$$=\frac{30-j18}{25+9}=\frac{30-j18}{34}=\frac{15-j9}{17}$$

例 6. $\frac{5+j3}{6+j4}$を計算し水平軸となす角度及びその大きさを計算せよ。

解 $\frac{5+j3}{6+j4}=\frac{(5+j3)(6-j4)}{(6+j4)(6-j4)}=\frac{30-j18-j20-j^2 12}{6^2-j^2 4^2}$

$$=\frac{30-j38+12}{36+16}=\frac{42-j38}{52}=\frac{21-j19}{26}$$

大きさ$=\frac{\sqrt{21^2+19^2}}{26}=\frac{\sqrt{702}}{26}=\frac{26.5}{26}=1.02$

水平軸となす角をθとす。

$\tan\theta=\frac{19}{21}=0.905$

$\theta=83°40'$

例 7. $\frac{(3+j2)(4-j3)}{(5-j4)}$を計算しその大きさと水平軸となす角度を求めよ。

解 $\frac{(3+j2)(4-j3)}{(5-j4)}=\frac{(12+j8-j9-jj6)(5+j4)}{(5-j4)(5+j4)}$

$$=\frac{(12-j1+6)(5+j4)}{5^2-j^2 4^2}=\frac{(18-j1)(5+j4)}{25+16}$$

$$=\frac{90-j5+j72-jj4}{41}=\frac{90+j67+4}{41}=\frac{94+j67}{41}$$

大きさ$=\frac{\sqrt{94^2+67^2}}{41}=\frac{115.3}{41}=2.91$

水平軸となす角度をθとす。

$\tan\theta=\frac{67}{94}=0.713$

$\theta=35°30'$

例 8. $\frac{7+j2}{4+j3}+(6+j3)(2-j4)$を計算しその大きさを求む。

解 $\frac{7+j2}{4+j3}+(6+j3)(2-j4)$

$$=\frac{(7+j2)(4-j3)}{(4+j3)(4-j3)}+(6+j3)(2-j4)$$

$$=\frac{28+j8-j21+6}{4^2-j^2 3^2}+12+j6-j24-jj12$$

$$=\frac{34-j13}{16+9}+12-j18+12=\frac{34-j13}{25}+24-j18$$

$$=\frac{34-j13+600-j450}{25}=\frac{634-j463}{25}$$

大きさ$=\frac{\sqrt{634^2+463^2}}{25}=\frac{785}{25}=31.4$

例 9. $\frac{8+j6}{3-j1}-(3+j2)(2-j1)+\frac{12-j6}{1+j2}$

を計算しその大きさを求む。

解 $\frac{8+j6}{3-j1}-(3+j2)(2-j1)+\frac{12-j6}{1+j2}$

$$=\frac{(8+j6)(3+j1)}{(3-j1)(3+j1)}-(6+j4-j3-jj2)$$

$$+\frac{(12-j6)(1-j2)}{(1+j2)(1-j2)}=\frac{24+j18+j8+jj6}{3^2-j^2 1}-6-j4$$

$$+j3-2+\frac{12-j6-j24+jj12}{1-j^2 2^2}=\frac{24+j18+j8-6}{9+1}$$

$$-8-j1+\frac{12-j6-j24-12}{1+4}$$

$$=\frac{18+j26}{10}-8-j1+\frac{-j30}{5}$$

$$=\frac{1}{10}(18+j26-80-j10-j60)$$

$$=\frac{1}{10}(-62-j44)$$

$$\text{大きさ}=\frac{1}{10}\sqrt{62^2+44^2}=\frac{1}{10}\sqrt{5780}$$

$$=\frac{76}{10}=7.6$$

例10. 5+j12 アンペア、8+j6 アンペア及び 15−j9 アンペアと云ふ三つの電流を合成すれば如何なる電流となり、その大きさは何アンペアなるか。

解 $5+j12+8+j6+15-j9$

$=5+8+15+j(12+6-9)$

$=28+j9$

電流の大きさ$=\sqrt{28^2+9^2}=\sqrt{865}=29.4$アンペア

例11. $\dfrac{(5-j3)(7+j5)}{(6+j5)(4-j3)}$を計算せよ。

解

$$\frac{(5-j3)(7+j5)}{(6+j5)(4-j3)}=\frac{35-j21+j25-jj15}{24+j20-j18-jj15}$$

$$=\frac{35+j4+15}{24+j2+15}=\frac{50+j4}{39+j2}$$

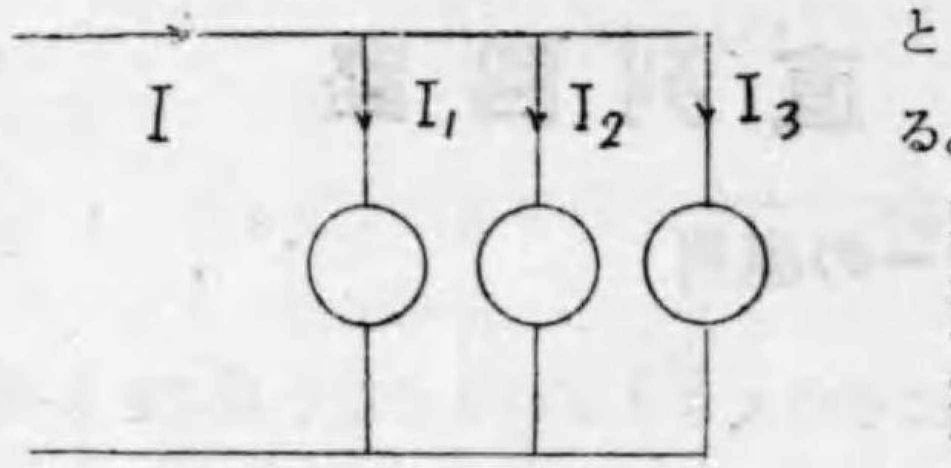
$$=\frac{(50+j4)(39+j2)}{(39+j2)(39-j2)}=\frac{1950+j156+j100+jj8}{39^2-j^2 2^2}$$

$$=\frac{1950+j256-8}{1521+4}=\frac{1942+j256}{1525}$$

第九章 直列回路

1. 記號式ベクターの應用

前に述べた通り複素數はその大きさばかりでなく方向をも指示し、今迄使用して來たベクターと同じ役目をなすものである。普通の圖式ベクターであるならば之を使用して直ちに計算を行ふと云ふ事は難しく定規とコンパスとで圖を引いて計算するより外に計算の仕方がない。所が複素數を利用するならば紙の上に普通の計算と同じ様に計算が行はれ、然もその方向と量とは明瞭に知れて居るのである。交流は電流にしても電壓にしても直流の様に一定の方向を有して居ないから之を加へ合はすにしても普通の算術で行ふ様な加へ方をしては間違つて來る。例へば一つの電源より三つの回路に10アンペアと5アンペアと15アンペアとの電流が夫々流れて居るとする、此の場合に電源より出して居る電流は普通の算術のつもりで計算すると30アンペアにならなければならない譯であるが、一般には30アンペアとはならない。勿論之が直流の場合には30アンペアとなるのであるが交流では大抵30アンペア以下である。是は何故かと云へば既にベクターの所で述べた通り交流の電壓なり電流なりは必ず方向を持つて居て之を加へ合はすにはベクター的に加へ合はさなければならないからである。然るに複素數を使用して計算すればそんな間違ひは全く起らず、ベクターを使用し合成したものと全く同じになる。今例として電流を取つて見る。第130圖の如く三つの回路に夫々 $I_1\ I_2\ I_3$の電流が流れて居るとする、此の場合に電流 $I_1\ I_2\ I_3$を夫々次の如き複素數を有して居るもの



第 1 3 0 圖

としその合計を求めて見る。

$\dot{I}_1=6+j4 \qquad \dot{I}_2=8+j6$

$\dot{I}_3=7-j5$

$\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3$

$=6+j4+8+j6+7-j5$

$=6+8+7+j(4+6-5)=21+j5=\dot{I}$

此の I_1 や I_2 等の頭に點を打つて $\dot{I}_1$ とか $\dot{I}_2$ とかにしたのは此の電流を複素數で表したと云ふ意味であつて此の I の頭に點を打たなかつたならば複素數の意味でなく電流の大きさを意味する。今 I_1 I_2 I_3 等の電流の大きさを求めて見る。

$I_1=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}=7.2$ アンペア

$I_2=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$ アンペア

$I_3=\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{74}=8.6$ アンペア

若しも此の三つを加へたものが電流 I の大きさとなるものであれば此の電流 I は次の如くならなければならない筈である、今之を加へて見る。

$I_1+I_2+I_3=7.2+10+8.6=25.8$ アンペア

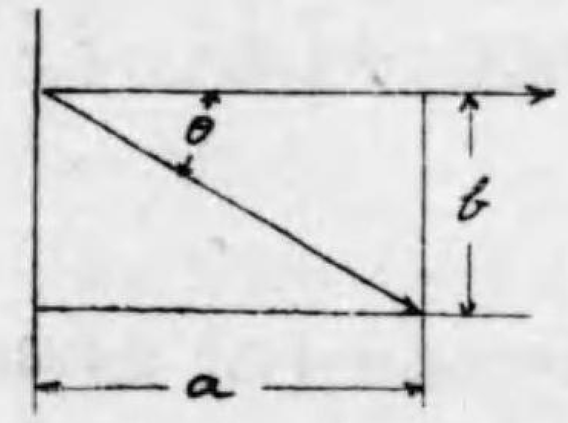
所が前の複素數で計算した電流 I の大きさはその複素數が $21+j5$ であるから次の如きものでなければならない。

$I=\sqrt{21^2+5^2}=21.6$ アンペア

是で見ると複素數で計算したものと夫々の電流を加へ合せたものとは 20 パーセントからの違ひが生じて來ると云ふ事になる。是は各回路の電流を夫々加へ合はしたものが全體の電流であると云ふ假定の下に行つたから間違ひが生じた譯でどうしても電流の和等はベクター的に求めたものでなければならない。

此の第 130 圖に示した電流の和は複素數で計算した 21.6 アンペアでなければならない。かう云ふ風に複素數で計算する事は計算が容易で正確である。電壓の計算にしてもインピーダンスの計算にしても此の記號式ベクターで計算する事が最も利益である。

複素數はそのものがベクターを意味するものであるからベクターの所で述べて置いた通り基線の取り方に十分注意しなければならない。ベクターの場合と同樣に記號式ベクター法で計算する場合はその基線の取り方を電流を基とするか電壓を基とするかを先づ決定しなければならない。此の基線の取り方は問題によつて電流を基線に取つた方が利益となる場合と電壓を基線に取つた方が利益となる場合とがあつて此の事はベクターを說明した場合に述べても置いたし、練習もして置いた筈である。今一例として電壓を基線に取つた場合を云つて見ると電壓を基線に取るとそのベクター圖は第 131 圖の通りになる。假りに電流が電壓よりも遲れるとして之を圖示する、I は電流のベクターで此のベクターを複素數で示して見ると次の通りになる。



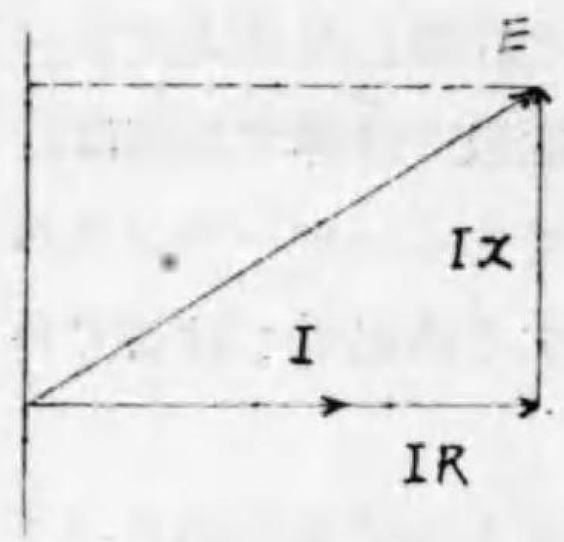
第 1 3 1 圖

$\dot{I}=a-jb$

此の場合の位相角 θ を求むるには次の式によつて行ふ。

$$\tan\theta=\frac{-b}{a} \qquad \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

所が電流を基線に取るとベクターの形が變つて來る。第 132 圖は電流を基線に取つた場合のベクター圖で電流が電壓より遲れ



第１３２圖

るものとして電壓のベクターを書くとEの樣になる。此の場合ベクターを複素數で示して見ると次の通りになる。

$$\dot{E}=IR+jIx$$

此の電流を基線に取つた場合には電壓が複素數で表はされるものである。此の場合の位相角は次の式から求められる。

$$\tan\theta=\frac{x}{R}\qquad \cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

2. インピーダンスと複素數

一つの交流回路に於ける抵抗のみを有する回路があるとする、此の場合に此の回路へ電壓を供給すれば電流は電壓と同相にある事になる。此の場合にそのインピーダンスを複素數で表はせば抵抗のみの場合であるからインピーダンスは實數部分のみとなる。從つて今インピーダンスを複素數で表したものを$\dot{Z}$とすれば次の式で表はされる。

$$\dot{Z}=R$$

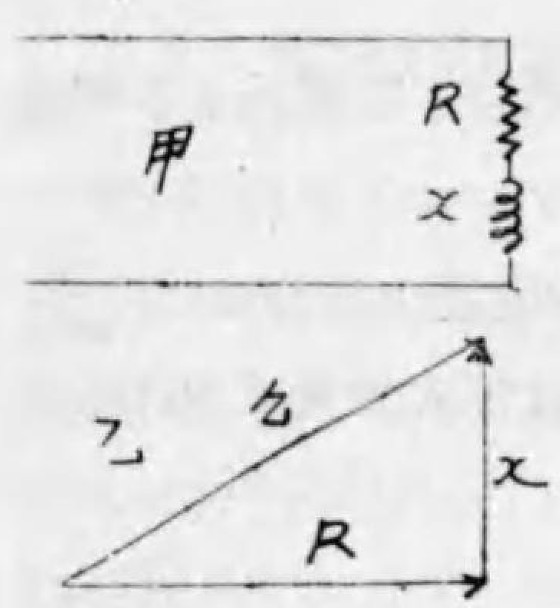
次に回路がインダクタンスのみで出來て居るとする、此の場合そのリアクタンスをxオームとすれば此の回路に電壓をかけると電流は電壓より90度遲れる。電流が電壓より90度遲れるならば電流を基線とした場合、電壓のベクターは電流より90度進む事になる。90度違ふならばそのインピーダンスをZの複素數で表はすと次の通りになる。

$$\dot{Z}=jx$$

次に回路がキャパシチーのみの場合とすれば之に電壓をかけると電流は90度遲れる事になり電流のベクターを基線に取れば電壓のベクターは90度遲れる事になる、從つてそのインピーダンスを$\dot{Z}$なる複素數で表すと次の通りである。

$$\dot{Z}=-jx$$

今度は抵抗Rオームとインダクタンスのみを有するリアクタンスxオームとが直列に接續されて居る場合のインピーダンスを求めて見る。第133圖甲は此の場合の接續圖で第133圖乙は此の場合の抵抗、リアクタンス及びインピーダンスを示したベクター圖である。此の回路に電壓を供給すると抵抗Rを電流が通過する場合には電流と同相の電壓降下を生じ、リアクタンスを通過する場合には電流より90度進んだ電壓降下を生ずる。從つて此の場合のインピーダンスZを複素數で表して見ると次の通りである。



第１３３圖

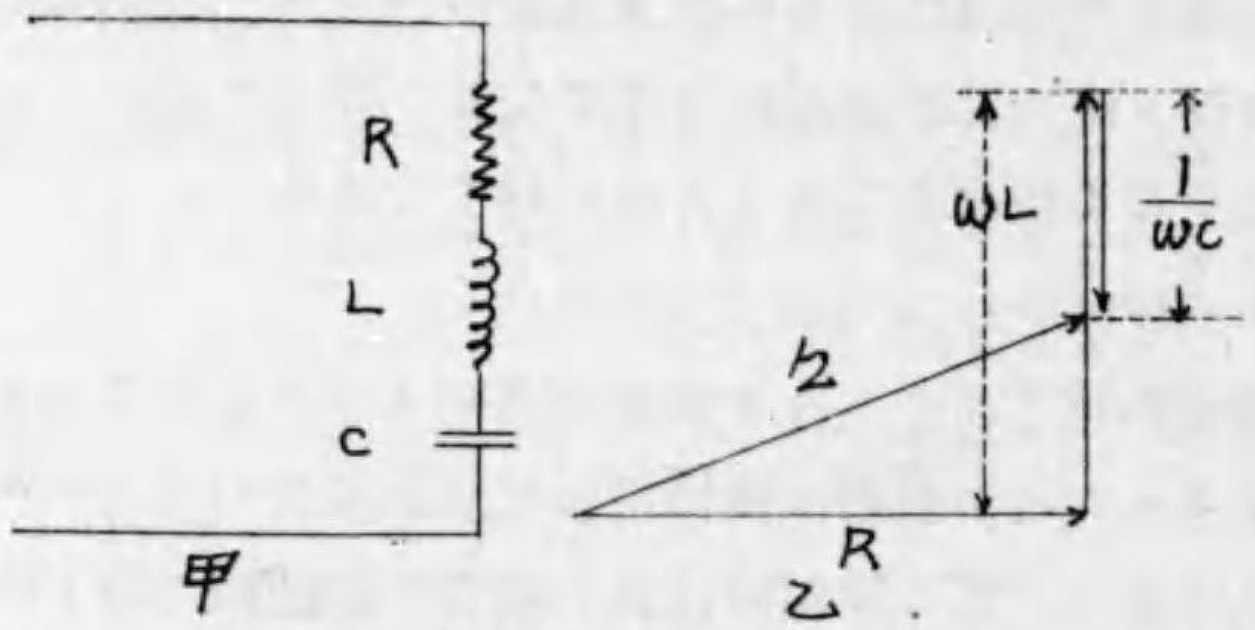
$$\dot{Z}=R+jx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(54)}$$

此の場合にインダクタンスをLヘンリーとなし、電源の周波數をfサイクルとするならば此の複素數の式は次の式で與へる事が出來る。

$$\dot{Z}=R+j\omega L\quad\text{又は}\quad\dot{Z}=R+j2\pi fL\quad\cdots\cdots\cdots\text{(55)}$$

次に第134圖甲の如く此の直列回路に抵抗Rとインダクタンス Lヘンリーとキャパシチー C フアラッドとが直列にある場合のインピーダンスを示して見る。此の場合に電流を基線に取つて電壓降下のベクターを書いて見ると抵抗による電壓降下は電流

と同相にあるので實數で表はされ、誘導リアクタンス（インピ



第134.圖

ーダンスによるリアクタンス）による電壓降下は電流より90度進むので $+j\omega L$ で示され、容量リアクタンス（キャパシチーによるリアクタンス）による電壓降下は90度遲れるので $-j\frac{1}{\omega C}$ で表はされる。從つてインピーダンスZは下式で表はされると云ふ事になる。

$$\left.\begin{array}{l}\dot{Z}=R+jx_1-jx_2\\ \dot{Z}=R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(56)$$

但し $\dot{Z}$ ……インピーダンスの複素數

R ……抵抗(オーム)　x_1 ……誘導リアクタンス

x_2 ……容量リアクタンス

ω …… $2\pi f$(角速度)　f ……周波數

L ……インダクタンス(ヘンリー)

C ……キャパシチー(フアラッド)

ω の代りに $2\pi f$ を入れると次の式で表はされる。

$$\dot{Z}=R+j2\pi fL-j\frac{1}{2\pi fC}$$

是でインダクタンスとキャパシチーとが抵抗と直列にある場

合のインピーダンスが知れた譯であるが、今インダクタンスとキャパシチーとを合して之をリアクタンス x で表して見ると $x=\omega L-\frac{1}{C\omega}$ であるからインピーダンスの複素數は第54式と同じ形で表す事が出來る。即ち次の式がそれである。

$$\dot{Z}=R+jx\cdots\cdots\cdots(57)$$

但し $\dot{Z}$ ……複素數で表はしたインピーダンス

R ……抵抗　x ……リアクタンス $\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$

3. 電壓の求め方

電流とインピーダンスとが知れて居て電壓を求めやうとする場合には電流を基線に取つてベクターを書くものである。電流を基線に取るならば電流の方向は水平軸の方向を取り縱軸の方向には分力がないので電流の複素數は虛數部分が零となり實數部分ばかりとなる。從つて電流を基線に取る場合には電流の複素數は次の式で表す事が出來る、但しIは電流の大きさである。

$$\dot{I}=I+jo$$

今此の電流が抵抗Rオームを有する回路に流れる場合の電壓降下を複素數で示すと次の通りである、但し $\dot{V}$ は電壓降下を複素數で示したものである。

$$\dot{V}=\dot{I}(R+jo)=RI$$

次にIなる電流がインダクタンスのみの回路に流れる場合の電壓降下は同様にして次の如くになる、但し x は誘導リアクタンス即ちインダクタンスによるリアクタンスである。

$$\dot{V}=\dot{I}(o+jx)=jIx$$

又Ｉなる電流がキャパシチーのみの回路に流れる場合の電壓降下も同樣にして次の通りである、但し x は容量リアクタンス卽ちキャパシチーによるリアクタンスである。

$$\dot{V}=\dot{I}(o-jx)=-jIx$$

次に抵抗Rと誘導リアクタンス x とが直列にある場合を述べる、電流は基線に取つてあるのでその複素數は前に述べた通り $I+jo$ となるので以後は電流を複素數で示す場合にも單にＩと置き $I+jo$ と置く事を省略する。複素數を使用すると直流の場合のやうにオームの法則がそのまゝ使用せられ然もその答が複素數となつて居てベクターの方向をも明示して居る。今抵抗Rと誘導リアクタンス x とが直列にある場合のインピーダンスを複素數で示すと次の通りである。

$$\dot{Z}=R+jx$$

此の回路に電流Ｉを流すとその電壓降下はオームの法則通り $\dot{I}\dot{Z}$ となり此の電壓降下の複素數を $\dot{V}$ で表はすと次の通りになる。

$$\left.\begin{array}{l}\dot{V}=\dot{I}\dot{Z}=I(R+jx)\\ \text{又は}\ \dot{V}=\dot{I}(R+j\omega L)\end{array}\right\}\cdots\cdots(58)$$

但、$\dot{V}$……インピーダンスの複素數　　Ｉ……電流
　　x……誘導リアクタンス　　R……抵抗
　　L……インダクタンス　　ω……$2\pi f$

此の場合に電壓Vの大きさを實數で表はす場合には次の通りとなる。

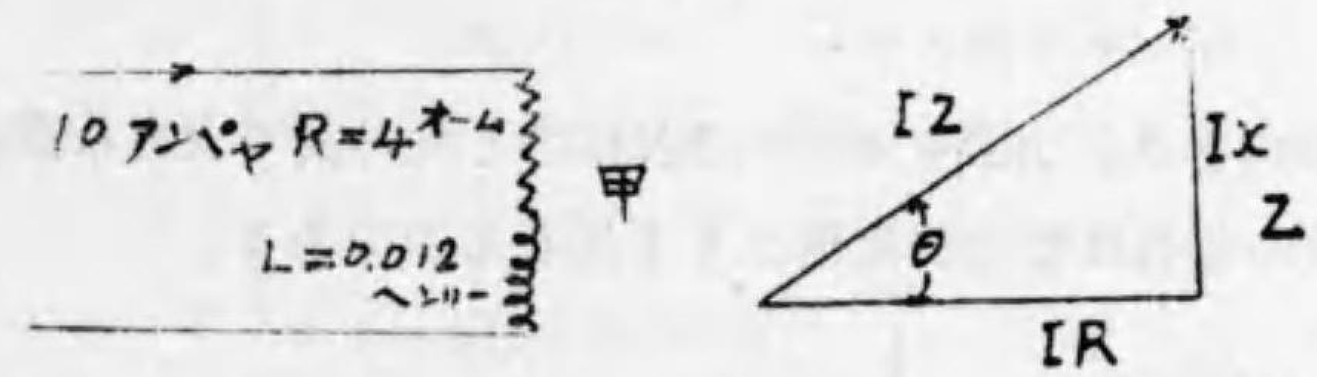
$$V=I\sqrt{R^2+x^2}\cdots\cdots(59)$$

又此の場合の位相角と力率を求めて見ると次の通りである。

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{x}{R}\\ \cos\theta=\dfrac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}\end{array}\right\}\cdots\cdots(60)$$

但、θ……位相角、　$\cos\theta$……力率

今一例として第135圖甲の如く抵抗４オーム、インダクタン



第１３５圖

ス12ミリヘンリーとが直列に接續せられて居る50サイクルの回路を説明して見る。此の場合の電壓降下は $\dot{I}\dot{Z}$ であつてその電壓降下 $\dot{V}$ を示して見ると次の通りである。

$$\dot{V}=\dot{I}\dot{Z}=I(R+jx)$$

$I=10$アンペア、　$R=4$ オーム

$x=\omega L=2\pi\times 50\times 0.012=3.77$ オーム

$$\therefore\ \dot{V}=10(4+j3.77)=40+j37.7$$

$V=\sqrt{40^2+37.7^2}=55$ ヴオルト

之をベクターで書いて見ると實數部分の40ヴオルトは IR に相當し虛數部分の 37.7 ヴオルトは Ix に相當して居る。此の回路の力率は次の通りである。

$$\cos=\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}=\frac{4}{5.5}=0.727$$

次に抵抗とキャパシチーとが直列にある場合を説明する、此の場合も電流を基線に取つてベクターを書くもので、今抵抗を

Rとし容量リアクタンスをxとすれば電壓降下Vは次の複素數で表はされる。

$$\left.\begin{aligned}\dot{V}&=I(R-jx)\\ \text{又は}\ \dot{V}&=I\left(R-j\frac{1}{\omega C}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(61)$$

但、I……電流　R……抵抗　V……電壓降下

C……キャパシチー　ω……$2\pi f$

位相角をθ、力率を$\cos\theta$で表はすと次の式で求める事が出來、此の場合は電流が電壓よりも進むものである。

$$\left.\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{x}{R}\\ \cos\theta&=\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(62)$$

今例を擧げて見る、抵抗50オーム、キャパシチー70マイクロフアラッドの50サイクル直列回路があるとする、此の回路に電流15アンペアが流れる時の電壓降下と力率とは次の通りである。

$$\dot{V}=I(R-jx)$$

$$R=50\qquad I=15$$

$$x=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi\times50\times0.00007}=\frac{1000}{7\pi}=45.5\ \text{オーム}$$

$$\therefore\quad \dot{V}=15(50-j45.5)=750-j682$$

$$V=\sqrt{750^2+682^2}=1013\ \text{ヴォルト}$$

$$\cos\theta=\frac{50}{\sqrt{50^2+45.5^2}}=0.74$$

誘導リアクタンスx_1と容量リアクタンスx_2とが直列に接續されて居る回路にIなる電流が流れる時の電壓降下は次の式で表はされる。

$$\left.\begin{aligned}\dot{V}&=I(jx_1-jx_2)\\ \dot{V}&=I\left(j\omega L-j\frac{1}{\omega C}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

但、$\dot{V}$……複素數で表はした電壓

x_1……誘導リアクタンス

x_2……容量リアクタンス　I……電流

L……インダクタンス　C……キャパシチー

此の場合は全部虚數部分ばかりで實數の部分はなく力率は0である。今インダクタンス50ミリヘンリー、キャパシチー500マイクロフアラッドの直列回路に60サイクル20アンペアが流れる時の電壓降下を求めて見る。

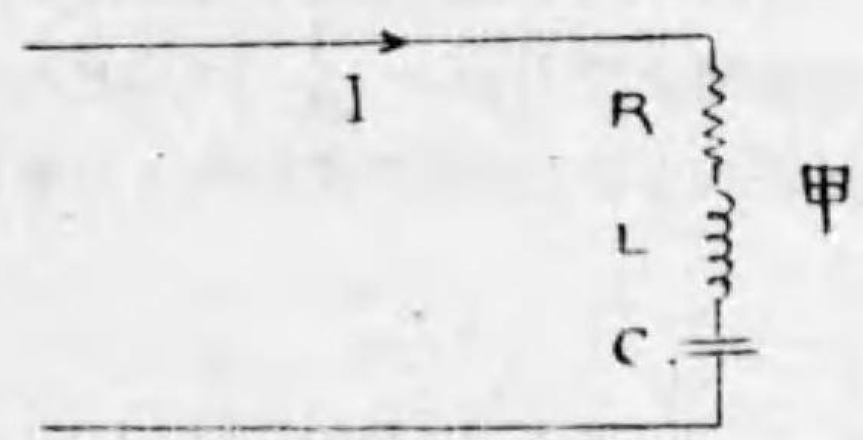
$$\dot{V}=I(jx_1-jx_2)$$

$$x_1=\omega L=2\pi\times60\times0.05=18.85\ \text{オーム}$$

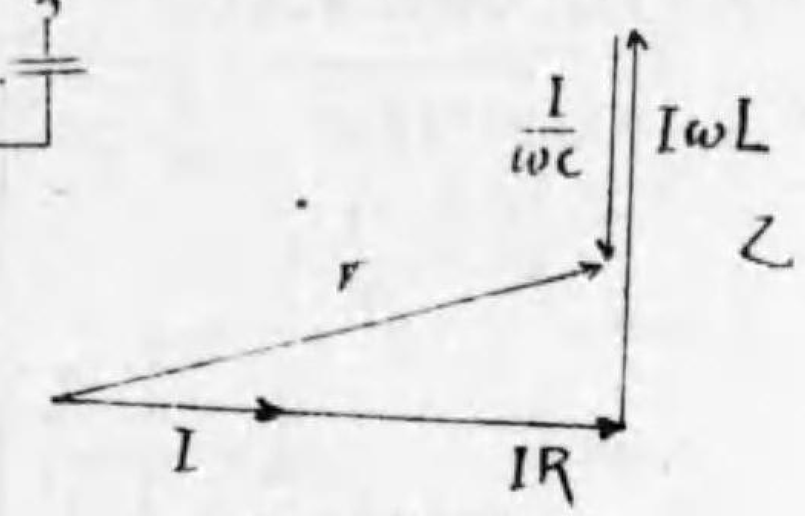
$$x_2=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi\times60\times0.0005}=5.3\ \text{オーム}$$

$$\therefore\quad \dot{V}=20(j18.85-j5.3)=j271$$

$$\therefore\quad V=271\ \text{ヴォルト}$$



今度は抵抗とインダクタンスとキャパシチーとが直列にある場合の電壓降下を求めて見る事とする。先づ第136圖甲圖の如く抵抗Rとインダクタンス L とキャパシチー C



第 1 3 6 圖

とが直列に接續されて居るとする、此の場合のベクターは第136圖乙に示す通り電流を基線に取る。電壓降下を複素數にて示すに今迄の例によつて知れる通り次の式で表す事が出來る。

$$\left.\begin{aligned}\dot{V}&=I(R+jx_1-jx_2)\\ \text{又は}\ \dot{V}&=I\left(R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(64)$$

但、$\dot{V}$……複素數で表はした電壓　　R……抵抗

x_1……誘導リアクタンス　　x_2……容量リアクタンス

I……電流　　ω……$2\pi f$　　L……インダクタンス

C……キヤパシチー

此の式に於て若し抵抗がない場合には抵抗Rを零と置けば第63式と同じ公式が得られインダクタンスとキヤパシチーとの直列回路の電壓降下は直ちに知れる。又インダクタンスがない場合にはx_1又はωLを零と置いて第61式と同じ式が得られる。同様にしてキヤパシチーがなくて抵抗とインダクタンスのみの場合にはx_2又は$\frac{1}{\omega C}$を零と置いて第58式と同じ式を求める事が出來る。從て此の第64式を十分に記憶すれば他の回路の電壓降下は容易に知り得るのである。此の式で知れる通り實數部分は電流に抵抗をかけたもの、虚數部分は$I\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$又は$I(x_1-x_2)$となる。從つて此の電壓の大きさと回路の位相角と力率とは夫々次の式で表はされる。

$$\left.\begin{aligned}V&=I\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\\ \tan\theta&=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\\ \cos\theta&=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\end{aligned}\right|\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(65)$$

但、V……電壓降下　θ……位相角　$\cos\theta$……力率

次に是に對する計算例を示して見る、抵抗25オーム、インダクタンス60ミリヘンリーとキヤパシチー500マイクロフアラッドとが直列に接續せられて居る回路に8アンペアの交流50サイクルが流れる場合の電壓降下は次の通りである。

$$\dot{V}=I\left(R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}\right)$$

$I=8$ アンペア　　$R=25$ オーム

$\omega L=2\pi\times50\times0.06=18.84$ オーム

$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi\times50\times0.0005}=6.36$ オーム

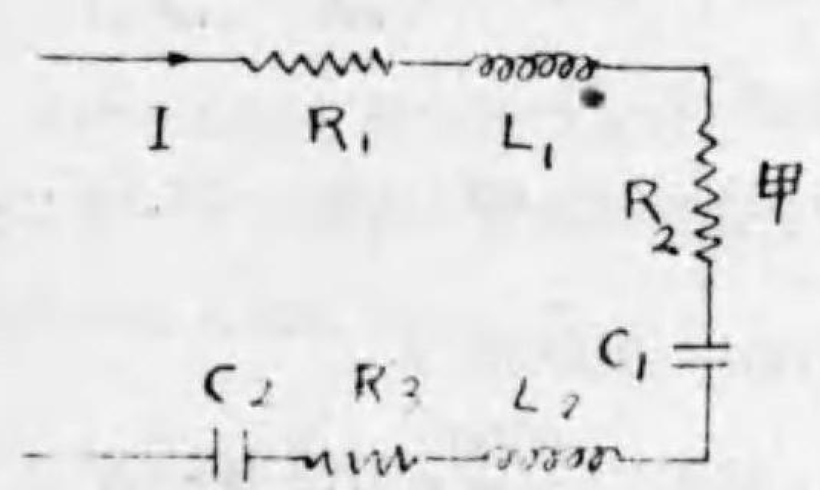
$\therefore\quad \dot{V}=8(25+j18.84-j6.36)=200+j99.84$

$\therefore\quad V=\sqrt{200^2+99.84^2}=223.5$ ヴォルト

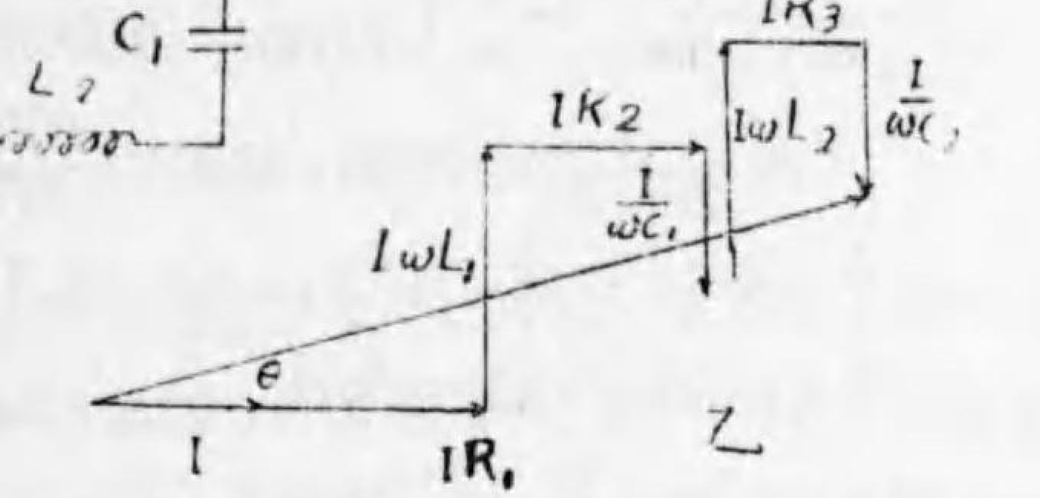
此の場合の位相角と力率とを求める、θを位相角$\cos\theta$を力率とする。

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}=\frac{25}{27.95}=0.895$$

$\theta=06°30'$



今度は多數の抵抗やインダクタンスやキヤパシチーが直列に存在する場合はどう取扱ふかと云ふ事を述べる。例へば第137圖甲圖の



第137圖

如く $R_1R_2R_3$ の三つの抵抗と L_1L_2 の二つのキヤパシチーと C_1C_2 の二つのキヤパシチーとが直列に接續せられて居る回路があるとする。此の回路に電流 I が流れる場合の電壓降下を求める、此の回路のベクター圖は第137圖乙の通りになり基線には電流を取る。電壓の複素數は次の通り抵抗は抵抗で集めインダクタンスはインダクタンスで集めてその式を求むるのである。

$$\dot{V}=\dot{I}\left\{R_1+R_2+R_3+j(\omega L_1+\omega L_2)-j\left(\frac{1}{\omega C_1}+\frac{1}{\omega C_2}\right)\right\}$$

此の場合の力率も同様にして次の通りである。

$$\cos\theta=\frac{R_1+R_2+R_3}{\sqrt{(R_1+R_2+R_3)^2-\left\{\omega(L_1+L_2)-\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)\right\}^2}}$$

是に數字を代入して見る、R_1を３オーム、R_2を２オーム、R_3を１オームとしてL_1を0.05ヘンリー、L_2を15ミリヘンリー、C_1を 0.0004 フアラッド、C_2を 250マイクロフアラッドとする。電流を６アンペアとし周波數を60サイクルとする。

$$\dot{V}=I\left\{R_1+R_2+R_3+j(\omega L_1+\omega L_2)-j\left(\frac{1}{\omega C_1}+\frac{1}{\omega C_2}\right)\right.$$

$$R_1+R_2+R_3=3+2+1=6\ \text{オーム}$$

$$\omega L_1+\omega L_2=\omega(0.05+0.015)=2\pi\times60\times0.065=24.5\text{オーム}$$

$$\frac{1}{\omega C_1}+\frac{1}{\omega C_2}=\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{0.0004}+\frac{1}{0.00025}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi\times60}\times(2500+4000)=\frac{6500}{377}=17.2\ \text{オーム}$$

$$\therefore\quad \dot{V}=6(6+j24.5-j17.2)=6(6+j7.3)=36+j43.8$$

$$V=\sqrt{36^2+43.8^2}=56.6$$

$$\cos\theta=\frac{6}{\sqrt{6^2+7.3^2}}=0.635$$

4. 電流の求め方

直流に於てはオームの法則により電壓を抵抗で割れば電流が出て來る。交流でも電壓をインピーダンスで割れば電流が求められるのであるがその求められたる電流は大きさのみであつてその方向は知られない。所が複素數で表はした電壓を複素數で表はしたインピーダンスで割ると電流も複素數で表はれて來る事になり結局その答は方向と大きさとを持つ、從つて電流をベクターで表はしたものと同じになるのである。電壓とインピーダンスが知れて居て電流を求むる場合には何を基線としてベクターをかくかと云ふ問題が起る、ベクターをかく場合には主として既知のものを基線とする事が大切で電流を求むる場合には電壓を基線とする。電壓を基線に取ればそのベクターは水平軸の方向となり此の電壓を複素數で表はすと實數部分のみとなり虚數部分はなくなる。之を式で示して見ると次の通りである。

$$\dot{E}=E+jo$$

即ち電壓を基線に取れば電壓の複素數は單に E 丈となつて來る。

前述べた通り複素數で表はした電壓を複素數で表はしたインピーダンスで割れば電流が複素數で表はれて來るので結局次の關係がある事になる。

$$\dot{I}=\frac{\dot{E}}{\dot{Z}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(66)$$

回路に抵抗のみしかない場合にはそのインピーダンスは R のみとなりその複素數は實數部分のみとなる、從つてその電流も電壓と同相となる。又回路がインダクタンスのみである場合に

は電流は電壓よりも90度遲れ回路がキャパシチーのみの場合には電流は電壓より90度進むのである。今電壓を E ヴォルトとした場合に回路に抵抗 R のみがあつた場合の電流を I_1 としインダクタンス L のみの場合の電流を I_2、キャパシチーのみの場合の電流を I_3 とすれば夫等の電流の複素數は夫々次の式で表はす事が出來る。

$$\dot{I}_1=\frac{E}{R}$$

$$\dot{I}_2=\frac{E}{j\omega L}=\frac{jE}{-\omega L}=-\frac{jE}{\omega L}$$

$$\dot{I}_3=\frac{E}{-j\dfrac{1}{\omega C}}=\frac{E\omega C}{-j1}=\frac{j\omega C}{+1}=j\omega C$$

是で見ても電流 I_1 は電壓と同相にあるし電流 I_2 は電壓より90度遲れ電流 I_3 は電壓より90度進むと云ふ事が知れるのである。

抵抗とインダクタンスとが直列にある回路に電壓をかけた場合の電壓を求むるには次の式を使用する。

$$\dot{I}=\frac{E}{R+jx}\quad\text{又は}\quad\dot{I}=\frac{E}{R+j\omega L}\quad\cdots\cdots(67)$$

但、$\dot{I}$ ……複素數で表はした電流　　E……電壓

R……抵抗　　x……誘導リアクタンス

L……インダクタンス　　ω……$2\pi f$

此の式は分母が複素數で虚數部分があるので普通の計算に當つては之を有理化して分母の虚數をなくしなければならない。今第67式の分母の虚數を除かんとすれば分母と分子とに同じ複素數 $R-jx$ を乘ずればよい。

$$\dot{I}=\frac{E}{R+jx}=\frac{E(R-jx)}{(R+jx)(R-jx)}=\frac{E(R-jx)}{R^2+x^2}$$

此の式を見れば分子の虚數部分がマイナスとなつて居るので

電流が電壓より遲れると云ふ事が知れる。此の遲れる角度 θ は次の式より見出され力率 $\cos\theta$ は次の式により計算する事が出來る。

$$\left.\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{x}{R}\\ \cos\theta&=\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(68)$$

