啦，一共四十五個人。

報數，就是一種計數；計數完了，這纔找到了人數。

你不要小看這件事，原始的人類他們就不懂。因爲先有了東西多少的判別，然後纔有計數的需要，然後纔有計數的方法。

假設現在擺在我們面前是一堆皮球，有白的也有紅的。如果我們要想知道這些皮球的數目，我們就得當體育先生，讓這些皮球整隊，立正，向右看齊，向前——看，報數！

可惜皮球不會說話。沒法子，只有讓我們替它說。於是：

一二三四五……

十二！好啦，一共十二個皮球。

接着我們就要提出一個問題來：什麼叫做加法呢？

加就是合併。不錯，這只是「加」這一個字的意義。至於「加法」，那是說的加的一種方法。

剛纔我們有一堆皮球，然而顏色不一樣。現在我們先按照它們的顏色把它分開，白

的一組，紅的一組。

白球擺成一隊，一二三四五六七八。

紅球擺成一隊，一二三四。

假如紅球和白球合併成「一」隊，先數白的，再數紅的，那就是：一二三四五六七八；接着再數紅的，九，十，十一，十二。

因此我們說，八個球加四個球，結果是：

$$8+4=12$$

這件事情太平常了，可是這裏面有一個最重要的事實。所謂加法，其實還是一種計數。數了一部份，「接着」再數另外一部份。

假設我們有兩班同學一塊上體育，甲班站排頭，乙班站排尾。甲班報數的結果是甲班的人數，乙班報數的結果是乙班的人數。如果乙班報數的時候是「接着」甲班數下去，那麼最後的數目就是兩班人數之和了。

我們再講到減法。什麼是減法呢？減法還是計數。不過減法的計數和加法的計數，兩個的「次序」不一樣。加法是繼續的往後數，減法卻是倒過來往前數。

還是數那一隊紅白球的混合編隊，總數是十二。數到頭，然後再倒轉過來數，一，二，三，四；紅的數完了，剩下的只有白球八個；八就叫做十二和四的餘數。

這兩種手續的次序，對照起來，是下面這種樣子。

(1) 1,2,3,4,5,6,7,8;1, 2, 3, 4.

加法: 1,2,3,4,5,6,7,8;9,10,11,12.

(2) 1,2,3,4,5,6,7,8;9,10,11,12.

減法: 1,2,3,4,5,6,7,8;~~9~~,~~10~~,~~11~~,~~12~~.

(4)(3)(2)(1)

數過去，再數過去，這就是加法；數過去，再數回來，這就是減法。

可是平常我們計算加減的時候，卻不是用這個辦法。我們說，三加五是八，八減六是二，——根本一數也沒數。這是人類的聰明，因為人有記憶的能力。

為什麼三加五是八呢？我們一看就知道。其實這個一看就知道，卻是不知道算了多少次的一個經驗。不信的話，讓我們的小弟弟或是小妹妹加加看。他們沒有這個經驗，他們還不能記憶；沒法子，那就只好老老實實的數。

馬哈(Mach)曾經這樣說過：「第一次當我要在五個東西上加以別的七個時，我把全部計數了一遍。但是後來我發現，前五個可以不必再數的，於是我就省去了一步麻煩。再後來，能夠記得五與七之和是十二，那麼我就完全不用計數了。」這正好是對於這種經過的一個敍述。只要根據經驗再加上記憶，對於加減的計算就不必數來數去了。

接着我就又想到了乘法。三三見九，四四一十六，怎麼知道的？根據乘法表，也就是九九表。九九表怎麼來的？那不過也是根據加法經驗所彙總的一個結果。

我們記得三個四相加是十二，所以我們說三四一十二；我們記得四個七相加是二十八，所以纔有四七二十八。最初作這個整理工作的人，是値得使我們感謝的，因爲有了乘法表就能夠使我們節省了無數的時間和精力。

只要記得住加法的結果，就可以節省了計數的手續；背過了乘法表，我們就不必再去算加法。腦子變成了計算機，就好像芝加哥的屠宰機一樣，這邊裝進活豬去，那邊就會跑出火腿和香腸來。

馬哈說，科學的任務是在節省思想，就好像用機器去減輕勞力，這兩件事情是完全一致的。

圖案似的乘法

事實告訴我們
一切都是在不斷的往前進步

什麼是乘法呢？加法的簡便算法！

什麼是除法呢？減法的簡便算法！

這是大家都已經知道了的東西。可是，世界上的一切事情，都是相對的，沒有絕對的。除法雖然是一種「簡便」的算法，但是有時候還是會碰到一些除不盡，算不清的長除法；乘法雖然是一種「簡便」的算法，但是有時候也還是會碰到一堆一堆的，一行一行的，老是寫不完，還要進位的麻煩的乘法。所以一等到入中學再學算術的時候，便馬上先要學習一些速算法，當着我們學會幾種速算法的時候，我們便會覺得平素的算題，有時候的確是太笨了。

然而，話又說回來啦。無論哪一種學問和知識，都是無數過去人的心血和經驗。我

們雖然現在覺得那些算法是太笨了．可是過去的算法比現在更笨。如果我能夠拿事實來證明這句話是對的，那麼你就不會以爲我的話是太冒昧了。

簡單一點，就只說一說乘法吧。

現在我們的乘法，大家都知道是自右而左，先從個位數乘起，然後再乘十位數，再乘百位數。這個「自右而左」的先後的次序，在我們也許是覺得很平常，因爲我們的習慣，寫字總是自右而左的。可是要從整個的算學寫法的習慣上來說，那就不然了；一切都是「自左而右」的！甚至於就在除法的演算裏，不也是先除千位數百位數，後除十位數個位數麼？爲什麼只有在加減乘的時候，演算的次序剛剛把它顛倒過來呢？

少微靜心一想，理由是很簡單的，因爲這只是爲了進位的方便。逢十進一，算完了百位數十位數便馬上把進位數添了進去，使我們省卻了許多的麻煩。像這樣簡單的事實，還不是最平常最明顯的麼？——可是這並不是古人們所能想到的。

你笑？據說在希臘古代，只用算盤，不用數字，這個是不用提了。即便到了第六世紀的時候，有一位算學家，名字叫做尤陶斯（Eutocius），他的乘法還是像下面這樣演算的：

$$
\begin{array}{rrr}
 & & 265 \\
 & & 265 \\
\hline
40000, & 12000, & 1000 \\
12000, & 3600, & 300 \\
1000, & 300, & 25 \\
\hline
70225 & &
\end{array}
$$

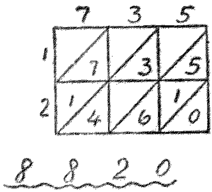
從上面這個演草裏可以看出來，他是先用200乘的，後用60乘，最後再用5乘。因為排列的不得法，便不能不分別寫了九個數目，在求總和的時候，把演算變得非常之不方便。

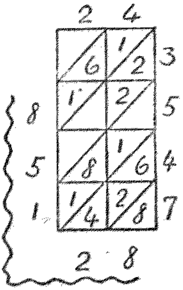
像這樣愚笨的算法，不但在希臘是這樣，即使在印度古代也有同樣的情形。譬如：254＋663，先算2加6是8，5加6是11，所以8便變成了9；然後4加3是7。所以結果等於917。同樣的，821－348，便有兩種算法。一種是：11減8是3，11減4是7，7減3是4，所以等於473，這和我們現在的算法是一樣的。另外一種算法是：11減8是3，12減「5」是7，8減「4」是4，結果是473。前面那種算法可以說是「預借」，後面這種算法卻是「實支實銷」；處理的手續雖然不同，然而結果卻並沒有兩樣。後面這個方法想得總還算聰明，用起來也還簡便。

但是乘法卻有點討厭了。一個單位數乘多位數的時候，是先「自左而右」的，譬如：569×5，5乘5是25，5乘6是30，所以25便變成了28；然後5乘9是45，所以0就又變成了4。結果，乘積是2845。假如多位數乘多位數呢？那個演草的寫法剛和現

在相反，被乘數在下邊，乘數在上面。乘的時候，還是自左而右，先用乘數的第一位數乘、再用乘數的第二位數乘。乘的結果，也並不和我們現在一樣，每乘一次另外寫一行；他們卻是無論多少，一概只擠在一行裏，假如有進位，便把舊數擦了去，然後寫上新的結果。像這樣，乘了再乘，修改了再修改，一直到最後纔把乘積寫好。在當時他們的工具是一塊小板，把紅粉末灑在上面，然後再用一枝小棍在上面寫；或是用一塊小板，油上一層薄的白油，然後用一根樹枝做成的筆在上面寫，這些字跡都是非常容易擦去的。因爲這種寫字板太小了，不能讓演算占的地方太多，所以便只好把結果擦了去再修改。

然除此之外，還有另外一種演草的寫法，這寫法是非常整齊清楚。舉兩例作樣子：





在這裏，我們先畫好幾個正方形，然後畫好斜線。把被乘數寫在上邊是橫的，把乘數寫在旁邊是豎的。然後分別相乘，把乘積寫在方格裏，個位數在斜線的下邊，十位數在斜線的上邊。乘完以後，再把方格

裏的數，斜着一行一行的加起來（同時也可以進位），這就是所求的乘積。

這一個演算的寫法，對於「進位」的手續按排得很巧，不但整齊清楚，而且還很好看，畫起來也很好玩。那簡直是一幅規規矩矩的圖案畫！所以在中國，從前曾經給它起了一個很好聽的名字，叫做「鋪地錦」。這個算法也有人以爲並不是創自印度的，在更早的阿剌伯人便已經知道了。無論如何，它是一個古老的算法是不成問題的。

可是，這個寫法好看是好看了，不過終究太麻煩，太不方便。只要和我們現在的寫法一比較，便覺得現在的寫法是更進一步了。

從上面這一個關於乘法歷史的簡單敍述，使我們相信一切都是在不斷的往前進步。所謂「後來居上」，實在是一句不錯的話。

搞不清楚的除法

在這裏也說明了——

人類的思想是怎樣的在進步

乘法太麻煩，

除法搞不清，

比例更糊塗，

演算要發瘋。

據說在十六世紀的時候，歐洲大陸曾經流行過這麼一首詩。在乘法裏，乘的次數越多，乘積的位數越多，這當然是一件很麻煩的事情。除法到底又爲什麼搞不清呢？

我們要知道，像現在我們通常用的除法，已經是十七世紀以後的事；在以前，卻和現在用的大不一樣。

就說十六世紀的時候吧。在十五十六世紀中間，曾經有一位意大利人叫做派塞奧利(Pacioli)的著了許多關於算學的書。在他的著作裏曾經提到八種乘法和四種除法。在四種除法裏，末後一種，當時最流行。那種寫法和現在的演草還差不多，它是像下面這種樣子。

例如用35去除4730，先把被除數寫在中間，除數寫在底下，商數寫在右邊，——至於餘數，恰好和我們現在寫的地位相反，統統寫在除數的上邊。

我們知道，除法算的就是減法，每逢除一位，就要減一次。然而在那時候，所有的減數都不寫出來，利用心算，只寫餘數。同時卻把被減數抹掉了，看起來倒有點像我們現在的約分。所以上面那個算題的演草，結果就變成一堆數目字。

