修正課程標準適用

高級中學
甲組用

高中幾何學

陳建功　酈福綿　編

開明

新課程標準適用

高中幾何學

陳建功 酈福綿
合編

開明書店印行

高中幾何學

二十四年一月初版 三十八年二月十七版

每冊定價 一·二〇

編著者	陳建功 酈福綿
發行者	上海福州路 開明書店 代表人范洗人
印刷者	開明書店

(219 P.) Y 酈

內政部著作權註冊執照警字第五三九〇號

編輯大意

1. 本書係依照二十一年十一月教育部所頒布之高級中學算學課程標準編輯,供高級中學幾何學教學之用.

2. 本書分平面幾何學及立體幾何學兩部.平面幾何學共二十四章,足供一學期每週三小時之教學.立體幾何學共十一章,足供一學期每週二小時之教學.

3. 高級中學學生,雖曾習平面幾何學,而於幾何學之基礎智識,往往未能鞏固,本書不嫌重複,仍從基本公理,定義,定理等發端,循序漸進,以求深入,使教學者兩得其便.

4. 本書卷首緒論,略述幾何學原理及定理之證法,使學者對於幾何學先得一明確之概念.

5. 本書術語西文原名不一一散附,卷末附列幾何學名詞中西對照表,以便檢查,且爲學生涉獵西文原書之準備.

6. 本書說理力求簡潔,證法前後保持一律,俾學者易得要領.

7. 本書每章之末,附有習題多則,俾學者得隨時練習.

8. 本書如有誤漏之處,尙望識者有以教正,俾得隨時改正.

編者識

目　錄

平面幾何學

立體幾何學

緒論

1. 幾何學 幾何學者研究物之形狀,大小,位置之科學也.有物於此,由觀察者着眼點之不同,得種種之結果,吾人可問此物之顏色若何,亦可問此物爲何種物質所構成,然幾何學所研究物之性質乃異乎是.上述諸問題不關幾何學之事,幾何學僅就物之形狀,大小,位置而研究之.譬如有二球於此,幾何學,不問此二球爲何種物質所構成,或輕重若何;但問此球是否同爲圓球形,大小若何,二球在若何之位置,物體所塡充之空間,爲幾何學重要之研究對象,故幾何學亦可謂爲研究空間性質之科學.

幾何學恆取若干事項爲基礎,以純正之推論逐漸進行而成一體系.

2. 空間 物體存在之處稱曰空間,空間無止境,無形亦無色,僅有地位而已.物體在無限空間中占有之地位,稱曰幾何學上之立體,例如有一物體,不問其爲木,爲石,就其所占領之空間而言,謂之立體,體之界爲面,面之界爲線,線之界爲點;點,線,面雖均有形無質,然當吾人硏究之時,恆畫圖以表示之,吾人所畫之圖,僅爲便於吾人想像之記號,所畫之點,線,面,並非幾何學上之點,線,面也,例如幾何學上之點乃無大小長短而僅有位置者,縱令吾人所畫之點極

細,亦僅足供想像其位置之用,將此點用顯微鏡放大之,尙能測量其大小也.總之,幾何學研究之對象,並非物體自身,乃物體之外形,此種外形乃用點,線,面集合而成,名之曰幾何圖形,由是吾人又得幾何學之定義曰:幾何學者研究圖形之性質之科學也.

3. **命題** 就一事物而敍述之,其意完全者曰命題,例如'南京,中國之首都也'爲一命題,如僅言'中國之首都',其意不完全,則不能稱之爲命題.

幾何學上命題有六種,分述如下:

一.定義 凡命題敍述一事物之特有性質者,曰定義.定義僅判別此事物與別種事物不同之處,故其限界只及於確定此事物之性質而不及其他.

二.公理 吾人由經驗認爲眞確,而不易用更簡單之事項以論證之事項曰公理.

幾何學以公理作爲推論之基礎,但幾何學中究應選取何者作爲公理,此問題非初等幾何學所能回答.西曆紀元前三百年許,希臘學者歐幾里得(Euclid)首定若干事項爲公理,著幾何原本,普通所謂初等幾何學,亦可稱爲歐氏幾何學,現在初等幾何學中之公理與幾何原本中之公理相仿故也.

三.定理 由已知之事項,因推理而得其他之事項,敍述此新事項之命題曰定理.定理由二部分而成,即假設與

終結是也,前者為假定之事項,後者為由假定導出之事項.

四.系　由其一命題直接可推知之定理,特稱之曰此命題之系.

五.公法　不經推理之作圖基本方法,稱為公法.公法與公理相仿,均屬無待證明者.

六.作圖題　由已知之關係或圖形以推求未知之關係或圖形者,曰問題.用幾何學上之方法,作一圖形,令其合於所設之條件,此類問題特稱之為作圖題.

4　**公理**　公理分二種,一曰普通公理,其適用範圍不限於幾何學.

普通公理之重要者如下:

(a)等於同量或等量之二量相等.

即若　$a=b$,　$c=b$,　則 $a=c$.

又若　$a=b$,　$c=d$,　而 $b=d$,則 $a=c$.

(b)等量加等量,其和相等.

即若　$a=b$,　$c=d$,　則 $a+c=b+d$.

(c)等量減等量,其差相等.

即若　$a=b$,　$c=d$,　則 $a-c=b-d$.

(d)不等量加等量不等,原大者其和亦大.

即若　$a>b$,　$c=d$,　則 $a+c>b+d$.

(e)不等量減等量,其差不等,原大者其差亦大.

即若　$a>b$,　$c=d$,　則 $a-c>b-d$.

(*f*)自等量減去不等量,則所減大者其差小,所減小者其差大.

即若 $a=b$, $c>d$, 則 $a-c<b-d$.

(*g*)等量乘等量,其積仍等.

即若 $a=b$, $c=d$, 則 $a\times c=b\times d$.

(*h*)等量除等量,其商仍等.

即若 $a=b$, $c=d$, 則 $a\div c=b\div d$.

(*i*)若三量之中,第一量大於第二量,第二量大於第三量,則第一量大於第三量.

即若 $a>b$, $b>c$, 則 $a>c$.

(*j*)全量等於其各部分之和.

即若 b, c, d 爲 a 之各部分,則 $a=b+c+d$.

(*k*)全量大於其各部分.

即若 $a=b+c$, 則 $a>b$, $a>c$.

凡上述各量均指正者,蓋初等幾何學中各量,多不計其正負也.

5. 定理之四種形式 定理之一般的形式如下:

'若 A 爲 B,則 C 爲 D'. (i)*

此稱爲定理之範式,其中寫作 A, B, C, D 之處以言語

* 定理亦有簡單而僅成'A 爲 B'之形式者,但此式僅爲範式之省略,如'三角形三角之和(A)等於一平角(B)',雖僅具'A 爲 B'之形式,實則此乃下列一定理之省略,仍可寫作定理之範式也,'若三角爲三角形之三內角,則其和等於二直角'.

分別代入之可也,如三角形中之一定理:

$$\text{'}\underbrace{\text{若三角形之二邊}}_{A}\underbrace{\text{相等}}_{B},\text{則}\underbrace{\text{其所對之角}}_{C}\underbrace{\text{亦等}}_{D}\text{'};$$

上定理'三角形之二邊'爲A,'相等'爲B;'其所對之角'爲C,'亦等'爲D.其間二'爲'字,則因語法上的關係巳省去矣.上範式中之'A爲B'爲假設,'C爲D'爲終結,意謂若A爲B,則C必爲D也.

如上範式之定理爲眞確,則下列式樣之定理亦必眞確:

'若C不爲D,則A不爲B';　(ii)

何則?因A爲B之時,C必爲D,則C不爲D之時,A不爲B也明甚.例如'凡砂糖,其味甘'乃如(i)形式之定理,如吾人認其爲眞確,則具(ii)形式之'其味不甘者决非砂糖'一定理易知其亦眞確也.又同理(ii)眞確,則(i)亦必眞確.

定理(i)與(ii)互稱曰**對偶定理**,已知其一爲眞確,則他一定理無須證明,卽可斷定其爲眞確.

又將範式(i)之假設與終結顚倒之,得如下述之命題.

'若C爲D,則A爲B';　(iii)

命題(iii)所述者,若爲眞理,則成定理,此定理與定理(i)互稱曰**逆定理**.一定理之逆,未必眞確,如上例'凡砂糖,其味甘'之逆爲'其味甘者爲砂糖',但味甘者,固不限於砂糖,故一定理之逆,須經過論證,始能斷定其是否成爲定理.

(iii)之對偶如下:

$$\text{‘若}A\text{不爲}B,\text{則}C\text{不爲}D\text{’;} \tag{iv}$$

將(i)之肯定語,改爲否定語,卽得(iv).如是(i)與(iv)互稱曰**否定命題**.一定理之否定命題,未必眞確,例如‘不爲砂糖,其味不甘’固未能遽斷其爲眞確也.

以上四種形式之相互關係,概括之如下:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)}\\ \text{(ii)}\end{array}\right\}\text{對偶}\qquad \left.\begin{array}{l}\text{(i)}\\ \text{(iii)}\end{array}\right\}\text{逆}\qquad \left.\begin{array}{l}\text{(i)}\\ \text{(iv)}\end{array}\right\}\text{否定}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{(iii)}\\ \text{(iv)}\end{array}\right\}\text{對偶}\qquad \left.\begin{array}{l}\text{(ii)}\\ \text{(iv)}\end{array}\right\}\text{逆}\qquad \left.\begin{array}{l}\text{(ii)}\\ \text{(iii)}\end{array}\right\}\text{否定}$$

定理有具二個以上之假設者,則以其一假設與一終結交換,卽得一逆命題.如有定理:

‘若A爲B,C爲D,而E爲F,則X爲Y’,

則如下之諸命題,均爲其逆,眞確與否,固又當別論:——

‘若A爲B,C爲D,而X爲Y,則E爲F’,

‘若A爲B,X爲Y,而E爲F,則C爲D’,

‘若X爲Y,C爲D,而E爲F,則A爲B’.

此等逆命題之討論,在軌跡與作圖題中,最爲緊要.

6.　**定理證明法**　定理之終結,爲由所與之事件,而用公理或已知之定理所推求而得之事實,故定理之得到,必有此推求之步驟,此推求之步驟,名曰證明.茲述證明之方法如下:

一.直接證明法　直接證明法者,證明定理之正面也.此法大別有三:(a)重合法,(b)綜合法,(c)解析法.普通之定理大都用此種方法證明,當於以後證明定理時隨時詳述之.

二.間接證明法　間接證明法者,不證明定理之正面而證明其對偶定理或詳論其逆命題之法也.此法通用者有三:

(a)歸謬法　歸謬法者,證明一定理之對偶定理之法也.先設終結之反面爲眞,逐漸推論,至得其結果與假設相背謬之時,則定理卽得證明矣.

(b)窮舉證法　一定理之假設,盡其可發生之種種變化,若其終結均各各不同,則此定理之逆,亦必眞確,關於此種定理在幾何學上最普通者如下例:

$$\left.\begin{array}{l} A\text{大於}B,\text{則}C\text{大於}D \\ A\text{等於}B,\text{則}C\text{等於}D \\ A\text{小於}B,\text{則}C\text{小於}D \end{array}\right\};$$

因A與B之關係,僅此三種,而其終結C與D之關係,因A,B之關係而各各不同,故其中之一如'A大於B,則C大於D'眞確之時,此定理之反定理,卽'A不大於B,則C不大於D'亦必眞確,因A不大於B時,卽爲等於B或小於B,但等於B及小於B之時,已知C決不大於D也.今'A不大於B,則C不大於D'旣眞確,則其對偶'若C大於D,則A大於B'亦必眞確.

但此定理即'A大於B,則C大於D'之逆定理也.

同理知下列二逆命題,亦均眞確:

'若C等於D,則A等於B',

'若C小於D,則A小於B'.

上述之命題稱曰**離接命題**.故凡一定理爲一離接命題時,則其逆命題可無待證明而知其爲眞確,故若一定理不易證明時,可將此定理之逆命題列舉而推論其結果,如是,則本定理卽可證明,此種證明方法,稱曰**窮舉證法**.

關於此種命題尙有如下之一例:

$$\left.\begin{array}{l}A\text{在}B\text{之外,則}C\text{大於}D\\ A\text{在}B\text{之上,則}C\text{等於}D\\ A\text{在}B\text{之內,則}C\text{小於}D\end{array}\right\},$$

上列命題如爲眞確,則以下各逆命題亦必眞確:

$$\left.\begin{array}{l}C\text{大於}D\text{,則}A\text{在}B\text{之外}\\ C\text{等於}D\text{,則}A\text{在}B\text{之上}\\ C\text{小於}D\text{,則}A\text{在}B\text{之內}\end{array}\right\}.$$

(c)同一法　若'A爲B'之A及B在此定理中,均僅有一個存在,則'B爲A'亦成定理,此法名曰**同一法**.如'孫中山先生爲中國國民黨之總理',因孫中山先生及國民黨總理均僅有一個,故'中國國民黨之總理爲孫中山先生',一語必眞確無疑也,又如下列定理:

'自二等邊三角形之頂點作底邊之垂線,得

頂角之平分線';

因二等邊三角形頂角之平分線僅有一個,而自頂點所作底邊之垂線亦僅有一個.故逆定理:

'二等邊三角形頂角之二等分線,即自頂點至底邊之垂線',

亦同時得推定其爲眞確也.

第 一 部

平 面 幾 何 學

第一章　幾何圖形

7.　**定義 1.**　僅有位置,而無大小,長短,厚薄者爲**點**.

8.　**定義 2.**　僅有位置,長短而無寬狹,厚薄者爲**線**.

9.　**定義 3.**　有位置,長闊而無厚薄者曰**面**.

10.　**定義 4.**　點,線,面爲幾何學圖形上之三要素,有此三者之一,或數個集合而成之圖形,曰**幾何圖形**.

11.　**定義 5.**　物體占有空間之一部分爲**立體**,**立體**有位置,長短,廣狹,厚薄.

12　**定義 6.**　線之交爲點.

如右圖 X,Y 二線相交之處爲 A, B, C;則 A, B, C 均爲點.

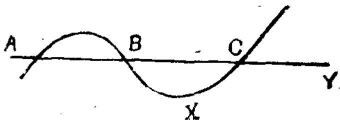


圖 1.

13.　**定義 7.**　線上任意二點間之一部分,以任意之方法置於他部分上,能與他部分密密相合者,謂之**直線**.

14.　**公理 1.**　過二點得作一直線,且以一直線爲限*

由此公理得直接推知下列二事:

系 1.　二直線不能相交於二點,如有二點相合,則全相合.

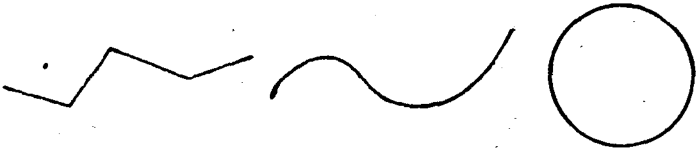
---

*此公理爲聯合公理之一,因幾何圖形中之點,線,面,均爲獨立的存在物,須有公理爲之聯合也.

系 2. 過一點必能作一直線至另一點.

自一點 A 至一點 B 作一直線,稱曰 AB 有限線分,或簡稱線分 AB.

線除直線之外,有折線及曲線.線以不屬於同一直線之線分結成者曰折線.線有一部分不爲直線者曰曲線.初等幾何學中最常見之曲線爲圓周.



折線　　曲線　　圓周

圖 2.

15. 定義 8. 連結面上任意二點之直線,全部均在面上者曰平面.

16. 定義 9. 在一平面上之幾何圖形曰平面圖形,由直線所成之圖形曰直線形.

本書上卷所論之圖形,均爲平面圖形,故所論之圖形均在一平面上.凡所論之圖形均在一平面上之幾何學,稱曰平面幾何學,又所論之圖形不限於一平面者,則爲立體幾何學或曰空間幾何學.

平面幾何學中所論之圖形既均在一平面上,則以後對於證題之時,'此圖形在同一平面'一語,均省略不說,學者但注意在一平面上討論之問題,不全適用於空間上所討

論者足矣.

17. **線分之正負** 代數學中量有正負,幾何學中亦然,吾人行路有向前與退後之別,寒暑表亦有上昇與下降之事,而此等事,常可用線分之長短表示,但僅線分表示,其義未盡,必須以正量表示向前及上昇之量,以負量表示退後及下降之量,故線分亦須有一定方向以表示其正負;通常以向右及向上之線分表示正量,以向左及向下之線分表示負量.如下圖,線分 AB, BC 爲正線分,CB, BA 爲負線分

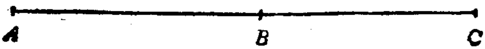


圖 3.

第二章　角

18.　**定義 10**　二直線相交,則成角,稱之爲此二直線之角或所含之角.此二直線爲其邊或臂,其交點,稱爲角之頂點.

如形成此角之二直線均止於其相交點 A,如下圖 (a),此角即可以 $\angle A$ 記之.然如圖 (b),若僅以 $\angle A$ 記之,則不能明示其果爲何角,故所指之角如爲 BA, CA 間者,則以 $\angle BAC$ 記之,以示區別.

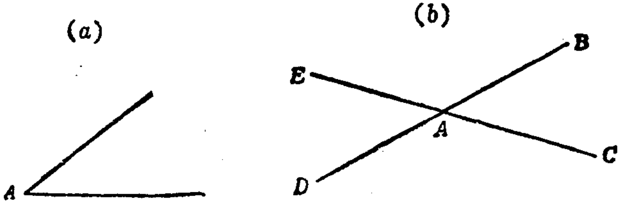


圖 4.

19.　**定義 11.**　二角之頂點及一邊公共者,互稱曰鄰角.

20.　**定義 12.**　二角相加,係置二角於相鄰位置,則不公共之二邊所成之角,即爲其和.

21　**定義 13**　一直線立於另一直線上,而使相鄰之兩角相等,則此二角均稱爲一直角,而此二直線稱爲互成

直角,直角恆以$\angle R$.記之.

22. **定義 14.** 二直線互成直角,則稱此二直線之一垂直於他直線,或曰他直線之垂線.

23. **定義 15.** 一角之兩邊在頂點之兩側成一直線,則名此角曰**平角**.

系 一平角等於兩直角.

24. **公理 2.** 幾何圖形,可任意移動其位置,而不變其形狀大小*.

25. **公理 3.** 全相重合之二圖形,其全體及其相當之各部分均各相等.

26. **定理 1.** **凡平角均相等.**

圖 5.

假設 設有任意二平角$\angle ACB$, $\angle A'C'B'$.

求證 $\angle ACB=\angle A'C'B'$.

證 置$\angle A'C'B'$於$\angle ACB$上, (公理2)

令C'與C相合,A'在AC上,則ACB與$A'C'B'$二直線全相合 (公理1系1,

由是 $\angle ACB=\angle A'C'B'$.

---

*此公理即公認一圖形得移置於他圖形上,仍不變其形狀大小,始終相等,故亦名曰相等公理.

故凡平角均相等.

27. **定理 2.** 凡直角均相等.

由上二節及普通公理(*h*)得證之.

28. **證法研究——重合法** 重合法爲直接證明法之一種,於基本定理之證明時,常用之.此法根據公理2證明時,置一圖形之某部分於他圖形上,逐漸推論,因而證明此圖形全體或其一部分與他圖形之全體或一部分之相互關係也.定理1用此法證明,以後證明兩三角形全等之時,亦多用此法.

29. **定義 16.** 二角之和爲一直角,則稱一角爲他角之餘角,或曰二角互爲餘角.

30. **定義 17.** 二角之和爲二直角,則稱一角爲他角之補角,或曰二角互爲補角.

31. **定義 18.** 凡一角小於一直角曰銳角.

32. **定義 19.** 凡一角大於一直角而小於一平角曰鈍角.

33. **定理 3.** 一直線與另一直線在該直線一旁所成二角之和,等於兩直角.

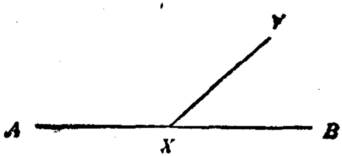


圖 6.

假設 直線AB與直線XY相交於X;在AB之一旁,XY與AB成$\angle AXY$,$\angle YXB$二角.

求證 $\angle AXY+\angle YXB=2\angle R$.

證 $\angle AXY$與$\angle YXB$之和爲$\angle AXB$. (定義12)

AXB爲一直線,故$\angle AXB$爲一平角, (定義15)

故 $\angle AXY+\angle YXB=\angle AXB=2\angle R$. (定義15系)

34. 定理4. 一直線上之一點在其兩旁引另二直線,令其所成之兩鄰角之和爲兩直角,則此兩直線必爲同一之直線.

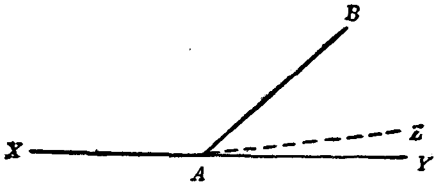


圖 7.

假設 在直線AB上之一點A,在AB兩旁引二直線AX,AY,令$\angle XAB+\angle BAY=2\angle R$.

求證 AX,AY爲同一之一直線.

證 假令XA延長至Z,則BA與XZ直線相遇,其交點爲A.

$$\therefore \angle XAB+\angle BAZ=2\angle R.$$

$$\therefore \angle XAB+\angle BAZ=\angle XAB+\angle BAY.$$

故 $\angle BAZ=\angle BAY$.

$\therefore AZ$ 與 AY 重合.

故 XA, AY 成一直線.

35. 證法研究——綜合法 綜合法者,直接由題中之假設,引用定理逐漸推論,至題之結論為止;中間經過之理論,則輾轉互為假設與結論,此法為證法中之最普通者.

36. 定理 5. 自一直線上之一點向直線之一旁,順次引若干直線,則順次所成諸角之和,等於二直角.

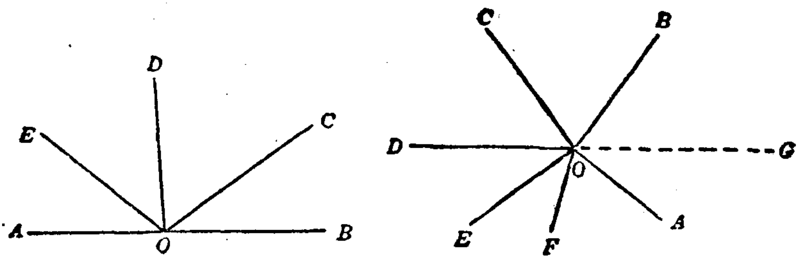


圖 8.

假設 O 為直線 AB 上之一點,自 O 引 OC, OD, OE 三直線.

求證 $\angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 2\angle R.$

證 因 $\angle BOC + \angle COD = \angle BOD.$

同理 $\angle BOD + \angle DOE = \angle BOE,$

$\angle BOE + \angle EOA = \angle BOA.$

但 $\angle BOA = 2\angle R.$

故　$\angle BOC+\angle COD+\angle DOE+\angle EOA=2\angle R.$

系　自一點引若干直線,則此諸直線順次所成諸角之和,等於四直角.

如圖8右圖,延長DO至G,卽可證明,學者自爲之可也.

37. **定義 20.**　兩直線相交,其所成相對之兩角曰對頂角.

如下圖,$\angle AOC$與$\angle BOD$, $\angle BOC$與$\angle AOD$均互爲對頂角.

38. **定理 6.**　對頂角相等.

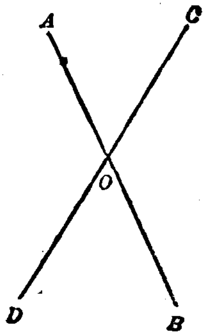


圖 9.

假設　AB, CD二直線相交於O.

求證　$\angle AOC=\angle BOD,$

$\angle AOD=\angle BOC.$

證　因　AOB, COD爲直線,

$\therefore \angle AOC+\angle COB=2\angle R.,$

$$\angle COB+\angle BOD=2\angle R.$$

$$\therefore\ \angle AOC+\angle COB=\angle COB+\angle BOD.$$

$$\therefore\ \angle AOC=\angle BOD.$$

同理得證 $\angle AOD=\angle BOC.$

∴對頂角相等.

39. 證法研究——證題之步驟 凡定理由假設及終結二部分構成,則證題之初,須將何者為假設,何者為終結,分辨清楚,始能着手證明.又定理中欲討論之圖形,常泛指一般者,如論直線,乃指任何直線而言;吾人欲取所有之直線一一討論之,勢所不能,故證題之時,常取一任意之直線以為代表,如上定理證明對頂角相等時,吾人取任意二直線AB,CD相交,而證明其所成之對頂角相等,此蓋為便於想像及證明計,取一具體的對頂角以為代表物也;故一定理之證明,分假設,求證,證三項,分此三項之時,卽上述證題之步驟,惟假設,求證二項中之事項,不能出乎定理範圍以外,亦不能將定理中之事項,有所遺漏,學者務宜注意.

40. 角之計算 計算角之大小,最普通之單位為度,分,秒.分一直角為九十等分,其一分曰一度.分一度為六十等分,其一分曰一分.分一分為六十等分,其一分曰一秒.度,分,秒常以"°","′","″"記之.故59度48分36秒之角,可以$59°48'36''$記之.

41. 角之正負 角之定義,已見於第18節,但亦可視為一直線OA,先在OB之位置,後繞O點迴轉至OA之位置,而成AOB角.此種迴轉之方向有二,一種與時針旋轉之方向一致,一種與時針旋轉之方向相反,故角亦可分為正角及負角.吾人公認反對時針旋轉方向迴轉而成之角為正,順時針方向迴轉而成之角為負.如圖,直線OA自OB位置迴轉至OA位置所成之角讀作AOB角,其角為正;直線OA自OB位置迴轉至OA'位置,讀作$A'OB$角,其角為負.

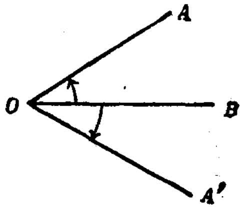


圖 10.

直線之迴轉,既有二種方向,故二直線相交,所成之角亦有二,如是所成之二角互稱曰**共軛角**,其較大者稱曰**優角**,較小者曰**劣角**,通常所說之角均指劣角而言,即本書各章所說之角,亦多為劣角也.

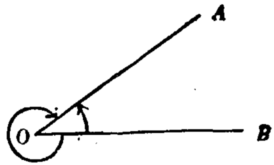


圖 11.

習 題

1. 角之大小與邊之長短有無關係?一角之二邊各長3寸,一角之二邊各長2寸,有此條件能否斷定此二角之大小關係?

2. A角為$59°36'48''$,試求$\angle A$之餘角及補角.

3. 二直線相交之角,如有一為直角,則其他三角必皆為直角.

4. 自一點引六直線,成相等之六角,問各角為一直角之幾分之幾?其度數若干?

5. 一直線與他直線相交,成二相鄰之角,則二等分此二角之二直線必互相垂直.

6. 在直線AB上之一點O,在其兩側引OC, OD二直線,若$\angle AOC = \angle BOD$,則COD必接成一直線.

7. 相交二直線所成四角之二等分線,必接成二直線,且互為垂直.

8. 一角之二等分線,兼分其對頂角為二等分.

第三章　三角形

42. **定義 21.** 被若干直線線分完全圍繞之圖形謂之多角形,此諸線分稱爲多角形之邊.多角形之周,卽爲此諸邊之和.

43. **定義 22.** 多角形鄰接二邊所形成之角曰多角形之一內角,一邊與其鄰邊之延長線所形成之角曰多角形之外角.

44. **定義 23.** 多角形內角之頂點稱爲多角形之頂點.不在一邊上多角形二頂點之連結線曰多角形之對角線.多角形常以其頂點所記之文字表示之.如右圖,$ABCDE$ 爲一多角形,$\angle AED$, $\angle EDC$ ………等均爲內角.若 CD 延長至 F,則 $\angle EDF$ 爲外角.同理 $\angle AEG$ 亦爲外角.A,B,C,D,E 爲多角形之頂點,AC 爲其一對角線.

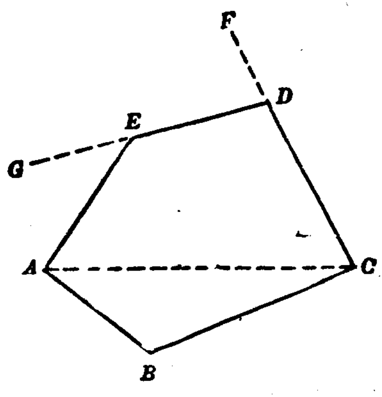


圖 12.

45. **定義 24.** 有 n 邊之多角形,常稱曰 n 角形或曰

n **邊形***,故有三邊之多角形稱曰**三角形**.三角形之三頂點為A,B,C,則此三角形恆以$\triangle ABC$記之.

46. **定義 25.** 三角形以邊之長短之關係而分三類:

一. 三邊中無二邊相等者曰**不等邊三角形**.

二. 三邊中有二邊相等者曰**二等邊三角形**,或曰**等腰三角形**.

三. 三邊均相等者曰**等邊三角形**.

47. **定義 26.** 以三角形之任一邊為標準,而視此三角形為立於此邊之上,則此標準邊曰**三角形之底**.底之對角曰**三角形之頂角**.頂角之頂點曰**三角形之頂點**.

48. **定義 27.** 三角形之任一頂點至對邊或對邊之延長線上之垂線曰**三角形之高**.

49. **定義 28.** 三角形之任一頂點至對邊中點之直線曰**三角形之中線**.

50. **定義 29.** 自三角形之任一頂點所引此頂角之二等分線至對邊間之線分,謂三角形之角平分線,如圖:三角形ABC之高為AD,

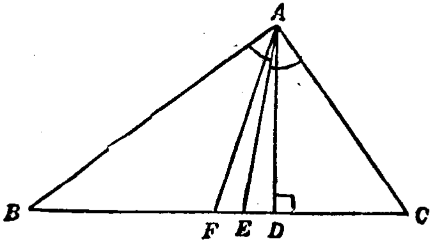


圖 13.

* n邊之多角形或曰n角形,或曰n邊形,在本書為名異實同之圖形.

中線爲 AF,角平相線爲 AE.

51. **定理 7.** 三角形之兩角及其夾邊,各與他三角形之兩角及其夾邊相等,則兩三角形全相等*.

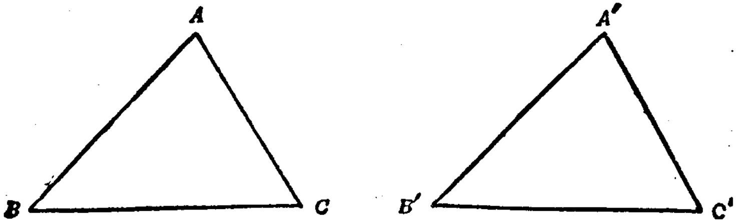


圖 14.

假設　設有 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$,

$$AB = A'B',\quad \angle A = \angle A',\quad \angle B = \angle B'.$$

求證　$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$†.

證　置 $\triangle ABC$ 於 $\triangle A'B'C'$ 上,令 AB 與 $A'B'$ 相合.

因　$\angle ABC = \angle A'B'C'$,故 BC 必在 $B'C'$ 上.

又　$\angle BAC = \angle B'A'C'$,故 AC 必在 $A'C'$ 上.

$\therefore C$ 與 C' 相合.　(公理1系1)

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

52. **定理 8.** 一三角形之二邊及其夾角,各與他三角形之二邊及其夾角相等,則兩三角形全相等.

*兩圖形可完全重合稱曰全相等.

† $\cong$ 爲全相等之記號.

假設 設有$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$,

$$AB = A'B',\quad BC = B'C',\quad \angle B = \angle B'.$$

求證 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

證 (用上定理之圖)置$\triangle ABC$於$\triangle A'B'C'$上,使BC與$B'C'$相合,因$\angle B = \angle B'$,故BA必在$B'A'$上.

因$BA = B'A'$,

故BA必與$B'A'$重合.

由是AC與$A'C'$相合,

$\therefore\ \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

53. 定理 9. 二等邊三角形之兩底角相等,其逆定理亦成立.

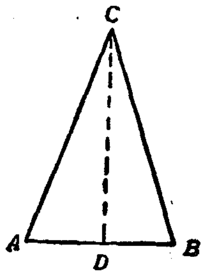


圖 15.

假設 設有$\triangle ABC$, $AC = BC$.

求證 $\angle BAC = \angle ABC$.

證 引$\angle C$之角平分線CD.在$\triangle ACD$及$\triangle BCD$內,

$$AC = BC,$$

$$\angle ACD = \angle BCD, CD \text{ 公共.}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCD. \qquad \text{(定理 8)}$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ABC.$$

逆定理　三角形之二內角相等,則此三角形爲二等邊三角形.

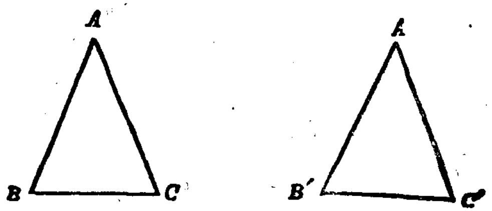


圖 16.

證　將 $\triangle ABC$ 覆置於平面之另一部分上,得 $\triangle A'C'B'$. 設 A', C', B' 各爲 A, B, C 之相當頂點.

因 $\angle B = \angle C$,

$\angle C' = \angle B$,

$\angle B' = \angle C$,

$C'B' = BC$,

故 $\triangle A'C'B' \cong \triangle ABC$,　(定理 7)

故 $A'C' = AB$.

但 $A'C' = AC$,

故 $AB = AC$.

系 1.　二等邊三角形頂角之平分線,爲其底邊之垂

直平分線*.

系 2. 等邊三角形之內角均相等.

54. 定理 10. 一三角形之三邊與另一三角形之三邊各相等,則兩三角形全相等.

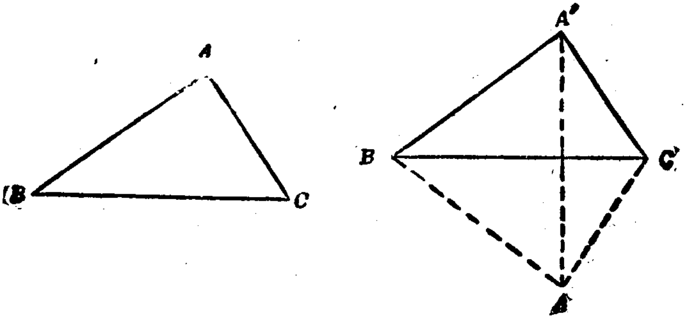


圖 17.

假設 設有 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$,

$$AB = A'B',\quad BC = B'C',\quad CA = C'A'.$$

求證 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

證 移動 $\triangle ABC$,使 BC 與 $B'C'$ 相合,而使 A 所落之位置與 A' 各在 $B'C'$ 之一側,設其點爲 A'',連接 $A'A''$.

由是 $\triangle A''B'A'$ 爲一二等邊三角形.

$$\therefore \angle B'A'A'' = \angle B'A''A'.$$

又 $\triangle A''C'A'$ 亦爲一二等邊三角形.

* 過一線分之中點,所引之垂線,曰此線分之垂直平分線.

$$\therefore \angle A''A'C' = \angle A'A''C'.$$

$$\therefore \angle B'A'A'' + \angle A''A'C' = \angle B'A''A' + \angle A'A''C'.$$

即 $$\angle A' = \angle A'',$$

$$\therefore \triangle A'B'C' \cong \triangle A''B'C',$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

55. 定理 11. 三角形之外角,大於其不相鄰之任一內角.

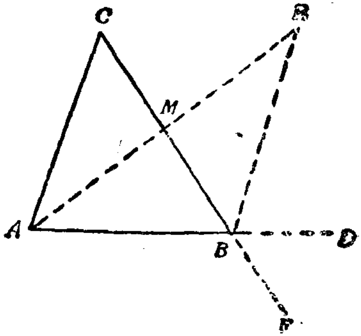


圖 18.

假設　設$\triangle ABC$之AB邊延長至D.

求證　$\angle CBD$大於$\angle A$或$\angle C$.

證　取CB之中點M,引AM直線,且延長AM至E,令$AM = EM$.連接EB.由是在$\triangle BME$與$\triangle CMA$.

$$BM = CM, \quad EM = AM,$$

又 $$\angle BME = \angle CMA,$$

$$\therefore \triangle BME \cong \triangle CMA.$$

因之　　$\angle MBE = \angle MCA = \angle ACB.$

又由　　$\angle MBE + \angle EBD > \angle MBE,$

即　　$\angle CBD > \angle ACB.$

同理得證　　$\angle CBD > \angle BAC.$

$$\therefore \angle CBD \text{ 大於 } \angle C \text{ 或 } \angle A.$$

56. 定理 12. 三角形之二邊不等,則大邊所對之角亦大.其逆定理亦成立.

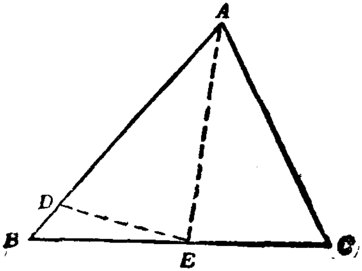


圖 19.

假設　　設於$\triangle ABC$內,

$$AB > AC.$$

求證　　$\angle ACB > \angle ABC.$

證　在AB上取D點,令$AD = AC$;又引$\angle BAC$之角平分線與BC交於E,且連DE;則於

$$\triangle CAE \text{ 及 } \triangle DAE,$$

$$AC = AD, AE \text{ 公共},$$

而　$\angle CAE = \angle DAE,$

$\therefore \quad \triangle CAE \cong \triangle DAE.$

因之　$\angle ACE = \angle ADE.$

然　$\angle ADE > \angle DBE,$　(定理 11)

故　$\angle ACB > \angle ABC.$

逆定理　三角形之二角不等,則大角所對之邊亦大.

意卽,若　$\angle ACB > \angle ABC$, 則 $AB > AC.$

證　若　$AB \not> AC$,　則 $AB \leqq AC.$

然若　$AB = AC$, 則 $\angle ACB = \angle ABC.$

又若　$AB < AC$, 則 $\angle ACB < \angle ABC.$

凡此均與假設不合,故　$AB > AC.$

57.　**定理 13.**　三角形二邊之和,大於其他一邊.

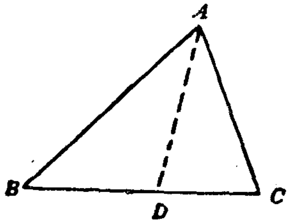


圖 20.

假設　設 $\triangle ABC$ 之三邊爲 $AB, BC, CA.$

求證　$CA + AB > BC,\quad AB + BC > DA,$

$$BC + CA > AB.$$

證　引 $\angle BAC$ 之角平分線,則

$$\angle ADB > \angle DAC, \qquad \text{(定理 11)}$$

即 $$\angle ADB > \angle BAD,$$

$$\therefore AB > BD. \qquad \text{(定理 12)}$$

同理 $$CA > DC,$$

$$\therefore CA + AB > BD + DC.$$

即 $CA + AB > BC$. 同理得證其他二式.

系 二點間直線線分之長,小於二點間折線之長.

58. **定理 14.** 三角形任意二內角之和,小於兩直角.

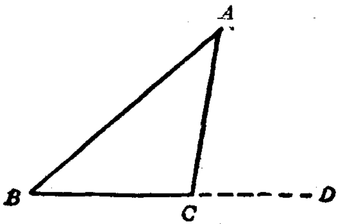


圖 21.

假設 設 $\angle ABC, \angle ACB$ 爲 $\triangle ABC$ 之內角.

求證 $\angle ABC + \angle ACB < 2\angle R.$

證 延長 BC 至 D, 則 $\angle ACD > \angle ABC.$

$$\therefore \angle ACD + \angle ACB > \angle ABC + \angle ACB.$$

然 $$\angle ACD + \angle ACB = 2\angle R.,$$

故 $$\angle ABC + \angle ACB \not> 2\angle R.$$

系 1. 凡三角形有一角爲直角或鈍角,則其他兩角必爲銳角.

系 2. 凡三角形至少必有二鋭角.

系 3. 自直線外之一點作此直線之垂線,有一無二.

若自一點 A 至一直線 BC 有二垂線 AB, AC, 則於 ABC 三角形內,可得:

$$\angle ABC + \angle ACB = 2\angle R.$$

此與本定理不合,故僅可作一垂線.

59. **定義 30.** 三角形以內角之大小而分爲三類:

一. 三內角有一爲直角者曰**直角三角形**.

二. 三內角有一爲鈍角者曰**鈍角三角形**.

三. 三內角均爲鋭角者曰**鋭角三角形**,而鋭角三角形之三內角均相等者曰**等角三角形**,或曰**正三角形**.

60. **定理 15.** 自三角形形內之一點,至一邊之兩端所引二線分之和,比其他二邊之和小,而其所夾之角,比其他二邊所夾者大.

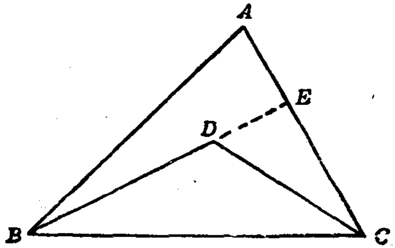


圖 22

假設 設 D 爲 $\triangle ABC$ 內之一點, DB, DC 爲自 D 至 BC

兩端所引之線分.

求證 $DB + DC < AB + AC$,

$\angle BDC > \angle BAC$.

證 延長 BD 與 AC 相交於 E.

因 $BD + DE < AB + AE$,

又 $DC < DE + EC$,

故 $BD + DC < AB + AE + EC$,

即 $BD + DC < AB + AC$.

又 $\angle BEC > \angle BAE (= \angle BAC$,

而 $\angle BDC > \angle BEC$,

$\therefore \angle BDC > \angle BAC$.

61. **定理 16** 一三角形之二角各與他三角形之二角相等,且一組等角之對邊亦相等,則兩三角形全相等.

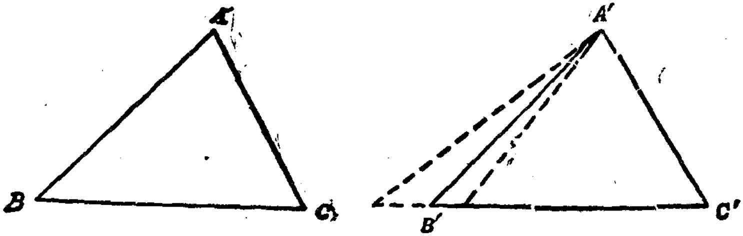


圖 23.

假設 設若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$,

$\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $CA = C'A'$.

求證 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

證 置$\triangle ABC$於$\triangle A'B'C'$上，使CA與$C'A'$相合，$\angle C$與$\angle C'$相合.

若AB不與$A'B'$相合，而成上圖虛線所示之位置，則

AB與$A'B'$及$C'B'$成一三角形。

由是$\angle ABC$及$\angle A'B'C'$，一爲其外角，一爲其不相鄰之內角，二者不能相等，而於假設不合. (定理11)

故AB必與$A'B'$相重.

而$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

系 兩直角三角形之斜邊及其一端之角相等，則兩三角形全相等.

62. 定理 17. 一三角形之二邊各與他三角形之二邊相等，其一組等邊之對角亦相等，則他一組等邊之對角或相等或互爲補角；若相等，則兩三角形全相等.

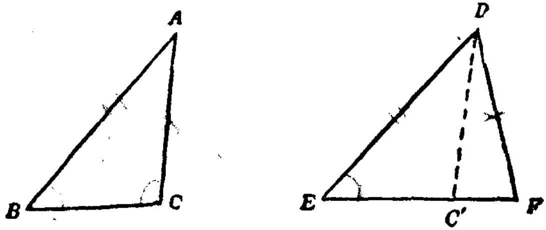


圖 24.

假設 設於$\triangle ABC$及$\triangle DEF$,

$$AB = DE,\quad AC = DF,\quad \angle ABC = \angle DEF.$$

求證 $\angle ACB$, $\angle DFE$相等或互爲補角.

圖　置$\triangle ABC$於$\triangle DEF$上,使A落於D,AB與DE相合,AC與DF在DE之同側.

因　$\angle ABC=\angle DEF$,故C點必落於EF或EF之延長線上.

如C點落於F上,則兩三角形全相等,而

$$\angle ACB=\angle DFE.$$

如C不落於F上,而落於一點C',則因

$$AC=DC'=DF,$$

知　$$\angle DC'F=\angle DFC',$$

然　$\angle DC'E=\angle ACB$,　且$\angle DC'E+\angle DC'F=2\angle R.$

故　$$\angle ACB+\angle DFE=2\angle R.$$

【注意】 上定理之兩三角形合於下列條件之一者,則兩三角形全相等.

一.相等之各角爲直角或鈍角.

因$\angle ABC=\angle DEF\geqq\angle R.$,則其他內角均爲銳角,不能互爲補角也.

二.其他一組等邊之對角同爲銳角或直角者.理由同上.

三.對等角之各等邊不小於另一組等邊者.

因　$$AC\,(=DF)\geqq AB\,(=DE),$$

則AB,DE所對之二角,均不能大於已知之相等角,故知其皆爲銳角,不能互爲補角也.

系　一直角三角形之斜邊及夾直角之一邊各與他直角三角形之斜邊及夾直角之一邊相等,則此兩三角形全相等.

63.　**定理 18.**　一三角形之二邊各與他三角形之二邊相等,而夾角不等,則大角所對之邊亦大.

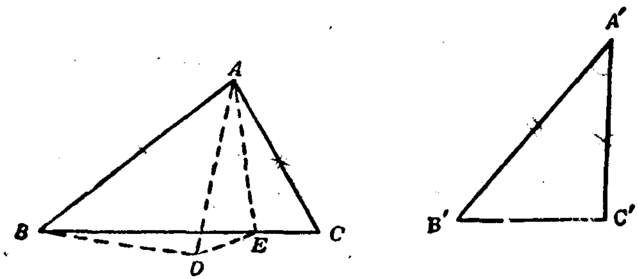


圖 25.

假設　設於 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$,

$$AB = A'B',\quad AC = A'C',\quad \angle BAC > \angle B'A'C'.$$

求證　$BC > B'C'$.

證　置 $\triangle A'B'C'$ 於 $\triangle ABC$ 上,$A'B'$ 與 AB 相合,$A'C'$ 與 AC 落於 AB 之同側.若 C' 落於 BC 上之一點 D,則因 $\angle BAC > \angle B'A'C'$,$D$ 必在 BC 之間.

$$\therefore BC > BD, 卽\ BC > B'C'.$$

若 C 落於 BC 線外之一點 D,則連結 AD,並引 $\angle DAC$ 之角平分線與 BC 相交於 E,則於 $\triangle ADE$ 與 $\triangle ACE$,

$$AC = AD,\ AE\ 公共,\ \angle DAE = \angle EAC,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore DE = EC.$$

$$\therefore BE + ED = BE + EC = BC.$$

但 $$BE + ED > BD,$$

$$\therefore BC > BD,$$

即 $$BC > B'C'.$$

逆定理 三角形之二邊各與他三角形之二邊相等,而第三邊不等,則大邊所對之角亦大.

此逆定理得由歸謬法證明,學者試自爲之.

64. **證法研究** 欲證明二直線或二角相等,常使此二線分或二角成爲兩三角形之角或邊,由是證明兩三角形之全相等以證明之.比較二線分或二邊之大小,亦常使此線分及角成爲三角形之邊及角而證明之.

習題

1. 如圖,$DB \perp AC$, $\angle ADE = \angle EDC$, EDB 爲一直線,求證

$$\triangle ABD \cong \triangle CBD.$$

2. 如圖,$DB \perp AC$, $\angle ADB$ 爲 $\angle EDC$ 之補角,BDE 爲一直線,求證

$$\triangle ABD \cong \triangle CBD.$$

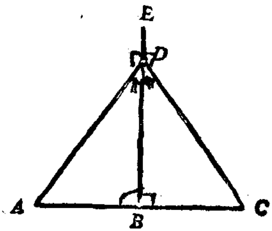


圖 26.

3. 如圖27,$BD=BF$,$BC=BA$,而CG及AE為直線,求證

$$CD=AF.$$

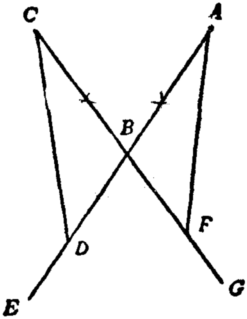


圖 27.

4. 等邊三角形ABC之三邊上各取D,E及F三點,使$AD=BE=CF$,則$\triangle DEF$亦為等邊三角形.

5. 試將三角形邊角之大小關係,列成一表.

6. 試將三角形全相等之條件,列成一表.

7. 如圖28,於A角之一邊上取B,D二點,又於他邊上取C,E二點,若$AB=AC$,$AD=AE$,則$BE=CD$.

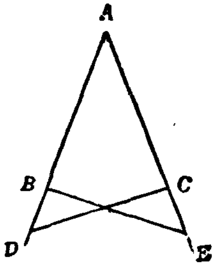


圖 28

8. 自二等邊三角形ABC之底邊BC兩端所引BD,CE二直線,又自頂點A引BD,CE之垂線AD,AE,

若$AD=AE$,

則$BD=EC$.

9. 三角形ABC之底邊BC延長至D,令$CD=AB$,則$BC<AD$.

10. 由二等邊三角形等邊之中點,各與所對底角之頂點聯成之二直線必相等.

11.　等分二等邊三角形底角之二直線,或等分其外角之二直線,與原三角形之底,成一二等邊三角形.

12.　從三角形形內一點,至各頂點距離之和比此三角形之周小,而比其周之半大.

13.　四邊形之二對角線之和比四邊形之周小,而比其周之半大.

14.　三角形三中線之和比其周小,而比其周之半大.

15.　二個二等邊三角形有一公共之底邊,則連結其二頂點之直線必垂直等分其底邊.

16.　如圖29,若AD為$\triangle ABC$之一中線,則

(i)　$AD > \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$.

(ii)　$AD < \frac{1}{2}(AB + AC)$.

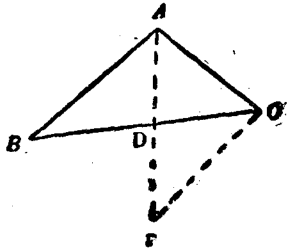


圖 29.

第四章　垂線與平行線

65. **定義 31.** 自一點至一直線所引垂線之長曰**此點至該直線之距離**.

66. **定義 32.** 兩直線不相垂直者互稱曰此直線**爲彼直線之斜線**.

67. **定理 19.** 自直線外一點向此直線所引諸線分中:

(*a*) 垂線最短.

(*b*) 斜線與垂線所夾之角較大者,斜線亦較長.

(*c*) 與垂線所夾之角相等之兩斜線等長.

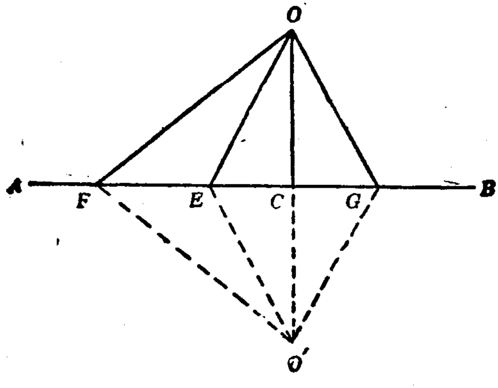


圖 30.

假設 設 OC 爲自一點 O 至直線 AB 之垂線, OE, OF,

CG 爲三斜線,而 $\angle FOC > \angle EOC$, $\angle EOC = \angle COG$.

求證　(a) $OC < OE$,　(b) $OF > OE$,　(c) $OE = OG$.

證　(a) 延長 OC 至 O', 使 $OC = CO'$, 連結 EO', 於

$$\triangle OCE \text{ 及 } \triangle O'CE,$$

$$\angle OCE = \angle O'CE = \angle R.,$$

$$OC = CO',\ EC \text{ 公共},$$

$$\therefore \triangle OCE \cong \triangle O'CE,$$

$$\therefore OE = O'E.$$

然　$$OE + O'E > OO',$$

故　$$2OE > 2OC,\ \text{即得 } OE > OC.$$

(b) 連結 $O'F$, 同上理得證 $OF = O'F$.

然　$$OF + FO' > OE + EO',$$

$$\therefore OF > OE.$$

(c) 於 $\triangle OCE$ 及 $\triangle OCG$,

$$\angle OCE = \angle OCG = \angle R.,$$

$$\angle EOC = \angle COG,\ CO \text{ 公共},$$

$$\therefore \triangle OCE \cong \triangle OCG,$$

$$\therefore OE = OG.$$

68.　**定理 20.**　線分垂直平分線上之一點與此線分兩端之距離相等,垂直平分線外之一點與線分兩端之距離不相等.

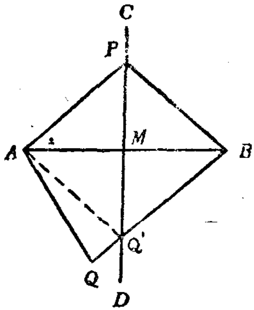


圖 31.

假設 設 M 爲 AB 之中點,過 M 引 AB 之垂線 CD, P 爲 CD 上之任意點, Q 爲 CD 外之任意點.

求證 $PA = PB,\ QA \neq QB.$

證 在 $\triangle AMP$ 及 $\triangle BMP$,

$$AM = BM,\quad PM \text{ 公共},$$

$$\angle AMP = \angle BMP = \angle R.,$$

$$\therefore \triangle AMP \cong \triangle BMP,$$

$$\therefore PA = PB.$$

又 QA, QB 之中,如 QB 交 CD 於 Q' 點,連結 $Q'A$.同上理得

$$Q'A = Q'B,$$

$$\therefore QB = Q'B + Q'Q = Q'A + Q'Q,$$

然 $$Q'A + Q'Q > AQ,$$

卽 $$QB > QA,$$

$$\therefore QA \neq QB.$$

69. **定理 21.** 角平分線上之一點,至此角二邊之距離相等.其逆定理亦成立.

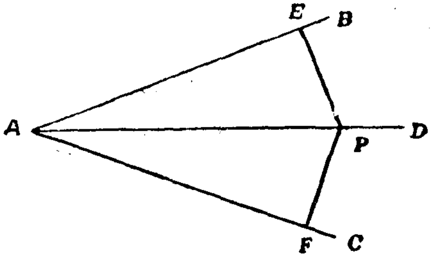


圖 32.

假設 設$\angle BAC$之角平分線爲AD.PE, PF爲自AD上之任意一點P向二邊AB, AC所作之二垂線.

求證 $$PE = PF.$$

證 於直角三角形APE及APF內,

$$\angle EAP = \angle FAP,\quad AP\text{公共},$$

$$\therefore \triangle APE \cong \triangle APF,$$

$$\therefore PE = PF.$$

逆定理 與一角二邊等距離之點,必在此角之平分線上.

假設 P點至$\angle BAC$之二邊AB, AC之距離相等.

求證 $$\angle EAP = \angle FAP.$$

證 於$\triangle APF$及$\triangle APE$,

$$\angle AEP = \angle AFP = \angle R.,$$

$$PE = PF, \quad AP\text{公共},$$

$$\therefore \triangle APE \cong \triangle APF,$$

$$\therefore \angle EAP = \angle FAP.$$

系 1. 自角平分線外一點,至此角二邊之距離不相等.

系 2. 至一角二邊之距離不相等之一點,不在此角之角平分線上.

70. **定義 33.** 在一平面上之兩直線,向任何方向延長,永不相交者,曰**二直線互相平行**,或曰**一直線爲他直線之平行線**.

系 二直線不相交則必平行,不平行則必相交.

如AB,CD二直線互相平行,以$AB \parallel CD$記之.

71. **公理 4.** 過直線外之一點不能引二直線與該直線平行*.

系 一直線與二平行直線之一相交,則必與其他一直線相交.

72. **定理 22.** 平行於同一直線之二直線,必互相平行.

證 因不平行則必相交,但相交之二直線不能同時平行於同一之直線,與假設相背,故必互相平行.

*此公理亦稱爲平行公理,與上所述之聯合相等二公理共爲普通幾何學之基礎.

73. **定義 34.** 一直線與二直線相交,其所成八角中:

一. 在二直線之間者曰**內角**,如圖中之a, b, c及d.

二. 在二直線之外者曰**外角**,如a', b', c'及d'.

三. 在一直線之兩側而不相鄰之兩內角曰**內錯角**,如a與d, b與c.

四. 在一直線之兩側而不相鄰之兩外角曰**外錯角**,如a'與d', b'與c'.

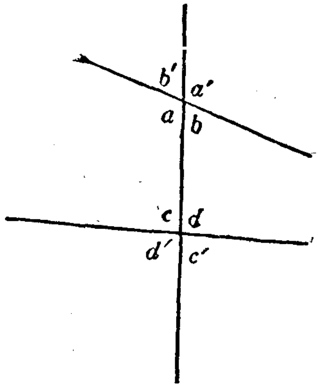


圖 33.

五. 在一直線之同側,外角與其不相鄰之一內角曰**同位角**,如a與d', b'與c, a'與d, b與c'.

74. **定理 23.** 二直線爲另一直線所截,若

一. 內錯角相等,

二. 外錯角相等,

三. 同位角相等,

四. 同側內角互爲補角,

五. 同側外角互爲補角,

則二直線互相平行.

【注意】 此定理中之五項,若有一項成立,則其餘四項亦必成立,故證五項中之任一項如爲眞確,則其餘不難推

而得也,由是得證法如下.

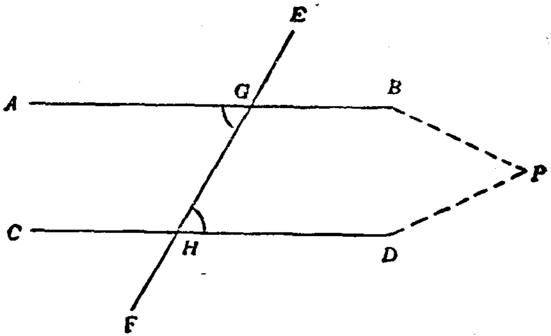


圖 34.

假設 直線 AB, CD 爲另一直線 EF 所截,其交點爲 G, H, 而

$$\angle AGF = \angle FHD.$$

求證

$$AB \parallel CD.$$

證 若 AB 不與 CD 平行,則必相交,令其交點爲 P, 則三角形 PGH 之外角 AGH 大於 $\angle GHP$, 與所設不合,故

$$AB \parallel CD.$$

系 1. 垂直於同一直線之諸直線必互相平行.

系 2. 一直線上之垂線及斜線必相交.

75. 定理 14. 二平行直線爲一直線所截,則必

一. 内錯角相等,

二. 外錯角相等,

三. 同位角相等,

四. 同側內角互爲補角,

五. 同側外角互爲補角,

此定理卽上定理之逆,學者自證之可也.

系 一直線垂直於另一直線,則必垂直其平行線.

習 題

1. 由一點引兩平行直線之二垂線,必相重.

2. 一直線與相交兩直線之一平行,則此直線必與其他一直線相交.

3. 二直線與相交之二直線兩兩垂直者,必相交.

4. 試說明用兩三角板作平行線之法.

5. 二角之二邊均依同方向或反對之方向,兩兩平行者,則此二角必相等(如圖35左,中).

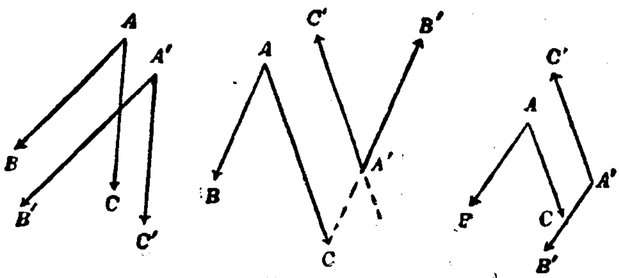


圖 35.

6. 二角之二邊,一依同方向,一依反對之方向兩兩

平行者,則此二角必互爲補角.

7. 二角之二邊兩兩平行,則其角平分線,互相平行,或互相垂直.

8. 三角板分二種,一種三內角各爲 90°, 60° 及 30;另一種三內角爲 90°, 45° 及 45°;試用兩三角板在一直線上作 90° 30°, 45°, 60°, 75°, 15° 之角.

9. 在二平行線 AB, CD 間之線分 EF,若 EF 之中點爲 O,則過 O 所作限於 AB, CD 間之線分均爲 O 所平分.

10. 等邊三角形 ABC 之 B,C 兩角之角平分線之交點爲 O,自 O 作與 AB, AC 之平行線與 BC 相交於 E, F 二點,則

$$BE = EF = FC.$$

11. 如圖 36,一直線遇二等邊三角形之 AB $(AB = AC)$ 邊於 M,遇 AC 之延長線於 N,而交 BC 於 O.

$$若\ MO = ON,$$

$$則\ AM + AN = 2AB.$$

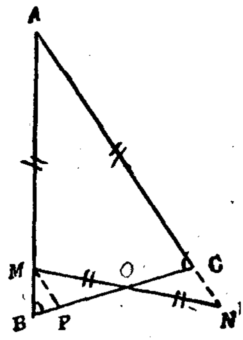


圖 36.

12. 自一角之角平分線上之一點作二邊之平行線至與他邊相交而止,則此二線分之長必相等.

13. 過三角形之各頂點引其對邊之平行線,可得與原三角形相等之三個三角形.

第五章　直線形之角

76.　**定義 35.**　多角形之內角無一大於平角者曰**凸多角形**.有大於平角之內角者曰**凹多角形**.

77.　**定義 36.**　內角及邊均各相等之多角形曰**正多角形**.故等邊三角形,等角三角形均可稱爲正三角形.

78.　**定理 25.**　三角形之任一外角,等於其不鄰之二內角之和,而三角形三內角之和等於二直角.

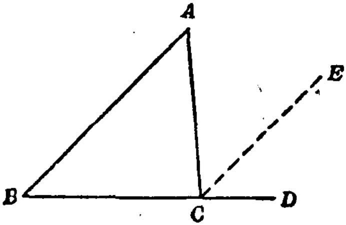


圖 37.

假設　設$\triangle ABC$之一邊BC延長至D.

求證　$\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$,

又　$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 2\angle R$.

證　自 C 點引 CE 直線,令其與 CA 所夾之角等於$\angle BAC$.

因　$\angle ACD > \angle BAC$,

故　CE在$\angle ACD$內.

由作法知 $AB \parallel EC$,

故 $\angle ECD = \angle ABC$;

$\therefore \angle ACD = \angle ACE + \angle ECD = \angle BAC + \angle ABC$.

又於上式兩邊各加$\angle BCA$,則得

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle ACD + \angle BCA = 2\angle R$.

系 1. 直角三角形中不為直角之二內角,必互為餘角.

系 2. 三角形之二內角若互為餘角,則必為直角三角形.

系 3. 兩三角形有二個內角各相等,則其他一內角亦相等.

79. **定理 26.** 凸多角形各內角之和等於二倍邊數個直角減去四直角.

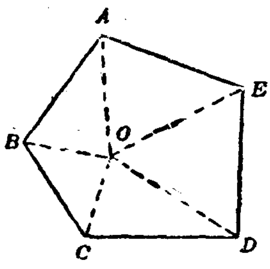


圖 38.

假設 設凸多角形$ABCD\cdots E$之邊數為n.

求證 $ABCD\cdots E$各內角之和等於$2n \times \angle R. - 4\angle R$

證 自多角形內之任一點O,與各頂點連結,則分此多角形為n個(以O為頂點)三角形,此n個三角形內角之和等於$2n$個直角,其頂角之和適等於四直角.

然多角形各內角之和等於此n個三角形各內角之和減去其各頂角之和,故多角形內角之和等於$2n$個直角減去4直角.

80. **定理27.** 凸多角形各外角之和等於四直角.

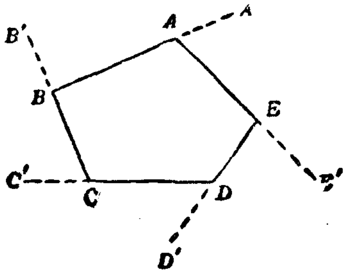


圖 39.

證 凸多角形之各邊順次延長其一端,則在各頂點之內角與外角之和均為2直角.由是多角形各外角內角之和共為2直角之邊數倍,但各內角之和比2直角之邊數倍少4直角,故所少之4直角即為各外角之和.

81. **證法研究** 定理不易直接證明時,常作若干補助線,以推想之,如本章定理26及定理27是也.

習題

1. 正五角形,正六角形及正八角形之內角各爲若干度?

2. 正多角形之一內角若爲 $162°$,其邊數若干?

3. n 邊正多角形之一內角必爲 $\left(2-\frac{4}{n}\right)$ 直角,試證之.

4. 問五角形有若干對角線?並求 n 邊形對角線之數.

5. 三角形之最大角,若小於他二角之和,則爲銳角三角形;大於他二角之和,則爲鈍角三角形;等於他二角之和,則爲直角三角形.

6. 三角形 ABC 內,$AB>AC$.於 AB 上截 $AD=BC$.連結 DC,則

$$\angle ADC=\tfrac{1}{2}(\angle ACB+\angle ABC),$$

$$\angle BCD=\tfrac{1}{2}(\angle ACB-\angle ABC).$$

7. 於三角形 ABC 之外方(或內方)順次作 CD,AE 及 BF 三直線,使 $\angle ACD=\angle BAE=\angle CBF$,則此三直線所成之三角形之三內角與原三角形之三內角兩兩相等.

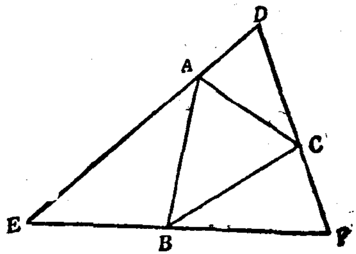


圖 40.

8. 正五角形之對角線所成之五角形亦爲正五角形.

第六章　平行四邊形

82.　**定義 37.**　四角形之邊兩兩平行者曰平行四邊形.

83.　**定義 38.**　四角形之邊僅二邊平行者曰**梯形**.

84.　**定義 39.**　平行四邊形之特例如下:

一. 一內角爲直角者曰**矩形**.

二. 各邊相等者曰**菱形**.

三. 各邊相等之矩形曰**正方形**.

平行四邊形常以▱記之,矩形常以▭記之,正方形常以□記之.

85.　**定理 28.**　平行四邊形有下列諸性質:

一. 相鄰兩內角之和爲二直角.

二. 相對之二內角相等.

三. 相對邊相等.

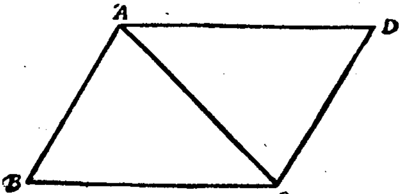


圖 41.

假設 設有四邊形$ABCD$,

$$AB \parallel DC, AD \parallel BC.$$

求證 (1) $\angle ABC + \angle BCD = 2\angle R.$

(2) $\angle ABC = \angle CDA.$

(3) $AD = BC,\quad AB = CD.$

證 (1) 因$AB \parallel DC$, BC為其截線,

$$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 2\angle R.$$

(2) 又$AD \parallel BC$, DC為其截線,

$$\therefore \angle BCD + \angle CDA = 2\angle R.$$

由上式得 $\angle ABC = \angle CDA.$

(3) 連結AB,在$\triangle ABC$及$\triangle ADC$,

$$\angle BCA = \angle CAD,\ AC\text{公共},$$

$$\angle BAC = \angle ACD,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC,$$

因之 $BC = AD,\quad AB = CD.$

系 1. 平行四邊形之一對角線,分平行四邊形為全相等之兩三角形.

系 2. 平行直線間之平行線分,其長相等.

系 3. 平行四邊形之一角為直角,則皆為直角,故矩形,正方形之內角均為直角.

系 4. 平行四邊形之相鄰兩邊相等,即為菱形.

系 5. 二平行直線之共同垂線,其限於平行線間之

線分,不問垂線之位置如何,不變其長,此長曰平行線之距離.

86. **定理 29.** 四角形合於下列條件之一,則為平行四邊形.