今抵抗 8 オーム、インダクタンス 0.015 ヘンリーの直列回路に電壓 100 ヴォルト、周波數60サイクルをかけた場合の電流を求めて見る。此の場合の電流を I とすれば次の通りになる。

$$\dot{I}=\frac{E}{R+jx}$$

$E=100$ ヴォルト、　$R=8$ オーム

$$x=\omega L=2\pi\times60\times0.015=5.65$$

$$\therefore\quad\dot{I}=\frac{100}{8+j5.65}=\frac{100(8-j5.65)}{(8+j5.65)(8-5.65)}$$

$$=\frac{800-j565}{64+31.9}=\frac{800-j565}{95.9}$$

$$I=\frac{\sqrt{800^2+565^2}}{95.9}=10.2\ \text{アンペア}$$

$$\cos\theta=\frac{8}{\sqrt{8^2+5.65^2}}=\frac{8}{9.8}=0.816$$

今度は抵抗とキャパシチーとが直列にある場合を述べる、今 E ヴォルトの電壓を抵抗 R と容量リアクタンスとの直列回路にかけると其の回路を流れる電流は次の式を用ふる。

$$\dot{I}=\frac{E}{R-jx}\quad\text{又は}\quad\dot{I}=\frac{E}{R-j\dfrac{1}{\omega C}}\quad\cdots\cdots(69)$$

但　$\dot{I}$ ……複素數で表はした電流　　E……電壓

R……抵抗　　x……容量リアクタンス

ω……$2\pi f$　　C……キヤパシチー

是等の式も前の例と同様に複素數が分母にあるので電流の複素數を求むる場合には次の如く分母を有理化するものである。

$$\dot{I}=\frac{E}{R-jx}=\frac{E(R+jx)}{(R-jx)(R+jx)}=\frac{E(R+jx)}{R^2+x^2}$$

位相角θと力率$\cos\theta$とを求むる式は前の68式と同様に次の通りになり此の場合は電流が電壓より進む。

$$\left.\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{x}{R}\\ \cos\theta&=\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(70)$$

此の場合の計算例を示して見る。先づ抵抗3オーム、キヤパシチー、795マイクロフアラッドとが直列にせられて居る回路に50サイクル200ヴオルトの電壓をかけると此の回路には如何なる電流が流れるかを求めよう。此の場合に流れる電流Iは第69式より次の通りになる。

$$\dot{I}=\frac{E}{R-j\dfrac{1}{\omega C}}$$

E＝200ヴオルト　　R＝3オーム

$$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi f\times C}=\frac{1}{2\pi\times50\times0.000795}=4\ \text{オーム}$$

$$\therefore\quad\dot{I}=\frac{200}{3-j4}=\frac{200(3+j4)}{(3-j4)(3+j4)}=\frac{200(3+j4)}{3^2+4^2}$$

$$=\frac{200(3+j4)}{25}=8(3+j4)=24+j32$$

此の電流の複素數の大きさを求めると次の通りである。

$$I=\sqrt{24^2+32^2}=\sqrt{1600}=40\ \text{アンペア}$$

力率$\cos\theta$は次の通りで此の場合の電流は進電流であるから力率は進相力率である。

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}=\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}=0.6$$

今度は負荷にインピーダンスとキヤパシチーのみがある場合を述べると此の場合の電流は次の式から求めらる。

$$\dot{I}=\frac{E}{jx_1-jx_2}\quad\text{又は}\quad\dot{I}=\frac{E}{j\omega L-j\dfrac{1}{\omega C}}\cdots\cdots(71)$$

但　$\dot{I}$……電流(複素數)　　E……電壓　　ω……$2\pi f$

x_1……誘導リアクタンス　　x_2……リアクタンス

L……インダクタンス　　C……キヤパシチー

此の場合に於ても分母は有理化しなければならない。此の時に分母よりjを拂ふ方法は分數の分母と分子とにjを乘ずればよい。又位相角は零で力率も零である、若しx_1がx_2より大ならば電流は電壓より90度遲れx_2がx_1より大なれば電流は電壓より90度進む。今例としてインダクタンス30ミリヘンリーとキヤパシチー150マイクロフアラッドとが直列に接續せられて居る時60サイクル100ヴオルトをかけた時の電流を求めて見る。

$$\dot{I}=\frac{E}{jL\omega-j\dfrac{1}{C\omega}}$$

E＝100ヴオルト　　$L\omega=2\pi\times60\times0.03=11.3$ オーム

$$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi\times60\times0.00015}=17.7\ \text{オーム}$$

$$\therefore\quad\dot{I}=\frac{100}{j11.6-j17.7}=\frac{100}{-j6.1}=\frac{100j}{-jj6.1}=\frac{100j}{6.1}=j16.4$$

此の場合は電流の符號がプラスであるから電流は電壓より90

度進み進電流を取る。

次に抵抗とインダクタンスとキヤパシチーとの三つが直列にある場合の電流を求むるには次の式を使用する。

$$\dot{I}=\frac{E}{R+j\omega L-j\dfrac{1}{\omega C}}\cdots\cdots\cdots\cdots(72)$$

但 $\dot{I}$……複素數で表はした電流　E……電壓

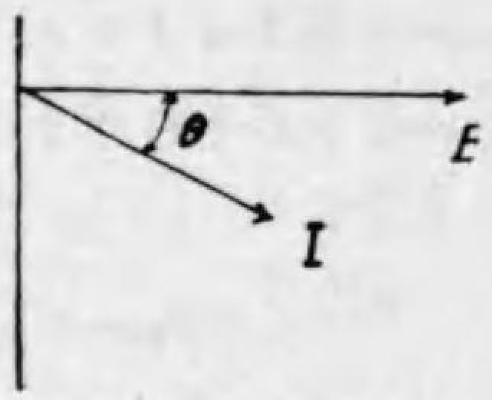
R……抵抗　ω……$2\pi f$

L……インダクタンス　C……キヤパシチー

此の式は抵抗とインダクタンスとキヤパシチーとの三つを有する場合であつて若しキヤパシチーがなくてRとLとのみの時には$\dfrac{1}{\omega C}$を零と置けば67式が出るしインダクタンスがない場合には$L\omega$を零と置けば69式が出來、又抵抗がない場合にはRを零と置けば71式が出て來る。從つて此の式を記憶する事が大切である。又此の式の $\omega L-\dfrac{1}{\omega C}$ をxなるリアクタンスで代表せしむると次の如く書き表はす事が出來る。

$$\dot{I}=\frac{E}{R+jx}$$

此の場合にもベクターは電壓を基線として取つたのであるからそのベクター圖は第138圖の通りになり位相角θと力率$\cos\theta$とは次の式で表はす事が出來る。



第138圖

$$\left.\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R}\\ \cos\theta&=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(73)$$

今例として抵抗4オーム、インダクタンス0.05ヘンリー、キヤパシチー0.00027フアラッドの三つが直列に接續せられて居る場合に交流50サイクル200ヴオルトの電壓をかけた時の電流を求めて見る。

$$\dot{I}=\frac{E}{R+j\omega L-j\dfrac{1}{\omega C}}$$

$E=200$　　$R=4$

$\omega L=2\pi\times50\times0.05=15.7$

$$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi\times50\times0.00027}=11.7$$

$$\dot{I}=\frac{200}{4+j15.7-j11.7}=\frac{200}{4+j4}=\frac{200(4-j4)}{(4+j4)(4-j4)}$$

$$=\frac{800(1-j1)}{32}=25(1-j1)=25-j25$$

$\therefore\quad I=\sqrt{25^2+25^2}=35.35$ アンペア

此の場合は實數が25で虚數も25であるから明かに位相角は45度となり力率 $\cos\theta$ は$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$卽ち0.708となる。

又抵抗やインダクタンスやキヤパシチー等が多數にある時には抵抗は抵抗で集めインダクタンスはインダクタンスで集めた複素數を使用する。例へば抵抗がR_1R_2と二つありインダクタンスがL_1L_2と二つあつてキヤパシチーもC_1C_2と二つある場合には電流の複素數は次の式で示される。

$$\dot{I}=\frac{E}{R_1+R_2+j(\omega L_1+\omega L_2)-j\left(\dfrac{1}{\omega C_1}+\dfrac{1}{\omega C_2}\right)}$$

5. 例　題

例 1. 抵抗4オーム、インダクタンス30ミリヘンリーが直列

にある場合60サイクルの回路のインピーダンスを複素数にて求む。

解　抵抗は實數部分に誘導リアクタンスは＋ｊの虚數部分に取れば複素數のインピーダンスが得られる。

$$\dot{Z}=R+\dot{j}x=\dot{R}+j\omega L=4\dot{+}j2\pi\times60\times0.03=4+j11.3$$

例 2.　抵抗28オームとキヤパシチー 160マイクロフアラッドとが直列にある回路がある、之に交流50サイクルを加へた場合のインピーダンスを複素數にて表せ。

解　抵抗は實數で表はされキヤパシチーは$-\dot{j}$の虚數で表はされる。從つて此のインピーダンスを複素數で表はせば次の通りである。

$$\dot{Z}=R-\dot{j}\frac{1}{\omega C}$$

$$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi fC}=\frac{1}{2\pi\times50\times0.00016}=20$$

$$R=28$$

$$\therefore\ \dot{Z}=28-\dot{j}20$$

例 3.　抵抗15オーム、インダクタンス28ミリヘンリー、キヤパシチー 500 マイクロフアラッドの三つが直列になつて居る回路がある。今此の回路に50サイクルの電壓をかけたとすればそのインピーダンスを複素數にて示し、インピーダンスと抵抗との間の位相角を求む。

解　先づインピーダンスの複素數の式を示すと48式により次の通りである。

$$\dot{Z}=R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}$$

$$R=15$$

$$\omega L=2\pi fL=2\pi\times50\times0.028=8.8$$

$$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi fC}=\frac{1}{2\pi\times50\times0.0005}=6.37$$

$$\therefore\ \dot{Z}=15+j8.8-j6.37=15+j2.43$$

インピーダンスと抵抗とのベクター間の角度をθとすれば$\tan\theta$は次の如くなり三角函數表よりθの大きさを求める事が出來る。

$$\tan\theta=\frac{2.43}{15}=0.162$$

$$\theta=9°10'$$

例 4.　抵抗15オーム、誘導リアクタンス20オームが直列に接續されて居る回路に10アンペアの電流を流す場合にその兩端の電壓を求む。

解　此の場合の電壓を$\dot{V}$の複素數で表はし力率を$\cos\theta$で表はす。

$$\dot{V}=I(R+jx)=10(15+j20)=150+j200$$

$$V=\sqrt{150^2+200^2}=250$$

$$\cos\theta=\frac{15}{\sqrt{15^2+20^2}}=0.6$$

例 5.　抵抗８オーム、誘導リアクタンス10オーム、容量リアクタンス４オームの直列回路に５アンペアの電流を流す場合に於ける兩端の電壓を求む。

解　電流を基線に取り電壓をＶで表はす。

$$\dot{V}=I(R+jx_1-jx_2)$$

$$I=5\qquad R=8$$

$$x_1=10\qquad x_2=4$$

$$\therefore\ \dot{V}=5(8+j10-j4)$$

$$=5(8+j6)=40+j30$$

$$V=\sqrt{40^2+30^2}=50\text{ヴオルト}$$

例 6. 抵抗4オーム、インダクタンス7.95ミリヘンリーとが直列に接續せられて居る場合に交流60サイクル100ヴオルトをかけると此の回路に如何なる電流が流れるか、又その力率は何程か。

解　此の場合に流れる電流は第67式から次の通りになる。

$$I=\frac{E}{R+j\omega L}$$

$E=100$ ヴオルト　　$R=4$ オーム

$\omega L=2\pi fL=2\pi\times60\times0.00795\fallingdotseq3$ オーム

$$\therefore\quad \dot{I}=\frac{100}{4+j3}=\frac{100(4-j3)}{(4+j3)(4-j3)}=\frac{100(4-j3)}{4^2+3^2}$$

$$=\frac{100(4-j3)}{25}=4(4-j3)=16-j12$$

$$I=\sqrt{16^2+12^2}=20\text{ アンペア}$$

$$\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4}{5}=0.8$$

例 7. 抵抗3オームと誘導リアクタンス8オームと容量リアクタンス4オームとが直列に接續せられて居る回路に抵抗5オームと、誘導リアクタンス2オームとを直列に接續し之に交流100ヴオルトを供給すれば何程の電流が流れるか。

解　電流は次の式から計算し得られる。

$$\dot{I}=\frac{E}{R_1+R_2+j(x_1-x_2+x_3)}$$

之に數値を代入すると次の通りになる。

$$\dot{I}=\frac{100}{3+5+j(8-4+2)}$$

$$=\frac{100}{8+j6}=\frac{100(8-j6)}{(8+j6)(8-j6)}$$

$$=\frac{100(8-j6)}{8^2+6^2}=8-j6$$

$$\therefore\quad I=\sqrt{8^2+6^2}=10\text{ アンペア}$$

$$\text{力率}=\frac{8}{\sqrt{8^2+6^2}}=0.8$$

是は $\dot{I}$ の式を見れば虚數部分が $-j6$ となりて負數であるから電流は、電壓より遲れるのである。

第十章　並　列　回　路

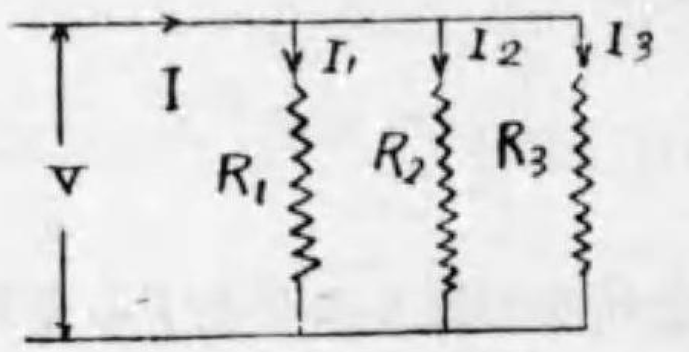
1. 簡單な並列回路

キャパシチー　インダクタンス　抵抗等が雜多に存在する並列回路に比較すると抵抗のみの並列回路やインダクタンスのみの並列回路は餘程簡單である。先づ此の簡單な回路から記號式ベクター法、則ちシンボリツクメソツドの應用方法を述べて見る。

記號式ベクター法でも普通のベクターと同樣に基線の取り方を十分に考へなければならない。云ひ換へれば電壓を基線に取るか電流を基線に取るかゞ問題である。直列回路の如くインピーダンスと電流が知れて電壓や電壓降下を求める樣な場合には電流を基線に取るのが普通である。電流を基線に取るならば此の電流は複素數の形を取らない、例へば i アンペアの電流を基線に取つた場合のその記號式ベクターは i+jo となり結局 i となる。所が同じ直列回路に於ても電壓とインピーダンスが知れて居る場合に電流を求めようとする場合の如きは電壓を基線に

取るのが普通で此の場合は電壓の記號式ベクターは $V+j0$ となり結局 V となる。即ち基線に取つたものゝ記號式ベクターは j の附かない部分のみとなる。今此處に述べる並列回路に於ても電壓を基線に取る事もあるし電流を基線に取る事もあるが多くの場合に一定の電壓がかゝつて居てその分岐電流の各々の電流を求め之を合成して全電流を求める事が多いので普通電壓を基線に取る樣である。

次に此の記號式ベクターで抵抗のみの並列回路の解き方を示して見るが之は抵抗のみであるから回路に於ける電流や電壓の位相關係は全く同相にあるので直流に於ける計算と全く變らずオームの法則一點張りで良い事になる。先づ第139圖の如く電壓200ヴオルトの回路に R_1 なる抵抗 R_2 なる抵抗 R_3 なる抵抗が並列に接續せられて居る場合に此の回路を流れる全電流 I の大きさを求めて見る。



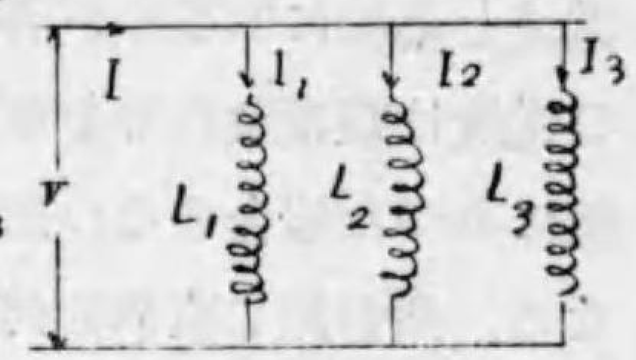
第139圖

$$I_1=\frac{V}{R_1} \qquad I_2=\frac{V}{R_2} \qquad I_3=\frac{V}{R_3}$$

之等の電流は皆電壓と同相にあるので全電流は之等の電流を加へ合せれば出て來る譯である。

$$I=I_1+I_2+I_3$$

今度はインダクタンスのみが並列に接續せられて居る場合を示す。先づ第140圖に示す通り電壓Vヴオルトの交流回路に L_1 なるインダクタンスと L_2 なるインダクタンスと L_3 なるインダクタンスとが接續せられて居るとする、此の場合に流れる全電流



第140圖

I を求めて見る。

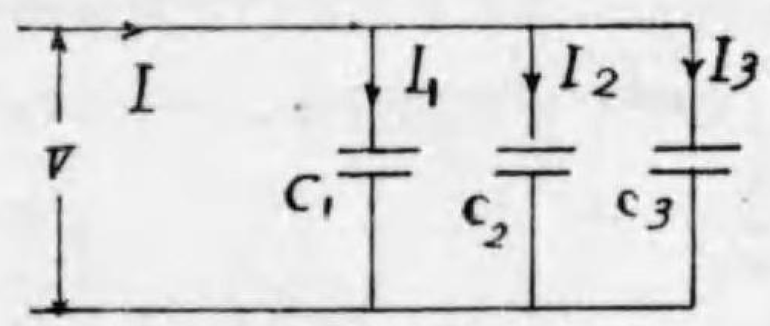
$$\dot{I}_1=\frac{V}{j\omega L_1}=\frac{V}{jx_1} \qquad \dot{I}_2=\frac{V}{j\omega L_2}=\frac{V}{jx_2} \qquad \dot{I}_3=\frac{V}{j\omega L_3}=\frac{V}{jx_3}$$

複素數で表はされた電流は之を加へ合すと合成電流となるもので之は丁度ベクターを加へ合すと合成電流のベクターが得られると同じである。今上に出した電流の合成電流を求めると次の通りである。

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=-j\left(\frac{V}{\omega L_1}+\frac{V}{\omega L_2}+\frac{V}{\omega L_3}\right)$$

此の j なる意味は前に何回も云つて居る通り基線に取つた電壓より90度位相が遲つて居ると云ふ事を示したものである。その符號については－即ちマイナスの場合は後れる意味であつて反對に〔+j〕なる場合にはその位相が基線より90度進んで居る事を示すのである。

次にキヤパシチーのみの並列回路について述べて見る。第141圖の如く V ヴオルト回路に C_1 なるキヤパシチーと C_2 なるキヤパシチーと C_3 なるキヤパシチーとが並列に接續せられて居るとする。此の場合の電流を求めて見る。



第141圖

$$\dot{I}_1=\frac{V}{-j\dfrac{1}{\omega C_1}}=\frac{\omega C_1 V}{-j}=j\omega C_1 V=\frac{V}{-jx_1}$$

$$\dot{I}_2=\frac{V}{-j\dfrac{1}{\omega C_2}}=\frac{\omega C_2 V}{-j}=j\omega C_2 V=\frac{V}{-jx_2}$$

$$\dot{I}_3=\frac{V}{-j\dfrac{1}{\omega C_3}}=\frac{\omega C_3 V}{-j}=j\omega C_3 V=\frac{V}{-jx_3}$$

此の場合も合成電流は之等の複素數で表はした電流を加へればよい。

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=jV\ (\omega C_1+\omega C_2+\omega C_3)$$

此の場合は j の符號がプラスであるから電流が電壓より90度進んで居ると云ふ事を表はして居る。

2. 抵抗とリアクタンスを含む簡單な回路

先づ抵抗とインダクタンスとが並列に入つて居る場合の回路を記號式ベクター法で解く方法を說明する。先づ第 142 圖に示した樣に抵抗Rとインダクタンス L とが並列に接續せられて居る回路に電壓ヴォルトをかけた場合の電流を考へて見る。

第 1 4 2 圖

$$\dot{I}_1=\frac{V}{R}\qquad \dot{I}_2=\frac{V}{j\omega L}=j\frac{V}{\omega L}$$

$$\therefore\quad \dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=\frac{V}{R}-j\frac{V}{\omega L}$$

かくて電流 I のベクターが複素數で求められた譯であるがその大きさは前に述べた方法により次の通りになりその方向は $-j$ であるので電壓より遲れる譯である。

$$I=\sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2+\left(\frac{V}{\omega L}\right)^2}$$

此の回路の力率は電流の大きさで有効部分を割れば良いのであるから次の通りになる。

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

次にキャパシチーと抵抗とを含む回路の出し方を說明する。

第 1 4 3 圖

第143 圖の如く R な抵抗と C なるキャパシチーとが並列に接續せられて居る回路に V ヴォルト電壓をかけた場合の電流を出して見る。各回路に流れる電流 I_1 I_2 は次の通りである。

$$\dot{I}_1=\frac{V}{R}\qquad \dot{I}_2=\frac{V}{-j\dfrac{1}{\omega C}}=\frac{\omega CV}{-j}=j\omega CV$$

$$\therefore\quad \dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=\frac{V}{R}+j\omega CV$$

此の電流 I の大きさは次の通りになる。

$$I=\sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2+(\omega CV)^2}$$

次にインダクタンスとキャパシチーとが並列に接續されて居る場合は次の式で示される。但し L はインダクタンス、C はキャパシチー、x_1 は誘導リアクタンス、x_2 は容量リアクタンスである。

$$\dot{I}_1=\frac{V}{j\omega L}=-j\frac{V}{\omega L}=\frac{V}{jx_1}=-j\frac{V}{x_1}$$

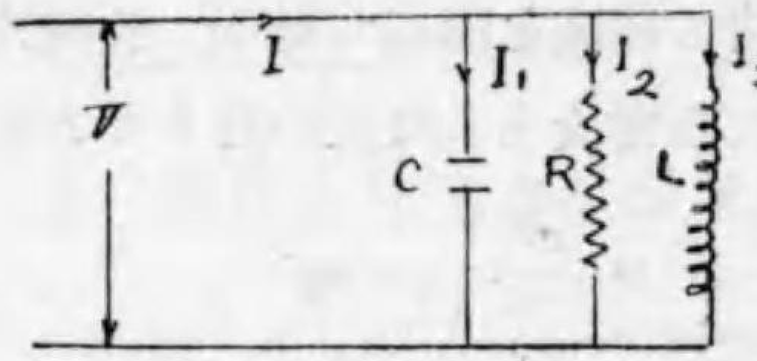
$$\dot{I}_2=\frac{V}{-j\dfrac{1}{\omega C}}=j\omega CV=\frac{V}{-jx_2}=j\frac{V}{x_2}$$

$$\therefore\quad \dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=-j\frac{V}{\omega L}+j\omega CV$$

又は $\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=-j\dfrac{V}{x_1}+j\dfrac{V}{x_2}$

2. 抵抗とリアクタンス

今度は抵抗とインダクタンスとキャパシチーが單に並列に接續せられて居る場合を述べて見る。先づ第 144 圖の如くキャパシチーCと抵抗Rとインダクタンス L とを並列に接續した回路があるとする。此のCは 159 マイクロフアラツド、R は 8 オーム、L は 38.2 ミリヘンリーとし電壓 V を 50 サイクル 120 ヴオルトとする。今此の回路に流れる電流を求むれば次の通りになる。



第 1 4 4 圖

$$\dot{I}_1=\frac{V}{-j\dfrac{1}{\omega C}}=j\omega CV=j314\times0.000159\times120\fallingdotseq j6$$

$$\dot{I}_2=\frac{V}{R}=\frac{120}{8}=15$$

$$\dot{I}_3=\frac{V}{j\omega L}=\frac{jV}{-\omega L}=\frac{j120}{-2\pi\times50\times0.038}\fallingdotseq -j10$$

$$\therefore\quad \dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=j6+15-j10=15-j4$$

是で I のベクターが得られた譯でその大きさを求むると次の通りである。

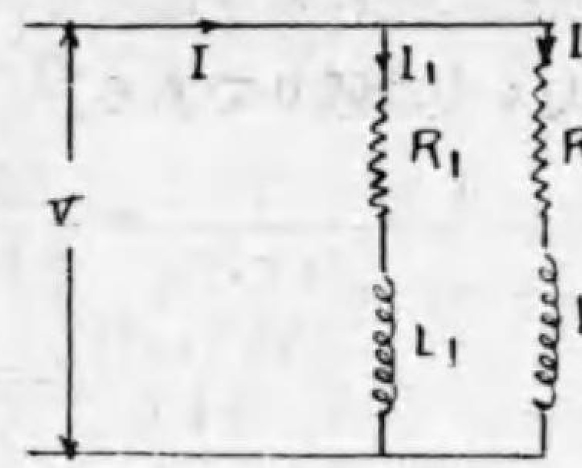
$$I=\sqrt{15^2+4^2}=15.55 \text{ アンペア}$$

力率 $\cos\theta$ は次の通りになり遲電流を取る。

$$\cos\theta=\frac{15}{15.55}=0.975$$

3. 抵抗リアクタンスの直並列

今度は第 145 圖の如く抵抗とインダクタンスとが直列になつて居る並列回路を此の記號式ベクター法によつて解く方法を示す事とする。こんな回路でも記號式ベクター法を使用すると合成インピーダンスを求めて解く事も出來るけれ共此の方法は後にまとめて述べる筈であるから此處では從來通りに解いて見る。此の回路にかゝる電壓を f サイクル V ヴオルトとし別に數値を入れないで解いて見る。各回路に流れる電流を I_1 I_2 とすると是等は次の通りになる。



第 1 4 5 圖

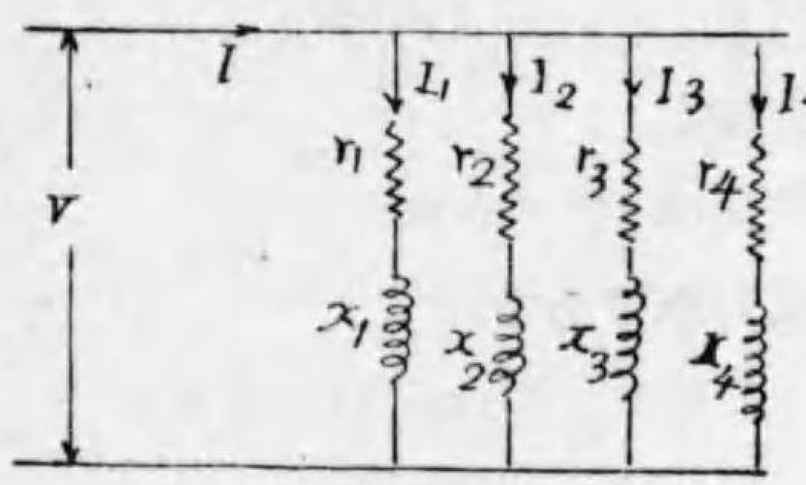
$$\dot{I}_1=\frac{V}{R_1+j2\pi fL_1}\qquad \dot{I}_2=\frac{V}{R_2+j2\pi fL_2}$$

$$\therefore\quad \dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=\frac{V}{R_1+j2\pi fL_1}+\frac{V}{R_2+j2\pi fL_2}$$

$$=\frac{V(R_2+j2\pi fL_2)+V(R_1+j2\pi fL_1)}{(R_1+j2\pi fL_1)(R_2+j2\pi fL_2)}$$

$$=\frac{V\{R_1+R_2+j2\pi f(L_1+L_2)\}}{(R_1+j2\pi fL_1)(R_2+j2\pi fL_2)}$$

今度は第 146 圖の如く抵抗とインダクタンスとを直列にして居る回路が 4 つあつて何れも並列に接續せられて居るとする。此の場合に此の回路にかゝる電壓は 100 ヴオルトで抵抗 r_1 は 2 オーム、r_2 は 4 オーム、r_3 は 1 オーム、r_4 は 3 オームである、又誘導リアクタンスは x_1 が 1 オーム、x_2 が 2 オーム、x_3 が 3 オーム、x_4 が 4 オームである。此の時此



第 1 4 6 圖

の回路に流れる全電流を求める事とする。各回路に流れる電流は夫々次の通りである。

$$\dot{I}_1=\frac{V}{r_1+jx_1}=\frac{100}{2+j1}=\frac{100(2-j1)}{(2+j1)(2-j1)}$$

$$=\frac{100(2-j1)}{4+1}=\frac{100(2-j1)}{5}=20(2-j1)$$

$$\dot{I}_2=\frac{V}{r_2+jx_2}=\frac{100}{4+j2}=\frac{100(4-j2)}{(4+j2)(4-j2)}$$

$$=\frac{100(4-j2)}{16+4}=\frac{100(4-j2)}{20}=5(4-j2)$$

$$\dot{I}_3=\frac{V}{r_3+jx_3}=\frac{100}{1+j3}=\frac{100(1+j3)}{(1+j3)(1-j3)}$$

$$=\frac{100(1-j3)}{1+9}=\frac{100(1-j3)}{10}=10(1-j3)$$

$$\dot{I}_4=\frac{V}{r_4+jx_4}=\frac{100}{3+j4}=\frac{100(3-j4)}{(3+j4)(3-j4)}$$

$$=\frac{100(3-j4)}{9+16}=\frac{100(3-j4)}{25}=4(3-j4)$$

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3+\dot{I}_4$$

$$=20(2-j1)+5(4-j2)+10(1-j3)+4(3-j4)$$

$$=82-j76$$

電流 I の大きさは次の通りになる。

$$I=\sqrt{82^2+76^2}=112 \text{ アンペア}$$

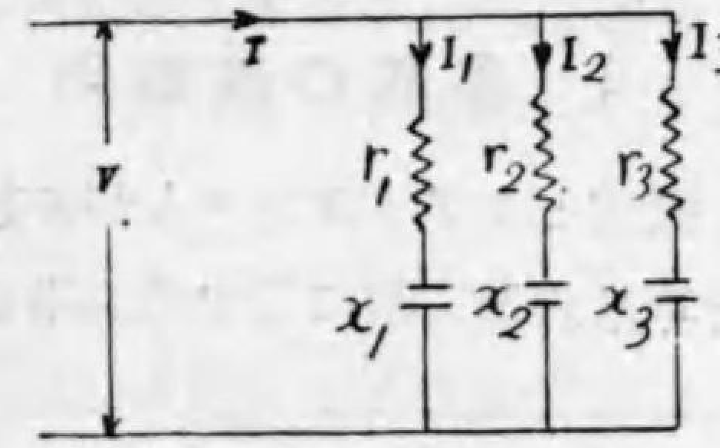
力率も次の如く出るが無論遅力率である。

$$\cos\theta=\frac{82}{112}=0.732$$

抵抗とキヤパシチーとを直列に接續された回路の取扱ひ方もインダクタンスを含む回路の場合と同樣である。

今一つの例を解いて見る。第147圖の如く抵抗とキヤパシチ

ーとが直列に接續せられて居る回路が三つあるとする。此の場合に抵抗 r_1 は 2 オーム、r_2 は 4 オーム、r_3 は 6 オームとしリアクタンス x_1 は 6 オーム、x_2 は 2 オーム、x_3 は 8 オームとする。



第 1 4 7 圖

此の回路にかけられた電壓を80ヴォルトとすればどれ丈の電流が流れるかを求めて見る。各回路に流れる電流を I_1 I_2 I_3 とすれば夫々次の通りになる。

$$\dot{I}_1=\frac{V}{r_1-jx_1}=\frac{80}{2-j6}=\frac{80(2+j6)}{(2-j6)(2+j6)}$$

$$=\frac{80(2+j6)}{4+36}=\frac{80(2+j6)}{40}=2(2+j6)$$

$$\dot{I}_2=\frac{V}{r_2-jx_2}=\frac{80}{4-j2}=\frac{80(4+j2)}{(4-j2)(4+j2)}$$

$$=\frac{80(4+j2)}{16+4}=\frac{80(4+j2)}{20}=4(4+j2)$$

$$\dot{I}_3=\frac{V}{r_3-jx_3}=\frac{80}{6-j8}=\frac{80(6+j8)}{(6-j8)(6+j8)}$$

$$=\frac{80(6+j8)}{36+64}=\frac{80(6+j8)}{100}=0.8(6+j8)$$

$$\therefore\quad \dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=2(2+j6)+4(4+j2)+0.8(6+j8)$$

$$=24.8+j26.4$$

I の大きさは次の通りである。

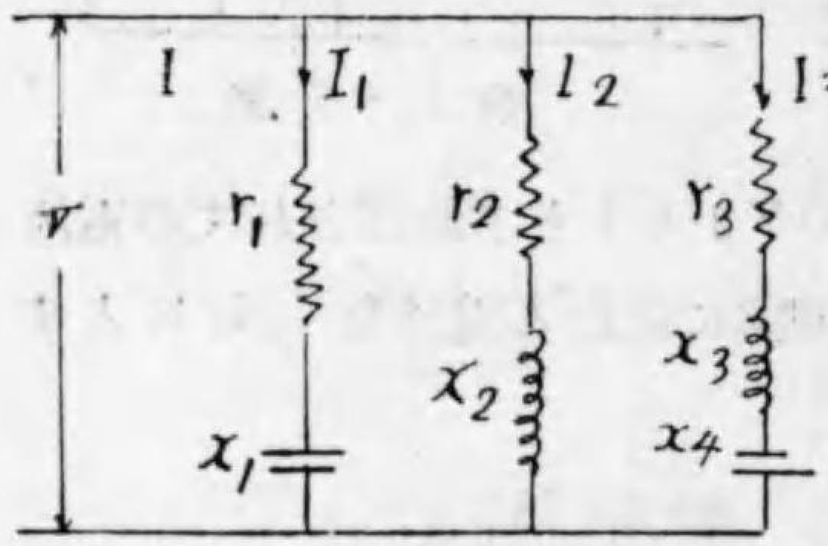
$$I=\sqrt{24.8^2+26.4^2}=36.6 \text{ アンペア}$$

力率は次の通りで電流は電壓よりも進む。

$$\cos\theta=\frac{24.8}{36.6}=0.678$$

4. 多數の直並列

抵抗とリアクタンスとが多數直列に接續せられて居る回路の計算も前と同樣にして行ふ事が出來る。例へば第148圖の如き場合の例題を解いて見る。圖に於て抵抗 r_1 は10オーム、r_2 は8オーム、r_3 は30オームである。又誘導リアクタンス x_2 は6オーム、x_3 は25オームで容量リアクタンス x_1 は20オーム、x_4 は15オームである。此の場合にVなる電壓250ヴォルトがかけられたとするならば此の回路に流れる電流は何程かを求めて見る。



第148圖

$$\dot{I}_1=\frac{V}{r_1-jx_1}=\frac{250}{10-j20}=\frac{250(10+j20)}{(10-j20)(10+j20)}$$

$$=\frac{2500(1+j2)}{500}=5(1+j2)=5+j10$$

$$\dot{I}_2=\frac{V}{r_2+jx_2}=\frac{250}{8+j6}=\frac{250(8-j6)}{(8+j6)(8-j6)}$$

$$=\frac{500(4-j3)}{100}=5(4-j3)=20-j15$$

$$\dot{I}_3=\frac{V}{r_3+j(x_3-x_4)}=\frac{250}{30+j(25-15)}=\frac{250}{30+j10}$$

$$=\frac{250(30-j10)}{(30+j10)(30-j10)}=\frac{2500(3+j1)}{1000}=7.5+j2.5$$

$$\therefore\quad \dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=5+j10+20-j15+7.5+j2.5=32.5-j2.5$$

此の電流Iの大きさを計算すると次の通りである。

$$I=\sqrt{32.5^2+2.5^2}=32.6 \text{ アンペア}$$

力率は $-j$ であるから遲力率で次の通りになる。

$$\cos\theta=\frac{32.5}{32.6}=0.997$$

以上色々と電流の計算を行つたけれ共此の記號式ベクターを使用すると今迄述べたベクターで解いて行くよりも餘程樂である事が知れるに違ひない。即ち今迄の方法で此の並列回路の計算を行ふには電流を有效部分と無效部分との二つに分け之等を夫々合して最後に之等の平方の和を平方根に開いて電流の大きさを求め得たものである。所が記號式ベクター法即ちシンボリツクメソッドによる時はこんな面倒な事をしなくてもjの附いて居ない部分が有效部分でjの附いて居るのが無效部分であると云ふ事が判然として知れて居るので取扱ひが樂である。從つて計算も前の場合に比して大變便利になるものである。然し此の記號式ベクター法は是迄述べた樣な直列回路とか並列回路とかの問題を解く上に便利なばかりでなく今迄の方法では解き得なかつた問題でも容易に解く事が出來る。今迄の樣な直列回路とか並列回路とかの問題は無理に記號式ベクター法を使用しなくても解けた筈でその計算が少し樂になつたと云ふに過ぎない。所が少し複雜な回路になると此の記號式ベクター法で解いて行くと極く簡單に解け然かも此の記號式ベクター法を使用しなければ出來ない問題も多數にある。今迄直列回路や並列回路に使用したのは此の記號式ベクター法の使用法を練習したものであつて之等に對しては記號式ベクター法ばかりで解かなければならないと云ふ理由はないけれ共複雜になつた回路には是非之を使用しなければならない。此の記號式ベクター法を使用すると回路の合成インピーダンスを求める事が出來る。直流回路

に於ては複雑なる回路に於ても合成抵抗を求める事が出來、此の合成抵抗を以つて電壓を割りさへすればその回路の電流も出て來る譯で甚だ簡單である。所が交流の回路に於ては直流回路の様に合成インピーダンスを得る事は難しいけれ共此の記號式ベクター法を使用するならば此の合成インピーダンスも求められ上に述べた様な並列回路の合成インピーダンスでも直ちに求められ更に難しい回路の合成インピーダンスですら容易に得る事が出來て回路の計算は容易に出來る。それぱかりでなく直流回路の複雑したものに對してはキルヒホッフの法則と云ふのがあつて容易に解く事が出來るのであるが交流に於ても此の記號式ベクター法を使用すると是と同様に此の法則を應用して解く事が出來る。かう云ふ風に此の記號式ベクターを使用する事は交流回路の計算には最も大切なる事で次は之によつて合成インピーダンスを求むる方法を述べ次いでキルヒホッフの法則及び重疊の理を述べる。

5. 例　　題

例 1. 抵抗20オームとインダクタンス0.0663ヘンリーとを並列に接續した回路に 100 ヴォルト60サイクルをかけた場合此の回路に流れる電流を求む。

解　抵抗を流れる電流をI_1としインダクタンスを流れる電流をI_2とすれば次の通りになる。

$$\dot{I}_1=\frac{V}{R}=\frac{100}{20}=5$$

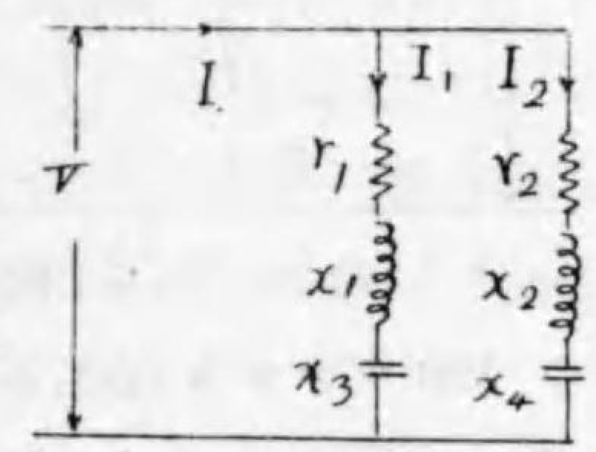
$$\dot{I}_2=\frac{V}{j\omega L}=\frac{100}{j2\pi\times60\times0.0663}=\frac{100}{j25}=\frac{j100}{-25}=-j4$$

$$\therefore\quad \dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=5-j4$$

$$I=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}=6.4\ \text{アンペア}$$

$$\cos\theta=\frac{5}{6.4}=0.781$$

例 2. 第149圖の如く接續せられた回路がある、抵抗r_1は9オーム、r_2は12オーム、誘導リアクタンスx_1は6オーム、x_2は14オームで容量リアクタンスx_3は18オーム、x_4は8オームである。此の場合に此の回路に電壓90ヴォルトをかけた場合の電流 I を求む。



第 149 圖

解　各分岐回路に流れる電流 I_1 及び I_2 を求めると次の通りである。

$$\dot{I}_1=\frac{V}{r_1+j(x_1-x_3)}=\frac{90}{9+j(6-18)}=\frac{90}{9-j12}$$

$$=\frac{90(9+j12)}{(9-j12)(9+j12)}=\frac{90(9+j12)}{225}=3.6+j4.8$$

$$\dot{I}_2=\frac{V}{r_2+j(x_2-x_4)}=\frac{90}{12+j(14-8)}=\frac{90}{12+j6}$$

$$=\frac{90(12-j6)}{(12+j6)(12-j6)}=\frac{90(12-j6)}{144+36}=6-j3$$

$$\therefore\quad \dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=3.6+j4.8+6-j3=9.6+j1.8$$

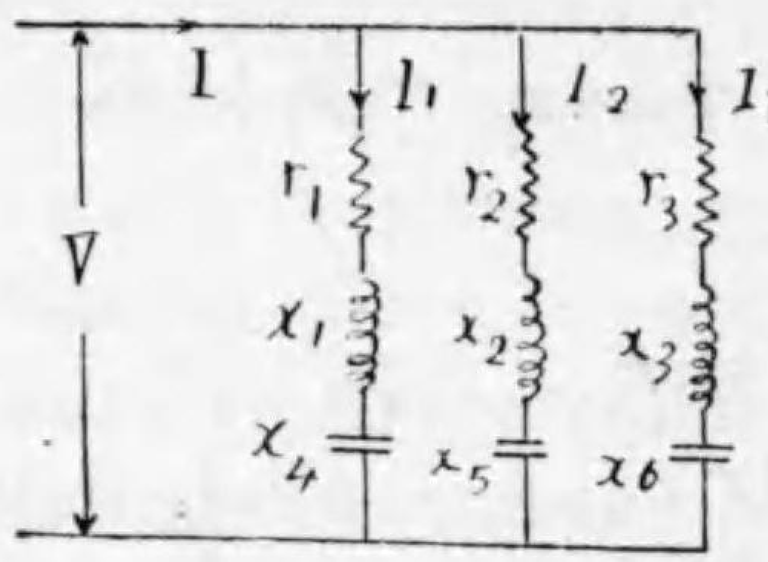
電流 I は次の大きさを取る。

$$I=\sqrt{9.6^2+1.8^2}=9.77\ \text{アンペア}$$

力率は次の通りで是は進力率である。

$$\cos\theta=\frac{9.6}{9.77}=0.982$$

例 3. 第150圖に示す様な回路があつて抵抗r_1は10オーム、



第 1 5 0 圖

r_2は20オーム、r_3は12オームで誘導リアクタンスx_1は45オーム、x_2は8オーム、x_3は28オームを有し容量リアクタンスx_4は15オーム、x_5は18オーム、x_6は12オームである。今此の回路にかけられた電壓が100ヴォルトであるとするならば流れる電流を求む。