首先是：

```
被除數 4730(
  除數 35
```

其次是：

```
  餘數 12
       4730(1 商數
       35
```

再則：

```
       12
       4730(1
       355
  移位  3
```

然後：

```
        3
       12
       4730(13
       355
        3
```

接着：

```
   1
   3
 128
4730(13
 355
   3
```

再寫：

```
   1
   3
 128
4730(13
 3555
  33
```

再除：

```
   1
  33
 128
4730(135
 3555
  33
```

最後：

```
   1
  33
 1285
4730(135
 3555
  33
```

那就是商數是135，餘數是5。

4730÷35＝135……餘5

最後的全部演草好像一隻船，上面載滿了人，而且每個人又都帶着一枝槍，——你看上面那些3不是像一個大兵拿着槍，彎了腰正預備往前搜索麼？你看下面的那些3和5不是又像些兵拿着槳正在划船嗎？那是一隻什麼船呢？

對了，一隻戰船！——你看那個2多麼神氣！那個地位最高的1又是多麼威風！

因此這種除法叫做「戰船除法」。

這種除法，從最後的結果看起來似乎有點好玩，可是在演算的時候，卻頗爲討厭。

然而，如果再倒回去五百年，在十世紀的時候，那就更叫人討厭了。

首先我們應當說明，那時候的演算不用筆，而用算子，用角質作的算子，就好像現

在我們玩的棋子一樣。那時候不用紙，卻用一塊平滑的板子，板子上分成若干行，也就好像我們玩的棋盤一樣。每三行算一組，用羅馬字母IXC表示個位十位百位。把算子擺在上面，表示數目，也和現在我們的記數法完全一致，——不過算子裏沒有零。空位就表示零，那又和我們用的算盤一樣了。

但是算起除法來，卽便算一個單位的除法，也是夠麻煩的，而且和我們現在用的算法完全相反。

譬如用6除456，我們是用6去除，他們卻是用4去乘；我們算減法，他們算加法。整個的手續如下面這種樣子：

先把被除數擺好，然後把除數6擺在上邊，6的上邊再擺上4(a)。

C	X	I
		4
		6
4	5	6

(a)

先用4乘4得16，寫在45下邊，然後抹去被除數裏第一位4，挪在下面的十位數裏作爲商數(b)。

C	X	I
		4
		6
4	5	6
1	6	
	4	

(b)

然後用4乘1得4，寫在5 6的下邊，然後抹去百位數的1挪在下面的十位數裏，

4的下邊(c)。

C	X	I
		4
		6
4	5	6
1	6	
	4	

C	X	I
	4	
	1	

(c)

再把十位數裏的564加起來得15；抹去564，把15分別寫在百位和十位數裏，結果變成(d)：

C	X	I
		4
		6
4	5	6
1	6	
1	4	
	5	

C	X	I
	4	
	1	

(d)

然後照樣4乘1得4，寫在5下邊，抹去百位數的1，挪在十位數下面1的底下(e)。

C	X	I
		4
		6
4	5	6
1	6	
1	4	
	5	
	4	

C	X	I
	4	
	1	
	1	

(e)

十位數裏，5加4改成9，四九36，分別寫在十位和個位數裏；抹去十位數裏的9，挪在個位數下面的底下(f)。

C	X	I
		4
		6
4	5	6
1	6	6
1	4	
	5	
	4	
	9	
	3	

C	X	I
	4	9
	1	
	1	

(f)

然後照樣4乘3得12，抹去3，挪在個位數下面9的底下(g)。

C	X	I
		4
		6
4	5	6
1	6	6
1	4	2
	5	
	4	
	9	
	3	
	1	

C	X	I
	4	9
	1	3
	1	

(g)

繼續的4乘1得4，抹去1，挪下來；二六12加2加4改爲18；接着再4乘1得

4，抹去1，挪下來；3加4得12，再用4乘，再抹1，再挪下來，如(h)：

被除數裏，個位數是6，6除6是1，寫在下面的個位數裏；然後把下面的商數分別加起來，結果商數是76。被除數裏統統抹完了，所以沒有餘數。結果如(i)：

(h)

C	X	I
		4
		6
4	5	6
1	6	6
1	4	2
	5	4
	4	8
	9	4
	3	2
	1	4
	1	6
	1	
	4	9
	1	3
	1	1
		1
		1

(i)

C	X	I
		4
		6
4	5	6
1	6	6
1	4	2
	5	4
	4	8
	9	4
	3	2
	1	4
	1	6
	1	
	4	9
	1	3
	1	1
	7	1
		1
		1
		6

如果把這個演算和現在我們所用的（如上兩式）對照起來：

$$456 \div 6 = 76$$

$$6\overline{)456}$$
$$76$$

一個是那麼麻煩，一個是這麼簡捷，你就可以看出來，這兩種算法繁簡相差有多麼遠！無怪乎當時的人們對於除法搞不清，就算

現在，看過一遍上面的例題之後，你能夠照樣的再默寫一遍嗎？

這個算法，麻煩固然麻煩，可是也有它的好處。第一，上面已經說過了，所有的減法都改成加法了；第二，所有的乘法只有一位數乘一位數；第三，每一步的作法都是固定一致的；第四，凡是用比10小比5大的除數，都一律改成比5小的乘數了。例如不用

6除而用4乘，不用7除而用3乘；6和4，7和3，相加都是10，在算學裏，我們說3是7的補數，4是6的補數，所以這種算法也叫做「補數除法」。

最後我們還要說明一下這個算法的道理。

爲什麼這個算法是對的呢？每逢我們乘完一次就把第一位挪下來，放在下面的第二位裏作爲商數，這是什麼道理？——原來這就是用10去除所得的商數。

可是原來的除數是6，現在的除數是10，那麼結果商數就變大了。譬如6個人分四百五十六枝鉛筆，我們先把那四百枝按十份分，每一個人得四十枝。然而實際上只有六個人，所以另外那四份共計一百六十枝，當然還要放在餘下的鉛筆裏邊再去分，這就是我們把4乘4得16分別再寫在被除數裏的理由。

然後同樣的再分這一百枝，分十份，每份十枝，下餘四十枝。再把這四十枝和那六十枝以及原來的五十枝，加起來共計一百五十枝。然後再分這一百五十枝裏的一百枝。

照這樣繼續的分了再湊，湊了再分，先分整百的，再分整十的，結果越分越少，一直到分完了或是不夠再分的時候爲止，這就是補數除法的理由。

現在看起來，這種算法有點太笨，可是笨也有個笨的想法，而且這裏面也有一點道

理，這就是我們的第一個感想。其次，就是在現在，對於沒有學過除法的人，假設讓他們去分東西的時候，按照剛纔所說的，仍然還不失為一個最容易想到，最容易處理的辦法。這樣想起來，補數除法的來源，可能是實際生活裏產生的經驗。

然而差不多同時，阿拉伯的計算法傳來了，那又是另外一種算法。譬如用三百二十四去除四萬六千四百六十八，先把被除數寫下來，除數寫在下邊，商數寫在上邊，餘數寫在更上邊。結果是：如(第一式)。

然後除數移位，得第二位商數4，依次減去乘積，得餘數一一〇：如(第二式)。

```
餘數 140
商數 1
被除數 46468
除數 324
```

(第一式)

```
 110
 22
140
14
46468
324
 324
```

(第二式)

再把除數移位，得末位商數3，依次減去乘積，得餘數一三六，結果總算式變成：

```
   136
   24
  110
  22
140
143
46468
324
  324
    324
```

46468÷324=143……餘136

這種算法雖然也很麻煩，可是比較那個補數除法已經省事的多了。所以等到這種算

法傳到歐洲大陸以後，大受人們的歡迎，他們把這種新方法叫做「金除法」，把原來的除法叫做「鐵除法」。

但是這個「金除法」，在阿拉伯早就知道了，比「鐵除法」還要早知道一百年呢。

把「金除法」和「戰船除法」對照起來，「戰船除法」是「金除法」的一個形式的修改。第一，把商數拉到被除數的右邊，第二，把減過了的被減數隨時抹去，第三，把所有的數字寫法集中了。這是一個進步。

從這個演變上看起來，「金除法」代替了「鐵除法」，「戰船除法」又代替了「金除法」，現在的除法又代替了「戰船除法」。從這裏也說明了人類的思想是怎樣的在進步。

四則和六則

算學的運算沿着這個路線發展起來

今天剛好沒有事，使我又想起了我們關於算學的談話。但是拿起筆來，老是想不好題目；於是我就閉了眼睛，讓我的思想通過了你所已經學過了的整數、分數、小數、名數，以及百分法和利息算法。這樣便使我三番五次的碰到四個關於運算的名字，——那就是加、減、乘、除。

我覺到這是一個再適合沒有的話題。

因爲，我們已經想到：整數有整數的加、減、乘、除，分數有分數的加、減、乘、除，複名數有複名數的加、減、乘、除，一切數目的「基本」關係，從初等算學到高等算學，都不外是這四種花樣；這是一。其次，就算術裏想，無論是比例、百分法、利息算法，以及高等算學裏面的各種複雜運算，其實都不外是從這四種基本關係裏發展出來的；這是二。

大 大 小 小

那麼，照這樣講，加、減、乘、除在算學裏面的重要是不成問題的了。但是我們還想從這四種基本的運算裏，再選擇一個更原始更基本的運算，那就是——你猜，大家也很容易想到的：加法！

加的意思是什麼呢？那很簡單，不過是一個「合併」的意思。然而，問題卻也就從這裏開展起來。譬如說，隨便兩個數，一個是甲，一個是乙；加法就是要討論這樣一個問題：

$$甲+乙=?$$

我們顯然是要找個第三數丙，能夠使

$$丙=甲+乙,$$

甲乙丙三個數，關係的密切是用不着再解釋的。

馬上兩個問題便接着來了。假如丙甲知道了，乙應當是什麼？假如丙乙知道了，甲應當是什麼？那就是要解決：

$$甲+?=丙, \qquad ?+乙=丙$$

這樣便來了減法。我們知道：

$$乙=丙-甲，\qquad 甲=丙-乙$$

所以說，減法只是加法的一種「還原」的算法。

另外，在加法裏，假如所有相加的數都相等，譬如：甲加甲，再加甲，再加甲。這樣，不但太嚕囌，而且也麻煩。我們很容易想到，用不着說得這樣笨，只須說有「三個甲」相加。在這裏便又來了乘法：

$$3\times 甲=甲+甲+甲$$

那末乘法又不過是加法的一種「簡便」算法了。

現在便只剩下除法了。除法有兩種看法。

一種是從乘法裏邊想到的，正和減與加的關係一樣。現在是：

$$甲\times 乙=丙$$

從這裏便得到了：

$$甲\times ?=丙，\qquad 乙=丙\div 甲$$

$$?\times 乙=丙，\qquad 甲=丙\div 乙$$

所以除法原是乘法的一種「還原」的算法。

另外一種是從減法裏邊想到的，正和乘與加的關係一樣。所謂（丙÷甲），不過要研究，從丙數裏邊能夠減去幾個甲。因爲丙是一個有限的數，所以我們繼續相減的結果當然不會「取之不盡」。這樣最後就有兩種情形，一種是剛好取盡沒有剩餘，另一種是取到最後，剩餘太小，不能再取。前一種叫做「除盡」，後一種便是「除不盡」；剩餘的是「餘數」，能夠取出的個數便是「商」。

