Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 34

Übungsaufgaben

Aufgabe 34.1. Zeige

$$\angle(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}) = \begin{cases} \alpha\,, \text{ falls } \alpha \leq \pi\,, \\ 2\pi - \alpha\,, \text{ falls } \alpha > \pi\,. \end{cases}$$

Aufgabe 34.2.*

Es seien $u, v \in V$ von 0 verschiedene Vektoren in einem reellen Vektorraum V mit Skalarprodukt. Zeige, dass der Winkel zu u und v mit dem Winkel zu su und tv übereinstimmt, wobei s, t positive reelle Zahlen sind.

Die vorstehende Aussage besagt insbesondere, dass der Winkel eine Eigenschaft der durch zwei Vektoren definierten *Strahlen* (Halbgeraden) ist.

Aufgabe 34.3. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Zeige, dass der Winkel

$$\angle(u, v)$$

nur von der Einschränkung des Skalarproduktes auf den durch u und v erzeugten Untervektorraum abhängt.

Aufgabe 34.4. Es seien $u, v, w \in V$ von 0 verschiedene Vektoren in einem reellen Vektorraum V mit Skalarprodukt. Zeige

$$\angle(u, w) \leq \angle(u, v) + \angle(v, w).$$

Aufgabe 34.5. Welche Winkel gibt es auf einer Geraden?

Aufgabe 34.6. Es sei

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

der Einheitskreis. Zeige, dass man auf K eine Metrik definieren kann, indem man $d(P, Q)$ $(P, Q \in K)$ als den positiven Winkel zwischen den zugehörigen Strahlen durch den Nullpunkt $(0, 0)$ ansetzt.

Aufgabe 34.7.*

Es sei α_n der Winkel zwischen dem ersten Standardvektor e_1 und dem Vektor $v_n = \sum_{i=1}^n e_i$ im $\mathbb{R}^n$. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} x_n\,.$$

Die beiden folgenden Aufgaben wurden schon auf dem Arbeitsblatt 10 gestellt.

Aufgabe 34.8. Finde mittels elementargeometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 30 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 34.9. Finde mittels elementargeometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 34.10. Bestimme elementargeometrisch, auf welche Vektoren die Standardvektoren e_1 und e_2 bei einer Drehung um den Nullpunkt um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn abgebildet werden.

Aufgabe 34.11. Beweise die Additionstheoreme für den Sinus und den Kosinus unter Verwendung von Drehmatrizen.

Aufgabe 34.12. Es sei
$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

(1) Zeige, dass M eine Isometrie auf dem $\mathbb{R}^2$ und dem $\mathbb{C}^2$ definiert.
(2) Bestimme die komplexen Eigenwerte zu M.
(3) Bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$, die aus Eigenvektoren zu M besteht.

Eine achsensymmetrische Ellipse wird im $\mathbb{R}^2$ durch eine Gleichung der Form
$$ax^2 + by^2 = c$$
mit $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ beschrieben.

Aufgabe 34.13.*

Man gebe ein Beispiel für eine (achsensymmetrische) Ellipse E im $\mathbb{R}^2$ und eine bijektive lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(E) = E$, die keine Isometrie ist.

Aufgabe 34.14. Man gebe ein Beispiel für eine bijektive, stetige Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(S^1) = S^1$ und mit $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^2$, die keine Isometrie ist.

Aufgabe 34.15.*

Es sei
$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

eine ebene Achsenspiegelung. Zeige, dass $\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha - 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 und $\begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 von M ist.

Aufgabe 34.16. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die Drehung des Raumes um die z-Achse um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn. Wie sieht die beschreibende Matrix bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

aus?

Aufgabe 34.17. Es sei $\pi \in S_n$ eine Permutation und

$$M_\pi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

die zugehörige Permutationsmatrix bzw. lineare Abbildung. Zeige, dass M_π eine Isometrie ist. Wann handelt es sich um eine eigentliche Isometrie?

Aufgabe 34.18. Man bestimme zu jeder Permutation $\pi \in S_3$ für die zugehörige Permutationsmatrix die Eigengerade.

Aufgabe 34.19.*

Zeige, dass die Gruppe der räumlichen Drehungen nicht kommutativ ist.

Aufgabe 34.20. Man gebe ein Beispiel einer Raumdrehung, bei der sämtliche Matrixeinträge $\neq 0, 1$ sind.

Aufgabe 34.21. Es seien $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle$ und $U_2 = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ Untervektorräume im $\mathbb{R}^3$. Finde eine Isometrie $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $U_1 = \langle \varphi(e_1) \rangle$ und mit $U_2 = \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2) \rangle$.

Aufgabe 34.22.*

Durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & 0 & \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

ist eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben ($\alpha, \beta \in [0, \pi[$). Bestimme die Eigenwerte und ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von φ.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 34.23. (2 Punkte)

Es seien $u, v \in V$ normierte Vektoren in einem reellen Vektorraum V mit Skalarprodukt. Zeige, dass der Vektor $u + v$ die beiden Vektoren in gleich große Winkel unterteilt.

Aufgabe 34.24. (4 Punkte)

Wir betrachten eine Uhr mit Minuten- und Sekundenzeiger, die sich beide kontinuierlich bewegen. Bestimme eine Formel, die aus der Winkelstellung des Minutenzeigers die Winkelstellung des Sekundenzeigers (jeweils ausgehend von der 12-Uhr-Stellung im Uhrzeigersinn gemessen) berechnet.

Aufgabe 34.25. (4 Punkte)

Zeige, dass sich jede eigentliche lineare Isometrie des $\mathbb{R}^3$ als Verknüpfung von Drehungen um die drei Koordinatenachsen realisieren lässt.

Aufgabe 34.26. (4 Punkte)

Zeige, dass zu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(-ad + bc) & 2(ac + bd) \\ 2(ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(-ab + cd) \\ 2(-ac + bd) & 2(ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

eine Isometrie des $\mathbb{R}^3$ definiert.

Aufgabe 34.27. (4 Punkte)

Es sei M eine komplexe 2×2-Matrix derart, dass die Spalten eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^2$ bilden und die Determinante gleich 1 ist. Zeige, dass M die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}$$

mit $u, v \in \mathbb{C}$ und $|| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} || = 1$ besitzt.

Aufgabe 34.28. (5 (1+2+2) Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

(1) Zeige, dass M eine Isometrie auf dem $\mathbb{R}^2$ und dem $\mathbb{C}^2$ definiert.
(2) Bestimme die komplexen Eigenwerte zu M.
(3) Bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$, die aus Eigenvektoren zu M besteht.