解　例によつて各分岐回路を流れる電流を求めて見る。

$$\dot{I}_1=\frac{V}{r_1+j(x_1-x_4)}=\frac{100}{10+j(45-15)}=\frac{100}{10+j30}$$

$$=\frac{100(10-j30)}{(10+j30)(10-j30)}=\frac{100(10-j30)}{100+900}=1-j3$$

$$\dot{I}_2=\frac{V}{r_2+j(x_2-x_5)}=\frac{100}{20+j(8-18)}=\frac{100}{20-j10}$$

$$=\frac{100(20+j10)}{(20-j10)(20+j10)}=\frac{100(20+j10)}{400+100}=4+j2$$

$$\dot{I}_3=\frac{V}{r_3+j(x_3-x_6)}=\frac{100}{12+j(28-12)}=\frac{100}{12+j16}$$

$$=\frac{100(12-j16)}{(12+j16)(12-j16)}=\frac{100(12-j16)}{144+256}=3-j4$$

$$\therefore\quad \dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=1-j3+4+j2+3-j4=8-j5$$

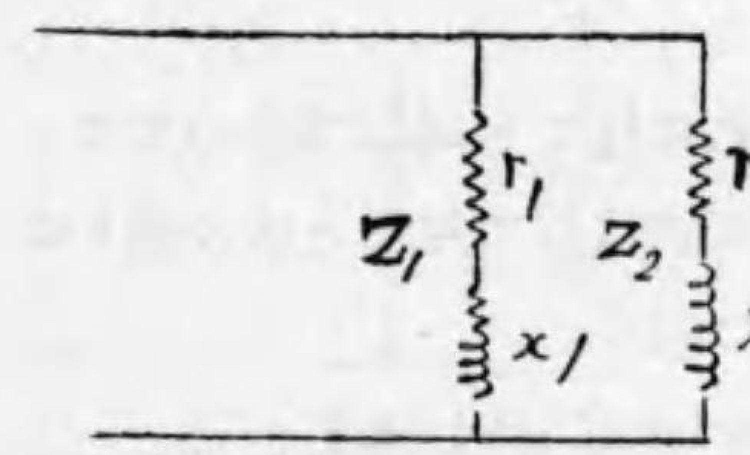
$$\therefore\quad I=\sqrt{8^2+5^2}=9.44\ \text{アンペア}$$

$$\cos\theta=\frac{8}{9.44}0.848$$

第十一章　合成インピーダンス

1. 合成インピーダンス

交流回路に於ては抵抗ばかりでなく、インダクタンスも入ればキヤパシチーも入つて來るので直流の如く合成抵抗の方法を以てしてはインピーダンスを合成する譯には行かない。交流回路に於ても全體のインピーダンス、卽ち合成インピーダンスさへ知れて居るならば此の合成インピーダンスに全電流を掛ければ電壓降下が出るし電壓を此の合成インピーダンスで割れば流れる電流も知れる譯である。此の交流に於ける合成インピーダンスはインピーダンスを記號式ベクター卽ち複素數で表した場合に限り直流に於ける合成抵抗を求めると同樣の方法で求め得る。此の合成抵抗を求め得る事も記號式ベクターの長所の一つで是によつて相當複雜な回路の計算をも行ふ事が出來る。先づ第151圖の如き並列回路の合成インピーダンスを求める式を出して見る。今各分岐回路のインピーダンスを夫々Z_1Z_2となし合成インピーダンスをZとする。是等のインピーダンスを夫々複素數で表はすならば合成抵抗を求める場合と同樣にして次の如く合成インピーダンスを求める事が出來る。



第 1 5 1 圖

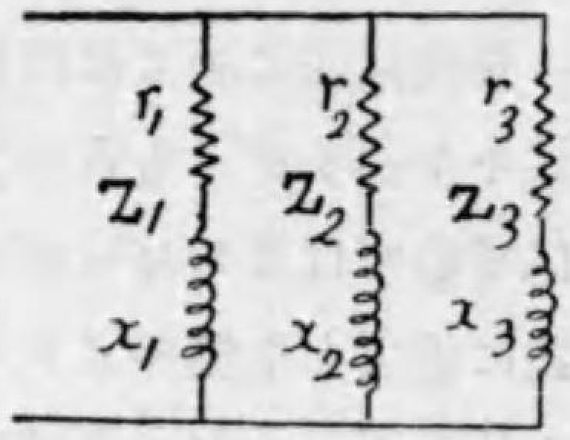
$$\frac{1}{\dot{Z}}=\frac{1}{\dot{Z}_1}+\frac{1}{\dot{Z}_2}\qquad\therefore\quad\frac{1}{\dot{Z}}=\frac{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}$$

$$\dot{Z}=\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(74)$$

今度は此の$\dot{Z}_1$の代りにr_1+jx_1を代入して見ると次の通りになる。

$$\dot{Z}=\frac{(r_1+jx_1)(r_2+jx_2)}{r_1+r_2+j(x_1+x_2)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(75)$$

又第152圖に示す通りにインピーダンスが三つ並列に接續されて居る場合に於ても是等のインピーダンスを複素數で表はすならば前と同樣にしてその合成インピーダンスを見出す事が出來るものである。



第 152 圖

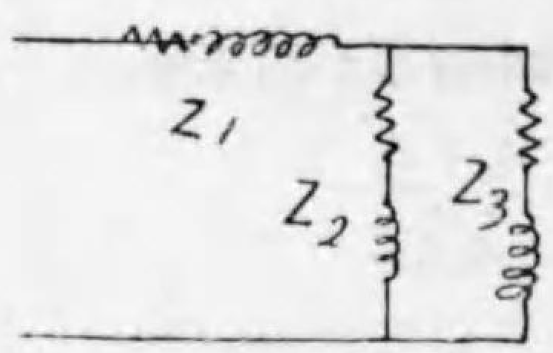
$$\frac{1}{\dot{Z}}=\frac{1}{\dot{Z}_1}+\frac{1}{\dot{Z}_2}+\frac{1}{\dot{Z}_3}$$

$$\frac{1}{\dot{Z}}=\frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

$$\therefore\quad \dot{Z}=\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(76)$$

$\dot{Z}_1$に抵抗とリアクタンスとを入れて見ても同じであつてインピーダンスZ_1をr_1+jx_1と云ふ形で表はして見ると次の通りになる。

$$\dot{Z}=\frac{(r_1+jx_1)(r_2+jx_2)(r_3+jx_3)}{(r_1+jx_1)(r_2+jx_2)+(r_2+jx_2)(r_3+jx_3)+(r_1+jx_1)(r_3+jx_3)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(77)$$



第 153 圖

今度は第153圖に示す樣な直列並列回路の合成インピーダンスを求めて見ると此の合成インピーダンスはZ_2とZ_3との並列回路の合成インピーダンスにZ_1なるインピーダンスが直列に入つて

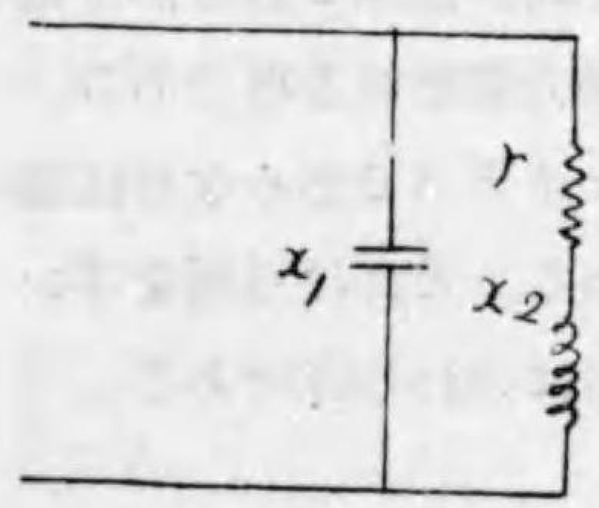
居るのであるから次の通りになる。

$$\dot{Z}=\dot{Z}_1+\frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(78)$$

かう云ふ風にして合成インピーダンスは複素數を使用する事によつて容易に求める事が出來る。第153圖に示した回路の如きは今迄の方法ではうまく解く事が出來なかつたものであるけれ共此の合成インピーダンスを用ひて求める事が出來、隨分複雜した回路の電流でも此の合成インピーダンスを求める事によつて解決する事が出來る。

2. 合成インピーダンスの應用

先づ合成インピーダンスを求める場合の練習から行つて見る。第154圖に示す通りx_1なるキャパシチーによるリアクタンスと之と並列に抵抗rとインダクタンスによるリアクタンスx_2とがあるとする。此の場合にrを4オームとしx_1を5オームx_2を2オームとすれば此の回路の合成インピーダンスは何程なるかを調べて見る。



第 154 圖

第74式によつて合成インピーダンスZは次の通りになる。

$$\dot{Z}=\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2}$$

然るにZ_1はキャパシチーのみであるから此のインピーダンスを複素數で表はすならば$-jx_1$となりZ_2は抵抗とインダクタンスであるからそのインピーダンスは$r+jx_2$となる。即ち次の式

の通りになり之に數値を入れて解いて見る。

$$\dot{Z}_1=-jx_1=-j5$$

$$\dot{Z}_2=r+jx_2=4+j2$$

$$\therefore\quad \dot{Z}=\frac{-j5(4+j2)}{-j5+4+j2}=\frac{-j5(4+j2)}{4-j3}=\frac{-j5(4+j2)(4+j3)}{(4-j3)(4+j3)}$$

$$=\frac{-j5(10+j20)}{25}=\frac{25(-j2+4)}{25}=4-j2$$

即ちインピーダンスを複素數で表はした$\dot{Z}$は$4-j2$となり此の大きさを計算して見ると次の通りになる。

$$Z=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\ \text{オーム}$$

是で合成インピーダンスの大きさが知れた譯であるが力率は此の合成インピーダンスの大きさを以てjの附いて居ない部分を割ればよいのである。此の場合に注意する事は進力率か遲力率かの問題であつてインピーダンスの複素數のjの前がプラスであるならば電壓降下が電流より進むと云ふ意味であるから電流の場合とは逆に電流が電壓より遲れ遲力率を取る事である。反對にインピーダンスの複素數の前がマイナスであるならば進力率であつて此の例の如きは進力率である。これは電壓をインピーダンスの複素數で割つて見ると直ちに知れる譯である。

$$\cos\theta=\frac{4}{2\sqrt{5}}=0.893$$

次に此の回路に100ヴォルトの電壓をかけた場合の電流を計算して見る。是はヴォルトを合成インピーダンスの複素數で割つてもよいけれ共合成インピーダンスの大きさで割つても一向に差支へはない。此の場合は兩方を行つて見るが先づ電壓を合成インピーダンスの大きさで割つて見る。

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{100}{2\sqrt{5}}=22.35\ \text{アンペア}$$

今度は合成インピーダンスを複素數で表はしたもので割つて

見る。

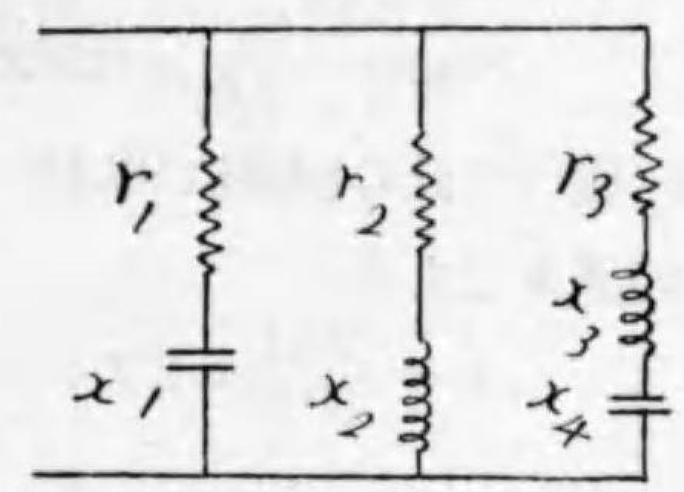
$$\dot{I}=\frac{\dot{V}}{\dot{Z}}=\frac{100}{4+j2}=\frac{100(4+j2)}{(4-j2)(4+j2)}$$

$$=\frac{100(4+j2)}{16+4}=5(4+j2)=20+j10$$

此の電流の複素數を見てもjの前がプラスであるから此の回路の力率が進力率である事が知れる、此の電流を大きさで表はして見ると前に出した電流と同じものになる事が知られる。

$$I=\sqrt{20^2+10^2}=\sqrt{500}=22.35\ \text{アンペア}$$

次に第155圖に示す様な回路の合成インピーダンスを求めて見る。此の場合に抵抗r_1は10オームr_2は20オーム、r_3は30オームとし誘導リアクタンスx_2は40オーム、x_3は70オーム又容量リアクタンスx_1は30オームx_4も30オームとする



第 155 圖

此の場合の合成インピーダンスZは第76式より次の通りになる。但し$Z_1 Z_2 Z_3$は夫々左側からの分岐回路のインピーダンスである。

$$\dot{Z}=\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

然るに$\dot{Z}_1=10-j30=10(1-j3)$

$$\dot{Z}_2=20+j40=10(2+j4)$$

$$\dot{Z}_3=30+j(70-30)=30+j40=10(3+j4)$$

$$\therefore\quad \dot{Z}=\frac{1000(1-j3)(2+j4)(3+j4)}{100\{(1-j3)(2+j4)+(2+j4)(3+j4)+(1-j3)(3+j4)\}}$$

$$=\frac{10(14-j2)(3+j4)}{(2+j4)(4+j1)+(1-j3)(3+j4)}$$

$$=\frac{10(42-j6+j56+8)}{8+j16+j2-4+3-j9+j4+12}$$

$$=\frac{10(50+j50)}{19+j13}=\frac{500(1+j1)(19-j13)}{(19+j13)(19-j13)}$$

$$=\frac{500(32+j6)}{530}=\frac{100(16+j3)}{53}$$

故に之を大きさで表はすと次の通りになる。

$$Z=\frac{100\sqrt{16^2+3^2}}{53}=\frac{100\sqrt{265}}{53}=30.7\text{ オーム}$$

力率は次の通りで進力率である。

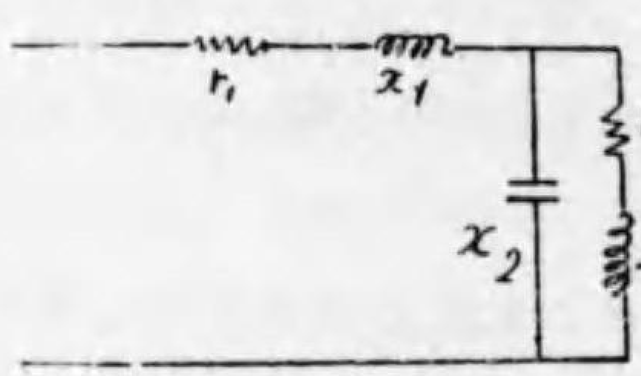
$$\cos\theta=\frac{16}{\sqrt{265}}=0.982$$

従つて此の回路に 92.1ヴォルトを加へる時に流れる電流は次の通りである。

$$I=\frac{92.1}{30.7}=3\text{アンペア}$$

3. 複雑な回路

今度は並列回路に直列にインピーダンスが存在する場合の合成インピーダンスを求める方法を述べる。例へば第 156 圖の如き回路の合成インピーダンスを求めて見る。今抵抗 r_1 を 2 オーム、r_2 を 4 オームとし誘導リアクタンス x_1 を 1 オーム、x_3 を 3 オーム、容量リアクタンス x_2 を 5 オームとする。



第 1 5 6 圖

此の回路の合成インピーダンスは直列インピーダンスを Z_1 並列のインピーダンスを夫々 Z_2Z_3 とすれば前に示した第78式より次の通りになる。

$$\dot{Z}=\dot{Z}_1+\frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

$$\dot{Z}_1=r_1+jx_1=2+j1 \qquad \dot{Z}_2=-jx_2=-j5$$

$$\dot{Z}_3=r_2+jx_3=4+j3$$

$$\therefore\ \dot{Z}=2+j1+\frac{-j5(4+j3)}{-j5+4+j3}=2+j1+\frac{5(-j4+3)}{4-j2}$$

$$=2+j1+\frac{5(3-j4)(4+j2)}{(4-j2)(4+j2)}=2+j1+\frac{5(20-j10)}{20}$$

$$=2+j1+\frac{10-j5}{2}=\frac{4+j2+10-j5}{2}=\frac{14-j3}{2}$$

Zの大きさは次の通りになる。

$$Z=\frac{\sqrt{14^2+3^2}}{2}=\frac{\sqrt{205}}{2}=7.16\text{ オーム}$$

力率は次の通りで進力率である。

$$\cos\theta=\frac{14}{\sqrt{205}}=0.978$$

若し此の回路に電壓 100 ヴォルトを加へれば流れる電流は次の通りである。

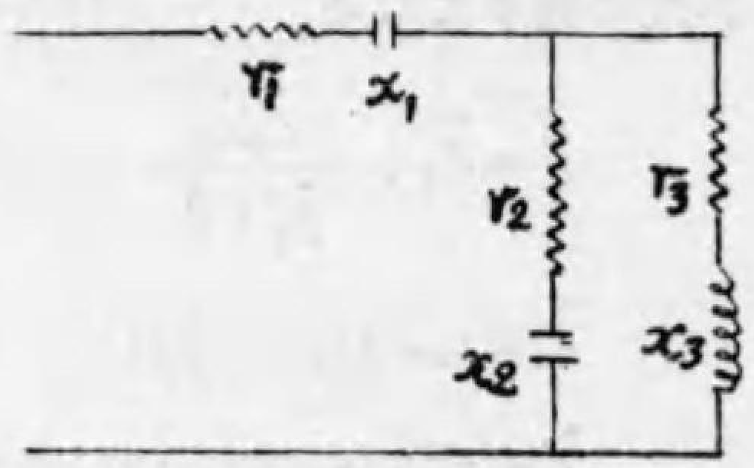
$$I=\frac{V}{Z}=\frac{100}{7.16}=13.96\text{ アンペア}$$

$$\text{又は}\ \dot{I}=\frac{\dot{V}}{\dot{Z}}=\frac{100}{\frac{14-j3}{2}}=\frac{200(14+j3)}{(14-j3)(14+j3)}$$

$$=\frac{200(14+j3)}{205}=\frac{40(14+j3)}{41}$$

$$I=\frac{40\sqrt{14^2+3^2}}{41}=\frac{40\sqrt{205}}{41}=13.96\text{ アンペア}$$

今度は第 157 圖の如き回路の合成インピーダンスを求めて見る。此の場合に r_1 は 2 オーム、r_2 は 3 オーム、r_3 は 5 オーム、x_1 は 3 オーム、x_2 は 5 オーム、x_3 は 9 オームとする。此の合成インピーダンスも前と同じ式によつて求める。



第 157 圖

$$\dot{Z}=\dot{Z}_1+\frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

$$\dot{Z}_1=r_1-jx_1=2-j3$$

$$\dot{Z}_2=r_2-jx_2=3-j5$$

$$\dot{Z}_3=r_3+jx_3=5+j9$$

$$\therefore\quad \dot{Z}=2-j3+\frac{(3-j5)(5+j9)}{3-j5+5+j9}$$

$$=2-j3+\frac{(60+j2)(8-j4)}{(8+j4)(8-j4)}$$

$$=2-j3+\frac{488-j224}{80}$$

$$=\frac{648-j464}{80}=\frac{81-j58}{10}$$

$$\therefore\quad Z=\frac{\sqrt{81^2+58^2}}{10}=\frac{\sqrt{9925}}{10}=9.96\ \text{オーム}$$

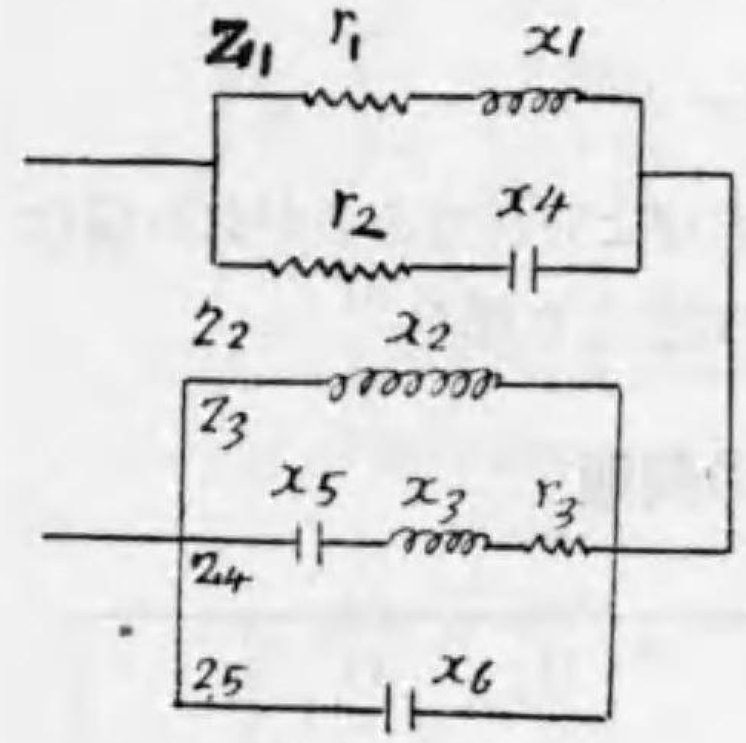
力率は次の通りで進力率を取る。

$$\cos\theta=\frac{8.1}{9.96}=0.814$$

今此の回路に 100 ヴォルトの電壓を加へるならば流れる電流は次の通りである

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{100}{9.96}=10.02\ \text{アンペア}$$

次には第 158 圖に示した様な複雜なる回路の合成インピーダンスを求める事とする。此の回路の合成インピーダンスは前に述べた回路の合成インピーダンスと同様に次の式で表はされる



第 1 5 8 圖

$$\dot{Z}=\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2}+\frac{\dot{Z}_3\dot{Z}_4\dot{Z}_5}{\dot{Z}_3\dot{Z}_4+\dot{Z}_4\dot{Z}_5+\dot{Z}_3\dot{Z}_5}$$

今上の回路の r_1 を 3 オーム、r_2 を 5 オーム、r_3 を 6 オームとし x_1 を 6 オーム、x_2 を 8 オーム、x_3 を 5 オーム、x_4 を 2 オーム、x_5 を 3 オーム、x_6 を 4 オームとする。是等の價によつて各回路のインピーダンスを求める。

$$\dot{Z}_1=r_1+jx_1=3+j6\qquad \dot{Z}_2=r_2-jx_4=5-j2$$

$$\dot{Z}_3=jx_2=j8$$

$$\dot{Z}_4=r_3+j(x_3-x_5)=6+j(5-3)=6+j2$$

$$\dot{Z}_5=-jx_6=-j4$$

$$\therefore\quad \dot{Z}=\frac{(3+j6)(5-j2)}{3+j6+5-j2}+\frac{j8\times(6+j2)\times(-j4)}{j8(6+j2)-j4(6+j2)-j4\times j8}$$

$$=\frac{27+j24}{4(2+j1)}+\frac{32(6+j2)}{24+j24}$$

$$=\frac{(27+j24)(2-j1)}{4(2+j1)(2-j1)}+\frac{32(6+j2)(3-j3)}{8(3+j3)(3-j3)}$$

$$=\frac{54+j48-j27+24}{4(4+1)}+\frac{4(18+j6-j18+6)}{(9+9)}$$

$$=\frac{78+j21}{20}+\frac{4(24-j12)}{18}$$

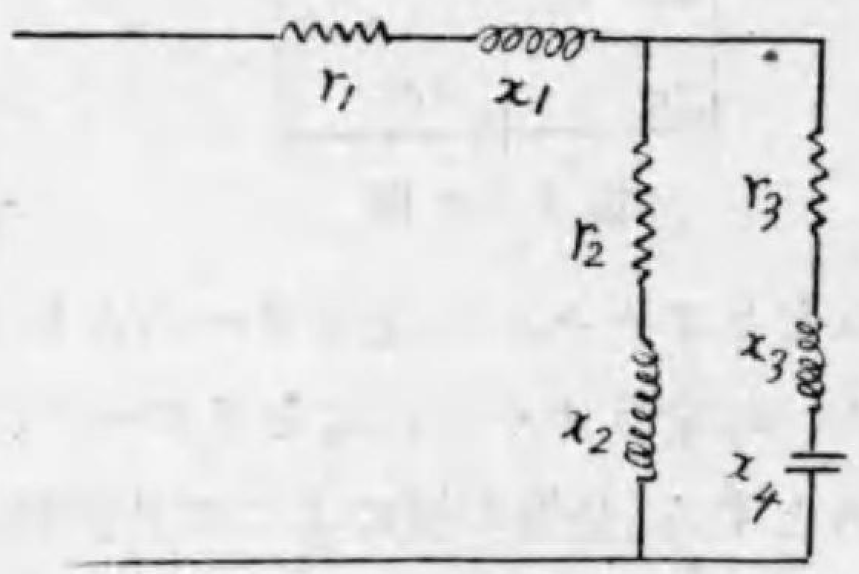
$$=\frac{78+j21}{20}+\frac{8(2-j1)}{3}=\frac{554-j97}{60}$$

$$\therefore \quad Z=\frac{\sqrt{554^2+97^2}}{60}=9.38\text{オーム}$$

力率は$\sqrt{554^2+97^2}$で554を割ればよい譯であるが此の場合には0.985になり僅かながら電流が電壓より進む。

4. 合成インピーダンスの例題

例 第159圖の接續に於てr_1は3オーム、r_2は7オーム、r_3は9オームであり、x_1は2オーム、x_2は9オーム、x_3は6オーム、x_4は3オームである。此の回路は100ヴォルトの電壓をかけると何アンペアの電流が流れるか。



第159圖

解 此の回路の合成インピーダンスは第78式から次の通りに求めらる。

$$\dot{Z}=\dot{Z}_1+\frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

$$\dot{Z}_1=r_1+jx_1=3+j2 \qquad \dot{Z}_2=r_2+jx_2=7+j9$$

$$\dot{Z}_3=r_3+j(x_3-x_4)=9+j(6-3)=9+j3$$

$$\therefore \quad \dot{Z}=3+j2+\frac{(7+j9)(9+j3)}{7+j9+9+j3}$$

$$=3+j2+\frac{63+j81+j21-27}{16+j12}$$

$$=\frac{48+j32+j36-24+63+j81+j21-27}{16+j12}=\frac{30+j85}{8+j6}$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{V}}{\dot{Z}}=\frac{100}{\frac{30+j85}{8+j6}}=\frac{100(8+j6)}{30+j85}$$

$$=\frac{100(8+j6)(30-j85)}{(30+j85)(30-j85)}=\frac{100(240+j180-j680+510)}{900+7225}$$

$$=\frac{100(750-j500)}{8125}=\frac{40(3-j2)}{13}$$

$$\therefore \quad I=\frac{40\sqrt{3^2+2^2}}{13}=\frac{40\sqrt{13}}{13}=11.1\text{アンペア}$$

$$\text{力率}=\frac{3}{\sqrt{13}}=0.832$$

5. アドミッタンス

アドミッタンス (Admittance) と云ふのは前にも述べた通りインピーダンスの逆數であつて之を式で書いて見ると次の通りである。但しZはインピーダンスYはアドミッタンスである。

$$Y=\frac{1}{Z} \qquad \text{又は}\ Z=\frac{1}{Y}\cdots\cdots\cdots\cdots(79)$$

次に**コンダクタンス**(Conductance)と**サスセプタンス**(Susceptance)なるものとについても既に述べたる所であつてコンダクタンスは抵抗をインピーダンスの二乗即ち抵抗の二乗とリアクタンスの二乗との和で割つたもの、サスセプタンスはリアクタンスをインピーダンスの二乗即ち抵抗の二乗とリアクタンスの二乗との和で割つたものである。今此の二つを式で表して見ると次の通りになる。但しrは抵抗、xはリアクタンスである。

$$\text{コンダクタンス}=g=\frac{r}{r^2+x^2}=\frac{r}{Z^2}\cdots\cdots(80)$$

$$\text{サスセプタンス}=\mathrm{b}=\frac{x}{\mathrm{r}^2+x^2}=\frac{x}{\mathrm{Z}^2}\cdots\cdots(81)$$

是等のアドミツタンスにしてもコンダクタンスにしてもサスセプタンスにしてもその單位は皆**モー**(Mho)なるものを用ひて居る。今此のコンダクタンス、サスセプタンスとアドミツタンスとの關係を記號式ベクターで表して見ると次の式が得られる。但し$\dot{\mathrm{Y}}$はアドミツタンスを記號式ベクターで表したものである。

$$\dot{\mathrm{Y}}=\frac{1}{\dot{\mathrm{Z}}}=\frac{1}{\mathrm{r}+\mathrm{j}x}=\frac{1}{\mathrm{r}+\mathrm{j}x}\times\frac{\mathrm{r}-\mathrm{j}x}{\mathrm{r}-\mathrm{j}x}$$

$$=\frac{\mathrm{r}-\mathrm{j}x}{(\mathrm{r}+\mathrm{j}x)(\mathrm{r}-\mathrm{j}x)}=\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}^2+x^2}-\mathrm{j}\frac{x}{\mathrm{r}^2+x^2}$$

$$=\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{Z}^2}-\mathrm{j}\frac{x}{\mathrm{Z}^2}=g-\mathrm{jb}$$

$$\therefore\quad \dot{\mathrm{Y}}=g-\mathrm{jb}\cdots\cdots\cdots\cdots(82)$$

從つてコンダクタンスを g で表すならばアドミツタンスを記號式ベクターで表したものは $g-\mathrm{jb}$ を以て示される。是よりして次の諸式も成立する譯である。

$$\dot{g}=\mathrm{Y}+\mathrm{jb}\cdots\cdots\cdots\cdots(83)$$

$$\dot{\mathrm{b}}=\mathrm{jY}-\mathrm{j}g\cdots\cdots\cdots\cdots(84)$$

$$\mathrm{r}+\mathrm{j}x=\frac{1}{g-\mathrm{jb}}\cdots\cdots\cdots\cdots(85)$$

6. 電流電壓の關係

此のアドミツタンス、コンダクタンス、サスセプタンスによつて電壓や電流等の關係を示すと次の通りの關係がある。

$$\dot{\mathrm{I}}=\frac{\dot{\mathrm{V}}}{\dot{\mathrm{Z}}}=\dot{\mathrm{Y}}\dot{\mathrm{V}}\cdots\cdots\cdots\cdots(86)$$

$$\text{又は}\ \dot{\mathrm{I}}=(g-\mathrm{jb})\dot{\mathrm{V}}\cdots\cdots\cdots\cdots(87)$$

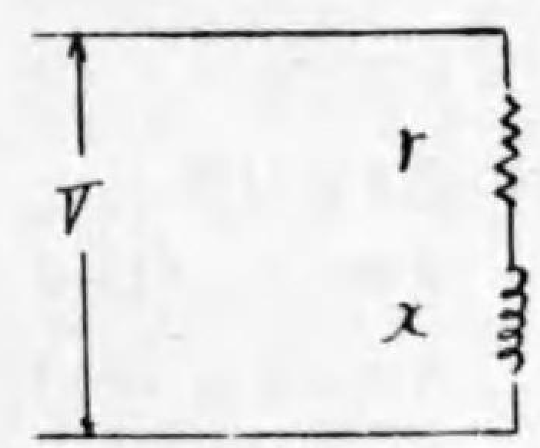
普通に交流理論の計算を行ふにはインピーダンスを使用して行ひ別にアドミツタンス等を使用する必要もないけれ共場合によつてはアドミツタンスを使用する。然しインピーダンスによつて行ふにしてもアドミツタンスによつて行ふにしても別に變つた所はないのであつて今その計算の例を示して見よう。先づ第160圖に於て抵抗 r は4オーム、リアクタンス x は2オームとし此の回路に電壓80ヴオルトを加へた場合の計算を行つて見る。

$$g=\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r}^2+x^2}=\frac{4}{4^2+2^2}$$

$$=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}\ \text{モー}$$

$$\mathrm{b}=\frac{x}{\mathrm{r}^2+x^2}=\frac{2}{4^2+2^2}$$

$$=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}\ \text{モー}$$



第160圖

是でコンダクタンス g とサスセプタンス b とが知れた譯で今度はアドミツタンスを複素數で表したものをYとし之を求めて見る。

$$\dot{\mathrm{Y}}=g-\mathrm{jb}=\frac{1}{5}-\mathrm{j}\frac{1}{10}=\frac{1}{10}(2-\mathrm{j}1)$$

從つて電壓Vを基線にとれば電流 I は次の通りになる。

$$\dot{\mathrm{I}}=\dot{\mathrm{Y}}\dot{\mathrm{V}}=\frac{1}{10}(2-\mathrm{j}1)\times80=8(2-\mathrm{j}1)$$

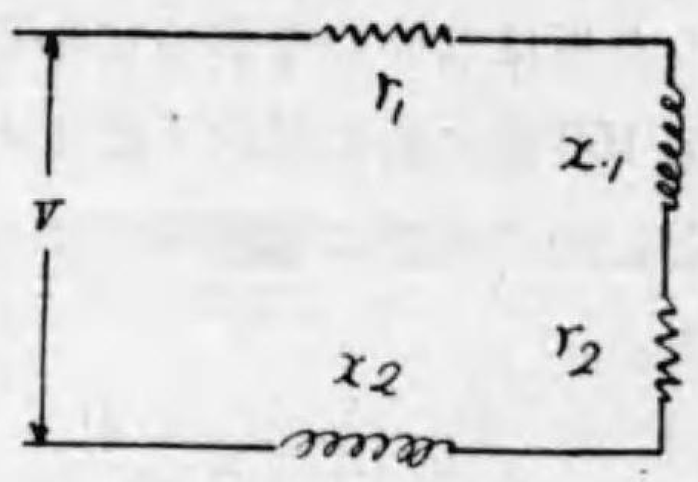
電流 I は次の如くしてその大きさを計算する事が出來、力率

は$\frac{g}{Y}$を以て表される。

$$I=8\sqrt{2^2+1^2}=8\sqrt{5}=8\times 2.236=17.888\ \text{アンペア}$$

$$\text{力率}=\frac{g}{Y}=\frac{1}{5}\times\frac{10}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=0.895$$

次に直列回路の計算に此のアドミッタンスを使用して行はんとするならば今行つた方法と同じ方法で行ふのである。先づ第161圖に於て抵抗r_1は1オーム、r_2は3オーム、リアクタンスx_1は2オーム、x_2は1オームとし之に交流100ヴォルトを與へた場合の電流を求めて見る。此の場合の全抵抗をRとし全リアクタンスをXとすればコンダクタンスg及びサスセプタンスbは次の通りになる。



第161圖

$$R=r_1+r_2=1+3=4\text{オーム}$$

$$X=x_1+x_2=2+1=3\text{オーム}$$

$$g=\frac{R}{R^2+X^2}=\frac{4}{4^2+3^2}=\frac{4}{25}$$

$$b=\frac{X}{R^2+X^2}=\frac{3}{4^2+3^2}=\frac{3}{25}$$

是よりアドミッタンスYを求める。

$$\dot{Y}=\frac{4}{25}-j\frac{3}{25}=\frac{1}{25}(4-j3)$$

今電壓Vのベクターを基線に取れば電流のベクターは次の式で表さる。

$$\dot{I}=\dot{V}\dot{Y}=100\times\frac{1}{25}(4-j3)=4(4-j3)$$

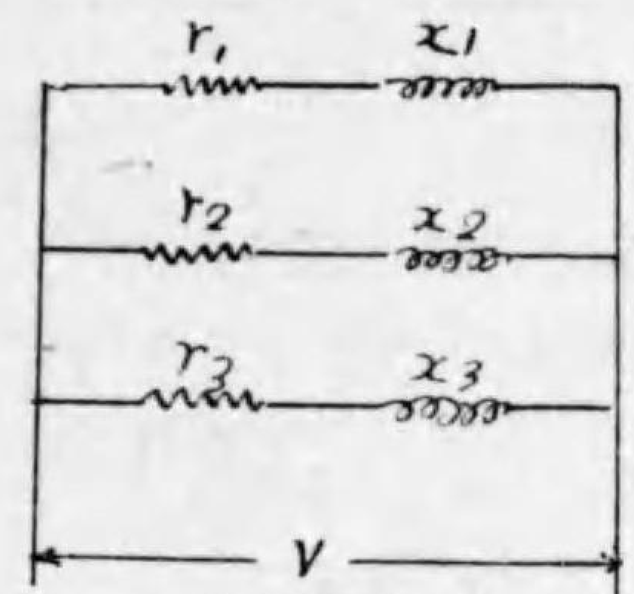
電流Iの大きさと力率とは次の通りになる。

$$I=4\sqrt{4^2+3^2}=4\times\sqrt{25}=4\times 5=20\ \text{アンペア}$$

$$\text{力率}=\frac{g}{Y}=\frac{4}{25}\times\frac{25}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}=0.8$$

7. 並　列　回　路

直列回路の計算を行ふには別にアドミッタンスを使用した所で便利なと云ふ點はないけれ共並列回路の計算には合成アドミッタンスが直ちに出て來るのでアドミッタンスを使用して計算を行つた方が便利である。今假りに第162圖の如き並列回路があるとする。今此の回路のアドミッタンスを夫々Y_1 Y_2 Y_3としコンダクタンスを夫々g_1 g_2 g_3を以て表しサスセプタンスを夫々b_1 b_2 b_3を以て表す。さうすると此の回路の合成アドミッタンスYは次の式を以て表す事が出來るのである。



第162圖

$$\dot{Y}=\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3=(g_1+g_2+g_3)-j(b_1+b_2+b_3)\cdots(88)$$

インピーダンスでやれば直列回路に於ける合成インピーダンスが是と同じ性質を有して居て$\dot{Z}$が$(r_1+r_2+\cdots)+j(x_1+x_2+\cdots\cdots)$で表はされるのと同じやうな形である。所で抵抗やリアクタンス等を以て合成インピーダンスを求めるには此のやうに簡單には行かないので並列回路はアドミッタンスで計算した方が樂になる。

今抵抗r_1を3オーム、r_2を2オーム、r_3を4オームとし誘導リアクタンスx_1を4オーム、x_2を6オーム、として今誘導リア

クタンスx_3を容量リアクタンスと考へて此の容量リアクタンスx_3を２オームとす。此の場合に交流電壓Vを100ヴォルトとすれば全電流は何アンペアなるか。此の場合の合成アドミッタンスYを求めて見ると次の通りになる。

$$g_1=\frac{r_1}{r_1^2+x_1^2}=\frac{3}{3^2+4^2}=\frac{3}{25}$$

$$g_2=\frac{r_2}{r_2^2+x_2^2}=\frac{2}{2^2+6^2}=\frac{2}{40}$$

$$g_3=\frac{r_3}{r_3^2+x_{32}}=\frac{4}{4^2+2^2}=\frac{4}{20}$$

$$b_1=\frac{x_1}{r_1^2+x_1^2}=\frac{4}{25}$$

$$b_2=\frac{x_2}{r_2^2+x_2^2}=\frac{6}{40}$$

$$b_3=\frac{x_3}{r_3^2+x_3^2}=\frac{2}{20}$$

$$\begin{aligned}\dot{Y}&=(g_1+g_2+g_3)-j(b_1+b_2-b_3)\\&=\frac{3}{25}+\frac{2}{40}+\frac{4}{20}-j\left(\frac{4}{25}+\frac{6}{40}-\frac{2}{20}\right)\\&=\frac{12+5+20}{100}-j\,\frac{16+15-10}{100}=\frac{1}{100}(37-j21)\end{aligned}$$

$$\dot{I}=\dot{V}\,\dot{Y}=100\times\frac{1}{100}(37-j21)=37-j21$$

電流の大きさと力率とは次の通りになる。

$$I=\sqrt{37^2+21^2}=\sqrt{1810}=42.5\ \text{アンペア}$$

$$\text{力率}=\frac{g}{Y}=\frac{\frac{37}{100}}{\frac{1}{100}\sqrt{37^2+21^2}}=\frac{37}{42.5}=0.87$$

8. アドミツタンスの例題

例 1. コンダクタンスが0.4モーにしてサスセプタンスが0.3モーであつて此の二つが直列に接續されて居るアドミッタンスがある。今此のアドミッタンスに5アンペアの電流が流れて居るとするならばその兩端の電壓は何程なるか。

解 第86式及び第87式を變化すると電壓Vの記號式ベクターは次の式で表はされる。

$$\dot{V}=\frac{\dot{I}}{\dot{Y}}=\frac{\dot{I}}{g-jb}$$

今此の回路に流れる電流を基線に取りgのコンダクタンスとbのサスセプタンスに夫々の數値を代入すると次の通りVが求められる。

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\frac{5}{0.4-j0.3}=\frac{5(0.4+j0.3)}{(0.4-j0.3)(0.4+j0.3)}\\&=\frac{5(0.4+j0.3)}{0.4^2+0.3^2}=20(0.4+j0.3)=8+j6\end{aligned}$$

是でVを複素數で表したものが求められた譯で電壓の大きさは次の通りである。

$$V=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10\text{ヴォルト}$$

力率は次の通りで電壓のベクターが基線より進んで居るから遲力率である。

$$\text{力率}=\frac{g}{Y}=\frac{0.4}{\sqrt{0.4^2+0.3^2}}=\frac{0.4}{0.5}=0.8$$

例 2. 抵抗8オームとキヤパシチー 0.00053フアラッドとが直列にある回路がある。今此の回路に電壓100ヴォルト50サイクルをかけると何程の電流が流れるか、又その力率は