一. 相對之邊各相等.

二. 一組對邊相等且互相平行.

三. 二組對角各相等.

此定理為上定理之逆定理,易於證明,學者試自為之.

87. **定理 30.** 平行四邊形之對角線互相平分. 其逆定理亦成立.

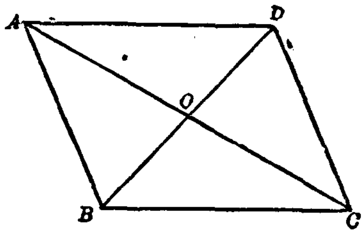


圖 42.

假設 設▱$ABCD$之對角線AC, BD相交於O.

求證 $AO = OC, BO = OD.$

證 於$\triangle ABO$及$\triangle CDO$,

$$\angle ABO = \angle ODC,\ \angle BAO = \angle OCD,$$

$$AB = DC,$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle CDO,$$

$$\therefore AO = OC, \quad BO = OD.$$

逆定理　四角形之對角線互相平分,則此四角形為平行四邊形.

如上圖,因 $\angle AOB = \angle COD$, $AO = OC$, $BO = OD$,

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACD;$$

$$\therefore AB \parallel DC.$$

同理得證　　$AD \parallel BC$.

∴四角形 $ABCD$ 為平行四邊形.

88. **定理 31.**　一平行四邊形之兩相鄰邊及夾角各與他平行四邊形之兩相鄰邊及夾角相等,則兩平行四邊形全相等

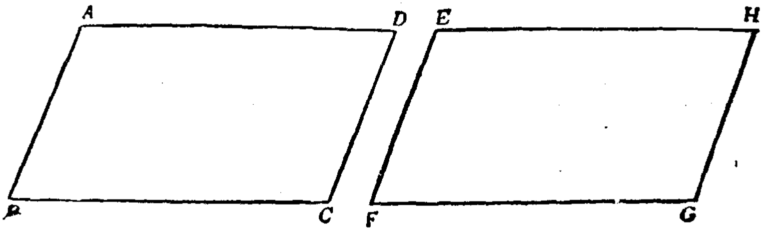


圖 43.

假設　　設有 $\square ABCD$ 及 $\square EFGH$,

$$AB = EF,\ BC = FG \text{ 及 } \angle ABC = \angle EFG.$$

求證　　$\square ABCD \cong \square EFHG$.

證 置□$ABCD$於□$EFGH$,使AB與EF相合,則BC必在FG上,C點與G點相合,CD與GH相合.

故D點必落於GH或GH之延長線上.

同理,AD與EH相合,D必落於EH或EH之延長線上.

但EH, GH相交於一點H,

$\therefore D$與H相合. (公理1系1)

$\therefore \square ABCD \cong \square EFGH$.

系 1. 二矩形之兩鄰邊各相等,則全相等.

系 2. 二正方形之一邊相等,則全相等.

89. **定義 40.** 有x, y兩直線,從x線之兩端至y線作兩垂線,則y線上兩垂線間之部分,稱爲x線在y線上之直射影.

90. **定理 32.** 若二線分平行且相等,則在另一直線上,此二直線之直射影亦相等.

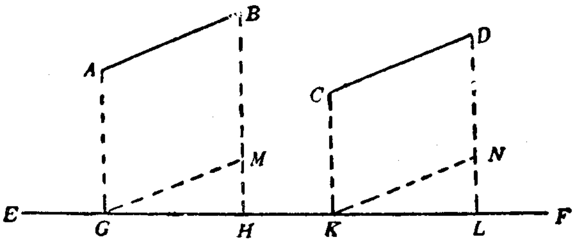


圖 44.

假設 AB, CD爲相等且平行之二直線,GH, KL為AB, CD在直線EF上之直射影.

求證 $GH = KL.$

證 若AB, CD均平行於EF,則由矩形對邊之相等,卽可證明;若AB, CD不平行於EF,則過G, K各作AB, CD之平行線與BH及DL各交於M, N二點,得平行四邊形$AGMB$, $CKND$.

因 $$AB = GM, CD = KN,$$

故 $$GM = KN.$$

由是於 $$\triangle GHM \text{ 及 } \triangle KLN,$$

$$\angle MHG = \angle NLK = \angle R., \quad \angle MGH = \angle NKL,$$

而 $$GM = KN,$$

$$\therefore \triangle GHM \cong \triangle KLN.$$

$$\therefore GH = KL.$$

91. **定理 33.** 若干平行直線截一直線,若其間之各部分均相等,則截其他直線亦復如是.

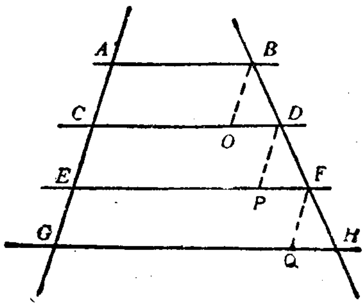


圖 45.

假設 直線 $AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH$; AG, BH 爲二截線,與 AB, CD, EF, GH 各交於 A, C, E, G 及 B, D, F, H 各點,而

$$AC = CE = EG.$$

求證 $BD = DF = FH.$

證 過 B, D, F 三點各在二平行直線間引直線 BO, DP, FQ 與 AG 平行,則

$$\triangle BOD \cong \triangle DPF \cong \triangle FQH,$$

$$\therefore BD = DF = FH.$$

系 1. 三角形一邊之平行直線如平分另一邊,則亦平分第三邊.

系 2. 平分梯形不平行之一邊之直線,如平行於平行之兩邊,則必平分另一不平行之邊.

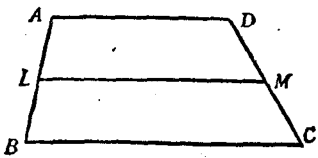


圖 46.

如圖 46, 梯形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, 如 LM 平分 AB 而平行於 BC, 則 M 爲 DC 之中點.

92. 證法研究——關於三直線交於一點問題之證法:

一. 先令其中之二線交於一點,而證此點必在其餘一

直線上.

【例1】三角形之三內角之平分線交於一點,此點至三角形三邊之距離均相等.

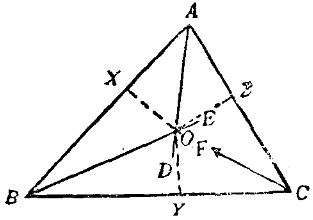


圖 47.

假設 $\triangle ABC$ 三內角之角平分線爲 AD, BE, CF.

求證 (1) AD, BE, CF 交於一點 O.

(2) O 至 AB, BC, CA 之距離均相等.

證 因 AD 與 BE 不能平行,故必相交,令其交點爲 O, 由 O 作 AB, BC, CA 之垂線 OX, OY, OZ, 則

$$OX = OY,$$

$$OX = OZ,$$

$$\therefore OY = OZ. \quad \text{(定理 21)}$$

$\therefore O$ 點必在 CF 上.

由是 AD, BE, CF 交於一點 O, 而 O 至 AB, BC, CA 之距離均相等.

【例2】三角形三邊之垂直平分線會於一點,此點至三角形三頂點之距離均相等

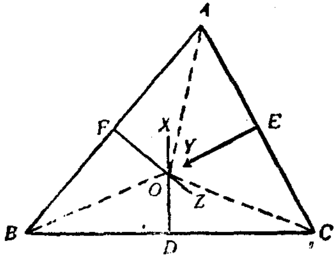


圖 48.

假設 $\triangle ABC$ 三邊之中點為 D, E, F. DX, EY, FZ 為三邊之垂直平分線.

求證 (1) DX, EY, FZ 交於一點 O.

(2) $CA = OB = OC$.

證 DX, FZ 必相會於一點,設其交點為 O,

(第四章習題三)

則
$$OA = OB,$$
$$OC = OB,$$
$$\therefore OA = OC.$$

$\therefore O$ 點必在 EY 上. (定理20)

由是 DX, EY, FZ 交於一點 O,自 O 至 A, B, C 之距離均相等.

二 如三直線不能直接證明其相交,則可作補助線,使此三直線為合於某條件之三直線,而合於此條件之三直線,固已知其交於一點者

【例】 三角形之三個高會於一點.

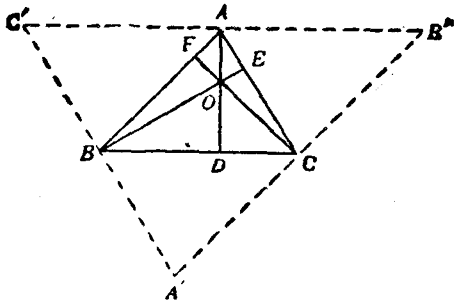


圖 49.

假設 $\triangle ABC$ 之三個高為 AD, BE, CF.

求證 AD, BE, CF 會於一點.

證 過 C, A, B 三點引

$$A'B' \parallel AB, BC' \parallel BC, C'A' \parallel CA.$$

由是 $ABCB'$ $C'BCA$, $BA'CA$ 均為平行四邊形.

$$\therefore AB' = BC = C'A,$$
$$B'C = AB = CA',$$
$$C'B = AC = BA',$$

$\therefore A, B, C$ 為 $\triangle A'B'C'$ 三邊之中點.

但 $CF \perp AB$ 而 $AB \parallel A'B'$,

$$\therefore CF \perp A'B'.$$

同理 $BE \perp C'A'$,

$$AD \perp C'B'.$$

$\therefore AD, BE, CF$ 爲 $\triangle A'B'C'$ 三邊之垂直平分線,由(一)例2而知其相會於一點.

三. 先介二直線相交於一點,再過此點引一適當直線,而證此直線即爲題中其他之一直線.

【例】 三角形之三個中線會於一點.

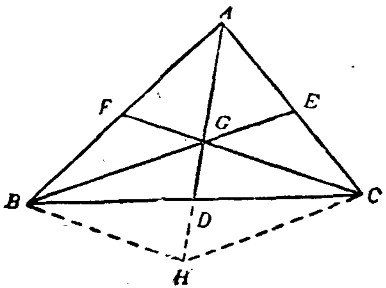


圖 50

假設 AD, BE, CF 爲 $\triangle ABC$ 之三個中線.

求證 AD, BE, CF 相會於一點.

證 設其中之二中線 BE, CF 交於一點 G, 連結 AG, 並延長之與 BC 相交於 D. 過 B 引 FC 之平行線 BH, 與 AG 之延長線交於 H, 連結 HC.

因 F 爲 AB 之中點, $FG // BH$, 故 G 爲 AH 之中點.

又 E 爲 AC 之中點, 由是 $GE // HC$.

故 $BHCG$ 爲一平行四邊形, GH 與 BC 互相平分, 由是可知 AD 亦爲一中線.

故三中線 AD, BE, CF 相會於一點.

系　三角形三中線之交點至頂點之距離爲中線之長之三分之二.

因G爲AH之中點,D爲GH之中點故也.

93. **定義41.**　三角形三內角之平分線之交點曰**三角形之內心**.

三角形三邊之垂直平分線之交點曰**三角形之外心**.

三角形三個高相交之點曰**三角形之垂心**.

三角形三個中線相交之點曰**三角形之重心**.

習　題

1　矩形之對角線相等,菱形之對角線互相垂直.

2.　直角三角形斜邊之中點,至三頂點之距離相等.

3.　二對角線及夾角相等之兩平行四邊形全相等.

4.　直角三角形一銳角爲他銳角之二倍,則其最小邊必等於斜邊之半.其逆亦眞.

5.　三角形聯二邊之中點之直線必與底邊平行,且等於底邊之半.

6.　四邊形各邊之中點順次聯成之直線,必成一平行四邊形,其周等於原四邊形兩對角線之和.

7.　由平行四邊形之兩相對頂點各與對邊之中點聯成直線,此二直線必適截過其他一對頂點之對角線爲三等分.

8. 四邊形一組對邊之中點與兩對角線之中點連成直線,必成一平行四邊形.

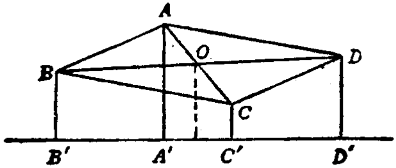


圖 51.

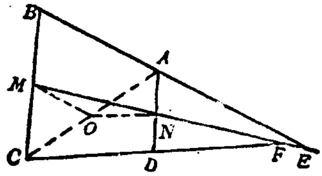


圖 52.

9. 平行四邊形,由一對角線之兩端,作形外定直線之垂線,其和與由他對角線之兩端所作兩垂線之和相等.(圖 51)

10. 四邊形 $ABCD$ 之對邊 AB, CD 若相等,則此二邊之延長若與 BC, AD 二邊中點之連結線相交,則必成相等之角.(圖 52)

11. 平行四邊形,由相對二邊之中點與對邊之兩端各連成直線,必成平行四邊形.

12. 四邊形相對二邊中點所連成之直線,必分對角線中點連成之直線爲二等分.

13. 於二等邊三角形之底邊上任取一點至二等邊作垂線,則此兩垂線之和必一定,若所取之點,在底邊之延長線上,則其差必一定.

14. 由正三角形內之一點作三邊之垂線,其和必爲一定,此點若在形外則若何?

15. 三角形之一內角及他二外角之角平分線,必同交於一點,此點至三邊之距離必相等.

16. 內角相等之兩三角形,若其邊兩兩平行,則第三邊亦互相平行.若其邊兩兩垂直,則第三邊亦互相垂直.

17. 三角形 ABC 之各邊上,在 BC 之同側各作正三角形 ABD, BCF, ACE; 則 $DFEA$ 必成一平行四邊形. 圖53)

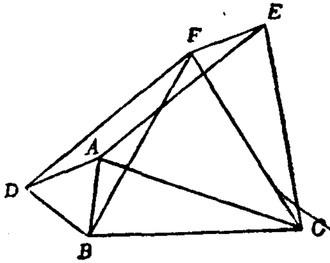


圖 53.

18. 梯形不平行二邊中點之連結線平行於底邊,其長為平行二邊之和之半.

19. 二直線 AB, CD 在他一直線上之正射影為 GH, KL, 若 $AB \parallel CD$, 而 $AB > CD$, 則 $GH > KL$.

20. 梯形 $ABCD$ 之兩對角線 DB, AC 中點之連結線等於其互相平行之二邊 AB, DC 之差之半.

21. 三角形 ABC, 自 B, C 至 A 角之角平分線上作垂線 BE, CF, D 為 BC 之中點,則

$$DE = DF = \tfrac{1}{2}(AB - AC).$$

(圖 54)

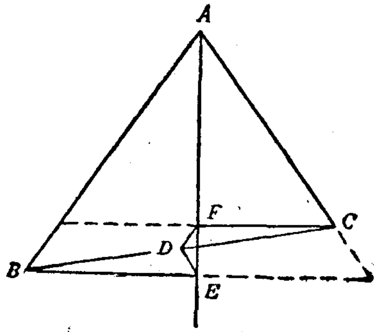


圖 54

第七章　對　稱

94. **定義 42.** 若一定點 O 爲 A, A' 二點連結線之中點，則曰此二點 A, A' 對於一點 O 爲對稱.

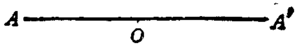


圖 55.

95. **定義 43.** 一圖形上之任一點，對於一定點 O 如在圖形上均有一對稱點，則稱此圖形對於 O 點爲對稱. 若有二圖形，其一圖形上之對稱點在他一圖形上之時，則謂此二圖形對於一點 O 爲對稱，點 O 謂之對稱中心，二圖形上相當之點，謂之對應點.

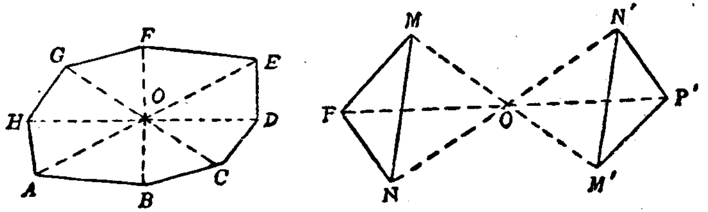


圖 56.

如上左圖，$ABCD\cdots\cdots$ 多角形對於其形內一點 O 爲對稱，如上右圖，三角形 MPN 對於一點 O 與三角形 $M'P'N'$ 爲對稱，P, P', N, N' 及 M, M' 各爲對應點.

96. **定義 44.** 一直線過二點之連結線之中點且與之垂直時，則稱三點對於直線爲對稱.

97. **定義 45.** 一圖形上之任一點,對於一定直線xy與在圖形上有對稱點時,則稱此圖形對於直線xy爲對稱.如有二圖形,其一圖形上各點之對稱點,在他一圖形上時,

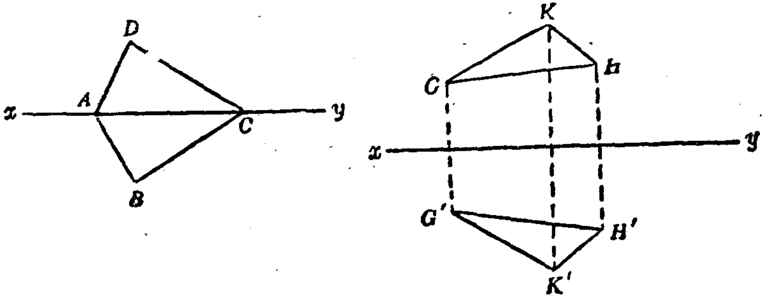


圖 57.

謂此二圖形對於xy爲對稱,直線xy謂之對稱軸,二圖形上相對之點謂之對應點,如上左圖,$ABCD$爲對於直線xy成對稱之圖形;如上右圖,$\triangle GHK$與$\triangle G'H'K'$爲對於直線xy成對稱之二圖形.

98. **定理 34.** 一直線之對稱圖形亦爲一直線.

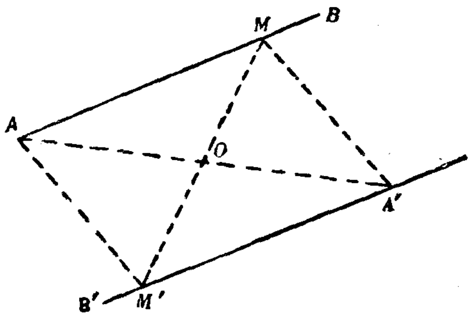


圖 58.

證　(a) 對於一點對稱之時*.

設AB為所設之直線,O為對稱中心,M為此直線上任意一點.則點A,M與其對稱點A',M'所成之四邊形,其對角線AA',MM'互相平分,故為一平行四邊形,故M'常在過A'點與AB平行之一直線$A'B'$上.

(b) 對於一直線對稱之時.

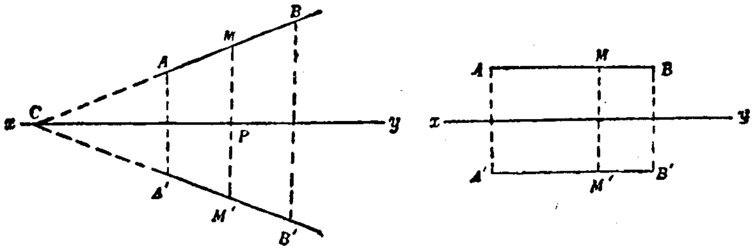


圖 59.

設AB為所設之直線,C為AB與對稱軸xy之交點,M'為AB上任一點M之對應點,連結MM'與xy交於P;則於

$$\triangle CPM \text{ 與 } \triangle CPM',$$

$$MP = PM', CP \text{ 公共},$$

$$\angle CPM = \angle CPM' = \angle R.$$

$$\therefore \triangle CPM \cong \triangle CPM',$$

$$\therefore \angle M'CP = \angle MCP.$$

* 對於一點對稱簡稱心對稱,對於一直線對稱簡稱軸對稱.

$\therefore M'$常在AB之異側,而在過一定點C與$\angle MCP$等角之一直線上.

若直線AB與xy平行,則A, M二點與其對應之二點A', M'連成之二直線AA', MM'平行而相等,則$AA'M'M$成一平行四邊形,故M'在一過A'與AB平行之一直線上.

總之,一直線上之對稱點均在一一定方向之直線上,故一直線之對稱圖形,亦為一直線.

99. **定理 35.** 二點之距離與其對應二點之距離相等.

證 參看前節.

100. **定理 36.** 二直線之交角與其對稱之二直線之交角相等.

證 設A為所設AB直線上之點,C為所設直線CD上之點,I為二直線之交點,令此三點之對應點各為A', C', I';則由上定理知A, C, I為頂點之三角形與A', C', I'為頂點之三角形,其三邊各相等.

故 $$\triangle ACI \cong \triangle A'C'I',$$

$$\therefore \angle AIC = \angle A'I'C'.$$

即二直線之交角與其對應二直線之交角相等.

系 若二直線互相平行,則其對稱二直線亦互相平行.

101. **定理 37.** 對稱之兩多角形全相等.

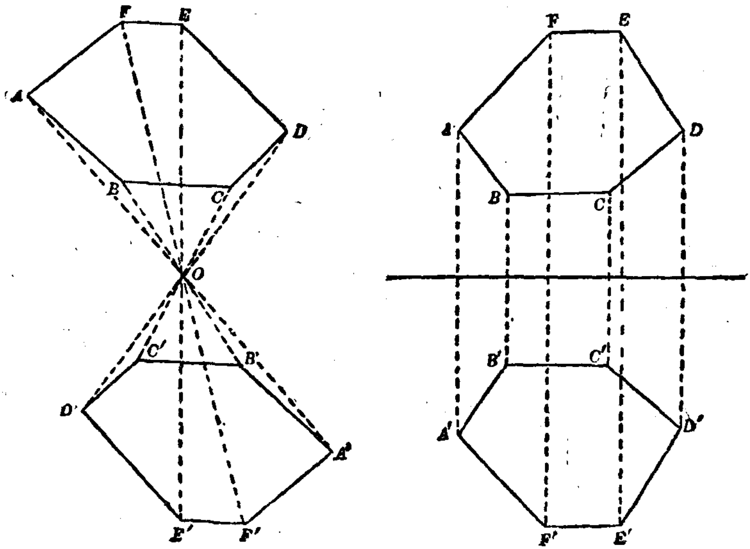


圖 60.

證 (a) 對於中心 O 對稱之時.

設多角形為 ABC……,其對稱之多角形為 $A'B'C'$…….將多角形 ABC……繞 O 點重疊於 $A'B'C'$……之上,令 A 與 A' 相合,AB 落於 $A'B'$ 上,則 B 落於 B' 上,BC 落於 $B'C'$ 上.

(定理 35, 36)

又因 $AC=A'C'$, 故 C 落於 C' 上.

同理,其餘各頂點均與對稱之各頂點相合.

$\therefore$ 多角形 ABC…… 與 $A'B'C'$…… 全相等.

(b) 對於軸 xy 對稱之時.

可將多角形 $ABC\cdots\cdots$ 以 xy 爲軸,折疊於 $A\,B'C'\cdots\cdots$ 之上,如(a)證法證明之.

102. **定理 38.** 一圖形對於垂直相交之二軸爲對稱時,則亦必對於此二軸之交點成對稱.

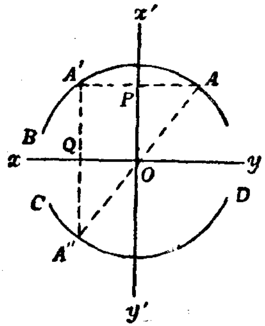


圖 61.

假設 xy 及 $x'y'$ 爲二對稱之軸,$xy \perp x'y'$,其交點爲 O, $ABCD$ 爲一對於 xy 及 $x'y'$ 爲對稱之圖形.

求證 $ABCD$ 對於 O 亦爲對稱.

證 設 A 爲圖形上之一點,則對於 $x'y'$,此圖形上必有一點 A' 與之對稱.設 AA' 與 $x'y'$ 之交點爲 P,則 $AA' \perp x'y'$,而

$$AP = PA'.$$

同理,對於 xy, A' 必有其對應點 A'',設 $A'A''$ 與 xy 之交點爲 Q,則 $A'A'' \perp xy$,而 $A'Q = QA''$.

連結 AA'',則 $x'y'$ 平分 AA''.

同理，xy 亦平分 AA''.

$\therefore xy$ 與 $x'y'$ 在 AA'' 之中點相交，設其交點為 O，則

$$AO = OA''.$$

故此圖形上有一點 A，則必有一點 A''，而 A 與 A'' 對於一點 O 為對稱，故此圖形對於 O 為對稱.

系　若有二圖形，一圖形對於垂直相交二軸與他一圖形為對稱，則必對於此二軸之交點為對稱.

103. **證法研究——迴轉與折疊**　證對稱圖形之相等或其間之關係，常如定理37應用迴轉及折疊之法，較為簡捷，通常對於心對稱之圖形應用迴轉，對於軸對稱之圖形應用折疊.

習　題

1. 平行四邊形為對於其對角線交點之對稱圖形.

2. 由一點至一直線作相等兩斜線，則對於此點所作之垂線成對稱.

3. 與所設之定點成對稱之二點，至通過此定點之任一直線之距離相等（如圖62）.

4. 菱形為對於對角線成對稱之圖形.

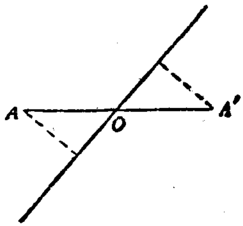


圖 62.

5. AB 二定點，在直線 MN 之同側，C 為 MN 上之點，若

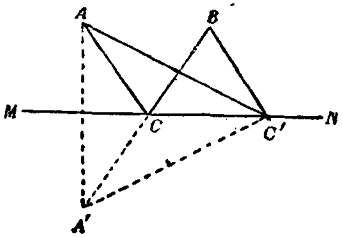


圖 63.

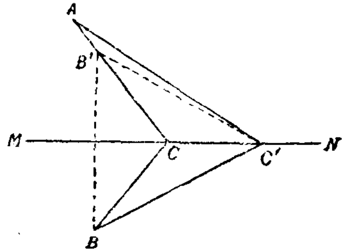


圖 64.

$\angle ACM = \angle BCN$,則 AC, BC 之和爲極小(如圖 63)。

6. 如前題,A, B 在 MN 之兩側,若 $\angle ACM = \angle BCM$,則 AC, BC 之差爲極大(如圖 64).

第八章　軌　跡

104.　**定義46.**　某圖形中各點盡具某性質,其外各點盡不具此性質,則謂此圖形爲具此性質之點之軌跡.

軌跡二字,望文生義,可知爲車行於路上之跡也.車行路上時,其輪轉動,宛如一點在地面上移動,而此地面經過車輪接觸之處,可稱爲此車輪在地面上行動之軌跡;如假定此車自東向西直行十里,則此車自東向西直行十里間車輪經過之地面,可稱爲此車合於'自東向西直行十里'之條件之軌跡也.幾何學上軌跡之意義亦如此;上定義所述之某圖形,卽此例中車輪經過之地面,所述之各點卽此例中車輪接觸地面之點,而上定義所述之某性質,卽此例中'車自東向西直行十里'是也.

幾何學中軌跡之意義,當於下文詳述之.

105.　**軌跡之證法**　解軌跡問題之時,吾人當先設法求得合於軌跡問題中之條件之圖形,但此圖形吾人不能遽斷爲此問題所求之軌跡,因究竟此圖形是否爲合於所設條件之軌跡,尙須經過嚴密之證明也.證明某圖形爲合於所設條件之軌跡,須證明下列二事:

一.此圖形上各點盡與所設條件相合.

二.合於所設條件之點盡在此圖形上.

若吾人僅證明一,而不證明二,則安知合於所設條件之點之軌跡,僅此一圖形而無其他圖形耶!如僅證明二,而不證明一,則常使不合所設條件之圖形,亦列入軌跡之內與軌跡之定義相背也.

106. **定理39.** 與所設定直線有定距離之點之軌跡,為定直線兩側距離等於定距離之二平行直線.

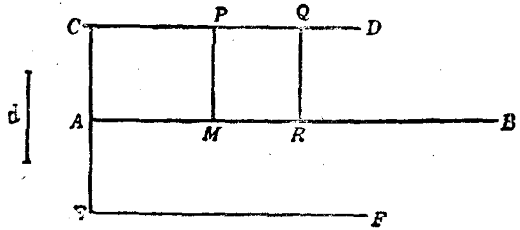


圖 65.

假設 定直線為AB,定距離為d, CD, EF為平行AB而距AB之距離等於d之兩直線.

求證 距AB距離等於d之點之軌跡為CD, EF兩直線.

證 (1) 在CD或EF上任取一點P,自P作AB之垂線PM,則$PM = d$,故CD, EF上各點均合於所設之條件(此即軌跡證中之第一部分).

(2) 若有一點Q與AB直線之距離等於d,而此點與CD直線在AB之同側,則自Q作AB之垂線QR,自C作AB之垂線CA,連結CQ,由是$CA // QR$,而$CA = QR$,故$ARQC$為

一平行四邊形.

但過C點僅能作一直線與AB平行,故Q必在CD上.同理,若Q與EF在AB之同側,則Q在EF上.故合於所設條件之點均在CD, EF上(此卽軌跡證中之第二部分).

如是本定理完全證明矣.

系　與平行二直線等距離之點之軌跡,為二平行線間離此二平行線之距離均相等之另一平行線.

【注意】此定理如僅證明(1)而不證明(2),則吾人僅得CD爲所求之軌跡,而不知CD之外,尙有一直線EF,亦爲所求之軌跡之一部分,而此EF直線,於(1)之證明固不受其影響也.

107. **定理 40.** 與相交兩直線等距離之點之軌跡,卽平分其兩交角之兩直線.

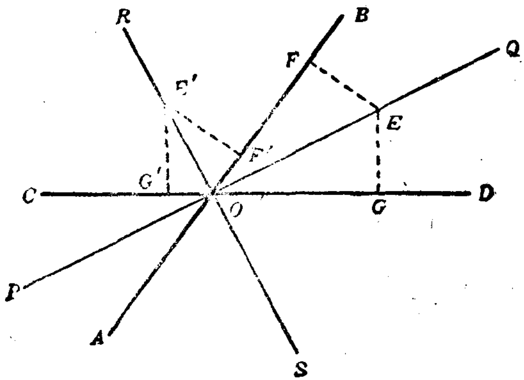


圖 66.

假設　AB, CD二直線相交於O；PQ, RS為平分BOD及BOC角之兩直線.

求證　與AB, CD等距離之點之軌跡，為PQ, RS兩直線.

證　於PQ, RS之任一線PQ上取一點E，作AB, CD之垂線EF, EG，則於

$$\triangle EFO \text{ 及 } \triangle EGO,$$

$$\angle OFE = \angle OGE = \angle R.,$$

$$\angle EOF = \angle EOG, OE \text{ 公共},$$

$$\therefore \triangle EFO \cong \triangle EGO,$$

$$\therefore EF = EG.$$

故在PQ, RS上之點，至AB, CD之距離均相等.

若在任一角內有一點E'至AB, CD之距離均相等，則自E'作AB, CD之垂線$E'F', E'G'$；連結OE'，則於

$$\triangle E'OG' \text{ 及 } \triangle E'OF',$$

$$\angle OF'E' = \angle OG'E' = \angle R.,$$

$$E'F' = E'G', OE' \text{ 公共},$$

$$\therefore \triangle E'OG' \cong \triangle E'OF',$$

$$\therefore \angle F'OE' = \angle G'OE'.$$

故E'在AB, CD交角之平分線上.

故與AB, CD二直線等距離之點之軌跡為PQ, RS兩直線.

108. 軌跡證法之四種 上述證一圖形X爲合於條件A之點之軌跡,須證明下列兩部分:

(甲) 若有一點合於條件A,則此點必在圖形X上.

(乙) 在圖形X上之一點,必合於條件A.

(甲)即爲證明前述軌跡證中之第二部分,(乙)即爲前述軌跡證中之第一部分,但吾人已知一定理眞確,則其對偶定理亦必眞確,故欲證明一定理,恆可證明其對偶定理以代之,(甲)與(乙)之對偶如下:

(丙) 若有一點不在圖形X上,則此點必不合於條件A(甲之對偶).

(丁) 若有一點不合於條件A,則此點必不在圖形X上(乙之對偶).

由是以(丙)代(甲),以(丁)代(乙),關於軌跡之證法,可得四種,任意證明其一足矣,列表如下:

(1) $\begin{cases}\text{(甲)}\\\text{(乙)}\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\text{(甲)}\\\text{(丁)}\end{cases}$ (3) $\begin{cases}\text{(丙)}\\\text{(乙)}\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\text{(丙)}\\\text{(丁)}\end{cases}$

下列定理關於(甲),(乙),(丙),(丁)四部分均經證明,吾人任取如上之一組,即得完全之證明矣.

109. 定理 41. 與所設二定點等距離之點之軌跡,爲此二定點連結線分之垂直平分線.

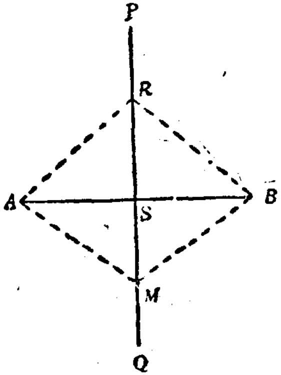


圖 67.

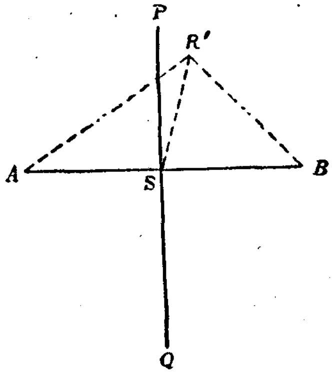


圖 68.

假設　設有A, B爲二定點，PQ爲AB之垂直平分線．

求證　與A, B等距離之點之軌跡爲PQ．

證　(甲)設有一點M距A, B兩點之距離相等，則連結AM, BM；並自M作AB之垂線MS'，則於

$$\triangle AS'M \text{ 及 } \triangle BS'M,$$

$$AM = MB, S'M \text{ 公共},$$

$$\angle AS'M = \angle BS'M = \angle R.,$$

$$\therefore \triangle AS'M \cong \triangle BS'M,$$

$$\therefore AS' = S'B.$$

故S'爲AB之中點，與S相合．故M在AB之垂直平分線上．

(乙)命PQ與AB交於S，則S爲AB之中點，由是取PQ上之任意一點R，連結RA, RB；則於

$$\triangle RSA \text{ 及 } \triangle RSB,$$

$$RS \text{ 公共}, \angle RSA = \angle RSB = \angle R.,$$

$$AS = BS,$$

$$\therefore \triangle RSA \cong \triangle RSB,$$

$$\therefore RA = RB.$$

故 AB 之垂直平分線上任一點 R 與 A, B 等距離.

(丙) 設 AB 之垂直平分線外取一點 R', 自 R' 作直線至 AB 之兩端及其中點 S, 得 $AR'S$ 及 $BR'S$ 兩三角形, 今

$$AS = SB, R'S \text{ 公共}, \quad \angle ASR' \neq \angle BSR'.$$

$$\therefore AR' \neq R'B$$

故 R' 距 A, B 二點之距離不相等.

(丁) 設 R' 爲距 A, B 二點距離不相等之點, 則連結 $R'A, R'S, R'B$. 於 $AR'S$ 及 $BR'S$ 兩三角形,

$$AS = SB, R'S \text{ 公共}, \quad AR' \neq BR',$$

故 $$\angle ASR' \neq \angle BSR'.$$

故 $R'S$ 非 AB 之垂線, 卽 R' 點不在 AB 之垂直平分線上.

【注意】 此四種證法中, 凡軌跡題中云證明軌跡爲何種圖形者, 以用(丙)及(乙)之一組爲最便, 凡題中只云求合於某條件之點之軌跡, 而其軌跡爲何種圖形, 須待探索者, 則以證明(甲)及(乙)之一組爲最適當.

110. **軌跡之相交** 吾人欲求合於某某等各條件

之一點或數點時,恆將此所設之條件分爲二部分或數部分,而分別求合於各部分之點之軌跡,再求此數軌跡之交點,此等交點,卽爲合於某某等各條件之點.如吾人欲求合於條件A及B之點,而先得合於條件A之點之軌跡爲圖形X,次得合於條件B之點之軌跡爲圖形Y,則X,Y之交點,卽爲合於條件A及B之點.

軌跡之相交甚有用於作圖,作圖題中當再論之,下列定理卽爲軌跡相交之例:

111. **定理 42.** 與不在一直線上之三定點等距離之點僅有一點.

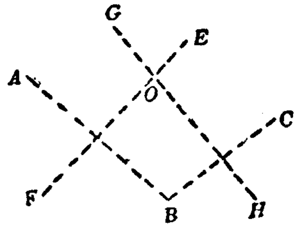


圖 69.

證 設A,B,C爲不在一直線上之三點,與A,B二點等距離之點之軌跡爲AB連結線之垂直平分線,如圖中之EF.與B,C二點等距離之點之軌跡爲BC連結線之垂直平分線,如圖中之GH.故與A,B,C三點等距離之點必爲EF與GH二直線之公共點,因A,B,C三點不同在一直線上,故

AB, BC 不平行，故 AB, BC 之垂線 EF, GH 必相交，但二直線僅能交於一點，此點即為距 A, B, C 三點等距離之點。

習題

1. 在已知邊 AB 上之矩形，其對角線交點之軌跡，即為 AB 之垂直平分線.

2. 公有已知頂角之二等邊三角形，其底邊中點之軌跡，即其頂角之角平分線.

3. 自定點 A 至定直線 BC，所作直線中點之軌跡，即為與 BC 平行之一直線.

4. 有二定直線於 A 點成直角，今有二等邊直角三角

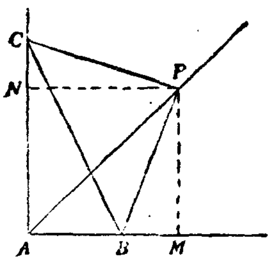


圖 70

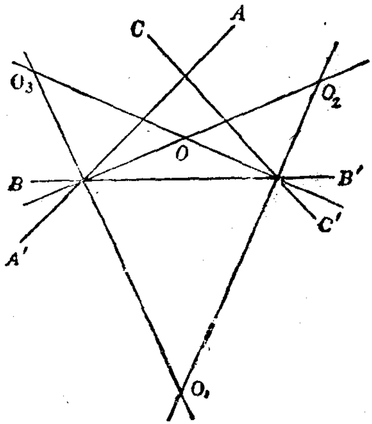


圖 71.

形 PBC 之底邊 BC 之端點着於此直角之二邊而移動,則 P 點之軌跡卽此直角之平分線.(圖 70)

5. 與兩兩相交之三直線等距離之點僅有四點.(圖 71)

6. 設有三直線 AB,CD,EF,直線 AB 與直線 CD 平行,而 EF 不與 AB 平行,則與此三直線等距離之點有二,試證之.

第九章　圓弧及弦

112.　**定義 47.**　與平面上一定點等距離之點之軌跡名曰**圓**,或曰**圓周**;此定點稱爲此圓之**中心**,或曰**圓心**.圓周之一部分稱爲**弧**,圓周之半稱爲**半圓**,小於半圓之弧稱爲**劣弧**,大於半圓之弧稱爲**優弧**,二弧之和適爲一圓周者互稱曰**共軛弧**.

113.　**定義 48.**　圓周上之任一點與中心連結之線分稱爲**半徑**,經過圓之中心而止於圓周之線分稱爲**直徑**.

系　同圓之半徑均相等.

如圖,$DABC$ 爲半圓,AB 爲弧,DC 爲直徑,OR 爲半徑,O 爲圓心,AB 弧恆以 $\widehat{AB}$ 記之,通常所指之弧均爲劣弧.

114.　**定義 49.**　連結圓周上任意二點之直線曰**弦**.

115.　**定義 50.**　中心相同之圓稱爲**同心圓**.

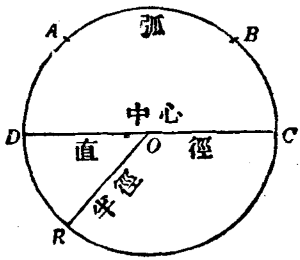


圖 72.

116.　**定理 43.**　圓內之點至圓心之距離均小於半徑,圓外之點至圓心之距離均大於半徑,圓周上之點至圓心之距離均等於半徑.其逆定理亦成立.

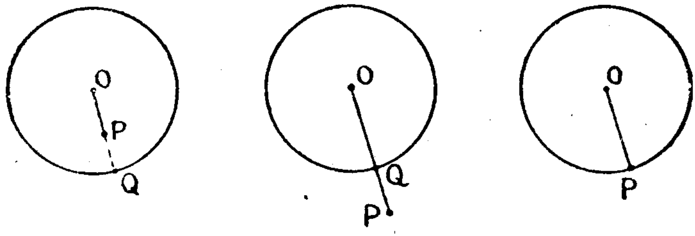


圖 73.

假設 P 爲一點, O 爲中心, R 爲半徑, 連結 OP.

求證 P 在圓內, 則 $OP < R$.

P 在圓外, 則 $OP > R$.

P 在圓周上, 則 $OP = R$.

證 設 P 在圓內, 則延長 OP 使與圓周交於 Q 點, 則

$$OQ = R, \quad OQ = OP + PQ, \quad \therefore OP < R.$$

若 P 在圓外, 則連結 OP 必與圓周相交, 設其交點爲 Q, 則

$$OP = OQ + QP = R + QP.$$

$$\therefore OP > R.$$

若 P 在圓周上, 則由定義知 $OP = R$.

逆定理 至圓心距離小於半徑之點均在圓內, 至圓心距離大於半徑之點均在圓外, 至圓心距離等於半徑之點均在圓上.

因本定理爲離接命題, 故由窮舉證法知其逆定理必爲眞確.

117.　**定理 44.**　凡圓之任意一直徑必分其圓爲兩全等形.

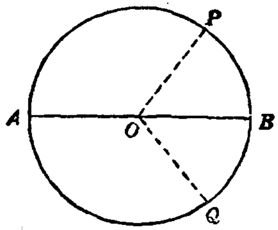


圖 74.

假設　O 爲 $AQBP$ 圓之中心, AOB 爲任意直徑.

求證　AOB 分圓爲全相等之 APB, AQB 二半圓.

證　自 O 向 AB 兩側引半徑 OP, OQ, 使 $\angle POB = \angle QOB$. 沿直徑 AOB, 取 AQB 半圓折疊於 APB 半圓上, 因 $OP = OQ$, $\angle POB = \angle QOB$; 故 Q 必落於 P 之上.

由是 AQB 半圓周上所有各點, 均落於 APB 半圓周上, 故兩半圓全相合, 即全相等.

系 1.　互爲垂直之兩直徑必分其圓爲四全等形.

系 2.　半徑相等之圓全相等.

系 3.　圓對於其中心爲心對稱, 關於其直徑爲軸對稱.

118.　**定理 45.**　通過不在一直線上之三點得作一圓周, 且以一爲限.

本定理可由定理42直接證明之.

系 1. 兩圓周若有三點相合,則全相合.

系 2. 不全相合之二圓周,其交點不能多於二.

系 3. 從圓內之一點至圓周能作相等而不相合之三直線者,則此點必為此圓之中心.

119. **定義 51.** 兩半徑間所成之角,稱為**中心角**.

120. **定義 52.** 圓弧及其兩端之二半徑所包之圖形,稱為**扇形**.

121. **定理 46.** 在同圓或等圓,相等之中心角必對相等之弧.其逆定理亦成立.

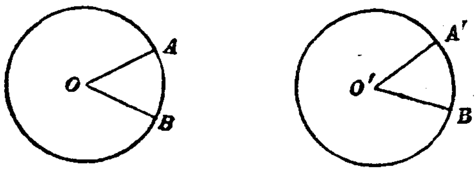


圖 75.

假設 O 及 O' 為二等圓,中心角 AOB 等於中心角 $A'O'B'$.

求證 $\qquad \widehat{AB} = \widehat{A'B'}$.

證 置 O 圓於 O' 圓上,使 OA 與 $O'A'$ 相合.

因 $\quad \angle AOB = \angle A'O'B'$, $\quad$ 故 OB 可使落於 $O'B'$ 上.

但 $\quad OB = O'B'$, $\quad$ 故 B 與 B' 相合.

由是$\widehat{AB}$與$\widehat{A'B'}$全相合. (定理43)

逆定理 同圓或等圓中,等弧所對之中心角亦等.

證 置O圓於O'圓上,使OB與$O'B'$相合,$\widehat{BA}$落於$\widehat{B'A'}$上,因$\widehat{BA}=\widehat{B'A'}$,故$A$點落於$A'$上,由是$OA$與$O'A'$相合,故

$$\angle AO3 = \angle A'O'B'$$

系 1. 同圓或等圓中,中心角大,則所對之弧亦大.

系 2 同圓或等圓中,大弧所對之中心角亦大

系 3. 中心角之大小,可以其所對之弧之長短度量之.

122. **定理 47.** 在同圓或等圓,相等之弧必對相等之弦,不相等之劣弧所對之弦亦不等,較大者所對之弦亦較大.其逆定理亦成立.

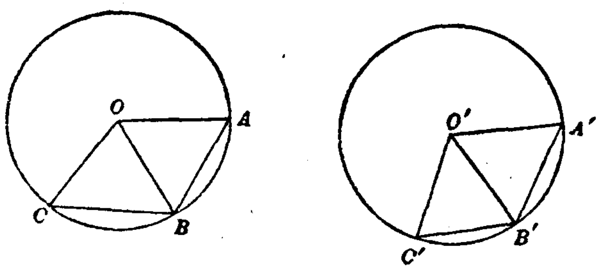


圖 76.

假設 於相等兩圓O及O',$\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$, $\widehat{BC}>\widehat{B'C'}$.

求證 (1) $AB = A'B'$, (2) $BC > B'C'$.

證 (1) 連結$OA, OB, O'A', O'B'$.

於 $\triangle AOB$ 及 $\triangle A'O'B'$,

$$\angle AOB = \angle A'O'B',$$

$$AO = A'O', \quad BO = B'O',$$

$$\therefore \quad \triangle AOB \cong \triangle A'O'B',$$

$$\therefore \quad AB = A'B'.$$

(2) 連結 OC 及 $O'C'$, 則於

$\triangle BOC$ 及 $\triangle B'O'C'$,

$$OB = O'B', \quad OC = O'C',$$

$$\angle BOC > \angle B'O'C',$$

$$\therefore \quad BC > B'C'.$$

逆定理　在同圓或等圓,相等之弦必對相等之弧,不相等之弦必對不相等之劣弧,較大者所對之劣弧亦較大.

此可由窮舉證法證之.

123. **定理 43.**　通過圓心而垂直於弦之直線,必平分此弦及此弦所對之弧.其逆定理亦成立.

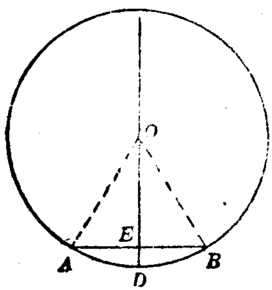


圖 77.

假設 圓之中心為O, AB為此圓之一弦, OD為過O而垂直於AB之直線, 與AB相交於E, 與AB弧相交於D.

求證 $$AE = EB, \quad \widehat{AD} = \widehat{DB}.$$

證 連結OA, OB, 則於

$$\triangle OEA \text{ 及 } \triangle OEB,$$

$$OA = OB, \quad \angle OEA = \angle OEB = \angle R., \quad OE\text{公共},$$

$$\therefore \quad \triangle OEA \cong \triangle OEB,$$

$$\therefore \quad AE = EB.$$

又 $$\angle AOE = \angle BOE,$$

$$\therefore \quad \widehat{AD} = \widehat{DB}.$$

逆定理 (a) 弦AB之中點與圓心之連結線必垂直AB而平分$\widehat{AB}$.

(b) $\widehat{AB}$之中點D與圓心之連結線必為AB弦之垂直平分線.

證 (a) 連結OA, OB, 則於

$$\triangle OAE \text{ 及 } \triangle OBE,$$

$$AO = BO, \; AE = EB, \quad OE\text{公共},$$

$$\therefore \quad \triangle OAE \cong \triangle OBE,$$

$$\therefore \quad \angle AEO = \angle BEO = \angle R.$$

又 $$\angle AOE = \angle BOE,$$

$$\therefore \quad \widehat{AD} = \widehat{DB}.$$

(b) 於$\triangle OAE$及$\triangle OBE$, $AO = BO$, OE公共,

$$\angle AOE = \angle BOE, \qquad \text{(定理46之逆)}$$

$$\therefore \quad \triangle OAE \cong \triangle OBE.$$

$$\therefore \quad \angle AEO = \angle BEO = \angle R.$$

$$\therefore \quad AE = EB.$$

124. **定理 49.** 在同圓或等圓,等弦至中心之距離相等,不等弦至中心之距離不等,較長者其距離較短.其逆定理亦成立.

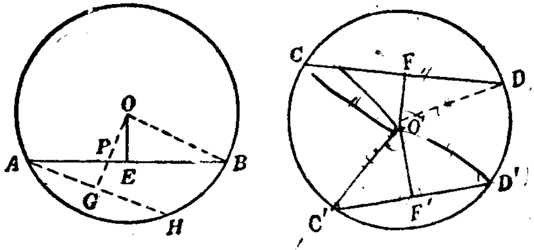


圖 78.

假設 AB 為 O 圓之弦, $CD, C'D'$ 為 O' 圓之二弦, $AB = CD, AB > C'D'$. $OE, O'F, O'F'$ 各為自圓心至 $AB, CD, C'D'$ 之垂線,而二圓之半徑相等.

求證 (1) $OE = O'F$, (2) $OE < O'F'$.

證 (1) 連結 $OB, O'D$, 則於

$$\triangle OEB \text{ 及 } \triangle O'FD,$$

$$OB = O'D,$$

$$EB = \tfrac{1}{2} AB = \tfrac{1}{2} CD = FD.$$

$$\angle OEB = \angle O'FD = \angle R.,$$

$$\therefore \quad \triangle OEB \cong \triangle O'FD.$$

$$\therefore \quad OE = O'F.$$

(2) 置 O' 圓於 O 圓上,使 O' 與 O 相合,C' 點落於 A 點上,因 $AB > C'D'$,故 D' 點必落於 $\widehat{AB}$ 劣弧之上,令其點爲 H. 連結 AH. 自 O 作 AH 之垂線 OG,因 O 點與 AH 線在 AB 弦之兩側,故 OG 必與 AB 相交,設其交點爲 P. 則 $O'F' = OP + PG$.

但 $\qquad OP > OE, \quad \therefore \quad OP + PG > OE,$

$$\therefore \quad OE < O'F'.$$

又此定理爲離接命題,故其逆定理得由窮舉證法證明之.

系 通過圓內定點所作諸弦之中,其最短者必爲以此定點爲中點之弦.

125. **定理 50.** 圓之對稱圖形爲一相等之圓

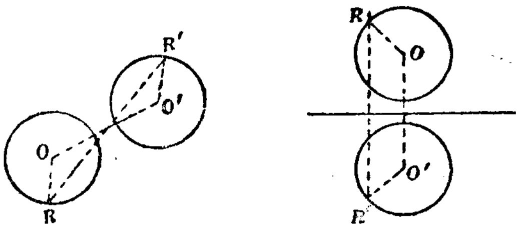


圖 79

證 設 O 圓中心之對應點爲 O',則圓周上之一點 R 與中心 O 之距離,等於其對應點 R' 與 O 之距離,故 O 圓圓周

上各點之對應點與一定點 O' 之距離均等於原圓之半徑，故 O 圓對稱之圖形爲與 O 圓相等之 O' 圓.

126. **例題** AB 爲所設 O 圓之定弦，AC 爲動弦，試求以 AB, AC 爲鄰邊之平行四邊形之對角線交點之軌跡.

圖 因平行四邊形之對角線互相平分，故其交點卽對角線之中點，因此本題求 BC 弦中點之軌跡可也.

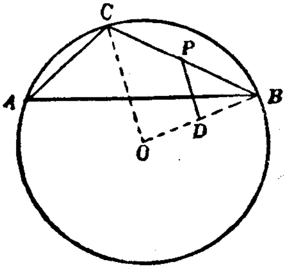


圖 80.

設 P 爲 BC 之中點，連結 OC, OB，設 OB 之中點爲 D，連結 PD，則 $PD=\frac{1}{2}CO$.

因 B 爲定點，故 D 亦爲定點，OC 爲定圓之半徑，故 P 點距 D 點等於定距離二分之一 O 圓之半徑.

故欲求 BC 中點之軌跡，求距 D 等於定距離 $\frac{1}{2}CO$ 之點之軌跡卽可.

但由定理43系，知距 D 等於定距離 $\frac{1}{2}CO$ 之點之軌跡，爲以 D 爲中心，以 $\frac{1}{2}CO$ 爲半徑之圓周.

故本題所求之軌跡爲以 OB 之中點爲中心，以所設圓半徑之半爲半徑之一圓周（證明從略）.

127. **證法研究——變題法**(一) 解軌跡問題時，不直接求所欲求之軌跡，而變爲求他種軌跡之問題，如是迭次變換，以求得所欲求之軌跡，此法曰**變題法**. 此法不特於

解軌跡問題時多用之,解其他問題時亦用之焉.

如上定理本爲求平行四邊形對角線交點之軌跡,一變而爲求 BC 弦中點之軌跡,再變而爲求距 D 點等於定距離之點之軌跡,但距一定點等於定距離之點之軌跡爲已知,故得所欲求之軌跡.

問題變換時,應注意之點,即適合於新條件之點之軌跡,是否全爲適合於舊條件之點之軌跡,而適合於舊條件之點之軌跡,是否全爲適合於新條件之點之軌跡之兩問題也.欲解答此問題,須證明下列各點:

一.適於舊條件之點,亦適於新條件.

二.適於新條件之點,在某圖形上.

三.某圖形上之點適於新條件.

四.適於新條件之點,亦適於舊條件.

習 題

1. 等圓或同圓中,一弧爲他弧之 N 倍,則其所對之中心角亦必爲他弧所對之中心角之 N 倍,試並其逆定理證明之.

2. 一弧之弦大於爲此弧二倍之弧所對弦之半.(圖81)

3. 三等分 AB 弦之兩半徑 OCG 及 ODH 不能分其所對之弧爲三等分.(圖82)

如圖82,取 $CE=OC$,可證 $\angle AOC=\angle CED$,由是證明 $\angle EOD>\angle AOC$,

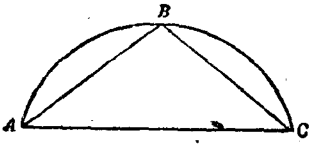


圖 81.

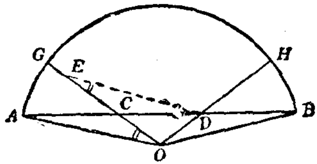


圖 82.

則 $\widehat{GH} > \widehat{AG}$.

4. 弦爲直徑所平分者,其與此弦平行之各弦均爲此直徑所平分.

5. 二平行線與一圓周相交,其被截於二平行線間之弧必相等.

6. 圓中之一弦,若爲此圓對稱之軸,則此弦必爲直徑.

7. 圓之定長之弦中點之軌跡爲與此圓同心之一圓周.

(圖 83)

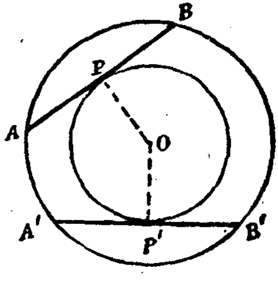


圖 83.

8. 與相等兩圓之中心連結線平行之直線,其被截於兩圓內之部分必相等.

(圖 84)

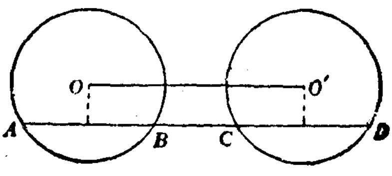


圖 84.

9 二弦不通過圓之中心,則二弦決不能互相平分.

10. 由圓之直徑之兩端至任意直線上作垂線，則兩垂足離中心之距離必相等.(圖 85)

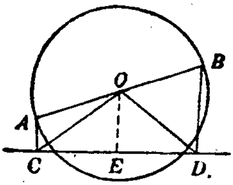


圖 85.

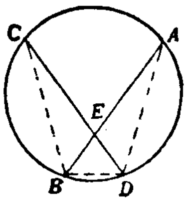


圖 86.

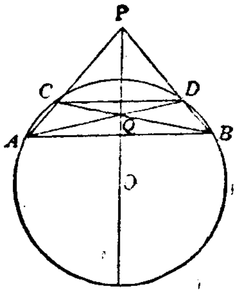


圖 87.

11. 二等弦 AB, CD 相交於圓內一點 E，則

$$EA = EC,\ EB = ED.\ (\text{圖 } 86)$$

連結 CB, BD, AD. 由 $\triangle CBD$ 及 $\triangle ABD$ 之全相等證明 $\angle ABD = \angle CDB$，由是 $EB = ED$.

12. 相等二弦之延長線相交於圓外一點，則在圓外之二線分相等

13. 圓 O 中之平行二弦 AB, CD，設其兩端連結線之交點為 P, Q 二點，則 P, Q, O 三點在一直線上.(圖 87)

14. 一定長線分之兩端恆在垂直之二定直線上移動，求此線分中點之軌跡.(圖 88)

15. 過圓周上之任意一點 A，引定長直線 AP，與所設直線 DM 平行，求 P 點之軌跡 (圖 89)

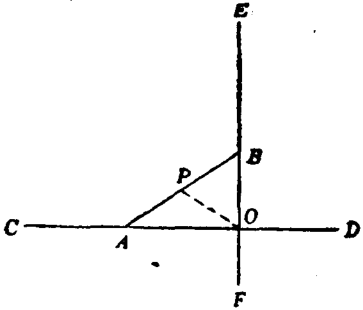


圖 88.

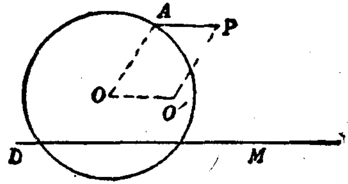


圖 89.

16. OX 爲過圓心 O 之一定直線,與半徑等長之一直線 AB, A 點在 OX 上, B 點在圓周上移動,過 A 作 OX 之垂線與 OB 之延長線相交於 P, 求 P 點之軌跡. (圖 90)

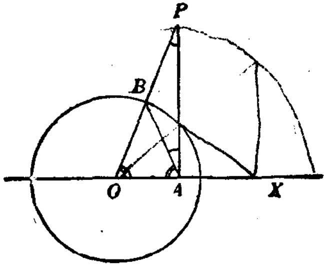


圖 90.

第十章　相交及相切

128. **定義 53.** 與一曲線至少相交於兩點之直線曰曲線之割線.

129. **定理 51.** 自一定點 P, 引一圓周之割線,與圓周相交於二點 A', B', 則 PA', PB' 二線分當割線通過圓心時,一爲極大,一爲極小.

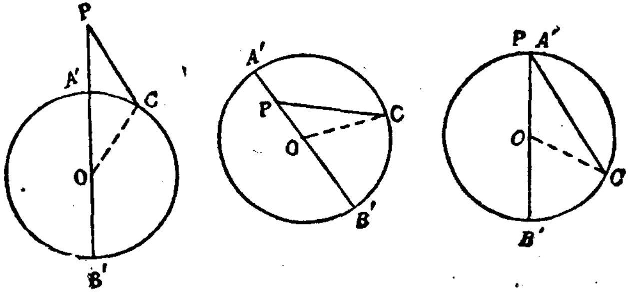


圖 91.

假設 自 P 引 O 圓之割線與 O 圓相交於 A' 及 B' 二點, $PA'B'$ 且過圓心 O. 自 P 至圓周引一不過 O 點之任意直線 PC.

求證 $$PA' < PC,\quad PB' > PC.$$

證 連結 OC, 知 $PO - OC < PC$,

但 $OA' = OC$, 故 $PA' < PC$.

又 $PO + OC > PC$. 但 $OB' = OC$, 故 $PB' > PC$.

若P在圓周上,則因P, A'兩點相重合,故PA'爲零,爲極小.而

$$PB' = PO + OB' = PO + OC,$$

$$\therefore PB' > PC.$$

130. **定義 54.** 自一點至圓周之距離爲此點至圓心之距離與半徑之差.

如上定理之PA',卽爲P至圓周之距離,故所稱爲距離者,最短之距離也.

131. **定義 55.** 設P, P'爲割線與曲線之二交點,若P'逐漸移動與P重合,則P, P'重合在一點時之割線名曰**切線**,而P點名曰**切點**.(圖 92)

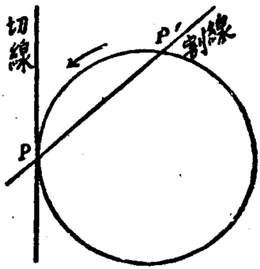


圖 92.

132. **定理 52.** 一圓周與一直線之交點不能多於二.

此定理可由定理 19 推知,證從略.

系 圓之切線與圓周上之一點接觸,兩端延長永不與圓相交.又其逆定理:與圓周上一點接觸,兩端延長水不與圓相交之直線爲切線.

133 **定理 53.** 自圓周上之一點所作之諸直線,其

垂直於通過此點之半徑者爲切線,否則爲割線.

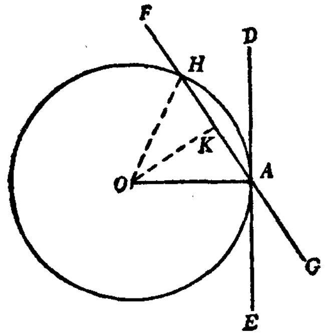


圖　93.

假設　A 爲 O 圓圓周上之一點,DE, FG 爲過 A 之直線,$DE \perp OA$, FG 不垂直 OA.

求證　DE 爲切線,FG 爲割線.

證　因 $OA \perp DE$,故自 O 向 DE 所引之其餘直線均較 OA 爲長,但 OA 爲半徑,故 DE 上其餘各點均在圓外,故 DE 爲切線.

又 FG 不垂直 OA,自 O 引 FG 之垂線 OK,在 OK 另側得引與 OA 等長之他斜線 OH,則 H 點必爲 FG 與圓之又一交點,由是 FG 與圓交於二點,故爲割線.

系 1.　自圓周上一點,所作之切線必與過此點之半徑垂直.

系 2.　在切線切點所作之垂直線必通過圓心.

系 3. 自圓心至切線所引之垂線,其垂足必爲切點.

系 4 過圓周上之一點,僅能作一切線.

系 5. 自圓之中心至一直線之距離比半徑小,則此直線爲割線;比半徑大,則不與圓相交;等於半徑,則爲切線.

134. **定義 56.** 兩圓相遇,若互在於外而其遇處僅一點時,則曰二圓外切;一圓之一部分在他圓之內,則曰相交;若一圓全在他圓之內而僅遇於一點,則曰兩圓相內切.

135. **定理 54.** 二圓周之一全在他圓周之外,則其中心之距離,較二圓半徑之和大.

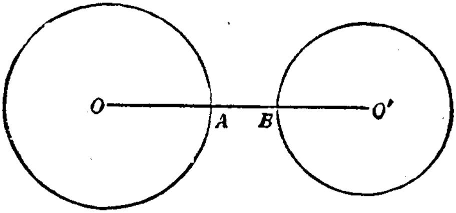


圖 94.

假設 O 及 O' 二圓,其中一圓周,全在他圓周之外.

求證 OO' 之長,大於二圓半徑之和.

證 連結 CO', 因 O, O' 二圓周,一圓周全在他圓周之外,故 OO' 必與二圓周相交,設其交點爲 A, B, 則

$$OO' = OA + AB + BO',$$

$$\therefore \quad OA + BO' < OO'$$

136. **定理 55.** 兩圓周若相遇於中心連結線外之

一點,則必再遇於他一點,而兩圓周相交.

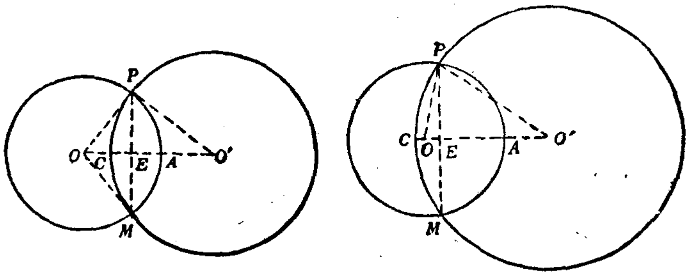


圖 95.

假設 以O及O'為中心之二圓周相遇於OO'線外一點P.

求證 二圓必再相遇於P以外之一點M,而二圓相交.

證 自P作OO'之垂線PE,延長PE至M,使$PE=EM$.連結OP, OM,則於 $\triangle OPE$及$\triangle OME$,

$$PE=EM,\quad OE \text{公共},$$

$$\angle OEP=\angle OEM=\angle R.,$$

$$\therefore\ \triangle OPE \cong \triangle OME,$$

$$\therefore\ OP=OM,$$

$$\therefore\ M \text{在} O \text{圓周上}.$$

仿此可證M亦在O'圓周上,故O, O'二圓周復相遇於M點.

又OO'或其延長線與O圓周交於A點,與O'圓周交於

C 點,因 $OO' - O'P < OP$, $C'P = O'C$,

$$\therefore \quad OC < OP, \quad \text{故} C \text{點在} O \text{圓內}.$$

仿此可證 A 點在 O' 圓內,故 O 及 O' 兩圓周相交.

系 1. 二圓相交,則其中心距離小於二圓半徑之和,而大於其差.

系 2. 二圓相交,則其公共之弦必與中心連結線垂直且被其平分.

137. **定理 56.** 兩圓周若相遇於中心連結線上之一點,則不再相遇於他點,而此兩圓周相切.

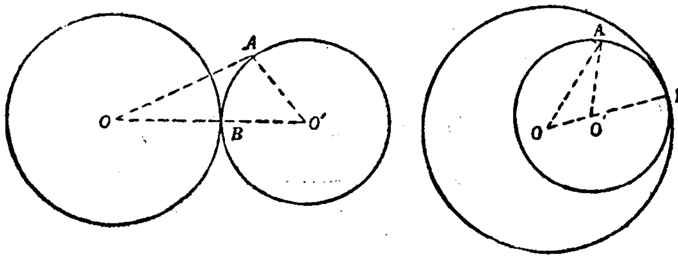


圖 96.

假設 以 O 及 O' 為中心之兩圓周相遇於 OO' 或其延長線上之一點 B.

求證 O,O' 二圓周不再相遇於他點而相切.

證 於 O' 圓周上除 B 點外任取一點 A,連結 AO, AO'.由是若 B 在 OO' 之間(左圖),則

$$OO' - O'A < AO,$$

但　$O'A = O'B$,　　　而　$OO' - O'B = BO$;

$\therefore$　$BO < AO$,　　　故　A在O圓外.

若B在OO'之延長線上(右圖),則

$$OO' + O'A > OA,$$

但　$O'A = O'B$,　　　而　$OO' + OB' = OB$.

$\therefore$　$OB > OA$,　　　故　A在O圓內.

由是二圓周除B點外,再無共通之點,故兩圓周相切.

系 1.　兩圓相遇於中心連結線中之一點時,則二圓外切;相遇於中心連結線之延長線上一點時,則兩圓內切.

系 2.　兩圓~~內~~外切時,中心連結線等於兩圓半徑之和;兩圓內切之時,中心連結線等於兩圓半徑之差.

系 3.　兩圓若相交,則其交點決不在中心連結線上.

系 4.　過兩圓之切點僅能作一公共切線.

138.　**定理 57.**　二圓之一全在他圓之內,則其中心距離比半徑之差小.

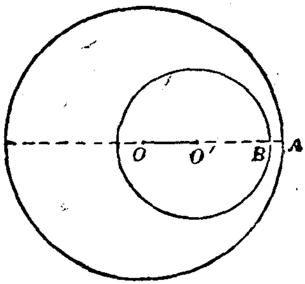


圖 97.

假設 O及O'二圓,O'圓全在O圓內.

求證 OO'之長小於O及O'兩圓半徑之差.

證 延長OO'或$O'O$,必有一方向與兩圓分別交於A,B二點;則

$$OA-O'B=OO'+BA,$$

$$\therefore OA-O'B>OO'.$$

故OO'之長小於兩圓半徑之差.