因此，（丙÷甲）只是研究了下面這樣一個問題：

丙－?甲＝0（或是＜甲）

這樣，除法就又是減法的一種「簡便」算法了。

所以加、減、乘、除，四種關係太密切了，因爲轉來轉去，都不外是一種加法的發展：

減是「加」的還原，

乘是「加」的簡算，

除是「加」的簡算的還原，

同時又是「加」的還原的簡算。

加、減、乘、除，實在是一種東西的四個方面！

再進一步：從加法的化簡得到乘法的關係上，使我們很容易想到，是不是乘法也還有一種更簡便的算法？

這個問題想得太好了！因此我們就不能不再進一步談到一種更高級的演算，叫做乘方。像乘法一樣，我們採用了這樣簡便的一種記號：

$$甲+甲+甲=3甲, \qquad 甲\times甲\times甲=甲^3$$

用一個數字放在甲數的左邊，表系相加的次數；用一個小數字放在甲數的右肩上，表示相乘的次數。這種同一個數目相乘的演算便叫乘方。

同樣的，乘方也有一種逆算，叫做開方。在下面這同一個關係式裏：

$$甲^{乙}=丙 \qquad (例如:3^2=9,\ 4^3=64.)$$

乘方和開方便是分別研究下面這兩個問題：

$$甲^{乙}=?$$

$$?^{乙}=丙, \qquad 甲=\sqrt[乙]{丙}$$

$$(例如:\ ?^2=9,\quad ?=\sqrt[2]{9}=3.)$$

在這裏當然還可以想到另外一個問題，就是：

$$甲^{?}=丙;\quad （例如：5^{?}=625，?=4）$$

但是要解決這個問題，那就要牽扯到較深的算學了。

不過，我們可以想想開方和除法的關係。譬如四開二方，那不過是研究下面這個問題：

$$4\div ?=?$$

這兩個「?」要限定是「同一」個數。這個數我們可以找出來：

因為 $4\div 2=2$, 所以 $\sqrt[2]{4}=2$.

同樣的，八開三方，那就是研究：

$$8\div ?\div ?=?$$

因為 $8\div 2\div 2=2$, 所以 $\sqrt[3]{8}=2$.

所以不但乘方是乘法的一種「簡便」算法，而且開方也是除法的一種「簡便」算法。

現在我們應當提出最後的一個問題了，就是：乘法既然我們又能夠找到一個更簡便的算法，那麼關於乘方，是不是還能再找到一個「更簡便」的算法呢？

「應當也有！」我想你一定會這樣想的。

可是這就錯了！至少到現在爲止，許多人的勞力都失敗了！這個原因在哪裏呢？因爲加法和乘方都有一個共同的性質，就是服從交換律：

$$甲+乙=乙+甲 \quad (例如: 2+3=3+2.)$$

$$甲\times乙=乙\times甲 \quad (例如: 2\times3=3\times2.)$$

可是這個性質，在乘方裏便失去了：

$$甲^{乙}\neq乙^{甲} \quad (例如: 3^2\neq2^3,\ 2^4\neq4^2.)$$

乘方找不到更簡便的算法，這是一個主要的原因。

從加、減、乘、除，到乘方和開方，一方面使我們對於數的認識越來越多，一方面又使我們對於數的運算越來越複雜；可是在另一方面，也使我們對於解決算學問題的能力越來越大！

一部算學，在運算上沿着這個路線慢慢的發展起來，所以這六種運算實在是非常重要的。通常，我們把加、減、乘、除叫做「四則運算」，那麼再加上乘方和開方之後，我們就無妨總稱它們是「六則運算」了！

種種還原

把各種情形都考慮到了
我們纔能夠圓滿的解決一個問題

我們已經知道，加法的還原是減法，乘法的還原是除法。那麼反過來呢？減法和除法的還原算法應當是什麼呢？

我想，大家會毫不費思索的說：加法的還原既然是減法，減法的還原就應當是加法；乘法的還原既然是除法，那麼除法的還原也就是乘法。——其實，這句話又是對了一半。

不信，就讓我們試試看。

譬如：

甲－乙＝丙，　　甲＝乙＋丙

甲÷乙＝丙，　　甲＝乙×丙

這可以證明上面那個看法是對的。

然而，如果知道了甲和丙，我們去求乙呢？

雖然　甲－乙＝丙；　然而　乙＝丙－甲

雖然　甲÷乙＝丙；　然而　乙＝甲÷丙

這就又證明上面那個看法是不對的了。因爲在這兩種關係裏，減法的還原還是減法，除法的還原還是除法。

所以我們說：上面那個看法只算對了一半。這是因爲我們的思索不週密的緣故。

其實，就原來的那個說法：加法的還原是減法，乘法的還原是除法。在實際的算題上，也要有種種的條件。第一，必須知道原來是幾個數相加？或是幾個數相乘？第二，在這些數裏必須只有「一個」數不知道的時候，纔能夠「確定」的求出來；不然，就只好瞎猜。

譬如：兩個數相加是18，一個數是10；那麼另外一個數就是8。三個數相加是18，一個數是8，一個數是6；那麼另外一個數就是4。假設僅僅知道兩個數的和是18，你能夠「確定」原來是哪兩個數嗎？我想，你要搖頭。假設僅僅知道和是18，你能夠「確

定」原來的數是些什麼數嗎？那你就更要搖頭了！

然而，我們還是可以猜，並不是瞎猜。

暫且舉一個簡單的例，例如和是5。那麼——

如果是「兩」個數相加的時候，不外1,4; 2,3; 3,2; 4,1。假如不論次序的話，那就只有1,4和2,3。

如果是「三」個數相加的時候，同樣的不外1,1,3; 1,2,2。

如果「四」個數相加的時候，那就只有1,1,1,2。

如果「五」個數相加的時候，那就只有1,1,1,1,1。

不過在這些想法裏，還是有幾個條件。

第一，我們沒有把零看成一個數。假設把零也算進去，那麼——

兩個數相加：就有0,5; 1,4; 2,3。

三個數相加：一個0的時候，有0,1,4; 0,2,3。

兩個0的時候，有0,0,5。

沒有0的時候，有1,1,3; 1,2,2。

四個數相加：一個0的時候，有0,1,1,3;0,1,2,2。

兩個0的時候，有0,0,1,4;0,0,2,3。

三個0的時候，有0,0,0,5。

沒有0的時候，有1,1,1,2。

五個數相加：一個0的時候，有0,1,1,1,2。

兩個0的時候，有0,0,1,1,3;0,0,1,2,2。

三個0的時候，有0,0,0,1,4;0,0,0,2,3。

四個0的時候，有0,0,0,0,5。

沒有0的時候，有1,1,1,1,1。

5的組成，不外是上面這些情形之一。

此外，還有一個條件，我們所考慮的，原來的數都是整數。假設是分數或是小數，那就更複雜了！

但是有一點使我們有充分的自信：我們是考慮的各種「可能性」，然而不是瞎猜。

所以我們可以斷定：只要5是用整數加起來的，那麼原來的數，不外上邊這種種情形之

一。我們雖然不能確定倒底是哪一組，可是它們的範圍，卻逃不出我們的手掌去。

加法的還原是這種情形，乘法的還原也是這種情形。

但是乘法的還原還要簡單的多。因爲只要乘積不是0，那麼原來的乘數絕對不會有0。而且1可以是任何數的乘數，我們也可以把它省略去。所以乘法的還原，結果就簡單的多了。例如12的還原，不外——

兩個數的時候，$2\times6, 3\times4$;

三個數的時候，$2\times2\times3$.

所謂考慮種種可能性，這對於我們的思想是一個極有用處的訓練。平常對於一件事情的處理，往往是聽了別人說好，我們也跟着說好；聽了別人說不好，我們也跟着說不好；這是要不得的！有人把這種態度叫做「尾巴主義」；當尾巴就是盲從，閉了眼睛跟着人家瞎跑，這是一件頂危險的事情。

我們要考慮，要多方面的考慮。把各種情形都考慮到了，我們的心裏就有一個比較。有了比較就可以有一個選擇。能夠這樣，纔不是盲從。

其次，如果把各種情形都考慮到了，那麼，遇到順利的時候，我們纔知道怎樣去愛

惜這個機會，怎樣去利用這個機會；假如遇到困難的時候，我們事前也好有一個充分的準備。

看過「三國演義」的，知道諸葛亮無論遇到什麼事情，總是有錦囊妙計，這不過是因爲他知道的多，考慮的週到。但是，「三個臭皮匠，賽過一個諸葛亮」；人多心眼多，人多了知道的更多，考慮的更週到。所以最好的學習不是自己自修，而是大夥兒在一塊，集團的研究，集體的學習。

科學的研究，要考慮各種可能性；算學的研究，也要考慮各種可能性，所以，我們必須要及早開始這一方面的訓練。

同時，從上面又可以看出來，條件的束縛越多，那麼可能的情形就要越少。在算學裏，關於加法的還原不大常用，但是乘法的還原用的卻很廣。一個積的乘數也叫做因數；把一個數的因數找出來，這就是因數分解。

所以，因數分解也是乘法的一種還原。譬如90：

$$90=2\times45=2\times9\times5=2\times3\times3\times5$$

這些還原不止一種。然而，如果把分解出來的因數限制於質數，那就只有最後一種了。

因爲9和45都不是質數。

所以我們說：一個數的因數分解，答數是不一定的；然而一個數的質因數分解，結果卻是一定的，而且只有一種。

學會了質因數分解，我們就可以求出許多數的最大公約數和最小公倍數；能夠求最大公約和最小公倍，然後對於分數的演算纔能化簡。

但是質因數分解的方法並不是一件很容易的事情。因爲關於質數的研究，我們知道的還很少。譬如說：隨便給我們一個數，只要稍微大一點，我們能夠斷定它是質數呢，還是不是質數呢？這個問題就不容易答覆。再舉一個例，譬如知道了一個質數，那麼比這個質數再大一點的質數應當是個什麼數呢？這都是到現在還沒有完全解決的問題。

然而在算術裏，實際上遇到的困難還不是這些。我們對於一個數的質因數分解作不對，多半是因爲我們考慮得不週到的緣故。

所以訓練考慮各種可能性，這實在是非常重要的一件事情。不但學算學應當注意這一點，即便學別的科學，也應當注意這一點。

不必要的算式

不列算式也能夠得出答數來
並且比列算式還簡捷

按照我們的習慣來說，每逢作一道文字題，就得要列一個算式。如果遇到一個題目不會算，只要有誰肯給我們寫出一個算式來，我們就心滿意足了；我們以爲：所謂演題，就等於列算式。