何程か。

解 先づ容量リアクタンスを求むれば次の通りである。

$$x=\frac{1}{2\pi f\times c}=\frac{1}{314\times 0.00053}=6\text{オーム}$$

是よりコンダクタンスとサスセプタンスとは次の通りになる

$$g=\frac{r}{r^2+x^2}=\frac{8}{8^2+6^2}=\frac{8}{100}=0.08$$

$$b=\frac{x}{r^2+x^2}=\frac{6}{8^2+6^2}=\frac{6}{100}=0.06$$

第82式よりしてアドミツタンスYのベクターが求められるべきであつて此の場合サスセプタンスはキヤパシチーのみであるからインダクタンスのみの場合と逆の符號を取り第82式のbに入れる數値はマイナスとなる。

$$\dot{Y}=g-jb=0.08-j(-0.06)=0.08+j0.06$$

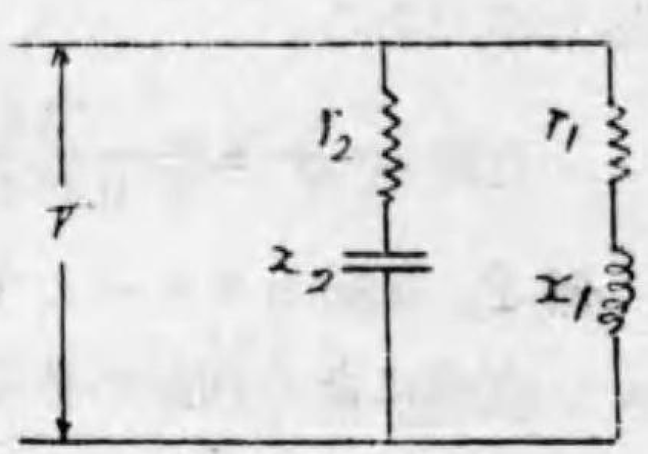
是より電流のベクターとその大きさ及び力率が夫々次の如く求めらる。

$$\dot{I}=\dot{V}\dot{Y}=100(0.08+j0.06)=8+j6$$

$$\therefore\quad I=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10\text{アンペア}$$

$$\text{力率}=\frac{g}{Y}=\frac{0.08}{\sqrt{0.08^2+0.06^2}}=\frac{0.08}{0.1}=0.8$$

例 3. 第163圖の如き回路があつて抵抗 r_1 は4オーム、r_2 は6オームである、誘導リアクタンス x_1 は8オーム、容量リアクタンス x_2 は2オームであるとするならば此の回路に80ヴオルトをかけたる場合の電流を求む。



第163圖

解 先づ各分岐回路のコンダクタンスとサスセプタンスとを求める。

$$g_1=\frac{r_1}{r_1^2+x_1^2}=\frac{4}{4^2+8^2}=\frac{4}{80}=0.05\text{モー}$$

$$b_1=\frac{x_1}{r_1^2+x_1^2}=\frac{8}{4^2+8^2}=\frac{8}{80}=0.1\text{モー}$$

$$g_2=\frac{r_2}{r_2^2+x_2^2}=\frac{6}{6^2+2^2}=\frac{6}{40}=0.15\text{モー}$$

$$b_2=\frac{x_2}{r_2^2+x_2^2}=\frac{2}{6^2+2^2}=\frac{2}{40}=0.05\text{モー}$$

是等の數値からしてアドミツタンス Y_1 と Y_2 とが見出される譯で此の場合に x_2 なるリアクタンスはキヤパシチーによるものであるからサスセプタンスはその符號を逆にしなければならない

$$\dot{Y}_1=g_1-jb_1=0.05-j0.1$$

$$\dot{Y}_2=g_2-jb_2=0.15-j(-0.05)=0.15+j0.05$$

合成アドミツタンスYは次の通りになる。

$$\dot{Y}=\dot{Y}_1+\dot{Y}_2=0.05-j0.1+0.15+j0.05=0.2-j0.05$$

$$\therefore\quad \dot{I}=\dot{V}\dot{Y}=80(0.2-j0.05)=8(2+j0.5)$$

$$\therefore\quad I=8\sqrt{2^2+0.5^2}\fallingdotseq 8\times 2.06\fallingdotseq 16.48\text{アンペア}$$

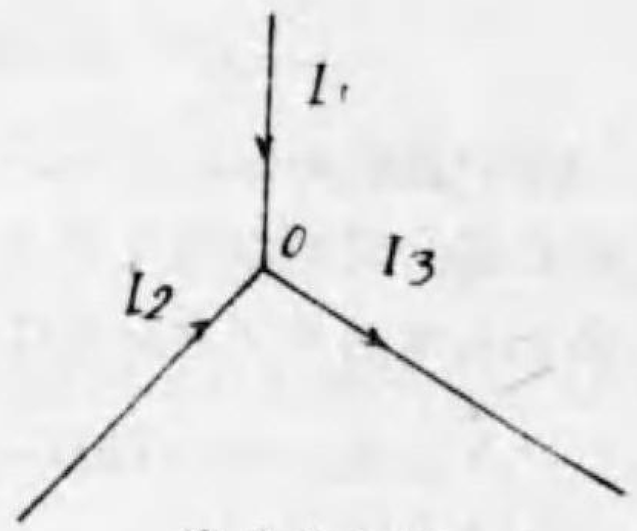
第十二章 キルヒホツフの法則

1. 交流回路への應用

直流回路に於てはキルヒホツフの法則を使用して如何なる複雜なる導線網の計算でも熱心に解いて行けば解決出來るものである。所が交流に於てはリアクタンスのために電壓と電流との

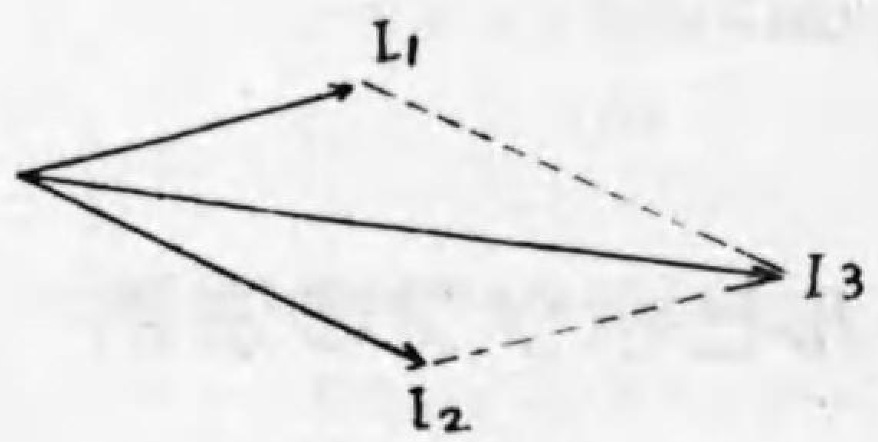
相が一致して來ない。從つて電流や電壓を實效値で表し之に直ちにキルヒホツフの法則を應用すると大變な誤りが出來て來る。例へば第164圖に於てOなる點に向つてI_1とI_2が入つて來て居りI_3が是より出て行くと云ふ場合にキルヒホツフの第一法則を應用して是等の電流を直ちに實效値を以て表して次の如く書き表すならば大變な誤りを生ずる。

$$I_1+I_2-I_3=0$$



第164圖

此の式が何故悪いかと云ふ事は既に何回も述べた所であるがベクターの關係を考へて見ても直ちに知られる。例へばI_1が5アンペアでI_2が7アンペアとした所で此の二つの電流を加へても12アンペアにはならない。尤も力率が相等しい場合には12アンペアになるけれ共一般の場合には必ず12アンペアより小さくなる。之をベクターで書いて見ると第165圖のやうになり、I_1とI_2の合成電流I_3はI_1とI_2との算術的和よりも小さくなつて居る。交流回路にキルヒホツフの法則が直接應用出來ないと云ふのも全く是と變らない理由からである。所が此の電流なり電壓なりを全部ベクターで表すならば直流に於ける計算と全く同じ方法で計算する事が出來るものである。ベクターを數字なり文字なりに表したものが複素數即ち記號式ベクターであるから電流なり電壓なりを複素數で表すな



第165圖

らば交流の計算も直流に於ける計算と同樣に取扱ふ事が出來る。即ち交流回路に於ける電流や電壓又はインピーダンスを全部複素數で表すならばキルヒホツフの法則も交流回路の計算に使用する事が出來るのである。

2. キルヒホツフの法則

今第164圖に示した如く一點Oに$I_1\ I_2\ I_3$が流れて居るとする。此の場合に是等の電流を次の如く複素數で表して見る。

$$\dot{I}_1=i_1+ji_1' \qquad \dot{I}_2=i_2+ji_2' \qquad \dot{I}_3=i_3+ji_3'$$

さうすれば此の電流の關係は次の式で表される。

$$\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=i_1+i_2+i_3+j(i_1'+i_2'+i_3')=0$$

是によつてキルヒホツフの第一法則は直ちに交流にも應用せられる譯で之を一般式で表すならば次の通りになる。但し$\dot{I}$とか$\dot{I}_1\dot{I}_2\dot{I}_3$等は何れも皆複素數で表されたものである。

$$\Sigma\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3+\cdots\cdots=0\cdots\cdots(88)$$

但し $\Sigma\dot{I}$……電流の總和

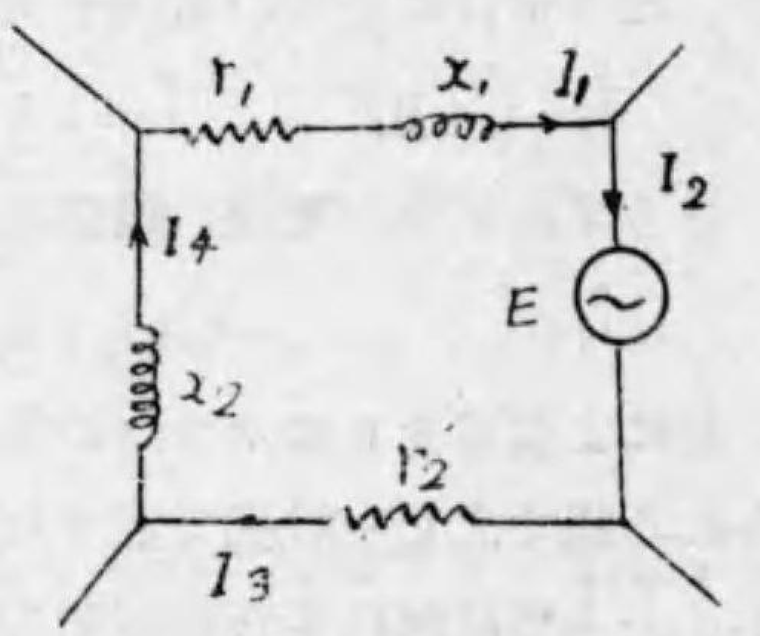
是がキルヒホツフの第一法則を交流に應用した式である。即ち複素數で電流を表す時是れ等の電流が一點に出入する場合は是等の電流の總和は零となるのである。此の式の應用に於ても中心の點に向つて進んで來る電流にはプラスの符號を與へ中心の點より出て行く電流にはマイナスの符號を與へる事は直流に於ける場合と同樣である。又此の電流の方向は直流の場合と同樣に此の法則を使用する前に豫め之を定めてそれから計算に取かゝらなければならない。

次にキルヒホツフの第二法則であるが是も電流、電壓、イン

ピーダンスを複素數で表すならば交流回路に直接應用する事が出來る。卽ち一つの循環回路に於てはその電壓降下の總和は起電力の總和に等しいと云ふ第二法則が應用し得られるのであつて例へば第166圖の如き環狀交流回路に於て電流 $I_1 I_2 I_3 I_4$ を夫々複素數で表し起電力 E をも複素數で表すならば之を次の如く書き表す事が出來る。

$$\dot{I}_1(r_1+jx_1)+\dot{I}_3r_2+j\dot{I}_4x_2=\dot{E}$$

是は直流に於けるキルヒホッフの第二法則と全く同じで唯違ふ所は各邊の電流や電壓又はインピーダンスを全部複素數で表した丈である。此の場合に於ても各邊の電流や起電力は各々その方向を豫め定める必要があつて此の場合に



第166圖

電流の方向が時計の針の方向と同じ場合には電壓降下や起電力にプラスの符號を與へる。此の符號の事も直流に於けるキルヒホッフ第二法則の應用の場合とちつとも違はない。今此のキルヒホッフ第二法則を一般の形に書いて示すと次の通りになる。但し $\dot{I}$ は電流を複素數で表したもの、$\dot{Z}$ はインピーダンスを複素數で表したもの、$\dot{E}$ は起電力を複素數で表はしたものである。

$$\Sigma\dot{I}\dot{Z}=\Sigma\dot{E}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(89)$$

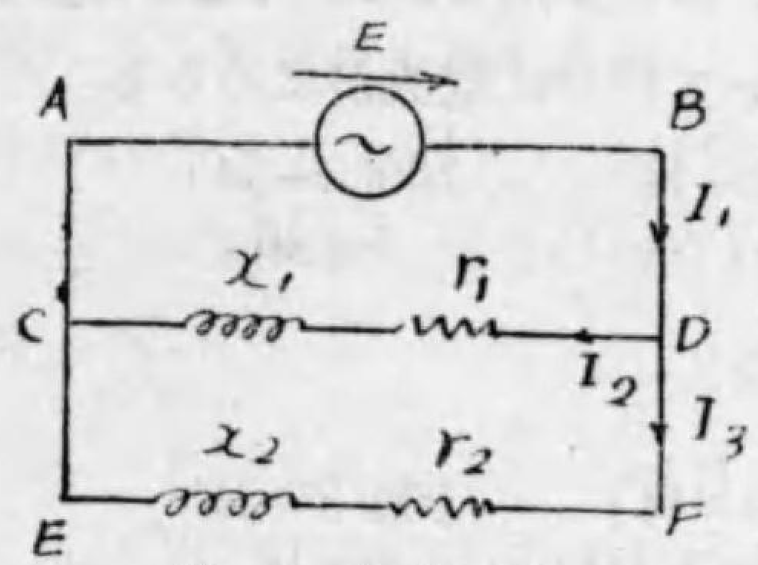
但　$\Sigma\dot{I}\dot{Z}$……………………電壓降下の總和

　　$\Sigma\dot{E}$……………………起電力の總和

2. 應用の方法

是れでキルヒホッフの法則を交流回路にも應用し得る事が知れた譯で第88式と第89式とを使用して計算を進むれば良い譯である。先づ比較的容易な回路に對して此の法則を應用する方法から計算の仕方を示す事とする。

先づ第167圖の如くリアクタンス x_1 と抵抗 r_1 との直列回路がリアクタンス x_2 と抵抗 r_2 との直列回路と並列になつて居る回路があるとする。此の回路に交流電壓 E を加へた時の各回路に流れる電流を求める、但し r_1 は2オーム x_1 は4オーム、r_2 は3オーム、x_2 は4オーム、E は 100 ヴオルトとする。



第167圖

此の問題を解くには別にキルヒホッフの法則を使用しなくても今迄の方法によつて容易に解く事が出來るのであるが此の法則の使用法として先づ容易な此の問題から練習する。此の問題を解くのにキルヒホッフの法則を應用しても結局は普通の並列回路の計算法で行ふ計算と同じになるものである。先づ圖のD點に第一法則を應用すると次の如くなるが $\dot{I}_1\,\dot{I}_2\,\dot{I}_3$ 等は何れも複素數で表はした電流である。

$$\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

次に ABDC 回路と ABFE 回路とに第二法則を應用すれば次の二式を得る。但し E は電壓を複素數で表したものである。

$$\therefore\quad \dot{I}_2(r_1+jx_1)=\dot{E}$$

$$\dot{I}_3(r_2+jx_2)=\dot{E}$$

此の二つの式に數値を入れて之を解いて見る。此の場合にベクターの基線には電壓を取る、從つて電壓は複素數で表はさない。

$$\dot{I}_2(2+j4)=100\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\dot{I}_3(3+j4)=100\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

之でキルヒホッフの第一法則と第二法則とが此の回路に應用せられた譯で此の三つの式を解いて行けば電流が求めらる。

(2)より $\dot{I}_2=\dfrac{100}{2+j4}=\dfrac{100(2-j4)}{(2+j4)(2-j4)}=\dfrac{100(2-j4)}{4+16}$

$$=\frac{100(2-j4)}{20}=5(2-j4)$$

(3)より $\dot{I}_3=\dfrac{100}{3+j4}=\dfrac{100(3-j4)}{(3+j4)(3-j4)}=\dfrac{100(3-j4)}{9+16}$

$$=\frac{100(3-j4)}{25}=4(3-j4)$$

(2)(3)を(1)に代入 $\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3=5(2-j4)+4(3-j4)$

$$=10-j20+12-j16=22-j36$$

是で I_1 I_2 I_3 を複素數で表した記號式のベクターが求められた譯でその大きさを計算すれば次の如く求められる。

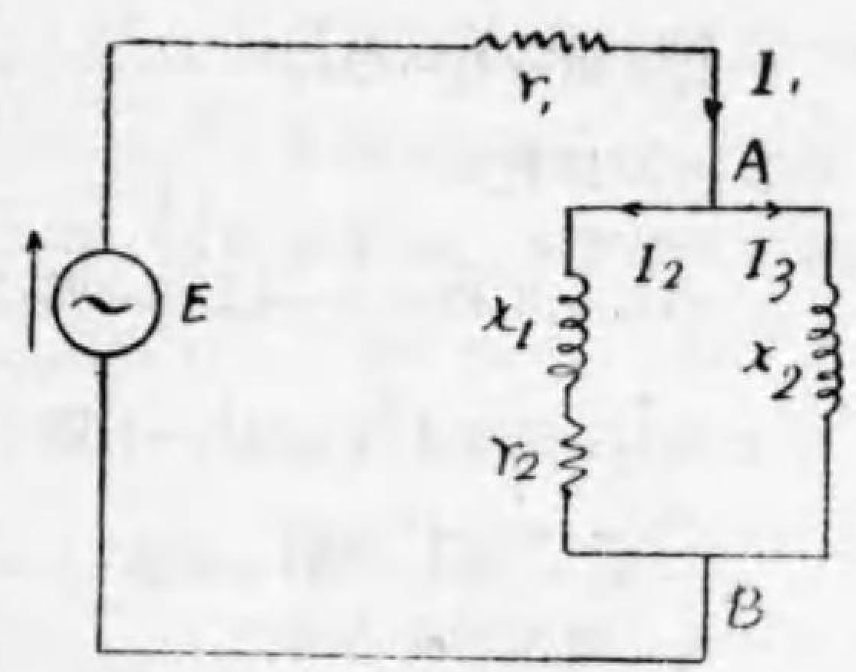
$I_1=5\sqrt{2^2+4^2}=5\sqrt{20}=10\sqrt{5}=22.35$ アンペア

$I_2=4\sqrt{3^2+4^2}=4\sqrt{25}=20$ アンペア

$I_3=\sqrt{22^2+36^2}=\sqrt{1780}=42.19$ アンペア

次に第168圖に示す通りの回路があるとする。此の回路の抵抗 r_1 は2オーム、r_2 は3オーム、インダクタンスによるリアクタンス x_1 は4オーム、x_2 は6オームとし之にかけられたる交流

電壓を60ヴォルトとすれば各回路に流れる電流は何アンペアなるかと云ふ問題を解いて見る。



第 1 6 8 圖

此の問題は記號式ベクター法によつて合成抵抗を求め之より全電流を計算し最後に I_2 I_3 を求める事も出來るけれ共キルヒホッフの法則を使用した方が却つて便利である。先づ圖の如く電流の方向を定めてA點に第一法則を適用する。

$$\dot{I}_1-\dot{I}_2-\dot{I}_3=0 \quad 又は \quad \dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3\cdots\cdots(1)$$

次に Er_1x_2 の回路に第二法則を使用すれば次の式が得られる。

$$\dot{I}_1r_1+j\dot{I}_3x_2=\dot{E}$$

又 $x_2r_2x_1$ の回路に此の第二法則を應用すると次の式が得られる。

$$j\dot{I}_3x_2-\dot{I}_2r_2-j\dot{I}_2x_1=0$$

此の二つの式に與へられた數値を代入して見ると次の二つの式が得られる。此の場合に基線に電壓を取り電壓は複素數で表はさない。

$$2\dot{I}_1+j6\dot{I}_3=60\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$j6\dot{I}_3-3\dot{I}_2-j4\dot{I}_2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)に(1)を代入 $2(\dot{I}_2+\dot{I}_3)+j6\dot{I}_3=60$

$$\dot{I}_2+\dot{I}_3+j3\dot{I}_3=30$$

$$\dot{I}_2=30-\dot{I}_3-j3\dot{I}_3\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4)を(3)に代入

$$j6\dot{I}_3-3(30-\dot{I}_3-j3\dot{I}_3)-j4(30-\dot{I}_3-j3\dot{I}_3)=0$$

$$j6\dot{I}_3-90+3\dot{I}_3+j9\dot{I}_3-j120+j4\dot{I}_3-12\dot{I}_3=0$$

$$-9\dot{I}_3+j19\dot{I}_3=90+j120$$

$$\dot{I}_3(j19-9)=90+j120$$

$$\therefore\ \dot{I}_3=\frac{90+j120}{j19-9}=\frac{(90+j120)(j19+9)}{(j19-9)(j19+9)}$$

$$=\frac{j1710-2280+810+j1080}{-361-81}=\frac{1470-j2790}{442}$$

$$\dot{I}_2=30-\frac{1470-j2790}{442}-j\frac{3(1470-j2790)}{442}$$

$$=\frac{13260-1470+j2790-j4410-8370}{442}=\frac{3420-j1620}{442}$$

$$\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3=\frac{1470-j2790}{442}+\frac{3420-j1620}{442}$$

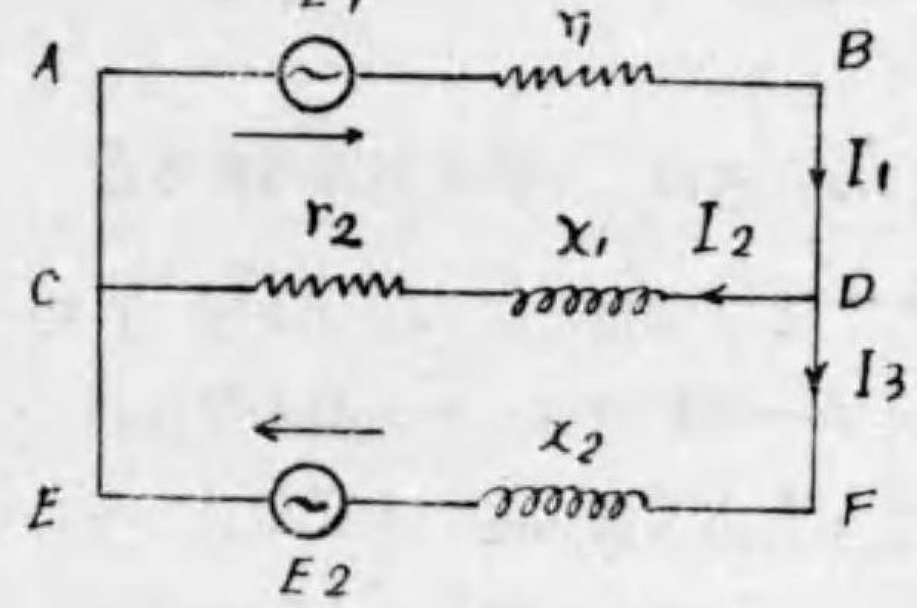
$$=\frac{4890-j4410}{442}$$

是で I_1 I_2 I_3 のベクターは求められた譯で此の電流の大きさは次の通りになる。

$$I_1=\frac{\sqrt{4890^2+4410^2}}{442}\fallingdotseq\frac{6590}{442}\fallingdotseq 14.9\ \text{アンペア}$$

$$I_2=\frac{\sqrt{3420^2+1620^2}}{442}\fallingdotseq\frac{3780}{442}=8.55\ \text{アンペア}$$

$$I_3=\frac{\sqrt{1470^2+2790^2}}{442}\fallingdotseq\frac{3150}{442}=7.13\ \text{アンペア}$$



第 1 6 9 圖

次に第169圖に於て抵抗 r_1 は1オーム、r_2 は3オーム、リアクタンス x_1 は4オーム、x_2 は2オームである、E_1 なる交流電壓は60ヴォルトで E_2 なる交流電壓は40ヴォルトで E_2 は E_1 より36.9度遲れて居るものと假定すれば各回路に流れる電流の求め方を示して見る。

先づ圖の如く電流の方向を定めてD點にキルヒホッフの第一法則を應用して見る。電流を複素數で表はせば次の式が得られる。

$$\dot{I}_1-\dot{I}_2-\dot{I}_3=0 \quad \text{又は} \quad \dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3\cdots\cdots(1)$$

次に ABCD 回路と CDFE 回路とに第二法則を適用すれば次の二式が得られる。

$$\dot{I}_1r_1+\dot{I}_2(r_2+jx_1)=\dot{E}_1$$

$$-\dot{I}_2(r_2+jx_1)+j\dot{I}_3x_2=\dot{E}_2$$

此の二つの式に與へられたる數値を代入するのであるが今 E_1 の電壓を基線に取れば之は複素數で表はさなくてもよい、然し E_2 の電壓は E_1 と同時に基線に取る事が出來ないので之は複素數で表はさなければならない。今 E_1 を基線に取れば E_2 は次のベクターで表はされる。

$$\dot{E}_2=40(\cos 36.9^\circ-j\sin 36.9^\circ)$$

然るに $\cos 36.9^\circ=0.8$, $\sin 36.9^\circ=0.6$

∴ $\dot{E}_2=40(0.8-j0.6)=32-j24$

又 $r_1=1$ $r_2=3$ $x_1=4$ $x_2=2$

是等の數値を前の式に入れると次の二つの式が得られる。

$$\dot{I}_1+\dot{I}_2(3+j4)=60 \cdots\cdots(2)$$

$$-\dot{I}_2(3+j4)+j2\dot{I}_3=32-j24 \cdots\cdots(3)$$

(1)を(2)に代入　$\dot{I}_2+\dot{I}_3+\dot{I}_2(3+j4)=60$

$$\dot{I}_3=60-4\dot{I}_2-j4\dot{I}_2 \cdots\cdots(4)$$

(4)を(3)に代入

$$-\dot{I}_2(3+j4)+j2(60-4\dot{I}_2-j4\dot{I}_2)=32-j24$$

$$-3\dot{I}_2-j4\dot{I}_2+j120-j8\dot{I}_2+8\dot{I}_2=32-j24$$

$$\dot{I}_2(5-j12)=32-j24-j120$$

$$\dot{I}_2=\frac{32-j144}{5-j12}=\frac{(32-j144)(5+j12)}{(5-j12)(5+j12)}$$

$$=\frac{160-j720+j384+1728}{169}=\frac{1888-j336}{169}$$

$$\dot{I}_3=60-4\times\frac{1888-j336}{169}-j4\times\frac{1888-j336}{169}$$

$$=\frac{10140-7552+j1444-j7552-1444}{169}=\frac{1144-j6108}{169}$$

$$\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3=\frac{1888-j336}{169}+\frac{1144-j6108}{169}$$

$$=\frac{3032-j6444}{169}$$

之より $I_1\ I_2\ I_3$ の大きさを求むれば次の答を得。

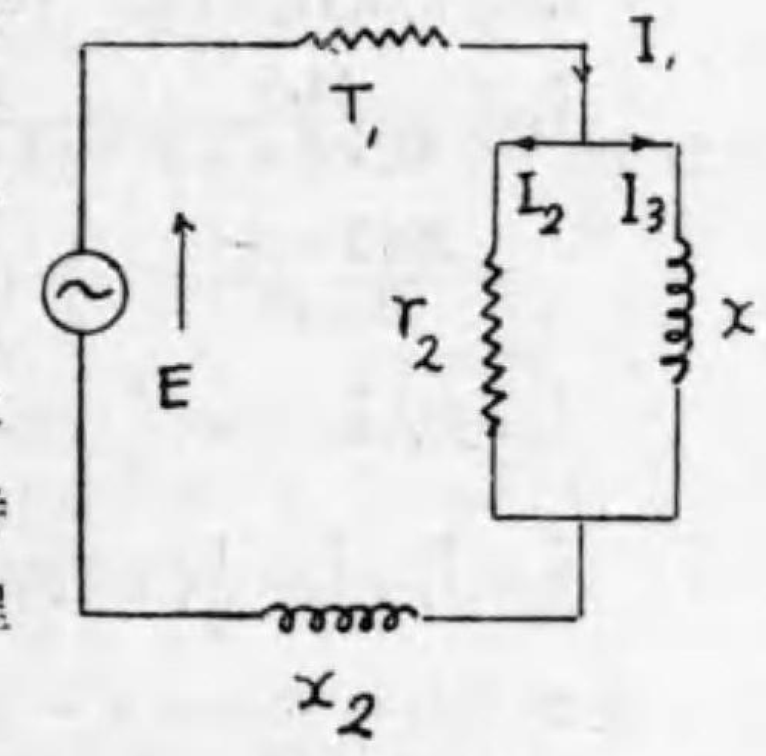
$$I_1=\frac{\sqrt{3032^2+6444^2}}{169}\fallingdotseq\frac{7120}{169}\fallingdotseq42 \text{ アンペア}$$

$$I_2=\frac{\sqrt{1888^2+336^2}}{169}\fallingdotseq\frac{1918}{169}=11.35 \text{ アンペア}$$

$$I_3=\frac{\sqrt{1144^2+6108^2}}{169}\fallingdotseq\frac{6220}{169}=36.8 \text{ アンペア}$$

3. 例　題

例 1. 第170圖の如く接續せられたる回路あり、r_1は2オーム、r_2は3オーム、リアクタンスx_1は1.5オーム、x_2は1オームである。今此の回路に電壓14.5ヴオルトを加へる時は各回路を流れる電流は何程なるか。



第170圖

解 先づキルヒホッフの第一法則を應用して次の式が求められる。

$$\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3 \cdots\cdots(1)$$

次に $Er_1r_2x_2$ の回路と r_2x_1 の並列回路とにキルヒホッフの第二法則を適用すれば次の二つの式が求められる。

$$\dot{I}_1r_1+\dot{I}_2r_2+j\dot{I}_1x_2=\dot{E}$$

$$j\dot{I}_3x_1-\dot{I}_2r_2=0$$

Eを基線に取り此の二つの式に與へられた數値を代入する。

$$2\dot{I}_1+3\dot{I}_2+j\dot{I}_1=14.5 \cdots\cdots(2)$$

$$j1.5\dot{I}_3=3\dot{I}_2 \cdots\cdots(3)$$

(3)より $\dot{I}_2=\frac{j1.5\dot{I}_3}{3}=j0.5\dot{I}_3 \cdots\cdots(4)$

(1)を(2)に代入 $2(\dot{I}_2+\dot{I}_3)+3\dot{I}_2+j(\dot{I}_2+\dot{I}_3)=14.5$

$$5\dot{I}_2+2\dot{I}_3+j\dot{I}_2+j\dot{I}_3=14.5 \cdots\cdots (5)$$

(4)を(5)に代入 $5\times j0.5\dot{I}_3+2\dot{I}_3-0.5\dot{I}_3+j\dot{I}_3=14.5$

$$1.5\dot{I}_3+j3.5\dot{I}_3=14.5 \qquad 0.5\dot{I}_3(3+j7)=14.5$$

$$\dot{I}_3=\frac{14.5}{0.5(3+j7)}=\frac{29(3-j7)}{(3+j7)(3-j7)}$$

$$=\frac{29(3-j7)}{9+49}=\frac{1}{2}(3-j7)$$

$$\dot{I}_2=j0.5\dot{I}_3=j\times\frac{1}{4}(3-j7)=\frac{1}{4}(j3+7)$$

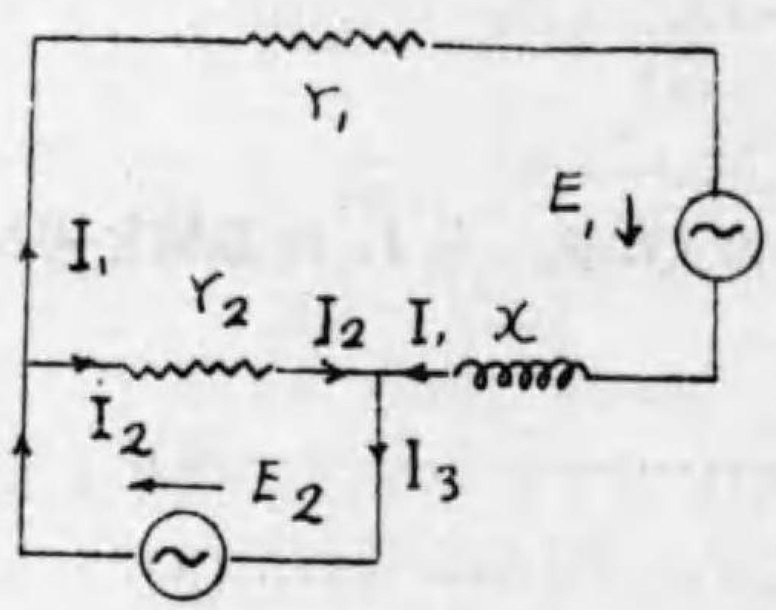
$$\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3=\frac{1}{2}(3-j7)+\frac{1}{4}(7+j3)=\frac{1}{4}(13-j11)$$

是で I_1 I_2 I_3 のベクターが求められた譯でその大きさを計算すると次の通りになる。

$$I_1=\frac{1}{4}\sqrt{13^2+11^2}=\frac{1}{4}\sqrt{290}\doteqdot 4.25 \text{ アンペア}$$

$$I_2=\frac{1}{4}\sqrt{3^2+7^2}=\frac{1}{4}\sqrt{58}=1.9 \text{ アンペア}$$

$$I_3=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+7^2}=\frac{1}{2}\sqrt{58}=3.8 \text{ アンペア}$$



第 1 7 1 圖

例 2. 今度は第171圖に示す通りの回路の計算を行つて見る、抵抗 r_1は3オーム、r_2は4オーム、リアクタンスxは2オームである。但し此の回路のE_1を10ヴォルト、E_2を15ヴォルトとなしE_2の電壓はE_1より36.9度遅れるもの

と假定する。

解 第一法則により次の式を得る。

$$\dot{I}_1+\dot{I}_2=\dot{I}_3 \cdots\cdots (1)$$

第二法則により次の式を得る。

$$\dot{I}_1r_1+j\dot{I}_1x-\dot{I}_2r_2=\dot{E}_1 \qquad \dot{I}_2r_2=\dot{E}_2$$

今$\dot{E}_1$を基線に取れば$\dot{E}_2$はE_2 (cos36.9°+jsin36.9°) で表はされ 15(0.8+j0.6) となる。

$$3\dot{I}_1+j2\dot{I}_1-4\dot{I}_2=10 \cdots\cdots (2)$$

$$4\dot{I}_2=15(0.8+j0.6) \cdots\cdots (3)$$

$$\therefore \quad \dot{I}_2=\frac{12+j9}{4}=\frac{3}{4}(4+j3)$$

(3)を(2)に代入 $3\dot{I}_1+j2\dot{I}_1-15(0.8+j0.6)=10$

$$\dot{I}_1(3+j2)=10+12+j9$$

$$\dot{I}_1=\frac{22+j9}{3+j2}=\frac{(22+j9)(3-j2)}{(3+j2)(3-j2)}$$

$$=\frac{66+j27-j44+18}{9+4}=\frac{84-j17}{13}$$

$$\dot{I}_3=\dot{I}_1+\dot{I}_2=\frac{3}{4}(4+j3)+\frac{84-j17}{13}$$

$$=\frac{156+j117+336-j68}{52}=\frac{492+j49}{52}$$

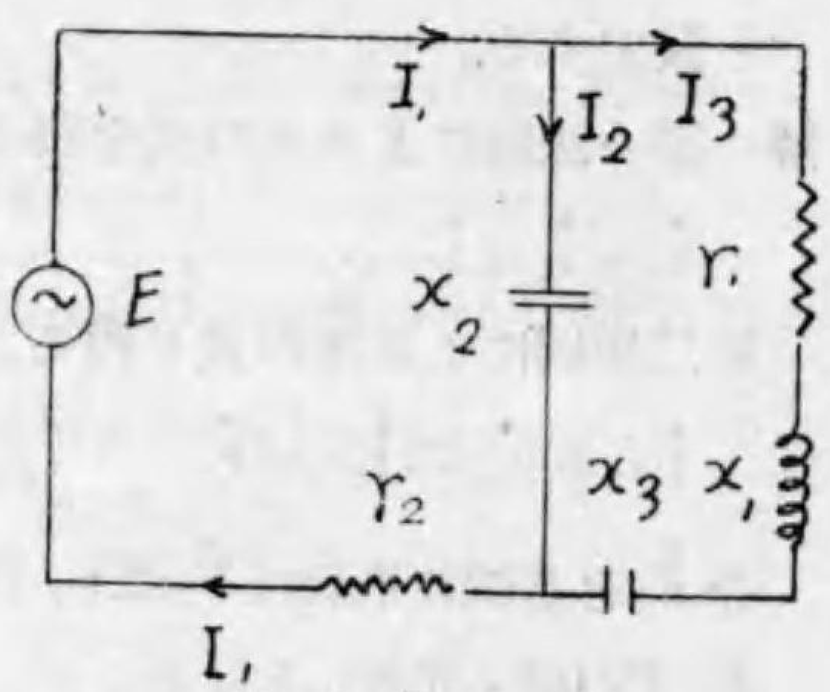
之より I_1 I_2 I_3 を求めるとその大きさは次の通りになる。

$$I_1=\frac{\sqrt{84^2+17^2}}{13}\doteqdot\frac{85.7}{13}\doteqdot 6.58 \text{ アンペア}$$

$$I_2=\frac{3}{4}\sqrt{4^2+3^2}=\frac{15}{4}=3.75 \text{ アンペア}$$

$$I_3=\frac{\sqrt{492^2+49^2}}{52}\doteqdot\frac{494.4}{52}\doteqdot 9.5 \text{ アンペア}$$

例 3. 第172圖の如き回路があつて抵抗 r_1 は4オーム、r_2 は2オーム、誘導リアクタンス x_1 は2オーム、容量リアクタンス x_2 は2オーム、x_3 は4オームである。今交流電壓Eを40ヴォルトとするならば各回路に流れる電流を求む。



第 1 7 2 圖

解 キルヒホッフの第一法則を使用して電流の關係を次の式で表す。

$$\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3 \quad \cdots\cdots(1)$$

次に第二法則を Ex_2r_2 の回路に適用して見る。此の場合電流の方向は何れも皆時計の方向であるから符號は皆プラスとなるべきである。所が容量リアクタンスは誘導リアクタンスの逆であるから之はマイナスの符號を持たなければならない。例へばキヤパシチーのみが存在する時のインピーダンスは $-j\frac{1}{\omega C}$ で表はされるものであつて之から考へても容量リアクタンスの符號は抵抗やインダクタンスによるリアクタンスの反對になる事が知れる。之よりして Ex_2r_2 の回路と $r_1x_1x_3x_2$ の回路とに此の法則を適用すると次の二式が得られる。

$$-j\dot{I}_2x_2+\dot{I}_1r_2=\dot{E}$$

$$\dot{I}_3r_1+j\dot{I}_3x_1-j\dot{I}_3x_3+j\dot{I}_2x_2=0$$

之に上の數値を入れEを基線に取れば次の通りになる。

$$-j2\dot{I}_2+2\dot{I}_1=40 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$4\dot{I}_3+j6\dot{I}_3-j4\dot{I}_3+j2\dot{I}_2=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

(1)式を(2)式に代入して之を整理し(4)式を得る。

$$-j\dot{I}_2+\dot{I}_2+\dot{I}_3=20$$

$$\dot{I}_2(1-j1)+\dot{I}_3=20 \quad \cdots\cdots(4)$$

(3)式を整理して之を(4)式に代入する。

$$-j2\dot{I}_2=4\dot{I}_3+j2\dot{I}_3$$

$$\dot{I}_2=\frac{4\dot{I}_3+j2\dot{I}_3}{-j2}=\frac{j4\dot{I}_3-2\dot{I}_3}{2}=j2\dot{I}_3-\dot{I}_3$$

$$\therefore\ (j2\dot{I}_3-\dot{I}_3)(1-j1)+\dot{I}_3=20$$

$$j2\dot{I}_3-\dot{I}_3+2\dot{I}_3+j\dot{I}_3+\dot{I}_3=20$$

$$2\dot{I}_3+j3I_3=20$$

$$\therefore\ \dot{I}_3=\frac{20}{2+j3}=\frac{20(2-j3)}{(2+j3)(2-j3)}=\frac{20(2-j3)}{13}$$

$$\dot{I}_2=\dot{I}_3(j2-1)=\frac{20(2-j3)(j2-1)}{13}$$

$$=\frac{20(j4+6-2+j3)}{13}=\frac{20(4+j7)}{13}$$

$$\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3=\frac{20(2-j3)}{13}+\frac{20(4+j7)}{13}$$

$$=\frac{20(2-j3+4+j7)}{13}=\frac{20(6+j4)}{13}$$

之によつて電流の I_1 と I_2 とは電流が電壓Eより進み I_3 は電壓より遲れる事が知られる。今回路全體の力率 $\cos\theta$ を示すと次の通りになる。又電流 $I_1\ I_2\ I_3$ 等の電流の大きさも夫々次の通りとなる。