系 若兩圓之中心距離等於零,則兩圓為同心圓.

上諸定理之逆定理,即下列定理,可由窮舉證法證明之.

139. **定理 58.** 今有二圓:

一. 中心距離比半徑之和小而比其差大,則二圓相交.

二. 中心距離等於半徑之和,則二圓外切.

三. 中心距離等於半徑之差,則二圓內切.

四. 中心距離比半徑之和大,則一圓全在他圓外.

五. 中心距離比半徑之差小,則一圓全在他圓內.

140. **定義 57.** 於兩曲線之交點作兩曲線之切線,則此二切線所形成之角,稱曰此二曲線在此交點之交角.

故由兩圓周相交之交點作二圓之切線,則此二切線之交角,即稱曰此二圓周之交角,如二圓周之交角為直角,則稱此二圓周為互相直交.

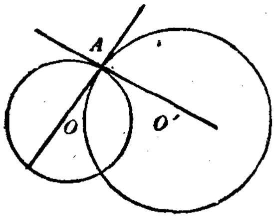


圖 98.

141. 例題　由相交二圓周之一交點,至兩圓所引諸割線中,平行於中心連結線者爲極大.

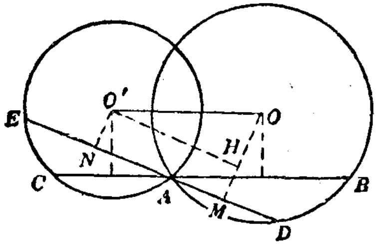


圖 99.

假設　O 及 O' 兩圓之一交點爲 A, 過 A 之割線 CB 平行 OO', 割線 ED 不平行 OO'.

求證　$$CB > ED.$$

證　自中心 O 及 O' 作 ED 之垂線 $O'N, OM$, 過 O' 作 OM 之垂線 $O'H$, 由是 M, N 爲 DA, AE 之中點, $MNO'H$ 爲矩形.

$$DE = 2(MA + AN) = 2MN = 2O'H.$$

又　$$CB = 2OO'.$$

而　$CO'H$ 爲直角三角形, OO' 爲斜邊.

$\therefore OO' > O'H$, 故 $CB > ED$.

142. **證法研究——變題法(二)**　上例題爲證題時所用之一變題法,如吾人不能直接證明 $CB > ED$,可證明 CB 與 ED 之半之大小之關係,由是變爲證明 $\triangle OO'H$ 之邊之大小,而定理得證.

習　題

1. 平行二切線之切點,必與圓心同在一直線上.

2. 平行於弦之切線,其切點必分此弦所對之弧爲二等分.

3. 由兩圓之交點作兩圓之切線,則此二切線之交角等於交點與中心連結線所成之角或其補角.

4. 通過相切兩圓之切點,任意作一割線,更由其與圓周相交之兩點,各作圓之半徑,此兩半徑互相平行.(圖 100)

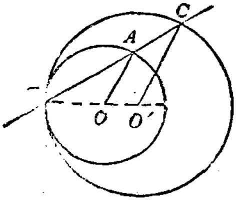


圖 100.

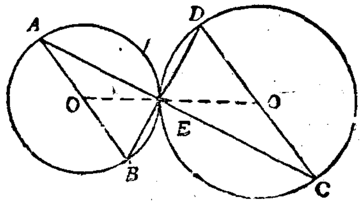


圖 101.

5. O, O' 兩圓在 E 點相切, AB, CD 爲任意二平行直徑,則 A, E, C 及 D, E, B 各在一直線上.(圖 101)

6. A圓與B,C兩圓相切，則A圓之中心A至B,C兩圓之中心B,C距離之差，等於B,C兩圓半徑之差.(圖 102)

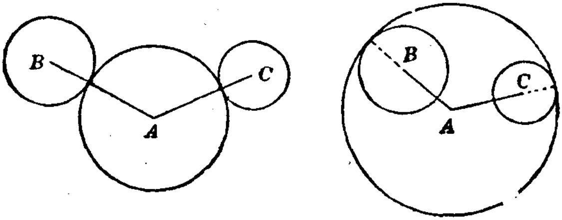


圖 102

7. 有相離於外之二圓A,B；其一與另一圓C內切，其一外切，則C圓中心至A,B兩圓中心距離之差，等於A,B二圓半徑之和.(圖 103)

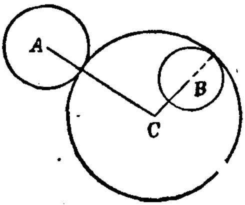


圖 103

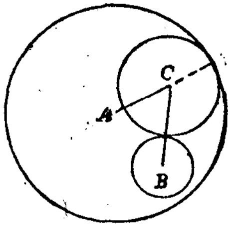


圖 104.

8. 如上題，A,B二圓之一全在他圓內，則C圓中心至A,B兩圓中心之和等於二圓半徑之和.(圖 104)

9. 互相外切之三圓，設其切點爲A,B,C；連結AB,AC延長之，截一圓周於P,Q二點，則PQ爲此圓之直徑.

10. 中心在定直線上，通過不在此定直線上之一定點

A所作之諸圓,必通過其他一定點.

11. 與所設圓周等距離之點之軌跡,爲與所設圓周同心之二圓周.

12. 與所設圓相交成定角而半徑等於定長之圓,其中心之軌跡如何?(圖 105)

(註) 參考第三題,O爲定圓,A爲軌跡上之一點,則OC, OA等於定長,而$\angle OCA$爲定角.

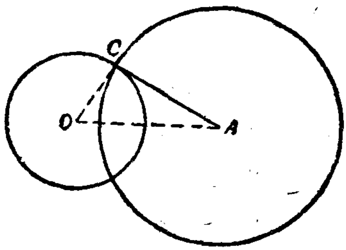


圖 105.

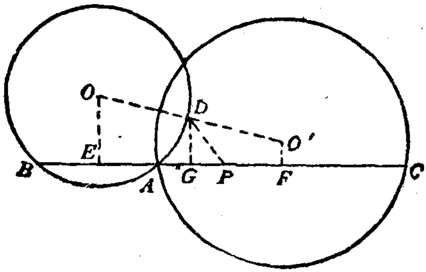


圖 106.

13. 過二圓之一交點A引割線與二圓周交於B,C兩點,求BC中點P之軌跡.(圖 106)

(註) 如圖,取中心連結線之中點D,連結DP,由是證DP等是定長DA,即可得所求之軌跡.

第十一章　弓形角

143. **定義 58.** 從圓周上一點,作二弦,其所含之角曰圓周角.

144. **定義 59.** 弦及其對弧所包之圖形曰弓形.

145. **定義 60.** 自弓形弧上之一點,向其兩端所引二直線之交角曰弓形角.

146. **定理 59.** 立於同弧上之圓周角,等於中心角之半.

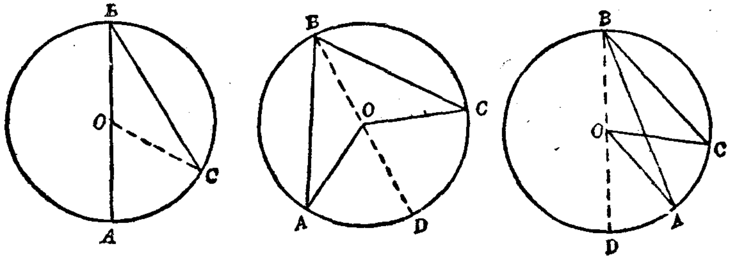


圖 107.

假設 $\angle ABC$ 及 $\angle AOC$ 各爲 O 圓之弧 AC 上所立之圓周角及中心角.

終結 $$\angle ABC = \tfrac{1}{2}\angle AOC.$$

證 (a) 中心 O 若在 $\angle ABC$ 之一邊 AB 上,則易知

$$\angle ABC = \tfrac{1}{2}\angle AOC.$$

(b) 若中心 O 在 $\angle ABC$ 內,則自 B 作直徑 BD,由 (a) 得

$$\angle ABD = \tfrac{1}{2}\angle AOD,$$

$$\angle DBC = \tfrac{1}{2}\angle DOC.$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \tfrac{1}{2}(\angle AOD + \angle DOC) = \tfrac{1}{2}\angle AOC.$$

(c) 中心 O 若在 $\angle ABC$ 外,則自 B 作直徑 BD,由 (a) 得

$$\angle DBA = \tfrac{1}{2}\angle DOA,$$

$$\angle DBC = \tfrac{1}{2}\angle DOC.$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DBC - \angle DBA = \tfrac{1}{2}(\angle DOC - \angle DOA) = \tfrac{1}{2}\angle AOC.$$

系 1. 同弓形所含之角相等

系 2. 弓形角依其弓形比半圓大,或等,或小,因而比直角小,或等,或大.

系 3. 弓形所含之角比直角小,或等,或大,因而此弓形比半圓大,或等,或小.

系 4. 圓周角之大小,以所對之弧之半測定之.

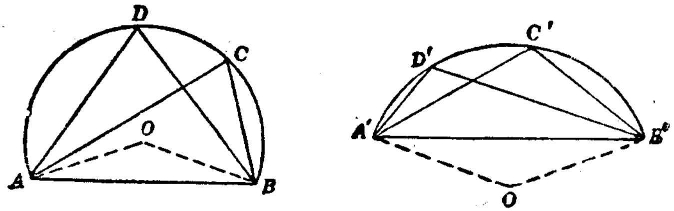


圖 108.

如上圖,弓形 $ABCD$,設其中心爲 O,則 $\angle AOB$ 一定,而圓

周角 $\angle ADB$ 或 $\angle ACB$ 等於 $\angle AOB$ 之半，故其大小爲一定.

若弓形大於半圓，則中心在其內，故 $\angle AOB < 2\angle R$. 而所含之弓形角小於 $\angle R$. 若弓形等於半圓，則 O 在 AB 上，故 $\angle AOB = 2\angle R$. 而弓形角等於 $\angle R$. 又若弓形小於半圓，則中心在其外，故 $\angle AOB > 2\angle R$. 而弓形角大於 $\angle R$.

147. **定理 60.** 圓內相交二直線所成之角，以此角二邊，及其延長線所截取之二弧之和之半測定之.

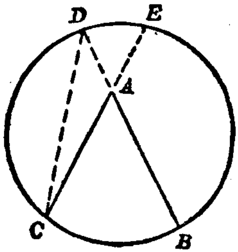


圖 109.

假設 AB, AC 在所設圓內成 BAC 角，AB, AC 及其延長線截圓周於 B, C, D, E 四點.

求證 $\angle BAC$ 以 $\frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$ 測定之.

證 連結 DC，則 $\angle BAC = \angle ADC + \angle ACD$，而 $\angle ADC$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{BC}$ 測定之，$\angle ACD$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{DE}$ 測定之，故 $\angle BAC$ 以 $\frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$ 測定之.

148. **定理 61.** 圓外相交二割線所成之角,以此二割線截取之二弧之差之半測定之.

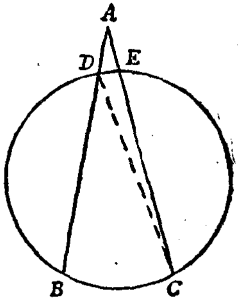


圖 110.

假設 AB, AC 二割線在所設圓外之 A 點相交,截此圓於 B, C, D, E 四點.

求證 $\angle BAC$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE})$ 測定之.

證 連結 CD,則 $\angle BAC=\angle BDC-\angle DCE$.

但 $\angle BDC$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ 測定之,

$\angle DCE$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$ 測定之.

故 $\angle BAC$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE})$ 測定之.

149. **定理 62.** 一角之二邊恆過一線分之兩端,而其角之大小又為一定,則此角頂點之軌跡為以此線分為弦,且含此定角之二圓弧.

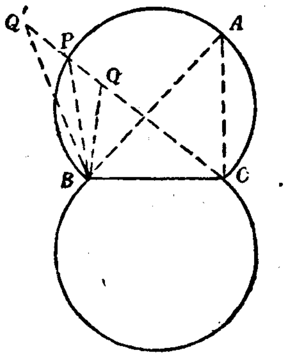


圖 111.

假設 BC 為定直線, $\angle BAC$ 為定角.

求證 A 點之軌跡為以此 BC 為弦,且含此定角之二圓弧.

證 設 A 為合於所設條件之一點,則 A,B,C 三點決定一圓弧.

設 P 為此圓弧上之任意一點,連結 PB, PC,則 $\angle BPC = \angle BAC$,故圓弧上之點均合於所設之條件.

設 Q 為 BAC 弓形內之一點,則 $\angle BQC > \angle BAC$,因由定理 60, $\angle BQC$ 以大於 $\overset{\frown}{BC}$ 之半測定之.

設 Q' 為 BAC 弓形外之一點,則 $\angle BQ'C < \angle BAC$,因由定理61, $\angle BQ'C$ 以小於 $\overset{\frown}{BC}$ 之半測定之.

由是 BAC 圓弧外之點均不合於所設之條件,故 BAC 弧為所求之軌跡.

因 BC 兩方得作相等之二圓弧，故所求之軌跡爲對於 BC 爲對稱之二圓弧.

系　上定理之定角如等於直角，則其軌跡爲以 BC 爲直徑之一圓周.

150.　定理 63.　切線與經過其切點所作之弦所成之角，等於此弦另側之弓形角.

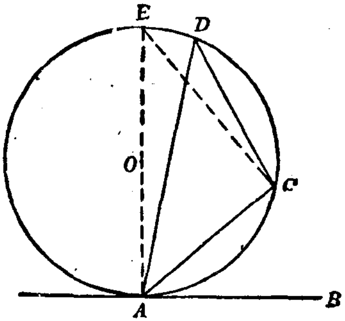


圖 112.

假設　AB 爲 O 圓之切線，自切點 A 引弦 AC，D 爲 AC 另側圓弧上之一點.

求證　$\angle CAB$ 等於弓形角 $\angle ADC$.

證　自 A 引直徑 AE，則

$$\angle ADC = \angle AEC.$$

然　$\angle EAC + \angle CAB = \angle R.$

又　$\angle EAC + \angle AEC = \angle R.$

$$\therefore \angle CAB = \angle ADC.$$

逆定理 過弦之一端作一直線,令與此弦所夾之角等於此弦另側之弓形所含之角,則此直線爲此圓之切線(證明略).

151. **定義 61.** 自一點所引切線之長,爲此點與切點之距離.

152 **定理 64.** 自圓外一點得作二切線,且僅能作二切線與此圓相切.

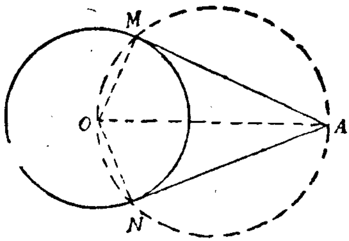


圖 113

假設 A爲O圓外之一點.

求證 過A得作二切線,與O圓相切.

證 連結OA,以OA爲直徑作一圓,則因O點在O圓內,A點在O圓外,故OA爲直徑之圓必與O圓交於二點,且以二點爲限;設其交點爲M, N,連結AM, AN, OM及ON,則$\overparen{OMA}$及$\overparen{ONA}$各爲半圓,故$\angle ONA$及$\angle OMA$均爲直角,因之AM及AN皆爲切線,且知自A點僅能作此二切線與O圓相切.

153. 例題　自圓外一定點作定圓之割線，求割線圓內部分中點之軌跡.

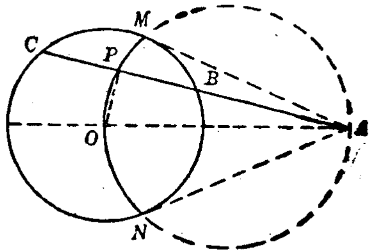


圖 114.

O 爲定圓之中心，A 爲 O 圓外之一定點，AC 爲任意一割線，與 O 圓交於 B 及 C 二點，P 爲 BC 之中點，今欲求 P 點之軌跡.

解　自 A 引過 O 之割線，則 O 爲此割線圓內部分之中點，故 O 爲軌跡上之一點. 自 A 引 O 圓之切線 AM, AN，因切線爲割線之極限位置，故 M, N 亦爲 P 之極限位置，因之 M 及 N 爲所求軌跡上之兩點.

因 O, M, N 爲不在一直線上之三點，故軌跡非爲一直線.

連結 OP，則 $OP \perp CB$，卽 $\angle OPA = \angle R$.

故 P 點爲一角之頂點，其二邊過二定點 O 及 A，其所夾之角等於直角.

故 P 點之軌跡爲以 OA 爲直徑之一圓弧，因 OA 爲直徑之圓必過 MN，而 P 點盡在 O 圓內，故 P 點之軌跡非爲全圓周，而爲以 M 及 N 二點爲限界之圓弧 MON (證明從略).

154. 證法研究——軌跡題中之特殊點　欲探求一軌跡，常先求軌跡上若干之特殊點以研究之，因初等幾何學中之軌跡大都爲直線或圓，故求得三個以上之特殊點，

則此軌跡之大略形狀,已可想像,由是進而探索,則軌跡不難求得,如上例,M, O, N三點,卽所求軌跡上之三特殊點.

一軌跡如有終止之點,稱之曰軌跡之限點,如上例之M, N是也.

習 題

1. 同弓形內諸角之平分線,必同交於一點.

2. 由二圓周之交點,引二圓之直徑,其各直徑之他端必與他交點同在一直線上.

3. 以一圓之半徑爲直徑作內切圓,又由切點任作原圓之弦,此弦必適爲此內切圓圓周所平分.

4. 二圓周交於A, B二點,過B任作割線CD與兩圓周各交於C及D二點,則$\angle CAD$一定不變.

5. 二圓周相切,通過切點任作二割線,在割線間之二弦,必互相平行.

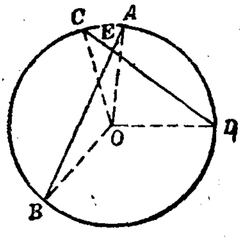


圖 115.

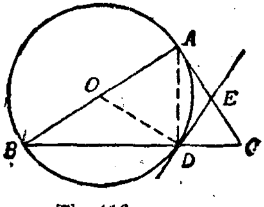


圖 116.

6. 通過圓內一點之二弦所夾成之角,等於其所截相對二弧上兩中心角之和之半.(圖 115)

7. 以直角三角形夾直角之一邊爲直徑作圓周,與斜邊相交,由其交點作此圓之切線,必分夾直角之他邊爲二等分.(圖 116)

8. 有三角形,其底邊之長及其位置皆一定,頂角之大亦一定,求其垂心之軌跡.

9. 在相交二定直線間夾定長之直線所成三角形,其垂心之軌跡爲何?

10. 三角形之底邊有定長及定位置,頂角爲定角,則此三角形內心之軌跡,爲以底邊爲弦之二圓弧.

11. 以定直線爲斜邊之直角三角形,其內心之軌跡,爲以此直線爲弦,其長等於圓周四分之一之一圓弧.

12. 二圓相交,第一圓通過第二圓之中心,則自一交點所作第一圓之切線與公共弦夾成之角,必適爲此交點與第二圓中心之連結線所平分.(圖 117)

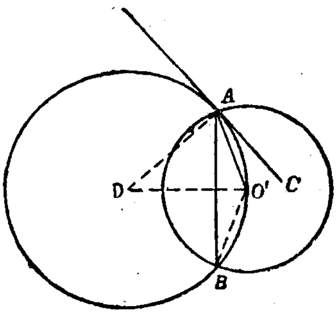


圖 117.

第十二章

圓之內接圖形及外切圖形

155. **定義62.** 直線形之角頂皆在一圓周上,稱此圖形爲**內接於圓**,而稱此圓爲此直線形之**外接圓**,外接圓之中心稱爲**直線形之外心**.

156. **定義63.** 直線圖形之各邊均爲一圓之切線,稱此圖形爲**外切於圓**,稱此圓爲此圖形之**內切圓**,其中心稱爲**直線形之內心**.

157. **定義64.** 與三角形之一邊及與其他二邊延長線相切之圓曰**三角形之傍切圓**,其中心曰**三角形之傍心**.

158. **定理65.** 凡三角形得作一外接圓,一內切圓及三傍切圓.

本定理可由定理42及第八章習題5,直接推知.

故三角形外接圓之圓心,爲三角形三邊垂直平分線之交點,卽定義41之外心.內切圓之圓心,爲三角形三內角之角平分線之交點,卽內心.傍切圓之圓心(傍心)爲三角形二外角及一內角角平分線之交點.

159.　定理 66.　圓之內接四邊形*，其對角互爲補角．其逆定理亦眞．

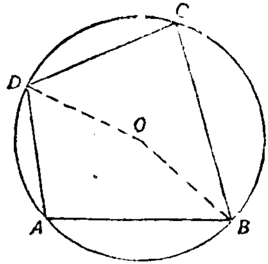


圖 118.

假設　$ABCD$ 爲 O 圓之內接四邊形．

求證　$\angle BAD+\angle BCD=2\angle R.$

證　連結中心 O 及 B, D 二點，

則 $\angle BAD$ 等於 BCD 弧所對中心角之半，$\angle BCD$ 等於 BAD 弧所對中心角之半．

故 $\angle BAD+\angle BCD$ 等於四直角之半，即

$$\angle BAD+\angle BCD=2\angle R.$$

逆定理　若四邊形之對角互爲補角，則四邊形得內接於圓．

* 本章所論之四邊形，均爲凸四邊形．

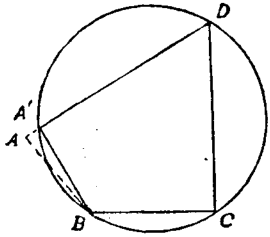


圖 119.

證 過 B,C 及 D 三點作一圓,若 A 不在此圓圓周上,則必在圓內或圓外.若 A 在圓外,而 AD, AB 均爲圓之割線,故必有一邊 AD 與圓相交,設其交點爲 A',則

$$\angle BAD + \angle BCD = 2\angle R.$$

由是 $\angle BA'D = \angle BAD$,於理不合,故 A 與 A' 一致.

仿此可證若 A 點在圓內,亦不合理,故 A 必在 BCD 圓周上.

由是四邊形 $ABCD$ 內接於圓.

160. **定理 67.** 圓之外切四邊形,其二組對邊之和相等.其逆亦眞.

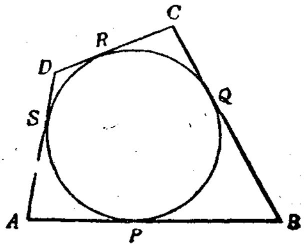


圖 120.

假設 圓之外切四邊形爲 $ABCD$.

求證 $AB+DC=AD+BC$.

證 設四邊形之各邊切圓於 P, Q, R 及 S 四點，則

$$AP=AS,\quad BP=BQ,$$
$$CQ=CR,\quad DR=DS.$$
$$\begin{aligned}\therefore AB+DC &= AP+BP+CR+DR\\ &= AS+BQ+CQ+DS\\ &= AD+BC.\end{aligned}$$

逆定理 若四邊形二組對邊之和相等，則此四邊形得外切於圓.

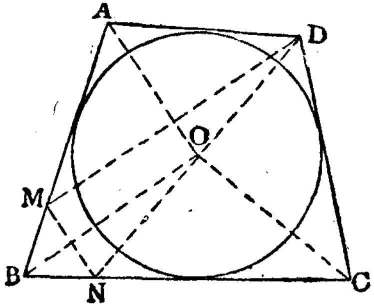


圖 121.

證 若 $AB>DA$，則 $BC>CD$. 於 AB 上取 AM 等於 AD，於 BC 上取 CN 等於 CD. 連結 MN，則 $\triangle AMD, \triangle BMN$ 及 $\triangle CND$ 均爲二等邊三角形，故 A, B, C 三角之角平分線爲 $\triangle MND$ 三邊之垂直平分線，故同交於一點 O，此 O 點離四邊形四

邊之距離均相等.以 O 爲中心,以 O 至一邊距離之長爲半徑作圓,得 $ABCD$ 之內切圓,故 $ABCD$ 外切於圓.

161. **定理 68.** 圓之內接四邊形之對角線,若互相垂直,則自其交點至一邊之垂線如延長之,必平分對邊.又其逆定理亦成立.

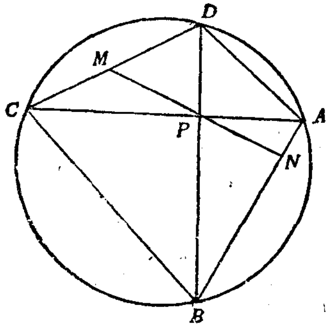


圖 122.

假設 $ABCD$ 爲所設圓之內接四邊形,$DB \perp AC$,P 爲 DB, AC 之交點;MPN 爲過 P 點垂直於 AB 而與 CD 交於 M 點之直線.

求證 $CM = MD.$

證 因 $\angle DPM = \angle BPN = \angle PAN = \angle PDM.$

$$\therefore MP = MD.$$

同理 $MP = MC.$

$$\therefore CM = MD.$$

逆定理　圓之內接四邊形之對角線,若互相垂直,則其交點與一邊之中點連結線延長之,必與對邊垂直.

因一直線之中點僅有一個,而自一點所作之垂線,亦僅一,故由同一證法知此逆定理亦成立.

162.　**定理 69.**　三角形之任意一角頂至垂心之距離等於其外心至對邊距離之二倍*.

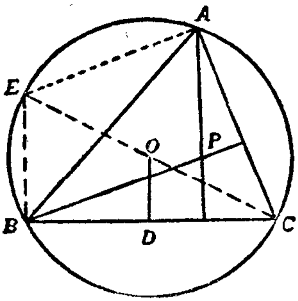


圖 123.

假設　P 及 O 各爲三角形 ABC 之垂心及外心, OD 爲自外心至 BC 邊所引之垂線.

求證　　$AP = 2OD.$

證　連結 CO,並延長之與 $\triangle ABC$ 之外接圓周交於 E. 連結 EA, EB.

因　EC 爲直徑,故 $EO = CC$;

---

* 此定理稱爲 Brahmegupta 定理.

但 $BD = DC$, $\therefore EB \parallel OD$;

而 $$EB = 2OD. \quad \cdots\cdots(1)$$

又 $AP \parallel EB$, $BP \parallel BA$,

故 $BPAE$為一平行四邊形,

$$\therefore EB = AP \quad \cdots\cdots(2)$$

由(1)及(2)得 $AP = 2OD$.

163. 定理 70. 自三角形外接圓周上之一點至三邊或其延長線上引三垂線,其垂足在一直線上*.

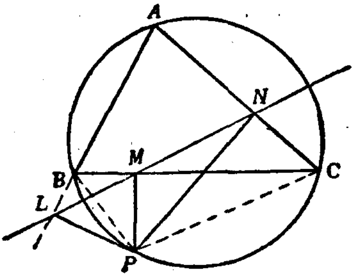


圖 124.

假設 P為三角形ABC之外接圓圓周上之一點,PL, PM, PN為P至三邊所引之三垂線,其垂足為L, M, N.

求證 L, M, N在一直線上.

證 連結PB, PC, LM, MN,則

$$\angle PMB = \angle PLB = \angle R.$$

---

*此定理通稱曰Simson定理,此三垂足之連結線通稱曰Simson線,實則Wallace之發見,前Simson百餘年.其逆定理亦成立,以證明甚複雜,故從略

故 $PMBL$ 爲圓之內接四邊形.

又因 $\angle PMC = \angle PNC = \angle R$. 故 $PCNM$ 亦爲一圓之內接四邊形.

又 $ABPC$ 本爲圓之內接四邊形.

由是 $\angle PML = \angle PBL = \angle ACP$,

但 $\angle ACP + \angle PMN = 2\angle R$.

$$\therefore \angle PML + \angle PMN = 2\angle R.$$

故 L, M, N 三點在一直線上.

系 自外接圓之周上之一點,引三角形三邊在同方向成等角之三斜線,則三斜線之線足在一直線上.

此系卽爲上定理之擴充,卽不爲垂線,僅爲成等角之斜線時亦成立.

164 **定義 65** 三角形之三高,各與對邊交於一點,此三交點所成之三角形曰垂足三角形.

165. **定理 71.** 垂足三角形之三內角必爲原三角形之三個高所平分.

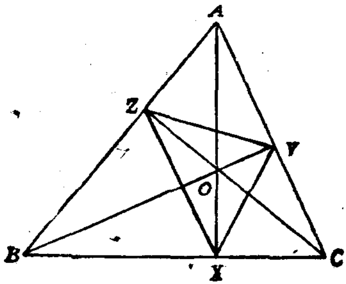


圖 125.

假設 $\triangle XYZ$ 爲 $\triangle ABC$ 之垂足三角形.

求證 AX, BY, CZ 各爲 $\triangle XYZ$ 三內角之角平分線.

證 因 O 爲垂心,故 X, B, Z 與 O 在一圓周上.

$$\therefore \angle OXZ = \angle OBZ.$$

同理 $$\angle OXY = \angle OCY.$$

而 $\angle OBZ$ 及 $\angle OCY$ 同爲 $\angle BAC$ 之餘角故相等.

由是 $$\angle OXZ = \angle OXY.$$

$$\therefore AX \text{ 爲 } \angle ZXY \text{ 之角平分線.}$$

同理得證 BY 爲 $\angle XYZ$ 之角平分線, CZ 爲 $\angle XZY$ 之角平分線.

系 1. 原三角形之垂心爲垂足三角形之內心.

系 2. 原三角形之三邊,爲垂足三角形三外角之角平分線.原三角形之三頂點爲垂足三角形之傍心.

166 **定理 72.** 在任何三角形:

(a) 垂心與三頂點連結線之中點,及三邊之中點,皆在其垂足三角形之外接圓周上.

(b) 此圓之中心與原三角形之垂心,外心及重心在一直線上,而爲外心,垂心連結線之中點.

(c) 此圓之半徑爲外接圓半徑之半*.

假設 X, Y, Z 爲 $\triangle ABC$ 三個高之線足, O 爲其垂心, K

* 此定理稱曰 Poncelet 定理,此圓稱曰九點圓.

爲其外心,G爲其重心,N爲$\triangle XYZ$外接圓之圓心.

求證　(a) $\triangle ZYX$之外接圓過AO, BO, CO及$AB\ BC, CA$之各中點.

(b) N, K, O及G在一直線上,而$KN = NO$.

(c) XYZ圓之半徑爲ABC圓半徑之半.

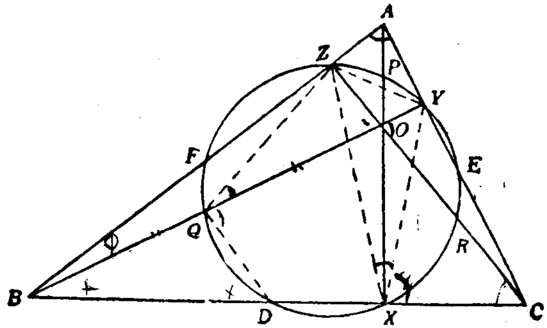


圖　126.

證　(a) 設AO, BO, CO與XYZ圓周交於P, Q, R三點,連結ZQ.

因　$\angle OZB = \angle OXB = \angle R.$

故　OB爲過X, Z二點之圓之直徑.

又　$\angle ZQO = \angle ZXY = 2\angle ZXO,$

故　Q爲以OB爲直徑之圓之中心.

故Q爲OB之中點.

同理得證　R爲OC之中點,P爲OA之中點.

次設 XYZ 圓周,截 A, B, C 三角之對邊於 D, E, F 各點.連結 QD.

因 $QDXY$ 內接於圓,而 $OYCX$ 亦內接於圓,

故 $$QD \parallel OC.$$

因 Q 爲 BO 之中點,故 D 亦爲 BC 之中點.

同理 E 爲 CA 之中點, F 爲 AB 之中點.

由是 X, Y, Z, P, Q, R 及 D, E, F 九點共在一圓周上.

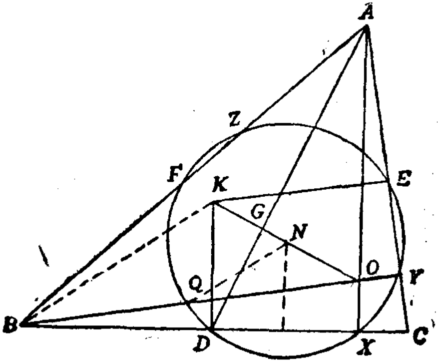


圖 127.

(b) 外心 K 爲 BC, CA 之垂直平分線之交點,而圓周 XYZ 之中心,必爲其弦 DX, EY 之垂直平分線之交點,但此二垂直平分線均平分 KO,故 N 爲 KO 之中點.

又 $GA=2GD$.連結 KG,延長之與 AX 交於 O'.

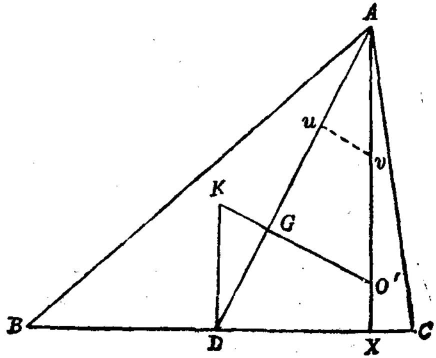


圖 128.

設 AG 之中點爲 u,

$O'A$ 之中點爲 v, 連結 uv, 則 $uv \parallel GO'$, 而爲 GO' 之半.

於 $\triangle DKG$ 及 $\triangle Auv$, $DG = Au$, $\angle KDG = \angle uAv$, 而 $\angle KGD = \angle uGO' = \angle Auv$,

故 $$\triangle DKG \cong \triangle Auv,$$

因之 $$KG = uv = \tfrac{1}{2} GO'.$$

同理若 KG 與 BY 交於 O'' 點,

則 $$KG = \tfrac{1}{2} GO''.$$

但 KG 爲二定點, 故 O' 與 O'' 一致, 卽與垂心 O 一致.

由是 O, N, G, K 在一直線上, 而 $KN = NO$.

(c) 因 N 爲 KO 之中點, 而 Q 爲 BO 之中點,

$$\therefore NQ = \tfrac{1}{2} KB.$$

卽 XYZ 圓之半徑爲 ABC 圓之半徑之半.

167. 證法研究——三點同在一直線上之證法 證三點同在一直線上, 大都用下列二法:

一. 連結相鄰二點, 得二直線, 再過其中央一點作一直線, 而證此直線與前二直線同方向迴轉, 所成之兩角相等, 卽應用對頂角相等之理, 如(圖129)左圖, 證 A, B, C 在一直線上, 證 $\angle EBA = \angle FBC$ 可也.

二. 或連結相鄰二點作二直線, 再過其中央之一點作一直線, 而證此直線與前二直線所夾之兩角互爲補角, 如右圖, 證 A, B, C 在一直線上, 證 $\angle PBA + \angle PBC = 2\angle R$. 可也.

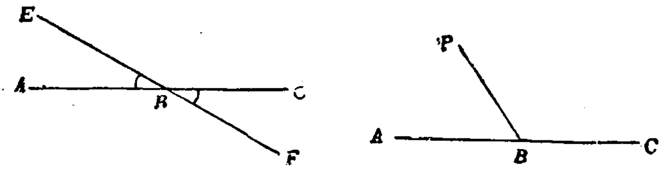


圖 129.

168. 證法研究——四點同在一圓周上之證法　欲證四點同在一圓周上,證明下列三項之一已足:

一. 設四點為A,B,C,D;而A,C在B,D連結線之兩側,則證$\angle ABC+\angle ADC=2\angle R$.或$\angle BAD+\angle BCD=2\angle R$

二　若A,C在BD之同側,則證$\angle ABC=\angle ADC$,或$\angle BAD=\angle BCD$.

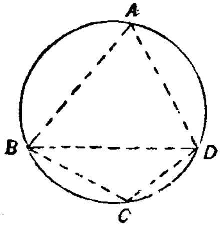


圖 130.

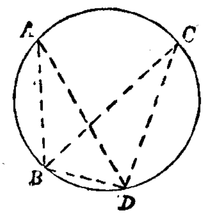


圖 131.

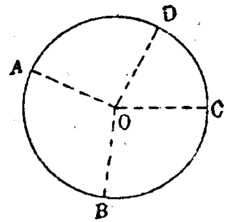


圖 132.

三. 證四點至一點O之距離均相等.

169. 證法研究——解析法　題較易者普通用綜合法證明,較難者則用綜合法往往不能,通常均用解析法.如吾人欲證一定理A,常先假定欲證之定理A為眞,由是推

求定理A成立之必要而且充分之條件*B;又認B爲眞,繼續推求B成立時之必要而且充分之條件C,由是逐漸推論,至得一已知之定理而止,逆推而上,則定理A亦得其證明矣.此方法曰解析法,解析法爲將欲證之定理連續以他定理置換而得,故亦曰連續置換法.

下例卽爲解析法證明之一例:

170. **例題** 由兩兩相交之四直線AB, BC, CD及DA而成之四個三角形BCE, CDF, ADE及ABF之外接圓會於一點†.

證 若$\triangle ABF$及$\triangle ADE$之外接圓相交,則各圓必互有一部分在他圓之內,現因D爲AF上之點,B爲AE上之點,故知此二圓必相交.設其又一點爲M,則

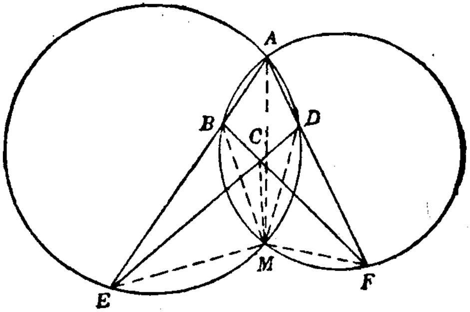


圖 133.

本題尙須證明者爲$\triangle BCE$及$\triangle CDF$之二外接圓亦過M點也.連結M和A, B, C, D, E及F各點,若$\triangle CDF$之外接圓過

*必要而且充分之條件者,卽此條件爲必不可少之條件,而有此條件已足,毋須再加別種條件之意也.

†此定理稱爲 Miquel 定理.

M 點,則 $\angle CDM$ 及 $\angle CFM$ 爲同對 CM 弧之圓周角,應相等,即 $\angle CDM = \angle CFM$.

欲證此兩角相等,在 ADE 圓中,知 $\angle EDM = \angle EAM$.

又在 ABF 圓中,知 $\angle BFM = \angle BAM$.

$$\therefore \angle CDM = \angle CFM.$$

由是逆推而上,知 $\triangle CDF$ 之外接圓必過 M 點.

同理 $\triangle BCE$ 之外接圓亦過 M 點.

故四個三角形 BCE, CDF, ADE 及 ABF 之外接圓會於一點.

習　　題

1.　$\triangle ABC$ 之頂角 A 內之傍切圓,自 A 角一邊上之切點至 A 點間之距離,必適等於三角形之半周.(圖 134)

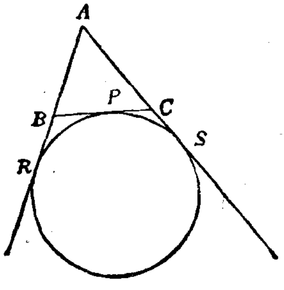


圖　134.

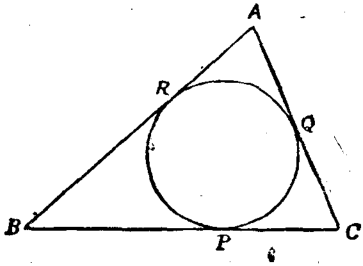


圖　135.

2　$\triangle ABC$ 之內切圓切 BC 邊於 P,則 PC 等於三角形

之半周減去 AB.(圖 135)

3. 通過相切二圓周之切點,作二割線,其被截於二割線間二弧所對之二弦,必互爲平行線.

4. 二平行線與一圓周相交,則被截於二平行線間之弧必相等.

5. 由三角形之頂點至底邊作垂線,並延長之與外接圓相交,則交點與垂心之距離必適爲垂足所平分.

6. AB, CD 爲 O 圓之平行二弦,AB 之中點爲 M,連結 DM 與圓周相交於 E,則中心 O 與 M, E, C 四點全在一圓周上.

7. 圓之內接四邊形,每相對兩邊延長之相交成兩角,則此二角之平分線,互相垂直.

8. 三角形 ABC 之二邊 AB, AC 與內切圓 O 相切之點爲 D 及 E,連結 AO 與 O 圓相交於 M 及 M' 二點,則 M 及 M' 必爲三角形 ADE 之內心及傍心.

9. 由直角三角形 ABC 直角之頂點 A,作斜邊 BC 之垂線 AD,則 AD 必等於 ABC, ABD 及 ACD 各三角形內接圓半徑之和.

10. 三角形一內角及其外角之角平分線,與外接圓之交點有下列諸性質:

(a) 此二點爲底邊所對二弧之中點,

(b) 此二點之連結線爲平分底邊之一直徑,

(c) 此二點之一至此頂角之二邊所作之二垂線之垂足至頂點之距離,爲二邊之半和或半差.

11. 三角形外接圓周一點之 Simson 線必平分此點與三角形垂心之連結線.

12. 圓之內接四邊形之對角線若互相垂直,則自圓心至一邊之距離等於對邊之半.

(註) 應用 Brahmegupta 定理.

13. 四邊形內接於圓,而又外切於他圓,則其對角線互相垂直.

14. 諸三角形之垂心及外接圓公共者,則其九點圓亦公共.

15. 圓之內接四邊形之對角線,若互相垂直,則自交點至各邊所引垂線之垂足及四邊之中點,八點共在一圓周上.

16. 二圓周相交於 A 及 B 二點, CAD 爲過 A 而止於二圓周之割線, CE, DE 爲過 C 及 D 所引二圓之切線,若其相交之點爲 E, 則 B, C, D, E 在一圓周上.

第十三章

直線圖形之作圖

171. **作圖法之意義** 幾何學中之作圖法,與普通作圖不同.普通作圖,但求作圖之便捷,得任用各種儀器;除用尺畫直線、用兩脚規作圓外,恆用三角板以作垂線,半圓儀以量角;總之,均在求作圖之簡易,無待乎嚴整之根據也.幾何學中之作圖須受拘束,即作圖用具必有限制,作圖方法必有根據,而作成之圖形尙須證明其是否卽爲所求之圖形也.證明之後,尙須將作圖方法詳論,如"合於所設條件之圖形,是否僅此作成之圖形?"、"此種作法有無不可能之時?"等問題,常詳細討論,附於證明之後,如是則作圖題始得稱爲完全解決.

故作圖題解法之程序有三:(1)作圖,(2)證明,(3)討論.

【注意】 較複雜之問題,討論甚繁,初學者不易領會,故本書有時將討論之一部分略去,免煩瑣也.

172. **作圖之公法** 在初等幾何學中,作圖所用之工具僅一畫直線之尺與一作圓之兩脚規,蓋初等幾何學中,作一圖與證明一定理無異.最先證定理時必須根據已知之定義與公理,開始作圖之時,亦必須根據作圖之公法

也.作圖公法凡三:

一. 自任意一點得引一直線至他任意一點(用尺).

二. 有限直線之兩端得任意延長之(用尺).

三. 以任意一點為中心,以任意之長為半徑,得畫一圓(用兩脚規).

173. **作圖題 1** 過直線 BC 上之一點 B,作一直線,令與 BC 相交所成之角等於已知之 A 角.

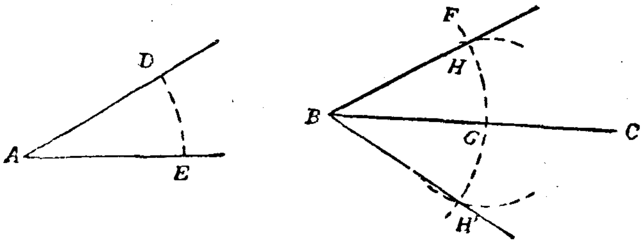


圖 136.

作圖 以 A 為中心,以任意之長為半徑,畫一圓弧與 $\angle A$ 之兩邊交於 D 及 E 二點.又以同長為半徑,以 B 為中心畫一圓弧,與 BC 交於 G 點.又取 DE 弦之長為半徑,以 G 為中心畫一圓弧與 $\overset{\frown}{FG}$ 交於 H 點.連結 BH,則 BH 即為所求之直線.

證 因 A 圓與 B 圓為等圓,而 $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{HG}$,

$$\therefore \quad \angle DAE=\angle HBG.$$

故 BH 為合於所設條件之一直線.

討論 上題作圖時,以 B 爲中心及以 G 爲中心所畫之二圓,其交點必有二,故 BC 之他側尙有一點 H' 爲兩圓之交點,由是連結 BH', BH' 亦爲合於條件之直線.

【注意】 作圖時,所求之線常畫實線表示,如非所求之線,則恆以虛線(卽點線)記之,以示區別.

174. **三角形之作圖** 前論兩三角形全等之時,三角形中之三角三邊六要素中必須有三個兩兩相等,且其中至少有一爲邊,故三角形之決定,須已知適當之三要素也.三角形之作圖,由其已知條件之不同,其作法因之而異,今就下列四種條件,順次述之:

一. 已知兩角及夾邊,

二. 已知兩邊及夾角,

三. 已知兩邊及一邊所對之角,

四. 已知三邊.

175. **作圖題 2.** 已知三角形之二角 A 及 B, 及其夾邊 c, 求作三角形.

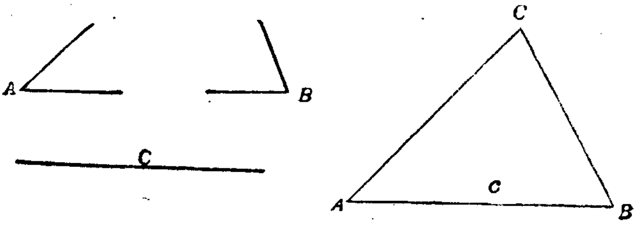


圖 137.

作圖　引任意直線AB，以直線之一端A爲中心，c爲半徑作一圓，截AB於B．自A作AC直線，使$\angle CAB=\angle A$．自B作BC直線，使$\angle BCA=\angle B$．設AC，BC兩直線之交點爲C，則$\triangle ABC$即爲所求之三角形．

證明　從略．

討論　此作圖題在可能時之必要而且充分之條件爲$\angle A+\angle B<2\angle R.$，否則無解．

176. 作圖題 3.　已知兩邊之長爲a，b，夾角爲C，求作三角形．

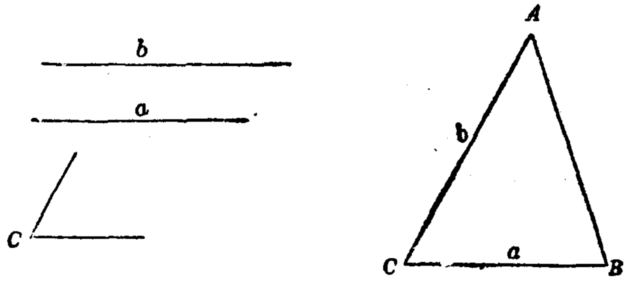


圖 138.

作圖　作等於a之直線CB，自C引直線CA，使與CB所成之ACB角等於B角．以C爲中心，以b爲半徑，畫一圓與CA交於A，連結AB，則CBA即爲所求之三角形．

證及討論　均甚易，學者試自爲之．

177. 作圖題 4.　已知兩邊a，b，及一邊之對角B，求

作三角形.

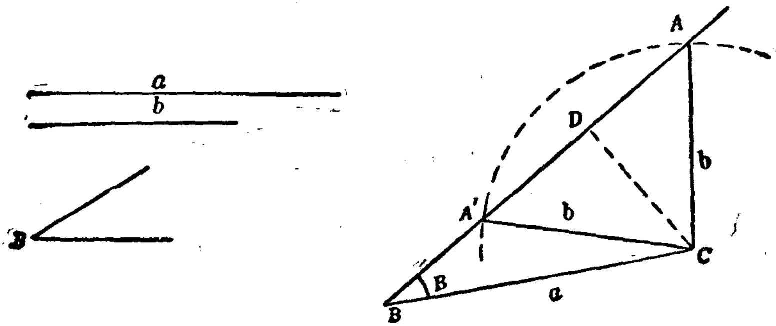


圖 139.

作圖 引等於 a 之直線 BC, 過 B 引 AB 直線,使與 BC 所成之角,等於 B 角.

次以 C 爲中心,以 b 之長爲半徑,畫一圓,若此圓與 BA 之交點爲 A, 連結 AC, 則 $\triangle BAC$ 即爲所求之三角形.

證明 略.

討論 此問題有可能及不可能之時,分條述之如下:

I. B 角爲銳角時 解法之重要處,在 C 爲中心所畫之圓周與 BA 相交,故 b 之長至少須與自 C 至 BA 所作之垂線 CD 相等(否則無解).若邊 b 與 CD 相等,則圓與 BA 切於 D 點,由是得惟一之解答,即直角三角形 BCD 是也.若 b 邊大於 CD 而小於 a 邊,則圓周與 BA 相交於二點 A 及 A', 由是得 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'BC$ 二解.最後,若 b 邊大於 a 邊,則交點

A'在BC之他方，$\triangle A'BC$之B角爲所設B角之補角，不合於所設之條件，故僅一解，卽$\triangle ABC$是也。

II. B爲鈍角時　B爲鈍角，則b邊須大於a邊，否則無解．若b大於a，則圓周與BA之另一交點A'在BC之他方，不合所求，故僅得一解$\triangle ABC$.

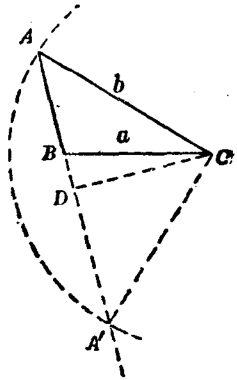


圖　140.

III. B角爲直角時　與(II)相同，須$b>a$，始有一解．綜合上述，可得表如下：

$$\angle B<90^\circ\text{而}\begin{cases} b<CD & \text{無解}, \\ b=CD & \text{一解}, \\ a>b>CD & \text{二解}, \\ b=a\text{ 或 }b>a & \text{一解}. \end{cases}$$

$$\angle B\geqq 90^\circ\text{而}\begin{cases} b<a\text{ 或 }b=a & \text{無解}, \\ b>a & \text{一解}. \end{cases}$$

178.　**作圖題 5.**　已知三邊a, b及c，求作三角形.

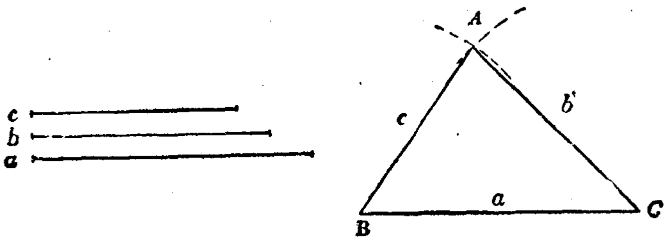


圖　141.

作圖 引直線BC,等於三邊中之最大邊a,以B爲中心,以c之長爲半徑作一圓,又以C爲中心,以b之長爲半徑作一圓,設此兩圓相交於A;連結AB, AC,則$\triangle ABC$卽爲所求之三角形.

證明 略.

討論 作圖之重要處在二圓周之相交與否,故二圓之半徑b及c須合於下式:$b-c<a<b+c$,此卽三角形三邊間之關係,此關係成立則有解,否則無解.

179. 作圖題 8. 過直線BC外之一點A,引一直線與BC平行.

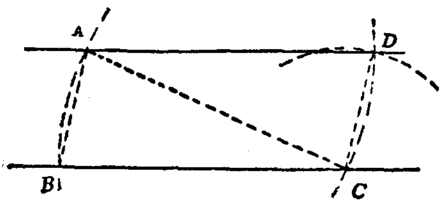


圖 142.

作圖 以A爲中心,以任意之長爲半徑,畫一圓弧DC與BC交於C點;以C爲中心,以同半徑畫一圓弧,則必過A點,且與BC直線交於B點;又以C爲中心,AB之長爲半徑畫一圓,與$\widehat{DC}$相交於D,連結AD,卽得所求之平行線.

證明 連結弦AB, DC,則於

$$\triangle ABC \text{ 及 } \triangle ADC,$$

$AB=DC$, $AD=BC$, AC 公共,

$$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle ADC,$$

$$\therefore \quad \angle ACB = \angle DAC.$$

$$\therefore \quad AD // BC.$$

180. 作圖題 7. 過一直線 AB 之中點 E, 作此直線之垂線.

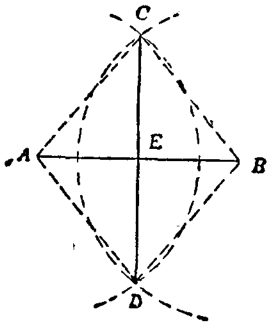


圖 143.

作圖 以 A 爲中心,比 AE 稍大之長爲半徑畫一圓,又以 B 爲中心,以同半徑畫一圓,此二圓必相交,設其交點爲 C 及 D, 連結 CD, 則 CD 卽所求之直線.

證明 連結 AD, DB, BC 及 CA, 則

$AD=DB=BC=CA$, 故四邊形 $ABCD$ 爲菱形.

故 $$AB \perp CD.$$

討論 此問題包括下列二問題:

I. 二等分一線分.

II. 以一定線分爲直徑畫一圓.

181. 作圖題 8. 平分所設之角.

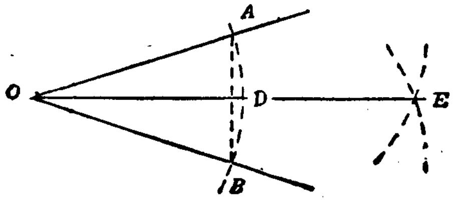


圖 144.

作圖 令 AOB 爲所設之角, O 爲其頂點,以 O 爲中心,任意之長爲半徑,作一圓與兩邊交於 A 及 B 二點,又各以 A, B 爲中心,以大於 AB 之半之長爲半徑,各作一等圓,設兩圓周相交於 E, 連結 OE, 則 OE 卽爲 $\angle AOB$ 之角平分線.

證及討論 均從略.

182. 作圖題 9. 平分所設之弧.

作圖 I. 設 $\widehat{AB}$ 爲所設之弧,不知其中心,連結 AB 弦,作 AB 之垂直平分線與 $\widehat{AB}$ 相交於 D, 此 D 點平分 AB 弧(見上問題之圖).

II. 如已知其中心爲 O, 則作 $\angle AOB$ 之角平分線 OE, 此 OE 必平分 AB 弧.

證明 此題證明甚易,學者試自爲之.

183. 作圖題 10. 過不在一直線上之三點畫圓.

作圖 設三點為 A, B, C. 連結 AB, BC, 分別作 AB, BC 之垂直平分線,設此二垂直平分線之交點為 O. 以 O 為中心,以 O 至三點中任一點之距離為半徑作一圓,則此圓必通過他二點.

證 由第八章定理42,直接推知.

184. **作圖題 11.** 過一點 C, 作直線 AB 之垂線.

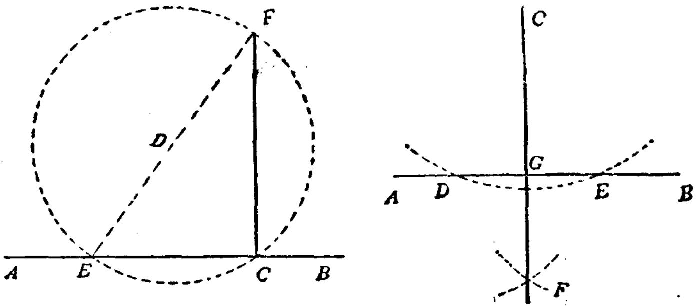


圖 145.

作圖 I. C 在 AB 之上,於 AB 直線外任取一點 D, 以 D 為中心, DC 之距離為半徑,作一圓與 AB 再交於一點 E, 連結 DE, 並延長之與圓周相交於 F, 連結 FC, 則 FC 即所求之垂線.

II. C 點在 AB 之外,以 C 為圓心,相當之長為半徑,畫一圓截 AB 於 D, E 二點.又以 D 及 E 為中心,大於 DE 之半之長為半徑,各作一圓,設此兩圓之一交點為 F. 連結 CF, 則 CF 即為所求之垂線.

證 **作法** I. 因 $\overset{\frown}{ECF}$ 爲半圓周,故 $\angle ECF$ 爲直角.

作法 II. 連結 DF, EF,並設 AB, CF 之交點爲 G,則 $\triangle DFG$ 及 $\triangle EFG$ 之三邊各相等,故 $\angle FGD=\angle FGE$.

$$\therefore\ CF\perp AB.$$

【注意】 上述作法II, C 點在 AB 線上時,亦適用,若 C 在 AB 線之一端,則以作法I爲佳.

185. **作圖題 12.** 平分 AB, CD 二直線之交角,但不得延長 AB, C 使之相交.

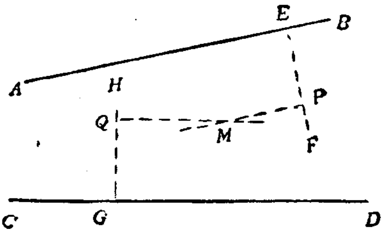


圖 146.

作圖 自 AB 上之任一點 E,作垂線 EF; 自 CD 上之任一點 G,作垂線 GH. 於 EF 及 GH 上各取一點 P 及 Q,使 $EP=GQ$. 自 P 作 AB 之平行線 PM,自 Q 作 CD 之平行線 QM,設 QM 與 PM 之交點爲 M. 又於 EF, GH 上再各取一點 P' 及 Q',使 $EP'=GQ'$. 過 P' 及 Q' 各引 AB, CD 之平行線相交於 M',連結 M, M',則 MM' 即爲所求之直線.

證 因 MP 線與 AB 線之距離等於 EP; MQ 線與 CD 線

之距離等於GQ(即EP),故MP,QM之交點M距AB,CD二直線之距離相等.同理M'點距AB,CD之距離亦相等,故M,M'皆在AB,CD交角之平分線上,則MM'即為所求之直線.

186. 證法研究——利用軌跡相交以解作圖題之法 平面幾何學中之圖形,大都由直線及圓周組合而成,故一切作圖題大都皆由畫直線及圓周若干次而得.但畫直線須知直線上之二點,畫圓周須知中心及圓周上之一點,故所求圖形中重要之若干點,如已求得,則此圖形即不難作.欲求圖形中重要之點,常利用軌跡之相交,如吾人欲求之一點,為合乎A,B,C,D……等各條件之點,則任意省去其中之一條件,設為A,先求合於其餘B,C,D……各條件之點,其數無限,成一軌跡,設此軌跡為圖形X.又於A,B,C,D……各要件中省去他任一要件B,以求合於A,C,D……諸條件之點之軌跡,設此軌跡為圖形Y.由是圖形X與Y之交點即為合於A,B,C,D……諸條件之點矣.如上問題為求AB,CD交角之平分線,即求與AB,CD等距離之點之軌跡;但二點決定一直線,故知與AB,CD等距離之二點,則問題即得解決.M點為合於'距AB之距離等於EP,距CD之距離等於GQ'之點,若省去其一條件,先求'距AB之距離等於EP'之點之軌跡PM,又省去其他一條件,求得'距CD之距離等於GQ'之點之軌跡QM,則QM與PM之交點M,即為需要之點.其他M'點亦同此理求得,於是所求之圖形完成矣.軌跡

相交之法,在作圖題中,用處甚廣,如作圖題10亦一例也.

187. **例題 1.** 設有一點 P, 及二平行直線 AB, CD. 求過 P 作一直線截 AB, CD, 使 AB, CD 間所夾之部分等於定長 l.

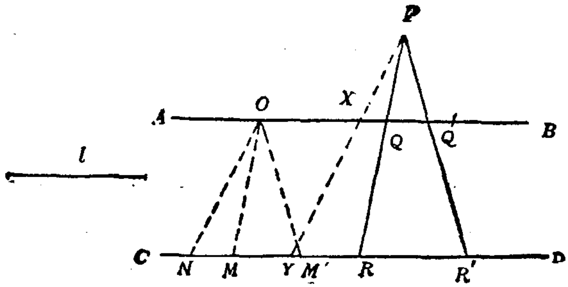


圖 147.

作圖 於 AB 上任取一點 O, 以 O 爲中心,以 l 爲半徑作一圓,與 CD 交於 M, 連結 OM. 又過 P 作 OM 之平行線 PQR, 此線即爲所求之直線.又設 O 圓與 CD 之又一交點爲 M', 則平行 OM' 之 $PQ'R'$ 直線亦爲所求之直線.

證 設 PQR 與 AD, CD 交於 Q, R 二點, $PQ'R'$ 與 AB, CD 交與 Q', R' 二點,則 $OMRQ$ 爲平行四邊形,故 $QR=OM=l$.

又 $OM'R'Q'$ 亦爲平行四邊形,故 $Q'R'=OM'=l$.

過一點 O 在 CD 上僅能作相等之二斜線,今過 P 作他直線 PXY, 又過 O 至 CD 引 PXY 之平行線 ON, ON 必不等於 OM, 即不等於 l, 故除 PQR 及 $PQ'R'$ 外,無其他合於條件

之直線也.

討論 命 AB, CD 間之距離為 d.

若 $l<d$, 則此題無解.

若 $l=d$, 則 PQR 與 $PQ'R'$ 相合, 得一解為自 P 至 AB, CD 之公共垂線.

若 $l>d$, 則有二解.

又 P 在 AB, CD 之外, 或 AB, CD 之間, 作圖法皆同.

188. **證法研究——應用解析法之作圖方法** 解作圖題時,往往假想所求之圖形已經作得,考察未知量與已知量間之關係,於必要時並作若干補助線以研究之.用研究之結果以定作圖之方法,旣得圖形,再事證明,故應用解析法作圖之步驟凡四:

一. 研究所求圖形成立之要件,卽將問題解析之.

二. 綜合解析所得之結果,以定作圖之方法.

三. 證明所作之圖形為所求之圖形.

四. 討論問題之種種關係.

189. **例題 2.** 設有二定直線 AB, CD 及其相交角內之一定點 P, 求作一三角形與所設之三角形 pqr 之各角相等,而其一頂點為 P, 其他二頂點各在 AB, CD 二直線上.

解析 假設所求之圖形為 $\triangle PQR$, Q 在 AB 上, R 在 CD 上, $\angle QPR=\angle p$, $\angle PQR=\angle q$, 而 $\angle PRQ=\angle r$.

自 P 引 QR, AB, CD 之垂線,設其垂足各為 L, M, N. 因 P,

M, Q, L 四點在一圓周上，故 $\angle PQL = \angle PML$.

$$\therefore \quad \angle PML = \angle q.$$

仿此得證 $\qquad \angle PNL = \angle r.$

由是可知 L 之位置，所求三角形之一邊 RQ 爲過 L 而垂直於 PL 之直線，故得作圖如下：

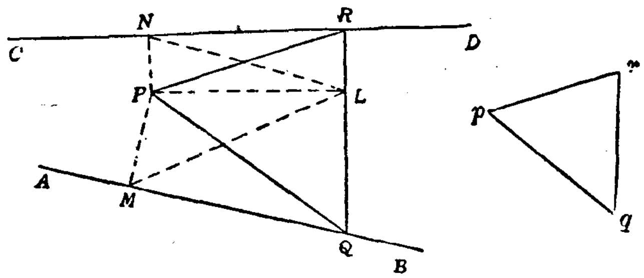


圖 148.

作圖 自 P 作 AB, CD 之垂線 PM, PN，過 M 在 MP 之兩側各作直線，令其與 MP 所成之角等於 $\angle q$. 過 N 點在 NP 之兩側各作直線，令其與 NP 所成之角等於 $\angle r$. 設此二組直線之交點爲 L 及 L'，過 L 及 L' 各作 PL 及 PL' 之垂線 QR 及 $Q'R'$，則 $\triangle PQR$ 及 $\triangle PQ'R'$，卽爲所求之三角形（上圖 P 點之左側尚可作一 $PQ'R'$ 三角形）.

證 由上之作圖，知過 P, L, Q, M 四點可作一圓，故

$$\angle PQR = \angle PML = \angle q.$$

同理 $\qquad \angle PRQ = \angle r,$

因之　　$\angle QPR=\angle p.$

故　$\triangle PQR$為所求之圖形.

同理得證　$\triangle PQ'R'$亦為所求之圖形.

討論　上作圖無論AB, CD及P點之位置若何,恆有二解;本題為簡單計,僅取P點在AB, CD交角內而作圖,其餘研究,學者試自為之.

習　題

1. 在三角形ABC中引一直線PQ,平行底邊AB,與其他二邊相交於P及Q,使PQ等於$AP+BQ$.

2. 在三角形之二邊間引一直線平行於第三邊,使其夾於二邊間之部分等於定長.

3. 已知對角線之長,求作一正方形.

4. P為$\angle AOB$角內之一點,求過P引一直線,使其夾於二邊之部分為P所平分.

5. 求作三角形,合於下列條件之一:

    (a) 已知二邊及一中線,

    (b) 已知一邊及二中線,

    (c) 已知三中線,

    (d) 已知底邊及一底角與其他二邊之和,

    (e) 已知底邊及一底角與其他二邊之差.

6. 平分直角為三等分.

7. 已知一邊及二對角線,求作平行四邊形.

8. 已知矩形之一邊及其對角線之交角,求作此矩形.

9. 有二直線及一點,求另一點,使其與二直線之距離相等,而與所設點之距離等於定長.

10. 已知三角形之三高,求作此三角形.

11. 自圓外一點 P,引割線 PAB,與所設圓周交於 A, B,使 $PB=2PA$.

12. 過會於一點之三直線 AB, CD, EF 中一直線 AB 上之一點 P 作一直線,令其夾於 CD, EF 間之部分,爲 P 所平分.

13. 求作三角形,使合於下列諸條件之一:

(a) 已知三個高之垂足之位置,

(b) 已知一角,一個高及其周之長,

(c) 已知二角及二邊之和,

(d) 已知一角及此角之角平分線之長及一個高,

(e) 已知各角及一個高.

14. 如下圖,CD 曲線爲一鐵路,A, B 二點表二市鎮,求

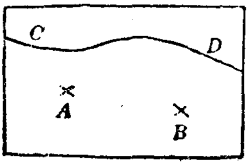


圖 149.

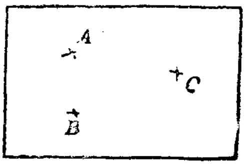


圖 150.

於鐵路建一車站,使距A,B二市鎮之距離相等.(圖 149)

15. A,B,C表示三鎮之位置,今欲建築一學校,使其離A,B,C三鎮之距離均相等,求此學校應在之地點.(圖 150)

第十四章

切線及圓之作圖

190. **作圖題 13.** 過一點A作所設圓周之切線.

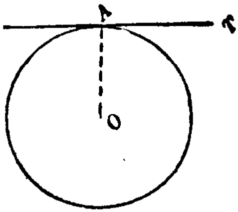


圖 151.

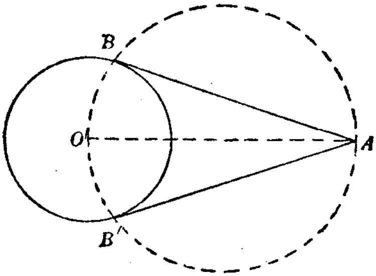


圖 152.

作圖 I. A在所設圓周上 設圓之中心為O,連結OA,過A作OA之垂線AT,則AT卽為所求之切線.

II. A在所設圓周外 連結OA,以OA為直徑作圓,與O圓周相交於B及B'二點,則AB及AB',卽為所求之切線.

III. A在所設圓周內 作圖不能.

證 從略.

191. **作圖題 14.** 作所設三角形ABC之內切圓及傍切圓.

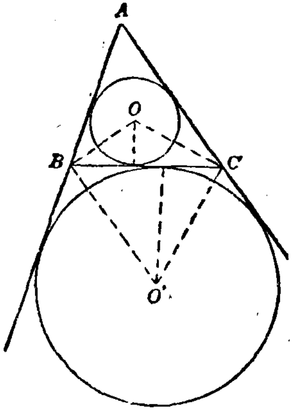


圖 153.

作圖 作三角形二內角之角平分線,以此二線之交點爲中心,以此點至一邊之距離爲半徑作圓,即爲三角形之內切圓.