其實，這完全錯了。

演一道題，不應當僅僅列出算式來，最要緊的，還是要說明解這一個算題的道理。

爲什麼要這樣解呢？爲什麼這個解法是對的呢？——這些問題纔是最重要的關鍵。

往往有人喜歡記公式，公式就好比一部機器，只要把題目上給我們的數從這邊裝進去，那邊就會跑出答數來。不錯，這樣最簡便，最省力氣。然而，如果僅僅知道用機器，不懂得機器的原理，卻是最危險的事情。——萬一這部機器出了毛病，我們就毫無

辦法；萬一這部機器用錯了，說不定就會有悲慘的事件發生。

我們會用公式固然很好，可是公式忘了就沒法可想；而且用錯了公式，比不會算還要糟糕。因此，懂得算理實在比記公式還要重要；說明解題的道理，實在比列出一個算式還要重要。

學完了算術以後，先生的補充教材常常是一些四則問題。這些問題的解法有些是有一定的公式的。譬如說，

關於和差問題的：

(和＋差)÷2＝大數

(和－差)÷2＝小數

關於雞兔同籠問題的：

(足數－頭數×2)÷2＝兔數

(頭數×4－足數)÷2＝雞數

像這樣一類的公式，大概有不少的人都記得很熟，——可是能夠說得清楚爲什麼這樣算的，恐怕要比記得熟的少得多了。

假如我們不能夠說明白爲什麼這樣算，那麼，這些公式在我們的理解上還有什麼用處？所以，光記公式不懂算理，實在是不應該的。

可是你不要認爲我是反對用公式的。只有懂得算理以後再用公式，纔算合理；要不然，那就是不應該的。

其次，借着這個機會，我還要糾正你一個觀念。不要認爲一切算題都必需列出一個算式，這實在是不必要的。而且，有時候，不列算式也能夠得出答數來，並且比列算式還要簡捷，還要容易懂。

你不信，咱們只要舉出幾個算題來看看。

最容易想到的，就是那些所謂「歸一法」的問題了。

例一：有一本書，六個人三十天可以抄完，問十八個人幾天可以抄完？

〔解〕 六個人，需要三十天；

一個人，需要一百八十天；

十八個人，需要十天。

其次就是分數裏的問題了。

例二：有一件工程，甲乙二人合作，兩天可成；甲一個人獨作，三天可成；問乙一個人獨作，需要幾天？

〔解〕甲一個人作，需要三天；

三個甲呢？需要一天。

甲乙兩個人作，需要兩天；

兩個甲，兩個乙，需要一天。

所以一個甲相當於兩個乙。

兩個乙作，需要三天；

所以一個乙作，需要六天。

再則關於年齡的問題。

例三：兄弟兩個人，哥哥年齡是弟弟的五倍，五年以後，哥哥年齡是弟弟的三倍。問哥哥現在多大？

〔解〕現在，哥哥的年齡是弟弟的五倍；

假設弟弟每年添一歲，哥哥每年添五歲，

那麼哥哥的年齡還是弟弟的五倍。

但哥哥每年只添一歲，

那就是哥哥每年少添四歲，

五年少添二十歲。

因此哥哥的年齡變成弟弟的三倍，卽少了兩倍。

到那時候，弟弟年齡的兩倍是二十歲，

一倍就是十歲。

——五年以後，弟弟的年齡是十歲。

那麼現在弟弟的年齡是五歲。

所以現在哥哥的年齡是二十五歲。

又如關於搬運的問題。

例四：東倉存米五十袋，西倉存米三十袋。每天從東倉取出八袋，從西倉取出五袋；問幾天以後東倉存的袋數是西倉的兩倍？

〔解〕 假設原來東倉存的袋數是西倉的兩倍，

而且每天從東倉取出的袋數也是西倉的兩倍，
那麼無論什麼時候，東倉存的袋數總是西倉的兩倍。
現在東倉存的比西倉存的「袋數的兩倍」少十袋，
每天東倉取出的比西倉取出的「袋數的兩倍」少兩袋。
原來袋數短十袋，現在每天少取兩袋，
五天以後，就剛好糾正了這個差額。
——所以到那時候，東倉存米就應當是西倉的兩倍。

上面這兩個例題，看起來也許比算式麻煩得多，可是如果不把推理的來龍去脈搞清楚，算式就寫不出來。算理是個根，算式是枝葉花；沒有根就不會生枝長葉開花，更不會結果——得到答數。

但是對照最明顯的，還是下面這一個例題。

例五．甲乙丙三個人，原來手裏都有錢。先是甲給乙給丙，讓他們手裏的錢增加一倍；再由乙給甲給丙，也讓他們手裏的錢增加一倍；最後丙再給甲給乙，還是讓他們手裏的錢增加一倍。結果，三個人手裏都是三十二塊；問原來他們三個的手裏，各有

多少錢？

〔解〕 這個題目的算式可以列成下面這個樣子：

(32＋32÷2＋32÷2)÷2÷2＝64÷4＝16元(丙原有錢數)

(32÷2＋32÷2÷2＋64÷2)÷2＝56÷2＝28元(乙原有錢數)

(32÷2÷2)＋(56÷2)＋(64÷2÷2)＝8＋28＋16＝52元(甲原有錢數)

先算丙，再算乙，再算甲，這是最簡單的一個算式。可是你對於這個算式能夠一看就明白麼？

請再看下面這個解法：——

〔解〕	最後	丙沒有給甲乙以前	乙沒有給甲丙以前	甲沒有給乙丙以前
甲	三十二元	十六元	八元	五十二元
乙	三十二元	十六元	五十六元	二十八元
丙	三十二元	六十四元	三十二元	十六元

這又是多麼簡捷，清楚，而且容易懂呢？

最後一個例題所用的方法，在我們看起來也許有點生疏，其實在應用上倒是非常普

遍，非常流行的。譬如你到市場裏去買菜，講好了兩千二一斤，一共買了一斤十四兩，那麼應該給他多少錢呢？

先讓我們算一算。掏出鉛筆，拿出小本子，寫出算式來：

$$2200\times1\frac{14}{16}=2200\times1\frac{7}{8}$$

$$=2200\times\frac{15}{8}\quad\text{（8和2200相約）}$$

$$=275\times15=4125\text{元}$$

可是不等咱們算出答數來，賣菜的早就用嘴算完了；他是這樣算的：

一斤，兩千二，

半斤，一千一，

四兩，五百五，

二兩，二百七十五。

二斤，是四千四，

四千四，去二百七十五，

是四千一百——（七十五是二十五？）

四千一百二十五！

他用不着筆，也用不着紙，他的算法也和我們想的不一樣。可是他想得快，算得也快，而且也不至於有錯誤。遇到這種情形的時候，往往使我們自己覺得丟臉。像這一類的事情，我想你總會遇到過，而且還不止一次。

對於這些事情，有兩點可以讓我們注意。第一點，爲什麼賣東西的要的價錢，常是那麼零零碎碎？爲什麼一斤要兩千四，不要兩千五？爲什麼一斤要兩千八百八，不要三千？——心理上比較覺得便宜，這還是其次；主要的原因，在它的單價是按「兩」來計算的。數雖零碎，但是算起來，標準劃一，不但好記，而且還方便。

第二點，他雖然用不着算式，但是他用的是「推理」，並不是瞎湊。——這對於我們是一個很好的教訓。算式是不必要的，「推理」纔是一個基本的方法。用符號把推理過程中各數的關係記錄下來，這就是算式。

所謂科學的方法，實在就是一個「推理的方法」。關於這一點，越是高深的算學，越是看得清楚，這就是我要告訴你的一個要點。

大小之比

算學是最講理的
研究算學的人也是最講理的

在初中所學的算術，比在小學裏學的，又增加了幾部分，——其中一部分就是比和比例。

比是什麼呢？

比就是「比較」。比較兩個數目的大小，我們有三種方法：一種是減法，一種是除法，另外一種就是比。

用減法可以求兩個數的差，用除法可以求一個數是另外一個數的幾倍。但是有時候我們用不着這樣費事，只要把兩個數放在一塊，自然就會看出來誰大誰小，兩邊的分量是不是一般重。

譬如我們比賽籃球，投進一個球算兩分，罰進一個球算一分。結果甲隊得十五分，

乙隊得二十分。比賽的成績發表了，不說乙隊比甲隊多得了幾分，卻說：「甲隊對乙隊，十五比二十。」像這樣把兩個數目放在一塊，我們就可以看出誰勝誰敗來。不但這樣，我們的心裏還有一個技能高低的比較。

所謂十五比二十，我們平常把它寫成15：20，這就是表示比的一個方式。

既然比是比較，所以每一個比必需包含兩個數，在這一點，情形和一個分數有點相同。分數裏有分子和分母，在比裏邊的前後兩個數，我們把它叫做前項和後項。分數有分數的值，比也有比的值。求兩個數的比值和求一個分數的值完全是一樣的，把它們對照起來：

分　數：分子÷分母＝分數的值

比：前項÷後項＝比的值

於是從分數的性質裏，我們可以同樣的找出比的性質來。

分數有一個最重要的性質，就是分子分母同用一數乘除，其值不變。同樣的，在比裏，前項後項同用一數乘除，比值也不變。這一個性質最大的用處，就在能夠化簡。譬如十五比二十，我們可以改成三比四；這是說：十五比二十「相當」於三比四，用算式

來表示，就是：

15：20∷3：4

同時，十五比二十，比值是四分之三；三比四，比值也是四分之三，因爲兩個比值相等，所以我們又可以寫成：

15：20＝3：4

用四個點「∷」來表示兩個比「相當」，用一個等號「＝」來表示兩個比值「相等」。這兩種寫法彷彿是一樣的，然而用意卻並不相同。

也許有人說：把兩個要比較的數原封不動的放在一塊兒，似乎有點偷懶。他不知道這種表示的方法，實在有一個最大的方便。因爲這種方法不但可以比較兩個數，還可以比較無論多少個數。譬如三個人一同賽跑，距離一定，他們每個人所用的時間之比是5：7：9，那麼三個人的快慢一看就明白了。

在分數裏，如果把分子分母顛倒過來，這個新分數叫做原分數的倒數；在比裏，如果把前項和後項顛倒過來，這個新的比就叫做原比的反比。例如：「$\frac{5}{3}$」是「$\frac{3}{5}$」的倒數，五比三就是三比五的反比。照這樣說起來，比和分數的運算完全一致，並沒有什

麼難懂的。

然而比的最大的用處，卻是在比例式。

例如我們到書店裏去買書，如果每本書的單價是一律的，那麼買的書越多，當然花的錢就應該越多。買三本書要用六千塊錢，買八本書就應當是一萬六。三比八的比值是「$\frac{3}{8}$」，六千和一萬六的比值也是「$\frac{3}{8}$」，所以：