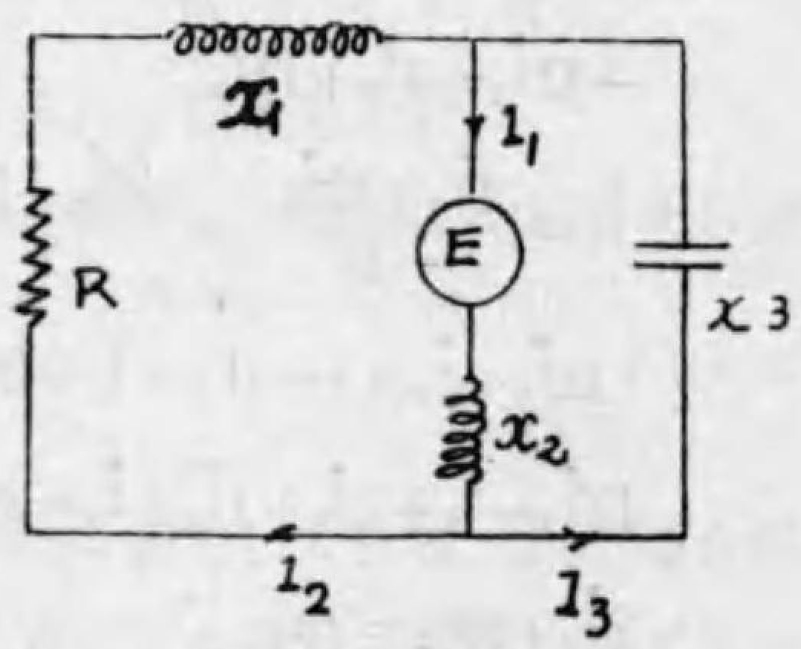
$$\cos\theta=\frac{6}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{6}{\sqrt{52}}=0.832$$

$$I_3=\frac{20\sqrt{2^2+3^2}}{13}=\frac{20\sqrt{13}}{13}=5.55\ \text{アンペア}$$

$$I_2=\frac{20\sqrt{4^2+7^2}}{13}=\frac{20\sqrt{65}}{13}=12.4\ \text{アンペア}$$

$$I_1=\frac{20\sqrt{6^2+4^2}}{13}=\frac{20\sqrt{52}}{13}=11.1\ \text{アンペア}$$

例 4. 第173圖の如き回路があつて抵抗 R_1 は2オーム、インダクタンスによるリアクタンスx_1は4オーム、x_2は12オーム、キヤパシチーによるリアクタンスx_3は6オームである。Eは交流起電壓であつて今此の交流起電壓の回路を流れる電流を10アンペアとすれば起電壓Eは何程なるか。



第 1 7 3 圖

解 圖の如く各回路を流れる電流を夫々 I_1, I_2, I_3 とする。而してEを流れる電流I_1をベクターの基線に取つて見ると此の電流は複素數で表はさなくてもよい事になり $\dot{I}_1=10$となる。次にキルヒホッフの第一法則により次の式が得られる。

$$\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3 \qquad \therefore\ \dot{I}_3=10-\dot{I}_2 \cdots\cdots\cdots(1)$$

今度はキルヒホッフの第二法則を Ex_2Rx_1 の回路と Ex_2x_3 との回路に應用するならば次の二つの方程式が得られる。

$$R\dot{I}_2+jx_1\dot{I}_2+jx_2\dot{I}_1=\dot{E}$$

$$jx_2\dot{I}_1-jx_3\dot{I}_3=\dot{E}$$

此の二つの方程式に數値を入れる。

$$2\dot{I}_2+j4\dot{I}_2+j12\dot{I}_1=\dot{E}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$j12\dot{I}_1-j6\dot{I}_3=\dot{E}\cdots\cdots\cdots(3)$$

此の二つの式に $\dot{I}_1=10$ と(1)式とを代入すると次の通りになる。

$$2\dot{I}_2+j4\dot{I}_2+j120=\dot{E}\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$j120-j6(10-\dot{I}_2)=\dot{E}$$

$$j120-j60+j6\dot{I}_2=\dot{E}$$

$$j60+j6\dot{I}_2=\dot{E}$$

$$-60-6\dot{I}_2=j\dot{E} \qquad 6\dot{I}_2=-60-j\dot{E}$$

$$\therefore\ \dot{I}_2=\frac{-60-j\dot{E}}{6}\cdots\cdots\cdots(5)$$

(5)式を(4)式に代入するとEが求めらる。

$$2\times\frac{-60-j\dot{E}}{6}+j4\times\frac{-60-j\dot{E}}{6}+j120=\dot{E}$$

$$\frac{-60-j\dot{E}}{3}+j2\times\frac{-60-j\dot{E}}{3}+j120=\dot{E}$$

$$-60-j\dot{E}-j120+2\dot{E}+j360=3\dot{E}$$

$$\dot{E}+j\dot{E}=j240-60$$

$$\therefore\ \dot{E}(1+j1)=60(j4-1)$$

$$\therefore\ \dot{E}=\frac{60(j4-1)}{1+j1}=\frac{60(j4-1)(1-j1)}{(1+j1)(1-j1)}$$

$$=\frac{60(j4-1+4+j1)}{2}=30(3+j5)$$

斯くてEのベクターが求められた譯で此の大きさは次の通りとなる。

$E=30\sqrt{3^2+5^2}\fallingdotseq30\times5.83\fallingdotseq175$ ヴォルト

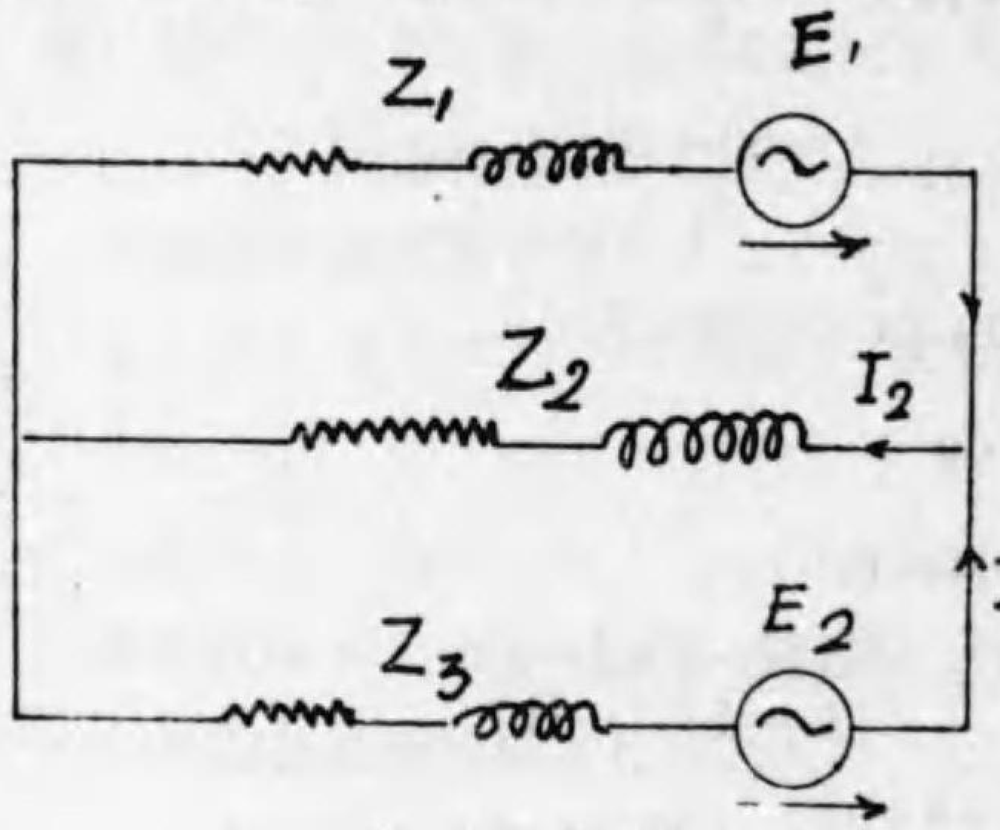
此の回路の力率は基線に取つた電流よりも電壓が進んで居る事を$\dot{E}$が示して居るので遲力率を取る。その力率は次の通りである。

$$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{3}{5.83}=0.514$$

第十三章 重疊の理

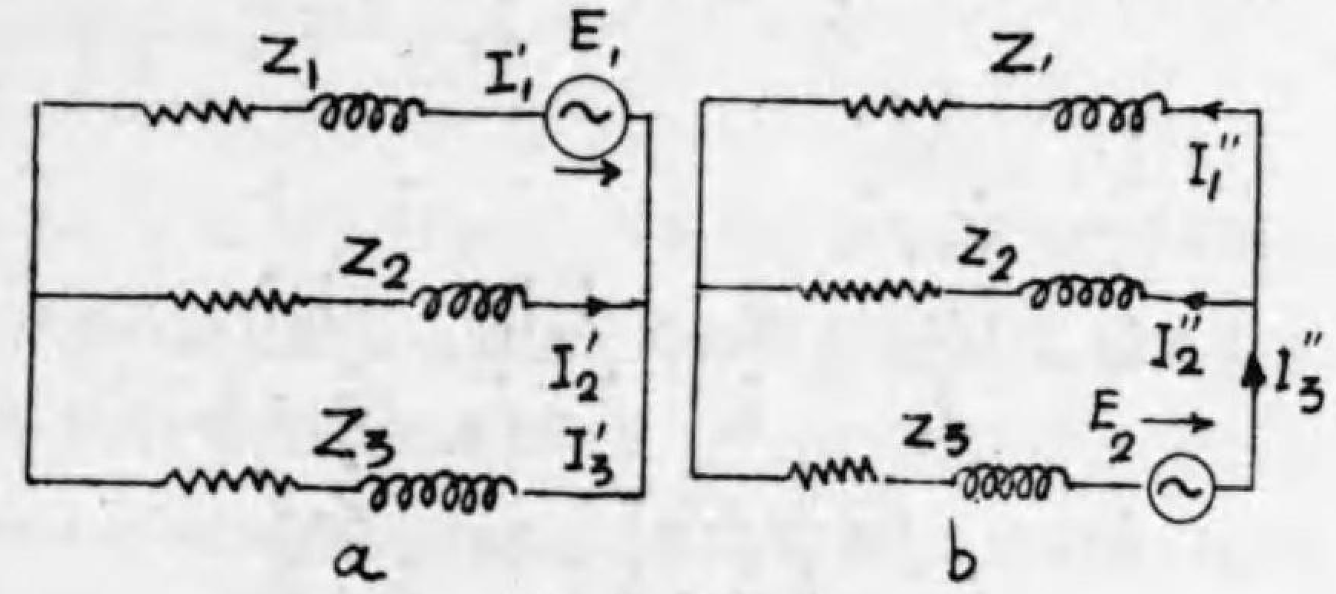
1. 交流回路へ應用

直流回路に**重疊の理**（Principle of supperposition）を用ふる方法は直流計算に於て述べたのであるが交流回路に於てもその電流や電壓を記號式で表はすならば直流回路と同樣に此の方法で解く事が出來るものである。先づ第174圖の如き回路があるとする。此の回路の計算を行ふにはキルヒホッフの法則のみで解く事が出來るのであるが之を重疊の理を用ひて解かんとすれば先づ E_1 のみが存在する場合と



第174圖

E_2 のみが存在する場合とについて別々に解き之等を合成するならば求むる答が得られるのである。今各回路のインピーダンスを夫々 Z_1, Z_2, Z_3 となし E_1 のみが存在し E_2 がないとすれば第175圖aの通りになる。又 E_1 がなくて E_2 のみがある場合を考へるならば第175圖bの如き接續となる。此の第175圖のaとbとの各回路に流れる電流を合成したものが第174圖の各回路を流れる電流となる譯である。今第175圖aの場合の各回路を流れる電流 $\dot{I}_1', \dot{I}_2', \dot{I}_3'$ を求めて見る。先づ此の回路の合成インピーダンス Z' を求むれば次の通りになる。



第175圖

$$\dot{Z}'=\dot{Z}_1+\frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}=\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

之よりして電流 I_1' は次の如く求められる。

$$\dot{I}_1'=\frac{\dot{E}_1}{\dot{Z}'}=\frac{\dot{E}_1}{\dfrac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}}$$

$$=\frac{\dot{E}_1(\dot{Z}_2+\dot{Z}_3)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

次に Z_2 と Z_3 との回路にキルヒホッフの第二法則を應用すれば第一法則の $\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3$ とより次の如く各回路の電流が見出さる

$$\dot{I}_1'=\dot{I}_2'+\dot{I}_3'$$

$$\dot{I}_3'\dot{Z}_3=\dot{I}_2'\dot{Z}_2 \qquad \therefore \quad \dot{I}_3'=\frac{\dot{I}_2'\dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}$$

$$\therefore \quad \dot{I}_1'=\dot{I}_2'+\frac{\dot{I}_2'\dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}=\dot{I}_2'\left(\frac{\dot{Z}_3+\dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}\right)$$

$$\therefore \quad \dot{I}_2'=\frac{\dot{Z}_3\dot{I}_1'}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

又 $$\dot{I}_3'=\frac{\dot{I}_2'\dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}=\frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}\times\frac{\dot{Z}_3\dot{I}_1'}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}=\frac{\dot{Z}_2\dot{I}_1'}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

$$\therefore \quad \dot{I}_2'=\frac{\dot{E}_1(\dot{Z}_2+\dot{Z}_3)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}\times\frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

$$=\frac{\dot{E}_1\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

$$\dot{I}_3'=\frac{\dot{E}_1(\dot{Z}_2+\dot{Z}_3)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}\times\frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

$$=\frac{\dot{E}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

之と同様な方法によつて第175圖bに於ける回路の電流 I_1'', I_2'', I_3''等も次の如く求める事が出來る。

$$\dot{I}_3''=\frac{\dot{E}_2}{\dot{Z}_3+\dfrac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2}}=\frac{\dot{E}_2}{\dfrac{\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2}}$$

$$=\frac{\dot{E}_2(\dot{Z}_1+\dot{Z}_2)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

$$\dot{I}_2''=\dot{I}_3''\times\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2}=\frac{\dot{E}_2(\dot{Z}_1+\dot{Z}_2)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}\times\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2}$$

$$=\frac{\dot{E}_2\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

$$\dot{I}_1''=\dot{I}_3''\times\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2}=\frac{\dot{E}_2(\dot{Z}_1+\dot{Z}_2)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}\times\frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2}$$

$$=\frac{\dot{E}_2\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

此の $\dot{I}_1'$, $\dot{I}_2'$, $\dot{I}_3'$ と $\dot{I}_1''$, $\dot{I}_2''$, $\dot{I}_3''$ とが知れるならば第174圖の $\dot{I}_1$ $\dot{I}_2$ $\dot{I}_3$ が求まる譯である。第174圖と第175圖とに於て $\dot{I}_1$と $\dot{I}_1'$とはその方向が同じであるがI_1と $\dot{I}_1''$とは方向が反對であるから$\dot{I}_1''$はマイナスの符號を取る。$\dot{I}_2$と $\dot{I}_2'$と $\dot{I}_2''$とは方向が皆同じであるから何れもプラスを取り $\dot{I}_3'$と $\dot{I}_3''$とは方向が違ひ $\dot{I}_3$は $\dot{I}_3'$と逆方向を取るのでマイナスを取る。從つて之等の電流を重疊するならば次の如く $\dot{I}_1$ $\dot{I}_2$ $\dot{I}_3$ が求められる。

$$\dot{I}_1=\dot{I}_1'-\dot{I}_1''=\frac{\dot{E}_1(\dot{Z}_2+\dot{Z}_3)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}-\frac{\dot{E}_2\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

$$=\frac{\dot{E}_1(\dot{Z}_2+\dot{Z}_3)-\dot{E}_2\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

$$\dot{I}_2=\dot{I}_2'+\dot{I}_2''=\frac{\dot{E}_1\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}+\frac{\dot{E}_2\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

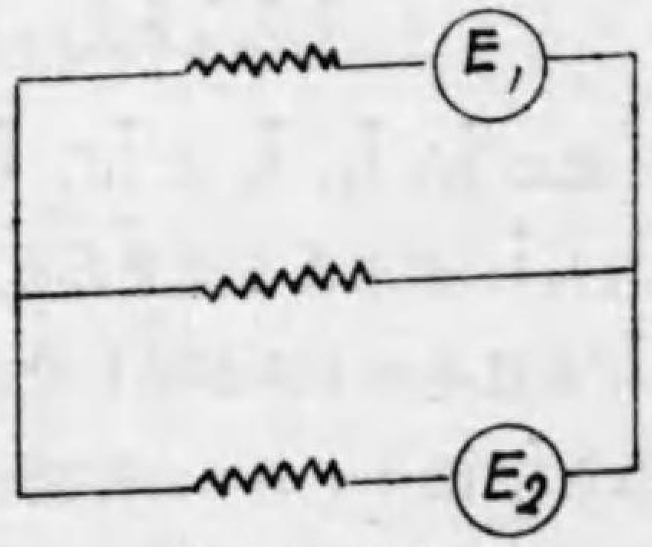
$$=\frac{\dot{E}_1\dot{Z}_3+\dot{E}_2\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

$$\dot{I}_3=\dot{I}_3''-\dot{I}_3'=\frac{\dot{E}_2(\dot{Z}_1+\dot{Z}_2)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}-\frac{\dot{E}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

$$=\frac{\dot{E}_2(\dot{Z}_1+\dot{Z}_2)-\dot{E}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

2. 電力の重疊

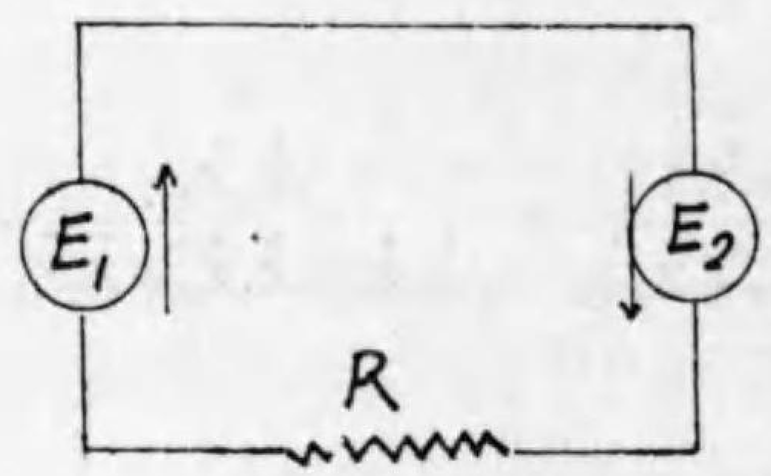
電流や電壓は今迄の方法で重疊する事が出來るが電力の重疊は今迄の方法とは異る。電力の重疊を考へるに當り先づ直流回路について述べて見よう。先づ第176圖の如き回路に於て E_1 のみがある時に流れる電流を I_1 とし E_2 のみがある時流れる電流を I_2 とすれば E_1 と E_2 とが共に存在する時の起電力は E_1+E_2 であり電流は I_1+I_2 であるから電力は次の通りになる。



第 1 7 6 圖

$$電力=(E_1+E_2)(I_1+I_2)$$
$$=E_1I_1+E_1I_2+E_2I_1+E_2I_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(90)$$

此の場合に於て E_1I_1 は E_1 のみの電壓がある場合の電力であつて E_2I_2 は E_2 のみの電壓がある場合の電力である。今迄の電壓や電流の重疊は此の E_1 のみが存在する場合と E_2 のみが存在する場合とを代數的に加へ合したものであるが電力の重疊は前の式に示した通り E_1I_1 と E_2I_2 とを加へ合せただけでは足りない。即ち E_1I_1 及び E_2I_2 の電力の外に E_1I_2 及び E_2I_1 を加へなければならないのである。此の點が電流や電壓より電力の重疊が異る譯である。今例として第177圖の如き回路の電力を計算して見る。先づ E_1 のみ存在する時の電流を I_1 とし E_2 のみ存在する



第 1 7 7 圖

時の電流を I_2 とする。

$$I_1=\frac{E_1}{R} \qquad I_2=\frac{E_2}{R}$$

又は $E_1=I_1R \qquad E_2=I_2R$

此の場合に於て起電力は各々逆の方向を向いて居るので起電力や電流は夫々差を取らなければ之等を重疊する事が出來ない。

$$電力=(E_1-E_2)(I_1-I_2)=(E_1-E_2)\left(\frac{E_1}{R}-\frac{E_2}{R}\right)$$
$$=\frac{(E_1-E_2)^2}{R}$$

$$又は電力=\frac{(I_1R-I_2R)^2}{R}=(I_1-I_2)^2R$$

交流に於ても同樣であつて直流に使用された第90式の公式を交流に書き變へると次の通りになる。

電力＝E_1 のみが存在する場合の電流と E_1 との間の電力
＋E_2 のみが存在する場合の電流と E_1 との間の電力
＋E_2 のみが存在する場合の電流と E_2 との間の電力
＋E_1 のみが存在する場合の電流と E_2 との間の電力
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(91)$

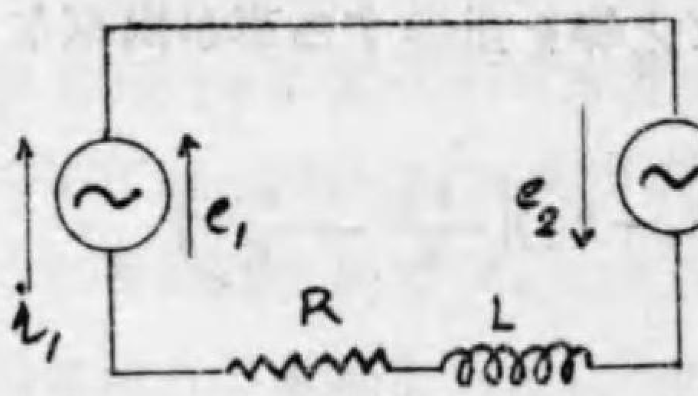
斯くの如き方法によつて交流回路に於ける電力をも重疊することが出來る。

3. 周波數の異る場合の重疊

同じ回路にありて周波數が何れも同じ場合には無理に此の重疊の理を用ひなくてもキルヒホッフの法則のみで大抵解決出來るものであるが周波數が異る起電壓がある場合にはどうしても此の重疊の理を用ひなければならない。此の點が重疊の理の大切なる處であつて之から起電壓に違つた周波數を有する場合に

ついてその解き方を述べよう。又交流回路に直流の起電力がある場合に於ても此の重疊の理を使用して解き得る事は勿論である。

今交流の導線網の中に二つの起電力があつてその起電力が各各その周波數を異にするとする。一方の起電力の周波數を f_1とし他方の起電力の周波數を f_2とすれば之等の電壓の瞬時値は夫々次の式で表はされる。



第 1 7 8 圖

$$e_1 = E_1 \sin(2\pi f_1 t + \theta)$$

$$e_2 = E_2 \sin(2\pi f_2 t + \Phi)$$

此の二つの起電力が第 178 圖の如く接續されて居る場合を例に取つて說明すれば e_2がなくて e_1のみが存在する時の電流は次の式で表はされる。

$$i_1 = I_1 \sin(2\pi f_1 t + \theta - \beta_1)$$

此の式に於て I_1は電流の最大値で今 E_1 を電壓の最大値とすれば此の大きさ及びβ_1は夫々次の如き價を取る。

$$I_1 = \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + (2\pi f_1 L)^2}} \qquad \beta_1 = \tan^{-1}\frac{2\pi f_1 L}{R}$$

次に e_2のみが存在して e_1がない場合の電流を求むれば次の通りになる。

$$i_2 = I_2 \sin(2\pi f_2 t + \Phi - \beta_2)$$

此の式の I_2は電流の最大値にして I_2及びβ_2は夫々次の如き價を有する。

$$I_2 = \frac{E_2}{\sqrt{R^2 + (2\pi f_2 L)^2}} \qquad \beta_2 = \tan^{-1}\frac{2\pi f_2 L}{R}$$

今此の場合に e_1 も e_2も共に存在するとすれば此の回路に流れる電流は二つの電流を重疊して求める事が出來る。此の電流を i とする。

$$i = i_1 + i_2 = I_1 \sin(2\pi f_1 t + \theta - \beta_1) + I_2 \sin(2\pi f_2 t + \Phi - \beta_2)$$

$$= \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + (2\pi f_1 L)^2}} \sin\left(2\pi f_1 t + \theta - \tan^{-1}\frac{2\pi f_1 L}{R}\right)$$

$$+ \frac{E_2}{\sqrt{R^2 + (2\pi f_2 L)^2}} \sin\left(2\pi f_2 t + \Phi - \tan^{-1}\frac{2\pi f_2 L}{R}\right)$$

次に此の回路に消費せられる電力であるが此の電力は i_1 と e_1 との間に消費せられる電力と e_2とi_2 との間に消費せられる電力との和になるものであつて周波數の違ふ電壓の場合には e_1と i_2 との消費電力と e_2とi_1 との間の消費電力との和は結局零となるものである。從つて周波數が異る場合の消費電力は次の式で表はされる事になる。

消費電力＝e_1と i_1 との間の消費電力＋e_2 と i_2 との間の消費電力⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(92)

此の事は周波數の違ふ起電力がある場合が同じ周波數の起電力ばかりの時と違ふ處であつて二つ以上の起電力が存在する場合にも此の關係は成立し又直流起電力と交流起電力とが存在する場合にも適用せられるものである。今此の回路に消費せられる電力を考へると e_2がなくてe_1 のみが存在する場合の電力は次の通りになる。

$$e_1 \text{ のみの場合の消費電力} = e_1 i_1 = \frac{I_1^2 r}{2}$$

同様にして e_2のみの場合の消費電力も次の通りになる。

$$e_2 \text{ のみの場合の消費電力} = e_2 i_2 = \frac{I_2^2 r}{2}$$

從つて全體の消費電力は次の通りになる。

$$\text{全體の消費電力}=\frac{I_1^2 r}{2}+\frac{I_2^2 r}{2}$$

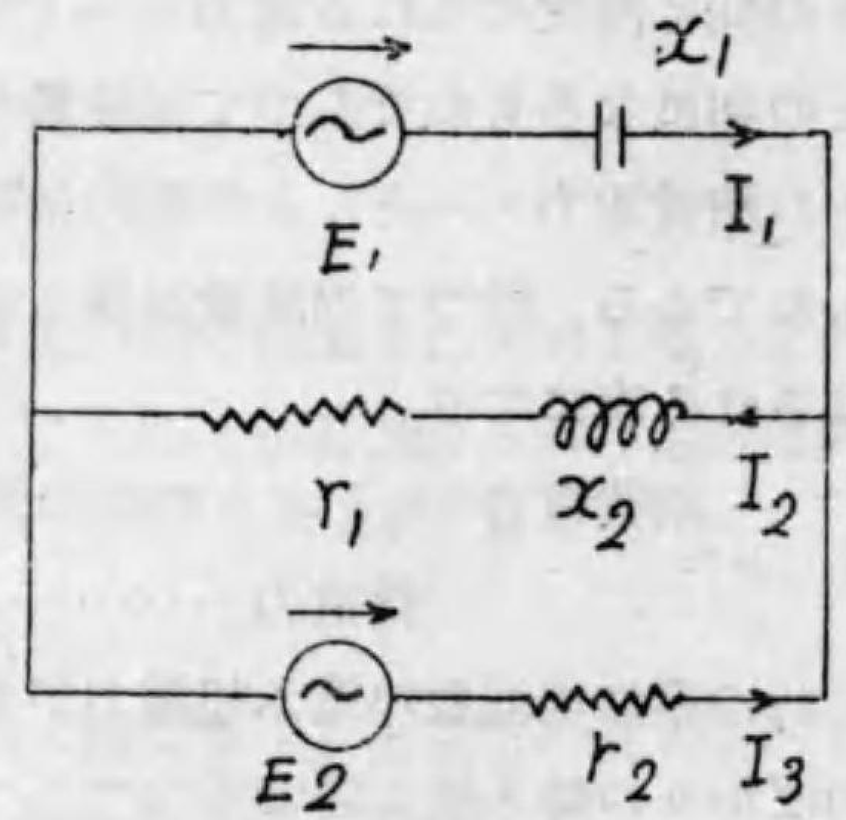
今若し I_{e1} 及び I_{e2} を以て夫々電流の實效値を表はすものとするならば次の關係がある。

$$I_{e1}=\frac{I_1}{\sqrt{2}} \qquad I_{e2}=\frac{I_2}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \text{全體の消費電力}=\frac{(\sqrt{2}\,I_{e1})^2}{2}r+\frac{(\sqrt{2}\,I_{e2})^2}{2}r=I_{e1}^2 r+I_{e2}^2 r$$

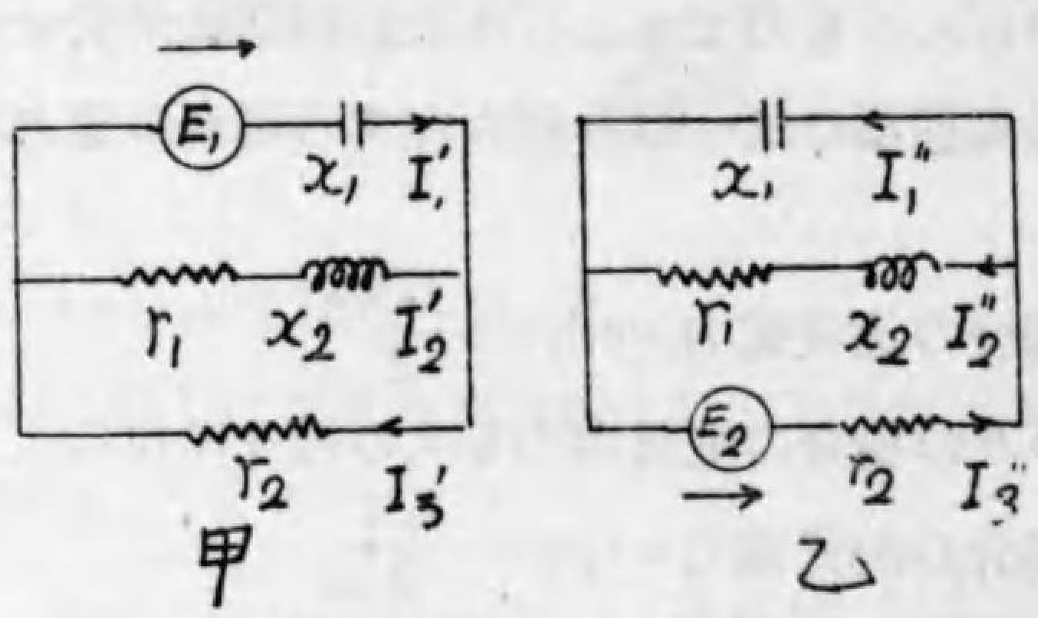
4. 例 題

例 1. 第201圖の如き回路があつて r_1 は6オーム、r_2 は4オーム、x_1 は2オーム、x_2 は4オームである。今交流電壓が同相にあつて圖の如き方向を有するものとし E_1 を36ヴォルト、E_2 を40ヴォルトとすれば此の回路を流れる電流 I_1, I_2, I_3 を求む。



第 179 圖

解 此の第179圖の E_1 のみが存在し E_2 がない場合を考へると第180圖甲の如き接續となり E_1 が無くて E_2 のみが存在する場合を考へると第180圖



第 180 圖

乙の如き接續となる。先づ E_1 のみが存在する場合の各回路を流れる電流 I_1', I_2', I_3' を求めて見る。

$$\text{合成インピーダンス}=-jx_1+\frac{r_2(r_1+jx_2)}{(r_1+jx_2+r_2)}$$

$$=-j2+\frac{4(6+j4)}{6+j4+4}=-j2+\frac{2(6+j4)}{5+j2}$$

$$=\frac{-j10+4+12+j8}{5+j2}=\frac{16-j2}{5+j2}$$

$$\therefore\ \dot{I}_1'=\frac{36}{\dfrac{16-j2}{5+j2}}=\frac{36(5+j2)}{2(8-j1)}=\frac{18(5+j2)}{8-j1}$$

I_2' と I_3' の流れる回路にキルヒホッフの第二法則を使用して之等の回路の電流を求めると次の通りになる。

$$\dot{I}_2'(r_1+jx_2)=\dot{I}_3\times r_2$$

然るに $\dot{I}_3'=\dot{I}_1'-\dot{I}_2'$

$$\dot{I}_2'(r_1+jx_2)=\dot{I}_1'r_2-\dot{I}_2'r_2$$

$$\therefore\ \dot{I}_2'=\frac{r_2\dot{I}_1'}{r_1+jx_2+r_2}=\frac{4}{6+j4+4}I_1'=\frac{2}{5+j2}I_1'$$

$$\therefore\ \dot{I}_2'=\frac{2}{5+j2}\times\frac{18(5+j2)}{8-j1}=\frac{36}{8-j1}$$

$$\dot{I}_3'=\dot{I}_1'-\dot{I}_2'=\frac{18(5+j2)}{8-j1}-\frac{36}{8-j1}$$

$$=\frac{18(5+j2-2)}{8-j1}=\frac{18(3+j2)}{8-j1}$$

次に E_1 がなくて E_2 のみが存在する場合の電流を出して見る。

$$\text{合成インピーダンス}=r_2+\frac{-jx_1(r_1+jx_2)}{-jx_1+r_1+jx_2}$$

$$=4+\frac{-j2(6+j4)}{-j2+6+j4}=4+\frac{-j2(3+j2)}{3+j1}$$

$$=\frac{12+j4-j6+4}{3+j1}=\frac{16-j2}{3+j1}$$

$$\dot{I}_3''=\frac{40}{\dfrac{16-j2}{3+j1}}=\frac{40(3+j1)}{2(8-j1)}=\frac{20(3+j1)}{(8-j1)}$$

$$\dot{I}_1''=\dot{I}_3''-\dot{I}_2'' \qquad \dot{I}_2''(6+j4)=\dot{I}_1''\times -j2$$

$$\dot{I}_2''(6+j4)=-j2\dot{I}_3''+j2\dot{I}_2''$$

$$\therefore\ \dot{I}_2''=\frac{-j2\dot{I}_3''}{6+j4-j2}=\frac{-j2\dot{I}_3''}{2(3+j1)}=\frac{-j1}{3+j1}\dot{I}_3''$$

$$\therefore\ \dot{I}_2''=\frac{-j1}{3+j1}\times\frac{20(3+j1)}{8-j1}=\frac{-j20}{8-j1}$$

$$\dot{I}_1''=\dot{I}_3''-\dot{I}_2''=\frac{20(3+j1)}{8-j1}-\frac{-j20}{8-j1}$$

$$=\frac{20(3+j1+j1)}{8-j1}=\frac{20(3+j2)}{8-j1}$$

之よりして第179圖の各回路を流れる電流 I_1, I_2, I_3 は夫々次の如くにして見出し得る。

$$\dot{I}_1=\dot{I}_1'-\dot{I}_1''=\frac{18(5+j2)}{8-j1}-\frac{20(3+j2)}{8-j1}$$

$$=\frac{90+j36-60-j40}{8-j1}=\frac{30-j4}{8-j1}$$

$$=\frac{(30-j4)(8+j1)}{(8-j1)(8+j1)}=\frac{240-j32+j30+4}{64+1}=\frac{244-j2}{65}$$

$$\dot{I}_2=\dot{I}_2'+\dot{I}_2''=\frac{36}{8-j1}+\frac{-j20}{8-j1}=\frac{4(9-j5)}{8-j1}$$

$$=\frac{4(9-j5)(8+j1)}{(8-j1)(8+j1)}=\frac{4(72-j40+j9+5)}{64+1}$$

$$=\frac{4(77-j31)}{65}$$

$$\dot{I}_3=\dot{I}_3''-\dot{I}_3'=\frac{20(3+j1)}{8-j1}-\frac{18(3+j2)}{8-j1}$$

$$=\frac{60+j20-48-j36}{8-j1}=\frac{12-j16}{8-j1}=\frac{4(3-j4)(8+j1)}{(8-j1)(8+j1)}$$

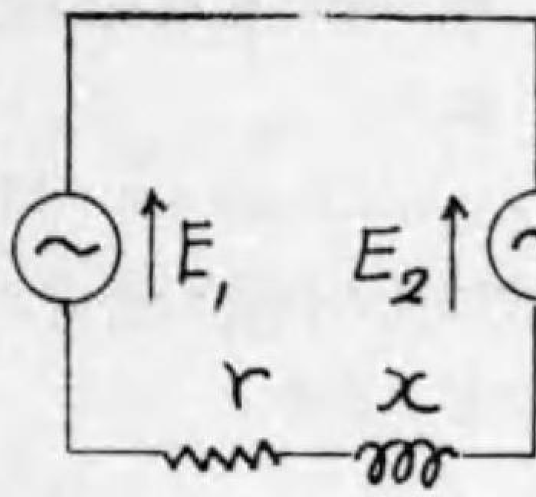
$$=\frac{4(24-j32+j3+4)}{64+1}=\frac{4(28-j29)}{65}$$

$$\therefore\ I_1=\frac{\sqrt{244^2+2^2}}{65}\fallingdotseq 3.76\ \text{アンペア}$$

$$I_2=\frac{4\sqrt{77^2+31^2}}{65}\fallingdotseq 5.11\ \text{アンペア}$$

$$I_3=\frac{4\sqrt{28^2+29^2}}{65}\fallingdotseq 2.48\ \text{アンペア}$$

例 2. 第181圖の如き回路があつて E_1 は60ヴォルト、E_2 は40ヴォルト、r は4オーム、x は3オームである。此の回路で消費せられる電力を求めよ。



第 181 圖

解 此の問題は容易に解き得られるが重疊の理を用ふれば次の如くになる。但し I′はE_1のみある場合I″は E_2 のみある場合である。

$$I'=\frac{E_1}{r+jx}=\frac{60}{4+j3}$$

$$I''=\frac{E_2}{r+jx}=\frac{40}{4+j3}$$

何れの電流も同相となりその力率$\cos\theta$は次の如くなる。又I′I″の大きさも次の通りになる。

$$\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}=0.8$$

$$I'=\frac{60}{\sqrt{4^2+3^2}}=12 \qquad I''=\frac{40}{\sqrt{4^2+3^2}}=8$$

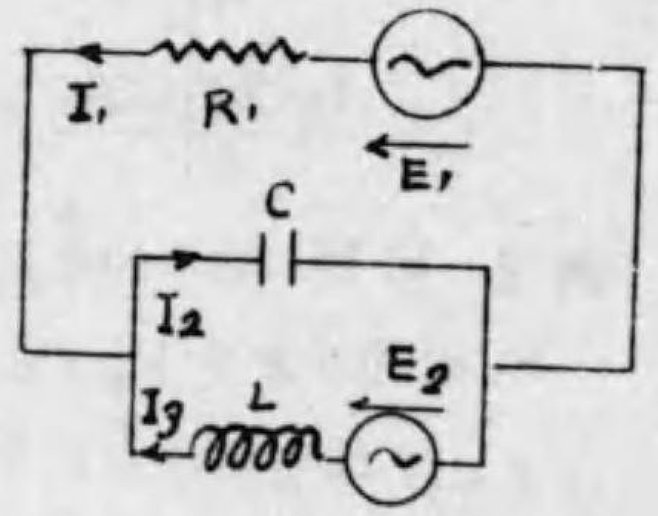
$$\therefore\ \text{電力}=(E_1-E_2)(I'-I'')\cos\theta$$

$$= E_1 I' \cos\theta - E_2 I' \cos\theta - E_1 I'' \cos\theta + E_2 I'' \cos\theta$$

$$= 60 \times 12 \times 0.8 - 40 \times 12 \times 0.8 - 60 \times 8 \times 0.8 + 40 \times 8 \times 0.8$$

$$= 64 \text{ワット}$$

例 3. 第182圖の如く接續せられたる回路があつて交流電壓 E_1 は f なる周波數を有し E_2 は 3f なる周波數を有して居る。此の場合に於ける電流 I_1を求む。



第182圖

解 E_{m1}をE_1の最大値となし此の電壓を基線に取れば此の電壓の瞬時値は次の式で表はされる。

$$e_1 = E_{m1} \sin\omega t \quad \text{但} \quad \omega = 2\pi f$$

次に此の回路の合成インピーダンスを求める。

$$\dot{Z} = R + \frac{-j\frac{1}{\omega C} \times j\omega L}{-j\frac{1}{\omega C} + j\omega L} = R + \frac{-j\frac{L}{C}}{\frac{-1+\omega^2 LC}{\omega C}}$$

$$= R + \frac{-j\omega L}{\omega^2 LC - 1} = \frac{R(\omega^2 LC - 1) - j\omega L}{\omega^2 LC - 1}$$

$$\therefore \quad Z = \frac{\sqrt{R^2(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 L^2}}{\omega^2 LC - 1}$$

今此の回路に E_2 がなくして E_1 のみがある場合に此の回路を流れる全電流I_1'の瞬時値をi_1'とすれば次の通りになる。

$$i_1' = \frac{e_1}{Z} = \frac{E_{m1}(\omega^2 LC - 1)}{\sqrt{R^2(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 L^2}} \sin\omega t$$

次に3fなる周波數を有する E_2 のみがある場合を考へる。此の時は $3\omega = 2\pi \times 3f$ となし E_{m2}をE_2の最大値、θをE_1よりE_2の後れる位相角とすれば E_2 の瞬時値 e_2 は次の通りになる。

$$e_2 = E_{m2} \sin(3\omega t - \theta)$$

次に此のE_2のかゝる回路の合成インピーダンス$\dot{Z}$を求める。

$$\dot{Z} = j3\omega L + \frac{-j\frac{R_1}{3\omega C}}{-j\frac{1}{3\omega C} + R} = j3\omega L + \frac{\frac{-jR}{3\omega C}}{\frac{-j1+3\omega CR}{3\omega C}}$$

$$= \frac{3\omega L + j9\omega^2 CLR - jR}{-j1 + 3\omega CR} \qquad Z = \frac{\sqrt{9\omega^2 L^2 + (9\omega^2 CLR - R)^2}}{\sqrt{1 + 9\omega^2 C^2 R^2}}$$

L を含む回路を流れる電流 I_3'' の瞬時値は次の式で表はされる。

$$i_3'' = \frac{E_{m2}\sqrt{1 + 9\omega^2 C^2 R^2}}{\sqrt{9\omega^2 L^2 + (9\omega^2 LCR - R)^2}} \sin(3\omega t - \theta)$$

次にE_2のみ存在する時 R を流れる電流の瞬時値 i_1''と此の i_3'' との關係を示すと次の通りである。

$$i_1'' = \frac{-j\frac{1}{3\omega C}}{-j\frac{1}{3\omega C} + R} i_3'' = \frac{\frac{-j1}{3\omega C}}{\frac{-j1+3\omega CR}{3\omega C}} i_3'' = \frac{i_3''}{1 + j3\omega CR}$$

$$\therefore \quad i_1'' = \frac{1}{\sqrt{1 + 9\omega^2 C^2 R^2}} \times \frac{E_{m2}\sqrt{1 + 9\omega^2 C^2 R^2}}{\sqrt{9\omega^2 L^2 + (9\omega^2 LCR - R)^2}} \sin(3\omega t - \theta)$$

$$= \frac{E_{m2}\sin(3\omega t - \theta)}{\sqrt{9\omega^2 L^2 + (9\omega^2 LCR - R)^2}}$$