欲作三角形一角$\angle A$內之傍切圓,則以其他二角$\angle B$, $\angle C$之外角平分線之交點爲中心,以此點至任一邊之距離爲半徑,作一圓,則此圓卽$\angle A$內三角形之傍切圓.

192. **作圖題 15.** 於定直線AB上,作一弓形,令其所含之角等於定角C.

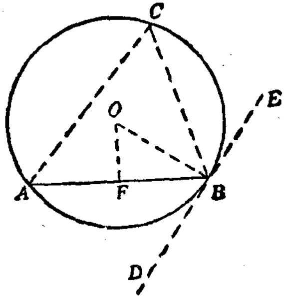


圖 154.

解析 設ACB為所求之弓形,O為其中心,DE為在B點所引之切線.連結OB,並作OF垂直於AB,則$\angle ABD = \angle ACB$,得作圖法如下:

作圖 過B作DE,使與AB所成之角等於所設之C角.自B作DE之垂線與AB之垂直平分線相交於O.以O為中心,OB之長為半徑所作之圓周之一部分$\widehat{ACB}$,即為所求弓形之弧.

證及討論 從略.

193. **作圖題 16.** 引二圓O及O'之公切線*.

I. 外公切線(即O及O'兩圓在公切線之同側者).

解析 假定AA'為所求之切線,作半徑$OA, O'A'$,設$OA > O'A'$.自O'作AA'之平行線,與OA交於C.因$OA \perp AA'$,

* 公切線者即公有之切線也.

故$OC \perp O'C$.由是$O'C$為以O為中心,以OC為半徑之圓之切線.因$A'O'CA$為矩形,故$OC = OA - CA = OA - O'A'$,由是得作圖法如下:

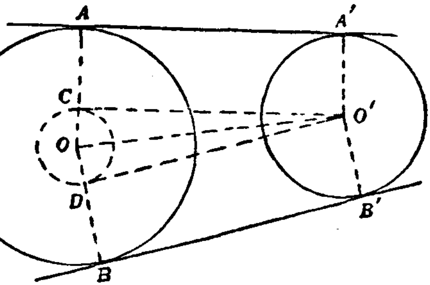


圖 155.

作圖 以O為中心,以二圓半徑之差為半徑,畫一圓.過O'點作此圓之切線$O'C$,設C為其切點,連結OC,延長之與圓周交於A點.自O'引半徑$O'A$,平行於OA,則AA'卽為所求之切線.

II. 內公切線(卽所設兩圓在切線之兩側者).

解析 假定EE'為所求之切線,自O'引EE'之平行線$O'G$,與OE之延長線相交於G.因$OG \perp EE'$,故$O'G$為以O為中心,以CG為半徑之圓之切線.因$EE'O'G$為矩形,故$OG = OE + EG = OE + E'O'$,由是得作圖法如下:

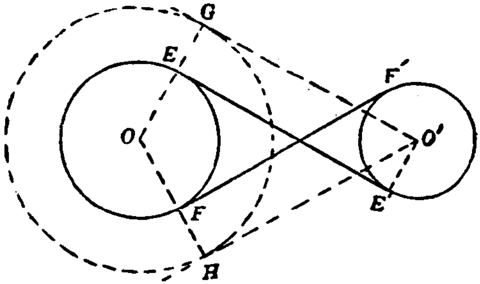


圖 156.

作圖 以O爲中心,以二圓半徑之和爲半徑作一圓,自O'作此圓之切線$O'G$,連結OG與O圓相交於E.又自O'作半徑$O'E'$平行OG,則EE'卽爲所求之切線.

證明 略.

討論 本作圖法成立之條件,爲O'點不在補助圓內.在作法I, $OO' \geqq OC$,或$OO' \geqq OA - O'A'$,卽一圓不全

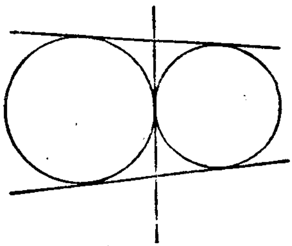


圖 157.

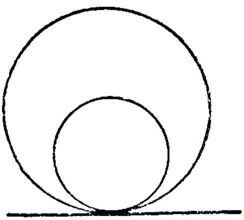


圖 158.

在他圓之內之謂也.若二圓相交,外切,或一圓全在他圓之外,則$OO' > OA - O'A'$.故O'在補助圓外,由作圖題13,得作二切線.若兩圓內切,則$OO' = OA - O'A'$,故O'點在補助圓上.由作圖題13,得作一切線.

在作法II,則須$OO' \geqq OG$,或$OO' \geqq OE + E'O'$,卽一圓全在他圓之外,或兩圓外切之時,始有解也.如一圓全在他圓之外,則$OO' > OE + E'O'$,由是O'點在補助圓周外,故得二解.若二圓外切,則$OO' = OE + E'O'$,由是O'在補助圓周上,僅得一解.

綜合上述結果,列表如下:

一.一圓全在他圓之外時——有二外公切線及二內公切線.

二.二圓相交時——有二外公切線.

三.二圓外切時——有二外公切線及一內公切線.

四.二圓內切時——有一外公切線.

五.一圓全在他圓內時——無公切線.

194. **例題 1.** 過定直線AB外之一點P,求作圓與此直線切於一定點Q.

解析 設O爲所求之圓之中心,則$OQ \perp AB$, $\angle OPQ = \angle OQP$,故得作圖法如下:

作圖 過Q作AB之垂線OQ,連結PQ,作PO直線令與PQ所成之角等於$\angle PQO$,與OQ相交於O.以O爲中心,以OQ

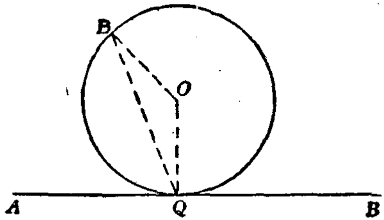


圖 159.

為半徑作圓,卽所求之圓也.

195. **例題 2.** 於 AB 定直線上求一點 D,自 D 引 O,C 二定圓之切線,使與 AB 所成之角相等.

作圖 以 AB 為軸,作 C 圓之對稱圖形 C' 圓,又作 O 圓與 C' 圓之公切線 EF',與 AB 相交於 D. 自 D 引 C 圓之切線

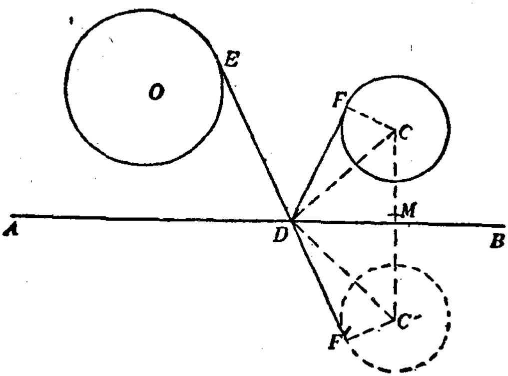


圖 160.

DF,則DE及DF即所求之切線.

證 令C圓與C'圓上之切點為F及F',連結DC, DC',又連結CC'與AB交於M,則$\triangle DCM \cong DC'M$.

$$\therefore DC = DC',$$

又 $$\triangle DFC \cong \triangle DF'C',$$

$$\therefore \angle FDC = \angle F'DC'.$$

又 $$\angle CDM = \angle C'DM.$$

$$\therefore \angle FDM = \angle F'DM,$$

然 $$\angle F'DM = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle FDM = \angle ADE,$$

故 DE, DF為所求之切線.

196. 證法研究——應用對稱圖形以作圖 解作圖題時,往往將圖形中之一部分關於一點或一直線,求其對稱圖形,即可得簡捷之法,如上例是也.

習 題

1. 已知內接圓之半徑,求作一正三角形.
2. 已知半徑為r及下列各條件之一,求作圓:

   (a) 切相交二直線AB及CD,

   (b) 切所設直線AB及所設圓O,

   (c) 通過一所設點P切所設圓O.
3. 求作合於下列條件之圓:

(a) 切所設二平行線及通過所設點 P,

(b) 切三所設直線,其中有二直線平行者,

(c) 切一圓於一所設點 Q,又過一點 P.

4. 求作切二所設直線,且切於其中一直線上之一點 P 之圓.

5. 於所設弓形中,求作內切圓.

6. 求於所設圓中作相等之三圓,令其彼此相切,且切所設之圓.

7. 在所設圓周外求一點,令從此點向圓周所引二切線之交角等於所設角.

8. 以所設半徑作一圓,令其中心在一所設圓周上,且切於一所設直線.

9. 作所設二圓周之公共割線,令其夾於各圓周間之弦,各等於所設之長.

10. 以所設三點為中心,作兩兩相切之三圓.

11. P 為 O 圓內之一定點,在此圓周內求一點 Q,令 $\angle PQO$ 為極大.

第十五章

線分之比與比例*

197. **定理 73.** 過二定點之無限直線上,必有二點,且只有二點,至二定點距離之比等於定值.

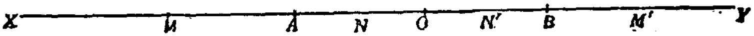


圖 161.

假設 A, B 爲直線 XY 上之二定點,m 爲定值.

求證 XY 上必有二點 M, N 使 $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{NA}{NB}=m$. 而 M, N 之外,無此種點.

證 設 XY 上有一動點,自左方向右方移動,今研究此動點 P 至 A, B 二定點距離之比有若何之變化.

若動點 P 在 A 之左方之任意位置 M 處,則

$$\frac{PA}{PB}=\frac{PB-AB}{PB}=1-\frac{AB}{PB}.$$

P 點如在 A 之左方離 A 甚遠,則分母 PB 甚大,因而分數 $\dfrac{AB}{PB}$ 甚小,故 $\dfrac{PA}{PB}$ 甚近於 1. 動點離 A 愈近,分母 PB 減小

---

* 見附錄.

而漸近於AB,分數$\frac{AB}{PB}$增加與1相近,則$\frac{PA}{PB}$甚近於零.故動點自A之左方甚遠處逐漸接近A點,則比之值自1減小至零.

動點如經過A點向右逐漸移動,而在B點之左,則$\frac{PA}{PB}$之分子增加,分母減小,故比值逐漸增加.若動點在AB之中點O處,則其比等於1.若動點近於B,則PA近於AB,而PB近於零,故$\frac{PA}{PB}$增至甚大之數,故動點自A至B移動,則比值自O逐漸增加,經過任何之數*.

最後動點過B,向右方移動,則因

$$\frac{PA}{PB}=\frac{PB+AB}{PB}=1+\frac{AB}{PB}.$$

而比$\frac{AB}{PB}$漸次減小至零,故比$\frac{PA}{PB}$漸次減小與1相近,由是知動點在B之右方移動,比自甚大之數,漸次減小至1.

從此結果,可知動點P在O之左方,比$\frac{PA}{PB}$有二回小於1.在O點之右方有二回大於1.故XY上必有二點M,N使$\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=m$,且以二點爲限.

系 1. 上定理之二點M及N必在O點之同傍.

系 2. 若上定理之定值m小於1,則二點在O之左方,如圖中M,N點之位置.若m大於1,則二點在O之右方,如圖中M',N'點之位置.

---

* 本書之量皆指正量,數皆指正數.

198. **定義 66** 若 M 點在 AB 線分之間,分 AB 為 MA, MB 二線分,則稱 M 點為內分 AB 之點,若 M 點在 AB 線分之外,而分 AB 為 MA, MB 二線分,則稱 M 為外分 AB 之點.

AB 線分中之一點 M, 分 AB 線分為二線分,為日常所知之事實,今將分字擴張其意義,卽 M 在 AB 之外,亦名之曰分,為避免混同起見,名普通之分曰內分,名分點在外之分曰外分.

199. **定理 74.** 平行於三角形一邊之直線,截其餘二邊所得之線分成比例.其逆定理亦成立.

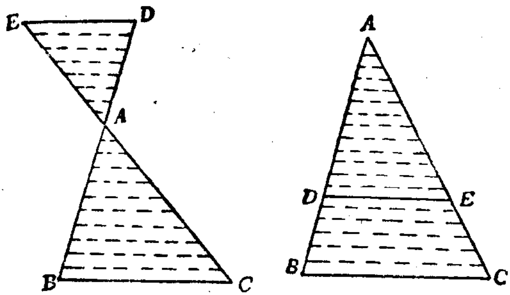


圖 162.

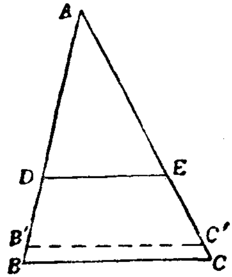


圖 163.

假設 三角形 ABC, DE 為平行於 BC 之直線,與 AB, AC 或其延長線交於 D 及 E 二點.

求證 $$AD : DB = AE : EC.$$

證 I. 若 AD 與 DB 為可通約之量,而 m 為其公約量*,

---

* 見附錄.

設 AD 適爲 m 之 a 倍，DB 適爲 m 之 b 倍，則 $AD:DB=a:b$. 以公約量 m 分 AD 爲 a 等分，DB 爲 b 等分，過其分點各作 BC 之平行線，則由 AD 上各分點所作之諸平行線必分 AE 爲 a 等分；由 DB 上之分點所作之諸平行線必分 EC 爲 b 等分，而此各等分均相等，故 $AE:EC=a:b$.

$$\therefore AD:DB=AE:EC.$$

II. 若 AD 與 DB 爲不可通約之量，則任分 AD 爲若干等分，以其一分之長度量 DB. 因 AD, DB 爲不可通約之量，故必有一剩餘 $B'B$，較一分爲小，由是過 B' 引 BC 之平行線 $B'C'$ 與 AC 交於 C'，則 AD, DB' 爲可通約之量，由 I 知

$$AD:DB'=AE:EC';$$

將等分 AD 之數逐漸增加，可使 $B'B$ 之長減至甚小，而 DB' 漸近於 DB，EC' 漸近於 EC，故由 $AD:DB'=AE:EC'$ 可得

$$AD:DB=AE:EC.$$

逆定理 若一直線截三角形二邊所得之線分成比例，則此直線平行第三邊.

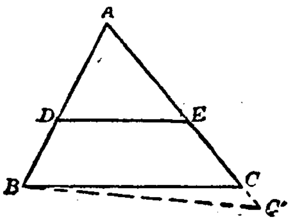


圖 164.

證 過B引BC'直線平行DE,則由本定理得

$$AD:DB=AE:EC',$$

由假設 $$AD:DB=AE:EC.$$

$$\therefore EC=EC'.$$

故 C'與C一致,而$DE\parallel BC$.

系 1. 平行於三角形一邊之直線,截三角形之其餘二邊,則二邊中之一邊與此邊上所截線分之比,等於其他一邊,與其邊上所截對應線分之比,即上定理之圖中,

$$AB:DB=AC:EC$$

及 $$AB:AD=AC:AE.$$

系 2. 平行於三角形一邊之直線,截其他二邊所得對應線分之比,等於此二邊之比.

系 3. 如有一直線截三角形之二邊,使一邊與此邊上所截線分之比,等於他邊與他邊上所截線分之比,則此線與三角形之第三邊平行.

此即系1之逆定理,若$AB:DB=AC:EC$,或$AB:AD=AC:AE$,則$DE\parallel BC$;可仿上定理中證逆定理法證之.

系 4. 平行於三角形一邊之諸平行線,其在他二邊上所截線分之比均相等.

如圖165, $DE\parallel D'E'\parallel D''E''\parallel BC$,

則 $$AD:AE=DD':EE'$$

$$=D'D'':E'E''=D''B:E''C.$$

系 5. 二直線與諸平行線相交，則平行線間所夾之

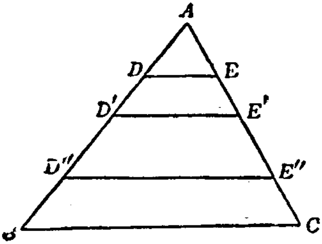


圖 165.

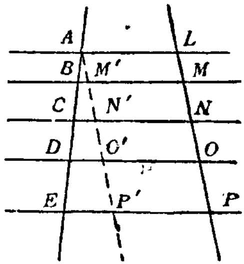


圖 166.

各部分之比相等.

如圖166，自A引LP之平行線，卽可證明.

【注意】上定理中DE截AB，AC二邊之延長線時，證明全同，蓋此時D，E各外分AB，AC也.

200. **定理 75.** 三角形之一角(或其外角)之平分線分對邊所得二線分與其相鄰兩邊成比例.其逆定理亦成立.

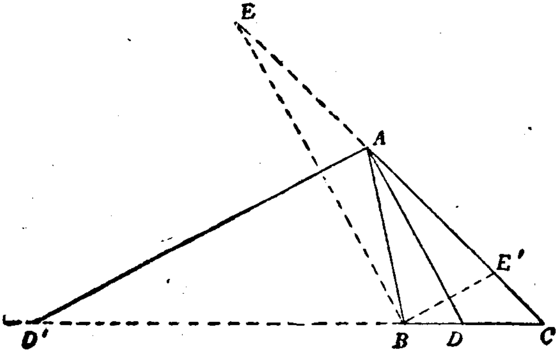


圖 167.

假設　三角形 ABC, AD 爲 $\angle A$ 之平分線, AD' 爲其外角之平分線, 各與 BC 及其延長線交於 D 及 D'.

求證　I.　　$DB : DC = AB : AC.$

II.　　$D'B : D'C = AB : AC.$

證　I. 過 B 引 DA 之平行線 BE 與 CA 之延長線交於 E,

則　　$DB : DC = AE : AC.$ ……………………(1)

因　　$\angle CEB = \angle CAD$, $\angle EBA = \angle DAB$,

而 $\angle CAD = \angle DAB$,

$\therefore \angle CEB = \angle EBA$,　$\therefore AE = AB.$ …………(2)

由 (1) 及 (2) 得 $DB : DC = AB : AC.$

II. 過 B 引 BE' 直線平行於 $D'A$, 與 AC 相交於 E',

則　　$D'B : D'C = AE' : AC.$ ……………………(1)'

因　　$\angle BE'A = \angle D'AE$, $\angle E'BA = D'AB$,

而 $\angle D'AE = \angle D'AB$,

$\therefore \angle BE'A = \angle E'BA$,　$\therefore AB = AE'.$ …………(2)'

由 (1)' 及 (2)' 得 $D'B : D'C = AB : AC.$

逆定理　內分或外分三角形底邊所得二線分之比, 等於三角形其他二邊之比, 則連結分點及角頂之直線, 必爲頂角及其外角之平分線.

證　甚易, 從略.

201. **定義 67.**　在一直線上之諸點稱爲點列, 過一

定點所引之諸直線稱爲**線束**,此定點稱曰**頂點**,此諸直線稱曰**射線**.

202. **定義 68.** 以同比內分 AB 於 C 點,外分 AB 於 D 點,則稱 A, B, C, D 成一**調和點列**. C, D 稱爲 A, B 之**調和共軛點**,而稱此線分 AB 爲被 C, D 二點**調和分割**.

203. **定理 76.** AB 線分爲二點 C, D 所調和分割,則 CD 線分亦爲 A, B 二點所調和分割.

證 因 $$AC : BC = AD : BD,$$

則 $$CA : CB = DA : DB,$$

$$\therefore\ CA : DA = CB : DB.$$

故 CD 線分爲 A, B 二點所調和分割.

系 C, D 爲 A, B 之調和共軛點,則 A, B 亦爲 C, D 之調和共軛點.

204. **定義 69.** 有三量,若第一量與第三量之比,等於第一量、第二量之差與第二量、第三量之差之比,則稱此三量成**調和比例**,而稱第二量曰第一量及第三量之**調和中項**.

如三量 A, B, C 成調和比例,則有下列關係:

$$A : C = A - B : B - C.$$

B 卽稱爲 A, C 之調和中項.

205. **定理 77.** 若 A, B, X, Y 四點成調和點列,則線分 YX 爲線分 YA 與 YB 之調和中項.

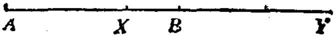


圖 168.

證 因 $YA : YB = XA : XB = YA - YX : YX - YB$, 故 YX 為 YA, YB 之調和中項.

206. **定理 78.** 一線分為二點所調和分割,則二點至此線分中點距離之比例中項,為此線分之半.

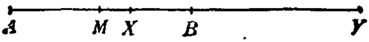


圖 169.

假設 AB 為 X, Y 所調和分割, M 為 AB 之中點.

求證 $\overline{MA}^2 = MX \cdot MY = \overline{MB}^2$*.

證 因 $AX : BX = AY : BY$,

$\therefore\ AX + BX : AX - BX = AY + BY : AY - BY.$

即 $2\,MA : 2\,MX = 2\,MY : 2\,MA.$

$$\therefore\ \overline{MA}^2 = MX \cdot MY.$$

逆定理 一線分為二點內分及外分,若二分點至此線分中點之距離之比例中項為此線分之半,則此線分為二點所調和分割.

證 從略.

207. **定理 79.** 若一直線截一線束所得之四交點

* 參見附錄.

成一調和點列，則任何直線截此線束所得之四點，均成調和點列.

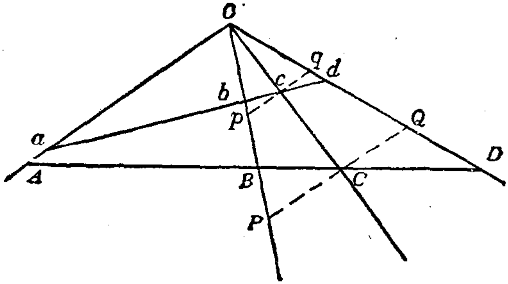


圖 170.

假設 頂點為 O 之四射線之線束為一直線截於 A, B, C, D 四點，而 A, B, C, D 成一調和點列; ad 為另一直線，截此線束於 a, b, c, d 四點.

求證 a, b, c, d 亦成一調和點列.

證 自 C 引 PQ 直線平行 AO，與 OB, OD 交於 P, Q 二點，

則 $AB : BC = AO : CP.$ 又 $AD : DC = AO : CQ,$

$$\therefore\ CP = CQ.$$

過 c 引 pq 平行 PQ，與 OB, OD 交於 p 及 q 二點，

則 $cp = cq.$ 但 $ab : bc = aO : cp,$

又 $ad : dc = aO : cq,$ $\therefore$ $ab : bc = ad : dc.$

$$\therefore\ a, b, c, d \text{ 成一調和點列.}$$

203. **定義 70.** 過調和點列之線束稱曰**調和線束**.

系 一直線截調和線束之三相鄰射線，而與其他一

射線平行,則此直線在三射線間之二部分必相等.

209. **定理 80.** 一角之二邊及其內角之平分線與外角之平分線成一調和線束.

逆定理 若調和線束之一對射線成直角,則此一對射線必為其他一對射線所成之角之內角平分線及外角平分線.

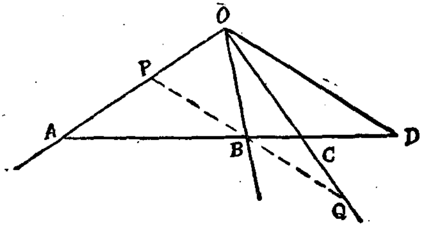


圖 171.

如上圖,由定理75及調和點列之定理得直接證明,學者試自證之.

210. **定理 81.** 至二定點距離之比為一定之點之軌跡為一圓周.

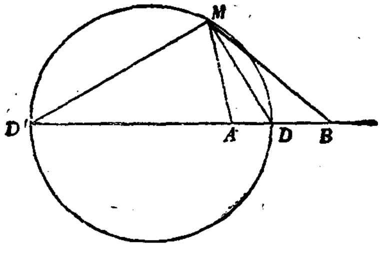


圖 172.

假設 AB 爲二定點，$\frac{m}{n}$ 爲所設之比，M 爲軌跡上之一點，而 $\frac{MA}{MB}=\frac{m}{n}$.

求證 M 點之軌跡爲一圓周.

證 以定比 $\frac{m}{n}$ 內分 AB 於 D，外分 AB 於 D'，則 A,B,D,D' 成一調和點列. 若 M 爲軌跡上之一點，則因 MA, MB, MD, MD' 成調和線束，且

$$MA : MB = m : n.$$

故 MD 爲 $\angle AMB$ 之內角平分線(定理75之逆)，MD' 爲其外角平分線(定理80)，故 $\angle D'MD$ 爲直角，因之 M 必在以 DD' 爲直徑之圓周上.

又在此圓周上取一點 M，由定理80之逆，知 MD 爲 $\angle AMB$ 之內角二等分線，從定理75得

$$MA : MB = AD : DB = m : n.$$

習 題

1. 二圓垂直相交，則經過二圓圓心之割線必爲圓周所調和分割.

2. 以一圓之直徑兩端之調和共軛點之距離，爲直徑所作之圓，必與原圓垂直相交.

3. 一弦垂直於一直徑，連結弦之兩端與圓周上之一點之兩直線，與直徑或其延長線上相交於兩點，則此兩

點必將直徑調和分割.

4. 距二定點之一之距離,等於距他一定點之二倍之點之軌跡,爲一圓周.

5. 三角形之底及其他二邊之比一定,則其頂點之軌跡,爲以二邊之比內分及外分底邊所得二點之距離爲直徑之一圓周.

6. A, B, C 爲在一直線上之三定點,P 點與三定點連結線所成之 APB 及 BPC 二角相等,求 P 點之軌跡.

第十六章

多角形之面積

211. **定義 71.** 圖形之面積爲圖形所包表面有限部分之大.

前數章關於二圖形能完全重合之時,名之曰**全相等,**而以'≌'記之.若二圖形之形狀雖不同,但其所包之面積相等,則稱此二圖形曰**等積,**或稱**相等,**恆以'='記之,以示區別.全相等與等積大不相同,全相等或簡稱全等,即不僅其大小相等,其形狀亦絲毫無差也.等積或曰**等值,**乃僅指面積之相等,不論形狀之若何也,但關於角,直線及比值等無面積之可言,故簡稱曰相等,無全相等與等積之區別,故仍以普通之等號'='記之.

212. **定義 72.** 取三角形之任意邊爲底,則三角形之高,爲自對此底邊之頂點至此底邊所引之垂線.

取平行四邊形之任意邊爲底,則此平行四邊形之高爲底邊至其對邊間之距離.

系 取矩形之一邊爲底,則其高等於其鄰邊.

213. **定義 73.** 梯形之高爲平行二邊間之距離.

214. **定理 82.** 等高矩形之比,等於其底之比.

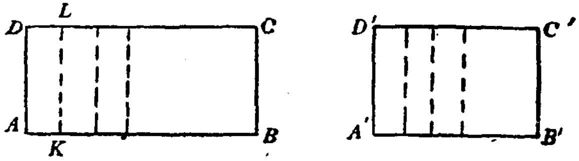


圖 173.

假設　有二矩形 $ABCD$, $A'B'C'D'$, $AD=A'D'$.

求證　▭$ABCD$：▭$A'B'C'D'=AB：A'B'$.

證　I. AB, $A'B'$ 為可通約之時.

若 m 為 AB, $A'B'$ 之公約量,而 $AB=a\times m$, $\angle B'=b\times m$. 將 AB 分為 a 等分,自其分點作 AB 之垂直線,則得底為 m 之矩形 a 個.同樣將▭$A'B'C'D'$ 亦分為底為 m 之矩形 b 個.因 $AB=A'D'$, 故分得之矩形均相等.

由是　▭$ABCD$：▭$A'B'C'D'=a：b=AB：\angle B'$.

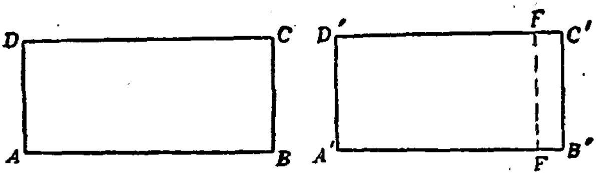


圖 174.

II. AB, $A'B'$ 為不可通約之時.

分 AB 為任意等分,以其一分之長,度量 $A'B'$, 因 AB, $A'B'$ 為不可通約,故必有餘長 EB', 則 EB' 小於一等分之長,引 $EF\perp A'B'$, 則 AB, $A'E$ 為可通約之量.由 I 知

$$\square ABCD : \square A'EFD' = AB : A'E.$$

將等分數,無限增加,則一等分之長,無限減小,故 EB' 可小至任何小之長,由是 $\square A'EFD'$ 漸近於 $\square A'B'C'D'$, $A'E$ 之極限爲 $A'B'$, 然 $\square ABCD : \square A'EFD'$ 與 $AB : A'E$ 常相等,究其極限,則得 $\square ABCD : \square A'B'C'D' = AB : A'B'$.

系 同底之矩形之比等於其高之比.

215. 定理 83. 二矩形之比等於其底高乘積之比.

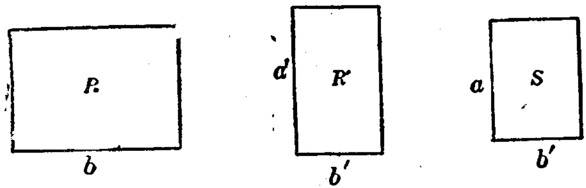


圖 175.

假設 有二矩形 R 及 R', R 之高爲 a, 底爲 b, R' 之高爲 a', 底爲 b'.

求證 $R : R' = a \times b : a' \times b'$.

證 作與 R 之高相等與 R' 之底相等之矩形 S, 由定理 82 及系,得

$$R : S = b : b',$$

$$S : R' = a : a'.$$

$$\therefore\ R : R' = a \times b : a' \times b'.$$

216. 定義 74. 以單位長爲一邊之正方形,其面積定爲面積之單位.

217.　定理 84.　矩形面積等於底與高相乘積.

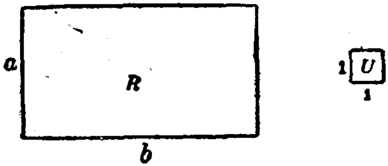


圖　176.

假設　有矩形 R, 其高為 a, 底為 b.

求證　R 之面積 $= a \times b$.

證　設 U 為以單位長為一邊之正方形,

則　$\dfrac{R}{U} = \dfrac{a \times b}{1 \times 1} = a \times b.$　(定理 83)

置　$U = 1.$　(定義 74)

故　$R = a \times b.$

系　正方形面積等於一邊之平方.

【注意】吾人恆以面積二字表面積之數,底及高二字表底及高之數,以下仿此.

218.　定理 85.　平行四邊形之面積,以底及高之相乘積測定之.

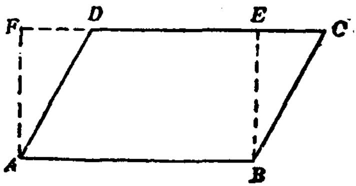


圖　177.

假設 平行四邊形 $ABCD$, 其底 $AB=b$, 高 $BE=h$.

求證 $\square ABCD=b\times h$.

證 引 AF 垂直於 AB, 與 CD 或其延長線交於 F, 則 $AF//BE$, 故 $ABEF$ 爲一矩形,以 b 爲底,以 h 爲高.

但 $AF=BE,\quad AD=BC,$

$\angle AFD=\angle BEC=\angle R.$

$\therefore\quad \triangle AFD\cong\triangle BEC,$

因之 $\square ABCD=▭ABEF.$

但 $▭ABEF=b\times h,$

故 $\square ABCD=b\times h.$

系 1. 等高等底之平行四邊形面積相等.

系 2. 二平行四邊形之比,等於其底高乘積之比.

系 3. 等底之平行四邊形之比,等於其高之比.

系 4. 等高之平行四邊形之比,等於其底之比.

219. **定理 86.** 三角形之面積,等於其底與高相乘積之半.

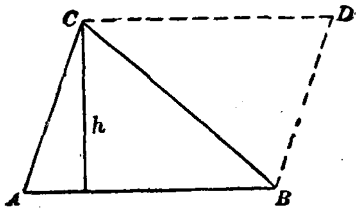


圖 178.

假設 三角形ABC,其底邊AB之長爲b,其高爲h.

求證 $\triangle ABC = \frac{1}{2}(b \times h)$.

證 引$BD // AC$, $CD // AB$, 設BD, CD相交於D,則$ABCD$爲一平行四邊形.

而 $\square ABCD = b \times h$.

但 $\triangle ABC = \triangle CBD$,

$\therefore \quad \triangle ABC = \frac{1}{2}\square ABCD = \frac{1}{2}(b \times h)$.

系 1. 等底等高之三角形面積相等.

系 2. 兩三角形面積之比,等於其底高乘積之比.

系 3. 等底之兩三角形之比,等於其高之比.

系 4. 等高之兩三角形之比,等於其底之比.

220. 定理 87. 兩三角形之一角相等或互爲補角,則此兩三角形之比,等於夾此角之二邊之相乘積之比.

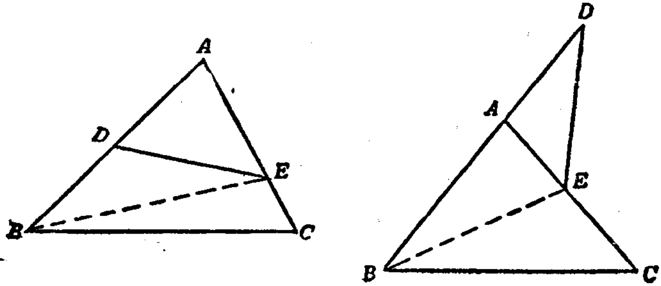


圖 179.

假設 三角形 ABC 與 ADE，其中 $\angle BAC$ 與 $\angle DAE$ 相等，或互為補角.

求證 $\triangle ABC : \triangle ADE = AC \cdot AB : AE \cdot AD.$

證 I. 若 $\angle BAC = \angle DAE$，則置一三角形於他三角形上，使等角之兩邊相合，連結 BE. 因 $\triangle ABC$, $\triangle ABE$ 為以 AC, AE 為底之等高三角形，

故 $\triangle ABC : \triangle ABE = AC : AE.$

同理 $\triangle ABE : \triangle ADE = AB : AD.$

故 $\triangle ABC : \triangle ADE = AC \cdot AB : AE \cdot AD.$

II. $\angle BAC + \angle DAE = 2\angle R.$ 之時，證法完全相同.

221. **定理 88.** 梯形之面積，以其二底之和半，與其高之相乘積測定之.

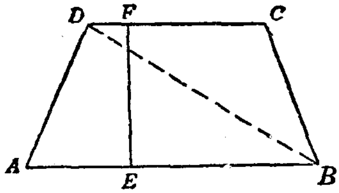


圖 180.

假設 梯形 $ABCD$, $AB//CD$, EF 為其高.

求證 梯形 $ABCD = \dfrac{AB + CD}{2} \times EF.$

證 引對角線 DB，則梯形 $ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD.$

而 $\triangle ABD = \frac{1}{2} AB \times EF,$

$\triangle BCD = \frac{1}{2} CD \times EF.$

$\therefore$ 梯形 $ABCD = \frac{1}{2} AB \cdot EF + \frac{1}{2} CD \cdot EF = \frac{AB + CD}{2} \times EF.$

222. 定理 89. 過平行四邊形對角線上之一點,引平行於二邊之二直線,則與鄰接兩邊所成之四平行四邊形中,其不含此對角線之二平行四邊形相等.

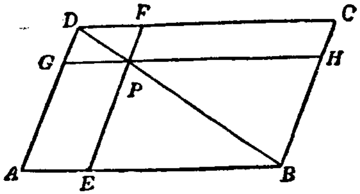


圖 181.

假設 P 爲平行四邊形 $ABCD$ 對角線 BD 上之一點,EF 爲過 P 平行於 AD 之直線,GH 爲過 P 平行於 DC 之直線.

求證 $\square AEPG = \square PHCF.$

證 $\triangle ABD \cong \triangle BCD.$

但 $\triangle GPD \cong \triangle PFD,$

$\triangle EBP \cong \triangle BHP.$

$\therefore \triangle ABD - \triangle GPD - \triangle EBP = \triangle BCD - \triangle PFD - \triangle BHP.$

$\therefore \square AEPG = \square PHCF.$

223. 定義 75. 矩形之兩鄰邊各等於所與二線分之長,則稱此矩形爲此二線分所包之矩形.

224. **定義 76.** 正方形之邊等於所與線分之長,則稱此正方形爲此線分上之正方形.

225. **定理 90.** 二線分和上之正方形,等於二線分上正方形之和,加此二線分所包矩形之二倍.

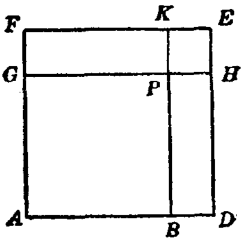


圖 182.

假設 有二線分 AB, CD.

求證 $(AB+CD)^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2\cdot AB\cdot CD$.

證 於 AB 之延長線上取 BD' 等於 CD, 則 $AB+CD=AD'$. 以 AB, AD' 爲邊,於同旁各作正方形 $ABPG$, $AD'EF$. 延長 BP 與 EF 交於 K. 延長 GP 與 ED' 交於 H.

則 $\square AD'EF=\square ABPG+\square PHEK+\square BD'HP+\square GPKF$.

但 $\square ABPG=\overline{AB}^2$, $\square PHEK=\overline{CD}^2$,

$\square BD'HP=\square GPKF=AB\cdot CD$.

$\therefore\ \square AD'EF=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2\cdot AB\cdot CD$.

即 $(AB+CD)^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2\cdot AB\cdot CD$.

系 一線分上之正方形,等於其半線分上正方形之四倍.

226. 定理 91. 二線分差上之正方形,等於各線分上正方形之和,減去此二線分所包矩形之二倍.

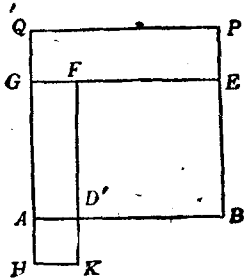


圖 183.

假設 二線分爲 AB, CD.

求證 $(AB-CD)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot AB \cdot CD$.

證 設 $AB > CD$, 於 AB 上取一線分 AD' 等於 CD. 於同側作 AB 及 $D'B$ 上之正方形 $ABPQ$ 及 $D'BEF$. 又於 AD' 線分上作一正方形 $AHKD'$, 令與前二正方形在 AB 之他側,

則 $$CD = AD' = HK = GF = EP.$$

$\therefore \ \square D'BEF = \square ABPQ + \square HKD'A - ▭HKFG - ▭GEPQ.$

但 $$AB = AQ = HG = QP,$$

$$\therefore \ ▭HKFG = AB \cdot CD,$$

$$▭GEPQ = AB \cdot CD.$$

而 $$\square ABPQ = \overline{AB}^2, \quad \square HKD'A = \overline{CD}^2,$$

$$\square D'BEF = \overline{D'B}^2 = (AB - CD)^2.$$

$$\therefore \ (AB - CD)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot AB \cdot CD.$$

227. 定理 92. 二線分上正方形之差,等於二線分之和與差所包之矩形.

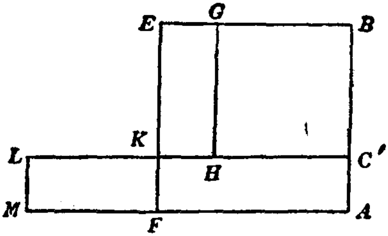


圖 184.

假設 二線分 AB 及 CD.

求證 $\overline{AB}^2-\overline{CD}^2=(AB+CD)(AB-CD)$.

證 設 $AB>CD$,於 AB 上取 $C'B=CD$. 在 AB 之同側作 $ABEF$ 及 $C'BGH$ 兩正方形.延長 $C'H$ 與 FE 交於 K,又延長至 L,使 $KL=KE$. 延長 AF 至 M,使 $FM=KL$. 連結 LM.

由是 $\overline{AB}^2-\overline{C'B}^2=\square ABEF-\square C'BGH$

$=\square FAC'K+\square KHGE,$

因 $HK=FK,$

$KE=KL,$

$\therefore\quad \square FKLM=\square KHGE,$

$\therefore\quad \overline{AB}^2-\overline{C'B}^2=\square FAC'K+\square FKLM$

$=\square MAC'L=(AB+CD)(AB-CD).$

$\therefore \quad \overline{AB}^2 - \overline{CD}^2 = (AB + CD)(AB - CD).$

228. **定理 93.** 一直線於任一點內分或外分,則其兩線分上正方形之和,二倍於以此直線之半爲一邊之正方形,與其中點至分點間線分上之正方形之和.

假設 AB 爲直線,內分或外分於 D, C 爲 AB 之中點.

求證 $$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2).$$

證 $$AD = AC + CD,$$

$$\therefore \quad \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + 2 \cdot AC \cdot CD. \cdots\cdots(1)$$

又 $$BD = BC - CD = AC - CD,$$

$$\therefore \quad \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot AC \cdot CD. \cdots\cdots(2)$$

(1) 及 (2) 相加, $$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2 = 2(\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2).$$

系 一直線分爲二部分,其二部分上正方形之和,以中點爲分點時爲最小.

229. **定理 94.** 直角三角形斜邊上之正方形等於夾直角二邊上正方形之和*.

---

* 此定理在二千餘年前爲希臘人 Pythagoras 所發明,故常稱之曰 Pythagoras 定理.

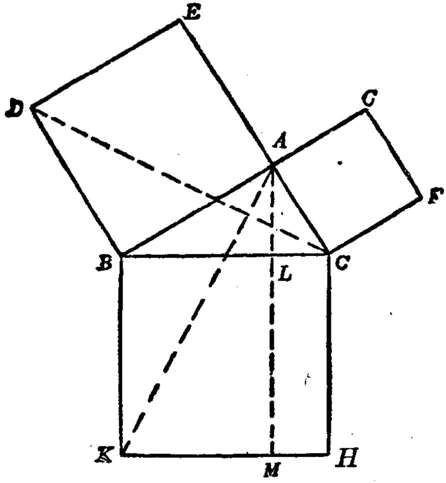


圖 185.

假設 三角形 ABC, $\angle A = \angle R.$

求證 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$

證 於 $\triangle ABC$ 各邊上向外方作正方形 $BAED$, $BKHC$, $ACFG$. 連 $=$ AK, CD. 並自 A 作 BC 之垂線,交 BC 於 L, 交 KH 於 M.

因 $\angle DBC = \angle DBA + \angle ABC = \angle R. + \angle ABC,$

$\angle ABK = \angle CBK + \angle ABC = \angle R. + \angle ABC,$

$\therefore \quad \angle DBC = \angle ABK.$

又 $DB = AB, \quad CB = KB,$

$\therefore \quad \triangle DBC \cong \triangle ABK.$

但 $\square BAED = 2\cdot\triangle DBC,$

$\boxed{}KMLB = 2\cdot\triangle ABK,$

$\therefore\quad \square BAED = \boxed{}KMLB.$

同理得證 $\square CFGA = \boxed{}MHCL.$

$$\therefore\quad \square BKHC = \boxed{}KMLB + \boxed{}MHCL$$

$$= \square BAED + \square CFGA.$$

$$\therefore\quad \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

系 正方形對角線上之正方形,等於原正方形之二倍.

230. 定理 95. 一直線內分或外分於一點,則分得之二線分所包之矩形,等於半線上正方形及分點至中點間線分上正方形之差.

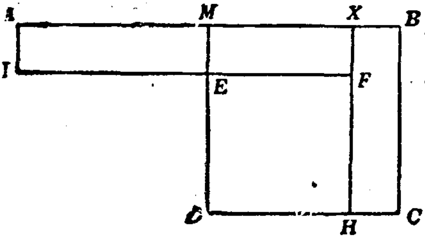


圖 186.

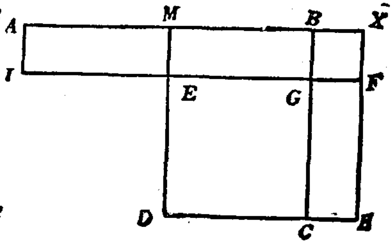


圖 187.

假設 AB 爲直線,M 爲其中點,X 爲其內分或外分點,

求證 $$AX \cdot XB = \overline{BM}^2 - \overline{MX}^2.$$

證 I. 內分之時(圖 186).

於 MB 上作正方形 $MDCB$; 於 MD 上取一點 E, 使 $ME = XB$. 自 E 引 AB 之平行線 IEF, 與 X 至 DC 上之垂線 XH 交於 F. 自 A 引 IF 之垂線 AI.

由是 $EF = MX$, $\therefore \square EDHF = \overline{MX}^2$.

$$\therefore \overline{BM}^2 - \overline{MX}^2 = \square MEFX + \square XHCB.$$

但 $AI = XF = XB$, $AM = BM = BC$,

$$\therefore \square AIEM = \square XHCB,$$

$$\therefore \overline{BM}^2 - \overline{MX}^2 = \square MEFX + \square AIEM$$
$$= \square AIFX = AX \cdot XF = AX \cdot XB.$$

II. 外分之時(圖 187).

於 MX 作正方形 $MDHX$, 於 MD 上取 ME 等於 XB. 過 E 作 IG 直線平行 AB, 而與自 B 至 DH 之垂線 BC 交於 G. 自 A 引 IG 之垂線 AI.

仿上法,得證 $\overline{MX}^2 - \overline{BM}^2 = AX \cdot XB.$

$$\therefore AX \cdot XB = \overline{BM}^2 - \overline{MX}^2.$$

系 1. 一直線內分爲二部分,其二部分所包之矩形,以中點爲分點時爲最大.

系 2. 周圍相等之矩形中正方形之面積最大.

231. **定理 96.** 三角形二邊之長一定,則此二邊所

夾之角爲直角時,其面積爲最大.

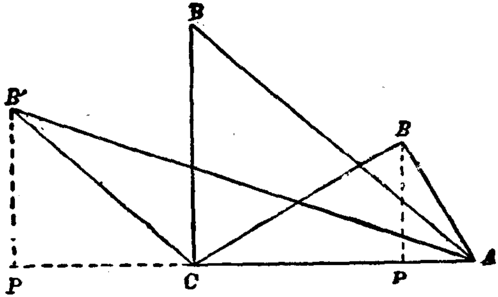


圖 188.

假設 CA, CB, CB' 爲三角形中有定長之三邊,$\angle BCA$ 爲直角.

求證 $\triangle ABC$ 之面積爲最大.

證 自 B' 引 CA 之垂線 $B'P$, 則

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot CA,$$

$$\triangle AB'C = \frac{1}{2} B'P \cdot CA.$$

但 $$B'C = BC, \quad B'C > B'P,$$

$$\therefore \ BC > B'P.$$

$$\therefore \ \triangle ABC > \triangle AB'C.$$

故 $\triangle ABC$ 爲極大.

232. **定理 97.** 自一定角內之一定點引一直線與此角二邊成一三角形,若所引之直線爲定點所平分,則所成之三角形之面積爲最小.

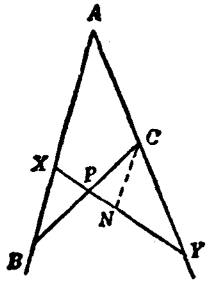


圖 189.

假設 一角 BAC, P 爲其中之一定點,自 P 引 BC 直線與 AB, AC 成 ABC 三角形.

求證 $BP=PC$ 時, $\triangle ABC$ 爲最小.

證 自 P 引任意直線 XY, 與 AB, AC 交於 X, Y; 若 XP, PY 不相等,而 $PY > XP$, 於 PY 上取 N 點, 令 $PN = XP$, 連結 NC. 由是 $XP = PN$, $\angle BPX = \angle CPN$, 若 $BP = PC$,

則 $$\triangle BPX \cong \triangle CPN.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{之面積} = \text{四邊形} AXNC \text{之面積},$$

$$\therefore \triangle ABC < \triangle AXY.$$

故 $BP=PC$ 時, $\triangle ABC$ 之面積爲最小.

233. **定理 98.** 同底等周之三角形中,二等邊三角形之面積爲最大.

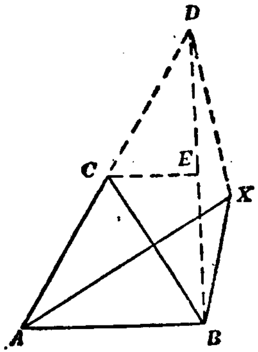


圖 190.

假設 AB 爲 $\triangle ABC$ 中定長之邊，$AB + BC + CA =$ 定長.

求證 若 $BC = CA$，則 $\triangle ABC$ 之面積爲最大.

證 作等周之二三角形 ABC 及 ABX. 其中 $BC = CA$，而 $XA \neq XB$. 延長 AC 至 D，使 $CD = CA$. 引 CE 平行 AB 與 DB 之連結線交於 E 點. 連結 DX.

因 $$CA + BC = CA + DC = XA + XB,$$

但 $$CA + DC < XA + DX;$$

$$\therefore \quad XA + XB < XA + DX.$$

$$\therefore \quad XB < DX.$$

又 CE 爲 BD 之垂直平分線，故 X 點在 CE 與 AB 之間.

$\therefore$ $\triangle ABX$ 之高小於 $\triangle ABC$ 之高

$\therefore$ $\triangle ABX$ 之面積小於 $\triangle ABC$ 之面積.

故若 $BC = CA$, 則 $\triangle ABC$ 之面積爲最大.

系 等周之三角形中,正三角形之面積爲最大.

234. 定理 99. 等周之同邊數凸多角形中,面積最大者,爲等邊凸多角形.

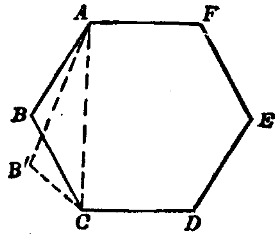


圖 191.

假設 $ABCD\cdots\cdots$ 爲 n 邊多角形,其周長爲已知.

求證 $ABCD\cdots\cdots$ 之面積爲最大時,

則 $$AB = BC = CD = \cdots\cdots.$$

證 連結任一對角線 AC, 則多角形 $ABCD\cdots\cdots$ 之面積爲最大時, $\triangle ABC$ 必爲二等邊三角形;若不然,以一同底等周之二等邊三角形 $AB'C$ 代 $\triangle ABC$, 則 $AB'CD\cdots\cdots$ 多角形亦爲等周之多角形而面積大於 $ABCD\cdots\cdots$ 多角形.此與假設不合,故必 $AB = BC$.

同理 $$BC = CD\cdots\cdots,$$

故 $$AB = BC = CD = \cdots\cdots.$$

235. 例題　過平行四邊形 $ABCD$ 內之一點 P，引二鄰邊之平行線 EF, GH，與 AB, BC, CD, DA 四邊順次交於 G, F, H 及 E 四點，則

$$\triangle APC = \tfrac{1}{2}(\square BFPG - \square PHDE)$$

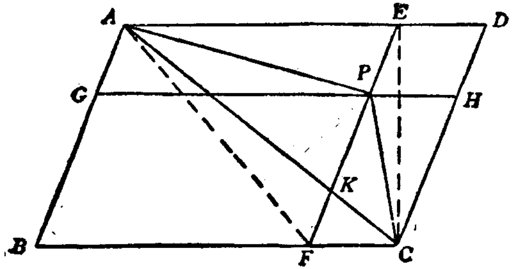


圖 192.

證　設 AC, EF 之交點為 K，連結 AF, CE；則

$$\tfrac{1}{2}\square BFPG = \triangle AFP = \triangle AKP + \triangle AFK$$
$$= \triangle AKP + \triangle EKC = \triangle AKP + \triangle PKC + \triangle EPC$$
$$= \triangle APC + \triangle EPC = \triangle APC + \tfrac{1}{2}\square PHDE.$$
$$\therefore\quad \triangle APC = \tfrac{1}{2}(\square BFPG - \square PHDE).$$

習　　題

1.　等積兩三角形 ABC, DBC 之底邊同為 BC，且在 BC 之同側，則連結其頂點之直線必與底邊平行.

2.　兩三角形之底邊頂角及面積相等，則全相等.

3. 由三角形之重心,至各頂點連成三直線,則必分原三角形爲三等分.

4. 三角形 ABC 之中線 BE, CD 相交於 F, 則四邊形 $ADFE$ 必等於三角形 BFC.

5. AM 爲三角形 ABC 之中線; A', B', C' 依次爲 AM, $A'B$, $B'C$ 之中點,則三角形 $A'B'C'$ 必適爲原三角形之八分之一.

6. 於直線上順次取 A, B, C, D 四點,則

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC^*.$$

7. 二線分和上之正方形,減其差上之正方形,等於二線分所包矩形之四倍.

8. 自正三角形頂點至對邊所作垂線上之正方形,等於正三角形半邊上正方形之三倍.

9. 將一線分分爲三部分,則全線分上正方形等於其各部分上正方形之和,加以各二部分所包矩形之二倍.

10. 分線分 AB 於 C, 使 $\overline{AC}^2 = 2\,\overline{BC}^2$, 則

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\,AB \cdot AC.$$

11. 內分線分 AB 於 D, 外分 AB 於 D', 而 C 爲 AB 之中點,

則
$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 4\,\overline{CD}^2 + 2\,AD \cdot BD,$$

$$\overline{AD'}^2 + \overline{BD'}^2 = 4\,\overline{CD'}^2 - 2\,AD' \cdot BD.$$

---

* 此問題稱曰 Euler 氏定理.

12. 將三角形二邊之中點連結所得之線分爲一邊以三角形之另一邊或其延長線爲其對邊之平行四邊形,必等於原三角形面積之半.(圖 193)

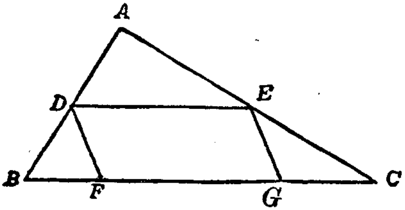


圖 193.

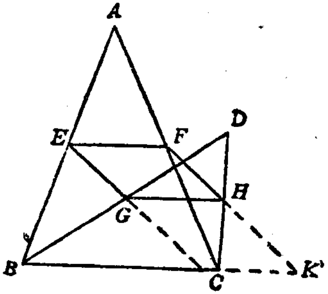


圖 194.

13. 同底同側之兩三角形,連結其各二邊之中點,必得一平行四邊形,且其面積適爲兩三角形之差半.(圖 194)

14. 於正三角形內之任一點作三邊之垂線,則此三垂線之和恆不變.

15. 三角形之面積等於其周圍與內切圓半徑所包之矩形.

16. 外接於圓之多角形,其面積等於其周與內接圓半徑所包矩形之半.

17. 自正多角形內任意一點至各邊作垂線,則此諸垂線之和恆不變.

18. 平行於平行四邊形 $ABCD$ 之對角線 AC 作一直

線,與 AC, BC 相交於 E 及 F 二點,則三角形 AED 等於三角形 CDF.

19. 三等分三角形 ABC 之底邊 BC 於 D, E 二點;自 D, E 各作鄰近邊之平行線相交於 P,則 PA, PB, PC 必分三角形爲三等分.

20. 平行四邊形 $ABCD$ 對角線之交點爲 P,而 Q 爲三角形 ABP 內任意一點,求證:

$$\triangle AQC + \triangle BQD = \triangle CQD - \triangle AQB.$$

21. 作矩形 $ABCD$ 之對角線 AC,過三角形 ABC 之內心 O,作 AB 之平行線 EF,與 AD, BC 各交於 E, F,且與 AC 交於 L;又過 O 作 BC 之平行線與 AB, DC 各交於 G, H;且與 AC 交於 K,求證:

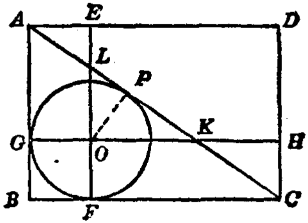


圖 195.

a. $\triangle ABC = \frac{1}{2}(\square AGOE + \square OFCH)$.

b. $\square EOHD = \frac{1}{2}\square ABCD$.

c. $\triangle PLG = \triangle ALE + \triangle CKH$. (圖 195)

22. 三角形之頂角及夾此頂角之二邊之和一定,則以二等邊三角形之面積爲最大.

23. 底邊及頂角一定之諸三角形,以二等邊三角形之面積爲最大.

24. 以梯形之不平行之一邊爲底,對邊之中點爲頂

點所作之三角形,等於梯形之半.

25. 平行於三角形底邊之直線,與其他二邊相交,則連結其交點與底邊兩端之兩直線,必與自頂點至底邊之中線同交於一點.

26. 任何邊數之凸多角形,於其形內一點作各邊之垂線,則其垂足所分各邊之各部分上之正方形,每間一以取之;其和相等.

27. 自三角形頂點作底邊之垂線,分底邊爲兩部分,則此兩部分上正方形之差,等於其餘二邊上正方形之差.

28. 兩圓相切於 C 點,過 C 作兩圓之公共割線 DE, FG,互相垂直,且與兩圓相交於 D, E, F, G 各點,如是則 DE, FG 上正方形之和,等於兩圓直徑上正方形之和.

29. 與平行四邊形 $ABCD$ 之二鄰邊平行作二直線,與 AB, BC, CD, DA 順次交於 E, H, F 及 G 四點,則 EH, GF, AC 必同交於一點.(圖 196)

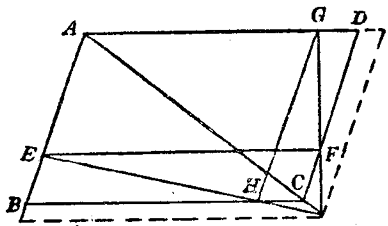


圖 196.

30. 距二定點距離平方之差爲定值之點之軌跡,爲垂直於二定點連線之一直線.

第十七章　圓　冪

236. **定義 77.** 在一角之二邊間引二直線,若一直線與一邊所成之角,等於他一直線與他邊所成之角,則稱此二直線爲關於此角之逆平行線.如圖,$\angle A$ 二邊間之二直線 BC, DE,與二邊所成之角$\angle ADE = \angle ACB$,則 BC, DE 爲關於 $\angle A$ 之逆平行線.

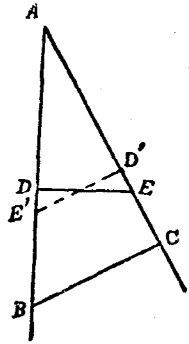


圖 197.

237. **定理 100.** 一角之二邊與其二逆平行線相交,則此角頂至各邊之二交點距離之相乘積相等.其逆定理亦眞.

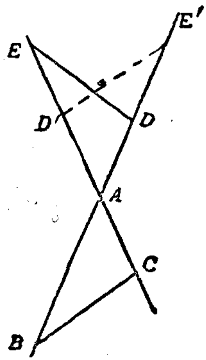


圖 198.

假設 於 BAC 角,BC, DE 爲二逆平行線,與 AB, AC 及

AB, AC 之延長線上交於 B, D 及 C, E.

求證 $AB \cdot AD = AC \cdot AE$.

證 於 AB 或其延長線上取 $AE' = AE$, 於 AC 或其延長線上取 $AD' = AD$, 連結 $D'E'$, 則 $\triangle AD'E'$ 及 $\triangle ADE$ 之二邊及夾角各相等.故 $\triangle AD'E' \cong \triangle ADE$.

由是 $$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AD'}.$$

即 $$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD},$$

$$\therefore AB \cdot AD = AC \cdot AE.$$

逆定理 二直線與一角之兩邊相交,若此角頂點至各邊之二交點間之距離之相乘積相等,則二直線逆平行.

證 過 E 點引關於 $\angle BAC$ 之 BC 之逆平行線 ED'', 與 AB 相交於 D''; 則 AD'' 爲 AB, AE, AC 之第四比例項, 但假設中 AD 爲第四比例項, 故 D 與 D'' 一致, 故 DE, BC 爲逆平行線.

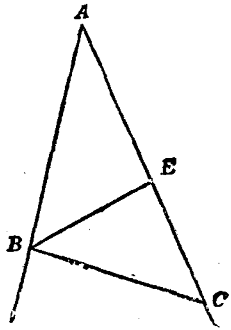


圖 193.

系 1. 關於一角之逆平行線,若在此角之一邊上相交,則頂點至此交點之距離,爲頂點至他邊與逆平行線之二交點距離之比例中項,如右圖之 B 與 D 合爲一,則 $AB \cdot AD = AC \cdot AE$ 式中之 $AD = AB$, 故

$$\overline{AB}^2 = AC \cdot AE.$$

系 2. $\angle BAC$ 一邊 AB 上之一點 B, 與他邊 AC 上之二點 C, E 有 $\overline{AB}^2 = AC \cdot AE$ 之關係,則 BE, BC 爲逆平行線,此即系1之逆定理也.

238. 定理 101. 過一定點引一定圓之任意割線,此割線與圓周相交於二點,則自此定點至二交點距離之相乘積常一定.

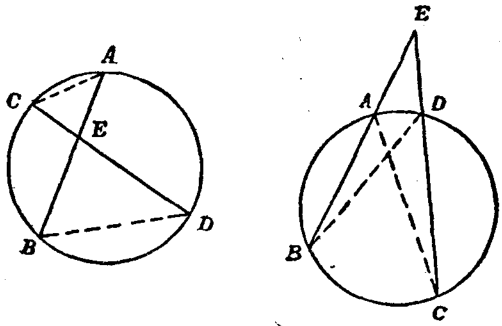


圖 200.

假設 E 爲一定點,過 E 向定圓 $ABCD$ 引任意二割線 AEB, CED, 與定圓圓周相交於 A, B, C, D 四點.

求證 $EA \cdot EB = EC \cdot ED.$

證 引 AC, BD 二弦, 則 $\angle ABD = \angle ACD$.

$\therefore AC, BD$ 爲逆平行線.

$\therefore EA \cdot EB = EC \cdot ED.$

【注意】 此定理之證明, E 點在圓內或圓外均一致.若 E 在圓周上,則 EA, EB 必有一爲零,而 EC, ED 亦必有一爲

零.上式兩端均爲零,故仍成立.由是E點在圓之同平面上,本定理恆成立.

逆定理 二直線AB, CD或其延長線相交於E點,若$EA \cdot EB = EC \cdot ED$之關係成立,則$A, B, C, D$四點在一圓周上.

證 由定理100之逆,知AC, BD爲逆平行線,故$\angle ACD = \angle DBA$,由是過A, C, D三點畫一圓,則B點亦必在此圓周上,故A, B, C, D四點在一圓周上.

239. **定義 78.** 自一定點向一圓作一割線,與圓相交於兩點,此定點至二交點距離之相乘積,稱曰此點關於此圓之圓冪.

240. **定理 102.** 自圓外一點引此圓之一任意割線及一切線,則切線之長爲割線之全長與割線圓外部分之長之比例中項.

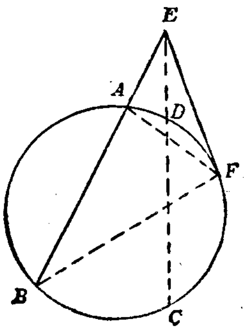


圖 201.

假設　E 爲所設圓外之一點,EF 爲切線,F 爲切點,EAB 爲割線,與圓交於 A,B 二點.

求證　$EA \cdot EB = \overline{EF}^2.$

證　自 E 引任意割線 EC,與圓周相交於 D,C 二點,

則　$$EA \cdot EB = EC \cdot ED. \qquad\qquad (1)$$

將 EC 直線漸向 EF 方向移動,則 C 與 D 之距離漸短,其極限則 EC 割線爲 EF 切線,卽 C 與 D 一致,故

$$EC \cdot ED = EF \cdot EF = \overline{EF}^2.$$

但(1)式之關係不因 EC 之移動而變,

故　$$EA \cdot EB = \overline{EF}^2.$$

逆定理　設 A, B, F 三點;AB 在所設 E 角之一邊上,F 在 E 角之他邊上,若 $\overline{EF}^2 = EA \cdot EB$,則直線 EF 切於通過 A, B, F 三點之圓周,且其切點爲 F.

證　由定理100系2,知 AF, BF 爲逆平行線.

故 $\angle EFA = \angle EBF$,由定理63之逆知 EF 爲切線,且 F 爲其切點.

系　點在圓外時,一點關於一圓之圓冪,等於此點至此圓切線之長之平方.

241. **定理 103.**　一定點關於一圓之圓冪,等於此點至圓心距離之平方與此圓半徑平方之差.

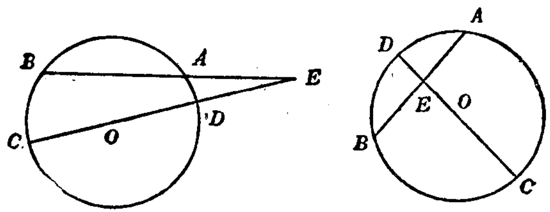


圖 202.

假設 EB為自定點E至O圓之任意割線,與O圓交於A及B二點,O為圓之中心,r為圓之半徑.

求證 $$EA \cdot EB = \overline{EO}^2 - r^2.$$

證 連結EO,並延長之與圓周交於D及C二點,

則 $$EA \cdot EB = ED \cdot EC,$$

但 $$ED = EO - r,\ \ EC = EO + r;$$

$$\therefore EA \cdot EB = (EO - r)(EO + r) = \overline{EO}^2 - r^2*.$$

242. 定理 104. 二圓圓冪相等之點之軌跡,為與二圓中心連結線垂直之一直線.

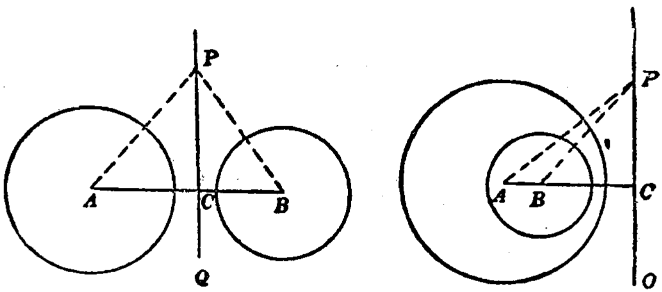


圖 203.

* 若E點在圓外,則$EA \cdot EB = \overline{EO}^2 - r^2$,

若E點在圓內,則$EA \cdot EB = r^2 - \overline{EO}^2$.

假設　A, B 二圓，其圓心各為 A, B.

求證　關於 A, B 兩圓圓冪相等之點之軌跡為垂直 AB 之一直線.

證　設 P 為合於條件之一點，A 圓之半徑為 R_1，B 圓之半徑為 R_2，則　$\overline{AP}^2 - R_1^2 = \overline{BP}^2 - R_2^2$,

由是　$\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = R_1^2 - R_2^2$.

但二圓半徑 R_1 及 R_2 之長一定，

故　$\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 =$ 定值.

故 P 點即為距 A, B 二點距離平方之差為定值之點.

但由前章習題30，距二定點距離平方之差為定值之點之軌跡，為與二定點連結線垂直之一直線，故關於 A, B 二圓等冪之點之軌跡，為一垂直於 AB 之直線.

243.　**定義 79.**　關於二圓等冪之點，其軌跡名曰**兩圓之根軸**.

由上定理及定義，得直接推知下列二事:

系 1.　二圓根軸上之點至二圓所引之切線相等.

系 2.　二圓相切，則其根軸為通過切點之公切線.兩圓相交，則其根軸為連結其交點之一直線.

因兩圓之交點及切點均為關於兩圓等冪之點，且兩圓之公共之弦或公共之切線，均垂直於二圓之中心連結線也.

244. 定理 105. 中心不同在一直線上之三圓,每二圓有一根軸,共得三根軸,且此三根軸會於一點.

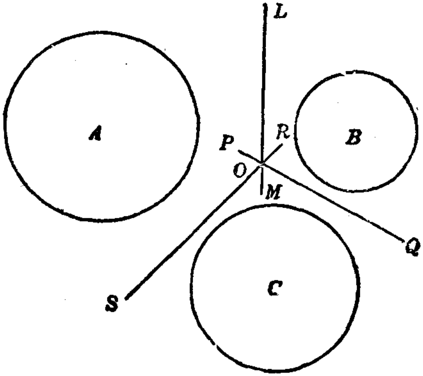


圖 204.

假設 A, B, C 爲三圓,其中心不在同一直線上,A, B 二圓之根軸爲 LM; B, C 二圓之根軸爲 PQ; C, A 二圓之根軸爲 RS.

求證 LM, PQ, RS 會於一點.