（書）　3本：8本＝6000元：16000元　（錢）

像這樣的一個算式叫做比例式。

又如我們到野外去旅行，如果走的距離是一定的，那麼走得越快，用的時間就越少。每點鐘跑十里路，需要走六小時，每點鐘跑十二里路，就只要五小時。快慢的比較是十比十二，時間的比較是六比五。但是十比十二的比值卻和五比六的比值相等，那就是：

（距離）　10里：12里＝5時：6時　（時間）

這也是個比例式，然而和上面那個大不相同。這兩個比例式的不同，就在兩邊先後的次序不一樣。

前一個是：第一次的本數比第二次的本數，等於第一次的錢數比第二次的錢數。

後一個是：第一次的速度比第二次的速度，等於第二次的時間比第一次的時間。

前面一個是，本數越多花的錢越多，本數的比等於錢數的比；後面一個是，速度越大費的時間越少，速度的比等於時間的「反比」。所以前一個叫做正比例式，後一個叫做反比例式。

在這裏，我們應當注意的有兩個要點。在「比」裏，必需同一種類同一單位的纔能相比。如果說三個人的高度和五隻狗的體積相比，你一定會覺得這是一個天大的笑話。同時如果把一丈布和一尺布的比寫成一比一，這也是一個顯明的錯誤。所以，假若把上邊那第一個比例式寫成：

3本：6000元＝8本：16000元

那就錯了。——然而，這卻是最容易疏忽、最容易發生的一個毛病。

其次，在比例式裏，無論正比例式或是反比例式，都必需要合理。如果不加考慮，糊裏糊塗的把上面第二個比例式寫成：

10里：12里＝6時：5時

這就又錯了。天地間，根本沒有走得快反而到得慢，走得慢反而到得快的道理。——如果果眞是那個樣子，那就是反常，反常就是不合理，不合理就要加以糾正，算學是最講理的，研究算學的人也是最講理的；假如遇到不講理的事情，我們就應當推翻它，打倒它，把它澈底根除，澈底消滅。

也許你會奇怪，爲什麼忽然這樣發火；但是爲了正義，我們不能不有英勇果斷的表示。也許你認爲這些話根本不必多說，因爲這是決不會有的事情。——如果你這樣想法，這可就又錯了。因爲平常我們想到的都是正常的自然現象，可是在社會上，我們卻不能不承認還有許許多多變態的事實。

在你的心目中，把一切都看成是正常的；這正是表示你自己的淸白單純，正直可愛。但是如果忽視了一切變態的存在，那就是個十足的書呆子了。在一家小報的副刊上，有下面這樣的一篇短文：

大小之比

正比：

大人物永遠作大官，小人物永遠作小官。

大人物拿大錢，小人物拿小錢。

大人物穿大衣，小人物穿小褂。

大人物吃大菜，小人物吃小菜。

大人物住大樓，小人物住小屋。

大人物可以天上飛，小人物只能地下爬。

大人物是一呼百諾，小人物是低三下四。

……………………………………

反比：

大人物出門坐小汽車，小人物出門坐大卡車。

大人物吃飯用小飯碗，小人物吃飯用大飯碗。

大人物辦公在小辦公室裏，小人物辦公在大辦公室裏。

大人物洗澡用小盆子，小人物洗澡用大池子。

大人物有小公館，小人物有大雜院。

大人物爲了享受可以不費吹灰之力，小人物爲了生存卻必需拚死拚活。

大人物有小狗，小貓，小太太，小丫頭，小聽差……；小人物有大跳蚤，大臭蟲，大瘡疤，大補

釘……。

大人物喜歡小，什麼都要臨小玲瓏，小的可愛，小的好玩……；小人物害怕大，怕大老爺，怕洋大人，怕大衙門，怕大監獄……。

看了這些大小之比，你的心裏有什麼感想？

學習的關鍵

儘管有種種不同的應用和算題
然而算理只是一個

學完了一門功課之後，我們應當重新溫習一次。溫習和學習不一樣。學習一門功課的時候，今天不曉得明天要學什麼，明天不曉得後天要學什麼；學完了一種再學一種，遇到的都是些新鮮的刺激。這就和到一個生的地方去旅行完全是一種情形。可是等到旅行回來的時候，這種情形就變了。

旅行回來的時候，走的還是原來的道路，遇到的山，遇到的水，都是已經見過面的。這時候我們的感覺不是新鮮，而是親切。就和多年不見的老朋友，重新又遇到一塊兒一樣。

但是，還不僅只是親切。

也許以前曾經疏忽的地方，現在纔會看得眞切；也許以前不大熟悉的地方，現在纔

會覺得眞正透澈。而且，經過了一個相當的時期，我們的年齡增大了，知識增多了，生活經驗變得更豐富，於是我們就會有一個新的看法，對於一個人，或是一件事，有一個新的評價。——溫習一門功課，也是同樣的情形。

就拿算術來說吧。初次學習的時候，覺得樣樣都是新的材料。可是回頭溫習的時候，我們就會看出來，所謂新的材料，那不過是種種不同的應用；至於算理，卻並沒有什麼變更。而且有的時候，從頭到尾，算理只有一個。這種情形，在算題的時候看得最清楚。

現在，我要證實這句話。

譬如把算術的內容分成整數、分數、百分法和利息，一共四部份。在這四部份裏，儘管有各式各樣的算題，可是算法和算理往往是一致的。如果把這些算題併攏在一起，就會看得清清楚楚。

舉幾個例吧。

〔整數題〕　一本書定價2元，現在按照三萬倍計算，應該賣多少錢？

$2\times30000=60000$ 元（賣價）

〔分數題〕 全校學生1200人，三分之一是女生，問女生有多少人？

$$1200 \times \frac{1}{3} = 400\text{ 人(女生)}$$

〔百分法〕 一本書定價6萬元，如果按照八折計算，應該賣多少錢？

$$60000 \times \frac{80}{100} = 48000\text{ 元(賣價)}$$

〔利息題〕 存款200萬，年利率五分；一年的利息有多少？

$$200 \times .5 = 100\text{ 萬元(利息)}$$

對於這四種算題有四種不同的解釋：——

在整數題裏，　　某數×倍數＝積數；

在分數題裏，　　原數×分數＝部份數；

在百分法裏，　　母數×百分率＝子數；

在利息題裏，　　本銀×利率＝利息。

其實只是一種關係，被乘數×乘數＝乘積。

反過來說：——

在整數題裏，　積數÷倍數＝基數；
在分數題裏，　部份數÷分數＝原數；
在百分法裏，　子數÷百分率＝母數；
在利息題裏，　利息÷利率＝本銀。
這不過是因爲，　被乘數×乘數＝乘積，
所以，　乘積÷乘數＝被乘數。

還有：——

在整數題裏，　積數÷基數＝倍數；
在分數題裏，　部份數÷原數＝分數；
在百分法裏，　子數÷母數＝百分率；
在利息題裏，　利息÷本銀＝利率。
這還是因爲，　被乘數×乘數＝乘積，
所以，　乘積÷被乘數＝乘數。

不過照這樣繞來繞去的，也許你要更糊塗。可是原理只有一個：

因爲， 甲×乙=丙，

所以， 丙÷乙=甲， 丙÷甲=乙。

因此下面這些算題統是一個算法：

〔整數題〕2丈是5尺的幾倍？

〔分數題〕3是8的幾分之幾？

〔百分法〕上一堂課，遲到5分，早退10分，點名用去4分，找書用去2分，削鉛筆用去1分，擦黑板用去3分，胡想5分；那麼實際聽講的時間只有百分之幾？

〔利息題〕八百萬塊的本錢，十年得了四百萬的利息，問年利率是多少？

這是一組：

〔整數題〕某數的8倍是28，求某數。

〔分數題〕繩長的$\frac{1}{3}$是12尺，求繩長。

〔百分法〕如果全國百分之八十是農民，一共三億六千萬；那麼全國的總人口應該是多少？

〔利息題〕如果年利率是6分，兩年的利息一共三千萬；那麼原本應該是多少？

這又是一組。

但是這兩組的算題只是一個算法，——乘法的還原是除法。

在這些複習裏，我們應當注意的有兩點：第一，在整數題裏，16的兩倍是32；在分數題裏，16的四分之一是4。

$$16\times 2=32,$$
$$16\times\frac{1}{4}=4.$$

2是倍數，$1/4$是分數，意義當然不一樣。然而就乘的關係上說，卻是地位相當。2是乘數，$1/4$也是乘數。其實乘數也就是倍數。假如倍數是整數的叫做「整倍數」，倍數是分數的叫做「分倍數」，那麼分數的算題就和整數的算題完全一樣了！

第二，所謂百分法，其實就是分數算法。在分數題裏面，這個分數可以是任意的分數，——分母是無論什麼數都行；可是在百分法裏，表示百分率的分母就必須是一百。在分數題裏的$1/5$要化成20%，在分數題裏的$1/40$就要化成2.5%了。

但是多了一個限制僅只是多了一步手續，在算理上卻並沒有什麼不同。至於利息題不過是百分法的一個應用，那就更顯明了。

所以追根到底，算題不外兩種。一種是整數算題，一種是分數算題。

同時，剛纔已經說過了，只要倍數的解釋包括「整倍數」和「分倍數」，那麼這兩種算題就會合而為一。所以這種種不同的算題，算法和算理只是一個。

不過，還要有一點補充。

在百分法裏還有兩個名詞，那就是「母子和」和「母子差」。在利息題裏只用到一個，「母子和」就是「本利和」。——所謂「母子和」和「母子差」，這在整數算題或分數算題裏卻沒有聽說過。譬如在百分法有下面這兩個公式：

$$\text{母子和}=\text{母數}\times(1+\text{百分率})$$

$$\text{母子差}=\text{母數}\times(1-\text{百分率})$$

在整數或分數的算題裏就沒有。

其實，這只是一個表面的看法。譬如在整數題裏：甲有銀五百萬，乙有銀是甲有銀的3倍；問甲乙共有銀多少？這就是求「母子和」的一個問題。

又像在分數題裏：哥哥15歲，弟弟的歲數是哥哥歲數的$\frac{3}{5}$；問哥哥比弟弟大多少歲？這就是求「母子差」的一個問題。

我們算這些題，是分開來算的。先求乙有的銀數，再和甲有的銀數加起來。或是先求出弟弟的年齡，然後再減。上面那兩個公式，不過是把這兩步手續合而爲一。

假設我們忘記了那兩個公式的時候，我們仍然可以分作兩步算。反過來說，利用這兩個公式，那麼我們對於整數題或是分數題，計算起來就簡捷得多了。只有這樣對照的看起來，我們纔能夠懂得更透澈，想得更靈活。