是よりして E_1 とE_2とが共に存在する場合の電流 I_1の瞬間値 i_1 は次の通りになる。

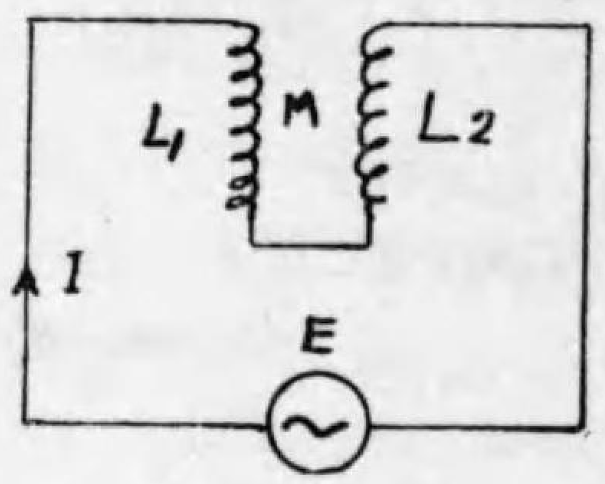
$$i_1 = i_1' - i_1'' = \frac{E_{m1}(\omega^2 LC - 1)}{\sqrt{R^2(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 L^2}} \sin\omega t$$

$$- \frac{E_{m2}\sin(3\omega t - \theta)}{\sqrt{9\omega^2 L^2 + (9\omega^2 LCR - R)^2}}$$

第十四章　相互誘導を含む回路

1.　簡單な回路の相互誘導

誘導卽ちインダクタンスに**自己誘導**(Self-inductance セルフインダクタンス)と**相互誘導**（Mutual-inductance ミューチアル インダクタンス）とがあつて今迄にインダクタンスと云ふ言葉を多數用ひて居たが是は自己誘導卽ちセルフ・インダクタンスの事を云つて居たのである。相互誘導と云ふのは向ひ側の線輪を流れる電流がこちらの線輪に磁束の影響を及ぼし起電力を發生せしむるインダクタンスであつて是は相互インダクタンスと呼んでよい。先づ第183圖に示すが如き簡單な回路について考へて見る。今發電機より出す電壓の瞬時値を e とし此の場合に流れる電流を i とすれば L_1 なる自己インダクタンスによる逆起電壓は $L_1\frac{di}{dt}$ で表はされ同樣に L_2 なる自己インダクタンスによる逆起電壓も $L_2\frac{di}{dt}$ で表はされる。相互誘導Mによる逆起電壓は L_1 に生ずるものも L_2 に生ずるものも此の場合は共に $M\frac{di}{dt}$ である。所が相互誘導は向側の線輪を流れる電流によつて手前側の線輪に起電力を發生するのであるから L_1 と L_2 とに流れる電流が違ふならば向ふ側の電流を取らなければならない。今假りに L_2 の中を流れる電流を i_2 となし L_1 を流れる電流を i_1 とするならば L_1 に起きる起電力は $M\frac{di_2}{dt}$ となり L_2 に起きる起電力は $M\frac{di_1}{dt}$ となる譯で



第１８３圖

ある。第183圖の場合には L_1 を通る電流も L_2 を通る電流も共に i であるから此の相互誘導による二つの起電壓は相等しい譯になるのである。今此の瞬時的の電壓 e を求めて見ると是等の電壓を加へ合はしたものになる譯である。之を式で示して見ると次の通りになる。

$$e = L_1\frac{di}{dt} \pm M\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} \pm M\frac{di}{dt}$$
$$= L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} \pm 2M\frac{di}{dt}$$

此の場合に於て相互誘導による電壓降下に對し±の符號を附けたのは此の電壓降下がプラスになる時とマイナスになる時とがあるためである。自己インダクタンスによる電壓降下は常に一定の方向を有して居たので別にプラスやマイナスの方向を決定する必要は無かつたのであるが相互誘導に於てはその方向が正反對になる事がある。その方向は何によつて決定せられるかと云へば二つの線輪に流れる電流の方向と二つの線輪に捲かれたる捲線の捲方向とによつて決定せられるのである。今二つの線輪に電流が流れた時に二つの線輪に生じた磁束が互に相加はるやうに働く場合には符號はプラスとなる譯で逆に二つの線輪に生じた磁束が互に打ち消すやうに働く場合には符號はマイナスである。第183圖の如き方向に電流が流れて居る場合には若し捲線の方向が L_1 も L_2 も同じ方向であつたとするならば磁束は互に同じ方向に生ずるからプラスとなる譯である。若し捲線の方向が逆の方向であるならば磁束は互に打ち消す方向に生ずるから符號はマイナスとなる。

次に今述べた電壓平衡の式に於て電壓 e も電流 i も共に純正弦波形とし夫等を實效値の複素數 $\dot{E}$ $\dot{I}$ で表すならば上の式は下

の如く表す事が出來る。是はキルヒホッフの第二法則をそのまま應用したに過ぎない形である。

$$\dot{E} = (j\omega L_1 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} \pm j2\omega M\dot{I}) = j\omega \dot{I}(L_1+L_2+{}_2M)$$

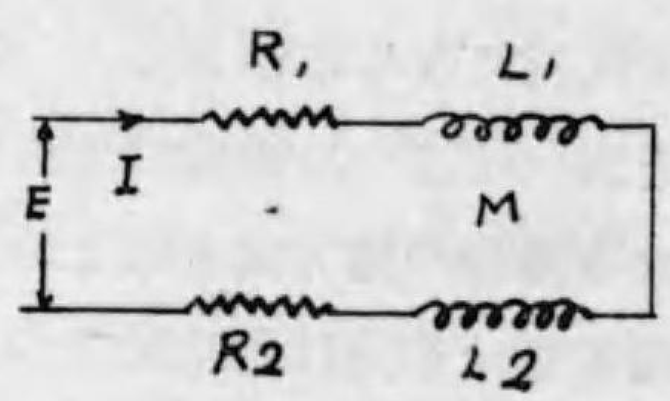
此の式から電流 I と L_1 L_2 M とが知れゝば E も知られる、E と L_1 L_2 及び M とが知れゝば I が出て來る。

2. 直 列 回 路

第184圖の如く直列に接續せられて居る回路を解いて見る。此の回路に加へられた電壓と流れる電流とが正弦波であると假定するならば前に示した式と同じ方法によつて次の式が成立する譯である。

$$\dot{E} = \dot{I}R_1 + j\dot{I}\omega L_1 \pm j\dot{I}\omega M + \dot{I}R_2 + j\dot{I}\omega L_2 \pm j\dot{I}\omega M$$
$$= \dot{I}(R_1+R_2) + j\omega\dot{I}(L_1+L_2) \pm j2\dot{I}\omega M$$

此の場合に於ても L_1 と L_2 との線輪が同じ方向に捲いてあるならば磁束は増加せられるやうに生ずるものであるから相互誘導による電壓降下の符號はプラスである。



第 1 8 4 圖

反對の時にはその磁束が互に減少せんとする傾向を生ずるので符號はマイナスを取る。次に此の回路の合成インピーダンスを求めて見やう。Zを合成インピーダンスとするならば此のZは次の式で表はされる。

$$\dot{Z} = R_1+R_2+j\omega L_1+j\omega L_2 \pm 2j\omega M$$
$$= R_1+R_2+j\omega(L_1+L_2\pm 2M)$$

此の時今 $L_1=L_2=L=M$ なる場合を考へて見る、即ち自己インダクタンスも相互誘導も皆等しい場合である。此の時のイ

ンピーダンスは次の通りになる。

$$\dot{Z} = R_1+R_2+j\omega(L+L\pm 2L)$$

若し正の場合にして符號がプラスを取るならば此の式は次の通りになる。

$$\dot{Z} = R_1+R_2+j4\omega L$$

次に負の場合を考へるならば此の式は次の通りになつてインダクタンスの影響は全然ないと云ふ事になる。

$$\dot{Z} = R_1+R_2$$

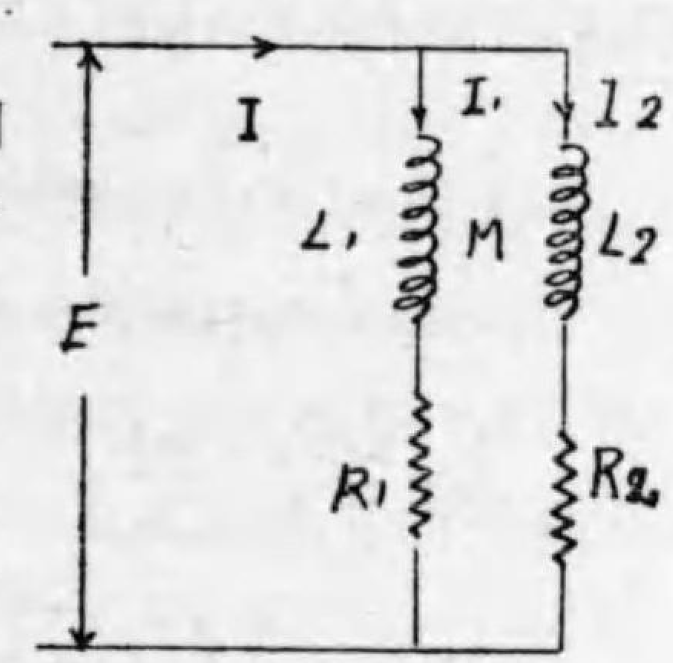
又多數の相互誘導を有する線輪が直列に接續せられて居る場合にも同様に計算する事が出來るのである。

3. 並 列 回 路

次に第185圖に示す如く相互誘導が並列に接續せられて居る場合を示して見る。先づ第一に R_1 L_1 の回路にキルヒホッフの第二法則を使用して見ると次の式が成立する。

$$\dot{E} = \dot{I}_1R_1 + j\dot{I}_1\omega L_1 \pm j\dot{I}_2\omega M$$

次に R_2 L_2 の回路に之を應用して見ると次の通りである。



第 1 8 5 圖

$$\dot{E} = \dot{I}_2R + j\dot{I}_2\omega L_2 \pm j\dot{I}_1\omega M \cdots\cdots\cdots(2)$$

此の場合に注意する所は前に述べた理窟によつて L_1 に對する相互誘導の電壓降下は I_1 の大小によるのではなくして反對側の線輪 L_2 を流れる電流 I_2 の大小によるのである、從つて L_1 に對する相互誘導の電壓降下は ωMI_2 で表し L_2 に對するものは ωMI_1

で表はさなければならない。

各回路を流れる電流 $\dot{I}_1\dot{I}_2$ は前の(1)及び(2)式から求められる譯であつてその出し方を行つて見る。今 $R_1+j\omega L_1$ なるインピーダンスを $\dot{Z}_1$ で表し $R_2+j\omega L_2$ なるインピーダンスを $\dot{Z}_2$ で表して見ると前の二式は次の式を以つて表す事が出來る。此の場合は假りに L_1 なる線輪と L_2 なる線輪とによつて生ずる相互誘導は各線輪の磁束を增加するやうな方向に生ずるとして $j\omega M$ の前の符號をプラスと假定する。

$$\dot{E}=\dot{I}_1\dot{Z}_1+j\dot{I}_2\omega M \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\dot{E}=\dot{I}_2\dot{Z}_2+j\dot{I}_1\omega M \quad\cdots\cdots(2)$$

(1)より
$$\dot{I}_1=\frac{\dot{E}-j\dot{I}_2\omega M}{\dot{Z}_1}\quad\cdots\cdots(3)$$

(3)を(2)に代入
$$\dot{E}=\dot{I}_2\dot{Z}_2+j\frac{\dot{E}-j\dot{I}_2\omega M}{\dot{Z}_1}\times\omega M$$

$$\dot{E}\dot{Z}_1=\dot{I}_2\dot{Z}_1\dot{Z}_2+j\omega M\dot{E}+\dot{I}_2\omega^2M^2$$

$$\dot{I}_2(\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\omega^2M^2)=\dot{E}(\dot{Z}_1-j\omega M)$$

$$\therefore\quad \dot{I}_2=\frac{\dot{E}(\dot{Z}_1-j\omega M)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\omega^2M^2}$$

$$=\frac{\dot{E}(R_1+j\omega L_1-j\omega M)}{(R_1+j\omega L_1)(R_2+j\omega L_2)+\omega^2M^2}$$

$$=\frac{\dot{E}\{R_1+j(\omega L_1-\omega M)\}}{R_1R_2-\omega^2L_1L_2+\omega^2M^2+j(R_2\omega L_1+R_1\omega L_2)}$$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{E}-j\dfrac{\dot{E}(\dot{Z}_1-j\omega M)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\omega^2M^2}\times\omega M}{\dot{Z}_1}$$

$$=\frac{\dot{E}(\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\omega^2M^2-j\dot{Z}_1\omega M-\omega^2M^2)}{\dot{Z}_1(\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\omega^2M^2)}$$

$$=\frac{\dot{E}(\dot{Z}_2-j\omega M)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\omega^2M^2}$$

$$=\frac{\dot{E}\{R_2+j(\omega L_2-\omega M)\}}{R_1R_2-\omega^2L_1L_2+\omega^2M^2+j(R_1\omega L_2+R_2\omega L_1)}$$

是で $\dot{I}_1$ と $\dot{I}_2$ とが求め得られた譯であつて全電流 $\dot{I}$ は此の二つを加へ合すれば直ちに求める事が出來る。

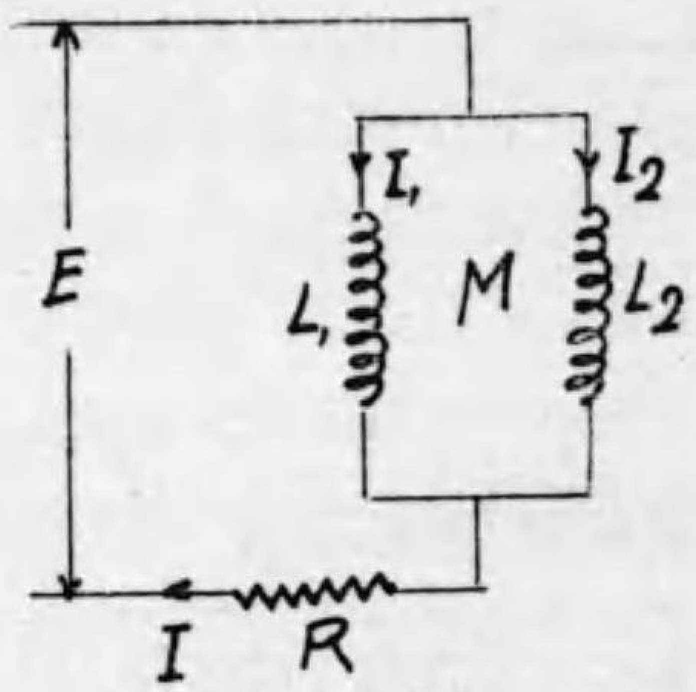
$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2$$

$$=\frac{\dot{E}\{R_2+R_1+j(\omega L_1+\omega L_2-2\omega M)\}}{R_1R_2-\omega^2L_1L_2+\omega^2M^2+j(R_1\omega L_2+R_2\omega L_1)}$$

今の計算は相互誘導がその磁束を增加せしめんとする場合の計算であつたけれ共その磁束を互に消し合はんとする場合の計算は今迄の計算に於て $+j\omega M$ の代りに $-j\omega M$ を用ふればよい、從つてその答も前の答の ωM の代りに $-\omega M$ を入れたと同じ式になつて出て來る。此の相互誘導を有する回路の計算に於てもその力率を求むるには今迄の方法と同樣の方法によつて求むれば差支へはないのである。又複素數からして電流、電壓等の大きさを求むるにも今迄の方法と同じ方法を用ふればよいのである。

4. 一般の回路

前には主として直列回路と並列回路とについて述べたから今度は一般の回路について述べる事とする。先づ第186圖の如き接續があるとする。今此の回路に E なる電壓を供給すれば此の



第186圖

回路に流れる電流Iを求めて見る。此の場合に相互誘導Mは互に磁束を減少せんとするやうに働くものとする。此の問題を解く場合に相互誘導がない場合にはその合成インピーダンスを求めればよいのであるから頗る容易に計算が出來るが相互誘導が存在する場合には此の合成インピーダンスも左程容易に求められるものではない。此の問題を解くには先づキルヒホッフの法則を用ひて解けばよいのであつて此の法則によつて方程式を作れば次の通りになる、但し相互誘導による電壓降下は磁束を減少せんとするやうに働くからマイナスとする。

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\dot{E} = R\dot{I} + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\dot{E} = R\dot{I} + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(2)より(3)を引く　$\dot{E} = R\dot{I} + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2$

$$\dot{E} = R\dot{I} + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1$$

$$0 = 0 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 - j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$

$$\dot{I}_2 (j\omega L_2 + j\omega M) = \dot{I}_1 (j\omega L_1 + j\omega M)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega (L_1 + M)\dot{I}_1}{j\omega (L_2 + M)} = \frac{(L_1 + M)\dot{I}_1}{L_2 + M} \cdots\cdots (4)$$

(4)を(1)に代入　$\dot{I} = \dot{I}_1 + \frac{(L_1 + M)\dot{I}_1}{L_2 + M} = \frac{(L_1 + L_2 + 2M)\dot{I}_1}{L_2 + M}$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(4)(5)を(2)に代入

$$\dot{E} = R\dot{I}_1 \left(\frac{L_1 + L_2 + 2M}{L_2 + M}\right) + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1 \left(\frac{L_1 + M}{L_2 + M}\right)$$

$$\therefore\quad \dot{E} = \dot{I}_1 \times \frac{(RL_1 + RL_2 + 2MR + j\omega L_1 L_2 - j\omega M^2)}{L_2 + M}$$

$$\therefore\quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{E}(L_2 + M)}{R(L_1 + L_2 + 2M) + j\omega(L_1 L_2 - M^2)}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{(L_1 + M)\dot{I}_1}{L_2 + M} = \frac{\dot{R}(L_1 + M)}{R(L_1 + L_2 + 2M) + j\omega(L_1 L_2 - M^2)}$$

$$\therefore\quad \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}(L_1 + L_2 + 2M)}{R(L_1 + L_2 + 2M) + j\omega(L_1 L_2 - M^2)}$$

是よりしてEが知れて居る場合の電流の大きさが求められる譯で之を計算して見ると次の通りになる。

$$I = \frac{E(L_1 + L_2 + 2M)}{\sqrt{R^2(L_1 + L_2 + 2M)^2 + \omega^2(L_1 L_2 - M^2)^2}}$$

力率は$\dot{I}$の式を變化すると次の通りになるから此の式から求める事が出來る。

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}(L_1 + L_2 + 2M)\{R(L_1 + L_2 + 2M) - j\omega(L_1 L_2 - M^2)\}}{R^2(L_1 + L_2 + 2M)^2 + \omega^2(L_1 L_2 - M^2)^2}$$

$$\therefore\quad \cos\theta = \frac{R(L_1 + L_2 + 2M)}{\sqrt{R^2(L_1 + L_2 + 2M)^2 + \omega^2(L_1 L_2 - M^2)^2}}$$

次に此の回路の合成インピーダンスを求めて見る。合成インピーダンスは次の式で表はされる。

$$\dot{Z} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}} = \frac{R(L_1 + L_2 + 2M) + j\omega(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M}$$

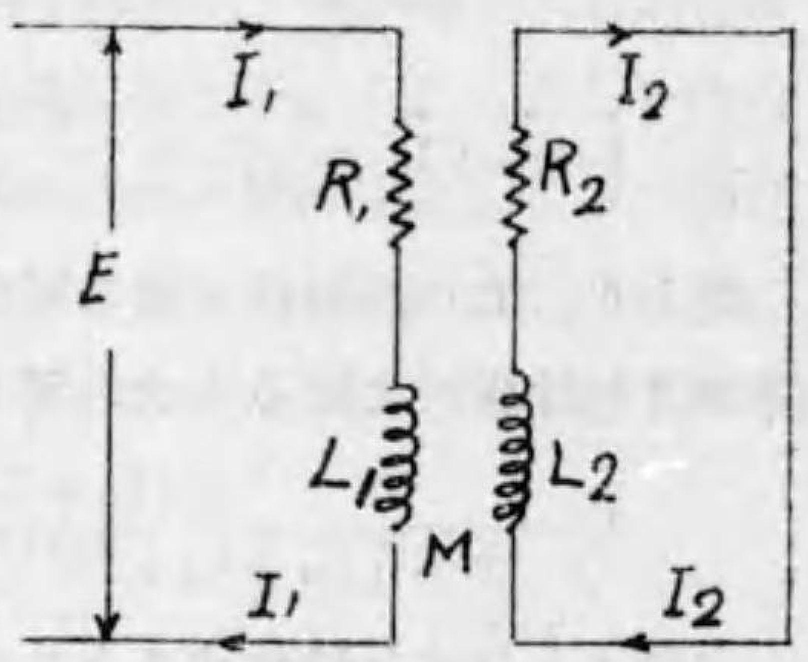
$$= R + j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

$$\therefore \quad Z=\sqrt{R^2+\frac{\omega^2(L_1L_2-M^2)^2}{(L_1+L_2+2M)^2}}$$

5. 連 接 回 路

相互誘導を含む回路には連接回路と云ふのがある。是は變壓器に於けるが如く一次回路と二次回路とを連接した回路である。例へば第187圖に示した回路がその一例であつて此の回路の解き方を示す事とする。

抵抗を夫々 $R_1 R_2$、自己インダクタンスを夫々 $L_1 L_2$ とし相互誘導を M とした場合に E なる電壓を供給し此の時之に流れる電流 I を求めて見る。此の場合に M なる相互誘導による電壓降下はマイナスになるものと假定する。



第 1 8 7 圖

今 R_1 と L_1 とのインピーダンスを Z_1 で表し R_2 と L_2 とのインピーダンスを Z_2 で表して見ると Z_1 と Z_2 とは次の通りになる。

$$\dot{Z}_1=R_1+j\omega L_1 \qquad \dot{Z}_2=R_2+j\omega L_2$$

是よりキルヒホッフの法則を兩回路に應用すれば次の二つの式が出來る。

$$\dot{E}=\dot{I}_1\dot{Z}_1-j\omega M\dot{I}_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$0=\dot{I}_2\dot{Z}_2-j\omega M\dot{I}_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)より　$\dot{I}_2\dot{Z}_2=j\omega M\dot{I}_1$

$$\dot{I}_2=\frac{j\omega M\dot{I}_1}{\dot{Z}_2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)を(1)に代入　$\dot{E}=\dot{I}_1\dot{Z}_1-j\omega M\times\frac{j\omega M\dot{I}_1}{\dot{Z}_2}$

$$\dot{E}=\dot{I}_1\left(\dot{Z}_1+\frac{\omega^2M^2}{\dot{Z}_2}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\dot{E}\dot{Z}_2=\dot{I}_1(\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\omega^2M^2)$$

$$\therefore \quad \dot{I}_1=\frac{\dot{E}\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\omega^2M^2}$$

$$\dot{I}_2=\frac{j\omega M}{\dot{Z}_2}\times\frac{\dot{E}\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\omega^2M^2}=\frac{\dot{E}j\omega M}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\omega^2M^2}$$

此の $\dot{Z}_1\dot{Z}_2$ に夫々 $(R_1+j\omega L_1)$ 及び $(R_2+j\omega L_2)$ を入れると $\dot{I}_1\dot{I}_2$ は夫々次の通りになる。

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{E}\dot{Z}_2}{(R_1+j\omega L_1)(R_2+j\omega L_2)+\omega^2M^2}$$

$$=\frac{E(\dot{R}_2+j\omega L_2)}{R_1R_2-\omega^2L_1L_2+\omega^2M^2+j\omega(L_1R_2+L_2R_1)}$$

$$I_2=\frac{\dot{E}j\omega M}{(R_1+j\omega L_1)(R_2+j\omega L_2)+\omega^2M^2}$$

$$=\frac{Ej\omega M}{R_1R_2-\omega^2L_1L_2+\omega^2M^2+j\omega(L_1R_2+L_2R_1)}$$

次に此の第(4)式を見て見る。

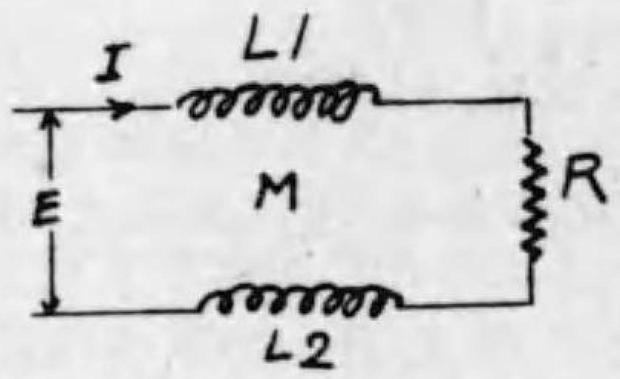
$$\dot{E}=\dot{I}_1\left(\dot{Z}_1+\frac{\omega^2M^2}{\dot{Z}_2}\right)$$

此の式で見れば一次側から見たる全回路の合成インピーダンスは一次回路のみのインピーダンス $\dot{Z}_1$ に $\frac{\omega^2M^2}{\dot{Z}_2}$ なるインピーダ

ンスを加へたものとなつて來る。此の$\dfrac{\omega^2M^2}{\dot{Z}_2}$なるインピーダンスの事を一次側に換算せられたる二次インピーダンスと呼ばれて居る。

6. 例　　題

例 1. 第188圖の如く接續せられた回路がある。抵抗Rは8オーム、自己インダクタンスL_1は6ミリヘンリー、L_2は5.2ミリヘンリー、相互誘導Mは4ミリヘンリーとす。此の場合に此の回路に周波數50サイクル電壓100ヴォルトをかけると何アンペアの電流が流れるか、但し相互誘導は加算的の作用をなすものとす。



第188圖

解 今迄述べた方法により電壓$\dot{E}$の式を作れば次の通りになる。

$$\dot{E}=j\dot{I}\omega L_1+j\dot{I}\omega M+\dot{I}R+j\dot{I}\omega L_2+j\dot{I}\omega M$$

$$=\dot{I}R+j\omega(L_1+L_2+2M)\dot{I}$$

是に數値を代入すると次の如く$\dot{I}$が求められる。

$$100=8\dot{I}+j2\pi\times50\times\frac{6+5.2+2\times4}{1000}\times\dot{I}$$

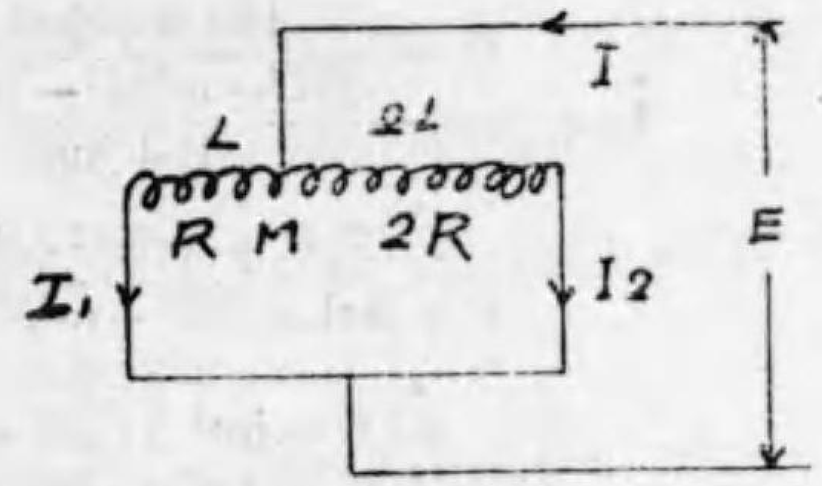
$$\dot{I}(8+j314\times0.0192)=100$$

$$\dot{I}=\frac{100}{8+j6}=\frac{100(8-j6)}{(8+j6)(8-j6)}=\frac{100(8-j6)}{64+36}=8-j6$$

$$\therefore\quad I=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10\text{ アンペア}$$

$$\text{力率}\cos\theta=\frac{8}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{8}{10}=0.8$$

例 2. 第189圖の如く同一方向に捲かれたる1本の線輪の一點とその兩端との間に電壓Eを供給したとする。今此の線輪の一方の自己インダクタンスをL、他方を2Lとし、抵抗は一方をR、他方を2Rとする。此の時相互誘導をMとするならば此の回路に流れる電流を求む。



第189圖

解 各部分に流れる電流をI_1I_2とする、此の場合は捲かれた線輪の方向が同一であつて流れる電流の方向が逆であるからその磁束は互に打ち消されるやうな作用をする。從つて相互誘導による電壓降下はマイナスとなる事になり下の二つの方程式が出來上る事になる。

$$\dot{E}=\dot{I}_1R+j\dot{I}_1\omega L-j\dot{I}_2\omega M\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\dot{E}=\dot{I}_2\times2R+j\dot{I}_2\times2\omega L-j\dot{I}_1\omega M\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)より　$\dot{I}_1=\dfrac{\dot{E}+j\dot{I}_2\omega M}{R+j\omega L}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(3)を(2)に代入　$\dot{E}=\dot{I}_2\times2R+j\dot{I}_2\times2\omega L-j\omega M\times\dfrac{\dot{E}+j\dot{I}_2\omega M}{R+j\omega L}$

$$\dot{E}(R+j\omega L)=2\dot{I}_2R(R+j\omega L)+2j\dot{I}_2\omega L(R+j\omega L)$$
$$-j\omega M\dot{E}+\dot{I}_2\omega^2M^2$$

$$\dot{I}_2(2R^2+2j\omega LR+\omega^2M^2+2j\omega LR-2\omega^2L^2)=\dot{E}(R+j\omega L$$
$$+j\omega M)$$

$$\therefore\quad\dot{I}_2=\frac{\dot{E}(R+j\omega L+j\omega M)}{2R^2+\omega^2M^2-2\omega^2L^2+4j\omega LR}$$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{E}+\dfrac{j\dot{E}(R+j\omega L+j\omega M)\omega M}{2R^2+\omega^2M^2-2\omega^2L^2+4j\omega LR}}{R+j\omega L}$$

$$=\frac{\dot{E}\{2(R+j\omega L)^2+j\omega M(R+j\omega L)\}}{(R+j\omega L)(2R^2+\omega^2M^2-2\omega^2L^2+4j\omega LR)}$$

$$=\frac{\dot{E}(R+j\omega L)(2R+j2\omega L+j\omega M)}{(R+j\omega L)(2R^2+\omega^2M^2-2\omega^2L^2+j4\omega LR)}$$

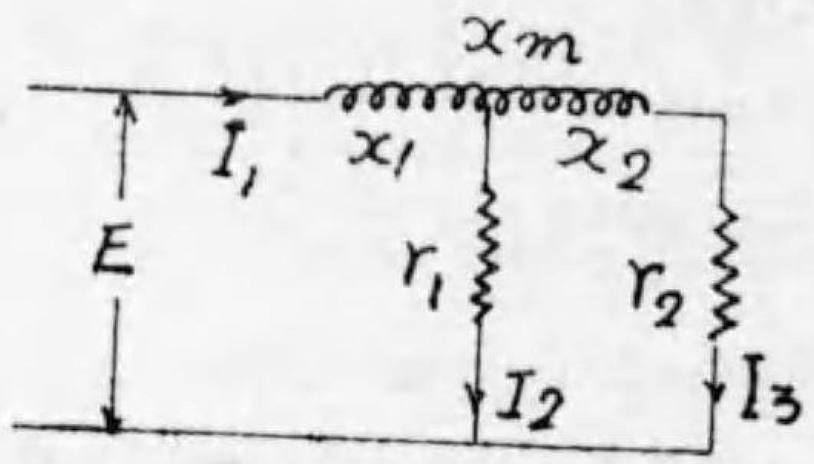
$$=\frac{\dot{E}(2R+j2\omega L+j\omega M)}{2R^2+\omega^2M^2-2\omega^2L^2+j4\omega LR}$$

$$\therefore\quad \dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2$$

$$=\frac{\dot{E}(R+j\omega L+j\omega M+2R+j2\omega L+j\omega M)}{2R^2+\omega^2M^2-2\omega^2L^2+j4\omega LR}$$

$$=\frac{\dot{E}(3R+j3\omega L+j2\omega M)}{2R^2+\omega^2M^2-2\omega^2L^2+j4\omega LR}$$

例 3. 第190圖に示す如き回路があつて、抵抗 r_1 は5オーム r_2 は3オーム、自己インダクタンスによるリアクタンス x_1 は4オーム、x_2 は2オーム、相互誘導によるリアクタンス x_m は3オームとする。然らば此の回路に100ヴオルトの電壓を加ふる電流は何アンペアなるか。



第 1 9 0 圖

解　キルヒホツフの法則により次の式が出來る。但し相互誘導による電壓降下はマイナスに取る。

$$\dot{I}_2=\dot{I}_1-\dot{I}_3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\dot{E}=\dot{I}_2r_1+j\dot{I}_1x_1-jx_m\dot{I}_3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$0=\dot{I}_3r_2+j\dot{I}_3x_2-j\dot{I}_1x_m-\dot{I}_2r_1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)及び(3)に數値を代入し之に(1)を代入す。

$$\dot{E}=(\dot{I}_1-\dot{I}_3)5+j4\dot{I}_1-j3\dot{I}_3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$0=3\dot{I}_3-5(\dot{I}_1-\dot{I}_3)+j2\dot{I}_3-j3\dot{I}_1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

此の2式を整理して之より $\dot{I}_1$ を出す。

(5)より $3\dot{I}_3-5\dot{I}_1+5\dot{I}_3+j2\dot{I}_3-j3\dot{I}_1=0$

$$\dot{I}_3(3+5+j2)=\dot{I}_1(5+j3)$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{I}_1(5+j3)}{8+j2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(6)を(4)に代入 $\dot{E}=\left\{\dot{I}_1-\dfrac{\dot{I}_1(5+j3)}{8+j2}\right\}5+j4\dot{I}_1-j\dfrac{3\dot{I}_1(5+j3)}{8+j2}$

$$\dot{E}=\frac{\dot{I}_1(40+j10-25-j15)}{8+j2}+j4\dot{I}_1-\frac{j3\dot{I}_1(5+j3)}{8+j2}$$

$$\dot{E}(8+j2)=\dot{I}_1(15-j5+j32-8-j15+9)$$

$$\dot{E}(8+j2)=\dot{I}_1(16+j12)$$

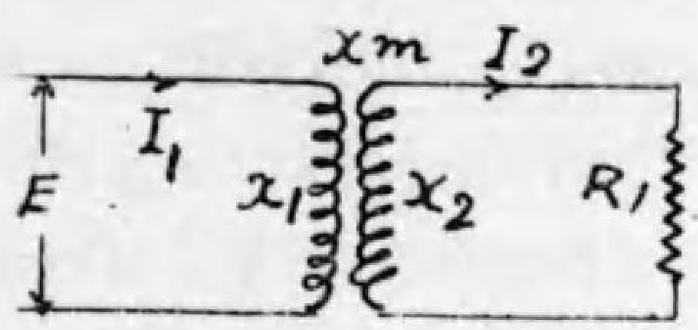
$$\therefore\quad \dot{I}_1=\frac{\dot{E}(8+j2)}{16+j12}=\frac{\dot{E}(4+j1)}{(8+j6)}=\frac{100(4+j1)(8-j6)}{(8+j6)(8-j6)}$$

$$=\frac{100(32+j8-j24+6)}{64+36}=38-j16$$

$$\therefore\quad I=2\sqrt{19^2+8^2}=2\times20.6=41.2\ \text{アンペア}$$

$$\text{力率}=\frac{19}{\sqrt{19^2+8^2}}=\frac{19}{20.6}=0.922$$

例 4. 第191圖の如く自己インダクタンスによるリアクタンス x_1 と x_2 とが連接せられその間に相互誘導によるリアクタンス x_m が存在する。今二次側に抵抗Rを接續したとすれば此の回路のインピーダンスを求む。



第 1 9 1 圖

解 今相互誘導の作用を差算的と假定すれば次の式が成立する。

$$\dot{E}=j\dot{I}_1x_1-j\dot{I}_2x_m \quad \cdots\cdots(1)$$

$$0=\dot{I}_2R+j\dot{I}_2x_2-j\dot{I}_1x_m \quad \cdots\cdots(2)$$

(2) より $\dot{I}_2(R+jIx_2)=j\dot{I}_1x_m$

$$\dot{I}_2=\frac{jx_m\dot{I}_1}{R+jx_2} \quad \cdots\cdots(3)$$

(3)を(1)に代入 $\dot{E}=j\dot{I}_1x_1-\frac{jx_m\times jx_m\dot{I}_1}{R+jx_2}$

$$\dot{E}(R+jx_2)=\dot{I}_1(jx_1R-x_1x_2+x_m^2)$$

$$\therefore \quad \frac{\dot{E}}{\dot{I}_1}=\frac{x_m^2-x_1x_2+jx_1R}{R+jx_2}$$

此の$\frac{\dot{E}}{\dot{I}_1}$が此の回路の合成インピーダンスを一次側に換算したものであつて此の式の分母を有理化して見ると次の通りになる。$\dot{Z}$は此の$\frac{\dot{E}}{\dot{I}_1}$を表はす。

$$\dot{Z}=\frac{(x_m^2-x_1x_2+jx_1R)(R-jx_2)}{(R+jx_2)(R-jx_2)}$$

$$=\frac{Rx_m^2-2Rx_1x_2+j(x_1R^2-x_2x_m^2+x_1x_2^2)}{R^2+x_2^2}$$

之よりしてZの大きさは次の通りになる。

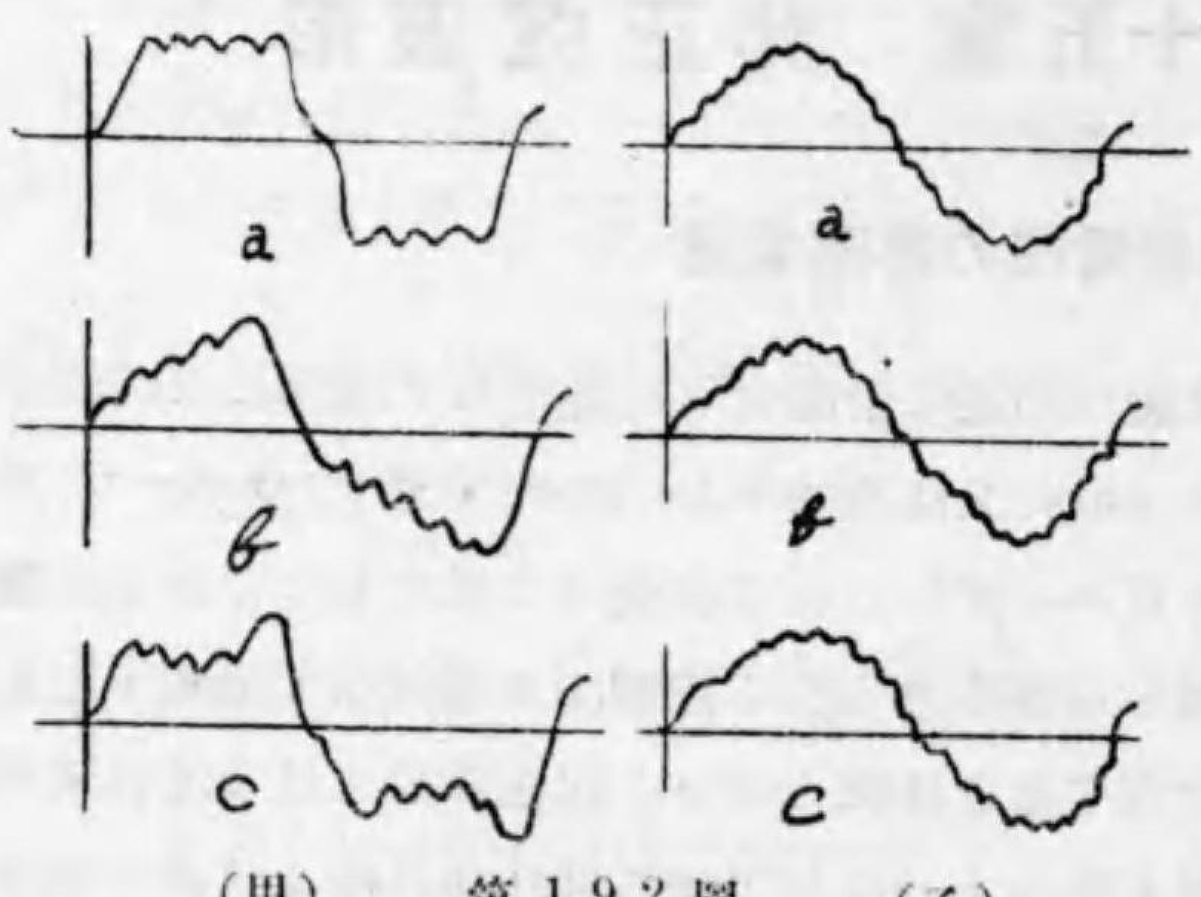
$$Z=\frac{\sqrt{(Rx_m^2-2Rx_1x_2)^2+(x_1R^2-x_2x_m^2+x_1x_2^2)^2}}{R^2+x_2^2}$$

第十五章 非正弦波形

1. 交流發電機の電壓電流

今迄述べた交流の問題は全部交流の電壓なり電流なりの波形を**正弦波**（Sine wave 又はSinsoidal wave サイン ウエーヴ 又はシンソイダルウエーヴ）として取扱つて居たものであるが實際の交流發電機から發生せられる電壓なり電流なりは必ずしも正弦波の波形を有するとは限らない。現在に於ては交流の波形は正弦波形が最も良いと云はれて居るけれ共凡ゆる負荷の狀態に於て純粹な正弦波の電壓なり電流なりを發生せしめんとするならば發電機の價額も非常に高價となり實用に適しない。從つて普通の發電機は正弦波形に近い電壓や電流を發生せしめる樣には出來て居るけれ共幾分は純粹なる正弦波より異つた波形を有するものである。此の電壓電流の波形については從來色々な說が行はれ或る時には尖頭波形を有する電壓が變壓器等に對して最も適當であると云はれたものであるが之はヒステリッス損失が僅少で能率が大となるからである。然しながら波形が正弦波より歪む時には鐵及び銅の渦電流が增加するので尖頭波形の電壓が能率を良好にすると云ふ事は疑はしい所でその上一部の人々は絕緣物に對して危險が多いと主張したものである。又照明用としては最大値の附近に於ける時間の長い扁平波が最も都合が良く靜かな照明が得られると考へられたものである。然しながら今では之等の立場とは全然異つた見地から正弦波が良い事になつて居る。現今使用せられて居る發電機に於ける磁束の