證 設 LM 與 PQ 相交於一點 O,則 O 點關於 A, B 二圓爲等冪之點,關於 B, C 二圓亦爲等冪之點,故 O 點關於 C, A 二圓亦爲等冪之點,但關於 C, A 二圓等冪之點之軌跡爲直線 RS,故 O 點必在 RS 上,故 LM, PQ, RS 會於一點 O.

245. 定義 80. 三圓中每二圓有一根軸,共三根軸,此三根軸之交點曰**三圓之等冪心**或曰**根心**.

246. **作圖題 17.** 求作二圓A, B之根軸.

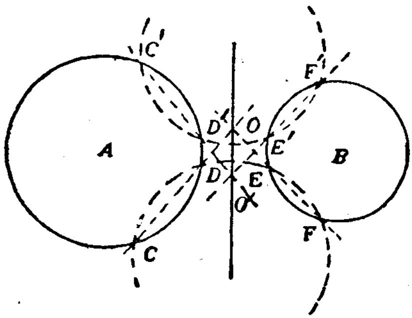


圖 205.

作圖 I. A, B二圓相交之時.

由第243節系2作二圓共通之弦卽得.

II. A, B二圓相切之時.

同上,作二圓之公切線卽得.

III. A, B二圓不相遇之時.

以AB,直線外之任一點爲中心,以相當之長爲半徑作一圓,與A, B二圓相交,令其交點爲C, D, E, F.由是連結公弦CD, EF,其交點爲O,又任意作一圓,與A, B二圓相交,設其交點爲C', D', E', F'.由是連結公弦$C'D', E'F'$;設$C'D', E'F'$相交於O點.連結O, O',則OO'卽爲A, B二圓之根軸.

證 因O爲關於A, B二圓等冪之點,O'亦爲其等冪之點,故OO'卽爲A, B二圓之根軸.

討論 兩圓為同心圓,其根軸可說在無窮遠處;兩圓重合之時,其根軸可說有無數個.

247. 因$\overline{AB}^2$卽表示AB線上之正方形,$AB \cdot AC$卽表示AB, AC線分所包之矩形,故本章關於圓冪之定理,常可用面積之語表示之,如定理101及102可寫作下二定理:

定理 I. 圓內二弦相交,各弦由其交點分得之二部分所包之矩形相等.

定理 II. 外分弦為二部分所包之矩形,等於由其分點所作切線上之正方形.

248. **例題** 兩圓外切於P,其一外公共切線之切點為A及B.由作直徑AC,由C作他圓之切線CD,則AC等於CD.

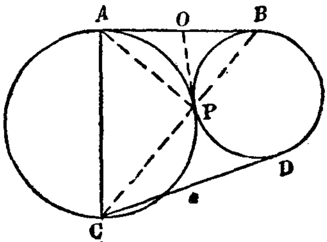


圖 206.

證 過P作內公切線PO,與AB交於O,如是則OA, OP, OB均相等,故P在以AB為直徑之圓周上,而$\angle APB = \angle R$.

又因AC為直徑,故$\angle APC = \angle R$.

由於CPB為一直線,故

$$\overline{CD}^2 = CP \cdot CB. \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $AC \perp AB$, $\therefore AC$為APB圓之切線.

$$\therefore \overline{AC}^2 = CP \cdot CB. \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1) 及 (2),知　$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2$, $\therefore AC = CD.$

249. **證法研究——直線之證法**　故證明一直線爲圓之切線,大都證明下列三事之一:

一. 證明此直線至圓心之距離等於此圓之半徑.

二. 證明此直線於弦夾成之角,等於此弦所對之弓形角.

三. 證明此直線上之正方形,等於此直線不與圓共通之一端關於此圓之圓冪.

習　　題

1. 通過圓內定點之弦,爲此定點所分弦之二部分所包之矩形,等於以定點爲中點之弦之半爲一邊之正方形.

2. 直角三角形由直角之頂點至斜邊作垂線,分斜邊爲二部分,則此二部分所包之矩形等於垂線上之正方形.

3. 三角形之垂心分垂線爲二分,每二分所包之矩形均相等.

4. 由半圓之直徑 AB 兩端,任作二弦 AE, BD, 設其交點爲 C, 則　$AC \cdot AE + BC \cdot BD = \overline{AB}^2.$

5. 相交二圓,由其公共弦或其延長線上之一點引兩直線與各圓周相交,此四交點必同在一圓周上.

6. 三圓周每二圓相交,則其三公共弦必同交於一點.

7. 直角三角形由直角之頂點至斜邊作垂線,則所分

斜邊之一部分與斜邊所包之矩形,等於此部分鄰邊上之正方形.(圖 207)

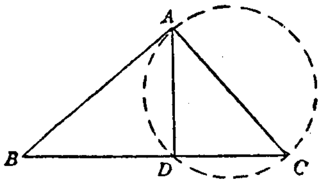


圖 207.

8. 內接於圓之二等邊三角形,由其頂點 A 任作 APQ 直線與底邊 BC 交於 P, 與圓周交於 Q, 則 $PA \cdot QA$ 恆為一定.(圖 208)

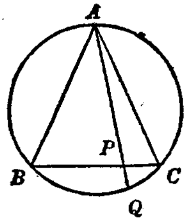


圖 208.

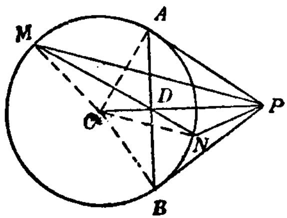


圖 209.

9. 自中心為 C 之圓外一點 P, 作二切線 PA, PB. 通過 AB 弦之中點 D 任作 MN 弦, 如是則 P, C, M, N 同在一圓周上, 且 CP 連結線必平分 MPN 角.(圖 209)

10. 由圓周上 P 點引 PA, PB, PC 三弦, 又作割線 MN 與過 P 點之切線平行, 若 MN 與 PA, PB, PC 之交點為 H, K, L, 則

$$PA \cdot PH + PB \cdot PK = PC \cdot PL.$$

11. 由三角形 ABC 之各頂點至對邊作垂線, AD, BE, CF, 設其垂心為 H, 則

$$2(AD \cdot AH + BE \cdot BH + CF \cdot CH) = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2.$$

12. 過直線 ABC 上二定點 A, B 作圓周，由定點 C 作此圓周之切線，則其切點之軌跡為以 C 為中心之一圓周.

13. AB 為二相交圓之公共弦，CD 及 $C'D'$ 為二圓之公共切線，P, Q 各為 AB 與 $CD, C'D'$ 之交點，如是則 $CP = PD$, $C'Q = QD'$，而 $\overline{PQ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$.

14. AB, AC 為二垂直之直線，以 AC 上之一點 O 為圓心，作一圓周；由 AB 上之任意點 P 作此圓之切線，設其兩切點為 D, E，則 DE 直線不論 P 在 AB 之何處，恆通過一定點.

15. 如上題，PO, DE 交點為 F，則 F 點之軌跡為何？(圖 210)

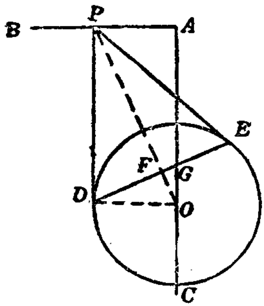


圖 210.

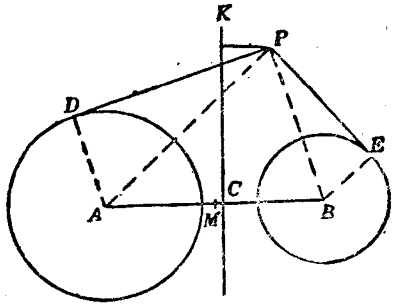


圖 211.

16. 自一點所作二圓切線上正方形之差，等於二圓中心連結線與自此點至根軸之距離所包矩形之兩倍. (圖 211)

17. 二圓O及O'垂直相交,則O圓關於O'圓之圓冪等於O圓半徑之平方.

18. 與所設二圓A,B垂直相交之圓,其中心之軌跡即A,B二圓之根軸.

第十八章

多角形之相似

250. **定義 81.** 同邊數之兩多角形,一多角形之各角,順次與他多角形之各角相等,且相等各角間之邊之比均相等,則此兩多角形稱為**相似**,二相等之角曰**對應角**,二對應邊之比曰二多角形之**相似比**.

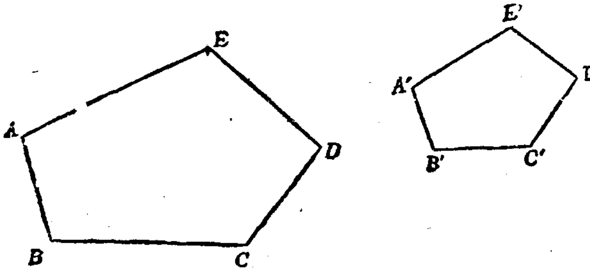


圖 212.

如上圖之兩五角形 $ABCDE$ 與 $A'B'C'D'E'$ 有下列之關係,則此兩五角形稱相似,以記號 $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ 表之.

$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C',\ \angle D = \angle D',\ \angle E = \angle E';$$

及
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

系 1. 兩相似多角形之周之比,等於其相似比.

系 2. 兩三角形相似,則其對應邊所對之角相等.

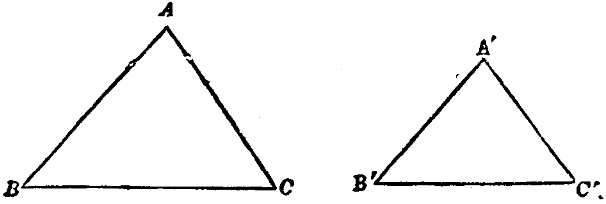


圖 213.

如圖,$\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 相似,若 AB, $A'B'$ 為對應邊,則 $\angle C = \angle C'$,

251. 定理 106. 一直線平行於三角形之一邊而與其他二邊相交,則此直線與其他二邊所成之三角形與原三角形相似.

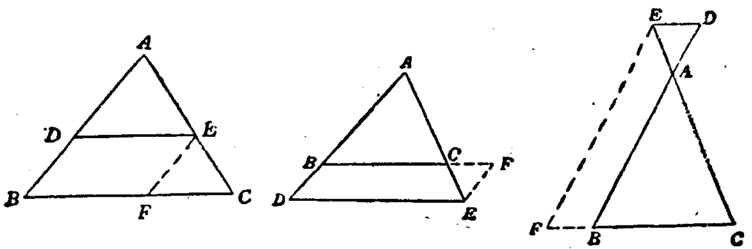


圖 214.

假設 於三角形 ABC, DE 為平行於 BC 之直線,與 AB, AC 相交於 D 及 E.

求證 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

證 $\angle BAC=\angle DAE$, $\angle ABC=\angle ADE$, $\angle ACB=\angle AED$.

又 $$DE \parallel BC,$$

$$\therefore \quad \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}. \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又過 E 引 EF 直線平行 AB, 與 BC 相交於 F,

則 $$\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC};$$

但 $$DE=BF,$$

$$\therefore \quad \frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}. \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由 (1) 及 (2), 得 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$,

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE.$$

【注意】 DE 在 BC 之下方或 $\angle A$ 之上方,證法相同,觀圖自明.

252. 定理 107. 一三角形之二角各與他三角形之二角相等,則兩三角形相似.

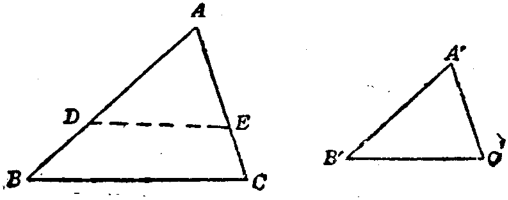


圖 215.

假設 於 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$,

$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B'.$$

求證 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

證 於 AB 上取 AD 等於其對應邊 $A'D'$ 之長，自 D 作 BC 之平行線，與 AC 相交於 E，則 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

又因 $AD = A'B',\ \angle A = \angle A',$

$$\angle ADE = \angle ABC = \angle A'B'C',$$

$$\therefore\ \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'.$$

$$\therefore\ \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

系 1. 兩三角形之各邊互相平行或互相垂直，則此兩三角形相似.

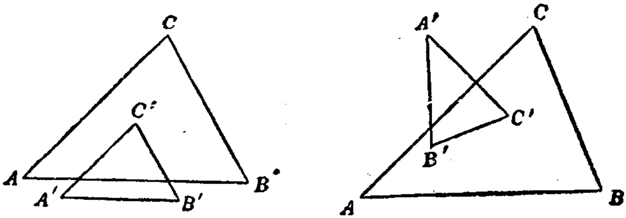


圖 216.

因兩三角形之各邊互相平行或垂直，則兩三角形之各角各相等，由上定理知其相似也.

如上圖 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 內，

$$A'B' \parallel AB,\quad B'C' \parallel BC,\quad C'A' \parallel CA,$$

或 $$A'B' \perp AB,\quad B'C' \perp BC,\quad C'A' \perp CA,$$

則 $$\angle A' = \angle A,\quad \angle B' = \angle B,\quad \angle C' = \angle C,$$

$$\therefore\ \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

系 2. 二直角三角形之一銳角相等,則二三角形相似.

系 3. 兩二等邊三角形中,其頂角相等,或一底角相等,則二三角形相似.

系 4. 自直角三角形直角頂點至斜邊所引之垂線,分此直角三角形爲與原三角形相似之二三角形.

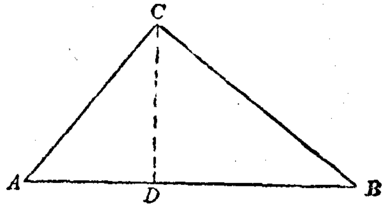


圖 217.

如右圖, $\triangle ABC$ 內, $\angle C = \angle R.$, $CD \perp AB$,

則 $$\angle ACD = \angle DBC = \angle B.,$$

$$\angle DAC = \angle DCB = \angle A.$$

$$\therefore\ \triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD.$$

253. **定理 108.** 兩三角形之一角相等,且夾此角之二邊成比例,則兩三角形相似.

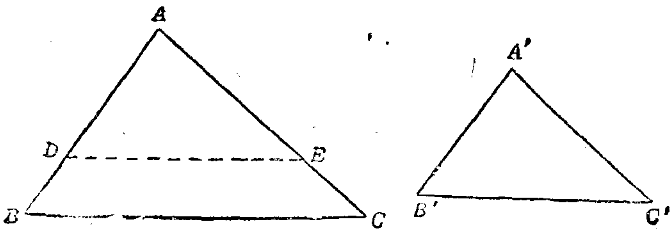


圖 218.

假設 於$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$,

$$\angle A=\angle A',\ AB:A'B'=AC:A'C'.$$

求證 $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.

證 於AB邊上取AD,使$AD=A'B'$過D引BC之平行線DE,與AC交於E點,則

$$\triangle ABC\sim\triangle ADE.$$

$$\therefore\ AB:AD=AC:AE,$$

但 $$AD=A'B',$$

$$\therefore\ AB:A'B'=AC:AE.$$

而原設 $$AB:A'B'=AC:A'C',$$

$$\therefore\ AE=A'C';$$

由是於 $$\triangle ADE\text{及}\triangle A'B'C',$$

$$A'B'=AD,\ A'C'=AE,$$

而 $$\angle A=\angle A',$$

$$\therefore\ \triangle ADE\cong\triangle A'B'C'.$$

$$\therefore\ \triangle ABC\sim\triangle A'B'C'.$$

254. **定理 109.** 兩三角形之三邊成比例,則兩三角形相似.

假設 於三角形ABC及$A'B'C'$,

$$AB:A'B'=BC:B'C'=CA:C'A'.$$

求證 $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.

證 於AB邊上取AD,使$AD=A'B'$.過D引BC之平行

線 DE, 則 $$\triangle ABC \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore AB : AD = BC : DE = CA : EA,$$

但 $$AD = A'B',$$

$$\therefore AB : A'B' = BC : DE = CA : EA.$$

而原設 $$AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'.$$

$$\therefore B'C' = DE, C'A' = EA.$$

由是 $\triangle ADE$ 及 $\triangle A'B'C'$ 之三邊各相等,

故 $$\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'.$$

因之 $$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

255. 兩三角形之相似與全相等之比較.

一. 相似與全相等性質之比較:

相似	全相等
三角各相等.	三角各相等.
等角所對之邊成比例.	等角所對之邊相等.
三邊成比例.	三邊各相等.
相似三角形不即爲全相等之三角形.	全相等之三角形必爲相似三角形.

二. 相似與全相等條件之比較:

相似	全相等
二角相等.	二角及其間之邊相等.
二邊成比例夾角相等.	二邊各相等夾角相等.
三邊成比例.	三邊各相等.

由上表知三角形相似僅須二條件,而全相等須三條件.

256. 定理 110. 兩多角形,若順次可分為同數之相似三角形,則此兩多角形相似.又其逆亦眞.

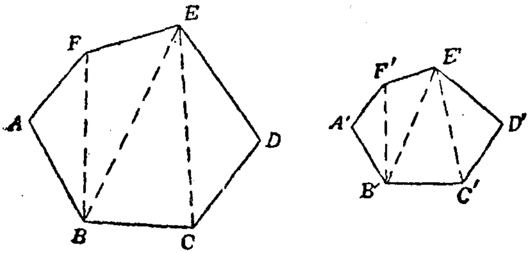


圖 219.

假設 二多角形 $ABCD\cdots\cdots$, $A'B'C'D'\cdots\cdots$. $ABCD\cdots\cdots$ 順次分為三角形 ABF, BEF, BCE, CDE. $A'B'C'D'\cdots\cdots\cdots$ 順次分為三角形 $A'B'F'$, $B'E'F'$, $B'C'E'$, $C'D'E'$. 而 $\triangle ABF \sim \triangle A'B'F'$, $\triangle BEF \sim \triangle B'E'F'$, $\triangle BCE \sim \triangle B'C'E'$, $\triangle CDE \sim \triangle C'D'E'$.

求證 $ABCD\cdots\cdots \sim A'B'C'D'\cdots\cdots$.

I. 證明多角形之各角相等:

因 $\triangle ABF \sim \triangle A'B'F'$, 故 $\angle A = \angle A'$, $\angle AFB = \angle A'F'B'$.

又因 $\triangle BEF \sim \triangle B'E'F'$, 故 $\angle BFE = \angle B'F'E'$.

但 $\angle F = \angle AFB + \angle BFE$, $\angle F' = \angle A'F'B' + \angle B'F'E'$.

$$\therefore \angle F = \angle F'.$$

同理得證　$\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$, ...

II. 證明多角形之各對應邊成比例:

因　$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'F'}{AF}=\dfrac{B'F'}{BF}$,　$\dfrac{B'F'}{BF}=\dfrac{F'E'}{FE}=\dfrac{E'B'}{EB}$,

$\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'E'}{CE}=\dfrac{E'B'}{EB}$,　$\dfrac{C'E'}{CE}=\dfrac{C'D'}{CD}=\dfrac{D'E'}{DE}$,

故　$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'F'}{AF}=\dfrac{F'E'}{FE}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'D'}{CD}=\dfrac{D'E'}{DE}$.

綜括I及II,可知$ABCD\cdots\cdots\sim A'B'C'D'\cdots\cdots$.

逆定理　二多角形相似,則順次可分成同數之相似三角形

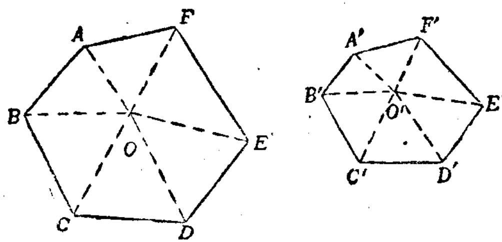


圖 220.

證　自多角形$ABCDEF$內之任一點O,連結OA, OB,次於$A'B'C'D'E'F'$內部,於AB之對應邊$A'B'$作角$\angle B'A'O'$, $\angle A'B'O'$各等於$\angle BAO$, $\angle ABO$,則其交點O'爲三角形OAB之相似三角形$O'A'B'$之頂點.

$$\therefore \triangle OAB\sim\triangle O'A'B'$$

連結O點與第一多角形之各頂點,又連結O'與第二多角形之各頂點,則 $\triangle OBC \sim \triangle O'B'C'$,

$$\triangle OCD \sim \triangle O'C'D',$$

$$\triangle ODE \sim \triangle O'D'E',$$

$$\triangle OEF \sim \triangle O'E'F',$$

$$\triangle OFA \sim \triangle O'F'A'.$$

257. 定理 111. 自同一點至二平行線所引諸截線,分此二平行線間之各部分成比例.又其逆亦眞.

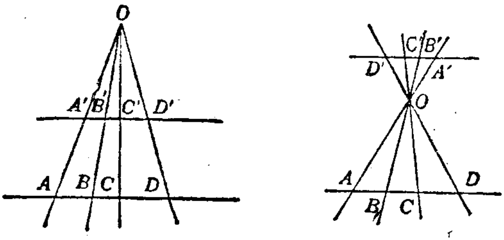


圖 221.

假設 有二平行線$A'D'$及AD,自一點O引一羣截線OAA', OBB', OCC', ODD',與AD交於A, B, C, D,與$A'D'$交於A', B', C', D'.

求證 $$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}.$$

證 由相似三角形OAB, $OA'B'$,

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OB'}{OB}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

同樣,由相似三角形$OBC,OB'C'$,

$$\frac{OB'}{OB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{OC'}{OC}.\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

最後,由相似三角形$OCD,OC'D'$,

$$\frac{OC'}{OC}=\frac{C'D'}{CD},\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由(1),(2),(3),得 $$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD},$$

逆定理　截線AA',BB',CC',DD',與二平行線相交,若其所截平行線間之各部分成比例,則此等截線會於一點.

證　若AA',BB'交於O點,連結OC,令OC與$A'D'$之交點爲C'';

由是 $$\frac{A'B'}{B'C''}=\frac{AB}{BC}.$$

但原設 $$\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{AB}{BC},$$

$$\therefore\quad B'C''=B'C'.$$

故C''不能不與C'相合,由是O,C',C在一直線上,即CC'亦通過O點,同理得證DD'亦通過O點,故各線均通過O點.

【注意】　若AA'與BB'平行,則其他直線均互相平行,此時可說其交點在無窮遠處.

258.　**定理 112.**　兩相似多角形面積之比,等於其相似比之平方.

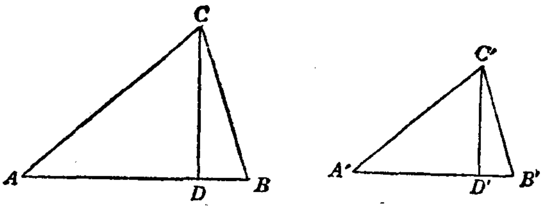


圖 222.

假設 二相似多角形S及S', AB及$A'B'$為其任意之一組對應邊.

求證
$$\frac{S}{S'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

證. 分S及S'各為n個相似三角形,令$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$為其中一組之相似三角形,令CD及$C'D'$為$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$之高,則 $\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot CD,$

$$\triangle A'B'C'=\frac{1}{2}A'B'\cdot C'D'.$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot CD}{A'B'\cdot C'D'}=\frac{AB}{A'B'}\cdot\frac{CD}{C'D'}.$$

然
$$\frac{CD}{C'D'}=\frac{AB}{A'B'},$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\cdot\frac{AB}{A'B'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

由是知一組相似三角形面積之比,等於其相似比之平方,以T_1代表$\triangle ABC$,以$T_2, T_3, \cdots\cdots T_n$代表多角形$S$分得之其餘三角形;又以$T_1'$代表$\triangle A'B'C'$,以$T_2', T_3'\cdots\cdots T_n'$代表

多角形S'分得之對應三角形，則

$$S=T_1+T_2+T_3+\cdots\cdots+T_n,$$

$$S'=T_1'+T_2'+T_3+\cdots\cdots+T_n'.$$

但其餘各組相似三角形面積之比，均可同法證其各等於相似比之平方，即

$$\frac{T_1}{T_1'}=\frac{T_2}{T_2'}=\frac{T_3}{T_3'}=\cdots\cdots=\frac{T_n}{T_n'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

故由和比定理，得

$$\frac{T_1+T_2+T_3+\cdots\cdots T_n}{T_1'+T_2'+T_3'+\cdots\cdots T_n'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},$$

即 $$\frac{S}{S'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

259. **定理 113.** 距二定直線距離之比，等於所設比之點，其軌跡爲過此二直線交點之二直線.

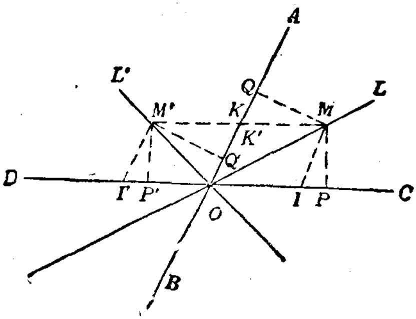


圖 223.

假設　AB, CD二直線相交於O，定比為$\frac{m}{n}$.

求證　距AB, CD二直線距離之比等於$\frac{m}{n}$之點，其軌跡為過O之二直線.

證　M為AOC角內合於條件之一點，連結MO，自M作MP, MQ垂直於OC, OA，則$\frac{MP}{MQ}=\frac{m}{n}$.

自M各作OA及OC之平行線MI及MK，由是$\triangle MPI$三邊之方向一定，故$\triangle MPI$不論M之位置若何，皆為相似，故$\frac{MI}{MP}$之值常一定，同理$\frac{MK}{MQ}$之值亦一定，由是$\frac{MI}{MK}$，$\frac{MQ}{MP}$亦一定，故$\frac{MQ}{MP}$之值一定之M點之軌跡，即$\frac{MI}{MK}$之值一定之M點之軌跡，又$MK=IO$，故三角形MOI之二邊之比$\frac{MI}{IO}$及其夾角$\angle MIO$一定，故$\triangle MOI$之形狀一定，因之$\angle MOI$亦一定，由是M點之軌跡為過O之直線OL.

同理得證OL'亦為所求之軌跡.

詳細證明，學者試自行補充之.

260. **定理 114.**　自一角之一邊上之一點，至他邊引一垂線，則此二邊及垂線所成之三角形中，每二邊之比恆不變.

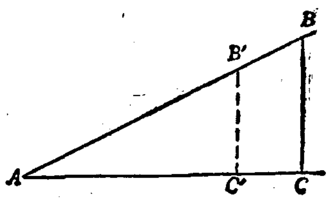


圖　224.

假設 有一 BAC 定角，A 為其頂點，B 為其一邊 AB 上之點，BC 為自 B 至一邊 AC 之垂線.

求證 $\dfrac{CB}{AB}$，$\dfrac{AC}{AB}$，$\dfrac{CB}{AC}$ 之值恆不變.

證 於 AB 上任意另取一點 B'，自 B' 作 AC 之垂線 $B'C'$，

則 $\triangle AC'B'$ 與 ACB 中，

$$\angle C' = \angle C = \angle R, \quad \angle A \text{ 公共,}$$

$$\therefore \quad \triangle AC'B' \sim \triangle ACB.$$

由是 $\dfrac{C'B'}{AB} = \dfrac{CB}{AB'}$，$\dfrac{AC'}{AB'} = \dfrac{AC}{AB'}$，$\dfrac{C'B'}{AC'} = \dfrac{CB}{AC}$.

故不論 B 在 AB 上取任何位置，$\dfrac{CB}{AB}$，$\dfrac{AC}{AB}$，$\dfrac{CB}{AC}$ 之值恆不變.

261. 例題 設 $\triangle ABC$ 之一邊 BC 上有二定點 D, E 與 BC 平行之一直線與二邊 AB, AC 各交於 F, G，試求 DG, EF 二直線交點 M 之軌跡.

證 設 M 為合於條件之一點，作過 A, M 二點之直線 X，與 BC, FG 之交點各為 H 及 I，

則 $\dfrac{FI}{GI} = \dfrac{HE}{HD}$，$\dfrac{FI}{GI} = \dfrac{HB}{HC}$.

(定理 111)

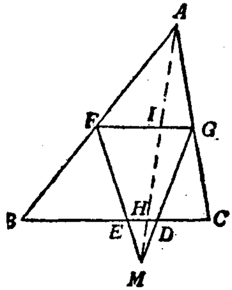


圖 225.

故 $$\frac{HB}{HC}=\frac{HE}{HD},$$

即 $$\frac{HB}{HC}=\frac{HB\pm HE}{HC\pm HD}=\frac{BE}{DC}.^*$$

由是 $$\frac{DC}{HC}=\frac{BE}{HB},$$

$$\therefore\quad \frac{BE}{HB}=\frac{DC+BE}{HC+HB}=\frac{DC+BE}{BC}.$$

因 B,C,D,E 均爲定點,故 H 亦爲定點.

由是屬於軌跡上之點,均在 X 直線上.

次研究 X 上之點,是否適於所設條件,此事分 D 在 BE 之間及 D 在 BE 之外二情形:

一. D 在 B 與 E 之間　連結 AD,則邊 AC 在 ADC 角內,故 DG 亦必在此角內,但軌跡上之 M 點必在 DG 上,故 M 點亦在 ADC 角內,故直線 X 上 AH 之延長部分不屬於軌跡甚明,由是此軌跡之限界爲 A 及 H 二點.

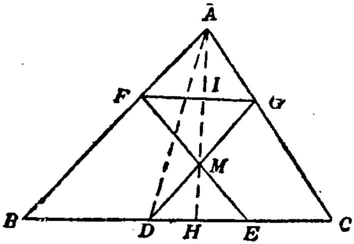


圖 226.

於 AH 上任取一點　,連結 DM' 延長之與 AC 交於 G'. 過 G' 引 BC 之平行線 $G'F'$ 與 AB 會於 F' 點,連結 $M'F'$, $M'E$, 又設 AH, $F'G'$ 之交點爲 I'.

* D 在 BE 之間用加號; D 在 B, E 之外用減號.

則 $\frac{F'I'}{I'G'}=\frac{HB}{HC}$, 但 $\frac{HB}{HC}=\frac{HE}{HD}$,

$$\therefore \quad \frac{F'I'}{I'G'}=\frac{HE}{HD}.$$

由是F', M' E'易證其在一直線上,故線分AH之點均為適合所設條件之點,故AH即為所求之軌跡.

二. D在B與E之外 AH向H方向延長之得半直線X_1,向A方向延長之得半直線X_2. FG與BC極近時,M點與H點極近,若FG離BC漸遠,則M與H亦漸遠,若FG在$F'G'$位置之時,則EF, DG平行,即其交點已遠至不可知之處,故M點在HX_1半直線上移動.

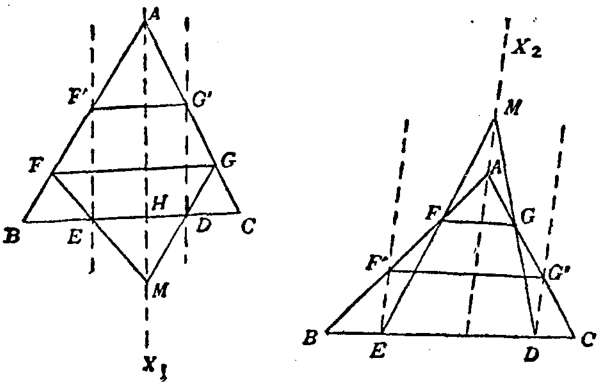


圖 227.

同理M點可在AX_2半直線移動.

由是M點在線分AH兩端之延長線X_1X_2上移動.

同上得證 X_1X_2 上之點,均適合於條件,而 X_1X_2 爲所求之軌跡.

【注意】 軌跡常爲一直線或圓周之一部分,或爲數直線及數圓周之若干部分,此時須將線之兩端明白指示以免含混,如上例題是也.

習題

1. 從圓外之一點 A 作二割線與圓各交於 B, C 及 D, E; 則 ABE 三角形與 ACD 三角形相似.

2. 梯形之對角線互相分得之線分成比例.

3. 二圓內切,則過切點所引大圓之弦爲小圓分得之線分之比不變.

4. 內接三角形 ABC 之 C 角角平分線 CD 延長之與外接圓相交於 E,則 $DB : EC = DB : CB$.

5. 相似三角形之對應角平分線或高之比,等於其相似比,

6. 兩三角形 ABC 及 $A'B'C'$ 之高 AD 與高 $A'D'$ 之比,等於邊 BC 與 $B'C'$ 之比,且角 B 等於角 B',則兩三角形相似.

7. 兩相似三角形之對應之高,分三角形爲相似之三角形.

8. 二相似多角形之周之比,等於其對應對角線之比.

9. 一平行四邊形之一角與他平行四邊形之一角相等，且其夾邊成比例，則兩平行四邊形相似.

10. AB, AC 爲過圓周上一點所引之弦，AD 爲直徑，過 D 之切線與 AB, AC 各交於 E 及 F，則三角形 ABC 及 AEF 相似.

11. 一三角形之三邊各與他三角形之三邊在同方向成等角，則兩三角形相似.

12. 設有定方向之直線 XY 及定角 BAC，頂點 A 爲 XY 外之一定點，B 爲 BA 與 XY 之交點；於他邊 AC 取 C 點使 $AB \cdot AC$ 等於定值 K^2. 若 BAC 角繞 A 點旋轉，問 C 點之軌跡爲何?

13. 設有點 A 及直線 BC，過 A 至 BC 引任意直線 AN，於 AN 上取 M 點，使 $AM \cdot AN$ 等於定值 K^2. 求 M 點之軌跡.

14. 圓之內接四邊形 $ABCD$ 之對角線 AC, BC 相交於 E，則

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{BE}{ED}.$$

15. 內接於直角三角形 ABC 之正方形 $DEGF$，邊 DE 與斜邊 BC 一致，則正方形之一邊爲斜邊兩端部分 BD, EC 之比例中項.

16. 直線 AB 以 $AB \cdot AD = \overline{AC}^2$ 分於 C, D 二點，過 A 點引與 AC 相等之直線 AE，則 BED 角必爲 EC 所平分.

第十九章　位似圖形

262. **定義 82.** 平面上有一組之點 $A, B, C, \cdots\cdots$, 自平面上之一定點 S, 引 $SA, SB, SC, \cdots\cdots$ 諸直線線分, 於此等直線上取 $SA', SB', SC', \cdots\cdots$ 諸線分, 使

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}\cdots\cdots=\text{一定值}K;$$

則此新得之 $A', B', C', \cdots\cdots$ 一組點所成之圖形爲原一組點 $A, B, C, \cdots\cdots$ 所成之圖形之位似圖形; 其定點 S 稱爲位似中心, 其定値 K 稱爲位似比.

263. **定理 115.** 圓之位似圖形仍爲一圓.

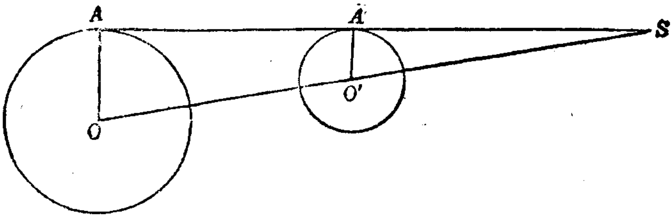


圖 228.

假設 有一圓之中心爲 O, 半徑爲 OA, 位似中心爲 S, 位似比爲 K.

求證 O 圓之位似圖形仍爲一圓.

證 引任意半徑 OA, 連結 SA, SO. 於 SA, SO 上取 SA'

SO'，使
$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SO'}{SO}=K.$$

由是 $\triangle SAO$ 及 $\triangle SA'O'$ 爲相似圖形，

$$\therefore\ \frac{O'A'}{OA}=K,\qquad 又\qquad \frac{SO'}{SO}=K.$$

但 OA, SO 之長均爲一定，故 $O'A'$ 之長及 O' 點之位置均爲一定．由此可知 A' 點之軌跡爲以 O' 爲中心，$O'A'$ 爲半徑之一圓；故圓之位似圖形仍爲一圓．

264.　定理 116.　二位似圖形，其第一圖形之任意二點之連結直線，與第二圖形上此二點之對應二點之連結直線，互相平行，且其比等於位似比．

假設　A, B 爲一圖形上之任意二點，A', B' 爲其位似圖形上 A, B 二點之對應點，位似比爲 K.

求證　$AB \parallel A'B'$，　$\frac{A'B'}{AB}=K.$

證　設位似中心爲 S，連結 SA, SB，則 A' 及 B' 必爲以同比 K，分線分 SA, SB 所得之二點．

由是　$$\triangle SAB \sim \triangle SA'B',$$

$$\therefore A'B' \parallel AB.$$

而　$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}=K.$$

系 1.　在一圖形中之三點在一直線上，則其位似圖形上之三對應點，亦同在一直線上．

系 2.　一直線之位似圖形爲其平行之一直線(此二直線互稱曰對應線).

系 3.　二直線之交角與其對應二直線之交角相等.

系 4.　多角形之位似圖形亦爲一同邊數之多角形.

265.　**定理 117.**　兩圖形上各取一點,至各自圖形之各點之連結線,若對對平行,且其對應線分之比相等,則二者爲位似圖形.

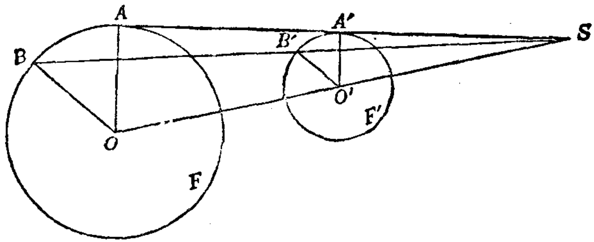


圖 229.

假設　O 及 O' 爲二圖形 F 及 F' 上之一點; $A, B, C, \cdots\cdots$ 及 $A', B', C', \cdots\cdots$ 各爲 F 及 F' 上之點. $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$, $OC \parallel O'C'$, $\cdots\cdots$, 且

$$\frac{O'A'}{OA} = \frac{O'B'}{OB} = \frac{O'C'}{OC} = \cdots\cdots = K.$$

求證　F 及 F' 爲位似之二圖形.

證　設 OO' 及 AA' 之交點爲 S.

因　　$OA \parallel O'A'$.

$$\therefore \quad \frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA} = K = \frac{SA'}{SA}.$$

同理得證 $\frac{SO'}{SO} = \frac{SB'}{SB} = K$, $\frac{SO'}{SO} = \frac{SC'}{SC} = K$.

由是圖形 F' 上之 $A', B', C', \cdots\cdots$ 一切點,各爲圖形 F 上之 $A, B, C, \cdots\cdots$ 之對應點.

故二圖形 F, F' 爲位似圖形,其位似比爲 K.

系　各邊平行之二相似多角形爲位似圖形.

266. **定理 118.** 二位似圖形之對應頂點之連結直線會於一點,此點卽二圖形之位似中心.

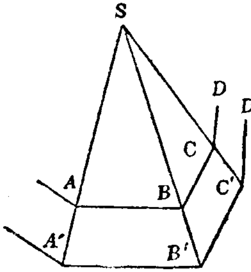


圖 230.

假設　二位似圖形 $ABCD\cdots\cdots$ 及 $A'B'C'D'\cdots\cdots$.

求證　其對應頂點之連結線 $AA', BB', CC', \cdots\cdots$ 會於一點,此點卽爲位似中心.

證　設位似中心爲 S,由定義,$AA', BB', \cdots\cdots$ 諸直線通過 S,而證明已畢.

267. **定理 119.** 自一定點至多角形各頂點所引之諸線分,以同比內分(或外分)之,則順次連結諸分點所成之多角形與原多角形位似.

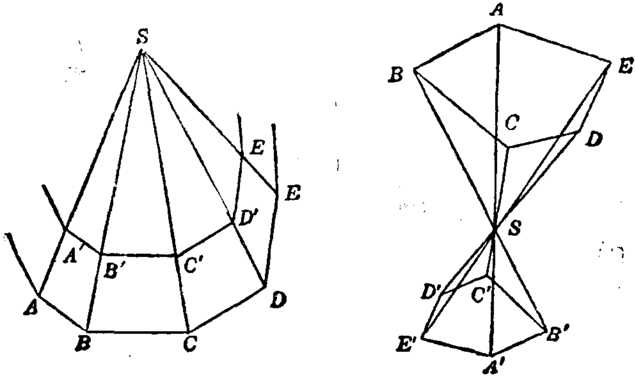


圖 231.

假設 有多角形 $ABCD\cdots\cdots$, 由一點 S 引 SA, SB, SC,$\cdots\cdots$諸直線,以同比 K 內分(或外分)此線分於 A', B', C',$\cdots\cdots$各點.

求證 $A'B'C'D'\cdots\cdots$多角形為 $ABCD\cdots\cdots$多角形之位似多角形.

證　因 $\dfrac{SA'}{SA}=\dfrac{SB'}{SB}$,

$$\therefore \triangle SAB \sim \triangle SA'B',$$

$$\therefore A'B' \,//\, AB,$$

而
$$\frac{SA'}{SA}=\frac{A'B'}{AB}.$$

同理 $B'C' \parallel BC$, $C'D' \parallel CD$,……,

$$\frac{SB'}{SB}=\frac{B'C'}{BC},\qquad \frac{SC'}{SC}=\frac{C'D'}{CD},\cdots\cdots.$$

由假設
$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\cdots\cdots,$$

$$\therefore \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\cdots\cdots.$$

故由定理117及系,知$A'B'C'$……爲ABC……之位似多角形.

【注意】 如上圖,位似比爲正,則位似中心在二圖形之同側,而稱此位似中心爲外位似中心.若位似比爲負,則二圖形在位似中心之異側,而稱此位似中心爲內位似中心.

268. **作圖題 18.** 在一所設三角形中作一內接三角形,令其邊各與第三三角形平行.

設有兩三角形ABC及GHK,求於$\triangle ABC$內作一內接三角形,令其各邊與$\triangle GHK$之各邊平行.

解析 設所求之三角形爲DEF已作得,則任作一平行於FE之直線$F'E'$,與AB及AC交於F',E'二點.又過F點引$F'D' \parallel FD$,過E'引$E'D' \parallel ED$.若$F'D'$與$E'D'$交於D',則$\triangle DEF$, $\triangle D'E'F'$爲位似圖形. $\therefore D'D$, $E'E$, $F'F$相交於一點,故D, D'與A在一直線上.但$\triangle D'E'F'$爲任意可作之三

角形,而 AD' 與 BC 之交點 D, 即爲所求三角形之一頂點.
由是得作圖法如下:

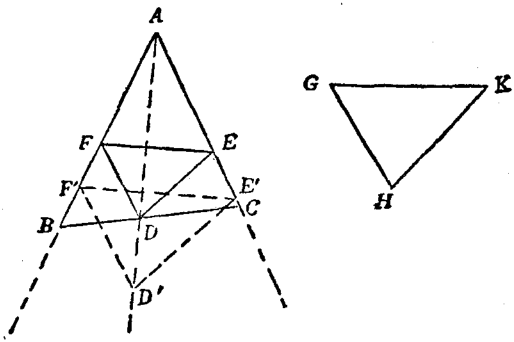


圖 232.

作圖 作任意一三角形 $D'E'F'$, 使 F', E' 各在 AB, AC 上,其三邊與 $\triangle GHK$ 之三邊兩兩並行.連結 AD' 與 BC 交於 D. 自 D 作 $DE \parallel HK$, $DF \parallel HG$, 連結 FE, 則 $\triangle DEF$ 即爲所求之三角形.

證 從略.

269. **作圖題 19,** 在所設三角形 ABC 內,於 CA 上取一點 D, 在 CB 上取一點 E, 使 $AD = DE = EB$.

解析 設 $ADEB$ 即爲所求之圖形, 過 C 引直線 $CG \parallel DE$, 與 AE 相交於 G. 過 G 引 $GK \parallel CB$, 與 AB 之延長線相交於 K, 由是 $ABED$ 與 $AKGC$ 爲二位似圖形, 故 $KG = GC = CA$. 今 CA 爲已知之長,故得作圖法如下:

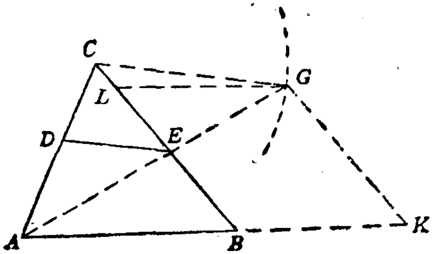


圖 233.

作圖　以 C 爲中心, CA 爲半徑畫一圓; 於 BC 上取等於 CA 之 BL, 自 L 作一直線平行於 AB, 與所作之圓相交於 G. 連結 AG 與 BC 相交於 E. 連結 CG, 過 E 作直線 ED 平行於 GC, 與 AC 相交於 D, 則 DE 即爲所求之直線.

證及討論　從略.

【注意】　作圖之位似法　作圖時往往因所求之圖形不易作得,則可作其位似圖形,更就位似之理而作所需要之圖形,如上二例題是也.

習　　題

1. 求自 ABC 角外一定點 P 引一直線與二邊 BA, BC 交於 Q, R 二點, 使 $PQ = 2PR$.

2. 設有一定點 P 及過 O 之三半直線 OA, OB, OC, 求過 P 引一截線, 截 OA, OB, OC 於 X, Y, Z 三點, 使 $\frac{XY}{YZ} = \frac{2}{3}$.

3. 求作割線爲兩同心圓所平分.

4. 求過定點 A，引直線與兩定直線 X, Y 相交於一點，但 X, Y 不能延長使之相交.

5. 求於三角形內作內接正方形.

6. 求於半圓周內作內接正方形.

7. 求於弓形內作內接矩形，其兩鄰邊之比等於定比.

第二十章

三角形中各量之關係

270. **定理 120.** 直角三角形夾直角之一邊爲斜邊與此邊在斜邊上之正射影之比例中項.

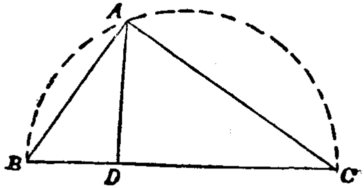


圖 234.

假設 三角形 ABC, $\angle A$ 爲直角, AD 爲自 A 至 BC 之垂線.

求證
$$\overline{BA}^2 = BC \cdot BD,$$
$$\overline{CA}^2 = BC \cdot CD.$$

證 因 $\angle BDA = \angle BAC$,

$\therefore$ AD, AC 爲關於 B 角之二逆平行線. 故

$$\overline{BA}^2 = BC \cdot BD.$$

同理
$$\overline{CA}^2 = BC \cdot CD.$$

系 1. 過直徑之一端所作之弦,為直徑與此弦在其上之正射影之比例中項.

系 2. 直角三角形夾直角二邊平方之和等於斜邊之平方.

因 $\overline{BA}^2 = BC \cdot BD, \quad \overline{CA}^2 = BC \cdot CD.$

$$\therefore \quad \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 = BC \cdot BD + BC \cdot CD$$
$$= BC \cdot (BD + CD)$$
$$= BC \cdot BC = \overline{BC}^2.$$

(此即 Pythagoras 定理.)

系 3. 直角三角形夾直角二邊平方之比等於其在斜邊上之正射影之比.

271. **定理 121.** 在直角三角形之三邊上作相似之三多角形,則斜邊上多角形之面積等於夾直角二邊上多角形面積之和.

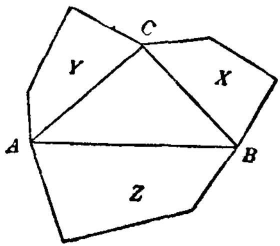


圖 235.

假設 三角形 ABC 內, $\angle C = \angle R.$, X, Y, Z 各為 $BC, CA,$

AB 上所作之相似多角形.

求證 $X+Y=Z.$

證 因相似多角形之比等於其對應邊平方之比.

故 $$X : Y = \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2,$$

則 $$\begin{aligned} X+Y : Y &= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 : \overline{AC}^2 \\ &= \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 \\ &= Z : Y. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad X+Y=Z.$$

272. **定理 122.** 三角形銳角對邊之平方等於他二邊平方之和減去他二邊之一,與在此邊上另一邊之正射影之積之二倍.

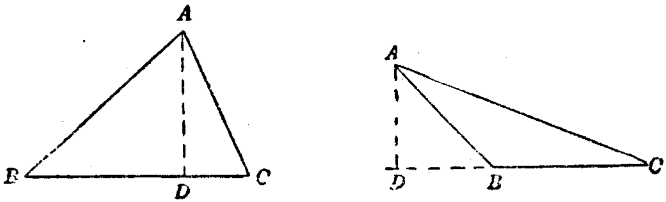


圖 236.

假設 三角形 ABC 內,$\angle C$ 爲銳角,自 A 引 BC 之垂線 AD.

求證 $$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2\,BC \cdot DC.$$

證 由$\triangle ABD$,知 $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$. ………………… (1)

又 $$BD = BC - DC,$$

$$\therefore \quad \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 - 2BC \cdot DC.$$

代入(1)式得 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,BC \cdot DC.$

但 $$\overline{DC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{CA}^2,$$

故 $$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2BC \cdot DC.$$

273. **定理 123.** 三角形鈍角對邊之平方等於他二邊之平方和加以他二邊中之一邊與在此邊上另一邊之正射影之積之二倍.

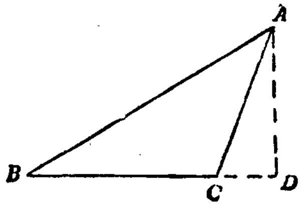


圖 237.

假設 三角形 ABC, $\angle C$ 爲鈍角, AD 爲自 A 至 BC 之垂線.

求證 $$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + 2\,BC \cdot CD.$$

證 由 $\triangle ABD$, 得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又因 $$BD = BC + CD,$$

$$\therefore \quad \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\,BC \cdot CD.$$

代入(1)式得 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2\,BC \cdot CD.$

但
$$\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{CA}^2,$$

故
$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + 2\,BC \cdot CD.$$

由上二定理及Pythagoras氏定理得直接推知下列二定理均爲眞確.

274. **定理 124.** 三角形之一角爲銳角,直角,或鈍角,因而其對邊之平方小於,等於,或大於其他二邊平方之和.

定理 125. 三角形之一邊之平方小於,等於,或大於其他二邊平方之和,因而其對角爲銳角,直角,或鈍角.

275. **正負號之應用** 定理122及定理123中,若線分之正負亦計算在內,則可總括爲

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + 2\,BC \cdot CD$$

一式.設三角形中三邊 AB, BC, CA 之方向均爲正,則 CA 在 BC 上之射影應爲 CD,由是得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + 2\,BC \cdot CD$$

一式.在定理122中,CD 之方向爲負,而 DC 之方向爲正,故得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2\,BC \cdot CD.$$

在定理123中,CD 之方向爲正,故得

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + 2\,BC \cdot CD.$$

276. **三角形之高** 以三角形三邊之長表示三角形之高,亦可應用定理122或123以求得之.設三角形ABC之高$AD=h$; a,b,c各爲A,B,C三角之對邊.設$\angle C<90°$,則由定理122,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot CD,$$

$$\therefore\quad CD = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}.$$

但 $$h^2 = b^2 - \overline{CD}^2,$$

故 $$h^2 = b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}.$$

令 $$a+b+c = 2p,$$

則 $$b+c-a = 2(p-a),$$

$$a+c-b = 2(p-b),$$

$$a+b-c = 2(p-c),$$

而 $$h^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2},$$

故 $$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

又三角形之面積 $= \dfrac{ah}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

277. 定理 126. 三角形二邊平方之和,等於第三邊上中線平方加第三邊之半之平方之兩倍*.

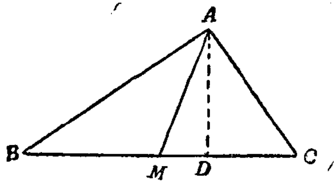


圖 238.

假設 三角形 ABC, M 為 BC 之中點, AM 為中線.

求證 $$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=2(\overline{MA}^2+\overline{BM}^2).$$

證 自 A 引 BC 之垂線 AD.

設 $$\angle AMB>\angle AMC,$$

則 $$\overline{CA}^2=\overline{AM}^2+\overline{MC}^2-2\,MC\cdot MD,$$

$$\overline{AB}^2=\overline{BM}^2+\overline{MA}^2+2\,BM\cdot MD.$$

相加,得 $$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=2(\overline{MA}^2+\overline{BM}^2).$$

系 1. 四邊形四邊平方之和,等於二對角線平方之和,加以四倍二對角線中點連結直線之平方†.

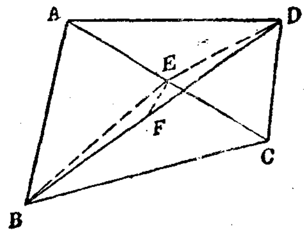


圖 239.

* 此定理稱曰 Pappus 定理.

† 此系稱曰 Euler 定理.

如圖,AC, BD 為四邊形 $ABCD$ 之對角線,E, F 為其中點,則連結 BE, ED,由 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ADC$,得

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2,$$

$$\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2.$$

由是 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=4\overline{AE}^2+2(\overline{BE}^2+\overline{DE}^2).$

又由 $\triangle BED$,得 $\overline{BE}^2+\overline{DE}^2=2\overline{BF}^2+2\overline{EF}^2,$

故 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{EF}^2.$

系 2. 平行四邊形四邊平方之和,等於其對角線平方之和.

系 3. 至二定點距離之平方和等於定值之點,其軌跡為以二定點連結線之中點為中心之一圓周.

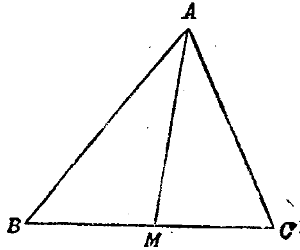


圖 240.

設 B, C 為二定點,A 為合於條件之點,則

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\text{定值 } K^2,$$

故 $$2\overline{MA}^2+2\overline{BM}^2=K^2,$$

$$\therefore\ \overline{MA}^2=\frac{K^2}{2}-\overline{BM}^2=\frac{K^2}{2}-\frac{\overline{BC}^2}{4}.$$

即 A 點距 M 之距離為一定,故 A 點之軌跡為以 M 為

中心之一圓周.

證及討論 從略.

278. **定理 127.** 三角形二邊平方之差,等於第三邊與第三邊上中線在第三邊上正射影之積之二倍.

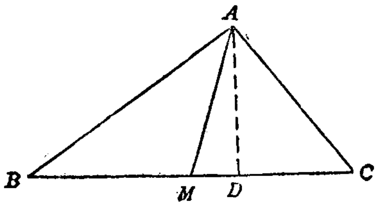


圖 241.

假設 三角形 ABC, M 爲 BC 之中點, AD 爲自 A 至 BC 之垂線, $\angle AMB > \angle AMC$.

求證 $\overline{AB}^2 - \overline{CA}^2 = 2\,BC \cdot MD.$

證 因 $\overline{AB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MA}^2 + 2\,BM \cdot MD,$

$\overline{CA}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - 2\,MC \cdot MD.$

故 $\overline{AB}^2 - \overline{CA}^2 = 2\,BM \cdot MD + 2\,MC \cdot MD = 2\,BC \cdot MD.$

系 距二定點距離平方之差等於定值之點,其軌跡爲二定點連結線之一垂直線.

279. **定理 128.** 三角形二邊之積等於其夾角平分線之平方,加此平分線分對邊所得二部分之積.

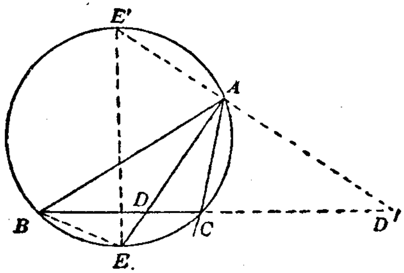


圖 242.

假設 設角A之平分線AD與BC交於D.

求證 $$AB\cdot CA=\overline{AD}^2+BD\cdot DC.$$

證 作$\triangle ABC$之外接圓$ABEC$,延長AD與BC弧相交於E,則E爲$\overset{\frown}{BC}$之中點,

而 $$\triangle ABE\sim\triangle ADC,$$

故 $$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}.$$

故 $$\begin{aligned}AB\cdot AC&=AD\cdot AE\\&=\overline{AD}^2+AD\cdot DE\\&=\overline{AD}^2+BD\cdot DC.\end{aligned}$$

系 三角形二邊之積,等於其夾角之外角平分線分對邊所得二部分之積,減去此外角平分線之平方.

設AD'爲$\angle A$之外角之角平分線,與外接圓交於E',則$\triangle ABE'\sim\triangle AD'C$.

故 $$AB \cdot AC = AE' \cdot AD' = (D'E' - AD') \cdot AD'$$
$$= BD' \cdot D'C - \overline{A'D'}^2.$$

280. 三角形外接圓之半徑

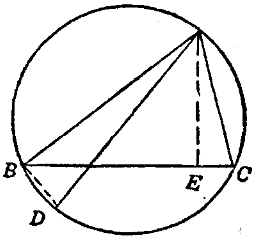


圖 243.

設 AD 爲 $\triangle ABC$ 之外接圓之直徑,自 A 作 BC 上之高 AE,則因

$$\angle ABD = \angle AEC = \angle R.,$$
$$\angle ACE = \angle ADB,$$
$$\therefore \quad \triangle ABD \sim \triangle AEC.$$

故 $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC}$; 即 $AB \cdot AC = AD \cdot AE.$

設外接圓之半徑爲 R, 則 $AB \cdot AC = 2R \cdot AE.$

但 AE 爲三角形之高 h, AC 爲 b 邊, AB 爲 c 邊, 故由第 276 節,得

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

281. 三角形內接圓之半徑

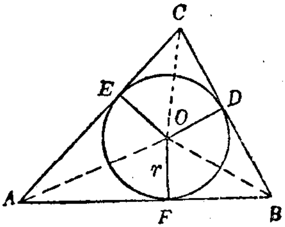


圖 244.

設 $\triangle ABC$ 之內接圓 DEF 與三角形之三邊切於 D, E, F 三點,其半徑爲 r. 因 $AE = AF, CD = CE, BD = BF$, 故三角形之面積等於

$$\tfrac{1}{2}(AB + BC + CA)r = pr.$$

$$\therefore \quad pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\therefore \quad r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

$$= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

282.　**定理 129.**　不能內接於圓之四邊形，其對角線之相乘積小於二對邊相乘積之和.

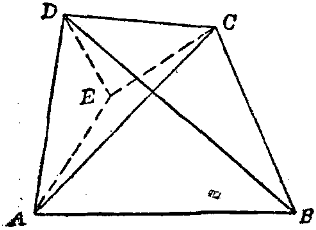


圖 245.

假設　四邊形 $ABCD$; A, B, C, D 四點不在一圓周上.

求證　$AC \cdot BD < AB \cdot CD + BC \cdot DA.$

證　因 A, B, C, D 不在一圓周上，故 $\angle DAC \neq \angle DBC$. 作直線 AE, DE，令 $\angle DAE = \angle DBC$, $\angle ADE = \angle BDC$. 設 AE, DE 相交於 E，連結 EC，則 $\triangle BCD$ 及 $\triangle AED$ 為相似形.

$$\therefore \quad DA : AE = DB : BC.$$

即　$$DA \cdot BC = AE \cdot DB. \quad \cdots\cdots (1)$$

又　$$\angle ADB = \angle EDC,$$

而　$$AD : DB = ED : CD,$$

故　$\triangle ABD$ 與 $\triangle ECD$ 亦為相似.

$$\therefore\quad CD : EC = DB : AB,$$

$$\therefore\quad AB \cdot CD = EC \cdot DB. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) 及 (2) 相加,得

$$AB \cdot CD + DA \cdot BC = DB \cdot (AE + EC),$$

但 $AE + EC > AC$, 故 $AB \cdot CD + BC \cdot DA > AC \cdot BD$.

系 1. 圓之內接四邊形對角線之相乘積,等於兩組對邊相乘積之和*.

因此時 E 在 AC 上故也.

系 2. 若四邊形之兩對角線之相乘積,等於其兩組對邊相乘積之和,則此四邊形可內接於圓.

283. **定理 130.** 自三角形之各頂點至其對邊(或對邊之延長線),引交於一點之三直線,則所分三邊上線分之比之相乘積等於1.又其逆亦眞†.

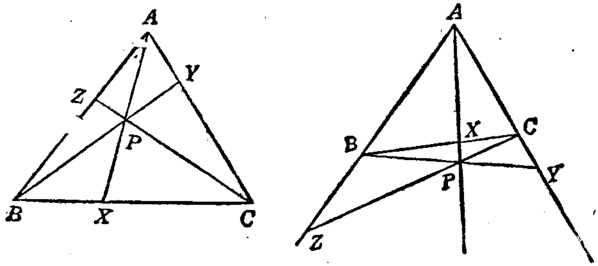


圖 246.

* 此系稱曰 Ptolemy 定理.

† 此為 Ceva 之定理.

假設 三角形ABC, AX, BY, CZ爲自A, B, C至對邊所引之直線,而AX, BY, CZ相交於一點P.

求證 $(AZ:ZB)(BX:XC)(CY:YA)=1.$

證 因 $BX:XC=\triangle ABX:\triangle AXC,$

$$BX:XC=\triangle PBX:\triangle PXC,$$

$$\therefore\quad \triangle ABX:\triangle AXC=\triangle PBX:\triangle PXC$$

$$=\triangle ABX\mp\triangle PBX:\triangle AXC\mp\triangle PXC$$

$$=\triangle ABP:\triangle APC.$$

故 $BX:XC=\triangle ABP:\triangle APC.$

同理 $CY:YA=\triangle BCP:\triangle ABP,$

$$AZ:ZB=\triangle APC:\triangle BCP.$$

由是 $(AZ:ZB)(BX:XC)(CY:YA)$

$$=(\triangle APC:\triangle BCP)(\triangle ABP:\triangle APC)(\triangle BCP:\triangle ABP)$$

$$=1.$$

逆定理 自三角形之三頂點各至對邊引直線,若所分得對邊線分之比之相乘積等於1,則此三直線交於一點.

證 設AX, BY之交點爲P,連結CP與AB(或其延長線)會於Z'點,則

$$(BX:XC)(CY:YA)(AZ':Z'B)=1.$$

但原設 $(BX:XC)(CY:YA)(AZ:ZB)=1,$

$$\therefore\quad AZ':Z'B=AZ:ZB.$$

故 Z 與 Z' 一致, AX, BY, CZ 會於一點.

284. **定理 131.** 直線 XYZ 截 $\triangle ABC$ 之三邊 BC, CA, AB 於 X, Y, Z 三點; 則

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1^*.$$

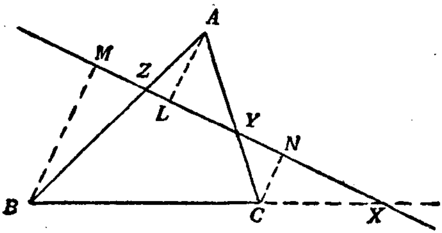


圖 247.

證 自 A, B, C 引 XZ 之垂線 AL, BM, CN. 由相似三角形之理, 得

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{AL}{BM},$$

$$\frac{BX}{XC}=\frac{BM}{CN},$$

$$\frac{CY}{YA}=\frac{CN}{AL},$$

故 $$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=\frac{AL}{BM}\cdot\frac{BM}{CN}\cdot\frac{CN}{AL}=1.$$

其逆定理得仿上法證明.

* 此定理稱曰 Menelaus 定理.

習　題

1. 二等邊三角形 ABC 之底 BC 上之正方形，等於 AB 邊與 BC 在 AB 上正射影所包矩形之二倍.

2. 三角形 ABC 之三高爲 AD, BE, CF，垂心爲 O，則 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=2(AD\cdot AO+BE\cdot BO+CF\cdot CO)$.

3. 三角形各邊上正方形和之三倍，等於各中線上正方形和之四倍.

4. 由任意一點至正方形各頂點所聯成之直線上之正方形，其和等於一對角線上正方形，加以由此點至對角線交點連結線上正方形之四倍.

5. 四邊形兩對角線上正方形之和，等於二組相對邊中點連結線上正方形之和之二倍.

6. 三角形 ABC 中，BC 邊之中點爲 D，則

$$4\overline{AD}^2=2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2-\overline{BC}^2.$$

7. 與一圓之直徑 AB 平行作一弦 CD，P 爲 AB 上之任意一點，則　$\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$.

8. 由二定點至定圓周上之一點所作兩直線上各正方形之和爲最大或最小.

9. 由定點與一定圓之弦之兩端連結線夾成直角，則此弦中點之軌跡爲一圓周.

10. 於二等邊三角形ABC之底邊BC上任取一點D,則

$$\overline{AB}^2-\overline{AD}^2=BD\cdot DC.$$

11. 二垂直弦上各部分正方形之和,等於直徑上之正方形.

12. 自直角三角形一邊之中點,引斜邊之垂線,分斜邊爲二部分,則此二部分上平方之差,等於他一邊之平方.

13. 設O爲圓之中心,OA,OB爲垂直二半徑,自弧AB上之一點C引OA之垂線CD,與AOB角之平分線交於E,則

$$\overline{CD}^2+\overline{DE}^2=\overline{OA}^2.$$

14. 過一點引多角形各邊之垂線,分各邊爲二部分,將此等部分,間一取之,其平方之和相等.

15. 四邊形對角線平方之和,等於相對邊中點連結線上平方和之二倍.

16. 若G爲三角形ABC之重心,則

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=3\left(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2\right).$$

17. 梯形對角線平方之和,等於不平行二邊平方之和,加以平行二邊所包矩形之二倍.

18. 於直徑上取離中心O距離相等之二點A,B;而P爲圓周上任意之點,則$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$常一定.

19. 矩形$ABCD$之頂點A一定,頂點B,C同在一圓周上運動,求頂點D之軌跡.

20. 設有一圓O及一點P,自M點引O圓之切線與

MP 常相等，求 M 點之軌跡.

21. a, b, c 爲以 $\angle A$ 爲直角之直角三角形之三邊，h 爲(以斜邊爲底)三角形之高，則 $b+c, h, a+h$ 爲三邊之三角形，亦爲直角三角形.

22. 已知梯形之四邊，試計算其對角線之長.

23. 自直角三角形之頂點 A，引斜邊 BC 之垂線 AD，分三角形爲二直角三角形，若 R, r, r' 各爲三角形 ABC, ABD, ACD 內接圓之半徑，則 $R^2 = r^2 + r'^2$.

24. 直角三角形中夾直角之一邊爲他一邊之二倍時，則自直角頂點引斜邊之垂線分斜邊爲1與4之比.

25. 已知三角形之三邊 $a = 13, b = 14, c = 15$. 求此三角形之三個高.

26. 已知三角形之三邊 $a = 40, b = 13, c = 37$. 求此三角形之內接圓半徑及外接圓半徑.

27. 已知三角形之三邊各爲 17 公分，113 公分及 120 公分. 求此三角形之面積.

第二十一章

關於比例之作圖

285. 作圖題 20. 分所設線分爲若干部分,令其所得各部分與所設其他諸線分成比例.

設有線分 AB 及三線分 m, n, p; 求分 AB 爲與 m, n, p 成比例之三線分.

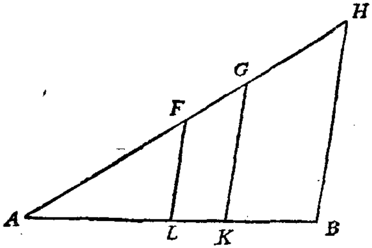


圖 248.

作圖 過 A 引一任意直線 AC, 於 AC 上取 AF, FG, GH 各等於所設線分 m, n, p.

連結 HB, 自 G, F 作 HB 之平行線 GK, FL, 與 AB 交於 K, L, 則 AL, LK, KB 卽爲所求之線分.

證 從略.

【注意 I】 分一線分,令其所得各部分與所設諸數成.

比例，亦與此問題作法相同，因吾人可任取一共通單位以定線分之長，如分所設線分爲與5，3，2成比例之三線分，則可任意取一相當單位，若公分者，則得5公分，3公分，2公分長之三線分，由上作圖法作之可也.

【注意 II】 分一線分爲任意相等之諸線分，亦可依上作圖法求之；然下列作圖法亦頗有用，因可免作平行線也.