而且，知道了這些，那麼我們對於整數或是分數的四則問題就會覺得容易得多。許多四則問題不過是把這些關係搞得更複雜一點。

譬如在整數裏關於年齡的題目：父年50歲，子年14歲，問幾年後父年是子年的3倍？

父年是子年的3倍，所以父子年齡的差就應當是子年的2倍。但是父年比子年多

$50-14=36$ 歲；

子年的2倍是36歲，子年應當是：

$36\div2=18$ 歲

$18-14=4$

所以答數是四年以後。這還是一個「還原」的題目，不過利用了一個現實的關係，兩個人的歲數之差是永遠不變的。

又像在分數裏關於分配的題目：父親有財產六千萬，長子分$\frac{1}{2}$，次子分$\frac{3}{8}$，問下剩還有多少錢？

長子分得$\frac{1}{2}$，次子分得$\frac{3}{8}$，一共分得$\frac{7}{8}$，所以還有$\frac{1}{8}$。六千萬的八分之一是：

$$6000\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)=6000\times\frac{1}{8}=750$$

所以下剩還有七百五十萬。這就是一個「分倍數」的問題，不過先要求出這個「分倍數」來。

假設再複雜些，譬如把上面這個題目改成：父親有財產六千萬，長子分$\frac{2}{5}$，次子分長子的$\frac{4}{5}$；那麽下剩的錢還有多少？

長子分$\frac{2}{5}$，次子分長子的$\frac{4}{5}$，所以應當是：

$$\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{25}$$

然後按照上題算法：

$$6000\times\left(1-\frac{2}{5}-\frac{8}{25}\right)=6000\times\frac{7}{25}=1680$$

結果還有一千六百八十萬。

再改，改成：父親的財產六千萬，分給長子$\frac{3}{5}$，再把下餘的$\frac{1}{2}$分給次子；那麼結果還剩多少？

第一次分下來，還有——

$$6000\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\text{萬；}$$

第二次分下來，還有——

$$6000\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=6000\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=1200\text{萬。}$$

這不過是算了兩次「母子差」的問題。

反過來說，假使改成：父親的財產分給長子$\frac{3}{5}$，又把下餘的$\frac{1}{2}$分給次子，計得一千八百萬；那麼原來共有財產是多少？

這就是一個包括了兩次「還原」的問題。

無論題目怎樣改，改來改去不過是一個算理。

但是這些算題，實際上並沒有多少用處；頂多不過是關於算法的練習，和算理的重溫。至於實際的應用，那還是複名數和百分法。

複名數的算題不過牽扯到進位制，並沒有多少別的算理。至於百分法的應用，可就太多了。除去了利息以外，譬如像田賦，租稅，折扣，賠賺，中佣，保險，匯兌，抵押……這都是利用百分法的計算。

但是儘管有種種不同的應用，以及種種不同的算題，然而主要的，總不外乎知道了乘數去求乘積，或是知道了乘積求乘數；也就是知道了原數求結果，或是知道了結果求原數。總歸不過是一個乘法，和它的還原算法，那就是除法。

因此學習算學，最要緊的就在把握算理。只要把握住算理，那麼一切複雜的事實就會化簡，我們就不致於對着那些算題發暈。反過來說，只要把握住算理，那麼就可以應付那些千變萬化的算題。這纔是學習的一個重要的關鍵！

算命的算學

算命的雖然不懂我們的算學
我們的算學卻能夠算命

打開報紙一看，常常見到大字的登着，什麼「精通哲理」，「數理專家」一類的字眼，偶而瞥見，以為又是從哪裏來了一位算學家，心裏不免一動；可是再往下細看，卻是「能知過去未來，預測吉凶禍福」，——原來是一位算卦的先生呵！

當然啦，在這裏所說的「數」，和我們那個「數目」的「數」決不相同，它是叫做「氣數」的「數」。什麼是「氣數」呢？我也不大懂。平常我們常常聽到鄉下的老頭歎息着說：「今年人慌馬亂的，天氣又旱，好好的糧食也不值錢，——這眞是天意呵！」這「天意」，這「氣數」，是一個「玩意」。假如我們很認眞的說，或者可以說是大自然變化的一個規律吧。——可是老鄉你別慌，像這樣的解釋可眞是太恭維了。他們的「氣數」不過是些鬼八卦，是迷信，不是科學。

眞討厭，我們研究「數」，他們也研究「數」，我們「算」，他們也「算」，——他們不是「算」卦的麼？彷彿是寃家，轉來轉去總碰頭。可是我們要知道，所謂迷信並不是絕對的不可救藥，只要能夠給它一個正確的解釋，迷信也就可以變成科學了。三句不離本行，算命的雖然不懂得我們的算學，我們的算學卻也能夠算命。現在就講講這算命的算學吧。

這算命的算學並不僅只算命，它可以推得一切機會，一切可能性，所以眞正的名字叫做「機遇法」，或是「或然率」。這部算學，說得深了固然要很麻煩，可是講得淺些卻也很平常。譬如說：明天的讀書會裏，要指定一位同學報告時局近況。這件事情很簡單，只要預先把最近幾天的報紙拿來看一遍，把重要的事情一條一條的摘下來，加以整理；只要有頭有尾，話說得清楚，也就夠了。因此一班五十二個人，人人都有被指定的可能。既然指定誰都可以，所以我們總共有五十二種指定的方法；可是要指定我，卻只有一種方法，所有我指定的可能性，只有 $\frac{1}{52}$。這個表示可能性大小的分數，就叫做「機遇」，或是「或然率」。

所以，一件事情發生的機遇，便是一個分數，拿可以發生的次數做分子，拿全體可

能的次數做分母。再舉一個例：假如明天要開班級代表會議，討論捐款援助前方將士的事。全校八班每班代表三人。臨時推舉主席，大家都有被推的資格。出席的總人數是二十四人，那麼每人被推為主席的機遇便是$\frac{1}{24}$。假如以班為標準，因為每班代表都是三人，那麼每一班的代表被推為主席的機遇便都是$\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$，比個人的機遇是大得多了。

上面所說的是「成功」的機遇。成功的反面是「失敗」，失敗也有失敗的機遇。兩種性質雖然不同，可是機遇的求法是一樣的。譬如說，明天的大會裏要討論捐款的方法，提案共有五種：一種是同學自由捐款，一種是師生共同捐款，第三種是全校師生以及工友，大家都要捐款，第四種是，單憑校裏的力量總是還覺不夠，我們應當出去，向社會上各界人士去募捐。第五種是，我們單去向社會上去募捐，這件事情太困難，不如我們發起一個防空展覽會，順便舉行一個遊藝會，表演國防戲劇，這樣我們可以吸取更多的觀衆，不但供給他們一點近代戰爭的常識，而且還可以提起他們一點共赴國難的情緒；不但入場券的收入可以希望增多，而且還附帶的作了一件社會教育的工作。這不是一件頂好的事情麼？

以上這五種辦法可以分為兩大派，前三種是主張僅只校裏的人捐款，後兩種是還要

校外的人一齊幫忙。我們這一班是主張第五種辦法的，關於後一派。那麼這一派意見被採取的機遇多大？被取消的機遇又是多大呢？

在這裏，如果只限於這五種辦法，而且必須只選一種，那麼後一派被採取的機遇是$\frac{2}{5}$，而被取消的機遇是$\frac{3}{5}$。這就是說，被取消的可能性，大於被採取的可能性。假如不分派，單就五種提案來講，我們的提案，被採取的機遇是$\frac{1}{5}$，而被取消的機遇是$\frac{4}{5}$，——更糟了！這還有什麼希望麼？

可是，你別着急。這兒顯然還有些毛病。假如明天大家馬馬虎虎，都不在意，以爲事情辦了就好，不管怎樣作法，都是無可無不可，那麼最省事的辦法，莫過於「抓鬮」了。把五種辦法寫到五張紙上，團成紙球，桌上一撒，請個瞎子抓一個，那麼我們的提案就的確太沒有希望了。——可是，我們「絕」不會這樣馬馬虎虎的！我們的思想還要叫我們「考慮」，我們的思想還要叫我們「選擇」，像這樣一件關係生死存亡的大問題，大家決不會馬馬虎虎的！不但不會馬虎，而且我們的提案還會「一定通過」！

你不信？——明天見！

然而，……我們且沈一沈氣。如果這樣，那麼我們的機遇法不就有了錯誤了嗎？這

個問題眞不錯，可是我要告訴你在求機遇的時候，最要緊的一個條件便是：各個可能的方法要「機會均等」。譬如在上面那一個例裏，假如「抓鬮」的話，自然是五個紙球被抓的機會均等；可是在討論議案時候，大家還要「考慮」，這考慮和那抓的方法不同，抓是瞎抓，考慮要費斟酌，這一斟酌，五個議案被採取的機會便「不」均等了。這並不是機遇法的錯誤。所以機遇的觀念雖然好懂，可是應用起來便有許多困難。

上面所說的，雖然是算學裏的東西，然而在日常生活裏，我們也常常提到，不過不很正確罷了。譬如，我們說：「明天的會八成要開不成。」這就是說：明天開會的機遇是$\frac{2}{10}$，開不成的機遇是$\frac{8}{10}$，一成就是十分之一的意思。假如明天的會一定能開成呢？既然「一定」成功，就「沒有」失敗。所以分子分母相等，機遇是「一」。假如明天的會一定開不成呢？旣然一定失敗，就「沒有成功」，成功的方法沒有，所以「開會」的機遇，分子是零，機遇也就是「零」。

因此，一件事情，不一定成功，也不一定失敗，那麼它的機遇永遠是一個小於1大於0的分數。那就是說，它的成功，只有「幾成」把握。

再進一步，假如有許多獨立的事情，彼此並不牽扯，要想一塊兒成功的機遇，等於

各個機遇的乘積。舉例說明：這次會不開了，那麼，打打乒乓球吧。昨天剛剛買了一打球，六個紅的，四個白的，兩個花的，總共裝在一個口袋裏。老張順手摸出來一個紅的，放進去，又摸了一個，還是紅的。老張真走了「紅」運！那麼我們也就來算算吧。像這樣，在這一打球裏連抓「兩次」紅球的機遇應當是多麼大呢？因爲每一次的機遇是 $\frac{6}{12}$，所以應當是：

$$\frac{6}{12}\times\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

同樣的，假如第一次拿出來的球不再放進去，第二次的機遇變成 $\frac{5}{11}$，所以連抓兩次紅球的機遇便變成：

$$\frac{6}{12}\times\frac{5}{11}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}=\frac{5}{22}$$

可能性就變小了。

在這裏，有一個很重要的例，要告訴你那就是關於事實的判斷。譬如說：在時局很沈悶的時候，忽然聽到一位朋友慌慌張張的從外面跑進來說：「不好了！聽說前線緊急，打了敗仗，都退下來了！」 使我們大家嚇了一跳！可是同時也就懷疑了，可靠

不可靠呢？

第一件事情要追問：消息聽誰說的？——張三！一聽到張三，大家就搖了頭；張三的話沒準兒，只能打個八成。再問：張三怎麼知道的？——聽李四說的。李四？李四是個混蛋！平常總是造謠生事，他是個漢奸的嫌疑犯，這話至少要打個對折。大家的心鬆了一大半。

再問：李四怎樣知道的？李四看的是報！——哼，這就有了問題，報紙是否可靠呢？找報來看，原來這報正是和敵人聯盟的國家的機關報！再看稿子，又是什麼××通訊社！——而這××通訊社卻正是敵方的代言人，這話就更成問題了！頂多再給它打個七五扣吧。於是總計清單：