分布狀態を調べて見ると第192圖甲の通りであつてその狀態は負荷の如何によつて變るものである。第192圖 甲圖の a は發電機が無負荷に於ける磁束の分布狀態を示すものであつて b は之に無誘導負荷を加へた場合の磁束の分布狀態、c は誘導負荷を加へた場合の磁束の分布狀態である。斯くの如く磁束の分布狀態が負荷の如何によつて變化するのは發電子反作用の影響によるものである。今之等の磁束を發電子の捲線が切つて起電壓を發生したとすればその電壓の波形は第192圖乙に示す通りになる。此の圖に於ても a は無負荷、b は無誘導負荷、c は誘導負荷に於ける電壓の波形を示すものである。



(甲) 第192圖 (乙)

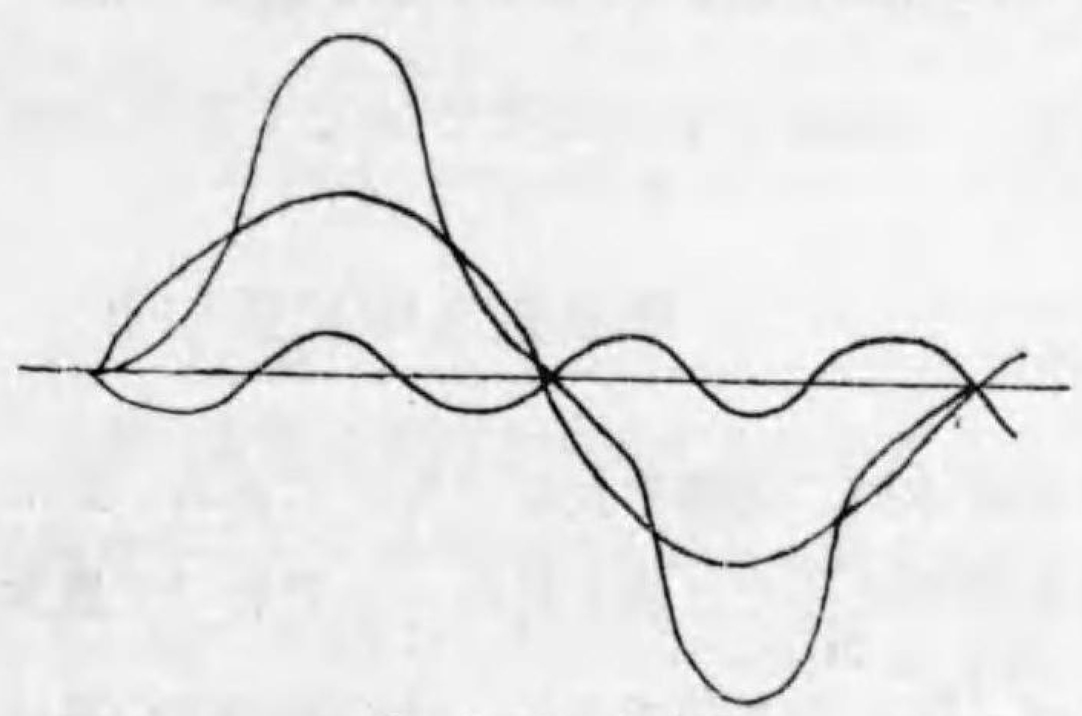
2. 高 調 波

一般に發電機なり變壓器なりから出る電壓又は電流の瞬時値を式で示して見ると次の通りになるものである。但し e 及び i は夫々電壓電流の瞬時値、t は時間、ω は角速度 $(2\pi f)$ である。

$$e=E_1\sin(\omega t+\theta_1)+E_3\sin(3\omega t+\theta_3)+E_5\sin(5\omega t+\theta_5)+\cdots\cdots+E_n(n\omega t+\theta_n)\cdots\cdots(92)$$

$$i=I_1\sin(\omega t+\theta_1)+I_3\sin(3\omega t+\theta_3)+I_5\sin(5\omega t+\theta_5)+\cdots\cdots+I_n(n\omega t+\theta_n)\cdots\cdots(93)$$

此の式の中で第一項の $E_1\sin(\omega t+\theta_1)$ と$I_1\sin(\omega t+\theta_1)$とは夫々電壓なり電流なりの**基本波**（Foundamental wave 又は First harmonic フアンドメンタル ウエイヴ又はフアースト ハーモニック）と稱せられて居る。同樣にして第二項の $E_3\sin(3\omega t+\theta_3)$ や $I_3\sin(3\omega t+\theta_3)$ は夫々電壓又は電流の **第三高調波**（Third harmonic サード ハーモニック）と稱せられて居る。之等の**高調波**は何れも基本波の周波數の3倍なり5倍なり7倍なりになるものであつて第三高調波はその式に於て明らかに示されたる如く基本波の3倍の周波數を有し**第五高調波**は基本波の5倍の周波數を有して居る。一般の電壓とか電流とかは公式(92)なり(93)なりによつて表はす事が出來るものであるから比較的複雜な波形を有する電壓や電流も皆之等の式にて表はし得られる。つまり複雜なる波形を有する電壓電流でも基本波とその奇數倍の周波數を有する正弦波とに分解する事が出來るのである。その例として第193圖に示す e なる電壓の波形を分解して見ると基本波の $E_1\sin\omega t$ と第三高調波の $E_3\sin 3\omega t$ とに分けられ圖に示す如く差となる。


第193圖

$$e=E_1\sin\omega t-E_3\sin 3\omega t$$

斯くの如く一般に存在する電壓なり電流なりは何れも基本波

と高調波とに分解せられ純粋なる正弦波の外に高調波を含むものである。此の高調波の中で一般に第三高調波が最も大きく第五高調波や第七高調波は段々とその大きさが小さくなるのが普通である、之等の高調波は交流の回路に於て色々な作用を行ひ變壓器の三相接續等に於ては此の高調波の影響を除かんとする樣な苦心が用ひられて居る。

3. 非正弦波電流の實效値と電力

電壓電流の **實效値** (Effective value エフエクチヴ ヴアリユー) と云ふのは 夫等の各瞬間値を 二乘した 平均の平方根で ある。今次の如き非正弦波電壓があるとする。

$$e = E_{1m}\sin(\omega t+\theta_1)+E_{3m}\sin(3\omega t+\theta_3)$$
$$+E_{5m}\sin(5\omega t+\theta_5)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此の電壓の實効値 E は次の式で表はされる。

$$E=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2dt}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(94)$$

電流の實效値 I も之と 同樣にして 次の式で 表はす事が 出來る。

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2dt}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(95)$$

之等の式に於て T は基本波の**週期**を表はすものである。此の實效値は正弦波の基本波形に於ては最大値の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ であつて**最大値**を I_m で表はすならば $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$ となる譯である。此の實效値の事は R. M. S. で表はす事もあつて之を**ルート、ミーン、スクエヤー** (Root mean squar) と呼んで居る。次に非正弦波電壓の實效値 E と電流の實效値 I とは夫々次の通りになる。

$$E=\sqrt{\frac{E_{1m}^2}{2}+\frac{E_{3m}^2}{2}+\frac{E_{5m}^2}{2}+\frac{E_{7m}^2}{2}+\cdots\cdots}(96)$$

$$I=\sqrt{\frac{I_{1m}^2}{2}+\frac{I_{3m}^2}{2}+\frac{I_{5m}^2}{2}+\frac{I_{7m}^2}{2}+\cdots\cdots}(97)$$

然るに實效値は最大値の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから基本波及び各高調波の電壓なり電流なりを最大値で表はす代りに實效値で表はすならば次の通りになる。但し $E_1E_3E_5$ 及び $I_1I_3I_5$ 等は何れも電壓電流等の實效値を示すものである。

$$E=\sqrt{E_1^2+E_3^2+E_5^2+E_7^2+}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(98)$$

$$I=\sqrt{I_1^2+I_3^2+I_5^2+I_7^2+}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(99)$$

從つて非正弦波電壓又は電流の實效値は基本波及び高調波の實效値を二乘して加へ合し之を平方根に開いたものである。

次に非正弦波の電流電壓による電力を考へて見る。今一つの回路に高周波を含む交流電壓が加はるものとする。此の場合に P_1 を基本波による電力、P_3P_5 等を高調波による電力とすれば全電力は次の式で示される。

$$P=P_1+P_3+P_5+P_7+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(100)$$

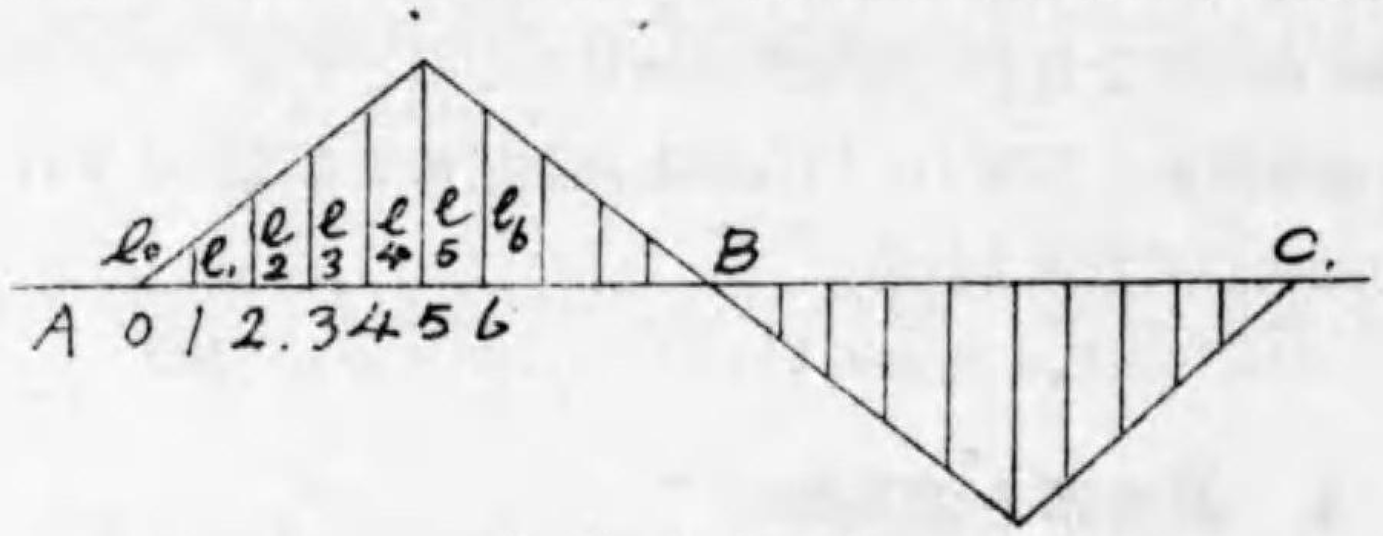
4. 波形率と波高率

交流の電壓や電流を測定する場合にはその電壓なり電流なりが場合によつては零となる瞬間もあるし最大値に達する瞬間もある。從つてその大きさを表はすにその最大値を以つて表はすと之が熱を發生したり他の仕事をしたりする力が直流に比較して餘程小さくなる。從つて直流に於ける電壓や電流と同じ仕事をする電壓なり電流なりを交流に於てもその單位に取らなければならない。之が卽ち交流の電壓なり電流なりの **實效値** であ

る。今日我々が何ヴオルトとか何アンペアとか呼んで居るのは皆此の實效値である。此の實效値と最大値とはその間の關係が波形の如何によつて變るものであつて例へば正弦波に於ては電壓の實效値は電壓の最大値の$\sqrt{2}$の分の1であり電流の實效値は電流の最大値の$\sqrt{2}$分の1であるが他の波形の實效値は最大値の$\sqrt{2}$分の1ではない。然しながら電流計や電壓計は如何なる型のものであつてもその波形の如何にかゝはらずその實效値を指示するものである。然らば實效値は如何なるものであるかと云へば電流なり電壓なりの各瞬間の値を二乘したものゝ平均を平方根に開いたものである。之を式で表はせば次の如きものである。

$$\text{實效値} = \sqrt{(\text{各瞬間の値})^2\text{の平均}} \cdots\cdots\cdots\cdots (101)$$

今之を圖によつて示すと第194圖に於て三角形の波形を有す



第 1 9 4 圖

る交流電壓があるとする。此の場合の電壓の瞬時値を$e_1 e_2 e_3$等とし之等は一周波をn箇の數に平均に分けられて居るとする。此の場合の電壓の實效値は次の通りである。

$$\text{實效値} = \sqrt{\frac{e_0{}^2 + e_1{}^2 + e_2{}^2 + e_3{}^2 + e_4{}^2 + e_5{}^2 + \cdots\cdots e_n{}^2}{n+1}}$$

若し此の波形が直線の波形でなくて曲線の波形であるとするならば斯くの如き方法では各瞬間の電壓を二乘したものゝ平均

値を見出す事は出來ない。之は電壓なり電流なりの各瞬間の二乘を一周期まで積分し之を周期で割つてその平均を出して居る。此の平均を平方に開けば實效値が見出される譯でその實効値は94式に示した通りである卽ち

$$\text{實効値} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2 dt}$$

次に波形の**平均値**（Average value アヴアーレイヂヴアリユー）と云ふのがある。此の平均値と云ふのは波形の平均の値であつて第194圖の如き波形の例を取つて云へば平均値は次の通りである。

$$\text{平均値} = \frac{e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + \cdots\cdots e_n}{n+1}$$

之は直線の圖形を有する場合には上の如き方法によつてその平均値を計算する事も出來るけれどもその波形が曲線で出來て居る場合には半波數の面積を求め此の面積を半分の周期で割ればよい。卽ち波形の平均値は次の式で表はされる。

$$\text{平均値} = \frac{\text{半波形の面積}}{\text{半周期の長さ}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (102)$$

$$\text{又は平均値} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e\,dt$$

非正弦波形が正弦波に比較してどんな違ひがあるか否かと云ふ事を表はすのに**波形率**（Form factorフオーム フアクター）なる言葉と**波高率**（Crest factorクレスト フアクター）なる言葉とが用ひられて居る。之等は如何なるものかと云へば波形率は實效値を平均値で割つたもの、波高率は最大値を實效値で割つたものである。今或る電壓の瞬時値をeで表はし最大値をE_mで表はすならば波形率と波高率とは次の式で表はされる。

$$波形率=\frac{實効値}{平均値}=\frac{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2dt}}{\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} edt} \quad \cdots\cdots(103)$$

$$波高率=\frac{最大値}{實効値}=\frac{E_m}{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2dt}} \quad \cdots\cdots(104)$$

今之等の式を使用して波形率と波高率とを計算して見ると別表に示されたる如き波形率と波高率とが得られる。今例として三角形の波形率と波高率とを計算して見る。此の三角形は直線形なるを以つて積分を使用しなくてもその實效値値と平均値とが計算し得られるものである。先づ三角形の最高値を h となし

波形率及波高率表

波　　形	實　効　値	波　形　率	波　高　率
正　弦　波	$\frac{A}{\sqrt{2}}=0.707A$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1.11$	$\sqrt{2}=1.414$
三　角　波	$\frac{A}{\sqrt{3}}=0.577A$	$\frac{2}{\sqrt{3}}=1.155$	$\sqrt{3}=1.732$
矩　形　波	A	1	1
梯　形　波	$A\sqrt{1-\frac{4\alpha}{3\pi}}$	$\sqrt{1-\frac{4\alpha}{2\pi}}\Big/\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)$	$1/\sqrt{1-\frac{4\alpha}{3\pi}}$
楕圓形波	$A\sqrt{\frac{2}{3}}=0.815A$	$\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3}}=1.04$	$\sqrt{\frac{3}{2}}=1.226$
拋物線波	$A\sqrt{\frac{8}{15}}=0.73A$	$\sqrt{\frac{5}{6}}=1.10$	$\sqrt{\frac{15}{8}}=1.370$
半圓形波	$A\sqrt{\frac{2}{3}}=0.815A$	$\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3}}=1.04$	$\sqrt{\frac{3}{2}}=1.226$

底の長さを a とすれば實效値は高さの二乘の平均なるを以つて次の通りになる。

$$實効値=\sqrt{\frac{0+h^2+0}{3}}=\frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$平均値=\frac{面積}{a}=\frac{\frac{ah}{2}}{a}=\frac{h}{2}$$

故に　$$波形率=\frac{\frac{h}{\sqrt{3}}}{\frac{h}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$波高率=\frac{h}{\frac{h}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$$

5　高調波による共鳴

共鳴又は**共振**（Resonance レゾナンス）については前にも述べた處であるが、一つの電壓なり電流が高調波を含んで居る場合にその基本波が共振を生じなくても高調波が共振を生ずる事がある。之を高調波に對する共振と呼び實際の場合に於て屢々起きる現象である。元來基本波形が共振を生ずる條件としては次の式が成立する場合又は之に近い場合である。

$$\omega L=\frac{1}{\omega C} 又は \omega=\frac{1}{\sqrt{CL}} 或は f=\frac{1}{2\pi\sqrt{CL}}$$

之と同様にして n 次の高調波に對する共振も同様な式を以つて表はさる。但し f_0 は高調波の周波數で ω は基本波の角速度である。

$$n\omega L=\frac{1}{n\omega C} 又は n\omega=\frac{1}{\sqrt{CL}}$$

$$或は\ nf=f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{CL}}$$

先づその例として RLC の直列回路に e なる電壓を供給した

場合を考へて見る。此の場合にキヤパシチーCは100マイクロフアラッドでインダクタンスLは10.6ミリヘンリーであるとし電壓eを次の如きものとする。

$$e=E_1\sin(\omega t+\theta_1)+E_3\sin(3\omega t+\theta_3)+E_5(5\omega t+\theta_5)$$

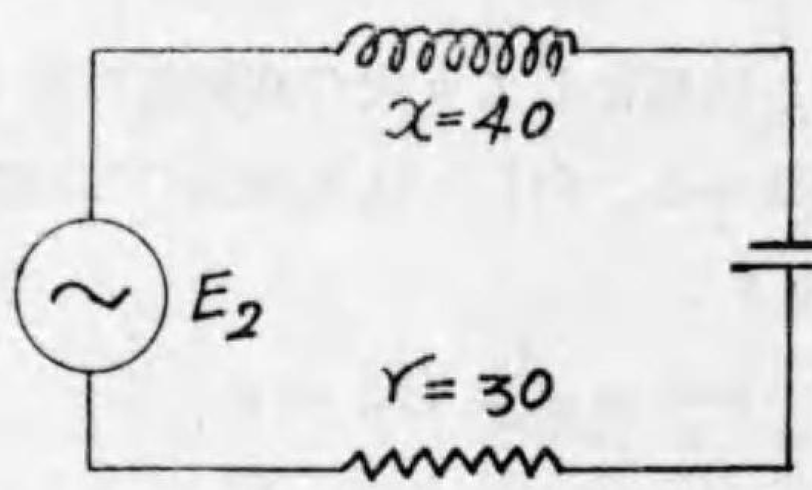
此の場合に基本波形に共鳴する周波數を見出すと次の通りになる。

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{CL}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{0.0001\times0.0106}}=150\ \text{サイクル}$$

従つて基本波形の周波數が150サイクルであるならば共鳴の現象を引き起すのである。處が今基本周波數が50サイクルとするならば第三高調波の周波數が150サイクルとなつて第三高調波が共鳴を生ずる事になる。又基本周波數が30サイクルであるとするならば第五高調波周の波數が150サイクルとなつて第五高調波が共鳴の現象を起すのである。

6. 例 題

例 1. 第195圖に於て直流電壓を90ヴォルトとし交流電壓を100ヴォルトとする。今全部のリアクタンスを40オームとし全部の抵抗を30オームとすれば此の回路に流れる電流の實効値Iを見出せ。



第 1 9 5 圖

解 之は重疊の理によつて解かれるものであつて交流の電壓が無いとするならば此の回路に流れる直流電流I′は次の通り

になる。

$$\dot{I}'=\frac{\dot{E}_1}{r}=\frac{90}{30}=3\ \text{アンペア}$$

次に直流の電壓が無く交流電壓のみと假定するならば此の回路には次の電流が流れる譯である。

$$\dot{I}''=\frac{\dot{E}_2}{r+jx}=\frac{100}{30+j40}=0.04(30-j40)$$

$$\therefore\ I''=0.04\sqrt{2500}=2\ \text{アンペア}$$

直流の電流は周波數が零なる交流と考へ前に示した第88式によつて二つの電流を重疊すれば次の如く此の回路に流れる電流の實効値を求める事が出來る。

$$I=\sqrt{(I')^2+(I'')^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}=3.6\ \text{アンペア}$$

例 2. 抵抗とインダクタンスとキヤパシチーとの三つが直列に接續せられて居る回路があつてインダクタンスは44ミリヘンリー、キヤパシチーは17.6マイクロフアラッドとする。今此の回路に次の如き電壓を加へるとすれば第何次の高調波に共振を生ずるか、但し基本波の周波數を60サイクルとす。

$$e=E_1\sin\omega t+E_3\sin(3\omega t+\theta_3)+E_5\sin(5\omega t+\theta_5)$$

解 共振を生ずる周波數は次の式で求めらる。

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{CL}}$$

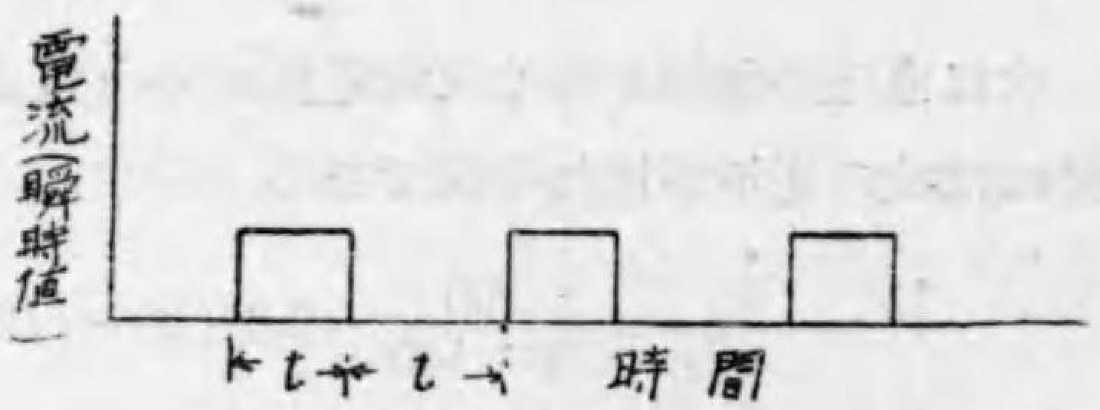
此の式に $C=0.0000176$　$L=0.044$ を代入すれば次の通りになる。

$$f=\frac{1}{2\pi\times\sqrt{0.0000176\times0.044}}=\frac{1}{2\pi\times0.000885}=180$$

従つて基本波が60サイクルならば是が此の回路を流れると第

三高調波が共振を生ずる事になる。

例 3. 第196圖の如き波形の脈動電流を熱線型電流計を以て測定したるに10Aを指示したりと云ふ。今此の電流を可動線輪型電流計を以て測定せば、其の指示幾何となるか。(昭和十一年三種一次)



第196圖

解　熱線型電流計は電流の實效値を指示し可動線輪型電流計は電流の平均値を指示するものなり。故に電流の波高値を i と假定して圖の如き波形の脈動電流の波形率 K_f を求むれば

$$K_f=\frac{\sqrt{\frac{i^2t}{2t}}}{\frac{it}{2t}}=\sqrt{\frac{i^2}{2}}\times\frac{2}{i}=\sqrt{2}$$

然るに

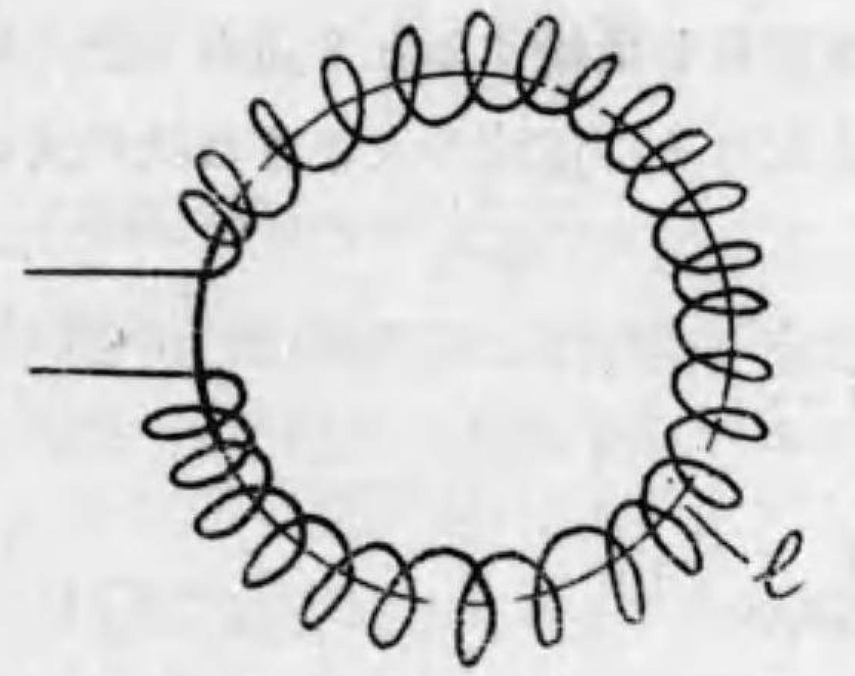
$$\dot{K}_f=\frac{\text{實效値}}{\text{平均値}}=\frac{\text{熱線型電流型の指示}}{\text{可動線輪型電流計の指示}}=\sqrt{2}$$

故に可動線輪型電流計の指示 $=\frac{10}{\sqrt{2}}=7.07\text{A}$

第十六章　交流による鐵の磁化

1. 空心ソレノイドのインピーダンス

第197圖に示した如き中が中空になつて居るソレノイドがあるとする。此の環狀中空ソレノイドはその中心に於ける全長が l センチメートルでその切斷面積は A 平方センチメートルとし之に捲かれたるソレノイドの捲數を n とする。而して長さ ℓ はその直徑に比較して甚だ大であつて之に電流を流した場合に生ずる磁界は何處でも一定であるとなしソレノイドの捲線の抵抗は全然無いものと假定して見る。今此のソレノイドに電磁單位の單位電流卽ち實用單位で云ふならば10アンペアの電流を流して見ると之によつて生ずる總磁束は次の式で表はされる。



第197圖

$$\Phi=\frac{\text{起磁力}}{\text{レラクタンス}}=\frac{4\pi n}{\frac{\ell}{A}}=\frac{4\pi nA}{\ell}\cdots(105)$$

但　Φ………總磁束

n………捲數

ℓ………輪の平均の長さ(糎)

A………切斷面積(平方糎)

次に線輪の自己インダクタンス L は次の式を以つて表はされ

る。

$$L=\Phi n10^{-9}=\frac{4\pi n^2A}{\ell}\times10^{-9}\text{ ヘンリー}\cdots\cdots(106)$$

今此の線に f なる周波数の交流を供給するとするならば捲線のリアクタンスは次の式で示す値を有する。

$$x=\omega L=2\pi fL=\frac{8\pi^2fn^2A}{\ell}\times10^{-9}\text{ オーム}\cdots\cdots(107)$$

此の場合に於て捲線の抵抗は零と假定してあるのでそのインピーダンスは誘導リアクタンスのみである。

今此の線輪に純正弦波の電壓 E を供給するとするならば之に流れる電流も同じく正弦波となりその電流の大きさは次の式にて表はされる。

$$\dot{I}=\frac{\dot{E}}{\dot{Z}}=\frac{\dot{E}}{jx}=-j\frac{\dot{E}}{x}$$

$$I=\frac{E}{x}=E\times\frac{\ell}{8\pi^2fn^2A}\times10^9$$

今此の場合に於ける電壓 E と電流 I 及び磁束 Φ との關係を示すと電流 I は電壓 E より90度遅れ磁束 Φ も90度遅れて電流と磁束とは同相となる。所が此の捲線の中に電流が流れて磁束 Φ が發生するならば此の交番磁束 Φ は捲線を切り之によつて捲線の中に誘起電壓を發生する。此の誘起電壓は供給電壓と平衡する電壓であつて磁束 Φ より90度遅れる。從つて此の誘起電壓は供給電壓 E よりも 180 度即ち二直角丈遅れる事になり正反對の方向を取る。今此の誘起電壓を E' とするならば誘起電壓の最大値は次の大きさを有する。

$$E_m'=2\pi fn\Phi_m\times10^{-8}\text{ ヴォルト}\cdots\cdots\cdots\cdots(108)$$

之を實效値に直せば次の如き大きさとなる。

$$E'=\sqrt{2}\pi fn\Phi_m\times10^{-8}\text{ ヴォルト}\cdots\cdots\cdots\cdots(109)$$

此の誘起電壓 E' は供給電壓 E とその大きさが相等しい筈であつて方向は正反對の方向を取る。卽ち次の二式が成立する事になる。

$$E_m'=E_m\qquad E'=E\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(110)$$

是等の式からして此のソレノイドの中を通過する磁束の最大値は次の式によつて示す事が出來るものである。

$$E=\sqrt{2}\pi fn\Phi_m\times10^{-8}$$

$$\therefore\quad\Phi_m=\frac{E\times10^8}{\sqrt{2}\pi fn}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(111)$$

$$\text{又は}\quad\Phi_m=\frac{E_m\times10^8}{2\pi fn}$$

從つて此の場合の磁化電流 I は次の通りになる。

$$I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=\frac{E\ell\times10^9}{8\pi^2fn^2A}\text{ アンペア}\cdots\cdots\cdots\cdots(112)$$

以上の計算はソレノイドの中が中空であつて空氣のみが充たされて居る場合であつたけれ共之に空氣以外の物質が入つて居ればその計算は異つて來る。卽ちあらゆる物質には**導磁率**(Permeability パーミヤビリチー)なるものがあつて此の導磁率卽ちパーミヤビリチーの大小によつても大いに異る。此のパーミヤビリチー以外に於ても**ヒステリシス**(Hysteresis)とか**渦電流**(Eddy current エディカーレント)とかによつても是等の計算や電流電壓の波形等が變るものであるが今假りにヒステリシスと渦電流との現象を無視してパーミヤビリチーのみを考へて見る。今此のソレノイドの中に入れられて居る物質のパーミヤビリチーを μ とすれば此のソレノイドのインダクタンスは μ 倍となり從つてリアクタンスも μ 倍となる。從つて μ なる導磁率

を有する物質がソレノイドの中にある場合に於けるインダクタンスLとリアクタンスxとは次の式の通りになる。

$$L=\frac{4\pi n^2 A\mu}{\ell}\times 10^{-9}\ \text{ヘンリー}\cdots\cdots\cdots\cdots(113)$$

$$x=\frac{8\pi^2 f n^2 A\mu}{\ell}\times 10^{-9}\ \text{オーム}\cdots\cdots\cdots\cdots(114)$$

從つてサスセプタンスはμ分の一になる譯で一定の大きさの磁束を發生せしむべき磁化電流はμ分の一に減少する筈である。卽ち此の磁化電流は次の如き大きさを有する事になる。

$$I=\frac{E\ell\times 10^9}{8\pi^2 f n^2 A\mu}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(115)$$

2. ソレノイドに鐵心を入れた場合

今迄述べた所は主としてソレノイドの捲線の内部が中空になつて居た場合であつて最後には導磁率μなる物質を入れた場合を述べた。所がソレノイドの內部に鐵心を入れて見ると今迄述べた狀態より少し變化を生じて來る。その第一は導磁率のμが一定ではない事であつて此の導磁率は磁束密度Bを磁化力Hで割つたものであるが物質によつてもその値を變へ且同じ物質についてもその溫度とか磁束密度の大小とかによつてその値を變へ必ずしも一定ではない。その上ヒステリシスと渦電流との作用を受けてその狀態がづつと違ふものである。先づヒステリシスの現象のため鐵心に捲かれたソレノイドに正弦波形の電壓を供給しても之に流れる電流は正弦波とはならない事が空心のソレノイドと違つて居る。それから空心ソレノイドに電壓を供給するならば電流は電壓より90度遲れるけれ共鐵心ソレノイドの電流は電壓より完全に90度遲れない。

今鐵心の渦電流の事は考へずにヒステリシスの事のみを考へて見る。今捲線に電流を供給して鐵心を磁化して見ると前卷磁氣學の第94頁に示した第27圖の如き一つの環線を作る。之を**ヒステリシス環線**（Hysteresis loop）と呼んで居る。今鐵心の上に捲かれたソレノイドに正弦波の交流を供給するとその捲線に誘起する逆起電壓も正弦波の電壓でなければならない事になる。所が正弦波形の電壓は正弦波形の磁束を切つて初めて正弦波の電壓が得られるのであるから鐵心內の磁束も正弦波形でなくてはならない筈である。今鐵心に捲かれたる捲線に正弦波形の電流を流して見ると今述べたヒステリシス現象の影響を受けて正弦波の磁束は發生し得ないのである。正弦波の磁束が發生しなければ誘起せられる逆起電壓も正弦波ではなくなり供給電壓に平衡する事が出來なくなる。從つて鐵心を有するソレノイドに正弦波電壓を供給しても之に流れる勵磁電流は正弦波形にはならないものである。

今鐵心をソレノイドに入れた場合に於ける誘起電壓Eの公式を示すと次の通りである。

$$E=4.44 f n A B_m\times 10^{-8}\ \text{ヴォルト}\cdots\cdots\cdots(116)$$

3. ヒステリシス損失

鐵のヒステリシス損失は次の式から計算し得られるのである。

$$P_h=\eta f V B_m^{1.6}\times 10^{-7}\ \text{ワット}\cdots\cdots\cdots\cdots(117)$$

但 f……周波數　　P_h……ヒステリシス損失

η……ヒステリシス係數　　B_m……最大磁束密度

V……鐵の體積(立方センチメートル)

此の式に於ける η は**ヒステリシス係數**（Coeficient of hysteresis コエフイシエント オヴ ヒステリシス）と呼ぶものであつて此の價は普通の鐵板に於ては 0.001 から 0.0055 の價を有して居るが硅素鋼板に於ては 0.001 よりも小さい價を有する。又 V は體積であつて今Aをソレノイド鐵心の切斷面積とし ℓ を輪の平均の長さとするならば $V=A\ell$ なる關係がある。又最大磁束密度 B_m は次の如き大きさを有するので此の二つの式を第116式に代入すればヒステリシス損失 P_h は第118式の如き形となる。

$$B_m=\frac{E}{\sqrt{2}\pi fnA}\times 10^8$$

$$P_h=58000\frac{\eta E^{1\cdot 6}\ell}{f^{0\cdot 6}A^{0\cdot 6}n^{1\cdot 6}}\cdots\cdots\cdots\cdots(118)$$

4. 渦電流の損失

鐵心を有するソレノイドに電流を供給すると鐵心の中に於てヒステリシスの損失と渦電流の損失との二つの損失が生ずるものであつて此の二つの損失を**鐵損失**（Iron loss アイロン ロス）と呼ばれて居る。ヒステリシスによる損失は今述べた所であつて今度は**渦電流損失**（Eddy current loss エデイ カーレント ロス）について述べる。渦電流は鐵心を通過する磁束を鐵心自身が切つて鐵心の中に電流を流す損失であつて次に示す式によつて計算する事が出來る。

$$P_e=\varepsilon CVf^2B_m{}^2\times 10^{-7}\cdots\cdots\cdots\cdots(119)$$

但　P_e……渦電流損失　　ε……渦電流係數
　　C……電導率　　V……鐵心の體積(立方糎)
　　f……周波數　　B_m……最大磁束密度

此の中Cは鐵の**電導率**（Conductivity コンダクチヴイチイ）にして普通の鐵板ならば 10^5 位の値を有して居るが硅素鋼板になると 2×10^4 位の値を取つて居る。又 ε は鐵板の**渦電流係數**（Coeficient of eddy current コエフイシエント オヴ エデイ カーレント）であつてその値は鐵板の場合にありては次の大きさを有す。

$$\varepsilon=1.645d^2\times 10^{-9}\cdots\cdots\cdots\cdots(120)$$

但　d……鐵板の厚さ(センチメートル)

此の ε は鐵線の場合にありては次の値を有するものである。

$$\varepsilon=0.617d^2\times 10^{-9}\cdots\cdots\cdots\cdots(121)$$

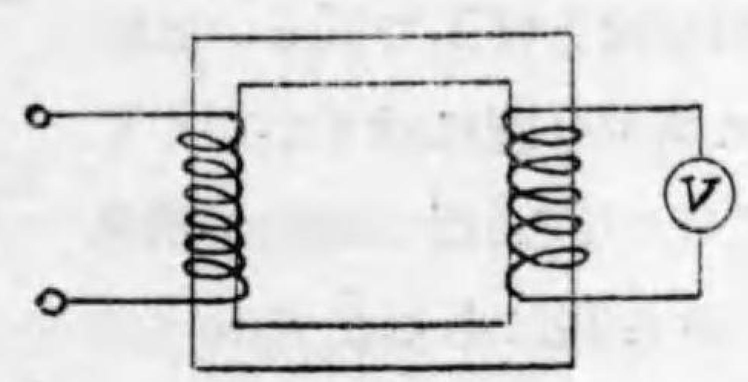
但　d……鐵線の直徑(センチメートル)

第118式の如く鐵心の體積Vは A を切斷面積、ℓ を平均の長さとすれば $V=A\ell$ なる關係があるし B_m は同式に示した通りであるから此の二つの式を第119式に代入して見ると渦電流損失 P_e は次式の通りになる。

$$P_e=\frac{0.507\varepsilon C\ell E^2}{An^2}\times 10^8\cdots\cdots\cdots\cdots(122)$$

5. 例　　題

例 1. 第198圖のエプスタイン裝置に於て一次線輪に f サイクルの交流を通じたるとき二次線輪に接續されたる電壓計の讀みはVヴォルトなりと云ふ。



第１９８圖

此の場合に於ける鐵心内の磁束密度の最大値を算出せよ。但し鐵心の切斷面積はS平

方輝にして二次線輪の捲數はNなりとす。（昭和六年三種測定）

解　此のエプスタイン裝置に於て B_m を磁束密度の最大値とすれば二次側に誘起する逆起電力 V は第116式により次の式を以て表はさる。

$$V=4.44fNSB_m\times10^{-8}\ \text{ヴォルト}\cdots\cdots(1)$$

但　f……一次線輪にかゝる周波數

N …二次線輪の捲數

S……鐵心の切斷面積

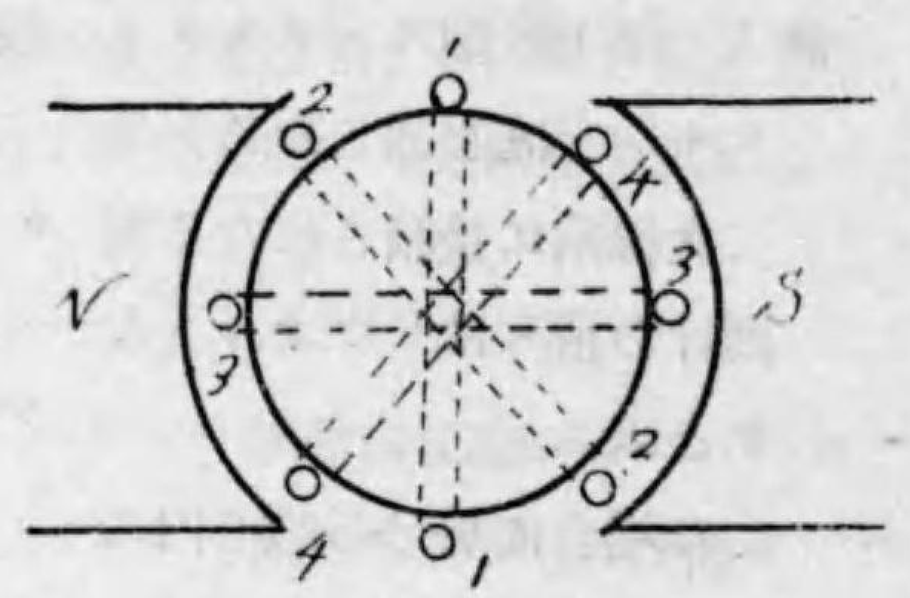
此の(1)式から磁束密度の最大値B_mは次の通りになる。

$$B_m=\frac{V\times10^8}{4.44fNS}\ \text{ガウス}$$

第十七章　多相交流と三相對稱電壓

1. 多　相　交　流

周波數が同一でその相が違つて居る２箇又は２箇以上の交流起電力がある場合に之を多相交流と呼んで居る。此處に第199圖に示すが如く1, 2, 3, 4なる4箇の線輪が磁極NSの間にあるとする。今此の４つのコイルが捲いてある廻轉子を廻轉すると各



第 1 9 9 圖

コイルには各々相差の違ふ４つの起電力を發生するものでその周波數は４つのコイルとも同一である。此の四つの起電力は之を別々に供給すれば四つの單相交流が得られる譯であつて之が卽ち**多相交流**で、此の多相式には對稱多相式と非對稱多相式とがある。**對稱多相式**（Symmetrical poliphase system シンメトリカル ポリフエース システム）と云ふのは各相の起電力が互に相等しくして各起電力間の相差が互ひに相等しいものである。例へばn相の多相交流があるとしその位相角が360°/nづゝ違つて居り各相の起電力が相等しいとすれば此の交流は對稱多相式である。對稱多相式でない多相交流は何れも**非對稱多相式**（Unsymetrical poliphase system アンシンメトリカル ポリフエースシステム）である。360度は之を 2π で表はす事が出來るのでn相の對稱多相式の位相角は360°/nで表はす代りに $2\pi/n$ で表はす事も出來る。今對稱多相式の一相の起電力を $E_m\sin\omega t$ で表はすならば他の相の起電力は夫々次の如き式で表はす事が出來る。

$$e_1=E_m\sin\omega t$$

$$e_2=E_m\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$e_3=E_m\sin\left(\omega t-\frac{2\times2\pi}{n}\right)$$

$$e_4=E_m\sin\left(\omega t-\frac{3\times2\pi}{n}\right)$$

$$e_n=E_m\sin\left\{\omega t-\frac{(n-1)\times2\pi}{n}\right\}$$

此の對稱多相式の電壓は之を全部合成すると零となるものであつて之を式で示し見てると次の通りになる。

$$e_1+e_2+e_3+e_4+\cdots\cdots+e_n=\Sigma e=0\cdots\cdots\cdots(123)$$

對照三相式各電壓の間には$\frac{2\pi}{3}$卽ち120度づゝの相差を有しその電壓は次の三つの式で表はす事が出來る。

$$e_1=\sin\omega t$$

$$e_2=\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\quad 又は\quad e_2=\sin(\omega t-120^\circ)$$

$$e_3=\sin\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}\right)\quad 又は\quad e_2=\sin(\omega t-240^\circ)$$