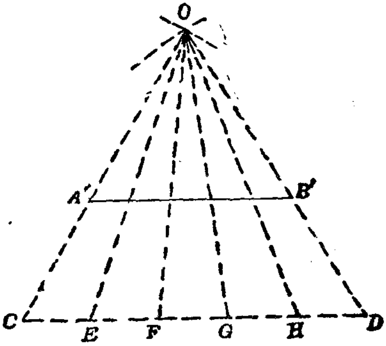


圖 249.

如分 AB 線分爲相等之五線分，則可於任意直線 CD 上，取 CE, EF, FG, GH 及 HD 相等之五線分，以 C, D 各爲中心，以 CD 爲半徑各作一圓相交於 O；連結 OC, OE, OF, OG, OH 及 OD. 又以 O 爲中心，以 AB 爲半徑作一圓，與 OC, OD 各交於 A', B'. 連結 $A'B'$，則 $A'B'$ 與 AB 等長；而 $A'B'$ 與 OE, OF, OG, OH 之各交點，乃分 $A'B'$ 爲五等分.

286. **作圖題 21.** 求所設三線分 M, N, P 之第四比

例項.

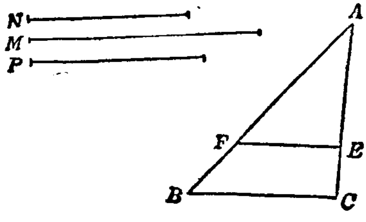


圖 250.

作圖 作角 BAC 於 AB 上取與 M, N 等長之線分 AB, AF, 於 AC 取與 P 等長之 AC, 連結 BC. 自 F 作 BC 之平行線 FE 與 AC 相交於 E 點, 則 AE 之長即爲所求之第四比例項.

證 因 $\triangle AFE \sim \triangle ABC$, 故 $AB : AF = AC : AE$.

即 $M : N = P : AE$, 故 AE 即爲所求之長.

【注意】 若直線 N, P 相等, 則 AE 爲 M, N 之第三比例項.

287. 作圖題 22. 求二所設線分 A, B 之比例中項.

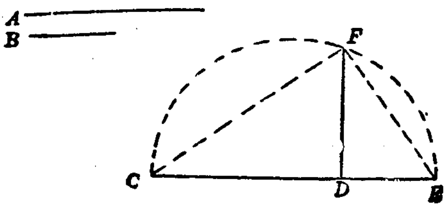


圖 251.

作圖 I. 於一直線上取$CD=A, DE=B$,(點E在CD之延長線上),以CE為直徑作一圓,自D作CE之垂線與圓周交於F,則DF即為所求之線分.(圖 251)

證 因 $\triangle CDF \sim \triangle FDE$,

故 $CD : DF = DF : DE$. 即 $A : DF = DF : B$.

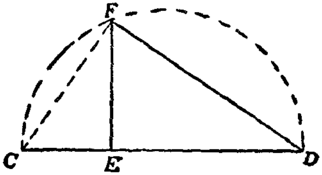


圖 252.

作圖 II. 取CD等於A,DE等於B(E在CD之間).以CD為直徑畫一圓.自E作CD之垂線與圓周交於F,則FD即為所求之線分.(圖 252)

證 因 $\triangle CDF \sim \triangle FDE$,

故 $$CD : FD = FD : DE.$$

即 $$A : FD = FD : B.$$

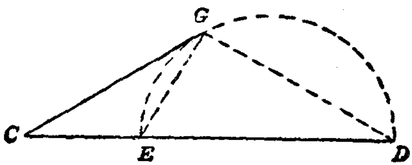


圖 253.

作圖 III. 取$CD = A$, $CE = B$,令E在CD之間,以ED為直徑畫一圓.自C作此圓之切線CG, G為切點,則CG即為所求之線分.(圖 253)

證 因 $\angle CDG = \angle CGE$,

故 $\triangle CDG \sim \triangle CEG$.

因之 $CD : CG = CG : CE$.

即 $A : CG = CG : B$.

288. **用幾何作圖法以求數** 凡實數可以幾何圖形表示之.如5,6等數,吾人可任取一線分之長為單位,則五倍此單位線分之長表示5,六倍此單位線分之長表示6.若將單位線分分為5等分,則其一等分表示$\frac{1}{5}$.正數與負數可以線分之方向區別之.如自左至右之線分表示正數,則自右至左之線分表示負數矣.

單位之長可任意規定,與解問題無關,但解一問題之時,單位之長卻不可變更.

茲以大寫字母表直線之長;以小寫字母表線分之度數,以x表所求之數,舉作圖求數法數例於下:

I. $x = a + b - c + d - e$之作圖.

用兩腳規自定向之直線上一點O,取OA, AB,令OA之度數為a, AB之度數為b.次由B於反對方向取BC,使BC之度數為c,又於原方向取CD,反對方向取DE,使CD, DE之度數各等於d及e,則OE之度數即為所求之數.

II. $x=\dfrac{a_0a_1a_2a_3}{b_1b_2b_3}$ 之作圖.

上式可寫作三個比例式,如:

$$\frac{c}{a_0}=\frac{a_1}{b_1},\qquad \frac{c_1}{c}=\frac{a_2}{b_2},\qquad \frac{x}{c_1}=\frac{a_3}{b_3},$$

規定一任意單位,設對應於 a_0 之線分爲 A_0, a_1 之線分爲 A_1, 其餘仿此,由下列三式:

$$\frac{C}{A_0}=\frac{A_1}{B_1},\qquad \frac{C_1}{C}=\frac{A_2}{B_2},\qquad \frac{X}{C_1}=\frac{A_2}{B_3}.$$

順次求第四比例項 C, C_1, X; 則 X 之度數 x, 即爲所求之數矣.

III. $x=\sqrt{\dfrac{p}{q}}$ 之作圖.

因 $x^2=\dfrac{p}{q}\cdot 1$, 故 x 爲 $\dfrac{p}{q}$ 與 1 之比例中項,其作圖法自明,不復詳述.

289. 作圖題 23. 在所設直線 $A'B'$ 上,作

I. 與所設三角形 ABC 相似之三角形;

II. 與所設多角形 $ABCDE$ 相似之多角形.

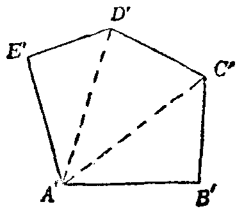


圖 254.

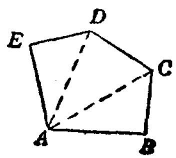


圖 255.

作圖 I. 設$A'B'$之對應邊爲AB,則作$B'A'C'$角等於BAC角,作$A'B'C'$角等於ABC角.設$A'C'$, $B'C'$之交點爲C',則$\triangle A'B'C'$即爲所求之三角形.

II. 於$ABCDE$多角形之頂點A,引對角線AC, AD,分多角形爲若干三角形.設$A'B'$之對應邊爲AB,則於$A'B'$上作與$\triangle ABC$相似之三角形$A'B'C'$;於$A'C'$上作與$\triangle ACD$相似之三角形$A'C'D'$;最後於$A'D'$上作與$\triangle ADE$相似之三角形$A'D'E'$,則所得之多角形$A'B'C'D'E'$即爲所求之多角形.

290. **作圖題 24.** 已知二直線之和及其積,求作此二直線.

解析 設所求二直線之和爲線分BC之長,二直線之積爲線分a之平方.又設此二線分已作得,爲BF及FC,則以BC爲直徑畫一圓,自F作BC之垂線FE與圓周交於E.自E引BC之平行線DE,與過B點BC之垂線BD交於D.因$\overline{EF}^2 = BF \cdot FC$,故$EF$即爲線分$a$之長,由是$BD$之長爲$a$,故得作圖法如下:

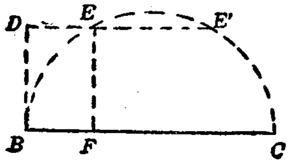


圖 256.

作圖 以BC為直徑畫一圓，自B引BC之垂線BD，令$BD=a$. 自D引BC之平行線與圓周相交於E. 自E引BC之垂線EF，與BC相交於F，則BF，FC即為所求之二直線.

討論 若$a=\frac{BC}{2}$則僅有一解，若$a<\frac{BC}{2}$則有二解，若$a>\frac{BC}{2}$則無解.

【注意】 由上作圖，可知和一定之二直線其積最大之時，二直線相等.

291. **作圖題 25.** 已知二直線之差及積，求作此二直線.

解析 設線分EF為二直線之差，a之平方為其積. 假設所求之二直線為DE，DF. 以EF為直徑畫一圓，自D作此圓之切線DB，則DB為DE，DF之比例中項，故$DB=a$. 自B引直徑BC，則$BC=EF$，即為二直線之差，由是得作圖法如下：

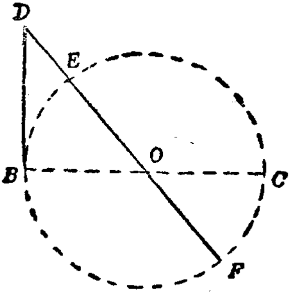


圖 257.

作圖　於直角之一邊取與a等長之BD,又於其他邊取與EF之半等長之BO.以BO爲半徑,以O爲中心畫一圓.連結DO並延長之,與此圓交於E,F二點,則DE,DF卽爲所求之二直線.

292. 一元二次方程式之幾何學的解法.　如下列形式之一元二次方程式,其根可由作圖法求得:

$$x^2 \pm px \pm q = 0.\quad (\text{但}p,q\text{爲任意正數})$$

一元二次方程式有下列之四種形式:

$$x^2 + px + q = 0,\qquad x^2 - px + q = 0,$$

$$x^2 + px - q = 0,\qquad x^2 - px - q = 0;$$

但若以$-x$代x,則第一式可歸入於第二式,第三式可歸入於第四式.由是研究下列二種方程式之作圖法足矣:

$$x^2 - px + q = 0, \cdots\cdots (1)$$

$$x^2 - px - q = 0; \cdots\cdots (2)$$

上二方程式可寫爲

$$q = x(p - x), \cdots\cdots (1)'$$

$$q = x(x - p), \cdots\cdots (2)'$$

由(1)′可知(1)方程式之根,其和等於p,其積等於q;由(2)′知(2)之根,其差等於p,其積等於q,故一元二次方程式,可依照前二問題之作圖法,求得其根.

例題　由作圖法解方程式:

$$x^2 + 2x - 12 = 0. \cdots\cdots (1)$$

以 $-x$ 代 (1) 式中之 x, 得

$$x^2-2x-12=0.$$

即 $$12=x(x-2).\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

任作一直角 EGF, 於其一邊取 GE, 使 $GE=\sqrt{12}$, 又於他一邊取 GF, 等於 $(2\div2)$ 個單位之長. 以 F 爲中心, GF 爲半徑畫一圓, 連結 EF, 並延長之與圓相交於 L, M, 則 EL, EM 之度數, 即爲所求之根之絕對值.

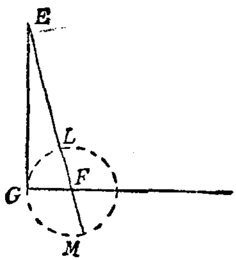


圖 258.

【注意】 用作圖法解方程式, 雖不若代數學之簡捷, 但若所求之根爲無理數時, 往往可藉作圖以求其近似值. 根之正負, 可由方程式直接視察而得, 不必在作圖時注意, 以免煩雜, 如上例之根, 大者爲負, 小者爲正.

293. **作圖題 26.** 內分及外分所設線分爲二部分, 令其一部分爲此線分之全長與他部分之比例中項.

即求線分 AB 之內分點 X 與外分點 X', 令

$$\overline{XA}^2=AB\cdot XB,\ \overline{X'A}^2=AB\cdot X'B.$$

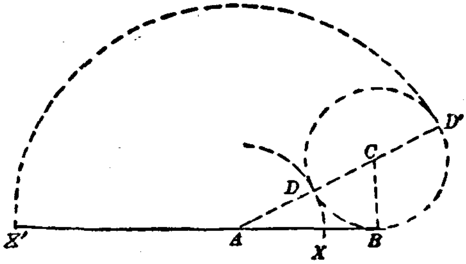


圖 259.

作圖 自線分之一端 B 作 AB 之垂線 BC, 使 $BC = \frac{1}{2}AB$. 以 C 爲中心, CB 爲半徑畫一圓與 AC 之連結線交於 D 及 D' 二點. 以 A 爲中心, AD 及 AD' 爲半徑各畫一弧與 AB 或 BA 之延長線交於 X 及 X' 二點, 則 X 及 X' 卽爲所求之分點.

證 I. 內分之時.

因 AB 爲 C 圓之切線, 故 $\overline{AB}^2 = AD \cdot AD'$.

但 $AD \cdot AD' = AD\,(AD + DD') = AD\,(AD + AB)$,

故 $$AB\,(AB - AD) = \overline{AD}^2.$$

卽 $$AB\,(AB - AX) = \overline{AX}^2.$$

故 $$AB \cdot XB = \overline{AX}^2.$$

II. 外分之時.

因 $\overline{AB}^2 = AD \cdot AD' = AD'\,(AD' - DD')$

$$= AD'\,(AX' - AB),$$

故 $$AB(AB+AX')=\overline{AX'}^2.$$

即 $$AB\cdot X'B=\overline{AX'}^2.$$

294. 定義 83. 上作圖中 X, X' 二點,稱為線分 AB 分於中外比之點*.

295. 例題 1. 通過定直線 XY 外之二點 A, B,求作圓與 XY 相切.

作圖 連結 AB 延長之,與 XY 交於 C. 在直線 XY 上取 CP,使 CP 為 CA, CB 之比例中項. 過 A, B, P 作一圓,則此圓即為所求之圓.

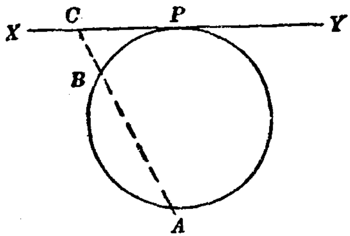


圖 260.

證 從略.

討論 A, B 如在 XY 之異側,則本題不能解, A, B 連結線不垂直 XY,則有二解,如垂直 XY,則僅一解.

例題 2. 已知三角形之三個高 h, k, l,求作三角形.

解析 設與三角形三個高 h, k, l 三個高對應之底為 a, b, c,則 ah, bk, cl 均為三角形面積之二倍,故 $ah=bk=cl$.

即 $$\frac{a}{k}=\frac{b}{h}=\frac{c}{\frac{hk}{l}}.$$

---

* 此分法稱曰黃金切斷 (Golden section).

故所求之三角形之三邊與$k, h, \frac{hk}{l}$成比例,由是得作圖法如下:

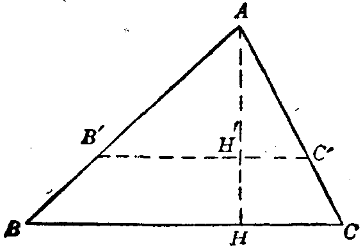


圖 261.

作圖 作三邊等於$k, h, \frac{hk}{l}$之三角形$A'B'C'$,自A引$B'C'$之垂線AH',於AH'上取等於h之AH,過H引$B'C'$之平行線與AB', AC'相交於B, C,則$\triangle ABC$即爲所求之三角形.

【注意】 本題之證明及討論,學者試自爲之,$\frac{hk}{l}$即h, k, l,之第四比例項.

某種作圖題往往先求得其相似圖形,而後作所求之圖形,如是之作圖法曰相似形法,如上例題是也。

296. **例題** 求合於下列聯立方程式之二線分x, y.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ xy &= b^2 \end{aligned}\right\}.$$

解析 由第一方程式,知x, y爲以a爲斜邊之直角三角形夾直角之兩邊,故以a之長爲直徑畫一半圓,自圓周

之某點至直徑之兩端所引之二線分爲所求之x, y. 設$BC = a$, ABC爲半圓, AB, AC爲所求之x, y二線分. 自A引BC之垂線AD, 則$AB \cdot AC = AD \cdot BC$.

由第二方程式得$b^2 = a \cdot AD$,故AD爲a, b之第三比例項, 由是得作圖法如下:

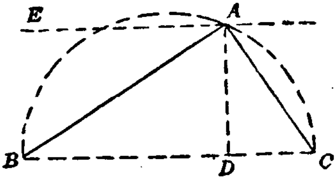


圖 262.

作圖　以等於a之線分BC爲直徑畫一半圓, 求a, b之第三比例項, 作BC之平行線EA, 使其間之距離等於求得之第三比例項, 若EA與半圓相交於A, 則AB, AC卽爲所求之線分.

討論　此題須$AD \leqq \dfrac{BC}{2}$, 卽$a^2 \geqq 2b^2$. 若$a^2 < 2b^2$, 則平行線與半圓無交點, 不能作圖.

習　　題

1.　用作圖法求$1\frac{1}{2}$寸與2寸二線分之第三比例項.

2.　求$1\frac{1}{4}$寸, 2寸, $2\frac{1}{4}$寸長三線分之第四比例項.

3. 試求1.2吋及2.7吋長二線分之比例中項.

4. 以中外比分5寸長之線分,並求其分得部分之近似值.

5. 求分6寸長之線分爲中外比之線分,並求各線分之長.

6. 已知二直線之和爲15,其積爲36,求此二線分.

7. 已知二直線之差爲3,其積爲25,求作此二線分.

8. 用作圖法求下列各式之近似值:

a. $\frac{17\cdot3\cdot8}{13\cdot5}$. b. $\frac{11\cdot3\cdot14\cdot5}{6\cdot23\cdot7}$.

c. $\sqrt{\frac{15\cdot3}{13}}$. d. $\sqrt{\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{7\cdot11\cdot3}}$.

9. 用作圖法解下列各方程式:

a. $x^2-8x+16=0$.

b. $x^2-13x-48=0$.

c. $x^2+5x-22=0$.

10. 用作圖法解下列聯立方程式:

a. $\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=25\\xy&=6\end{aligned}\right\}$. b. $\left.\begin{aligned}x^2+y^2-48&=0\\xy&=9\end{aligned}\right\}$.

11. 過AB弧上一點作一弦,使此弦爲AB弦所平分.

12. 自圓外一點P作此圓之割線PAB,使$PA:PB$等於定比$m:n$.

13. 過二圓之一交點引一割線,使在二圓中之二部分之比等於定值.

14. 過所設 O 點引直線與所設二直線交於 A, B 二點,使 $OA : OB$ 等於所設之比 $m : n$.

15. 已知圓周上之二定點,求此圓周上之第三點,使其至二定點距離之比等於所設之比.

16. A, B 各爲所設二平行線 x, y 上之定點,C 爲此等直線外之一點,求過 C 引一直線與 x, y 各交於 A', B',使 AA' 與 BB' 之比等於已知比.

17. 於三角形 ABC 之 A 角平分線上,求一點 M,使角 MBC 與 MCB 之差爲最大.

18. 一邊及其他二邊之比與一角皆已知,求作三角形.

19. 已知二邊及其夾角之平分線,求作三角形.

20. 一邊與對角線之和或差已知,求作正方形.

21. 二對角線及不平行之二邊已知,求作梯形.

22. 過所設點作一圓與所設二圓相切.

23. 過所設一點求作一圓,與所設一直線及一圓相切.

24. 過所設二點求作一圓與所設一圓相切.

第二十二章

關於面積之作圖

297. **作圖題 27.** 求作三角形與已知多角形之面積相等.

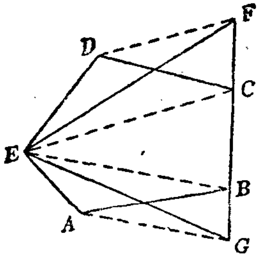


圖 263.

作圖 設 $ABCDE$ 爲所設之多角形,自 D 引 EC 之平行線 DF 與 BC 之延長線交於 F,由是 $\triangle EDC$ 與 $\triangle EFC$ 面積相等;故多角形 $ABCDE$ 與多角形 $ABFE$ 等積.但 $ABFE$ 多角形之邊數較 $ABCDE$ 多角形之邊數少1.由是順次仿此作圖,卽可得一三角形與 $ABCDE$ 等積.

如上圖,$ABCDE$ 爲五角形,作得之三角形爲 EGF.

298. **作圖題 28.** 作與所設多角形面積相等之正方形.

解 凡多角形,由上問題可作與其面積相等之三角形,故作與三角形面積相等之正方形足矣.

設X爲正方形之一邊,b及h各爲三角形之底邊及高,

則
$$X^2=\frac{bh}{2}=\frac{b}{2}\cdot h.$$

故所求正方形之一邊爲三角形底邊之半及高之比例中項.

299. **作圖題 29.** 作與一多角形面積相等且與另一多角形相似之多角形.

解 設X爲所求之多角形,其面積與多角形P相等,且與多角形Q相似.

令q爲多角形Q之任意邊,x爲多角形X中與之對應之一邊.又設多角形P,Q之面積爲a^2,b^2,則X之面積亦爲a^2,故
$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{q^2}{x^2},\qquad \frac{b}{a}=\frac{q}{x};$$

故x爲三直線b,a,q之第四比例項,先由問題21求x,次由問題23在x上作與多角形Q相似之多角形X.

300. **作圖題 30.** 作一多角形與所設二相似多角形相似,且其面積使等於二者之和或差.

解 設二相似多角形皆爲正方形,a,b各爲其邊,若$x^2=a^2+b^2$,則x爲一直角三角形之斜邊,a,b爲夾直角之二邊,故以a,b爲夾直角之二邊作一直角三角形,其斜邊卽爲所求正方形之一邊.

設 $a>b$,若 $y^2=a^2-b^2$,則 y 為直角三角形夾直角之一邊.故以 a 為斜邊,b 為一邊作直角三角形,則其第三邊即為所求正方形之一邊.

又若二相似多角形為 A,B,所設 X 為面積等於 A,B 之和之相似多角形,Y 為面積等於 A,B 之差之相似多角形.a,b,x,y 順次為 A,B,X,Y 之對應邊,由定理121知

$$x^2=a^2+b^2, \qquad y^2=a^2-b^2.$$

故 x,y 仍可作直角三角形以求之,既得 x,y,用問題23即可作 X,Y.

301. **作圖題 31.** 作一多角形與所設多角形相似,且使二者面積之比等於所設二線分之比.

設一多角形為 P,所設二線分為 M,N.求作一多角形 X,與 P 相似,且 X,P 面積之比等於 $M:N$.

解 設 P 為正方形,其一邊為 p,所求之正方形,其一邊為 x,則

$$\frac{x^2}{p^2}=\frac{M}{N}.$$

故得求 x 之作法如下:

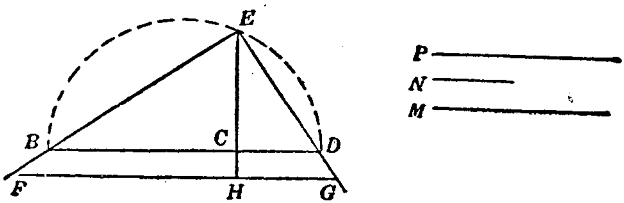


圖 264.

於一直線上(同方向)取 $BC=M$, $CD=N$, 以 BD 為直徑畫半圓；自 C 引 BC 之垂線與圓周交於 E, 連結 EB, ED；於 ED 上取 $EG=p$；自 G 引 DB 之平行線 GF 與 EB 交於 F, 則 EF 即為 x 之長.

若 P 為任意一多角形, p 為其一邊, 所求之多角形 X 之對應邊為 x, 則
$$\frac{x^2}{p^2}=\frac{M}{N}.$$

故 x 之作圖全與上同,既得 x 則 X 可作矣.

302. **例題** 過一角 O 內一定點 C 引一直線與二邊交於 A, B, 使 $\triangle AOB$ 之面積等於一正方形之面積 m^2.

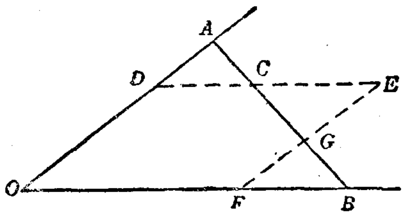


圖 265.

解 過 C 引 OB 之平行線與 OA 交於 D 點；以 OD 為一邊, O 為一角,作平行四邊形 $OFED$, 使其面積等於 m^2,設 EF, AB 之交點為 G. 若 $\triangle AOB$ 之面積為 m^2, 則
$$\triangle CGE=\triangle ACD+\triangle GBF.$$

但此三個三角形互為相似三角形,其面積與對應邊之平方成比例,故得

$$\overline{FB}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{LC}^2.$$

因 CE, DC 爲定長,故 FB 可作一直角三角形以得之.既得 B 點, AB 可作矣.

討論 FB 得在 F 之兩方取之,故本題通常有二解,然此問題之成立,必須 $CE \geqq DC$.

若 $CE = DC$,則僅得一解,此時 AB 爲 C 所平分,若 $CE < DC$,則本題不能解.

習　題

1. 作一直線平行於梯形之底邊而分梯形爲等積之二部分.

2. 分所設線分爲二部分,令其二部分上正方形之差,等於所設正方形.

3. 求作與所設三角形等積之正三角形.

4. 求作一正方形,使其各頂點在一所設正方形之各邊或其延長線上,且令其面積等於另一所設之正方形.

5. 外分一線分,使其二部分所包之矩形,等於原線分上之正方形.

6. 在四邊形內求一點,令其與四頂點之連結線四等分此四邊形.

7. 內分 AB 線分於 C 點,令 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 等於 $\overline{AC}^2$ 之三倍.

8. 於 AB 之延長線上求一點 C，使 AB，AC 所包之矩形等於所設之正方形.

9. 作所設三角形底邊之平行線，分三角形爲二部分，使其面積之比等於所設二線分之比.

10. 作梯形底邊之平行線，分梯形爲二部分，使其面積之比等於所設之比.

11. 自三角形內一點至三頂點作連結線，分三角形爲三等分，求此點之位置.

12. 過一定點作直線與一定角之二邊相交，使所成三角形之面積等於所設正方形之面積.

13. 知梯形之面積及其不平行之二邊，作此梯形內接於一定圓.

14. 已知矩形之面積，使之內接於一圓.

15. 已知二角及面積，求作圓之內接三角形.

16. 頂點在所設三直線上，求作一三角形與所設三角形等積.

17. 作所設三角形一邊之垂線，分三角形爲二部分，使其面積之比，等於所設二線分之比.

第二十三章

正　多　角　形

303. **定理 132.** 分圓周爲若干等弧,各等弧所合之弦圍成之多角形爲圓之內接正多角形,又於其分點各作切線,則所成之多角形爲圓之外切正多角形.

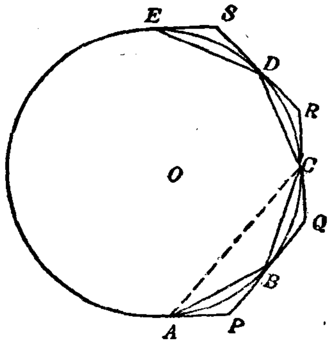


圖 266.

假設 分 O 圓之圓周爲 $AB, BC, CD, \cdots\cdots n$ 個相等之弧.自 $A, B, C\cdots\cdots$ 各點作圓之切線 $AP, PQ, QR, RS\cdots\cdots$ 相交於 $P, Q, R, S\cdots\cdots$ 各點.

求證 $ABCD\cdots\cdots$ 及 $PQRS\cdots\cdots$ 均爲 n 邊正多角形.

證 因 $$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

故 $$AB=BC=CD=\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

又因　$ABC, BCD, CDE, \cdots\cdots$ 各弓形均相等,

故　$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \cdots\cdots$.

由是　$ABCD\cdots\cdots$ 爲 n 邊正多角形.

又易知　$\triangle APB \cong \triangle BQC$.

$\therefore \angle APB = \angle BQC, \quad PB = BQ.$

同理得證其餘各弦與切線所成之三角形均相等,

故　$PQ = QR = RS = \cdots\cdots\cdots\cdots,$

$\angle APB = \angle BQC = \angle CRD = \cdots\cdots,$

故　$PQRS\cdots\cdots$ 爲 n 邊正多角形,

304. **定理 133.** 作平行於內接正多角形之各切線,則所成之多角形爲圓之同邊數外切正多角形.

仿上法,學者自證之可也.

305. **定理 134.** 正多角形必有一外接圓及一內切圓.

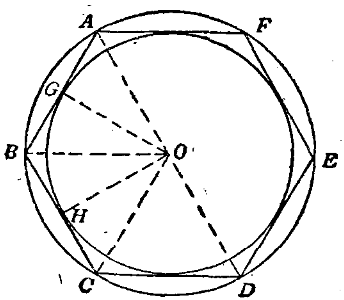


圖 267.

假設　$ABCD\cdots\cdots$ 爲一正多角形.

求證 於$ABCD$……必可作一外接圓及一內切圓.

證 欲證$ABCD$……得作一外接圓,證明通過連續三頂點A, B, C所畫之圓,必通過次一頂點D足矣.設過A, B, C所畫之圓,其中心爲O,連結OA, OD,自O引BC之垂線OH.以OH爲軸,將$ODCH$四邊形反折至$OABH$圖形上.

因 $\angle OHC = \angle OHB = \angle R.$, 故$HC$與$BH$相重.

又因 $HC = BH$, 故C落於B上.

又 $\angle HCD = \angle ABH$, 而$CD = BA$, 故CD與BA相合,D點落於A上.由是OD等於半徑OA,故以O爲中心,以OA爲半徑之圓必通過D點.

由上證明知正多角形之各邊爲其外接圓之相等弦,但相等弦至中心之距離均相等,故以O爲中心,OH爲半徑以圓,卽爲$ABCD$……之外切圓.

系 正多角形之內切圓與外接圓必爲同心圓.

306. **定義 84.** 正多角形之外接圓(或內切圓)之中心曰**正多角形之中心**.

定義 85. 正多角形外接圓之半徑稱曰**正多角形之半徑**.正多角形內切圓之半徑,稱曰**正多角形之邊心距離**.

定義 86. 自正多角形一邊之兩端所引二半徑間之夾角,曰**正多角形之中心角**.

系 1. 正多角形之中心角等於其邊數除4直角.

系 2. 正多角形之內角等於其中心角之補角.

307. 定理 135 邊數相等之兩正多角形相似,其相似比等於其半徑之比(或邊心距離之比).

假設 二正多角形 $ABCD\cdots\cdots$ 及 $A'B'C'D'\cdots\cdots$,其邊數皆爲 n; O 及 O' 各爲其中心,OF 及 $O'F'$ 各爲其邊心距離.

求證 $ABCD\cdots\cdots \sim A'B'C'D'\cdots\cdots$,且其相似比爲

$$\frac{O'A'}{OA} \text{ 或 } \frac{O'F'}{OF}.$$

證 引 $OA, OB, OC,\cdots\cdots$ 則分 $ABCD\cdots\cdots$ 爲 n 個三角形.又引 $O'A', O'B', O'C'\cdots\cdots$,則分 $A'B'C'D'$ 爲 n 個三角形.於二等邊三角形 $\triangle OAB$ 及 $O'A'B'$ 中,$\angle AOB = \angle A'O'B'$ (前節系 1),故 $\triangle OAB \sim \triangle O'A'B'$.

因之 $ABCD\cdots\cdots \sim A'B'C'D'\cdots\cdots$.

又自 O 引 AB 之垂線 OF,自 O' 引 $A'B'$ 之垂線 $O'F'$.

因 $\triangle OAB \sim \triangle O'A'B'$, 故 $\triangle OAF \sim \triangle O'A'F'$.

由是 $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{O'F'}{OF} = \text{相似比}.$$

308. 作圖題 32. 作所設圓之內接正方形.

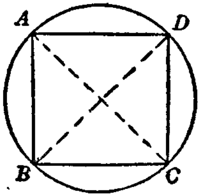


圖 268.

作圖　作互相垂直之二直徑 AC, BD. 順次連結其各端 A, B, C, D; 則 $ABCD$ 即為所求之正方形.

證　學者自證之可也.

系　於弧 AB, BC, CD, DA 上各取其中點,此等中點合 A, B, C, D 共得八點,順次連結之,則得圓之內接正八角形. 同理得作正十六角形,正三十二角形……,正 2^n 角形(但 n 為正整數,下列各問題均同).

309.　作圖題 33.　作所設 O 圓之內接正六角形.

解析　設內接正六角形為 $ABCDEF$, 引半徑 OA 與 OB, 則

$$\angle AOB = \frac{4}{6}\angle R. = \frac{2}{3}\angle R.$$

又

$$\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}\left[2\angle R. - \frac{2}{3}\angle R.\right] = \frac{2}{3}\angle R.$$

故　$\triangle OAB$ 為正三角形,因之正六角形之一邊等於半徑,由是得作圖法如下:

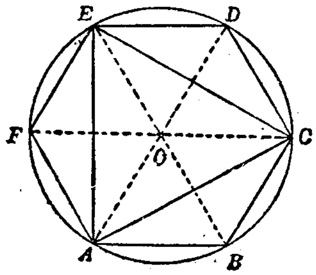


圖 269.

作圖 以圓周上之任意點A爲中心,O圓之半徑爲半徑畫一圓與所設圓交於B,F二點.次作直徑FOC,AOD,BOE,則$ABCDEF$即爲所求之正六角形.

系 1. 將正六角形之六頂點,每間一個順次連結之,則得內接正三角形.

系 2. 將正六角形之六頂點,每間一個作其外接圓之切線,則得外切正三角形.

系 3. 將正六角形各邊所對之弧平分之,順次連原頂點與分點,則得圓之內接正十二角形.同理得作正二十四角形,正四十八角形……,正3×2^n角形.

310. **作圖題 34.** 作所設O圓之內接正十角形.

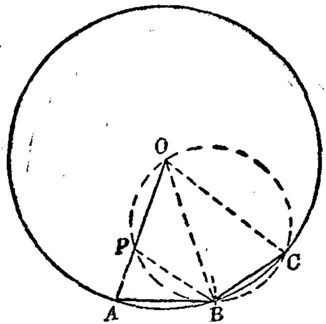


圖 270.

作圖 引任意半徑OA,以中外比內分OA於P,即令

$$OA\cdot PA=\overline{OP}^2.$$

以 A 爲中心，OP 爲半徑畫圓與 O 圓交於 B，則 AB 卽爲所求內接正十角形之一邊.

證　作 $\triangle OPB$ 之外接圓.

因 $$OA \cdot PA = \overline{OP}^2 = \overline{AB}^2,$$

故　AB 爲 OPB 圓之一切線，因之 $\angle ABP = \angle AOB$，而

$$\angle APB = \angle AOB + \angle PBO = \angle ABP + \angle PBO$$
$$= \angle ABO = \angle OAB,$$

故 $$AB = PB = PO.$$

由是 $$\angle APB + \angle OAB + \angle ABP$$
$$= 2\angle AOB + 2\angle AOB + \angle AOB,$$

因之 $$5\angle AOB = 2\angle R.$$

卽 $$\angle AOB = \frac{2}{5}\angle R. = \frac{4}{10}\angle R.$$

故　AB 爲正十角形之一邊.

系 1.　將正十角形之十頂點，每間一個連結之，得正五角形

系 2.　過正十角形之十頂點各作其外接圓之切線，則得圓之外切正十角形.

系 3.　將內接正十角形每邊所對之弧平分之，則得作圓之內接正二十角形，由是得作圓之內接正 5×2^n 角形.

311.　**作圖題 35.**　作圓之內接正十五角形.

作圖 於所設圓中,作內接正六角形之一邊 AB, 及內接正十角形之一邊 AC. 連結 BC, 則 BC 卽爲所求正十五角形之一邊.

證 $\widehat{BC}=\widehat{AB}-\widehat{AC}=$ 圓周之 $\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)=$ 圓周之 $\frac{1}{15}$.

312. **作圖題 36.** 已知所設圓之內接正多角形之一邊,求邊數爲其二倍之內接正多角形及外切正多角形之一邊.

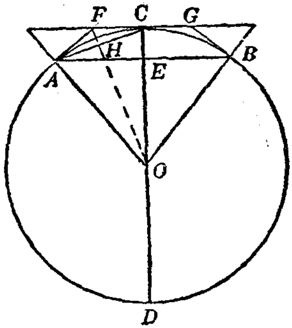


圖 271.

假設 所設 O 圓之半徑爲 R, 內接正多角形之一邊 $AB=a$, AC 爲二倍邊數之內接正多角形之一邊, 令其長爲 a', FG 爲二倍邊數之外切正多角形之一邊,令其長爲 b'.

求證 I. 以 R 及 a 表示 a',

II. 以 R 及 a 表示 b'.

解 I. 自 C 作直徑 CD, 與 AB 交於 E.

因　　$\widehat{AC}=\widehat{CB}$,　　故　$CD\perp AB$.

由是AC爲直徑CD及AC在CD上之正射影之比例中項.

即　$\overline{AC}^2=CD\cdot CE=2R(R-OE)=R(2R-2OE)$.

在直角三角形AEO內,$OE=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{AE}^2}$,

$$\therefore\quad OE=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}.$$

$$\therefore\quad a'=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-a^2})}.\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

若取半徑爲單位之長,則上式變爲

$$a'=\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}.\cdots\cdots\cdots\cdots(1)'$$

II. 自A,B各引切線AF,BG與過C之切線交於F,G二點;則FG爲二倍邊數之外切正多角形之一邊,其長爲b'.

連結OF與AC交於H,則$OH\perp AC$,

$$\therefore\quad\triangle AEC\sim\triangle CFH.$$

故　　$AE:AC=CH:CF$,

各項皆二倍之,得$AB:2AC=AC:FG$.

故　　$FG=\dfrac{2\overline{AC}^2}{AB}=\dfrac{2a'^2}{a}$.

由(1),得　$b'=\dfrac{2R(2R-\sqrt{4R^2-a^2})}{a}$.　$\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

若取半徑爲單位之長,則上式變爲

$$b' = \frac{2(2-\sqrt{4-a^2})}{a} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)'$$

313. 公式 (1)′ 及 (2)′ 之應用 由上節之公式,知內接正多角形一邊,得求二倍邊數之內接及外切正多角形一邊之長,因此內接及外切正多角形之周亦可求得.半徑爲單位長之圓之內接正方形,其一邊爲 $\sqrt{2}$. 將公式 (1)′ 及 (2)′ 反覆使用,得邊數爲 8, 16, 32, 64,……之內接及外切正多角形之一邊,由是正多角形之周亦得求出.茲設圓之半徑爲 1, 將內接及外切正四角形至正 128 角形之周長之半至小數五位,列表如下:

邊數	內接正多角形周長之半	外切正多角形周長之半
4	2.82842	4.00000
8	3.06146	3.31371
16	3.12144	3.18260
32	3.13654	3.15173
64	3.14033	3.14412
128	3.14127	3.14223

314. 作圖題 37. 知所設圓之內接正多角形之一邊,求同邊數之外切正多角形之一邊.

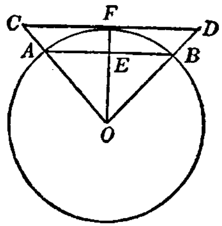


圖 272.

假設 所設圓之半徑爲R,內接正多角形之一邊爲a,同邊數之外切正多角形之一邊爲b.

求證 以a及R表示b之長.

解 設所設內接正多角形之一邊即爲AB,自AB弧之中點F作切線CD,與OA,OB二半徑之延長線交於C,D二點,CD即爲外切正多角形之一邊.

引半徑OF與AB相交於E,則由相似三角形AOE與COF,得
$$\frac{CF}{AE}=\frac{OF}{OE}, \quad 或 \quad \frac{b}{a}=\frac{R}{OE}.$$

但 $$OE=\tfrac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}, \quad (R爲外接圓之半徑)$$

故 $$b=\frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}. \qquad \cdots\cdots(3)$$

若取半徑爲單位之長,則(3)變爲
$$b=\frac{2a}{\sqrt{4-a}}. \qquad \cdots\cdots(3)'$$

315, **定理 136** 正多角形之面積以其周與邊心距

離相乘積之半測定之.

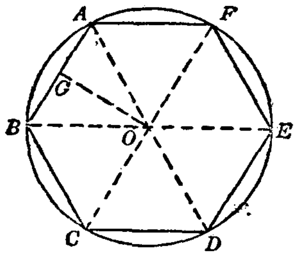


圖 273.

假設 正多角形$ABCD\cdots\cdots$之中心為O, OG為其邊心距離,其長為a, P為此正多角形之周.

求證 $$ABCD\cdots\cdots=\tfrac{1}{2}P\cdot a.$$

證 連結中心及各頂點,則正多角形分為三角形OAB, $OBC\cdots\cdots$.

此等三角形之高均為a,

$$\begin{aligned}\therefore ABCD\cdots\cdots &= \triangle OAB+\triangle OBC+\cdots\cdots\\ &=\tfrac{1}{2}AB\cdot a+\tfrac{1}{2}BC\cdot a+\cdots\cdots\\ &=\tfrac{1}{2}(AB+BC+\cdots\cdots)a\\ &=\tfrac{1}{2}P\cdot a.\end{aligned}$$

習 題

1. 以所設直線為一邊求作正八角形.

2. 二相等之圓相交,求於其間作內接正方形.

3. 用正三角形,正方形及正六角形之石塊鋪地面,必能密縫,用正五角形及正六角形以上之正多角形則不能,試證明之.

4. 正三角形 ABC 外接圓周上之一點 P, 與三角形之各頂點連結之, 則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 爲常數.

5. AB, AC 各爲圓之內接正五角形及正十角形之一邊, AOC 角之平分線與 AB 相交於 D, 則三角形 AOB, DOB 爲相似形, 且 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{OA}^2$.

6. 以所設直線爲對角線作平行四邊形,使一角爲他角之二倍.

7. 已知圓內接正五角形一邊之長爲一寸,求同圓內接正十角形一邊之長.

8. 已知正五角形內切圓半徑之長,計算其一邊及其外接圓半徑之長.

9. 已知正方形,或正六角形之一邊,求內切圓與外接圓之半徑.

10. 內接正十角形及正五角形可作圖如下: 引圓之直徑 AB, 又引垂直 AB 之半徑 OC, 平分 OB 於 D. 以 D 爲中心, DC 爲半徑作圓, 與 AB 交於 E, 則 EO 爲正十角形之一邊, EC 爲正五角形之一邊, 試證之. (圖 274)

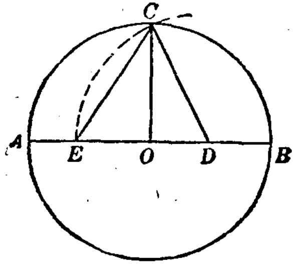


圖 274.

11. 每邊2寸之正五角形及正六角形之面積若干?

12. 內接正十五邊形之邊心距離為一寸,試求其面積.

第二十四章

圓周及圓面積

316. **定理 137.** 將內接正多角形之邊數漸次增加,則其邊心距離近迫於其外接圓之半徑.

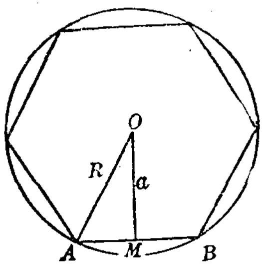


圖 275.

假設 內接正 n 角形之外接圓半徑爲 R, 邊心距離爲 a.

求證 n 漸次增加,則 a 近迫於 R.

證 如圖,設 OA 爲一半徑, AB 爲正多角形之一邊,命其長爲 S, OM 爲其邊心距離,則 $a<R$.

又因 $$R-a<AM<S,$$

故 $$0<R-a<S.$$

若n逐漸增大,則S可小於任何小之數,因而$R-a$亦可小於任何小之數,此卽a近迫於R之謂也.

317. **定理 138.** 外切正多角形之邊數,漸次增加,則自中心至其頂點之距離近迫於其內切圓之半徑.

證法仿上定理.

318. **定理 139.** 同圓內接正多角形之周及外切正多角形之周,若邊數逐漸增加,則其差逐漸減小而近迫於0.

證 由314節公式(3)′,知$b=\dfrac{2a}{\sqrt{4-a}}$,因$4-a$小於4,故$\sqrt{4-a}<2$,因之$b>a$.

故同邊數之外切正多角形之周P',必較內接正多角形之周P爲大.

然$nb=P'$, $na=P$,故$P'=\dfrac{2}{\sqrt{4-a}}P$.

將n增大,則a減小而近迫於0,因之$\dfrac{2}{\sqrt{4-a}}$近迫於1,由是知P'與P漸相接近,而其差則近迫於0.

319. **圓周之長** 由前節易知P(用前節記號)小於圓周之長,將n增加,P'與P漸相接近,故將定圓之內接正多角形與外切正多角形之邊數逐漸增加,其周長P與P'皆近迫於圓周之長.

320. 定理 140. 二圓周之比等於其半徑之比.

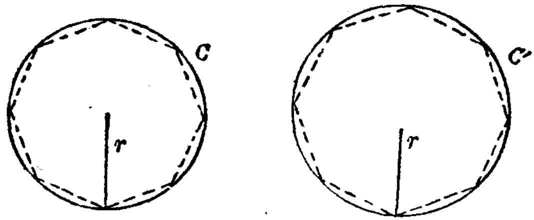


圖 276.

假設 二圓圓周之長為 C 及 C'，半徑為 r 及 r'.

求證 $$C:C'=r:r'.$$

證 作二圓之同邊數正多角形,則二正多角形相似,設正多角形之周為 P 及 P，則

$$P:P'=r:r',$$

即 $$Pr'=P'r.$$

若將邊數增加,則 Pr' 近迫於 Cr'，且 $P'r$ 近迫於 $C'r$. 然 Pr' 常與 $P'r$ 相等,故

$$Cr'=C'r,$$

即 $$C:C'=r:r'.$$

系 1. 在不相等之兩圓中,對於相等中心角之二弧之比,等於其半徑之比.

系 2. 圓周與直徑之比為一常數.

如二圓周為 C 及 C'，半徑為 r 及 r'，直徑為 D 及 D'，則

$$C:C'=r:r'=D:D',$$

故　　$C : D = C' : D'.$

因此可述圓周率之定義如下:

321. **定義 87.** 圓周與直徑之比名曰圓周率,以希臘字母π記之.

322. **定理 141.** 圓周之長等於π與直徑之相乘積.

證　因 $\dfrac{C}{D} = \pi,$　　故 $C = \pi D.$

系　圓周之長等於二倍π與半徑之相乘積.

323. 圓周率 π. 由316節將邊數n逐漸增加,則P'逐漸減小而近迫於C, P逐漸增加而近迫於C,故圓周C常介在外切正多角形之周P'與內接正多角形之周P之間.設圓之半徑為1,邊數n等於128,則由313節之表,知

$$P' = 2 \times 3.142, \qquad P = 2 \times 3.141\cdots\cdots;$$

而圓周$C = 2\pi$,介乎此二數之間,故

$$3.141 < \pi < 3.142.$$

又設$n = 8192$,則由計算,知

$$P' = 2 \times 3.1415928\cdots\cdots, \quad P = 2 \times 3.1415926\cdots\cdots.$$

故　　$3.1415926 < \pi < 3.1415928.$

茲記π之值,至小數二十位如下:

$$\pi = 3.14159265358979323846\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

【注意】 π之小數位數,並非有限,其證明則超過本書程度,故從略.

324. **角之單位** 角之實用上的單位為度、分、秒;已

見於前;但理論上角之單位,多用輻角,一輻角為O圓之所對之弧等於半徑之一中心角,故一輻角在任何圓中均相等.因由定理139系1,知相等中心角所對二弧之比等於半徑之比,即$\widehat{AB}:\widehat{A'B'}=r:r'$,由是$\widehat{AB}:r=\widehat{A'B'}:r'$.

如角不等,比亦不等,故若比$AB:r$等於1,則AB弧所對之中心角與$A'B'$弧所對之中心角皆為一輻角.

又設$\angle AOB$之輻角數為A,則

$$A=\frac{a}{r}\,(a=\widehat{AB}\text{之長}),\quad\text{即}\quad a=Ar.$$

故一角所對之弧之長,等於其輻角數與半徑之乘積.

因圓周之長為$2\pi r$,一直角所對之弧為四分之一圓周,故一直角所對之弧等於$\frac{2\pi r}{4}=\frac{\pi}{2}r$,由是一直角等於$\frac{\pi}{2}$輻角,一平角等於$\pi$輻角.

1輻角約合57.295795度,即$57°\,17'\,44.8''$.

325. **定理 142.** 圓之面積等於圓周與半徑相乘積之半.

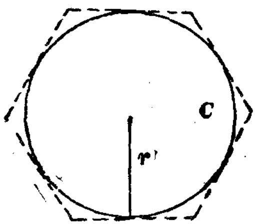


圖 277.

假設 一圓之半徑爲 r, 圓周爲 C, 圓之面積爲 S.

求證 $S=\frac{1}{2}rC$.

證 作圓之外切正 n 邊形,其周爲 P', 又作內接正 n 邊形,其周爲 P, 邊心距離爲 d, 則圓之面積介在此二多角形面積之間,故 $\frac{1}{2}dP<S<\frac{1}{2}rp'$.

將 n 增大,則 P 與 P' 皆近迫於 C, d 近迫於 r. 因之 dP 與 rP' 皆近迫於 rC. 故 $S=\frac{1}{2}rC$.

系 1. 圓之面積等於圓周率與半徑平方之相乘積.

因 $S=\frac{1}{2}rC=\frac{1}{2}r\cdot 2\pi r=\pi r^2$.

系 2. 二圓面積之比等於其半徑平方之比.

326. **定理 143.** 等圓扇形面積之比等於其弧之長或其中心角之比.

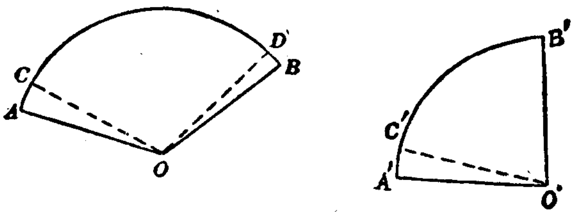


圖 278.

假設 二扇形 AOB 及 $A'O'B'$, 半徑相等.

求證 扇形 AOB : 扇形 $A'O'B'=\widehat{AB}:\widehat{A'B'}$

$=\angle AOB:\angle A'O'B'$.

證 I. 設 $\widehat{AB}$ 及 $\widehat{A'B'}$ 爲可通約量.

設 $\widehat{AC}$ 及 $\widehat{A'C'}$ 爲其公約量,由重合法易證扇形 AOC 與 $A'O'C'$ 全相等.

設 $\widehat{AB}$ 爲 $\widehat{AC}$ 之 m 倍, $\widehat{A'B'}$ 爲 $\widehat{A'C'}$ 之 n 倍;則

$$\widehat{AB} : \widehat{AC} = m : n.$$

又扇形 AOB 被分爲 m 個相等之扇形, $A'O'B'$ 被分爲 n 個相等之扇形,故扇形 AOB : 扇形 $A'O'B' = m : n$,

$\therefore$ 扇形 AOB : 扇形 $A'O'B' = \widehat{AB} : \widehat{AC}$.

II. 設 $\widehat{AB}$ 及 $\widehat{AC}$ 爲不可通量.

仿定理74之證法,學者試自證之.

同理得證 扇形 AOB : 扇形 $A'O'B' = \angle AOB : \angle A'O'B'$.

327. **定理 144.** 扇形之面積等於弧長與半徑相乘積之半.

假設 扇形 AOB 中, $\widehat{AB} = a$, $OA = r$.

求證 扇形 $AOB = \frac{1}{2}ar$.

證 由前定理,

$\widehat{AB}$: 圓周 O = 扇形 AOB 之面積 : O 圓之面積.

即 $a : 2\pi r$ = 扇形 AOB 之面積 : πr^2.

$$\therefore \quad \text{扇形之面積} = \frac{\pi r^2 \cdot a}{2\pi r} = \frac{1}{2}ar.$$

328. **弓形之面積** 弓形之面積可以扇形之面積減去三角形之面積以計算之,如下圖,弓形 ABC 之面積得由扇形 AOB 內減去三角形 AOB 以求得之.設弦 AB 之長爲

a', $\widehat{AB}$之長爲a, OA之長爲r,則得

$$弓形ACB之面積 = \frac{1}{2}ar - \frac{1}{2}a'\sqrt{r^2 - \frac{a'^2}{4}}.$$

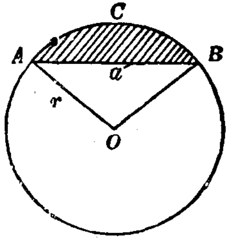


圖 279.

習　　題

1. 一圓池之周爲2640.53碼,試求其直徑.

2. 一飛輪之半徑爲6尺,每秒鐘轉動32次,問此輪外緣每秒鐘之速度若干?

3. 二圓周長之比等於其半徑之比.

4. 二圓之半徑各爲5寸及10寸,試求其面積之比.

5. 一圓地,其直徑爲32丈,其面積約爲若干畝?

6. 二圓面積之比爲2:4,試求其半徑之比.

7. 以直角三角形之三邊爲直徑作三半圓,則斜邊爲直徑之半圓等於其他二邊爲直徑之二半圓之和.

8. 在直角三角形斜邊之同側,以三邊爲直徑作三半圓,則夾直角二邊上之二半圓不與斜邊上之半圓相重

之部分,其面積等於直角三角形之面積*. (圖 280)

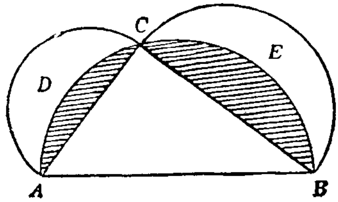


圖 280.

如上圖,二月形 D 與 E 之面積和等於 $\triangle ABC$ 之面積.

9. 半徑為 8 公尺,弧長為 12 公尺之弓形,其面積若干?

10. 中心角為 36°,半徑為 8 公寸之弓形,其面積若干?

11. 二同心圓之半徑各為 a, b; 試求其所成之圓環之面積. (圖 281)

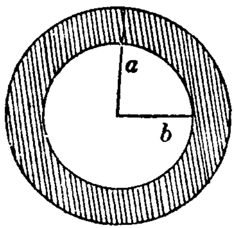


圖 281.

* Hippocrates 定理.

附　　錄

比與比例之基礎性質

定義 1.　有同種類二量,一量適爲他量之若干倍時,則名此量爲他一量之**倍量**,而他量則稱爲此量之**約量**.

如 a, b 代表二線分之長,若 a 之長適爲 b 之 m 倍,即 $a = mb$, 則稱 a 爲 b 之倍量, b 爲 a 之約量.

任意不同種類之二量,如線之長短與角之大小,其不能比較,甚爲明鮮.若二量種類相同,譬如一線 a 之長爲 5 尺,另一線 b 之長爲 7 尺,則此二線卽可比較其長短,因吾人以一尺量 a 線,五次而盡,以此尺量 b 線, 7 次而盡,由此知 a 線適爲 b 之 $\frac{5}{7}$.若二線分均適可以一單位(若尺)量盡,則謂此二量 a, b 有公約量,而稱 a, b 爲**可通約量**.

定義 2.　設有同種類之三量 a, b 及 m, 若 a 與 b 皆爲 m 之倍量,則名 a, b 爲可通約量, m 爲其**公約量**.

定義 3.　若 a, b 二量間,無公約量,則稱 a, b 二量爲**不可通約**.

定義 4.　任何種類之量以同種類之他量爲單位,度量後所得之數,曰此量之**測度**.

定義 5.　同種類二量 A 對於 B 之比,卽以 B 爲單位,

量A所得之測度.

A對於B之比常寫作$A:B$, A稱曰**前項**, B稱曰**後項**.

定義 6. 同種類二量A與B之比,等於他同種類二量C與D之比,則稱A,B,C,D四量成比例.

A,B,C,D四量成比例,常以

$$A:B::C:D,\quad 或\quad A:B=C:D\ 記之.$$

A與D稱爲比例之外項,B與C稱爲比例之內項,兩前項A及C,兩後項B及D各稱曰**相對應之項**.

定理 1. 比例式中外項之相乘積,等於內項之相乘積.

定義 7. 若A,B,C三量成比例, 即$A:B=B:C$; 則稱此三量成連比例,C稱爲A,B之第三比例項,B稱爲A,C之比例中項.

定理 2. 與一比相等之兩比,亦互相等.

若 $$A:B=X:Y,$$

$$C:D=X:Y,$$

則 $$A:B=C:D.$$

定理 3. 倍量定理:

$$mA:mB=A:B.$$

定理 4. 反比定理:

若 $$A:B=C:D,$$

則 $$B:A=D:C.$$

定理 5. 更比定理:

若 $$A:B=C:D,$$

則 $$A:C=B:D.$$

定理 6. 合比定理:

若 $$A:B=C:D.$$

則 $$A+B:B=C+D:D.$$

定理 7. 分比定理:

若 $$A:B=C:D,$$

則 $$A-B:B=C-D:D.$$

定理6及7之系:

若 $$A:B=C:D,$$

則 $$A+B:A-B=C+D:C-D.$$

定理 8. 和比定理:

若 $$A:B=C:D=E:F,$$

則 $$A:B=A+C+E:B+D+F.$$

定理 9. 等比定理:

若 $$A:B=X:Y,\quad B:C=Y:Z,$$

則 $$A:C=X:Z.$$

第 二 部

立 體 幾 何 學

第二十五章

直線與平面

329. 以前各章,無論證題作圖,均只在一平面上立論;以下各章,則就空間之幾何圖形立論,故曰**立體幾何學**,以別於前者之平面幾何學.

面之定義已見於第9節;平面為面之一種,其上任意二點之連結線完全在面上者也.平面廣闊無限,然常作一平行四邊形以表示之.

330. 由直線及平面之定義,得知一直線與一平面之關係不外下列三種:

一. 一直線與一平面若公有二點,則此直線全在此平面上.

二. 一直線與一平面若僅公有一點,則稱平面與直線相交於此公有點.

三. 一直線與一平面無一點公有者,則稱此直線與平面互相平行.

331. **公理 1.** 二點在平面之兩側,則過此二點之直線必與此平面相交.又一直線與平面相交,則此直線為交點所分之二半直線在平面之兩側,如圖 282,直線 AB

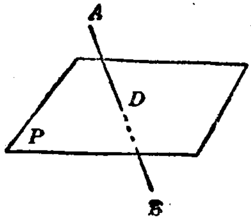


圖 282.

與平面P相交於一點D,則由共通點D分得之二半直線DA, DB在平面P之異側.

332. **公理 2.** 以平面中之一直線為軸,將此平面迴轉一周,則此平面通過空間中一切之點.

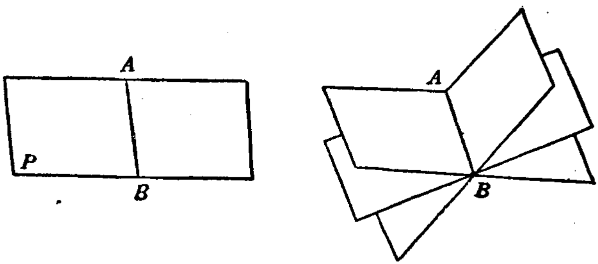


圖 283.

333. **定義 1.** 一平面含有若干直線或點,而無其他平面含有此諸直線或點者,則稱此諸直線或點決定此平面.

334. **定理 1.** 二平面公有一點,則必公有過此點

之一直線.

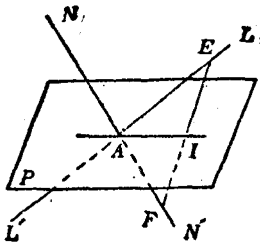


圖 284.

假設 二平面P及Q共有一點A.

求證 二平面P,Q必公有過A之一直線.

證 過A於Q平面上任意引二直線LAL',NAN',若此二直線之一亦在他平面P上,則Q,P二平面已有一直線共通.

若此二直線與P平面相交,則於半直線AL上任取一點E.對於P平面,與E不同側之半直線AN'上任取一點F,連結EF,則EF與P平面相交,設其交點為I,則I點為平面P,Q之另一公共點,故AI直線為平面P,Q所公有.

系 二平面之相交處為一直線.

二平面相交之直線稱曰**交線**.

335. **定理 2.** 二平面共有一直線及此直線外之一點,則此二平面完全一致.

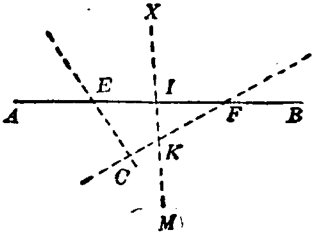


圖 285.

假設 二平面P,Q共有一直線AB及AB外之一點C。

求證 P,Q完全一致.

證 於AB上取任意二點E,F,引CE,CF二無限直線.因C,E,F為二平面所公有,故CE,CF同在二平面上.由P平面上之任意一點M,引一直線MX;則MX至少與AB,CE,CF中之二直線相交,設其交點為I,K,則I,K亦為Q平面上之點,由是MX亦為Q平面上之一直線,故P平面上之任意點M,亦為Q平面上之一點,故二平面P,Q完全一致。

【注意】 由上二定理知相異二平面,其相對的位置,不外下列二種:

一. 二平面僅有一直線公共,則稱此二平面曰**相交**.

二. 二平面上無一點公共,則稱此二平面曰**平行**.

336. **定理 3.** 下列諸條件之一決定一平面:

一. 一直線AB及不在此直線上之一點C;

二. 不在一直線上之三點 A, B, C;

三. 相交之二直線 AB, AC;

四. 平行之二直線 AB, CD.

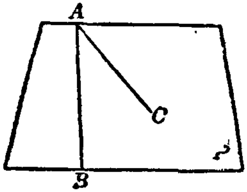


圖 286.

證 一. 過直線 AB 作一平面 P, 以 AB 爲軸, 將此平面迴轉一周, 則必過 C 點; 故過一直線及直線外之一點得作一平面. 又由上定理, 知此平面僅有一個, 故得證.

二. 連結二點 A 及 B, 則得一直線, 由 (一) 可知 A, B, C 決定一平面.

三. 過 AB 直線與 AC 上之一點所作之平面, 卽過 AB, AC 所作之平面, 故亦可歸入 (一) 中.

四. 二平行線必同在一平面上, 且過一直線上之一點與他直線作平行線僅有一直線可引, 故含二平行線之平面必有一個且僅有一個.

系 過一點得引一直線與所設之直線平行, 且不能多於一.

337. 空間中之二直線, 一直線與一平面及一平面

與其他一平面之相對的位置,已詳上述,茲將二直線在空間之相對的位置研究之.

設AB, CD為在空間之二直線,過直線AB及CD上之一點D得決定一平面P.直線CD與平面P或相交或全在其上,若CD全在平面P上,則AB, CD或相交或平行.

若CD與平面P相交,卽AB, CD不同在一平面上,則AB, CD不相交亦不平行,故在空間二直線之相對的位置,有下列三種:

一. 不同在一平面上;

二. 二直線相交;

三. 二直線平行.

【注意】 在平面幾何學中,欲證二直線平行,僅證明其無論若何延長不能相交已足.然在空間幾何學,尙須證明其同在一平面上.

338. 定理 4. 二直線AB與CD平行,則與AB直線相交之平面P亦必與CD直線相交.

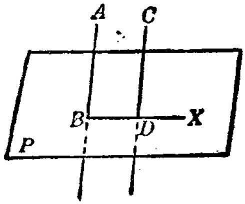


圖 287.

設平面P與平面$ABCD$之交線爲BX, BX必與DC相交.設其交點爲D,則D在平面P上,亦在CD直線上,故爲平面P與直線CD之公有點;又若CD與P有第二公有點,則CD將與BX一致,與AB不能平行,故除D而外,無公共點.

由是CD亦與平面P相交.

系 1. 二直線平行,則含第一直線或平行於第一直線之平面,必含第二直線或與第二直線平行.

因此平面如不含第二直線又不平行於第二直線,則必與第二直線相交,因而此平面亦與第一直線相交也.

系 2. 平行於同一直線之二直線互相平行.

系 3. 過不在同一平面上之二直線之一得作一平面與他直線平行,且以一爲限.

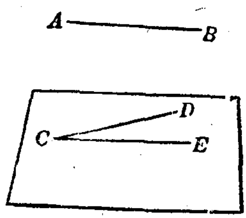


圖 238.

設AB, CD爲二直線,過C引一直線CE與AB平行,則CD. CE決定之一平面P必與AB平行.

設P'爲含有直線CD且與AB平行之一平面,又設直線AB與點C所決定之平面爲Q,則二平面P'與Q之交線CE'與AB平行.故CE'與CE一致,且P與P'一致.

339. **定理 5.** 一平面與二平行平面相交,則其二交線平行.

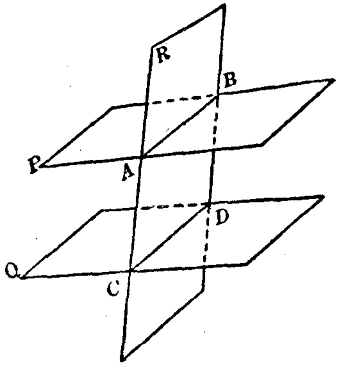


圖 289.

假設 平面P,Q互相平行,平面R與P及Q相交,其交線爲AB,CD.

求證 $AB//CD.$

證 因AB,CD在一平面上,若AB,CD相交,則平面P,Q亦相交,與假定不合;

$$\therefore \quad AB//CD.$$

系 二平行平面間之平行直線之線分相等.

如上圖,$AC//BD$,則$ABCD$爲一平行四邊形,故

$$AC=BD.$$

340. 定義 2. 直線AO與平面M相交於O,若AO垂直於通過O點且在M平面上之任何直線,則曰直線AO與平面M互相垂直.

341. **定理 6.** 若一直線垂直於相交之二直線,則此直線必垂直於此相交二直線所決定之平面.

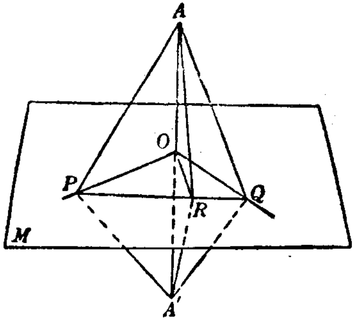


圖 290.

假設 AO 直線垂直於直線 OP, OQ.

求證 AO 垂直於 OP, OQ 所決定之平面.

證 設 OP, OQ 決定之平面爲 M. 過 O 引 M 上之任一直線 OR, 又引一直線與 OP, OQ, OR 相交於 P, Q, R 三點. 延長 AO 至 A', 使 $AO = OA'$, 則

$$\triangle APQ \cong \triangle A'PQ.$$

故 $$\angle QPA = \angle QPA'.$$

即 $$\angle RPA = \angle RPA',$$

故 $$\triangle RPA \cong \triangle RPA',$$

故 $$AR = RA'.$$

由是 $$\triangle ARO \cong \triangle A'RO,$$

故 $$OR \perp OA.$$

因 OR 為一任意直線，故平面 M 上過 O 之直線均與 OA 垂直，故 AO 垂直於平面 M.

342. 定理 7. 過直線上之一點而垂直於此直線之諸直線，皆在同一平面上.

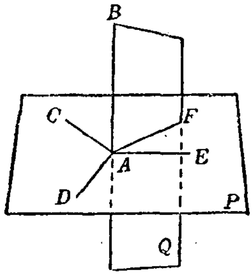


圖 291.

假設 AC, AD, AE 為 AB 之任意三垂線，且同過 A 點.

求證 AC, AD, AE 同在一平面上.

證 過 AC, AD 作一平面 P，則 P 垂直於 AB，若證 AE 亦在 P 上，則本定理得其證明矣.

設 AE 不在平面 P 上，則令 AB, AE 所決定之平面 Q 與平面 P 交於直線 AF，則 $AF \perp AB$.

由假設 $AE \perp AB$，然 AB, AE, AF 皆在 Q 平面上，故 AE 不能不與 AF 一致，可知 AE 亦在平面 P 上.

系 1. 過直線上之一點得作一平面，且僅能作一平面與此直線垂直.

系 2. 過直線外之一點得作一平面,且僅能作一平面與直線垂直.

設一直線 OX, P 爲 OX 外之一點,自 P 引 OX 之垂線 PO, 自 O 引 OX 之他垂線 OQ, 則 OP, OQ 所決定之平面即爲垂直於 OX 之平面.

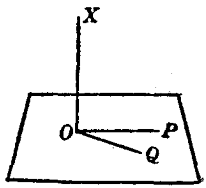


圖 292.