八成，可信的程度是 $\frac{8}{10}$，

對折，可信的程度是 $\frac{50}{100}$，

七五扣，可信的程度是 $\frac{25}{100}$，

像這樣的通訊社來發這樣的稿子，像這樣的報紙來登這樣的新聞，你傳我，我傳你，李

四傳張三。可信的程度，最後變成：

$$\frac{8}{10}\times\frac{50}{100}\times\frac{25}{100}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

十成裏頂多不過一成靠得住。

你想，聽這樣的話，還有準麼？

差不多先生

有時候連算學也會變成差不多先生
但是這個「差不多」和那個「差不多」卻不一樣

當年胡適之先生曾經作過一篇差不多先生傳，他說這位先生，——人人皆曉，處處聞名，他姓差，名不多，是各省各縣各村人氏。

他有一雙眼睛，但看的不很清楚；有兩隻耳朵，但聽的不很分明；有鼻子和嘴，但他對於氣味和口味都不很講究；他的腦子也不小，但他的記性卻不很精明，他的思想也不細密。

他媽叫他去買紅糖，他買了白糖回來。先生問他山西，他回答的是陝西。他把「十」字常常寫成「千」，「千」字常常寫成「十」。火車是八點三十分開，他八點三十二分走到車站。他說：三十分跟三十二分還不是差不多嗎？

差不多先生的家屬和他的鄉鄰也都和他差不多。差不多先生病了去請醫生，卻請了

一位牛醫來，牛醫用醫牛的方子給差不多先生治病，差不上一點鐘，差不多先生就一命嗚呼了。

差不多先生臨死說了一句格言：「活人同死人也差不多；凡事只要差不多就好了，何必太認眞呢？」這兩句話博得許多稱讚，大家說他樣樣事情看得破，想得通，因此給他起了一個法號，叫做「圓通大師」。

究竟這位差不多先生是誰呢？我說。連你帶我，咱們大家都有一份兒。

實在說起來，這個差不多和那個差不多也有一個區別。一千和九百九十是差不多，一千和九百九十九也是差不多；然而這兩個差不多並不一樣。一個相差是百分之一，一個相差是千分之一。要是把千分之一算是差不多，百分之一就不能算差不多了！

同時，就算兩個差數差得一般多，有時候也不能說都是差不多。譬如買十萬塊錢的東西給他九萬九，是差一千；如果買兩千塊錢的東西給他一千，也是差一千。這兩個差數相等，然而這兩筆帳就不能作一樣看法。

十萬塊錢的買賣，差一千，是百分之一，這一筆帳可以一筆勾銷。但是兩千塊錢的買賣，差一千就是二分之一！那個做買賣的老板縱使是差不多先生，他不跟你要那一千

塊錢纔怪呢！照這樣想法，這兩個差數就不能一律看待，並不是差不多的！

大小兩個數的差數，叫做「絕對的差」。差數和原數的比值，叫做「相對的差」。拿上邊那個例來說，都是差一千，這是絕對的差相等。但是一個差百分之一，一個差二分之一，這就是相對的差不等。二分之一比百分之一大五十倍，

$$\frac{1}{100}\times 50=\frac{1}{2}$$

這就是老板非向你要不可的原因。

一個整數和一個小數比較起來，當然一個小數就算不了什麼。——可是這也要看怎麼說。如果算帳，按照現在這個年頭說，即使差個一百、八十塊也算不了什麼；就拿戰前說，算到小數點以後第三位，例如五元八角二分五，末了這個五就不算什麼。然而在工程建築，或是機器製造上說，那就不能這麼隨便，一個無論多少的小數，我們必須要確切知道，它是準確到第幾位小數。假如疏忽了一個小數，說不定這個工程就要倒，那個建築就要塌，一部機器就要爆炸。

這些話，也許你聽了有點不耐煩。因為誰都曉得，算學就是那麼頂真，那麼刻板，厘是厘，毫是毫，一點也不含糊的。其實也不盡然，有時候，算學也會變成差不多先

生，差個一星半點，不算什麼。你先不要大驚小怪的，讓我出一個很簡單的題。

拿起你的筆來，先點一個小數點，然後再寫九，一個九，兩個九，三個九，……一直往下寫。這就是

$$.9999999\cdots\cdots$$

我問你：這個小數等於什麼數？

等於什麼？奇怪！這能等於什麼。想想看！

對了，對了，這是個循環小數，——不錯，如果化成分數的時候，那就是：

$$.\dot{9}=\frac{9}{9}=1$$

奇怪，等於一！

算錯了沒有？一點也不錯。

式子兩邊等不等？——這就不好說了。

既然用的是等號，當然相等。可是想想，差一點，總是差一點，那就是差——「差不多」相等！你看：

差不多來了！差不多就算相等。這不就該畫×，批槓子，吃大鴨蛋麼？

可是你必須弄清楚，所謂「差不多」和「差一點」，這兩種情形卻是不一樣的。

.9 和 1 一樣嗎？差不多！差多少？十分之一！

.99 和 1 一樣嗎？差不多！差多少？百分之一！

.999 和 1 一樣嗎？差不多！差多少？千分之一！

.9999 和 1 一樣嗎？差不多！差多少？萬分之一！

都是差不多，然而差得卻越來越小。假設繼續的再寫下去，那麼差，差，差多少呢？那就小，小，要多小就多小！

到底是多小呢？——差一點兒，差一頂點兒！

你看：「差不多」和「差一點」這就不一樣了！

首先我們要看出來，所謂

.9999999999……

這個數，實在和以前所見到的那些數都不一樣。以前的那些數，說一就是一，說二就是二；然而現在的這個數，一會是小數點九，一會是小數點九九，一會又是小數點九九九，……一會一個樣，老是在那裏發展。像是一條尾巴，永遠在那裏伸長，伸長，永遠

的伸長。

這已經不是一個固定的死數，它是一個能夠生長的活數。一個死數是定型的，一個活數卻是永遠的發展下去！在算學裏，一個死數叫做「常數」，一個活數叫做「變數」。循環小數就是一個「變數」。

這些變數，繼續的變下去，有時候漸漸的就要接近一個固定的常數，這個常數叫做那個變數的「極限值」。

一就是小數點九九九……的一個極限值。那就是說，這個循環小數照這樣繼續的變下去，慢慢的就會變成一。所以我們說，這個循環小數等於一。

但是仔細想起來，果眞相等嗎？——並不眞等。它們兩個是「差不多」相等。其實還「不是」差不多，是「差一點」相等。所以在算學裏，我們說，它是「趨近」於一，「逼近」於一，「變成」一，——它的「極限值」等於一。

這是算學裏的「差不多」。這個「差不多」和差不多先生的那個「差不多」就大不一樣了。

差不多先生的「差不多」是糊裏糊塗的差不多；算學裏的「差不多」卻是「差一

點」，「差一頂點」，——這個差數要多小就多小，這個問題要多精密就多精密。

所謂「變數」，是一個新的觀念；研究變數，要有一個新的觀點，——「變動」的觀點。這是高等算學裏最重要的一個部門，同時也是近代算學裏最龐大的一個部分。這一部分，不僅開拓了算學研究的範圍，而且在整個自然科學裏變成了最有力量的一種工具。

差不多先生的差不多，結果把自己藥死了，臨死還說「死了和活着也差不多」；可是算學裏對於差不多的研究，卻變成征服自然界的一支生力軍！

你想，這兩個「差不多」果眞差不多麼？

胡適之先生對於差不多先生的批評是：「他的記性不很精明，思想也不細密。」我們的論斷是：差不多也不算毛病，只有思想不細密，這纔是他的致命傷呵！

從普遍談到算學的研究

不怕一萬，就怕萬一
萬一來了，就是麻煩

許多算學裏邊的題目，卻不一定要學過算學的人纔會算。因爲學識常常是屬於那些聰明而又肯用心的人。

讓我們你一個小小的算題吧。一個人吃了兩個饅頭，五個人吃幾個饅頭呢？——我想，你一定會笑話我吧？五個人還不是吃十個饅頭麼？你也許要搖搖頭說：

「像這樣的一個題目還值得問？」

不過，朋友，你且不要心急。反正我們彼此還不忙，那又何妨繼續談談。我且問你：

「你怎麼知道的？」

「怎麼知道的？一個人吃兩個，兩個人吃四個，四個人吃八個；五個人呢，四加一

是五，八加二是十，所以要吃十個呵。」

我再要問問你：「這個十個饅頭算是算出來了；可是事實上一定『眞對』麼？」

「一定眞對呀！」從你的神氣上就看出了你的不服氣，你的心裏說：「那還有錯麼？」

可是，你且別忙。你看，已經有幾個多心的人在那裏不敢發言；而且有人正在搖頭了。

問題在什麼地方？仔細想來，你已經暗地裏規定了一個「想當然」的辦法，——就是：每個人「必須」吃兩個饅頭！這句話說出來，你自己也應當失笑了。事實上這個規定能夠行得通麼？也許這裏有些大人，吃兩個不夠；也許這裏有些小孩，吃兩個還吃不下。事實上絕對不會這樣呆板的。

然而，也許有人還要向我反問：在算術裏邊所謂「比例」的題目，不是從來就是這樣的麼？——這句話問得很有道理。不過說實在的，一部算學只是把那些不整齊的「當做」整齊的看，把那些不一致的「當做」一致的算，事實上一切現象都是「變動」的，而我們在初等算學裏卻只是能夠計算那些「死板」的事實。所以認眞說起來，算題裏所

提到的人並不是實在的眞人，那不過是一些機器人！機器一開，每人兩個饅頭下肚，不論年齡大小，不問有病沒病，也不管饅頭好吃不好吃；每人兩個，一個不能多，一個不能少。因爲，算學裏邊所得到的只是一個簡單的「約數」，一個大約的「估計」，對於事實是不一定「眞對」的。

可是，說到這裏，話又說回來了，像上面那樣想法，雖是不很正確，可是我們常常在不知不覺的時候便用了它。譬如我們常常碰到一些人，每個人都有兩隻手，十個手指。於是我們便很容易斷定，說：無論是誰，「一定」要有兩隻手，十個手指，一個不能多，一個也不能少。像這樣的思想的方法，看了張三有耳朵，便以爲李四也有耳朵，在論理學（是一種專門研究思想法則的科學）上叫做「類推」，那就是以爲，凡是一類的東西，一定都要有同一的性質。這種「類推」，正好像上邊所說的那個關於比例的算理。在很少的應用的時候是對的，如果完全依靠着它，那就太危險了。

就拿上面的例來說吧！我們雖然今天看見一個人有十個手指，明天又看見一個人也有十個手指，可是卻不能說所有的人都「一定」有十個手指。數一多，往往性質就要變化！我們裏邊不會有例外麼？例如「萬一」有一個殘廢人呢？一隻手沒了，就少了五個