因自 P 僅能作一垂線至 OX, 故此種平面亦僅有一.

系 3. 垂直於同一直線之二平面互相平行.

因若二平面相交,則過其交線上之一點得作二平面與一直線垂直矣,與系 2 不合,故二平面必平行.

343. **定理 8.** 過一點得引一直線,且僅能引一直線與已知之平面垂直.

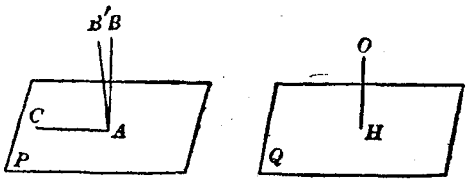


圖 293.

假設 A 爲一點, P 爲一平面.

求證 過 A 僅能引一直線與平面 P 垂直.

證 I. A 點在平面 P 上.

引一任意直線 OH, 過 H 引 OH 之垂直平面 Q, 將此圖形全體移至平面 P, 使二平面互相重合, H 與 A 重合,則 OH

爲過 A 而垂直於平面 P 之直線.

又若過 A 得引二直線 AB, AB' 與平面 P 垂直. 設以 AB, AB' 決定之平面與平面 P 相交於 AC, 則過 A 得作二直線與 AC 垂直, 於理不合, 故過 A 僅能引一直線與平面 P 垂直.

II. A 點不在平面 P 上.

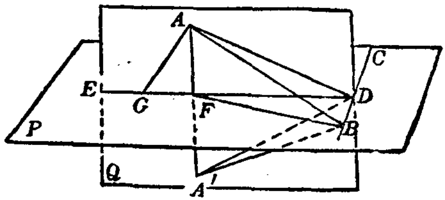


圖 294.

在平面 P 上引任意直線 BC, 過 A 作一平面 Q 與 BC 垂直, 與平面 P 相交於 DE, 與 BC 相交於 D. 引 AF 垂直 DE, 則 AF 卽過 A 垂直於平面 P 之直線.

自 F 任意引一直線 FB 與 BC 交於 B, 延長 AF 至 A', 使 $AF = FA'$. 連結 $AB, AD, A'B$ 及 $A'D$, 則

$$\triangle ADB \cong \triangle A'DB,$$

故 $$AB = AB',$$

因之 $$\triangle AFB \cong \triangle A'FB, \quad 而\ BF \perp AA'.$$

由是 AF 垂直於平面 P.

又若過 A 尙得作 P 之他垂線 AG, 作含 AG, AF 之平面與平面 P 相交於 GF, 則過 A 得作二直線垂直於 GF, 於理

不合，故除 AF 外無其他垂線.

系 自一點至一平面所引之諸線分，以垂線爲最短.

344. 定義 3. 自一點至一平面所引之線分，若垂直於平面，則名此線分曰此點與平面之距離.

345. 定理 9. 垂直於同一平面之二直線互相平行.

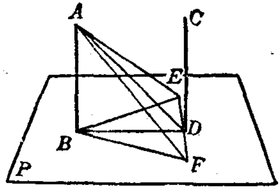


圖 295.

假設 二直線 AB, CD 垂直於一平面 P.

求證 $AB \parallel CD$.

證 連結 AD, BD；過 D 在平面內作 BD 之垂線 EF，取 $FD = DE$.

因 $\triangle BDE \cong \triangle BDF$,

故 $BF = BE$.

由是 $\triangle ABF \cong \triangle ABE$.

因之 $AF = AE$.

故 $\triangle ADF \cong \triangle ADE$.

因此可知 DA, DB, DC 三直線皆垂直於 EF 直線，故在

同一平面上. AB, CD 既在同一平面上, 且均垂直於 BD, 故

$$AB \parallel CD.$$

系　二平行線之一垂直於一平面, 則他直線亦垂直於此平面.

346.　**定義 4.**　自一點引直線與一平面相會, 若此直線不垂直於平面, 則稱此直線曰**斜線**.

347.　**定理 10.**　自平面外之一點向此平面引一垂線及二斜線, 若

I.　二斜線之線足與垂線足之距離相等, 則二斜線相等.

II.　二斜線之線足與垂線足之距離不相等, 則二斜線亦不相等, 離垂足較遠者其斜線較長.

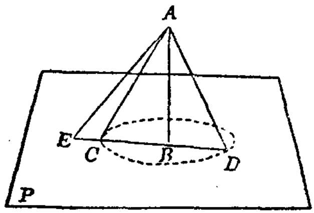


圖 296.

假設　自一點 A 至平面 P 引一垂線 AB, 及三斜線 AC, AD, AE, 而 $BC = BD$, $BE > BC$.

求證　I.　$AC = AD$.

II.　$AE > AC$.

證 I. 由直角三角形 ABC, ABD 夾直角之二邊均相等,故其斜邊 $AC = AD$.

II. 設 E, C, B 在一直線上,因 $BE > BC$,由平面幾何學,知 $AE > AC$.

若 E, C, B 不在一直線上,則於 BE 上可取 C' 點,使 $BC' = BC$,因之 $AE > AC'$,然 $AC' = AC$,故 $AE > AC$.

系 1. 自一點至一平面作一垂線及二斜線,若

一. 二斜線相等,則其線足與垂足間之距離亦等.

二. 二斜線不相等,則其線足與垂足間之距離亦不相等,斜線較長者距離較遠.

系 2. 距圓周上各點距離相等之點之軌跡,爲垂直於圓之平面中過圓心之一直線.

系 3. 在一平面上之點,與一定點之距離爲定長,其點之軌跡爲一圓周.

如圖 296, A 爲定點, AC 爲定長,平面爲 P,則 P 上之點與 A 之距離等於 AC 者,其軌跡爲以 B 爲中心, BC 爲半徑之圓周.

系 4. 與二定點距離相等之點,其軌跡爲在二點連結線之中點之垂直於此直線之平面.

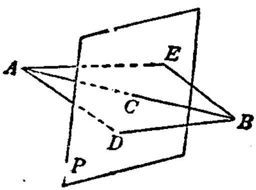


圖 297.

如圖,若 A, B 爲二定點, C 爲 A, B 連結線之中點, P 爲垂直 AB

面過C之一平面,P即爲所求之軌跡.

348. 定理 11. 一直線垂直於二平行平面之一,則必垂直於其餘一平面.

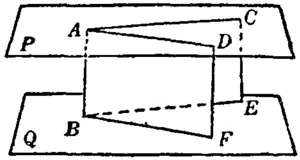


圖 298.

假設 P, Q爲二平行平面,直線AB垂直於P.

求證 AB垂直於Q.

證 過AB作二平面,與平面P相交於AC, AD二直線,與平面Q相交於BE, BF二直線.

因 $AC \parallel BE$, $AC \perp AB$, 故 $BE \perp AB$.

同理得證 $BF \perp AB$, 故 $AB \perp Q$.

系 1. 過平面外之一點得作一平面,且僅能作一平面與之平行.

系 2. 與二平行平面等距離之點,其軌跡爲一平面,此平面過二平面間垂線之中點而垂直於此垂線.

系 3. 與二平行直線等距離之點,其軌跡爲一平面,此平面垂直於二平行線間之垂線,且過此垂線之中點.

349. 定理 12. 若相交二直線皆平行於一平面則此二直線所決定之平面,亦平行於此平面.

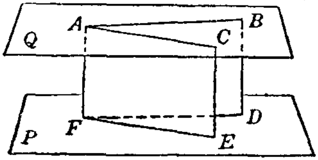


圖 299.

假設 AB, AC 二相交直線皆平行於平面 P，直線 AB，AC 所決定之平面爲 Q.

求證 $P // Q$.

證 自 A 引平面 P 之垂線 AF，過 AC, AF 作平面與 P 相交於 FE. 過 AB, AF 作平面與 P 相交於 FD.

因 $AF \perp FE,\ AF \perp FD;\ AC // FE,\ AB // FD.$

故 $AF \perp AC,\ AF \perp AB.$

由是可知 AF 爲二平面 P, Q 之公共垂線，$P // Q$.

350. **定理 13.** 不在同一平面上之二角，其兩邊在同一方向各相平行，則二角相等，且二平面互相平行.

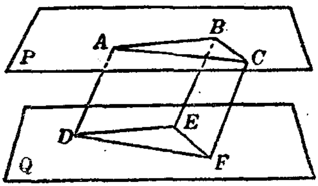


圖 300.

假設 平面 P 上有 $\angle BAC$，平面 Q 上有 $\angle EDF$，

$AB // DE, \qquad AC // DF.$

求證 $\angle BAC = \angle EDF$,

$$P /\!/ Q.$$

證 連結 AD, 取 $AB = DE$, $AC = DF$. 連結 BC, EF, 得二平行四邊形 $ADEB$ 與 $ADFC$, 故 BE 與 CF 皆與 AD 相等且平行,可知 $BEFC$ 亦爲一平行四邊形,故 $BC = EF$, 而

$$\triangle BAC \cong \triangle EDF.$$

因之 $\angle BAC = \angle EDF$.

又由定理12,知 $P /\!/ Q$.

351. **定理 14.** 二直線爲三平行平面所截,其所得之各線分成比例.

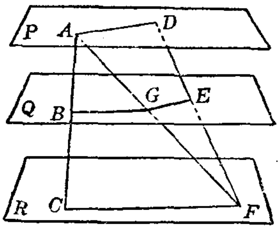


圖 301.

假設 二直線 AC, DF 爲三平行平面 P, Q, R 所截,其交點各爲 A, B, C 及 D, E, F.

求證 $AB : BC = DE : EF$.

證 引 AF 直線,與平面 Q 相交於 G 點,則

$$BG /\!/ CF,$$

故　$AB : BC = AG : GF.$

又　$AD \parallel GE,$

故　$AG : GF = DE : EF.$

由是　$AB : BC = DE : EF.$

352. **定義 5.** 一點至平面上之直射影為此點至平面上所引垂線之垂足.

任意線ABC……至一平面P上之直射影為此線上各點之直射影之軌跡.

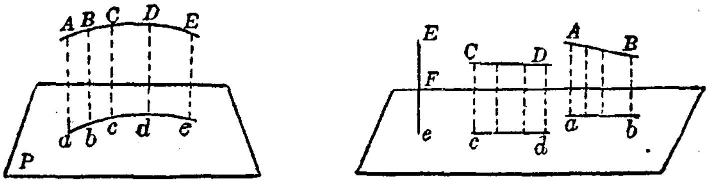


圖 302.

353. **定理 15.** 直線AB若不垂直於平面P,則AB在P上之直射影亦為一直線.

證　如上右圖,直線AB在平面P上之垂線Aa, Bb……互相平行,故均在一平面上.又二平面之交處為一直線;故AB之直射影為一直線.

系 1. 垂直於一平面之直線,在此平面上之射影為一點.

系 2. 若直線與平面平行,則其直射影與之平行.

354. 定理 16. 兩平行線在一平面上之二直射影互相平行或一致.

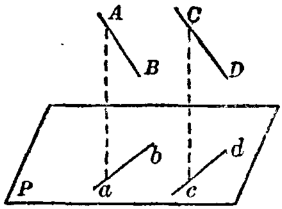


圖 303.

證 設二平行線爲 AB, CD; 其在平面 P 上之直射影爲 ab, cd. 因 AB, ab 所決定之平面與 CD, cd 所決定之平面互相平行,故 ab, cd 互相平行.然若 AB, CD 所決定之平面垂直於 P, 則 ab, cd 合而爲一.

355. 定義 6. 自任意一點引平行於不同在一平面上二直線之平行線,則所引二直線之交角卽爲原二直線之交角.

如圖,過任意一點 O, 引 AB, CD 之平行線 OP, OQ, 則 POQ 角,卽爲二直線 AB, CD 之交角.

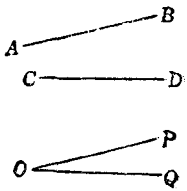


圖 304.

356. 定理 17. 空間中互相垂直之二直線,其中一直線平行於一平面,則二直線在平面上之直射影亦互相垂直.

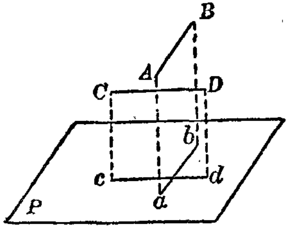


圖 305.

假設 $AB \perp CD$, CD 平行於平面 P. AB, CD 在 P 上之射影為 ab, cd.

求證 $ab \perp cd$.

證 cd 平行於 CD, 故 cd 與 AB 垂直. cd 在垂直於 Aa 之平面 P 上,故 cd 又與 Aa 垂直. 由是 cd 垂直於平面 $ABba$.

故 $ab \perp cd$.

系 1. 空間二直線中,有一直線平行於一平面,且此二直線在此平面上之直射影互相垂直,則此二直線亦互相垂直.

此系即上定理之逆,若平行於平面之一直線在此平面上,且二直線相交,則此逆定理稱為三垂線之定理,可述之如下:

系 2. 一直線 Aa 垂直於平面 P, 垂足為 a, CD 為 P 上之一直線. 自 a 作 CD 之垂線 aB, 垂足為 B, 如是則 Aa 上之任意點 A 與 B

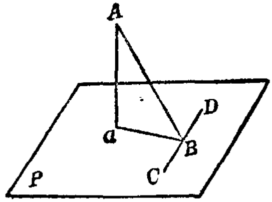


圖 306.

之連接線必垂直於CD.

357. **定理 18.** 斜交於一平面之直線,與平面上之諸直線所成之諸角中,與其直射影所成之銳角爲最小.

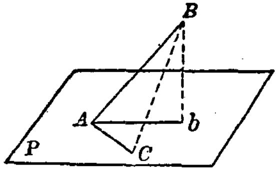


圖 307.

假設 直線AB與平面P相交於A, Ab爲AB之直射影,AC爲平面P中任一直線$A'C'$之平行線.

求證 $\angle BAb \leqq \angle BAC$.

證 設B之直射影爲b.連結Bb,取$AC=Ab$.於$\triangle BAb$及$\triangle BAC$中,二邊兩兩相等,而$Bb \leqq BC$,故

$$\angle BAb \leqq \angle BAC.$$

358. **定義 7.** 一直線與一平面之交角爲此直線與其在平面上直射影之交角.

359. **定義 8.** 若平面P過二點A, A'連結線之中點,且垂直於此連結線,則曰A, A'二點關於平面P爲對稱.

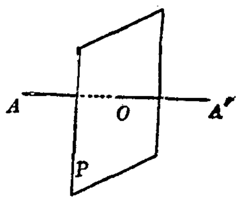


圖 308.

有二圖形F, G,又有一平面P,若圖形F上之任一點A關於P之對稱

點在圖形G上,又圖形G上之任一點B關於P之對稱點在圖形F上,則曰二圖形F與G關於平面P成對稱.此種點對A, B稱爲相對應之二點.

習　題

1. 不在同一平面上之四點,可決定若干平面?

2. 凡與相交兩直線之一相交,且與其餘一直線平行之直線必全在相交兩直線所決定之平面上.

3. 一截線在三平行平面間之部分相等,則任何截線在此三平行平面之部分相等.

4. 一直線AB平行於平面P,又平行於他直線CD,則$P // CD$.

5. 設$ABCD$爲一空間四邊形*, $AB = BC, CD = DA$,則$\angle BAD = \angle BCD$.

6. 空間四邊形二鄰邊中點之連結線,平行而且等於其餘二邊中點之連結線.

7. 不在同一平面上之二角,若其邊兩兩平行而方向相反,則二角相等.

8. 若二角之邊兩兩平行,則此二角互爲補角時須有何種條件?

---

* 空間四邊形者,卽其四頂點不在同一平面上之四邊形也.

9. 至少須有若干平面方能包圍一有限之空間?

10. 若四邊形之兩對角線相交,或兩對邊平行,或兩對邊相交,則此四邊形決定一平面.

11. 過二點作一平面垂直於所設之直線,須有何種條件?

12. 三直線互相垂直,試證無第四直線能與此三直線均垂直.

13. 二平面有一點共通,則此二平面無公共之垂線.

14. 連結空間四邊形各邊之中點,可得一平行四邊形.

15. 一直線與兩平行直線之一斜交,則不能與其餘一直線垂直.

16. 與一平面之距離爲定長之點,有軌跡爲何?

17. 與一所設平面之距離等於定長且與所設二定點等距離之點,其軌跡爲何?

18. 與二定點 A, B 等距離,又與二定點 C, D 等距離之點,其軌跡爲何?

19. 若二平面平行於第三平面,則三平面互相平行.

20. 一動點與不在同一直線上之三定點等距離,則此動點之軌跡爲一直線.

21. 自一定點作相交二平面之垂線,又自此二垂線之足向此二平面之交線引垂線,則二平面之交線與第二

次所引之二垂線相交於一點.

22. 垂直於同一直線之平面互相平行.

23. 二平面平行於一直線,則其交線亦平行於此直線.

24. 二平面平行,一平面上之圓在他平面上之直射影爲何種圖形?若此二平面互相垂直,則其直射影爲何?

25. 若一圖形在一平面上之直射影在一直線上,則此圖形爲一平面圖形.

26. 若直線 AB 與平面 P 成 45° 之角,$AB = 10$ 寸,問 AB 在 PN 上直射影之長若干?

27. 平面之對稱圖形亦爲平面.

第二十六章

二 面 角

360. **定義 9.** 二相交平面所成之角曰**二面角**.爲交線所限之二半平面曰**二面角之面**.二平面之交線曰**二面角之稜**.如圖,P, Q 二平面相交於 AB,則其交角稱曰二面角,半平面 ABP 及 ABQ 爲其面交線,AB 爲其稜二面角,常以其稜上所記二文字表示之,如圖稱曰二面角 AB.如二面角與別種圖形連接,則又於其面上記二文字以表示之,如 $P\text{–}AB\text{–}Q$.

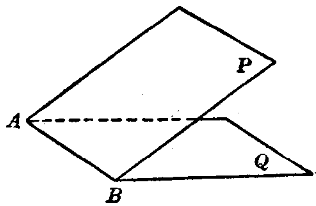


圖 309

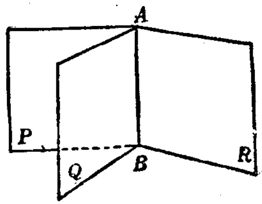


圖 310 (a).

二面角之大小,視其一面迴轉至他面之迴轉程度而定,不關於其面之大小.

361. **定義 10.** 兩二面角有一公共之稜及一公共之面,且公共面在其餘二面之間者,稱曰**順鄰接二面角**.

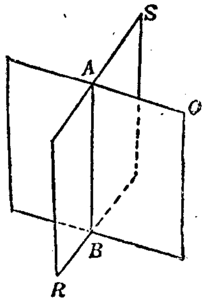


圖 310 (b).

362. **定義 11.** 相交兩平面所成之鄰接兩二面角若相等,則此兩二面角皆稱爲**直二面角**.

363. **定義 12.** 兩平面相交,若所成之二面角爲直二面角,則此兩平面互相垂直.

364. **定義 13.** 自二面角之稜上一點,在二面上各引稜之垂線,此二垂線所成之角,稱爲**二面角之平面角**.

如圖,CD 在 P 面上, ED 在 Q 面上,且 CD, ED 均各垂直於稜 AB, 則 $\angle CDE$ 爲 P-AB-Q 之平面角.

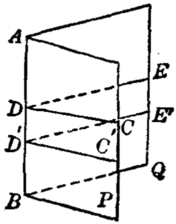


圖 311.

系　一二面角之平面角,不論其頂點在稜上何處,其大小均相等.

365. **定理 19.** 兩二面角之平面角相等,則此兩二面角相等.又其逆亦眞.

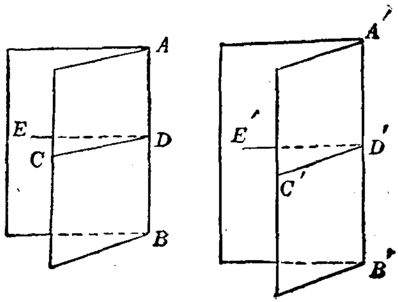


圖 312.

假設 兩二面角 $AB, A'B'$; 其平面角 $\angle CDE = \angle C'D'E'$.

求證 二面角 AB 與二面角 $A'B'$ 相等.

證 移動二面角 AB, 使 D 點與 D' 相合, CD 與 $C'D'$ 相合, ED 與 $E'D'$ 相合,則二稜 AB 與 $A'B'$ 相合,且 ACB 面重合於 $A'C'B'$ 面, AEB 面重合於 $A'E'B'$ 面.

故 二面角 AB = 二面角 $A'B'$.

逆定理 兩二面角相等,則其平面角亦相等.

366. **二面角** 本節關於二面角之定義及定理以與平面角之定義及定理相仿,故不詳細說明或證明.

定義一. 二平面相交所成之相對兩二面角,稱曰對稜二面角.

二. 二平面角,其和等於一直二面角者稱曰互為餘角.

三. 二平面角,其和等於二直二面角者稱曰互為補角.

定理一. 凡直二面角均相等.

二. 一平面與他平面相會,其所成之兩鄰接二面角之和等於兩直二面角.又其逆亦眞.若兩鄰接二面角之和等於兩直二面角,則其不公共之二面成一平面.

三. 對稜二面角相等.

四. 二平行平面為一平面所截,則

(1) 內錯二面角相等.

(2)　同位二面角相等.

(3)　同側之兩內二面角,互爲補角.又其逆亦眞.

五.　兩二面角之面兩兩平行,則此兩二面角或相等或互爲補角.

六.　兩二面角之面兩兩垂直,且其兩稜平行,則此兩二面角或相等或互爲補角.

367.　**定理 20.**　兩二面角之比等於其平面角之比.

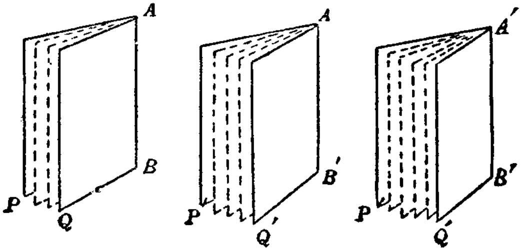


圖 313.

假設　兩二面角 $P\text{-}AB\text{-}Q$ 與 $P'\text{-}A'B'\text{-}Q'$ 之平面角各爲 $\angle CDE$ 及 $\angle C'D'E'$.

求證　$P\text{-}AB\text{-}Q : P'\text{-}A'B'\text{-}Q' = \angle CDE : \angle C'D'E'$.

證　I.　設二平面角爲可通約量.

將 $\angle CDE$ 及 $\angle C'D'E'$ 各以其公約量分爲 m 個及 n 個相等部分,則

$$\angle CDE : \angle C'D'E' = m : n.$$

其分線與二面角之稜可作若干平面,此諸平面分

P–AB–Q 及 P'–$A'B'$–Q' 亦爲 m 個及 n 個相等部分,由定理19,知此 m 個及 n 個之二面角亦互相等.

因之 $P\text{–}AB\text{–}Q : P'\text{–}A'B'\text{–}Q' = m : n,$

故 $P\text{–}AB\text{–}Q : P'\text{–}A'B'\text{–}Q' = \angle CDE : \angle C'D'E'.$

II. 設二平面角爲不可通約量.

此仿第15章定理74證明之可也.

系 二面角之大小得以其平面角度量之.

368. **定理 21.** 直二面角之平面角爲直角.又其逆定理:二面角之平面角爲直角,則此二面角爲直二面角.

證 略.

369. **定理 22.** 二平面互相垂直,則在一平面上所引交線之垂線必垂直於他平面.

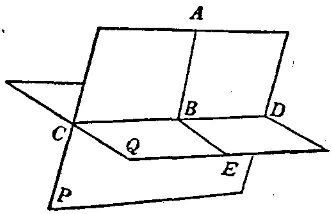


圖 314.

假設 二平面 P, Q 互相垂直,其交線爲 CD, AB 在平面 P 上,且 $AB \perp CD$.

求證 AB 垂直於平面 Q.

證 P–CD–Q 爲直二面角,故自 B 在平面 Q 上引 BE

$\perp CD$,則 $\angle ABE = \angle R$. 直線 AB 既垂直於 CD, 復垂直於 BE, 故垂直於 CD, BE 所決定之平面 Q.

系 1. 二平面互相垂直,則過其交線上一點引垂直於一平面之直線必在他平面上.

系 2. 二平面互相垂直,則自一平面上之一點引他平面之垂線,必全在自己之平面上.

370. **定理 23.** 一直線垂直於一平面,則含此直線或平行此直線之平面必垂直於原平面.

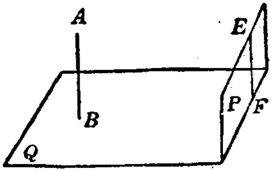


圖 315.

假設 直線 AB 垂直於平面 Q, B 爲垂足, P 爲含 AB 或平行於 AB 之平面.

求證 平面 $P \perp Q$.

證 I. P 含 AB 之時.

設 CD 爲平面 P, Q 之交線, 過 B 引 $BE \perp CD$, 則知 P-CD-Q 以直角 $\angle ABE$ 爲平面角之二面角, 故爲直二面角, 卽平面 P 與平面 Q 垂直.

II. P 平行於 AB 之時.

在平面P上引平行於AB之直線EF,則EF垂直於Q.由I,知含EF之平面P必與Q垂直.

逆定理 二平面互相垂直,則垂直於第一平面之直線必在第二平面上或與第二平面平行.

證 略.

371. 定理 24. 相交二平面均垂直於第三平面,則其交線亦垂直於第三平面.

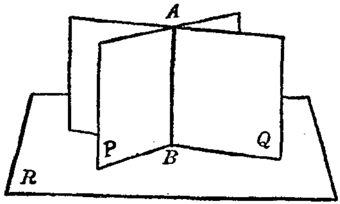


圖 316.

假設 相交二平面P,Q均與第三平面R垂直,AB為其交線.

求證 AB垂直於R.

證 因平面$P\perp R$,自A引垂直R之直線,必全在P上.又因平面$Q\perp R$,自A引垂直R之直線亦必全在Q上.但兩平面只能公有一直線,故此二直線均與AB一致,即AB垂直於平面R.

372. 定理 25. 過平面外之一斜線得作一平面,且僅得作一平面與所設之平面垂直.

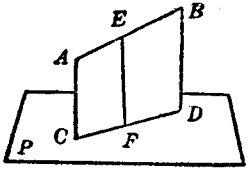


圖 317.

假設 AB 爲平面 P 外之一斜線.

求證 過 AB 僅得作一平面與 P 垂直.

證 自 AB 上之任一點 E, 引平面 P 之垂線 EF, 過 AB, EF 作一平面 $ABDC$, 則 $ABDC$ 垂直於平面 P.

又若過 AB 得作二平面與 P 垂直, 則其交線 AB 由前定理將與 P 垂直, 與假設不合, 故僅得作一平面垂直於 P.

373. 定理 26. I. 不在同一平面上之兩直線必有一公垂線, 且僅有一公垂線.

II. 公垂線爲兩直線間之最短距離.

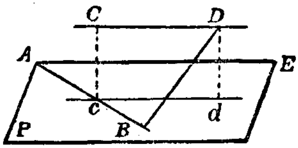


圖 318.

假設 AB, CD 爲不在一平面上之二直線.

求證 I. AB, CD 有唯一之公垂線.

II. 此公垂線爲 AB, CD 間之最短距離.

證 I. 過 AB 上之一點 A 引直線 AE 平行於 CD,

則 AB, AE 所決定之平面 P 與 CD 平行,且不問 A 在 AB 之何處,此種平面皆同為 P.

設 CD 在平面 P 上之直射影為直線 cd. 因 CD 與 cd 平行,故 AB, CD 之公垂線,亦必為 AB, cd 之公垂線.

由是可知凡 AB, CD 之公垂線,必為平面 P 之垂線,然自 CD 上各點作 P 之垂線,其垂足之軌跡為 cd, cd 與 AB 之交點,必有一而限於一,由此交點 c 作垂線 Cc, 即為唯一之公垂線.

II. 於 CD 上之任意點 D, 至 AB 引任意直線 DB,

則 $DB > Dd$, 但 $Dd = Cc$, 故 $DB > Cc$.

374. **定義 14.** 二直線間之公垂線之長,稱為二直線之距離.

375. **定理 27.** 與二面角之兩面等距離之點,其軌跡為平分二面角之平面.

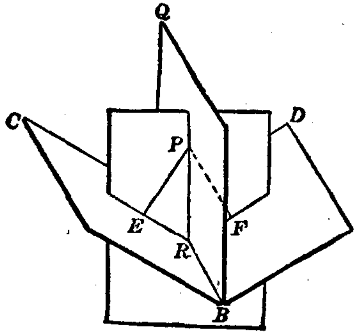


圖 319.

假設　QB為平分二面角$C\text{-}AB\text{-}D$之平面.

求證　QB為與CB, DB二面等距離之點之軌跡.

證　先設P為QB上之任意一點,自P引CB之垂線PE,引DB之垂線PF.過PE, PF作一平面,則此平面垂直於CB,又垂直於DB,故垂直於CB, DB二平面之交線AB.設R為AB與此平面之交點,則因$\angle PRE$與$\angle PRF$為$C\text{-}AB\text{-}Q$及$Q\text{-}AB\text{-}D$之平面角,故相等.由是可知

$$\triangle PRE \cong \triangle PRF,$$

故 $$PE = PF.$$

次設一點P與CB, DB二平面等距離.過P及AB作一平面,自P引CB, DB之垂線PE, PF;又過PE, PF作一平面,此平面與AB之交點為R.如是則$\angle PRE$及$\angle PRF$為$C\text{-}AB\text{-}Q$及$Q\text{-}AB\text{-}D$之平面角,且因

$$\triangle PRE \cong \triangle PRF,$$

故 $$\angle PRE = \angle PRF.$$

因之 $$C\text{-}AB\text{-}P = P\text{-}AB\text{-}D,$$

可知P點必在QB面上.

習　　題

1.　兩鄰接二面角各為30°及50°,試求平分兩二面角之二平面所成二面角之度數.

2.　過一所設點作一平面與二所設平面垂直.

3. 過一所設點作一平面,使之垂直於一平面且平行於一直線.

4. 二平面互相垂直,一第三平面垂直於其交線,則三交線必兩兩垂直.

5. 一直線平行於一平面,則此直線之垂直平面均垂直於原平面.

6. 二面角之稜之垂直平面必垂直於其二面.

7. 二直線互相垂直,問過其一直線之平面是否垂直於他直線?

8. 過一定點之三直線,若與不過此點之第四直線相交,則此四直線在一平面上.

9. 過一點之七直線,無三直線在同一平面上,問此七直線可決定若干平面?

10. 與平行二平面等距離之點,其軌跡爲何?

11. 與相交二直線等距離之點之軌跡爲何?

12. 設A爲一定點,P爲通過一定直線之一平面,自A作P之垂線,其垂足爲B,則B之軌跡爲一圓周.

第二十七章

多面角

376. **定義 15.** 三個以上之平面,公有一點,且順次兩兩相交,則諸平面圍成一多面角,其共通之點曰**多面角之頂點**,諸交線曰**多面角之稜**,各平面曰**多面角之面**,其相鄰二稜之交角曰**面角**.

如圖,S 爲一多面角之頂點,SA, SB, SC …… 爲稜,平面 ASB, BSC …… 爲面,$\angle ASB$, $\angle BSC$ …… 爲面角.

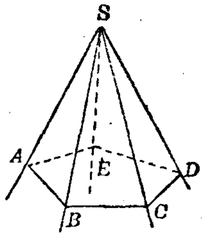


圖 320.

此多面角以 S,或以 $S\text{–}ABCDE$ 記之.多面角至少須由三平面圍成.多面角之名稱與多角形相仿,依其面數而稱曰**三面角**,**四面角**,**五面角**等.

多面角之大小,不關於其面之廣狹,而與其面之相互位置有關.

377. **定義 16.** 一平面與多面角之各稜相交,則得一多角形,此多角形稱曰**多面角之截口**.

378. **定義 17.** 多角形之截口,若爲凸多角形,則此多面角稱爲**凸多面角**,若爲凹多角形,則稱爲**凹多面角**.

凡多面角不冠以凸凹等字者,係指凸多面角而言.

兩多面角可合而爲一者,稱曰**兩多面角相等**.

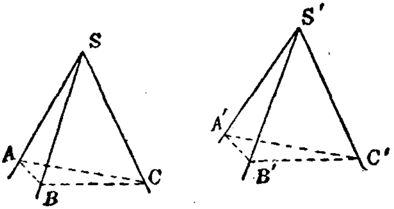


圖 321.

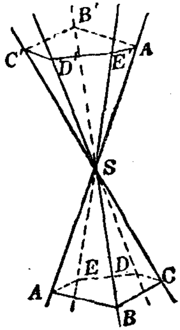


圖 322.

379. **定義 18.** 將一多面角之各稜延長之可得一新多面角,此兩多面角互稱曰**對頂多面角**.

凡與 S 之對頂多面角相等之多面角,稱爲 S 之對稱多面角.

380. **定理 28.** 三面角之兩個面角之和大於餘一面角.

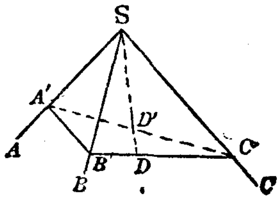


圖 323.

假設 三面角爲 $S\text{-}ABC$.

求證　$\angle ASB + \angle BSC > \angle ASC.$

證　若$\angle ASC$不大於$\angle ASB$，則無待證明.今設$\angle ASC$大於$\angle ASB$，則於ASC面角中可引直線SD，使$\angle ASD = \angle ASB$.於SB上取B'點;於SD上取D'，使$SD' = SB'$.過D'，B'作一平面，與SA稜交於A'，與SC稜交於C'，則

$$\triangle A'SD' \cong \triangle A'SB'.$$

故　$$A'B' = A'D'.$$

又由$\triangle A'B'C'$，知$A'B' + B'C' > A'C' \ (= A'D' + D'C')$，

故　$$B'C' > D'C'.$$

由是可知　$$\angle B'SC' > \angle D'SC',$$

因之　$$\angle A'SB' + \angle B'SC' > \angle A'SD' + \angle D'SC'.$$

即　$$\angle ASB + \angle BSC > \angle ASC.$$

381.　**定理 29.**　凸多面角各面角之和小於四直角.

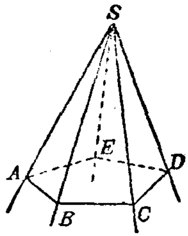


圖 324.

假設　S-$ABC \cdots\cdots E$為一凸n面角.

求證　$\angle ASB + \angle BSC + \cdots\cdots < 4\angle R.$

證　設 $ABC\cdots\cdots E$ 爲此多面角之一截口，由三面角 $A\text{-}SEB$, $B\text{-}SAC$, ……, 得

$$\angle EAB < \angle EAS + \angle BAS,$$
$$\angle ABC < \angle ABS + \angle CBS,$$
$$\angle BCD < \angle BCS + \angle DCS,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

將此 n 個不等式邊邊相加，左邊爲凸 n 邊形內角之和，故等於 $(2n-4)$ 直角．右邊爲 n 個三角形諸內角之和減去諸面角之和，故等於 $4n$ 直角減去諸面角之和，因左邊小於右邊，故諸面角之和小於 4 直角．

即　　$\angle ASB + \angle BSC + \cdots\cdots < 4\angle R.$

382. 定理 30.　一三面角之各面角各與他三面角之各面角相等，則兩三面角或相等或對稱．

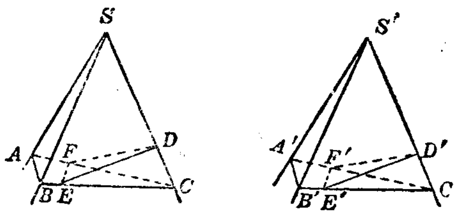


圖　325.

假設　$S\text{-}ABC$ 及 $S'\text{-}A'B'C'$ 爲兩三面角，

$\angle ASB = \angle A'S'B'$, $\angle BSC = \angle B'S'C'$, $\angle CSA = \angle C'S'A'$.

求證 $S\text{-}ABC$ 與 $S'\text{-}A'B'C'$ 或相等或對稱.

證 取 $SA=SB=SC=S'A'=S'B'=S'C'$, 則

$$\triangle ASB\cong\triangle A'S'B',\ \triangle BSC\cong\triangle B'S'C',\ \triangle CSA\cong\triangle C'S'A'.$$

由是 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

於 SC 及 $S'C'$ 上各取一點 D 與 D', 使 $SD=S'D'$.

過 D 引 SC 之垂直平面,與 AC 交於 F, BC 交於 E. 過 D' 引 $S'C'$ 之垂直平面,與 $A'C'$ 交於 F', $B'C'$ 交於 E'; 則

$$\triangle EDC\cong\triangle E'D'C',\quad \triangle FDC\cong\triangle F'D'C',$$

故 $ED=E'D',\qquad FD=F'D'$.

又 $\triangle ECF\cong\triangle E'C'F'$,

故 $EF=E'F'$.

由是 $\triangle EDF\cong\triangle E'D'F'$,

故 $\angle EDF=\angle E'D'F'$.

由此可知二面角 SC 等於二面角 $S'C'$.

同理可證二面角 SB 等於二面角 $S'B'$, 二面角 SA 等於二面角 $S'A'$.

故一三面角之面角與他三面角之面角兩兩相等,則其二面角亦兩兩相等.應用此事實,吾人移動三面角 S 使 $\triangle ABC$ 重合於 $\triangle A'B'C'$, 則 S 與 S' 二頂點或在平面 $A'B'C'$ 之同側,或在異側.若在同側,則必相合,因二面角 SA, SB, SC 順次與二面角 SA', SB', SC' 相等之故,此時兩三面角相等.若在異側,則可再移動三面角 S, 使重合於 S' 之對頂多面

角,故此時兩三面角為對稱.

習題

1. 一三面角之兩個面角及其間之二面角各與他三面角之兩個面角及其間之二面角相等,則此兩三面角或相等或對稱.

2. 一三面角之兩二面角及其間之面角各與他三面角之兩二面角及其間之面角相等,則兩者或相等或對稱.

3. 三面角中之兩個面角相等,則其所對之兩二面角亦相等.

4. 三面角中之兩個面角相等,則此三面角與其對頂三面角相等.

5. 三面角中面角較大者,其所對之二面角亦大.

6. 三面角中,含各面角平分線,且垂直於其面之三平面相交於一直線.

7. 若三面角 $V\text{-}ABC$ 之面角 AVB 為 VD 直線所平分,則 $\angle CVD \gtreqqless \angle R$. 因而 $\angle CVD \gtreqqless \frac{1}{2}(\angle AVC + \angle BVC)$.

8. 與三面角之三稜等距離之點,其軌跡為何?

9. 平分三面角中二面角之三平面會於一直線.

10. 與三面角之三面等距離之點,其軌跡為何?

11. 三面角之三個二面角之和,大於兩個直二面角,而小於六個直二面角.

第二十八章　多面體

383. **定義 19.** 平面所圍成之空間中有限部分,稱曰多面體.其各平面稱曰多面體之面.各面總稱曰多面體之表面.面之交線稱曰稜.稜之交點稱曰頂點.

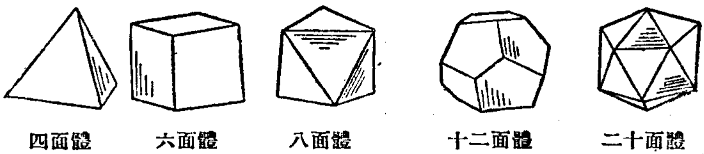


圖 326.

多面體依其面數之多少,而稱之曰四面體,六面體,八面體,十二面體等.

系　多面體之面數至少為四.

定義 20. 延長任何面,均不入其內部之多面體,稱為凸多面體,否則稱為凹多面體.

本書所論之多面體,均為凸多面體.

定義 21. 二頂點之連結線若不在多面體之面上曰多面體之一對角線.

384. **定理 31.** 任意多面體中頂點數與面數之和,等於稜數與2之和.

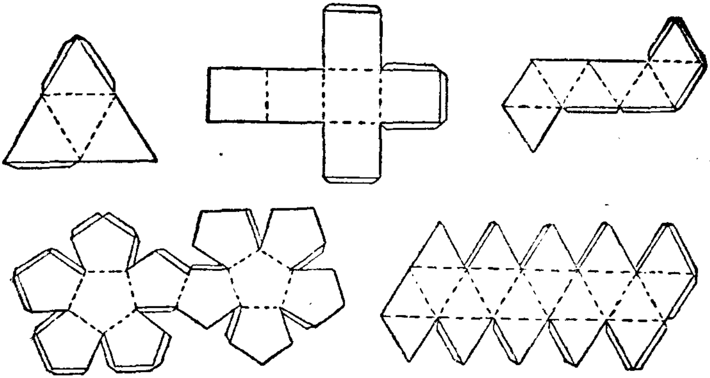


圖 327.

假設　多面體之頂點數爲V,面數爲F,稜數爲E.

求證　$V+F=E+2$*.

證　今將多面體之各面展開於一平面上以研究之.上圖爲前節中各多面體所展開之平面圖形.

取多面體之任意一面爲第一面,設其邊數及頂點數爲l_1及V_1.次取其一鄰接面爲第二面,設其除去與第一面共通之邊及頂點外,餘剩之邊數及頂點數爲l_2及V_2.又設鄰接之第三面除與前二面共通之邊及頂點外,餘剩之邊數及頂點數爲l_3及V_3.由是逐漸推論,至於第$F-1$面,除與其餘各面共通之邊及頂點外,尙有l_{F-1}個邊及V_{F-1}個頂點.

* 此爲Euler之公式.

若一面有一邊與前者共通,則必有兩頂點與前者共通;若有二邊與前者共通,則必有三頂點與前者共通.依此類推,得關係式:

$$l_1 = V_1,\ \ l_2 = V_2 + 1,\ \ l_3 = V_3 + 1\cdots\cdots.$$

將等式之兩端相加,得:

$$l_1 + l_2 + l_3 + \cdots\cdots = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots\cdots + F - 2.$$

最後之一面,其頂點與稜勢必與前諸面完全共通,否則此多面體不能完成,故計算面數為F之多面體之頂點數及稜數,僅計算$F-1$個面已足,故

$$l_1 + l_2 + l_3 + \cdots\cdots = E,$$

$$V_1 + V_2 + V_3 + \cdots\cdots = V.$$

因之　　$E = V + F - 2.$

即　　$E + 2 = V + F.$

385. **定義 22.** 凸多面體之各面,皆為相等之正多角形,且其諸多面角皆相等者曰**正多面體**.

第383節之圖表示五種正多面體.由上定理知除此五種而外,無復有正多面體焉.

386. **定理 32.** 正多面體有五種,且僅有五種.

證 因凸多面角至少須有三面,且其各面角之和須小於$4\angle R$.由是:

I. 設多面體之各面為正三角形,而正三角形一內角為$\frac{2}{3}\angle R$.故三個、四個、五個正三角形組成之多面角,其

面角和均小於$4\angle R$.故各面爲正三角形之正多面體不能多於三種,事實上確有三種,卽正四面體,正八面體及正二十面體是也.

II. 設多面體之各面爲正方形,而正方形之內角爲$\angle R$.三個正方形所組成之多面角,其面角之和小於$4\angle R$.故知各面爲正方形之正多面體僅有一種,立方體當屬於是.

III. 同理知各面爲正五角形之正多面體亦僅有一種,正十二面體當屬於是.

IV. 因正六角形之各內角爲$\frac{4}{3}\angle R$.而三個正六角形組成之多面角,其面角之和已等於$4\angle R$.故以正六角形爲各面之正多面體乃不存在,因此且知邊數在六以上之正多角形不能形成正多面體.

五個正三角形組成一五面角,以此種五面角所形成之正多面體,其面數何以知其必爲二十乎?詳言之,正n邊形組成一m面角,以此種多面角所構成之正多面體,其面數果有一定否?由定理31,知

$$V+F=E+2.$$

而 $$E=\frac{n}{2}F, \qquad V=\frac{n}{m}F.$$

故 $$F=2\Big/\left(\frac{n}{m}+1-\frac{n}{2}\right).$$

以是知F必爲一定,設:

I. $n = m = 3$, 則 $F = 4$ (正四面體),

$n = 3, m = 4$, 則 $F = 8$ (正八面體),

$n = 3, m = 5$, 則 $F = 20$ (正二十面體).

II. $n = 4, m = 3$, 則 $F = 6$ (立方體).

III. $n = 5, m = 3$, 則 $F = 12$ (正十二面體).

如是則本定理之證明乃完備.

習　題

1. 試計算五種正多面體之頂點數及稜數,列表以明之.

2. 相等之三直線 AA', BB', CC' 交於其中點 O, 且互相垂直,則 A, B, C; A', B', C' 決定一正八面體 (AA', BB', CC' 三直線稱曰**正八面體之軸**).

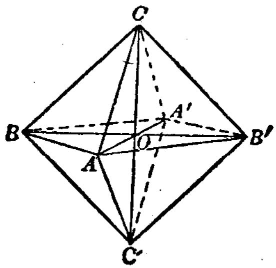


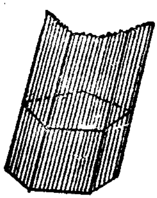
圖 328.

3. 正八面體之稜長爲3寸,問其軸長若干?

4. 證明正六面體中過一頂點之三面及三稜均互相垂直.

第二十九章　角　柱

387. **定義** 23. 一直線以一定之方向,沿一凸多角形之周移動,其所成之表面稱曰**角柱面**.此直線稱曰**母線**.多角形之周稱曰**指線**.



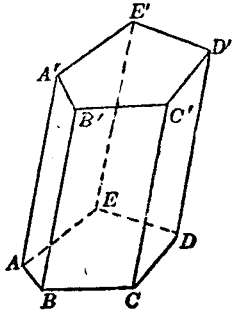


圖　329.

定義 24. 角柱面與二平行平面所圍成之空間的有限部分,稱曰**角柱**.此角柱面稱曰**角柱之側面**.其面積稱曰**側面積**.二平行之平面稱曰**角柱之底**.二側面之交線,稱曰**側稜**.

系　角柱之底爲多角形,其側面爲平行四邊形,其諸側稜均相等.

定義 25. 角柱以其側稜垂直於底與否而分爲**直角柱**與**斜角柱**二種.角柱因底爲三角形,四角形……而稱曰

三角柱,四角柱等.

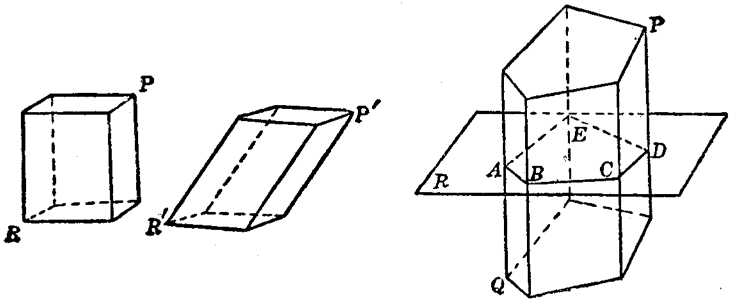


圖 330.

定義 26. 角柱二底間之距離曰**角柱之高**.

定義 27. 一平面與一立體共通之處稱曰此立體之**截面**.

定義 28. 截面若垂直於角柱之側稜,則稱之曰角柱之**直截面**.

388. **定理 33.** 角柱之平行截面為全相等之多角形.

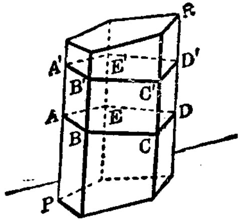


圖 331.

假設 一角柱PR之二平行截面$ABC\cdots\cdots$及$A'B'C'\cdots\cdots$截其側稜於$A,B,C,\cdots\cdots$及$A',B',C'\cdots\cdots$各點.

求證 $ABC\cdots\cdots \cong A'B'C'\cdots\cdots$.

證 因$AA'B'B$爲平行四邊形,故$AB=A'B'$.

又$\angle ABC$與$\angle A'B'C'$之邊,兩兩在同一方向且平行,故相等.

由是$ABC\cdots\cdots$與$A'B'C'\cdots\cdots$之邊角皆兩兩相等,故全相等.

系 1. 平行於底之截面與角柱之底全相等.角柱之直截面均相等.

系 2. 角柱之二底全相等.

389. **定理 34.** 角柱之側面積等於直截面之周與側稜之乘積.

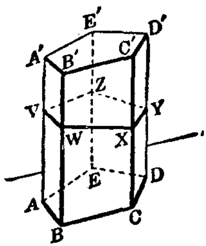


圖 332.

假設 角柱AD'之側稜,其長爲l;V,W,X,Y,Z爲其一直截面,其周爲p.

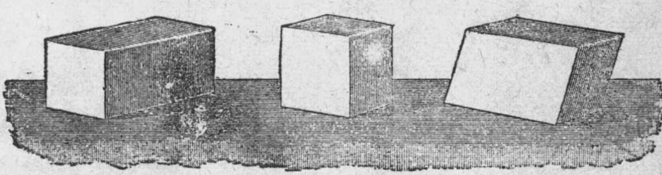
求證　角柱之側面積 $= p \cdot l$.

證　因直截面之各邊垂直於諸稜 $AA', BB' \cdots\cdots$, 故

$$\text{角柱 } AD' \text{ 之側面積} = AA' \cdot VW + BB' \cdot WX + CC' \cdot XY + \cdots\cdots$$
$$= l\,(VW + WX + XY + \cdots\cdots) = lp.$$

系　直角柱之側面積等於其底之周與高之相乘積.

390. **定義 29.**　底爲平行四邊形之角柱曰平行六面體.平行六面體之側稜垂直於底者曰**直平行六面體**.直平行六面體之底爲矩形者曰**直六面體**,或曰**長方體**.長方體之底及側面均爲正方形者曰**正方體**,或曰**立方體**.



直六面體　　正方體　　平行六面體

圖 333.

391. **定理 35.**　平行六面體之相對二面全相等而且平行.

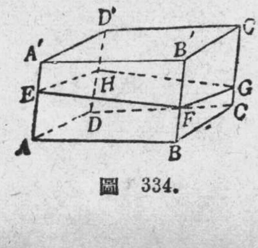


圖 334.

假設 $\square A'ABB'$ 與 $\square C'CDD'$ 爲平行六面體任意之二相對面.

求證 $\square A'ABB' \cong \square C'CDD'$,

且平面 $A'B$ // 平面 $D'C$.

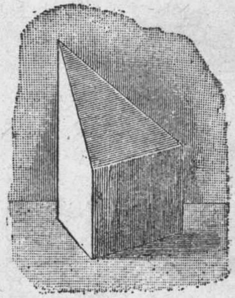
證 $\angle A'AB$ 與 $\angle D'DC$ 之邊在同方向兩兩平行,故相等,且其所在之平面亦平行,而其邊又兩兩相等,故

$$\triangle A'AB \cong \triangle D'DC.$$

由是易知 $\square A'ABB' \cong \square C'CDD'$.

系 1. 平行六面體不論任何相對之二面爲底,均爲角柱.

系 2. 一平面若與平行六面體之四側稜皆相交,則其截面爲一平行四邊形.



截角柱

圖 335.

392. **定義 30.** 一截面與角柱之各側稜皆相交,角柱因此截面所分之二部分皆稱爲**截角柱**.

定義 31. 若一立體之表面重疊於他立體之表面,可使處處符合者,則曰兩立體全相等,以記號≅表示之.

393. **定理 36.** 若一角柱中夾三面角之三面各與他角柱中夾三面角之三面全相等,則兩角柱全相等.

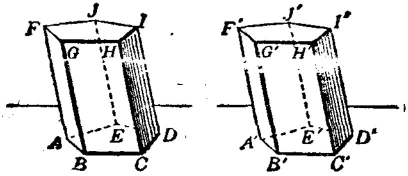


圖　336.

假設　於兩角柱 AI 及 $A'I'$, $ABCDE \cong A'B'C'D'E'$,

$$\square ABGF \cong \square A'B'G'F',$$

$$\square GBCH \cong \square G'B'C'H'.$$

求證　角柱 $AI \cong$ 角柱 $A'I'$.

證　因 $\angle CBA = \angle C'B'A'$, $\angle CBG = \angle C'B'G'$,

$$\angle ABG = \angle A'B'G'.$$

故　三面角 B = 三面角 B'.

移動角柱 AI,使三面角 B 與三面角 B' 符合,且使其三面亦兩兩與 B' 之三面符合,則兩角柱之表面處處符合,故

$$AI \cong A'I'.$$

系 1.　同底等高之直角柱全相等.

系 2.　兩截角柱若有定理中之條件,則亦全相等.

394.　**定義 32.**　度量立體之大小,以一立方體爲單位,其各稜均爲單位之長,此種立方體,稱爲單位立方體.

如欲度量一長方形之箱,而此箱之長、寬、高均以尺數表示者,則以每邊爲一尺之立方體,稱曰一立方尺者爲單位度量之爲便.

定義 33. 立體中所容單位立方體之全部稱爲此立方體之體積.一立體若爲 m 個單位立方體所構成,則簡稱曰其體積等於 m.

定義 34. 二立方體之體積相等者,稱曰等積,以記號 $(=)$ 表示之.

395. **定理 37.** 斜角柱與以其直截面爲底,側稜爲高之直角柱等積.

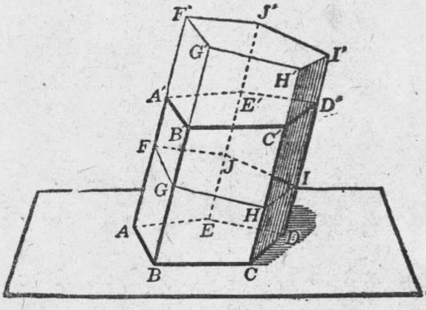


圖 337.

假設 角柱爲 AD',其二底爲 $ABCDE$ 及 $A'B'C'D'E'$. $FGHIJ$ 爲其任意之一直截面.於 AA' 之延長線上取 F' 點,使 $FF' = AA'$.過 F' 點作一平面與直截面平行,且與各稜之延長線交於 F', G', H', I', J' 各點,則 FI' 爲一直角柱,其底爲 AD' 之直截面.

求證 角柱 AD' = 角柱 FI'.

證 由前定理系2,知截角柱 $AI \cong$ 截角柱 $A'I'$.

然　角柱AI + 角柱IA' = 角柱$A'I'$ + 角柱IA',

故　　角柱AD' = 角柱FI'.

系　有相等之側稜及直截面之兩角柱其體積相等.

396. **定理 38.** 過平行六面體二相對稜之平面,分此平行六面體為等積之兩三角柱.

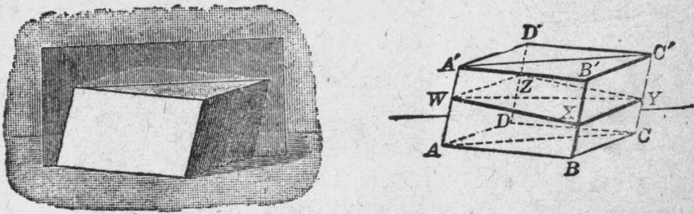


圖 338.

假設　平行六面體為AC',過AA',CC'二相對稜作一平面.

求證　三角柱$ABCA'B'C'$ = 三角柱$ACDA'C'D'$.

證　引直截面$WXYZ$,與平面$AA'C'C$交於WY.

因　$WXYZ$為一平行四邊形,故

$$\triangle WXY \cong \triangle YZW.$$

由前定理及系,知

三角柱$ABCA'B'C'$ = 三角柱$ACDA'C'D'$.

397. **定義 35.** 長方體中會於一頂點之三稜之長,稱曰長方體之三個元.此三稜之長,即長方體之長、闊、高.

398. **定理 39.** 底全相等之兩長方體(體積)* 之比等於其高之比.

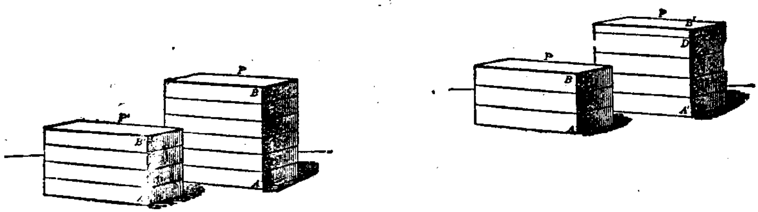


圖 339.

假設 二長方體 P 及 P', 其底全相等, 其高爲 AB 及 $A'B'$.

求證 $$P : P' = AB : A'B'.$$

證 I. 設 $AB, A'B'$ 爲可通約量.

因 $AB, A'B'$ 有一公約量, AB 爲其 m 倍, $A'B'$ 爲其 n 倍,

故 $$AB : A'B' = m : n.$$

分 AB 爲 m 等分, 分 $A'B'$ 爲 n 等分, 過各分點作平面垂直於 AB 及 $A'B'$, 則 P 被分爲 m 個長方體, P' 被分爲 n 個長方體, 且易知此等長方體皆全相等, 故

$$P : P' = m : n = AB : A'B'.$$

II. 設 $AB, A'B'$ 爲不可通約量.

察視上圖, 學者試自證之.

---

* 體積二字, 往往略去, 後準此.

系　兩長方體有二元相等,則其比等於其第三元之比.

399. **定理 40.** 等高兩長方體之比等於其底之比.

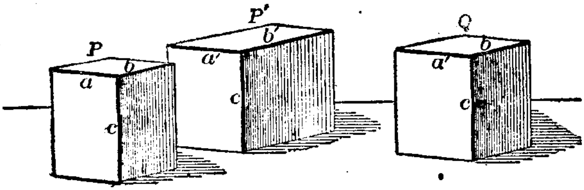


圖 340.

假設　兩長方體P, P'之三元各為a, b, c及a', b', c.

求證　$$P : P' = a \times b : a' \times b'.$$

證　作一a', b, c為三元之長方體Q,則Q與P或P'均有二元相同,故由前定理之系,得

$$P : Q = a : a', \quad Q : P' = b : b'.$$

由是　$$P : P' = a \times b : a' \times b'.$$

系　兩長方體有一元相同,則其比等於其他二元乘積之比.

400. **定理 41.** 兩長方體之比等於其三元乘積之比.

假設　P及P'兩長方體之三元各為a, b, c及a', b', c'.

求證　$$P : P' = abc : a'b'c'.$$

證　作一長方體Q,令其三元為a, b', c',則由前兩定

理之系,得 $P:Q=bc:b'c'$, $Q:P'=a:a'$,

故 $$P:P'=abc:a'b'c'.$$

401. 定理 42. 長方體之體積等於其三元之乘積.

證 用前定理之記號,設 R' 爲一單位體積之立方體,則 $P:R'=abc:1$,故 P 爲單位體積之 abc 倍.

系 長方體之體積等於其底面積與高之乘積.

402. 定理 43. 平行六面體之體積等於其底面積與高之乘積.

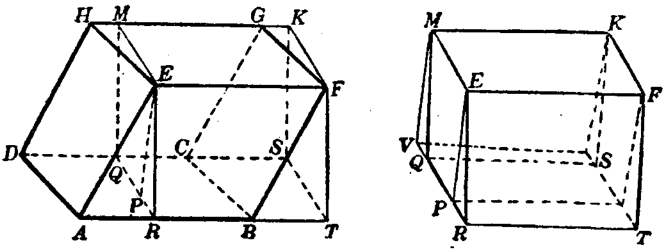


圖 341.

假設 $ABCD$ 與 $EFGH$ 爲平行六面體 AG 之兩相對面,自 E 引平面 $ABCD$ 之垂線 EP,其垂足爲 P

求證 AG 之體積 $=\square ABCD$ 之面積 $\times EP$.

證 過 E 作 AG 之直截面 $ERQM$,以 $ERQM$ 爲底,EF 爲一側稜作直角柱 RK,則 AG 與 RK 等積.

又以 EF, EM, EP 爲三元作長方體 PK,則 RK, PK 除去共通之直角柱,各餘一三角柱,卽 $EPRTF$ 與 $MVQSK$,而

此兩三角柱之高均等於EF,且底爲兩相等之三角形EPR, MVQ,故兩三角柱全相等.

由是知RK與PK等積,故AG與PK等積.然

$$PK\text{之體積} = EF \times EM \times EP,$$

故AG之體積等於$\square ABCD$之面積與EP之乘積.

403. 定理 44. 三角柱之體積等於其底面積與高之乘積.

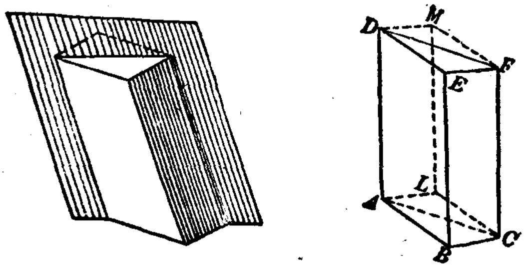


圖 342.

假設　$ABCDEF$爲三角柱,$\triangle ABC$爲其底,h爲其高.

求證　角柱$ABCDEF$之體積$= \triangle ABC$之面積$\times h$.

證　以AB, BC及BE爲三稜作一個平行六面體$ABCLDEFM$,

則　$ABCLDEFM$之體積$=2$倍$ABCDEF$之體積.

但　$ABCLDEFM$之體積等於其底$\square ABCL$之面積$\times h$;

又　$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\square ABCL.$$

故　$ABCDEF$之體積$= \triangle ABC$之面積$\times h$.

404. **定理 45.** 任意角柱之體積等於其底面積與高之乘積.

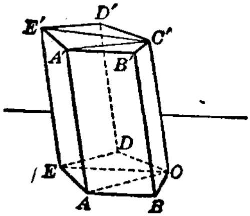


圖 343.

假設 一角柱$D'A$,其底之面積為b,其高為h.

求證 角柱$D'A$之體積$= b \times h$.

證 過一稜CC'及底之對角線$CA, CE,\cdots\cdots$作平面,分角柱$D'A$為若干三角柱(高均為h),則由定理得

三角柱$ABCA'B'C'$之體積$= \triangle ABC$之面積$\times h$,

三角柱$ACEA'C'E'$之體積$= \triangle ACE$之面積$\times h$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$;

故$D'A$之體積$= (\triangle ABC + \triangle ACE + \cdots\cdots)$之面積$\times h = bh$.

系 1. 等底之二角柱,其體積之比等於其高之比.

系 2. 等高之二角柱,其體積之比等於其底面積之比.

系 3. 等底等高之兩角柱,其體積相等.

習　　題

1. 角柱之側稜平行於不含此側稜之側面.

2. 一角柱爲一平行於其側稜之一平面所截,其截面爲一平行四邊形.

3. 試說明直平行六面體與直六面體之區別.

4. 平行六面體中截其任何平行四稜之截面爲一平行四邊形.

5. 立方體之對角線相等.

6. 立方體之稜長爲4.5,則其對角線之長爲何?

7. 長方體對角線上之正方形,等於交於一頂點之三稜上正方形之和.

8. 長方體之對角線相等且互相平分.

9. 設一角柱體之側稜之長爲17公分,其直截面之周爲36公分,求其側面積.

10. 以正六角形爲底之直角柱,其六角形一邊之長爲5尺,直角柱之高爲12尺,試求其側面積及其全面積.

11. 一直三角柱,其底爲一正三角形,每邊長4.67公寸,三角柱之高爲7.4公寸,試求其側面積.

12. 一長方體之箱,長$9\frac{1}{3}$尺,寬$6\frac{3}{4}$尺,高$3\frac{1}{2}$尺,問須若干平方尺之鉛皮方能將此箱包就.

13 一直角柱之高爲9寸,其底爲一菱形,每邊長4寸,二邊所夾之銳角爲60°,試求其全面積.

14. 兩長方體之高相等,其底面積一爲4 × 7,一爲

5×6,試求其體積之比.

15. 兩長方體之底相等,其高一爲4.5,一爲3.6,試求此兩長方體之比.

16. 一長方體之高爲6,其體積等於三元爲8,12及15之長方體,求其底面積.

17. 一長方體之兩稜爲12寸及a寸,其全面積爲$(120 + 34a)$平方寸,問其體積若干?

18. 一長方體之三元之比爲$3:4:5$,設其全面積爲2350方公分,試求此長方體之三元及其體積.

19. 長5尺、闊4尺、高3尺之木箱外包以$\frac{1}{8}$寸厚之鋅皮,有三方尺之鋅皮足供接縫之用,問共需若干立方尺之鋅皮?

20. 試求10,11,13三題中之直角柱之體積.

21. 一直三角柱之底之三邊爲6,8,10,其高爲9,試求其體積.

22. 試於下圖所示之室中,求其空氣之體積及其牆與屋頂之面積.

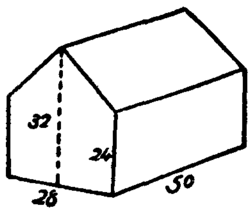


圖 344.

第 三 十 章

角 錐

405. **定義 36.** 一直線 X,恆過一定點 V,且沿一不合此 V 點之多角形 $ABCD$……之周移動,其所成之表面稱曰**角錐面**,直線 X 稱曰**動線**,多角形之周稱曰**導線**.

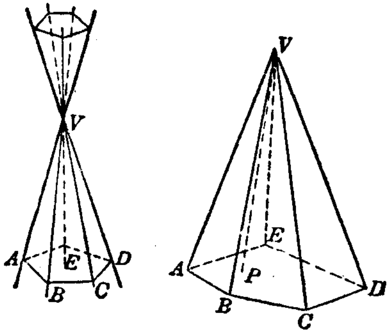


圖 345.

系 角錐面爲一多面角之面.

定義 37. 此角錐面與此多角形所圍成之空間中有限部分稱曰**角錐**,定點 V 稱曰**頂點**,多角形 $ABCD$……稱曰**底**,角錐之表面稱曰**側表面**,其面積稱曰**側面積**,除底以外之面稱曰**側面**,自頂點至底平面所引垂線之長稱曰**高**.

系 1. 角錐之側面皆爲三角形.

系 2. 角錐亦爲多面體之一種.

定義 38. 若一角錐之底爲正多角形,且自頂點所引

底面之垂線通過底之中心,則稱此角錐曰**正角錐**.

系　正角錐之諸側面爲全相等之二等邊三角形.

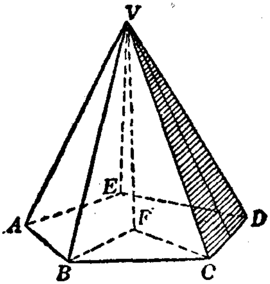
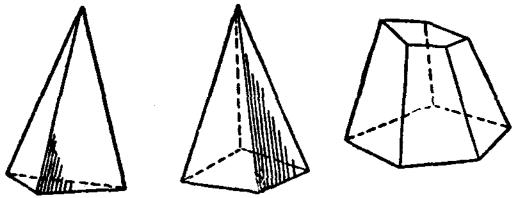


圖 346.

定義 39. 角錐因其底爲三角形,四角形……而稱之曰**三角錐,四角錐**……等.

定義 40. 正角錐側面之高稱曰**正角錐之斜高**.

定義 41. 一角錐,以不與底相交之一平面截去其含有頂點之部分,名其所餘之部分曰**截角錐**.



三角錐　四角錐　截角錐

圖 347.

定義 42. 截角錐之截面若平行於底,則稱此截角錐曰**平截角錐**.

平截角錐之截面稱曰**上底**,原有之底稱曰**下底**.

定義 43. 平截角錐兩底間之距離爲平截角錐之高,底以外之諸面爲平截角錐之側面,諸側面面積之和稱曰**側面積**.

系　正角錐之平截角錐,其諸側面爲全相等之梯形.

定義 44. 正角錐之平截角錐之斜高爲其側面(梯形)之高. 右圖表示一平截角錐, $ABCDE$ 爲底, $A'B'C'D'E'$ 爲截面, $M'M$ 爲斜高.

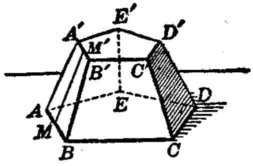


圖 348.

406. **定理 46.** 正角錐之側面等於斜高與半底周之乘積.

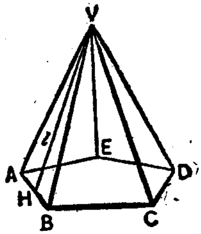


圖 349.

假設　正角錐 $V\text{-}ABCDE$ 之底爲正 n 角形, P 爲其底之周, S 爲其側面積, l 爲其斜高.

求證
$$S=\frac{P\times l}{2}.$$

證　$\triangle VAB$ 之面積等於 $\frac{1}{2}\times\frac{P}{n}\times l$, 而側面積爲 $\triangle VAB$ 面積之 n 倍.

故
$$S=\frac{P\times l}{2}.$$

系　正角錐之平截角錐,其側面積等於兩底周之和之半與斜高之乘積.

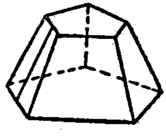


圖 350.

407. **定理 47.** 一角錐為平行於其底之一平面所截,則

I. 高與側稜被分為成比例之部分.

II. 其截面為底之相似多角形.

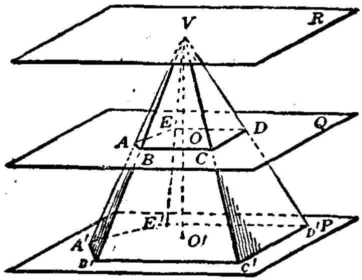


圖 351.

假設 $V\text{-}A'B'C'D'E'$ 為一角錐,其高為 VO',一平面平行於角錐之底,而截 VA', VB'……及 VO' 於 A, B,……及 O 諸點.

求證 I. $$\frac{VA}{VA'}=\frac{VB}{VB'}=\cdots\cdots=\frac{VO}{VO'}.$$

II. $ABCDE\sim A'B'C'D'E'$.

證 I. 過 V 作一平面平行於角錐之底,則側稜與高皆為三平行平面之截線.

故 $$\frac{VA}{VA'}=\frac{VB}{VB'}=\cdots\cdots=\frac{VO}{VO'}.$$

II. 因兩多角形 $A'B'C'D'E'$ 與 $ABCDE$ 之邊兩兩平

行,故其角兩相等,又

$$A'B':AB=VA':VA=VO':VO.$$

由是可知　$A'B'C'D'E' \sim ABCDE$.

系 1.　同頂角之兩角錐,若其兩底面互相平行,則其兩底面積之比,等於其高之平方之比.

系 2.　於等底(面積)等高之兩角錐,各作與底面平行之截面,截面與頂點之距離若等,則其面積亦等.

408.　**定理 48.**　高相等底面積相等之兩三角錐,其體積相等.

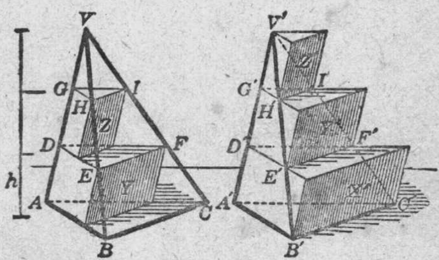


圖 352.

假設　$V\text{-}ABC$, $V'\text{-}A'B'C'$ 爲等底等高之兩三角錐.

求證　$V\text{-}ABC$ 與 $V'\text{-}A'B'C'$ 之體積相等.

證　假定兩三角錐之體積不相等,其差爲 W,其大者爲 $V'\text{-}A'B'C'$,則

$V'\text{-}A'B'C'$ 之體積減 $V\text{-}ABC$ 之體積 $=W>0$.

設兩三角錐共通之高爲h,共通之底面積爲b,則bh表示$\triangle A'B'C'$爲底,高爲h之一三角柱之體積.

取一整數n大於比$bh:W$.將兩三角錐之高分爲n等分,通過各分點作平行於底之截面,以$V\text{-}ABC$中之諸截面爲上底,AV爲一稜作諸三角柱,此種三角柱皆在$V\text{-}ABC$之內部,故其體積之和小於$V\text{-}ABC$之體積.又以$V'\text{-}A'B'C'$之諸截面及其底$\triangle A'B'C'$爲下底,$V'A'$爲一稜,作諸三角柱,此種三角柱之全體,包含三角錐$V'\text{-}A'B'C'$,故其體積之和大於$V'\text{-}A'B'C'$之體積.

此兩組三角柱,除以$\triangle A'B'C'$爲底者外,兩兩等積.因其高皆等於h/n,其底則兩兩相等之故(如圖 352, $Y = Y'$, $Z = Z'$).

是以V'之諸三角柱之體積和減去V中諸三角柱之體積和,等於以$\triangle A'B'C'$爲底,h/n爲高之三角柱之體積(卽X'之體積),然此兩和之差,實大於W,故

$$\frac{h}{n}\times\triangle A'B'C'\text{之面積} > W.$$

卽 $$n < bh:W.$$

此結果與n之本義相背,故W不能不爲0.

卽 $$V\text{-}ABC = V'\text{-}A'B'C'.$$

409. **定理 49.** 三角錐之底面積與其高之乘積必三倍於其體積.

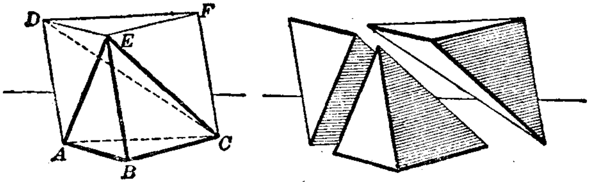


圖 353.

假設　三角錐 $E\text{-}ABC$ 之體積為 V，底面積為 b，高為 a.

求證　　$ab = 3V$.

證　以 ABC 為底，EB 為一稜作三角柱 $ABCDEF$，此三角柱乃三個三角錐 $E\text{-}ABC$，$E\text{-}CFD$，$E\text{-}DAC$ 所組成，其體積為 ab.

因　$$\triangle CFD = \triangle DAC,$$

故　$$E\text{-}CFD = E\text{-}DAC,$$

但　$E\text{-}CFD$ 卽為 $C\text{-}EFD$，而 $C\text{-}EFD$ 與 $E\text{-}ABC$ 為等底等高之兩三角錐，故

$$E\text{-}ABC = E\text{-}CFD = E\text{-}DAC.$$

由是　$$ab = 3V.$$

系 1.　角錐體積之三倍等於等底等高之角柱體積.

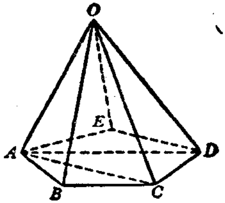


圖 354.

如圖，角錐 $O\text{-}ABCDE$ 之底可分為若干三角形，由是作平面可分角錐為若干三角錐，故云云.

系 2. 兩角錐體積之比等於其底與高乘積之比.

410. **定理 50.** 設平截角錐之高 ss' 為 h, 下底面積為 b, 上底面積為 b', 體積為 V, 則 $V=\frac{1}{3}h(b+b'+\sqrt{bb'})$.

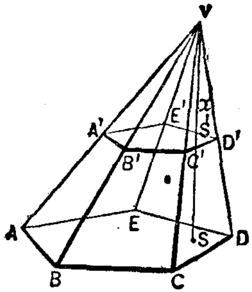


圖 355.

證 延長各側稜必相交於一點 V, 設 V 與上底之距離為 x, 則由前定理, 得

$$V=\frac{1}{3}b(h+x)-\frac{1}{3}b'x=\frac{1}{3}[bh+x(b-b')].$$

因 $$b:b'=(h+x)^2:x^2,$$

故將其兩邊開方且減1, 則得

$$\sqrt{b}-\sqrt{b'}:\sqrt{b'}=h:x,$$

即 $$(\sqrt{b}-\sqrt{b'})x=h\sqrt{b'}.$$

故 $$V=\frac{1}{3}h[b+\sqrt{b'}(\sqrt{b}+\sqrt{b'})]$$

$$=\frac{1}{3}h(b+b'+\sqrt{bb'}).$$

411. **定義 45.** 同面數之二多面體, 若其多面角兩

兩相等,且其面兩兩相似,則稱爲相似多面體.

習題

1. 正四面體之高分其底之高爲2:1之兩線分.

2. 正角錐之高遇其底之外接圓心.

3. 平截角錐之截面若與其兩底等距離,則此截面之周等於兩底周之和之半.

4. 過正四角錐之高作平面與角錐相交,得一二等邊三角形.

5. 正四面體一稜之長爲6,試求其高.

6. 正四角錐之底每邊長爲16,高爲15,求其側面積及全面積.

7. 正六角錐之底每邊長4尺,高21尺,試求側面積及全面積.

8. 正四角錐之斜高爲24,側稜爲25,試求其側面積.

9. 一三角錐之底爲一正三角形,每邊長15尺,此角錐之高爲17尺,試求其體積.

10. 一角錐之高爲20,底爲一直角三角形,斜邊之長爲29,夾直角之一邊爲21,試求其體積.

11. 一角錐之體積爲4立方碼,其底爲每邊2呎之正方形,試求其高.

12. 試求下列平截角錐之體積:

(a) 高爲6寸,上底爲16方寸,下底爲9方寸.

(b) 高爲$8\frac{2}{3}$寸,上底爲$6\frac{1}{4}$方寸,下底爲$18\frac{7}{9}$方寸.

13. 一角錐之高爲6,其底面積爲24方尺,一平面離底2尺,且平行於底截此角錐,則所得二部分之體積爲何?

14. 二相似多面體之每二對應稜之比皆相等.

15. 以一平行於底之平面截一角錐,則得一與原角錐相似之角錐.

16. 一三角錐有二面,與他三角錐之二面,兩兩相似,且其所夾之二面角相等,問此兩三角錐相似否?

17. 油漆一房屋費洋250元,若此房屋之三元均增加一倍,則須洋若干?

18. 兩相似多面體之兩對應稜一長12尺,一長21尺,若前者之體積爲400立方尺,則後者之體積爲若干立方尺?

第三十一章　柱

412. **定義 46.** 一直線以一定之方向沿一曲線移動,其所成之表面稱曰**柱面**·此直線稱曰**母線**·此曲線稱曰**導線**·

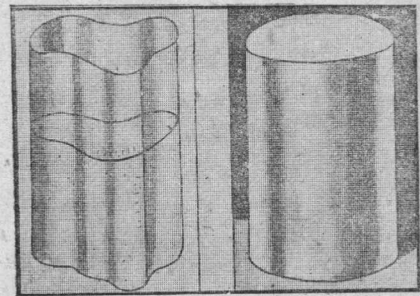


圖 356.

定義 47. 若柱面之導線爲一凸閉曲線,則由兩平行面及柱面所圍成之立體,稱曰**曲面柱**·兩平行面爲柱面所限之部分稱曰**曲面柱之底**·兩平行平面間之柱面稱曰**曲面柱之側面**·母線限於二底間之線分稱曰**原線**·兩底間之距離稱曰**高**·

系 曲面柱之任意二原線相等且平行·

定義 48. 曲面柱之底爲圓者曰**圓柱**·

定義 49. 曲面柱之原線,若垂直於底面,則曰**直曲面柱**,否則曰**斜曲面柱**·

系 固定矩形之一邊,將矩形迴轉一周,則得一直圓柱.

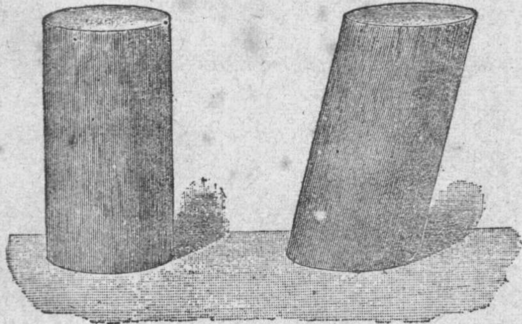


圖 357.

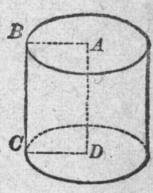


圖 358.

413. **定理 51.** 一平面過一曲面柱之一原線而分曲面柱爲二部分,則其所得之截面爲一平行四邊形.

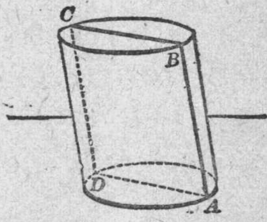


圖 359.

假設 BD 爲一曲面柱, AB 爲其一原線,平面 P 過 AB 而截此曲面柱.

求證 P與BD之相交處成一平行四邊形.

證 設平面P與BD之一底相交於一直線AD,因底周爲凸閉曲線,故AD與底周之交點數凡二;由是可知P上僅有二原線.凡原線互相平行,二底面亦平行,故所論之截口爲一平行四邊形.

系 過直曲面柱之原線之截面爲一矩形.

414. **定理 52.** 柱面之任意二平行截面全相等.

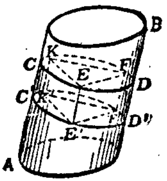


圖 360.

假設 $CD, C'D'$爲柱面AB之兩平行截面.

求證 $$CD \cong C'D'.$$

證 設E, F爲CD上之二定點,K爲CD上之任意一點.過E, F, K引AB之原線與$C'D'$交於E', F', K'各點,則

$$\triangle EFK \cong \triangle E'F'K'.$$

置CD於$C'D'$上,使E與E'相合,F與F'相合,則K與K'相合.

由是CD上各點均與在$C'D'$上相當之點重合.

同理$C'D'$上各點均與在CD上相當之點重合.

$$\therefore\ CD \cong C'D'.$$

系 1. 曲面柱之截面如平行於底,則與底全相等.

系 2. 曲面柱之二底全相等.

系 3. 曲面柱之直截面均相等.

415. **定義 50.** 一直線與柱面相遇於一點,且無論如何延長之永不再相交,則稱此直線切於此柱面;一平面含柱面之一母線,且無論若何延長之永不再相交者,則稱此平面切於此柱面.

定義 51. 一角柱之諸側稜皆爲一曲面柱之原線,且其底內接於曲面柱之底者,則稱此角柱曰**內接於此曲面柱**.

定義 52. 一角柱之諸側面,皆切於一曲面柱之側面,且其底外切於曲面柱之底者,則稱此角柱外切於此曲面柱.將一曲面柱之內接角柱之稜數漸次增大,則其側面積與體積逐漸增大,因此可述曲面柱之側面積與體積之定義如下:

定義 53. 將曲面柱之內接角柱之稜數逐漸增加,且與任意鄰接兩稜之距離逐漸減小,則曰其側面積與體積逐漸近迫於曲面柱之側面積與體積.

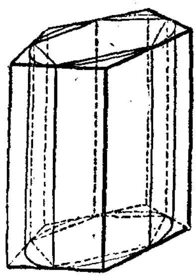


圖 361.

416. **定理 53.** 圓柱之側面積等於其直截面之周與一原線之乘積.

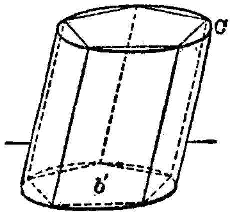


圖 362.

假設 L 爲圓柱 AB 之側面積, P 爲其直截面之周, E 爲其一原線之長.

求證 $L = P \cdot E.$

證 作 AB 之內接角柱,使其底爲正 n 角形,設 L' 爲此角柱之側面積, P' 爲此角柱直截面之周.

因角柱之側稜爲圓柱之原線,故 $L' = P' \cdot E.$

將 n 增大,由定義 L' 近迫於 L, P' 近迫於 P, 故 $P'E$ 近迫於 PE, 即 $L = P \cdot E.$

系 1. 直圓柱之側面積等於底周與高之乘積.

系 2. 設 L 表直圓柱之側面積, T 表其全面積, h 爲高, r 爲底之半徑, 則

$$L = 2\pi rh,$$

$$T = 2\pi r(h + r).$$

417. **定理 54.** 圓柱之體積等於其底面積與高之乘積.

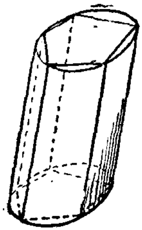


圖 363.

假設　V 爲圓柱 AB 之體積, b 爲其底面積, h 爲其高.

求證　$$V = b \cdot h.$$

證　作內接角柱,使其底爲正多角形,仿前定理之證明,即得　$$V = b \cdot h.$$

系　設直圓柱之高爲 h, 底之半徑爲 r, 則其體積爲

$$\pi r^2 h.$$

418. **定義 54.** 由相似矩形迴轉所成之直圓柱,稱曰相似直圓柱.

419. **定理 55.** 兩相似直圓柱,側面積或全面積之比等於其底半徑之平方之比,或等於其高之平方之比,其體積之比等於其底半徑之立方之比,或等於其高之立方之比.

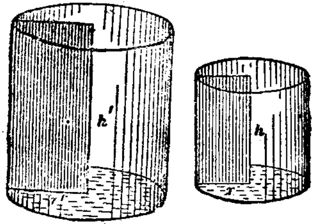


圖 364.

假設 兩相似直圓柱之側面積爲L, L';全面積爲T, T';體積爲V, V';底之半徑爲r, r';高爲h, h'.

求證 $L : L' = T : T' = r^2 : r'^2 = h^2 : h'^2$,

$V : V' = r^3 : r'^3 = h^3 : h'^3$.

證 兩直圓柱爲相似,故

$$\frac{r}{r'} = \frac{h}{h'} = \frac{r+h}{r'+h'},$$

因之
$$\frac{L}{L'} = \frac{2\pi rh}{2\pi r'h'}$$

$$= \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2},$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{2\pi r(h+r)}{2\pi r'(h'+r')} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2};$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r'^2 h'} = \frac{r^3}{r'^3} = \frac{h^3}{h'^3}.$$

習 題

1. 設一直圓柱之高爲 6 寸,其底之半徑爲 2 寸,求

其側面積與全面積.

2. 一直圓柱之側面積為440,其高為7,求其底之半徑.

3. 有等高之四個直圓柱,其中三個之底半徑為3,4,5,其餘一個之側面積等於此三個側面積之和,求其底之半徑.

4. 等高之兩直圓柱,其半徑各為3及4,試求一等高直圓柱之半徑,使其體積等於所設兩直圓柱之和.

5. 有兩相似直圓柱,其高之比為3:4,求其體積之比及面積之比.

6. 一圓柱,底之半徑為3,一原線之長為4,此原線與底面所成之角為45°,試求其體積.

7. 一圓柱體之桶,直徑為6寸,內盛以水,一物體沈入於水,水面升上2寸,試求此物體之體積.

8. 一中空之圓柱,長5公寸,外部直徑1公寸,厚一公分,設此圓柱之材料之比重為7.5,問此中空之圓柱之重若干?

9. 一石製圓柱,其底之直徑為4.5尺,高為24尺,今欲將此石柱之側面磨光,每方尺需費6角,問共需洋若干?

10. 今鑿一井,深為80尺,直徑為5尺,而每立方尺需工資3.25元,問共需工資若干?

第三十二章　錐

420.　**定義 55.**　一直線常過一定點,且沿不過此定點之曲線移動,其所成之表面,稱曰**錐面**.此動線稱曰**母線**.此曲線稱曰**導線**.此定點稱曰**頂點**.此母線在其任何之位置,稱曰**一原線**.

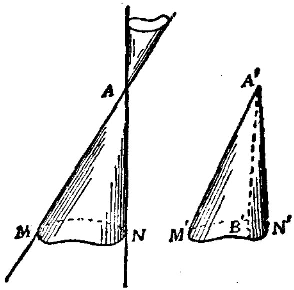


圖 365.

定義 56.　若錐面之導線爲一凸閉曲線,則由一平面與錐面圍成之立體稱曰**曲面錐**.此平面爲錐面所限之部分曰**曲面錐之底**.頂點與底間之表面,稱曰**側面**.頂點至底面之距離曰**曲面錐之高**.母線在頂點與底面間之線分曰**原線**.

定義 57.　圓爲底之曲面錐曰**圓錐**.

定義 58.　圓錐之底心與頂點之連結線曰**圓錐之軸**.

定義 59.　圓錐之軸垂直於底者曰**直圓錐**,不垂直於底者曰**斜圓錐**.

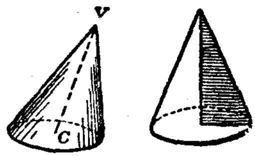


圖 366.

系　以一直角三角形夾直角之一邊爲軸,將三角形迴轉一周,則得一直圓錐.

定義 60.　直圓錐一原線之長曰**斜高**.

421. 定理 56. 一平面過曲面錐之頂點而分曲面錐爲二部分,則其截面爲一三角形.

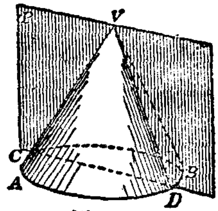


圖 367.

假設 $V-AB$ 爲一曲面錐,平面 P 過 V 而截 $V-AB$.

求證 P 與曲面錐之相交處爲一三角形.

證 設平面 P 與 $V-AB$ 之交線爲 CD,因底周爲一凸閉曲線,故與 CD 交點數爲 2. 又此兩交點與 V 之連結線,爲圓錐之二原線,此二原線與 CD 成一三角形,故云云.

系 於直圓錐過其頂點之截面爲一二等邊三角形.

422. 定理 57. 一平面平行於圓錐之底面而截之,其所得之截面爲一圓.

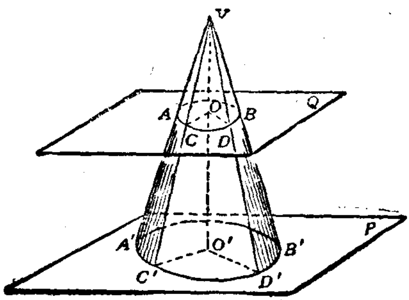


圖 368.

假設 平面 Q 平行於圓錐 $V-A'B'$ 之底而截之於 AB.

求證 AB 爲一圓.

證 設 O' 爲底之中心,軸 VO' 交平面 Q 於 O.

作任意二原線 VC',VD',設其與平面 Q 之交點爲 C,D;則 C,D 在截面上.

因 $\triangle VOC \sim \triangle VO'C'$, 故 $\dfrac{VO}{VO'}=\dfrac{CO}{C'O'}$.

又因 $\triangle VOD \sim \triangle VO'D'$, 故 $\dfrac{VO}{VO'}=\dfrac{DO}{D'O'}$.

因之 $$\frac{CO}{C'O'}=\frac{DO}{D'O'}.$$

然 $C'O'=D'O'$, 故 $CO=DO$.

故 AB 爲以 O 爲中心,CO 爲半徑之圓周.

系 1. 平行於圓錐底面之截面,其中心之軌跡,爲圓錐之軸.

系 2. 平行於圓錐底面之兩截面,其面積之比等於其半徑平方之比,又等於其與頂點之距離之平方之比.

423. **圓曲錐線** 一圓錐爲一平面 P 所截,則圓錐面與平面相交之處有下列五種情形:

一. 截面過圓錐之頂點 V 及一原線,則截面與圓錐面之相交處爲兩相交之直線.(圖 369)

二. 若截面不過頂點而平行於圓錐之底,則截面與圓錐面相交之處爲一圓周.(圖 370)

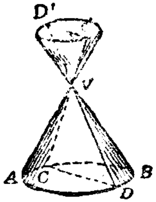


圖 369.

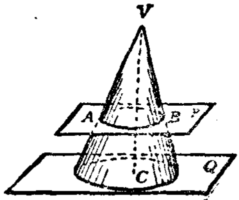


圖 370.

三. 若截面不平行於圓錐之底,亦不平行於其軸,又不平行於其任何母線,則截面與圓錐相交之處名曰橢圓.(圖 371)

四. 若截面平行於一原線,則其相交之處名爲拋物線.(圖 372)

五. 若P平行於圓錐之軸,則其相交之處名爲雙曲線.(圖373)

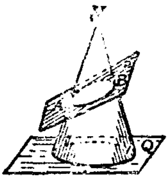


圖 371.

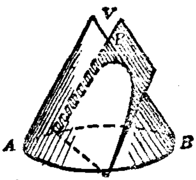


圖 372.

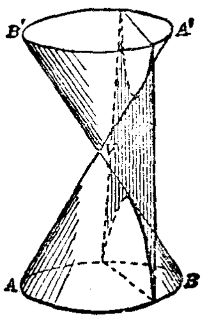


圖 373.

上述五種曲線,總稱曰圓錐截線,其平面圖形如下:

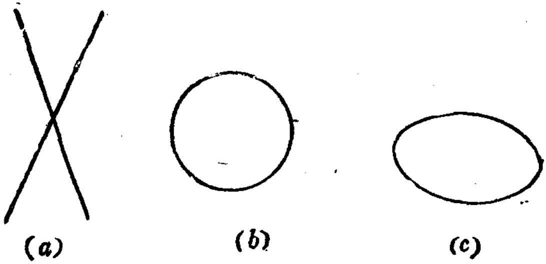


圖 374.

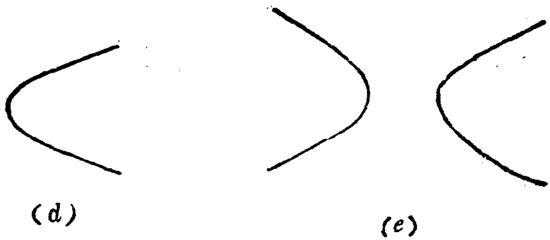


圖 375.

關於圓錐截線之詳細討論,別有專書,本書不復有所論述.

424. **定義 61.** 將定義50至53中所有之柱字改爲錐字,則得曲面錐之切線,切面,內接角錐,外切角錐,側面積及體積之定義.惟定義53中距離一語須改爲夾角.

425. **定理 58.** 直圓錐之側面積等於半底周與斜高之乘積.

如圖,作直圓錐之內接正角錐,由是仿定理53以證明之可也.

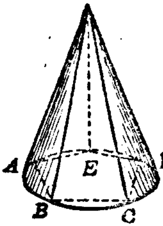


圖 376.

系 設L爲一直圓錐之側面積,T爲其全面積,s爲其斜高,r爲其底之半徑,則

$$L = \pi rs,$$

$$T = \pi r(s+r).$$

426. **定理 59.** 圓錐體積之三倍,等於其底面積與高之乘積.

證 證法同前定理.

系 設直圓錐之底半徑爲r,體積爲V,高爲h,則

$$V = \frac{1}{3}\pi hr^2.$$

427. **定義 62.** 二相似直角三角形各以其夾直角之相當邊爲軸,迴轉一周成兩圓錐曰**相似直圓錐**.

428. **定理 60.** 兩相似直圓錐之側面積或全面積之比等於其高,或其底之半徑,或其斜高平方之比.兩相似直圓錐體積之比等於其高,或其底之半徑,或其斜高立方之比.

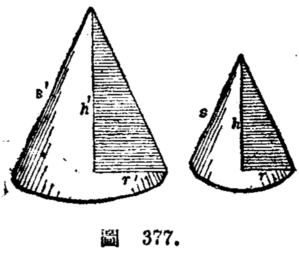


圖 377.

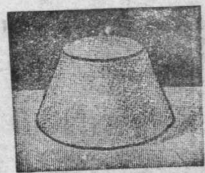
假設 兩相似直圓錐之側面積爲 L, L'；全面積爲 T, T'；高爲 h, h'；半徑爲 r, r'；斜高爲 s, s'.

求證 $L : L' = T : T' = h^2 : h'^2 = r^2 : r'^2 = s^2 : s'^2$,

$V : V' = h^3 : h'^3 = r^3 : r'^3 = s^3 : s'^3$.

證 仿定理55之證明，學者試自證之.

429. **定義63.** 曲面錐在平行於底之截面與底間之部分曰**平截錐**，曲面錐之底曰**平截錐之下底**，平行之錐面曰**曲面錐之上底**，其二底間之距離曰**高**，表面積除去二底之面積，曰**側面積**，直圓錐之平截錐其所含之原線皆等長，一原線之長稱曰**斜高**.



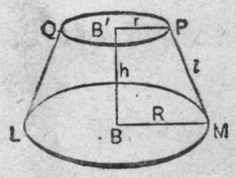


圖 378.

430. **定理61.** 直圓錐之平截錐，其側面積等於二底周之和之半與斜高之乘積.

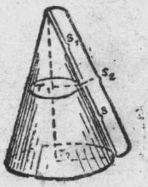


圖 379.

假設 一直圓錐之平截錐,其側面積爲L,上底之半徑爲r_1,下底之半徑爲r_2,斜高爲s.

求證 $$L=\pi(r_1+r_2)s.$$

證 所求之側面積,爲以其兩底爲底之兩直圓錐側面積之差,設此兩直圓錐之斜高爲s_1與s_2,則

$$L=\pi(s_2r_2-s_1r_1).$$

因 $$\frac{s_1}{r_1}=\frac{s_2}{r_2},$$

故 $$L=\pi(s_2r_2+s_2r_1-s_1r_2-s_1r_1)$$

$$=\pi(r_2+r_1)(s_2-s_1)=\pi(r_1+r_2)s.$$

系 直圓錐之平截錐,其側面積等於其中間截面之半周與斜高之乘積,設r爲中間截面之半徑,則 $L=\pi r\times s.$

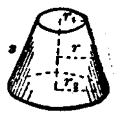


圖 380.

431. 定理 62. 一直圓錐之平截錐,其體積爲V,二底面積爲b_1, b_2,高爲h,則

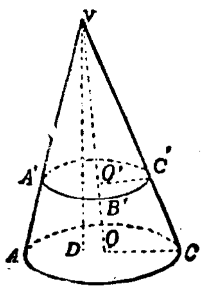


圖 381.

$$V = \frac{1}{3}h(b_1 + b_2 + \sqrt{b_1 b_2}).$$

證 證法與定理50之證明全同.

系 設二底之半徑爲 r_1 及 r_2, 則

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

習　　題

1. 一直圓錐之高爲5,半徑爲12,試求其側面積及全面積.

2. 二等邊直角三角形之斜邊爲10寸,迴轉之得一直圓錐,試求其側面積.

3. 一直圓錐之側面積爲356.3方尺,底之半徑爲4尺,試求其高.

4. 一直圓錐之半徑爲6,高爲2,試求其體積.

5. 一直圓錐之半徑爲5寸,斜高爲13寸,試求其體積.

6. 如右圖之立體爲一直圓柱與一直錐合成,試求其表面積.

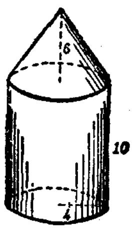


圖 382

7. 一圓錐之軸爲17寸,軸在底上之直射影爲8寸,體積爲80π立方寸,試求其底之半徑.

8. 試求下列兩相似直圓錐全面積之比:

(*a*) 高爲12寸與24寸.

(*b*) 高爲c寸與3寸.

(*c*) 底之半徑爲16公分與12公寸.

9. 一直圓錐之體積爲343立方寸,其高爲7寸,試求高爲8寸之相似直圓錐之體積.

10. 於下列直圓錐之平截錐,求其側面積:

(*a*) 兩底半徑爲6與1,斜高爲12.

(*b*) 兩底半徑爲7與3,高爲11.

11. 一直圓錐之平截錐,其二底之半徑爲5與4,高爲6,求其體積.

12. 一直圓錐之平截錐,其兩底之半徑爲3寸與9寸,其高爲8寸,試求其斜高,體積及其全面積.

13. 有一直圓錐之平截錐,其兩底之半徑爲3寸與5寸,其體積等於高爲6寸,底半徑爲4寸之直圓錐,試求其高.

14. 一等腰梯形,其二底爲6寸與12寸,以其二底之中點連結線爲軸迴轉梯形,得體積爲105π立方寸之立體,試求梯形之高.

15. 一直圓錐之高爲27寸,其側面積爲底面積之7倍,求底之半徑.

16. 如右圖,$AA'B'B$爲二同心圓弧及二半徑之一部分所圍成之圖形.此圖形適爲一平截錐之側表面,設此平截錐之下底爲36π, $OA=5$, $OA'=10$,試求其體積及$\angle AOB$之度數.

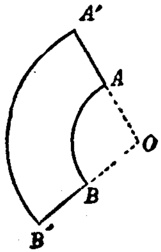


圖 383.

第三十三章　球

432. **定義 64.** 半圓周以其直徑為軸迴轉一周得一表面稱曰**球面**.

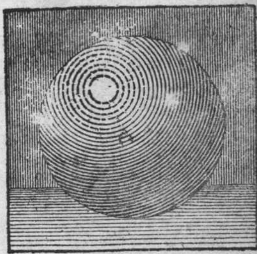


圖 384.

在迴轉時,半圓周上任意一點之徑路均為一圓,且此圓之中心在迴轉軸上.圓之平面垂直於迴轉軸.

球面所圍繞之立體曰**球**.

433. 今將空間中任意一點 C 與球面之關係研究之.設半圓周為 ABA', AA' 為直徑,過 AA' 與 C 作平面,與球面交於 ADA'(此為兩半圓所合成,故為一圓).設 C 在球外,則 C 在 ADA' 圓之外,故 C 與圓心之距離 OC,大於半徑 OD.若 C 在球面上,則 $OC = OD$.又若 C 在球面內,則 $OC < OD$.由是得定理如下:

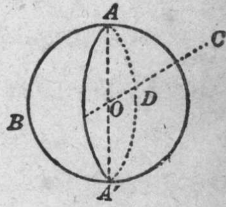


圖 385.

定理 63. 球面者與一定點有定距離之點之軌跡也.

此定點稱曰**球之中心**,中心與球面上一點間所引之有限直線分曰**球之半徑**.過球心而止於球面間之直線稱曰**球之直徑**.

系 1. 同球之半徑或直徑均相等.

系 2. 半徑或直徑相等之兩球全相等.

系 3. 一點在球外,球上,或球內,因而此點至球心之距離大於,等於,或小於球之半徑.又其逆亦眞.

434. 定理 64. 平面與球面相交之處爲一圓.

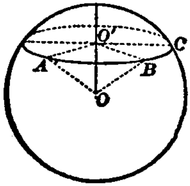


圖 386.

證 因各交點均在球面上,故與球心之距離相等,又在一平面上與一定點有定距離之點之軌跡爲一圓周,故諸交點成一圓周.

系 1. 定理中之平面若過球心,則球心卽圓心,圓之半徑卽球之半徑;若平面不過球心,則圓心爲球心在平面上之直射影,圓半徑之平方等於球半徑之平方減去球心與平面間距離之平方.

卽設球之半徑爲 R, 截面之半徑爲 r, 球心與平面之距離爲 d, 則

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

系 2. 球之二截面與球心之距離若相等,則兩截面

相等;與球心之距離若不相等,則離球心較近者,其截面較大.

435. **定義 65.** 過球心之截面曰**球之大圓**,不過球心之截面曰**球之小圓**;垂直於球之小圓或大圓之直徑稱曰此圓之**軸**;軸之兩端稱曰此圓之**極**.

436. 由上面定理及定義,易知下列之各定理均屬眞確:

定理 65.

一. 一圓之軸必過圓心.

二. 平行兩圓之軸及極均一致.

三. 一球之大圓均相等.

四. 大圓分球爲相等之兩半球.

五. 任意二大圓必互相平分.

六. 過球面上之三點得作全在球面上之一圓,且只能作一圓.

七. 過球面上之二點得作一大圓.

因二點與球心決定一平面之故,若二點在直徑之兩端,則大圓之數無限.

437. **定義 66.** 球面上兩點間大圓劣弧之長爲兩點之**球面距離**.

438. **定理 66.** 球之大圓或小圓,其圓周上所有之點,與其任意一極之球面距離相等.

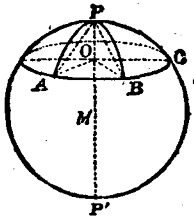


圖 387.

假設　ABC 爲球面上之一圓周，P 及 P' 爲 ABC 圓之兩極．

求證　大圓弧 $\widehat{PA} = \widehat{PB}$,　$\widehat{P'A} = \widehat{P'B}$.

證　直徑 PP' 通過 ABC 圓之中心 O，且垂直於平面 ABC，因 $OA = OB$，故 $PA = PB$. PA, PB 旣爲大圓之等弦，則其所對之大圓弧亦等.

即　$$\widehat{PA} = \widehat{PB}.$$

同理　$$\widehat{P'A} = \widehat{P'B}.$$

系　大圓周上之點與其極之球面距離，等於大圓周之四分之一.

***439.*　定義 67.**　球之大圓或小圓周上之點與其較近之一極間之球面距離，曰此圓之**極距離**．大圓之極距離稱曰**一象限**（爲大圓周之四分之一）．

***440.*　定理 67.**　小圓周上有三點 P, A, B，若 P, A 間與 P, B 間之球面距離皆等於一象限，則 A, B 二點決定一大圓，而 P 爲此大圓之極．

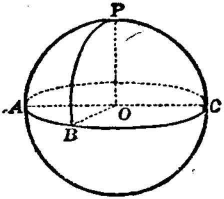


圖 388.

證 設O爲球之中心,則大圓周AOB不通過P,且A,B二點決非一直徑之兩端,故A,B決定一大圓.$\widehat{PA},\widehat{PB}$既皆爲一象限,故$\angle POA$,$\angle POB$皆爲直角,由是$PO$垂直於大圓$AB$.故$P$爲大圓$AB$之極.

441. **定義 68.** 一平面有一點,且僅有一點與球面共通,則稱此平面爲**球之一切面**.

一直線有一點且僅有一點與球面共通,則稱此直線爲**球之一切線**.

二球有一點且僅有一點共通,則稱曰**二球相切**.

定義 69. 若一多面體之各面皆切於一球面,則稱此多面體爲**球之外切多面體**.

一多面體之各頂點皆在一球面上,則稱此多面體爲**球之內接多面體**.

442. **定理 68.** 一平面P過球面上之一點A,且垂直於半徑OA,則P爲球之一切面.其逆亦眞.

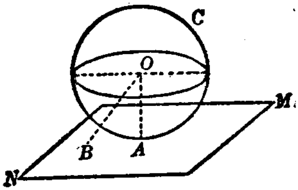


圖 389.

證 設B為平面上之任意一點,則OAB為直角三角形,而$OB>OA$,故B在球外;由是除A外,平面上之一切點,均在球外,故平面切於此球.

今言其逆:若平面切球面於A點,O為球心,則平面上任意一點B在球之外部,故$OB>OA$,因之$OA\perp P$.

443. **定理 69.** 二球面若相交而不相切,則其相交處為一圓.

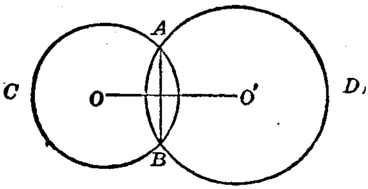


圖 390.

證 設二球心為O與O'兩球面既相交,必有一交點A.過A,O,O'三點作一平面P.設P與O球交於大圓AC,與O'球交於大圓AD.由球面之定義,知以OO'為軸,將此二圓迴轉一周,即得所設相交兩球之圖形.兩球既不相切,A點

決不在OO'直線上,是以二圓AC與AD必再交於他點B,而AB垂直於OO',且爲OO'所平分.當迴轉時,A,B兩點之徑路爲兩球相交處之一部分,然除此一部分外,兩球之相交處決不能別有他點.OO'既爲AB之垂直平分線,故A,B之徑路實爲一圓周.

系 兩球若相交於一圓,則圓之平面垂直於兩球心之連結線,且圓心亦在此線上.

444. **定理 70.** 任何四面體$ABCD$得內接於一球.

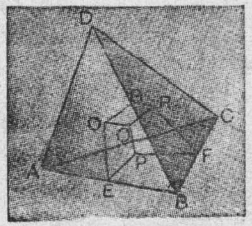


圖 391.

證 三稜AB, AC, AD相交於一點,故其垂直平分面亦相交於一點O,因OB, OC, OD皆等於OA,故以O爲中心,OA爲半徑作球,通過A,B,C,D四點.

由本定理與前定理得下述定理.

系 不在同一平面上之四點決定一球.

445. **定理 71.** 任何四面體得外切於球.

證 引平分四面體之任意三個二面角之三平面,必

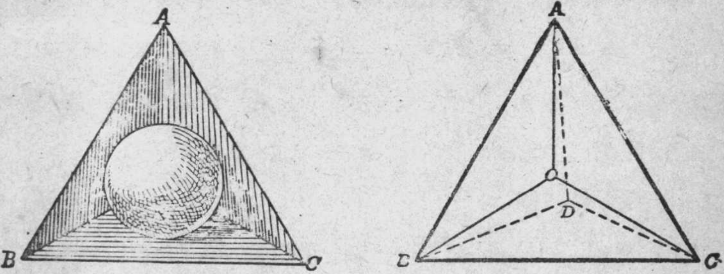


圖 392.

交於一點,此點與四面體之四面距離相等,故云云.

446. 作圖題 求球之直徑.

【題意】 用兩腳規及直線板作球之直徑.

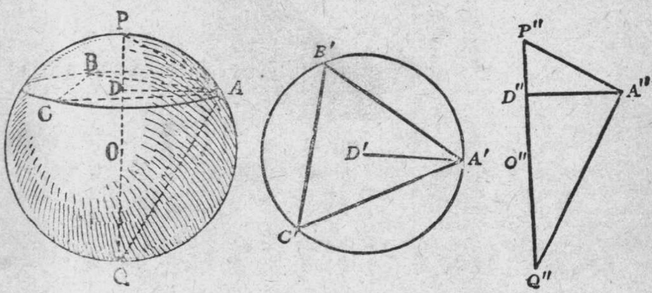


圖 393

作圖 以兩腳規之二足置於球面上兩點 P 與 A, 固定 P 點,使他足 A 在球面上移動,則 A 點之軌跡為一圓而 P 為其極,於此圓周上取三點 A,B,C. 用兩腳規作 $\triangle A'B'C'$ 於一平面上,使 $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.

設$\triangle A'B'C'$之外接圓心爲D',引$D''A''$等於半徑$D'A'$,過D''引一直線$P''Q''$垂直於$D''A''$.以A''爲中心,AP爲半徑作圓交$P''Q''$於P''.過A''作$A''P''$之垂線交$P''Q''$於Q'',則$P''Q''$即爲所求之直徑.

證 甚易,從略.

習　　題

1. 一球之半徑爲15寸,一小圓之平面離此球心9寸,問此小圓之半徑若干?

2. 一小圓之極距離爲60°,球之半徑爲13寸,試求:

   a. 圓面與球心之距離.

   b. 圓之半徑.

3. 一直線於一半徑之外端垂直於此半徑,則此直線切於球.

4. 一直線若與一小圓相切,則必與球相切,且此直線必在球之一切面上.

5. 四面體體積之三倍,等於其表面積與其內切球半徑之乘積.

6. 有二球,其半徑爲12寸及5寸,其中心距離爲13寸,求其相交之圓之面積.

第三十四章　球面多角形

447. **定義 70.** 球面上兩大圓弧遇於一點,此圖形名曰一**球面角**.兩弧名曰**球面角之兩邊**.其交點名曰**頂點**.

定義 71. 兩曲線交於一點,於交點各引切線,兩切線間之角名爲**兩曲線之交角**.

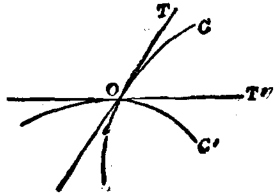


圖 394.

448. **定理 72.** 球面角等於一大圓弧之圓心角,此大圓弧乃以球面角之頂點爲極,其兩端在球面角之邊上者.

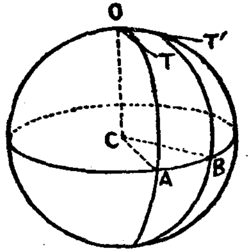


圖 395.

假設 $\angle AOB$ 爲一球面角,OA, OB 爲其二邊,O 爲其頂點.以 O 爲極,作大圓 AB,與 OA, OB 交於 A, B 兩點.C 爲球心.

求證　球面角$\angle AOB$ = 平面角$\angle ACB$.

證　於O點作OA,OB之切線OT,OT'.在OAC平面上,OT與CA爲直線OC之同側兩垂線,故$OT // CA$.在OBC平面上,OT'與CB爲直線OC之同側兩垂線,故$OT' // CB$.由是可知$\angle TOT' = \angle ACB$,故云云.

系 1.　二大圓之交角,等於此二圓之平面所成之二面角.

系 2.　一大圓若通過他大圓之極,則後者亦通過前者之極,且此兩大圓互相直交(卽交角爲直角之謂).

449.　**定義 72.**　兩個以上之大圓弧所圍成之圖形曰球面多角形,此等圓弧稱爲球面多角形之邊,邊之交點稱爲頂點,邊所成之球面角稱曰多角形之頂角.

如圖,$ABCD$爲一球面多角形,$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$等爲其邊,$\angle ABC$, $\angle BCD$等爲其頂角.

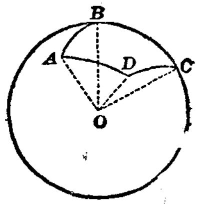


圖 396.

球面多角形與平面多角形相仿,下列諸名稱,望文卽可生義,不復詳加說明.

一.　對角線(爲一大圓弧).

二　球面三角形,球面四角形等.

三.　等邊球面三角形.

四　二等邊球面三角形.

450.　**定義 73.**　一球面多角形,其各邊與球心所成

之平面在球心形成一多面角,此多面角稱爲**球面多角形之球心角**.

若球心角爲一凸多面角,則其所對應之球面多角形稱爲**球面凸多角形**.

兩個對稱球心角所對應之兩個球面三角形,稱爲**對稱球面三角形**.

系 球面多角形之邊,可以其球心角之面角度量之.球面多角形之頂角,與其球心角之二面角兩兩相等.

451. 球面多角形與其球心角,既有如此密切之關係,故關於球面多角形之許多事實,可由多面角之定理推論而得,如下列定理73至75是也.

定理 73. 球面三角形二邊之和大於其餘一邊.

證 因三面角之兩面角之和大於餘一面角之故.

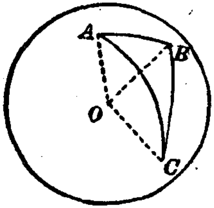


圖 397.

定理 74. 凸球面多角形各邊之和小於一圓之圓周.

證 因凸多面角諸面角之和小於四直角之故.

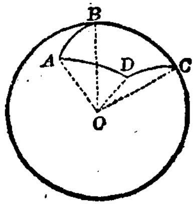


圖 398.

定理 75. 同一球面上之兩三角形,若具有下列三條件之一,則此兩三角形或全相等或對稱:

一. 一三角形之兩角及其夾邊各

等於他三角形之兩角及其夾邊.

二. 一三角形之兩邊及其夾角,各與他三角形之兩邊及其夾角相等.

三. 一三角形之三邊各與他三角形之三邊相等.

證 因兩個三面角若具有下列三條件之一,則兩者或相等或對稱之故:

一. 兩個二面角與其間之面角兩兩相等.

二. 兩個面角與其間之二面角兩兩相等.

三. 面角兩兩相等.

452. **定理 76.** 二等邊球面三角形之底角相等.

證 如圖,引大圓弧CD,平分二等邊三角形ACB之頂角C,易知BCD, DCA爲兩對稱三角形,故 $\angle A = \angle B$.

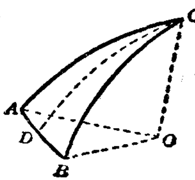


圖 399.

系. 等邊球面三角形爲等角球面三角形.

453. **定義 74.** 以一球面三角形之三頂點爲三極作三大圓,可得八個新球面三角形.八者之中,以下述方法選其一,稱之曰**原球面三角形之極三角形**.

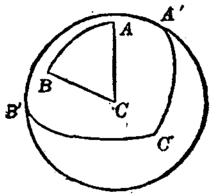


圖 400.

設$\triangle ABC$爲一球面之三角形,以BC爲極之二大圓必相交於二點,此二點爲一直徑之兩端;兩端之中,取其與A之球

面之距離小於一象限者爲 A' 點.同法再取 B', C' 二點,則 $\triangle A'B'C'$ 卽爲 $\triangle ABC$ 之極三角形.

454. 定理 77. 若球面三角形 $\triangle A'B'C'$ 爲球面三角形 $\triangle ABC$ 之極三角形,則 $\triangle ABC$ 亦爲 $\triangle A'B'C'$ 之極三角形.

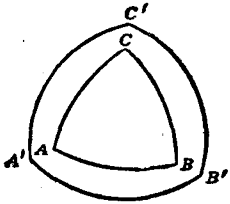


圖 401.

因大圓 BC 通過大圓 $A'C'$ 之極 B,故大圓 $A'C'$ 亦通過 BC 之極.又 BC 通過 $A'B'$ 之極 C,故 $A'B'$ 亦通過 BC 之極.由是可知兩大圓 $A'B', A'C'$ 之一交點 A' 爲大圓 BC 之一極.同理可知 B' 爲 AC 之一極,C' 爲 AB 之一極.又由假設 AA', BB', CC' 之球面距離皆小於一象限,故 $\triangle ABC$ 爲 $\triangle A'B'C'$ 之極三角形.

455. 兩極三角形邊角間之關係,如 448 節之圖,球面角 $\angle P$ 之大,可以大圓弧 AB 之長表示之,故名 $\widehat{AB}$ 曰 $\angle P$ 之弧.

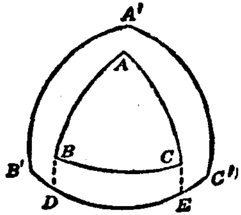


圖 402.

今設 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 爲兩極三角形,$\widehat{B'C'}$ 與 $\widehat{AB}$ 交於 D,與 AC 交於 E.因 A 爲 $\widehat{B'C'}$ 之極,故 $\angle A$ 之弧 $= \widehat{DE}$,而 $\angle A$ 之弧 $+ \widehat{B'C'} = \widehat{DE} + \widehat{B'C'} = \widehat{B'E} + \widehat{C'D}$;然 $\widehat{B'E}$ 與 $\widehat{C'D}$ 皆爲一象限,故其和等於半大圓周.

由是 $\angle A$ 之弧 $+ \widehat{B'C'} =$ 大圓周之半.

且得定理如下:

定理 78. 互爲極三角形之兩球面三角形中,一三角形頂角之弧與他三角形對應邊之和等於大圓周之半.

456. **定理 79.** 球面三角形各角之和大於二直角而小於六直角.

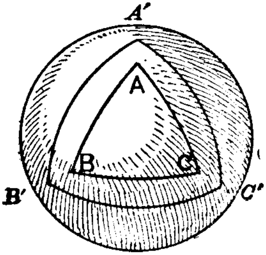


圖 403.

假設 ABC 爲一球面三角形.

求證 $2\angle R. < \angle A + \angle B + \angle C < 6\angle R.$

證 作 $\triangle ABC$ 之極三角形 $A'B'C'$. 設球之半徑爲 r, 則

$$r\angle A = \angle A \text{ 之弧},$$

$$r\angle B = \angle B \text{ 之弧},$$

$$r\angle C = \angle C \text{ 之弧}.$$

由前定理,知

$$\angle A \text{ 之弧} + \angle B \text{ 之弧} + \angle C \text{ 之弧}$$

$$= 3\pi r - (\overset{\frown}{B'C'} + \overset{\frown}{C'A'} + \overset{\frown}{A'B'}).$$

以 r 除之,得

$$\angle A + \angle B + \angle C = \text{六直角} - \frac{1}{r}(\overset{\frown}{B'C'} + \overset{\frown}{C'A'} + \overset{\frown}{A'B'}).$$

然球面凸多角形各邊之和小於一大圓周,故

$$\frac{1}{r}(\widehat{B'C'}+\widehat{C'A'}+\widehat{A'B'})<\text{四直角}.$$

由是 $2\angle R.<\angle A+\angle B+\angle C<6\angle R.$

系 球面三角形可有一個,兩個或三個直角,亦可有一個,兩個或三個鈍角.

習題

1. 設一球面三角形之三角爲75°,85°,88°;試求其極三角形之各邊.

2. 一大圓圓弧之垂直平分線上各點,與圓弧兩端之距離相等.

3. 一球面四邊形之對邊相等,則其對角亦等.

4. 對頂球面角相等.

5. 球面四邊形之對邊相等,則其對角線互相平分.

6. 一球之半徑平分一小圓之弦,則此半徑垂直於此弦.

7. 球上一圓,其相等之弦,與其極之距離相等.

8. 四面體各稜之垂直平分面凡六,此六平面相會於一點.

9. 過球心之三平面若兩兩垂直,則分球面爲八個相等之球面三角形,此等球面三角形之角均爲直角,其邊均相等.

10. 一球面三角形之二角相等,則其所對之邊亦等.

11. 等角之球面三角形亦必等邊.

12. 在任何球面三角形中,大邊所對之角亦大.

13. 設 $\widehat{BC}$ 爲二等邊球面三角形 ABC 之底邊, D 爲 $\widehat{AC}$ 上之點,則 $\widehat{BD} > \widehat{CD}$.

14. 在任何球面三角形,大角所對之邊亦大.

15. 同一球面上之兩三角形,若其角兩兩相等,則其邊亦兩兩相等,且此兩三角形或全相等或對稱.

第三十五章

球之面積及體積

457. **定義 75.** 平面上有一曲線 AB 與直線 CD，以 CD 爲軸，將 AB 迴繞一周，得一表面，稱曰**迴轉表面**. AB 上任意一點之徑路乃爲一圓，此圓之平面垂直於 CD. 設 AB 爲一直線分，則其所成之表面，因 AB 之位置之不同，可分爲下列五種:

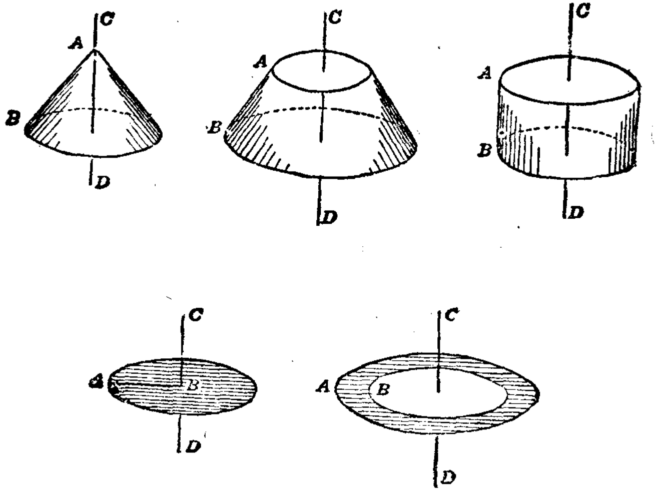


圖 404.

一. 直圓錐面——AB與CD相遇而不垂直.

二. 直圓錐之平截錐——AB與CD不相遇,不垂直亦不平行.

三. 直圓柱面——AB平行於CD.

四. 圓——AB與CD相遇且垂直.

五. 圓環——AB與CD不相遇而垂直.

458. **定理 80.** 邊數爲偶數之正多角形,以通過中心之一對角線爲軸,將此正多角形迴繞一周,則所成之迴轉表面之面積,等於其外接圓直徑與內切圓圓周之乘積.

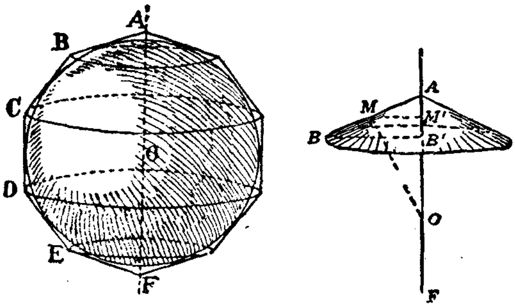


圖 405.

假設 $ABCD$……爲一正多邊形,其邊數爲偶數,r爲其外接圓之半徑,r'爲其內切圓之半徑,O爲其中心.又設AOF爲其通過中心之一對角線,則AB……F爲其半周.以AOF爲軸將AB……F迴轉一周,設此迴轉表面之面積爲L.

求證 $L = 4\pi rr'$

證 AB……F之迴轉表面,由前節所述之一,二,三

三種表面合成(三或不存在).玆分述之如下:

一. AB 之迴轉表面為一直圓錐面,設其面積為 L_1. 又設 AB 在軸之直射影為 $\overline{AB'}$,則 $L_1 = \pi\,\overline{BB'}\cdot\overline{AB}$.

自 O 作 AB 之垂線,與 AB 交於 M, M 在軸上之直射影為 M',則因 $\overline{BB'} = 2\,\overline{MM'}$,得 $L_1 = 2\pi\,\overline{MM'}\cdot\overline{AB}$.

然 $\triangle OMM' \sim \triangle ABB'$, 故 $\overline{MM'}\cdot\overline{AB} = \overline{MO}\cdot\overline{AB'}$, 因之

$$L_1 = 2\pi r' \times AB \text{ 在軸上之直射影.}$$

二. BC 之迴轉表面為一直錐之平截錐側面,設其面積為 L_2. 又設 C 在軸上之直射影為 C', BC 之中點為 M, M 在軸上之正射影為 M',則 $L_2 = 2\pi\,\overline{MM'}\cdot\overline{BC}$.

自 B 作 CC' 之垂線交 CC' 於 B'',則 $B'' = B'C'$,

$$\triangle CBB'' \sim \triangle OMM'.$$

因之 $\overline{MM'}\cdot\overline{BC} = \overline{MO}\cdot\overline{B'C'}$,故

$$L_2 = 2\pi r' \times BC \text{ 在軸上之直射影.}$$

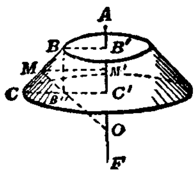


圖 406.

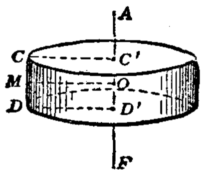


圖 407.

三. 若有一邊如 CD 者與軸平行,則其迴轉表面為一圓柱之側面,其面積 L_3 等於 CD 與 $2\pi\,\overline{CC'}$ 之乘積,故

$$L_3 = 2\pi r' \times CD \text{ 在軸上之直射影.}$$

總此三類,合成L,故

$L = 2\pi r' \times AB\cdots F$之各邊在軸$AOF$上直射影之和

$= 2\pi r' \times \overline{AF}.$

然　　$AF = 2r$,　　故　$L = 4\pi rr'$.

459. **定義 76.** 前節之正多邊形$ABCD\cdots\cdots$爲一圓之內接正多邊形,此圓之中心爲O,半徑爲r.以通過圓心之一直徑爲軸,迴轉一周,則圓周繞成半徑r之一球面.將邊數逐漸增大,則由多邊形所轉成之表面,其面積L亦逐漸增加.因多邊形之內切圓半徑r'逐漸近迫於外切圓之半徑r,故L近迫於$4\pi r^2$.此$4\pi r^2$定爲半徑r之**球面之面積**.

因$4\pi r^2 = 2\pi r \times 2r$,故此定義又可敍述之如下:

定理 81. 球面之面積等於球之直徑與一大圓圓周之乘積.

系 1. 球面之面積等於一大圓之面積之四倍.

系 2. 二球面積之比等於其半徑平方之比.

460. **定義 77.** 兩平行平面間球面之一部分稱曰**球帶**.兩平行平面之距離稱曰**球帶之高**.

仿前節球面積之定義,可定球帶面積之意義,且得下記之定理焉.

定理 82. 球帶之面積等於其高與一大圓圓周之相乘積.

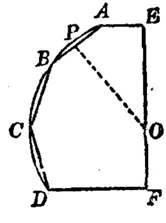


圖 408.

系 在同圓或等圓中,球帶面積之

比等於其高之比.

461. 球之體積

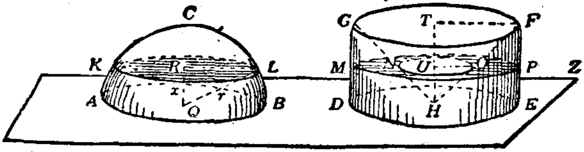


圖 409.

設ABC為一半球,中心為Q,半徑為r,大圓AQB為其底面,於AQB平面上取一點H為中心,r為半徑作圓DE.以DE圓為底,r為高作直圓柱DF,其上底為GF.又以GF為底,H為頂點作直圓錐HGF.如是直圓錐全在直圓柱之中.從直圓柱DF除去直圓錐HGF,其所餘之立體$DGHFE$以W表記之.

任意作一平面P與平面AQB平行.設此兩平行面間之距離為x,又設P與半球ABC共通之圓為KL,則KL之半徑平方等於r^2-x^2,因之

$$KL\text{圓之面積} = \pi(r^2-x^2).$$

又P與立體W共通之處為一圓環$MNOP$.直圓錐HGF與P共通之處為一圓NO,其半徑等於x.故得

$$\text{圓環}MNOP\text{之面積} = \pi(r^2-x^2).$$

由是知KL圓之面積等於圓環$MNOP$之面積.求球之

體積以前,吾人設一原理*於下:

兩立體x與y全在兩平行平面P_1與P_2之間,於P_1, P_2間任作一平面P與之平行.若P與x共通處之面積常等於P與y共通處之面積,則x之體積與y之體積相等.

有此原理,則球之體積卽可求出:由上面所得之結果,知半球ABC之體積與W之體積相等,然W之體積等於圓柱DF之體積減去圓錐HGF之體積,是以半球之體積爲

$$\pi r^2 \cdot r - \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \tfrac{2}{3}\pi r^3.$$

因之得定理如下:

定理 83. 半徑r之球,其體積等於$\frac{4}{3}\pi r^3$.

系 兩球體積之比等於其半徑(或直徑)立方之比.

習題

1. 一半圓形之屋頂,其直徑爲$3\frac{4}{5}$尺,試求其面積.

2. 地球近於一球形,其直徑爲7920哩,問其表面積約若干?

3. 設北溫帶之高爲1800哩,試求北溫帶之面積.

4. 設日球之直徑爲2162哩,則地球與日球面積之比若何?體積之比若何?

5. 試證球之面積,等於其外切圓柱之側面積.

---

*此原理稱爲Cavalieri之定理,其證明則超出本書之程度,故從略.

6. 一立方體之 8 頂點均在一球面上,其對角線爲球之半徑,此立方體之一稜爲 a, 問球之面積若干?

7. 設 h 爲球帶之高, r 爲球之半徑,試求下列各球帶之面積:

(a) $h = 10$ 寸, $r = 20$ 寸;

(b) $h = 3$ 尺, $r = 4$ 尺;

(c) $h = 0.003$ 尺, $r = 1$ 寸.

8. 分一球爲十個等積之球帶.

9. 球之體積與其外切圓柱之體積之比爲 2 : 3.

10. 試求半徑爲下列各數之球之體積:

(a) 10 寸, (b) 3 尺, (c) 36 里, (d) 0.003 公尺.

11. 體積爲 100 立方尺之球,其半徑爲何?

12. 球之面積爲 10 平方公尺,試求此球之體積.

幾何學名詞中西對照表

二 畫

二面角	Dihedral angle
二等邊三角形	Isosceles triangle
八面體	Octahedron
十二面體	Dodecahedron

三 畫

三角形之高	Altitude of triangle
三角柱	Triangular prism
三角錐	Triangular pyramid
三面角	Trihedral angle
三邊形(三角形)	Triangle
弓形	Segment
弓形角	Angle inscribed in a segment

四 畫

公法	Postulate
公理	Axiom
中心	Center
中心角	Centric angle
中外比之點	Extreme and mean ratio
中線	Median
內心	Inscribed center
內切	Internal contact
內切圓	Inscribed circle
內角	Interior angle
內錯角	Interior alternate angles
不可通約	Incommensurable
不等邊三角形	Scalene triangle
反比定理	Invertendo
反命題	Obverse
五面角	Pentahedral angle
六面體	Hexahedron
月形	Lune
比例中項	Proportional mean
分比定理	Dividendo
元	Dimensions

五 畫

四角柱	Quadrangular prism
四面角	Tetrahedral angle
四面體	Tetrahedron
半徑	Radius
半圓	Simicircle
正方形	Square
正方體,立方體	Cube
正多角形,正多角體	Regular polygon
平角	Straight angle
平面角	Plane angle
平面幾何學	Plane geometry
平行	Parallels
平行線	Parallel lines
平行六面體	Parallelepiped

平行四邊形	Parallelogram
平截錐	Frustum of cone
平截角體	Frustum of pyramid
外心	Circum center
外切	External contact
外角	Exterior angle
外接圓	Circumscribed circle
外錯角	Exterior alternate angles
可通約	Commensurable
凹多角形	Concave polygon
凸多角形	Convex polygon
母線	Generatrix
必要充分之條件	Necessary and sufficient condition
立體幾何學	Solid geometry
切線	Tangent

六 畫

共軛角	Conjugate angle
共軛弧	Conjugate arc
多角形	Polygon
多面角	Polyhedral angle
多面體	Polyhedron
曲線	Curve
曲面柱	Cylinder
劣角	Minor angle
劣弧	Minor arc
全相等	Congruent
同心圓	Concentric circle
合比定理	Componendo

七 畫

角平分線	Angle bisector
角柱	Prism
角柱面	Prismatic surface
角錐	Pyramid
角錐面	Pyramidal surface
位似中心	Homothetic center
位似比	Homothetic ratio
位似圖形	Homothetic figure
更比定理	Alternando
折線	Broken line
系	Corallary
拋物線	Parabola

八 畫

直角	Right angle
直角三角形	Right triangle
直射影	Orthogonal projection
直線	Straight line
直線形	Rectilineal figure
直截面	Right section
空間	Space
空間幾何學	Geometry in space
定理	Theorem
定義	Definition
垂心	Orthocenter
垂直	Perpendicular
命題	Proposition
周	Perimeter
兩腳規	Compass

和比定理	Addendo
弧	Arc
底	Base

九 畫

重心	Center of gravity
重合法	Method of superposition
面	Face
面角	Face angle
面,表面	Surface
相似	Simil. r
相似比	Ratio of similitude
柱面	Cylindrical surface
軌跡	Locus

十 畫

逆平行線	Anti-parallels
逆定理	Converse
根心	Radical center
根軸	Axis
射線	Rays
矩形	Rectangle
扇形	Sector
迴轉表面	Surface of revolution

十一畫

連比例	Continued proportion
連續置換法	Method of successive substitution
斜高	Slant height
斜線	Slant line
斜角柱	Oblique prism
斜曲面柱	Oblique cylinder
斜圓錐	Oblique circular cone
球	Sphere
球面角	Spherical angle
球面距離	Spherical distance
球帶	Zone
側面	Lateral surface
側面積	Lateral area
側稜	Lateral edge
頂角	Vertex angle
頂點	Vertex
終結	Conclusion
黃金切斷	Golden section
假設	Hypothesis
第三比例項	Third proportional
梯形	Trapezoid
問題	Problem

十二畫

傍心	Excenter
傍切圓	Excribed circle
鈍角	Obtuse angle
鈍角三角形	Obtuse triangle
幾何公理	Geometric axiom
幾何圖形	Geometrical figure
等角三角形	Equiangular triangle
等邊三角形	Equilateral triangle
測度	Measure
距離	Distance
象限	Quadrant

菱形	Rhombus
割線	Secant

十 三 畫

圓	Circle
圓周	Circumference
圓周角	Angle of circumference
圓柱	Circular cylinder
圓錐	Circular cone
極	Pole
極小	Minimum
極大	Maximum
極三角形	Polar triangle
稜	Edge
補角	Supplement
解析法	Analytic method
傾斜	Inclination

十 四 畫

對角線	Diagonal
對偶定理	Contrative
對頂角	Vertical angle
對頂多面角	Vertical polyhedral angle
對稜二面角	Vertical dihedral angle
對稱	Symmetry
對稱中心	Center of symmetry
對稱軸	Axis of symmetry
對應角,同位角	Corresponding angle
對應點	Corresponding point
對應邊	Corresponding side
截口,截面	Section

十 五 畫

調和中項	Harmonic mean
調和比例	Harmonic proportion
調和分割	Divided harmonically
調和共軛點	Harmonic conjugates
調和線束	Harmonic pencil
調和點列	Harmonic range
銳角	Acute angle
銳角三角形	Acute triangle
鄰角	Adiacent angle
鄰接二面角	Adjacent dihedral angle
鄰接三面角	Adjacent trihedral angle
線	Line

十 六 畫

錐面	Conical surface
餘角	Complement
輻角	Radian
橢圓	Ellipse
導線	Directrix

十 七 畫

臂	Arm
點	Point
點列	Range of points
優角	Major angle
優弧	Major arc

十 九 畫

邊	Side