手指！還有，我們不也有時聽到或是見到，有些人是「六指」的麼？那個小小的指頭你卻不能不承認它是一個手指！——俗話說：「不怕一萬就怕萬一。」萬一有個例外，就要糟心！

幹嗎我要向你談到這些話，因為在這一點，研究算學的人會感到了苦惱。譬如二千五百年以前的一個有名的希臘算學家叫做畢達哥拉斯（Pythagoras），他曾經發現了兩件事實。一個是：連續奇數之和一定是一個整平方數。例如：

$$1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=9=3^2$$

$$1+3+5+7=16=4^2$$

一個是：連續偶數之和，一定是兩個連續整數之積。例如：

$$2+4=6=2\times3$$

$$2+4+6=12=3\times4$$

$$2+4+6+8=20=4\times5$$

在這兩個情形裏，當着數目少的時候，我們是不難一一驗算的。可是數目很多很多的時

候呢？我們能夠一一的都加以驗算麼？這不但是一件很麻煩的事，而且簡直不可能！曾經有人計算過，利用算盤來算加法，「一個」「一個」的加起來，要想把十三位算盤珠上下都打到靠橫梁的時候，一個人不吃不睡，還要用二十三萬七千八百年！何況我們要驗算的還不僅只這些呢？

既然對於這一類的問題我們不能「普遍」的驗算，那我們還能斷定我們的事實是「普遍」的都對麼？只有從「特殊」的研究推進到「普遍」的研究，算學纔有發展。一部算學史不外是說明這一個過程。不但算學是這樣，一切科學都有同樣的情形。那麼現在我們用什麼方法來把這一個特殊的研究推展到「普遍」的研究呢？

「有」這樣一個方法！這一個方法叫做「算學歸納法」。這個名詞大家當然不見得聽到過，甚至於在初中裏也不見得碰到它；可是這個方法卻很重要。沒有這個方法，算學便不能有普遍的研究，那就是說，它自己不能夠推廣。

要想解釋這個方法，當然現在還有點程度不夠，可是我們無妨用一個極淺顯的例來說明。譬如有一天我們到一個學校裏去參觀，那時看見剛好有人在作遊戲。當我們到操場時，只見他們排好了一個單行的長隊。這個遊戲很簡單，他們正在把一面紅色旗子，

一個個的往下傳，前邊的拿到了便給後邊的一個人，後邊的一個拿到了，再給他後邊的一個人。這個簡單的遊戲，的確有些殺風景，於是我們看了很短的一會便走開了。——且慢，問題就在這兒啦，假如我們走後，有人問我們：那排尾的一個人是不是能夠有機會拿到那個旗子呢？我想大家都會以爲他是一定要拿到的。——可是，這就很難說了。也許那個旗子傳了不到十個人便停止了，譬如到第九個人便又傳了回來。也許那個旗子傳了幾次他們就丟了，另外換了一個紅色的皮球。也許……

不用「也許」了，總而言之，問題多啦。只要我們沒有親眼目覩，這句話是很難說的。可是，假如我們那時候去的早一會兒，我們聽見那位教師的命令說：「無論是誰，如果第一個人拿到旗子的時候，不准停留，馬上就要傳給鄰近的第二個人，永遠往下傳！」只要有這樣一個命令，現在既然看到旗子已經一個一個的往下傳了，那麼無論時間早晚，最後的一個人「一定」會得到旗子的。於是這個問題便有了把握。

再舉個簡單的例：譬如說，一列火車，假如前邊的一個車廂一動，後邊的那一個便接着動；這樣，只要火車頭一開，我們便可以馬上知道這一列車便要「全體」都動了！見不見是沒有關係的。從這兩個例裏，我們就可以看出來，要想從「特殊」的情形推論

到「普遍」的情形，那一個關鍵，全在我們知道不知道這個性質，是否「繼續」保持。這種繼續保持的性質，有人便把它叫做「遺傳性」。

所以，如果我們知道了幾個事實，只要再知道這些事實都是「遺傳」的，那麼我們就可以斷定這些事實是「普遍」的都對了！這就是算學歸納法的一個主要之點。

因爲有了算學歸納法，算學的研究纔能夠「普遍」。等到算學的研究普遍了，算學纔能夠建立起一個「普遍」的眞理。

從大小談到算學的發展

我們最容易瞭解的是中庸
最不容易瞭解的是極端

昨天碰到一位好開玩笑的朋友，說來說去總是說不過他。我想把這件事情告訴大家。

他說：「剛纔我看見從學校裏走出一個小學生來，樣子不過四五歲。你說他年齡小不小？」

「眞小！」

「不算大麼？」我的朋友笑了。

「不大。」我也笑了，笑他幹嗎那麼認眞。

「然而，」他收了笑容，很嚴肅的說：「我說他並不算小。」

「不小？」我有點莫明其妙，搖搖頭說：「無論如何總不算大。」我堅持我自己的

意見。

「因爲，」他說：「聽說他家裏還有一個小弟弟。你說他能比他的弟弟還小麼？」

他瞪大了兩隻眼睛望着我。

眞的，無論這個學生多麼小，他總是比他的弟弟還要大，我又笑了。心裏想到受了他的騙。

「那麼他是不是還算小？」他仍然很嚴重的，又迫問了一句。

「當然啦，那誰還不知道？——他大。」

「對了，老弟兄們，」他拍拍我的肩膀說：「你總算很明白呵。……不過，說實在的，」他又放低了聲音，彷彿很祕密似的：「實在說，那可眞有點那個，他也的確不算大。」

這一來我倒又糊塗了：「怎麼？剛纔你說他不算小，怎麼現在又說他不算大呢？」

「你聽着，」他說：「聽說他的家裏還有一個哥哥。」

「糟了，又上了他的當。」我心裏說。當然啦，無論他多麼大，總比他的哥哥還要小呵。

「那麼，——」

「得啦得啦，……」我的心裏覺得有些委曲。這次我不笑；是他笑了。

上一次當，學一次乖，這是人類的聰明。所以我想和諸位談談這個問題。

是我自己想錯了麼？不是；是沒有想得仔細。像這一類的問題應當還有許多。第一我們要認淸楚：所謂「大小」，是「比較」的。沒有比較便沒有什麼大小。任何一件東西，總是比它大的一切小，比它小的一切大：如果我們這樣說，這是永遠不會錯的。

在日常生活裏，有時候我們也常常省去了那個標準不提。譬如，我們說地球是大的，太陽是大的：或者說：米粒是小的，灰塵是小的。不過在這裏，我們的意思，實在是彼此都默認着是和普通一般的東西相比較。對於地球上的任何東西來比較，地球當然是大；對於任何可以看到的東西來比較，灰塵當然是小的。不過在平常，我們常常把這個標準省了去。因此，如果不規定下一個標準，要問「頂大的是什麼？」或是「頂小的是什麼？」這兩個問題都是沒有意義的。——記住那一句話：「沒有比較，就沒有大小。」所以大小實在是相對的，不是絕對的。

不但大小是這樣，一切相對的比較都是這樣。譬如：長短，高矮，寬窄，遠近，

前後，左右，上下，深淺，以及明暗，好壞，美醜，冷熱，……這些都是這樣的，只有相對的比較，沒有絕對的不變。

不過，同時我們又聽說，在算學裏邊，有一種叫做「無窮大」和一種叫做「無窮小」的，那又是什麼意義呢？

所謂「無窮大」和「無窮小」，實在並不是一個固定的數目，這件事情常被一般人誤會了。我們可以從下面的解釋裏得到一個瞭解

大家都學過了分數，一個分數包括分子分母兩部份。分數還有一個重要的性質，就是：同分子的分數，分母越大分數的值越小；分母越小分數的值也就越大。現在我們利用這一個性質。第一：假設有一個分數，分子不變，讓分母慢慢變小。分母既小，分數的值便變大；分母小到非常小，譬如說近於零（近於零，卻不等於零），那麼分數的值便變大，變到「非常之大」，這個「非常之大」便叫做「無窮大」。

第二：反過來說：假設有一個分數，分子不變，讓分母慢慢變大。分母既大，分數的值便變小；分母大到非常之大，譬如變成一萬，一萬萬，一萬萬萬……萬萬，那麼分數的值便要變小，變到「非常之小」，這個「非常之小」便叫做「無窮小」。

所以：什麼是「無窮大」呢？那就是無論你說一個多麼大的數，我這個數比你那個還大。你說一萬，這數比一萬大；你說一萬萬萬，這數就比一萬萬萬還大。這個數要多大便比多大還大，這就是「無窮大」。什麼叫做「無窮小」呢？那就是無論你說一個多麼小的數，我這個數比你那個還小。你說百萬分之一，這數就比百萬分之一小；你說萬萬萬分之一，這數比萬萬萬分之一還小。這個數，要多小便比多小還小，這就是「無窮小」。

因此，「無窮大」和「無窮小」並不是兩個固定的數，都是會變的數，一個永遠永遠變大，一個永遠永遠變小。這兩個數的性質雖然絕對相反，但是關係卻非常密切。從上面的解釋裏可以看出來，大是從小的變化裏發生出來的，小又是從大的變化裏發生出來的，大和小實在就分離不開。這種現象並不奇怪，越到高深的算學裏，看得就越清楚了！

但是在平常我們並不大注意這個極端的數。我們所研究的多半是既不大又不小的數。這就是因為我們的能力，最容易瞭解的是中庸，最不容易瞭解的是極端。譬如：過大的數固然想不清楚到底多麼大，過小的數也想不清楚到底多麼小。「看」也是這樣，

頂遠的看不見，可是頂近的呢，如果我們把書放得和眼睛太近的時候，你能看得清楚麼？「聽」也是這樣，聲音太小聽不見，聲音太大也聽不見；學到物理學的時候，我們就知道，聽覺的範圍實在也是有限的。「舉重」也是這樣：頂重的舉不起，可是太輕的你也舉不起，不等你的手一動，那個輕的東西就會滑下去了。所以普通人一般的知識範圍，只是不太深又不太淺，不太難也不太容易的那一部份。

在算學裏也是這樣。我們會算簡單的加減乘除，但是再深的呢，還沒學到，漸漸的就不會了。可是，比加減乘除再淺的呢？譬如說：我們算的是「數」，「數」是什麼東西呢？我們表示的是「量」，「量」又怎麼解釋呢？我們知道，$2+3=3+2$, $2\times3=3\times2$ 可是為什麼 $2+3=3+2$, $2\times3=3\times2$ 呢？許多一看就明白的事情，等到仔細去想，卻反而會變得糊塗起來的。

所以算學的研究有兩種，一種往前研究，往複雜的一方面進展；一種是往後研究，往淺顯的一方面追求。我們學過了整數學分數，學過了算術學代數，這是往前進展。同時另有一派學者專門往後研究，譬如研究上面提出的那一類最淺顯的，似乎不用問的問題。不過我們要注意，最淺顯的同時卻又是最基本的，這種學識叫做算理邏輯，或是算

理哲學。用一個淺顯例子，譬如一棵樹：往上長，發育到樹幹，到樹枝，到樹葉；往下長呢，發育到樹根，——先到主根，再到支根。這是兩個方向相反的發展。

算學的發展是這樣的。一切的學識的發展都是這樣的。