此の三つの起電力のベクター $\dot{E}_1\dot{E}_2\dot{E}_3$ を合成すれば零である。卽ち

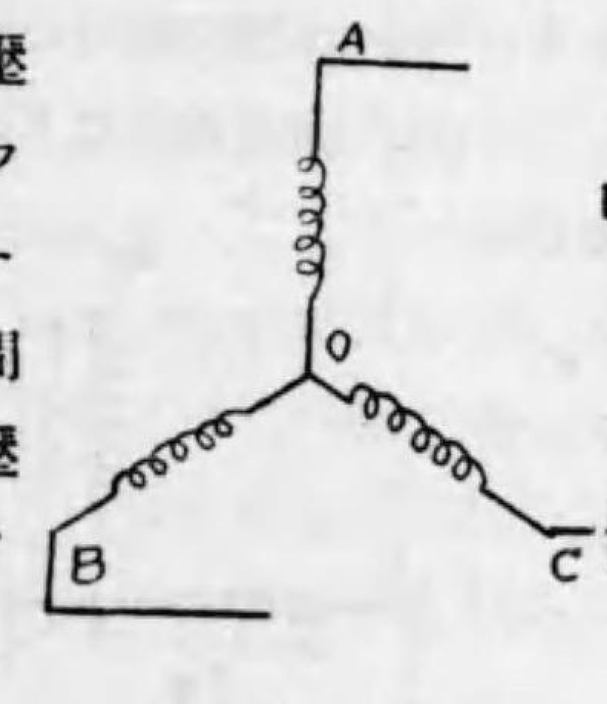
$$\dot{E}_1+\dot{E}_2+\dot{E}_3=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(124)$$

多相式交流の中で最も相數の少ないのは二相交流であつて此の二相交流は二つの起電力の相差が90度卽ち$\frac{\pi}{2}$丈け違つて居り此の電壓が同じでも相差角が$\frac{\pi}{2}$と$\frac{3\pi}{2}$とであるから對稱式には成り得ないで非對稱式である。

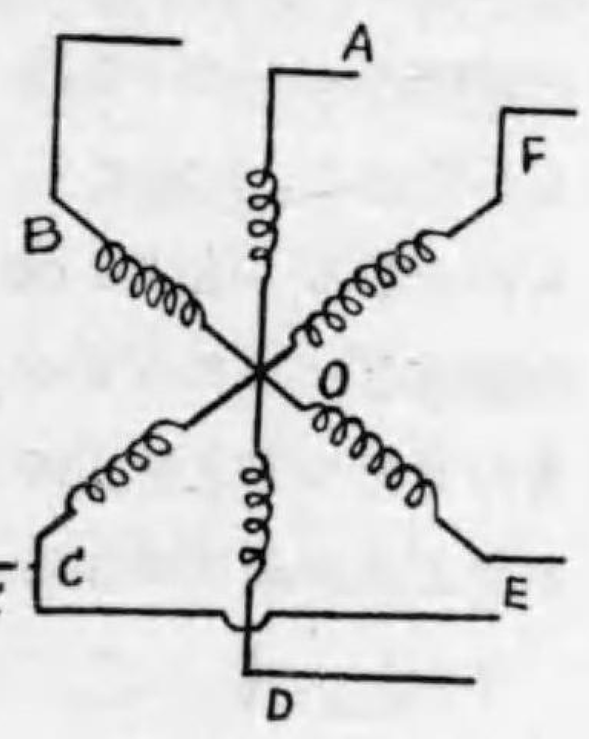
2.　星形接續と環狀接續

多相式交流は各相が獨立して各二本の線を持つて負荷に供給せしむる事も出來るものであつて之を**獨立多相式**と呼んで居るが一般に多相式を使用する場合には各相の線を適當に結合して行つて居る、之を**結合多相式**と呼んで居る。獨立多相式に於ける外部供給用の電線は n 相のものには 2n 本を要するのであるが結合多相式では對稱式に對して n 本、非對稱式に對して(n+1)本のみで足りるのである。結合多相式には線の接續に二通りの接續法があつて星形接續と環狀接續とが夫れである。**星形接續**（Star connection スター　コンネクション）と云ふのは第

200圖及び201圖に見る如く數本の捲線の一方を一箇所O點に集めたもので此のO點を**中性點**（Neutral point ニュートラルポイント）と呼んで居る。200圖は三相式で201圖は六相式を示して此の場合にAO間の電壓を**相電壓**（Phase voltage フェースヴォルテーヂ）と呼びAB間の電壓を**線間電壓**（Line voltage ラインヴォルティヂ）と呼んで居る。次

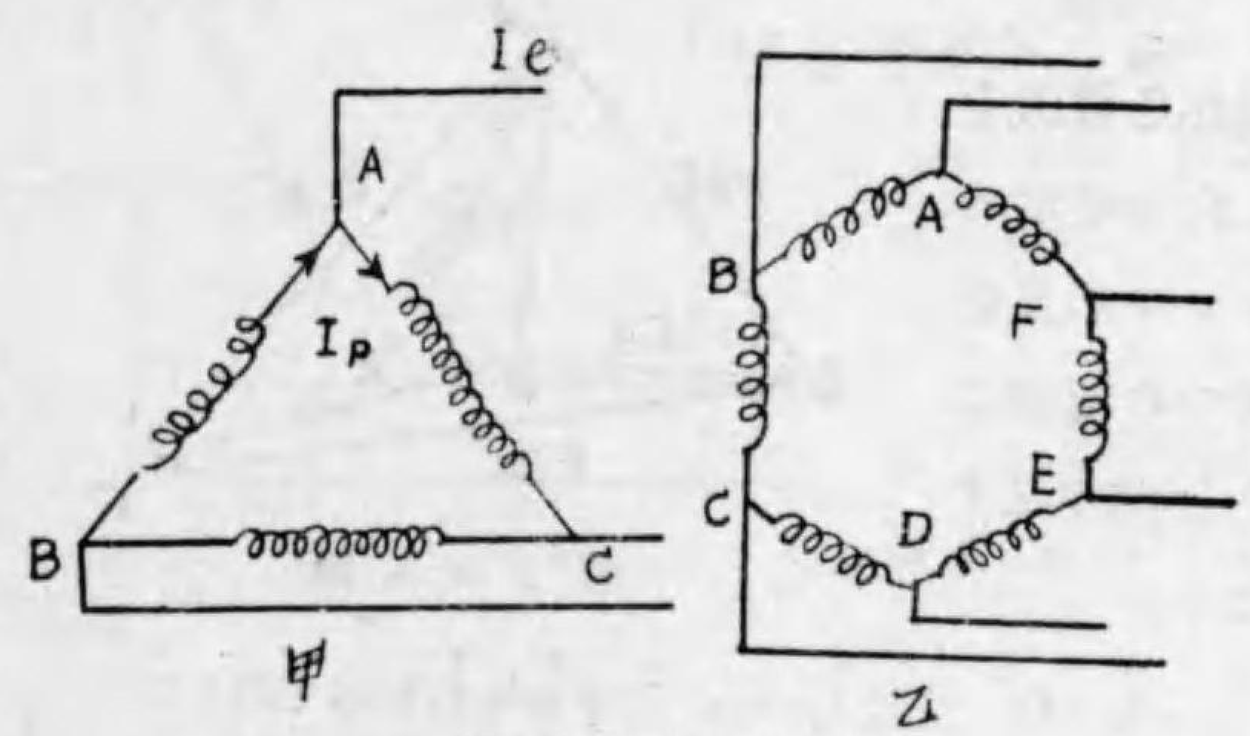


第２００圖



第２０１圖

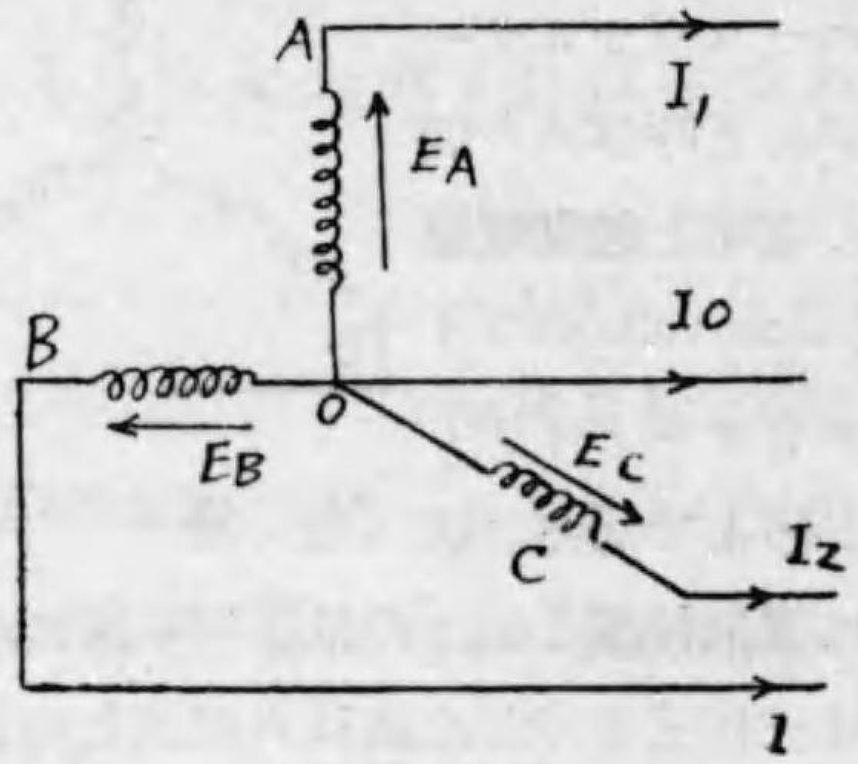
に**環狀接續**と云ふのは第202圖に示す如き接續であつて其甲圖は三相式を示し乙圖は六相式を示して居る。此の場合に三相の環狀接續を**三角形接續**（Delta connection デルタコンネクション）と呼んで居る。又AB間を流れる電流I_pを**相電流**（Phase current フエースカーレント）と呼び外の線に出て行く電流I_lを**線電流**（Line current ライン　カーレント）と呼んで居る。



第２０２圖

3. 星形接續

第203圖の如く接續せられたる三相形接續に於いてその相電壓を夫々$E_A E_B E_C$にて表はすならばAB間の線間電壓はOA間の相電壓のベクター$\dot{E}_A$よりOB間の相電壓のベクター$\dot{E}_B$を引いたものである。同樣にしてBC間の線間電壓は$\dot{E}_B$より$\dot{E}_C$を引いたものである。第204圖は此の關係をベクターで示したものであつて之を式にして示すと次の通りになる。



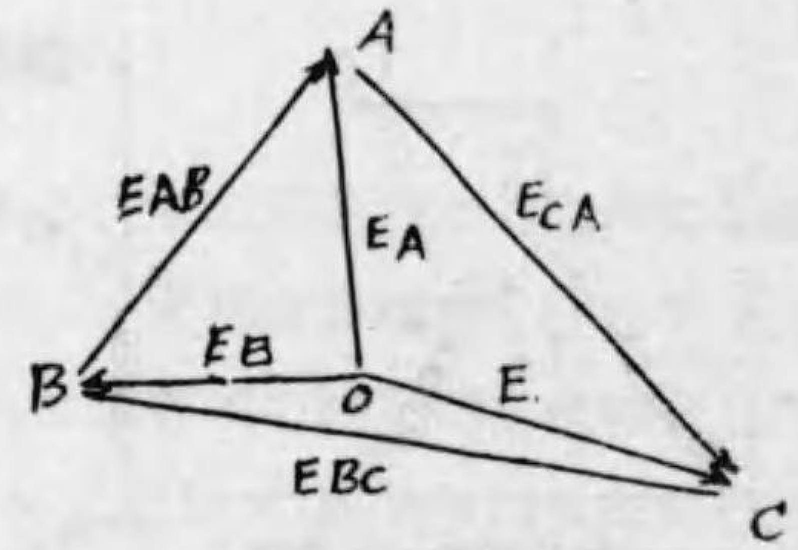
第２０３圖

$$\dot{E}_{AB}=\dot{E}_A-\dot{E}_B$$

$$\dot{E}_{BC}=\dot{E}_B-\dot{E}_C$$

$$\dot{E}_{CA}=\dot{E}_C-\dot{E}_A$$

$$\therefore\ \dot{E}_{AB}+\dot{E}_{BC}+E_{CA}=0\cdots\cdots\cdots(124)$$



第２０４圖

次に各線を流れる電流を第203圖に示した如く取るならばキルヒホツフの法則によつて此の四つの電流の和は零となり之を式で示すと次の通りになる。

$$\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3+\dot{I}_0=0\quad 又は\ \dot{I}_0=-(\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3)\cdots(125)$$

之等の法則は相が幾等あつても同じ事であつて例へばn相の對稱式交流があるとすればそのa相とその次の相との間の線間電壓はa相の相電壓E_aのベクターより次の相の相電壓E_{a+1}の

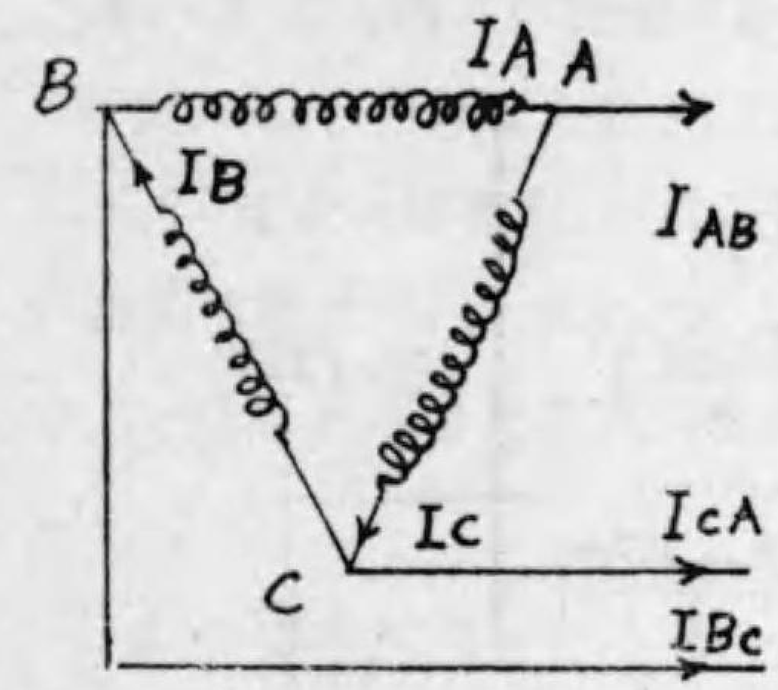
ベクターをベクター的に引けばよい。

所が對稱式の交流で負荷が平衡して居れば各線電流が位相に於いて同じ位相角丈けの間隔を有しその大きさが等しいので$\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3+\dot{I}_4+\cdots\cdots$等の電流ベクターの總和は零となる。從つて中性點より出る電流も零となつて中性線は要らないと云ふ事になる。

之が爲に三相交流に於いては不平衡負荷に供給する場合の外は大低中性點から出る中性線は用ひないものである、然しながら三相式の計算に於いては中性線があるものと假定して考へるのが容易であるから一般に中性線を持ち此の線に$-\dot{I}_1-\dot{I}_2-\dot{I}_3$の電流が流れるものと考へて計算を行ふ。

4. 環狀接續

環狀接續に於いては線間電壓と相電壓とは全く同一である。所が線電流と相電流とは違つて來るものであつて第205圖に於て$\dot{I}_A\dot{I}_B\dot{I}_C$を相電流とし$\dot{I}_{AB}\dot{I}_{BC}\dot{I}_{CA}$を線電流とする。此の場合に$\dot{I}_{AB}$は$\dot{I}_A$より$\dot{I}_C$をベクター的に引いたものであつて接續圖から見ても線電流は次の式で表はされる事になる。



第２０５圖

$$\left.\begin{array}{l}\dot{I}_{AB}=\dot{I}_A-\dot{I}_C\\ \dot{I}_{BC}=\dot{I}_B-\dot{I}_A\\ \dot{I}_{CA}=\dot{I}_C-\dot{I}_B\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(126)$$

$$\therefore \quad \dot{I}_{AB}+\dot{I}_{BC}+\dot{I}_{CA}=0 \quad \cdots\cdots(127)$$

斯くて環狀接續では線電流のベクトル的の總和は零となる、之は星形接續に於ける場合も同樣である。相數が多い場合にも同樣であつて相電壓が知れて居る場合に或る相とその隣れる相との間の接續點から出て行く線電流を求めんとするならば二つの相を流れる相電流をベクトル的に引けば求めらる。

5. 多相交流の表示法

元來正弦波形の電壓や電流等を取扱ふ場合に或るものに $(\cos\theta-j\sin\theta)$ を乘ずるとその位相が θ の角度丈遲れるものであるから n 相の多相交流であるならばその電壓 E に $\left(\cos\frac{2\pi}{n}-j\sin\frac{2\pi}{n}\right)$ を乘ずると一相が次の相と同じ位相となるものである。從つて一相を E とするならば各相は次の式で表はし得ると云ふ事になる。

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_1&=E\\
\dot{E}_2&=E\left(\cos\frac{2\pi}{n}-j\sin\frac{2\pi}{n}\right)\\
\dot{E}_3&=E\left(\cos\frac{2\times2\pi}{n}-j\sin\frac{2\times2\pi}{n}\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dot{E}_n&=E\left\{\cos\frac{(n-1)2\pi}{n}-j\sin\frac{(n-1)2\pi}{n}\right\}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(127)$$

此の場合に $\cos\frac{2\pi}{n}-j\sin\frac{2\pi}{n}=\alpha$ と置くならば n 相對稱多相式の各相電壓は夫々次の式で表はす事が出來る。

$$\dot{E}_1=\dot{E} \quad \dot{E}_2=\dot{E}\alpha \quad \dot{E}_3=\dot{E}\alpha^2$$

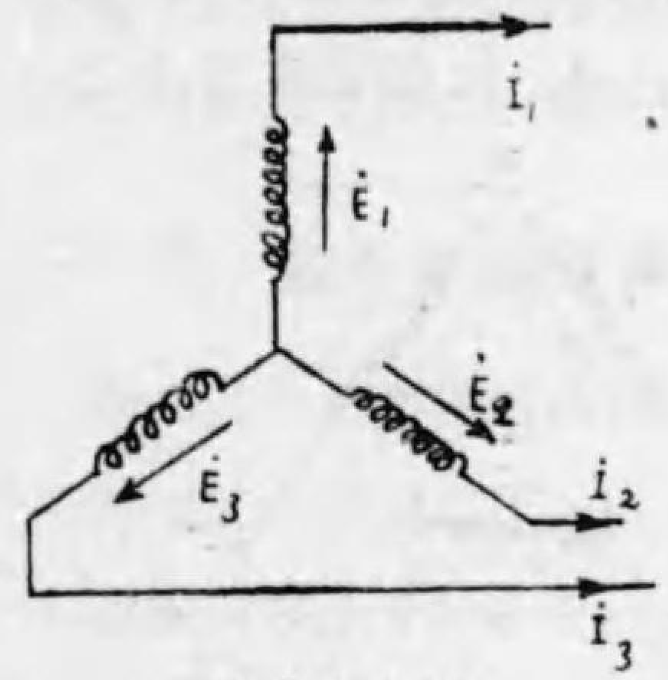
$$\dot{E}_n=\dot{E}\alpha^n$$

元來 $(\cos\theta-j\sin\theta)$ なるものは 1 であり $(\cos\theta-j\sin\theta)^n$ も 1 であるから α は $\sqrt[n]{1}$ となる。

6. 對稱電壓に平衡負荷

多相交流の中で一般に使用せられ最も簡單なものは三相交流である。三相交流に於て最も簡單なものは電源の電壓が對稱となつて居て負荷に流れる電流も平衡となつて居る場合である。此の負荷電流が各相とも等しい場合を**平衡負荷**(Ballanced load バランスト ロード) と呼んで居る。之等の場合は前に述べた多相交流の原理を應用すれば容易に解く事が出來る。三相交流にも星形接續と還狀接續とがあつて三相交流の場合に限つて星形接續の事を**Y接續**とも呼び還狀接續の事を三角形接續と呼ぶ事がある。

最初に星形接續に於ける電壓電流の關係を述べるのであるが之等の事は大體多相交流に於て了解出來た事と思ふ。先づ第206圖の如く接續せられた三相電源があるとする、此の場合 $E_1E_2E_3$ は夫々相電壓、$I_1I_2I_3$ は夫々線電流である。E_1 と E_2 間の線間電壓は E_1 のベクターより E_2 のベクターを引けば良いので $\dot{E}_1-\dot{E}_2$ となり之を式で表はすならば次の通りになる。

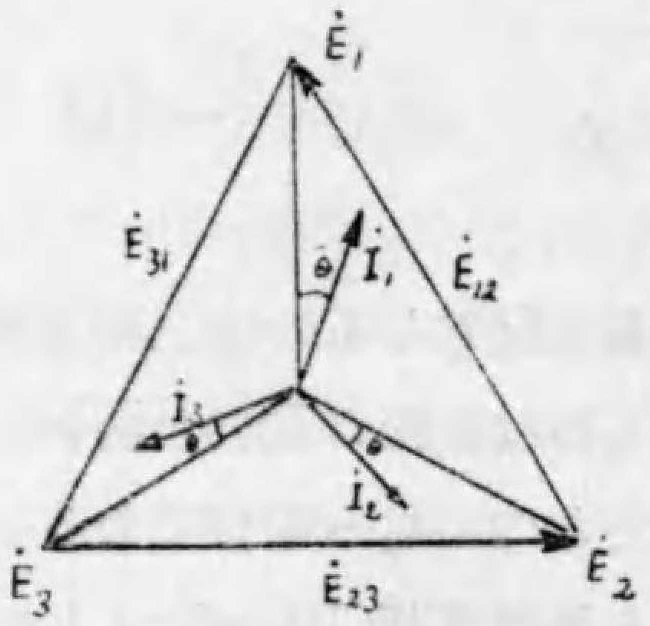


第206圖

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_{12}&=\dot{E}_1-\dot{E}_2\\
\dot{E}_{23}&=\dot{E}_2-\dot{E}_3\\
\dot{E}_{31}&=\dot{E}_3-\dot{E}_1
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(128)$$

$$\therefore \quad \dot{E}_{12}+\dot{E}_{23}+\dot{E}_{31}=0\cdots(129)$$

此の關係をベクター圖で表はすならば第207圖の通りになる。此の場合は對稱三相電壓であるから各相電壓



第２０７圖

$E_1E_2E_3$は夫々その大きさが相等しく各電壓の間には120度卽ち$\frac{2\pi}{3}$丈けの位相角を有して居る。從つて相電壓をE_pとし線間電壓をE_1とすれば此の間には次の關係がある。

$$E_1 = E_p \times 2\cos 30^\circ$$
$$= \sqrt{3}\,E_p \cdots\cdots\cdots(130)$$

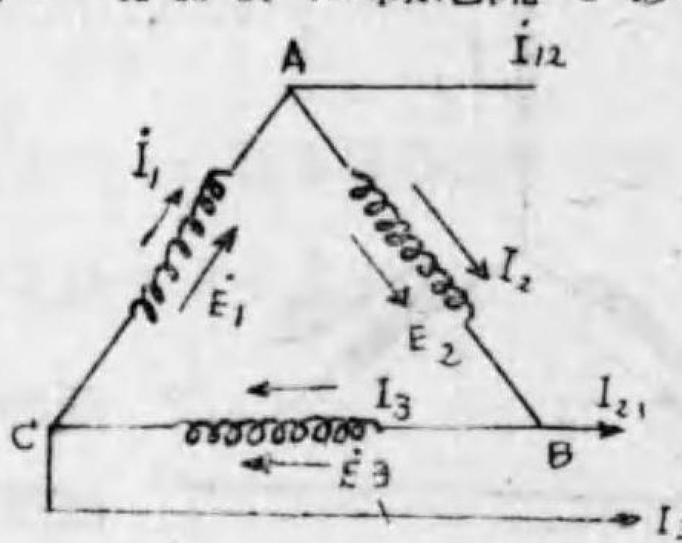
次に星形接續に於いては相電流と線電流とは全く等しいものであつて負荷が對稱負荷なるを以つてその大きさも相等しい。而してその位相は各々相電壓よりθの位相角丈け遲れて居るのである。此の場合に於ける一相の電力は$E_p I\cos\theta$となる譯で三相の電力は之を三倍すれば良く全部之を線電流と線間電壓とで表はせば電力は次式の通りになる。

$$P = 3E_p I\cos\theta = \sqrt{3}\,E_1 I\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(131)$$

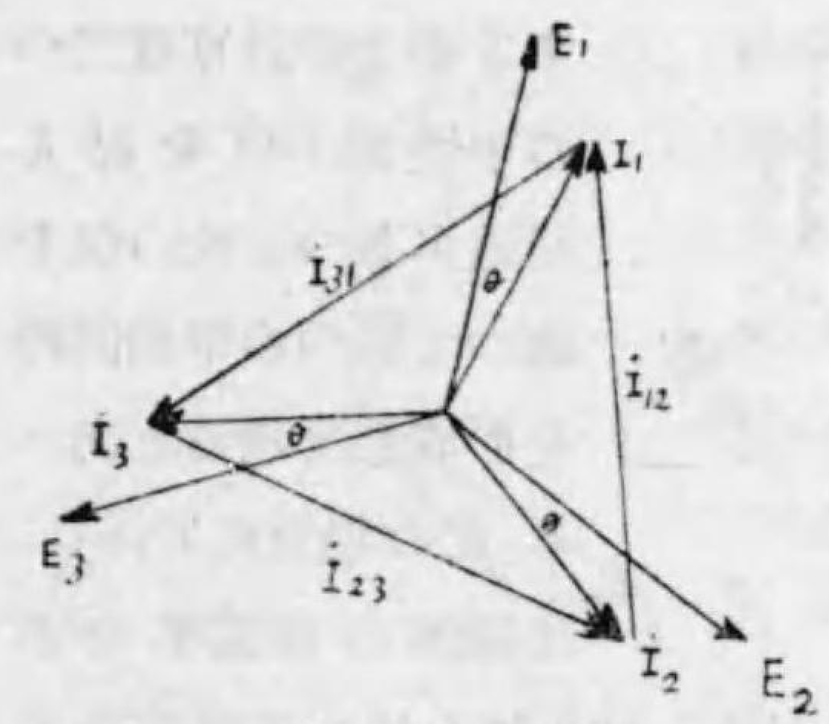
此の場合のIは線電流の實效値で$\cos\theta$は力率である。

次に三角形接續の場合を述べる。第208圖の如く接續された三角形接續回路に圖の如き電流が流れるとする。此の場合の線電流I_{12}は相電流I_1のベクターより線電流I_2のベクターをベクター的に引いたもので此の有樣をベクター圖に示せば第209圖の如くなる、但し$I_1I_2I_3$は相電流で$I_{12}I_{23}I_{31}$は線電流である。之よりして線電流と相電流との關係を式で示せば次の通りになる。

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_{12} &= \dot{I}_1 - \dot{I}_2 \\ \dot{I}_{23} &= \dot{I}_2 - \dot{I}_3 \\ \dot{I}_{31} &= \dot{I}_3 - \dot{I}_1 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(132)$$



第２０８圖



第２０９圖

$$\therefore\ \dot{I}_{12} + \dot{I}_{23} + \dot{I}_{31} = 0 \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(133)$$

此の場合は對稱負荷として居るので各々の相電流と線電流とは何れも相等しいものであつて今相電流をI_pとし線電流をI_lとすれば相電流と線電流との間には次の關係がある。

$$I_l = \sqrt{3}\,I_p$$

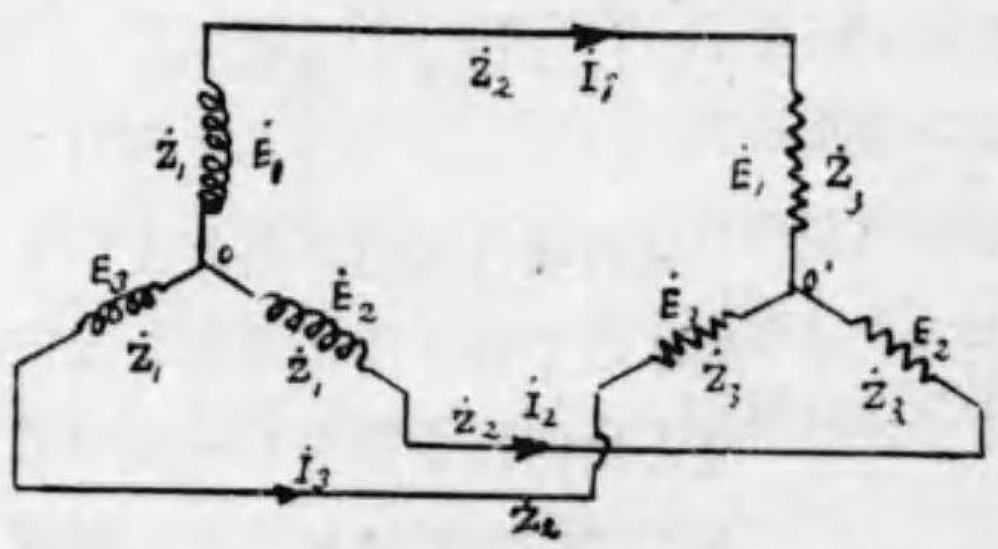
次に電力であるが此の電力は相電壓に相電流を乘じ之に力率を乘じたものゝ3倍となる譯である。之を式で示せば次の通りで$\cos\theta$は力率であつて線間電壓E_1は相電壓E_pと相等しいものである。

$$P = 3E_p I_p\cos\theta = 3E_1 \times \frac{I_l}{\sqrt{3}}\cos\theta = \sqrt{3}\,E_1 I_l\cos\theta \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(134)$$

之から見ると回路を星形に接續しても三角型に接續してもその電力は線間電壓と線電流と力率とを乘じたものに$\sqrt{3}$を乘ずれば良い譯で何れの場合も同一の式になる。

7. 星形平衡負荷の電壓電流

多相式の星形接續に於ける計算法は各相が獨立した單相交流と考へて計算すればよいのであつて三相星形接續の場合に於ても同樣の方法で計算を行ふ。第210圖に示す如く星形に接續せられて居る電源より星形に接續せられて居る負荷に電力を供給



第 2 1 0 圖

する場合の計算は二つの中性點OO′を結んだ線があつて此の線を通つて三つの單相回路を形成して居ると考へる。此の場合に$E_1E_2E_3$は電源の相電壓であつて$E_1'E_2'E_3'$は負荷の相電壓、$I_1I_2I_3$は各線を流れる線電流Z_1は電源各相のインピーダンスZ_2は各相の線路のインピーダンスZ_3は負荷に於ける各相のインピーダンスである。此の場合に線電流を負荷の相電壓とインピーダンスZ_3とより求むれば次の通りになる。(第210圖の右方の負荷の電壓$\dot{E}_1\dot{E}_2\dot{E}_3$は$\dot{E}_1'\dot{E}_2'\dot{E}_3'$の間違ですから左様に訂正願ひます。)

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{E}_1'}{\dot{Z}_3}\quad \dot{I}_2=\frac{\dot{E}_2'}{\dot{Z}_3}\quad \dot{I}_3=\frac{\dot{E}_3'}{\dot{Z}_3}\cdots\cdots\cdots\cdots(134)$$

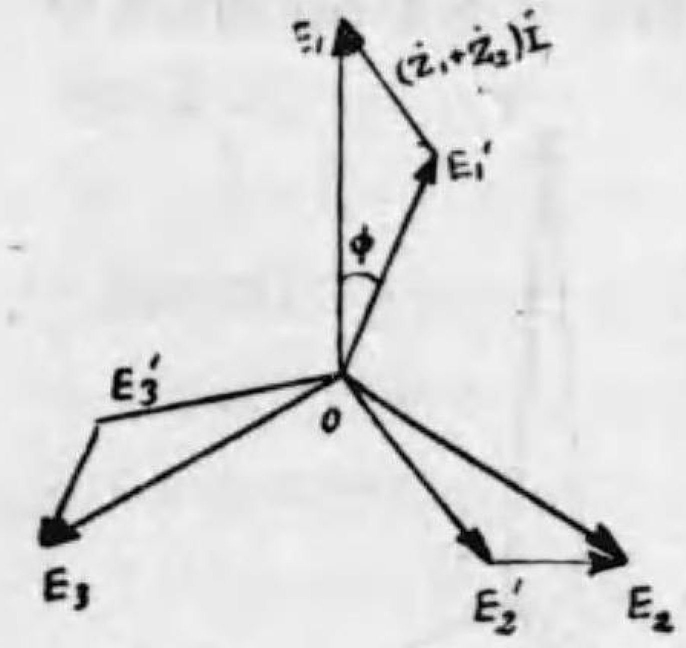
又此の電流を電源の各相電壓より求むれば次の通りになる。

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{E}_1}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}\qquad \dot{I}_2=\frac{\dot{E}_2}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{E}_3}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(135)$$

此の場合の電壓降下は一相を流れる電流に電源と線とのインピーダンスを乘ずればよいのである。之よりして負荷の電壓$\dot{E}_1'$と電源の電壓$\dot{E}_1$とは次の關係がある。

$$\dot{E}_1'=\dot{E}_1-\dot{I}_1(\dot{Z}_1+\dot{Z}_2)=\dot{E}_1-\frac{\dot{E}_1(\dot{Z}_1+\dot{Z}_2)}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

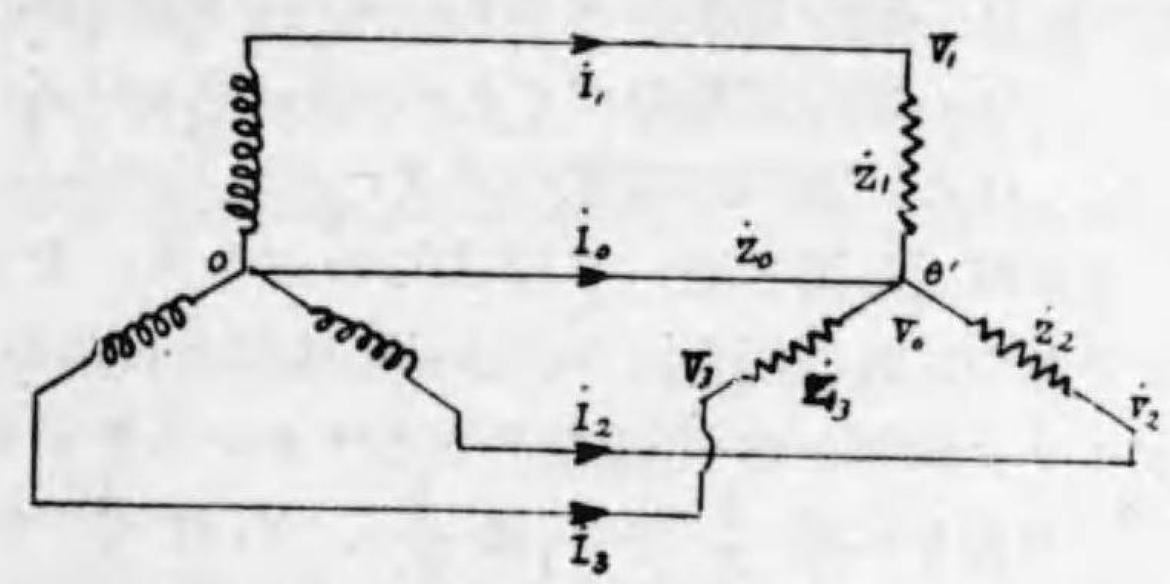


第 2 1 1 圖

此の電壓降下は第211圖のベクトル圖に示した通り$\dot{E}_1\dot{E}_1'$間のベクターであつて$\dot{O}\dot{E}_1'$のベクターと此の$\dot{E}_1\dot{E}_1'$のベクターとを加へたものが電源の相電壓である。同様にして負荷の線間電壓も$\dot{E}_1'$より$\dot{E}_2'$を引いたもの、$\dot{E}_2'$より$\dot{E}_3'$を引いたもの$\dot{E}_3'$より$\dot{E}_1'$を引いたものゝベクターを作れば求めらる。

8. 不平行負荷の場合

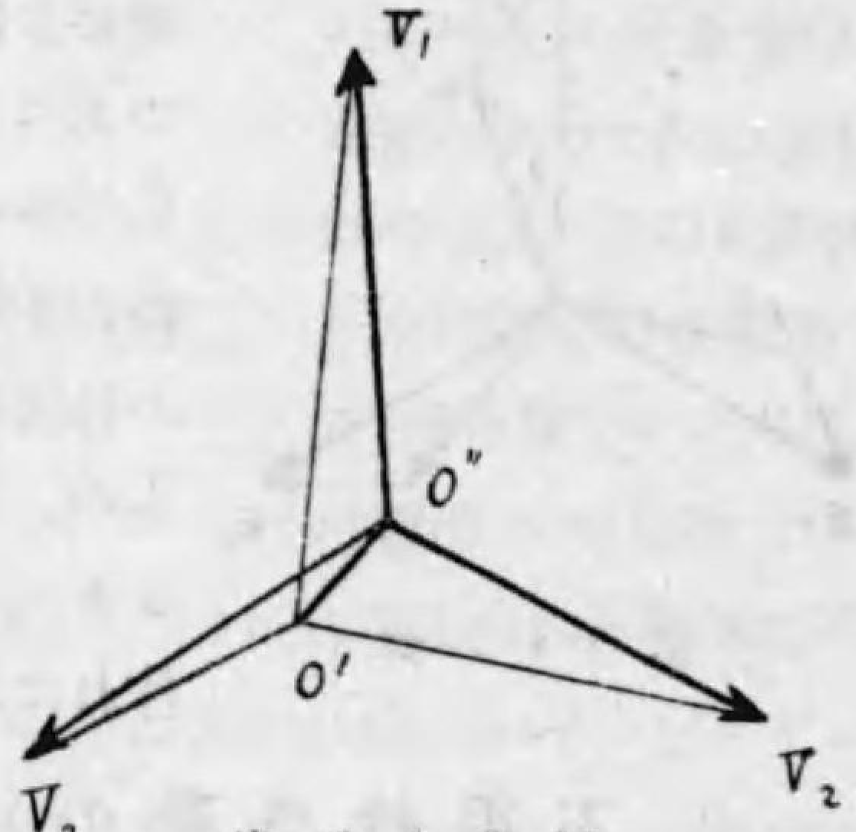
供給電壓が三相對稱式であつて負荷が不平衡の場合を述べて見る。先づ第212圖の如く負荷のインピーダンスが夫々$Z_1Z_2Z_3$であつて之に流れる電流を夫々$I_1I_2I_3$とする。又電源の側と負荷の側とに於ける中性點OO′を結んで見ると負荷の電流が對稱となつて居ないために此の中性線には電流が流れる譯であつて此の電流をI_0としそのインピーダンスをZ_0とする。又負荷の電位を夫々圖の如く$V_1V_2V_3$となし負荷の中性點の電位をV_0とする。



第 2 1 2 圖

元來平衡負荷に於ける中性點の電位は何時も零であるが不平衡負荷に於てはその中性點の電位は零とはならない。従つて不平衡負荷に於いてはその電位が零となるべき點が他にあるもの

であつて第213圖に於いて電位が零の點を O′とする。而して中性點 O′の電位即ち O′O″間の電位をV_0とする。今O′V_1間の電壓を求めんとするにはO″V_1のベクターからO′O″ のベクターを引かなければならない。同樣にして第212圖の O′V_2間の電壓は第213圖の O″V_2から O″O′のベクターを引いたもの即ち$(\dot{V}_2-\dot{V}_0)$で表はされる。



第 2 1 3 圖

之を式で示すと次の通りである。

$$\left.\begin{array}{l} \text{O′}V_1\text{間の電壓のベクター}=\dot{V}_1-\dot{V}_0=\dot{I}_1Z_1 \\ \text{O′}V_2\text{間の電壓のベクター}=\dot{V}_2-\dot{V}_0=\dot{I}_2Z_2 \\ \text{O′}V_3\text{間の電壓のベクター}=\dot{V}_3-\dot{V}_0=\dot{I}_3Z_3 \\ \text{O′とO″點間の電壓ベクター}=-\dot{V}_0=\dot{I}_0Z_0 \end{array}\right\}\cdots\cdots(136)$$

上の四式を書き變へて $I_1I_2I_3I_0$ のベクターを求めると次の通りであつて此の場合に $Y_1Y_2Y_3Y_0$ は夫々負荷の各相に於けるアドミッタンスと中性線のアドミッタンスを示す。即ち Y_1 は$\frac{1}{Z_1}$でありY_2は$\frac{1}{Z_2}$でY_3は$\frac{1}{Z_3}$、Y_0は$\frac{1}{Z_0}$である。

$$\left.\begin{array}{l} \dot{I}_1=\dfrac{\dot{V}_1-\dot{V}_0}{\dot{Z}_1}=(\dot{V}_1-\dot{V}_0)\dot{Y}_1 \\ \dot{I}_2=\dfrac{\dot{V}_2-\dot{V}_0}{\dot{Z}_2}=(\dot{V}_2-\dot{V}_0)\dot{Y}_2 \\ \dot{I}_3=\dfrac{\dot{V}_3-\dot{V}_0}{\dot{Z}_3}=(\dot{V}_3-\dot{V}_0)\dot{Y}_3 \\ \dot{I}_0=-\dfrac{\dot{V}_0}{\dot{Z}_0}=-\dot{V}_0\dot{Y}_0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(137)$$

然るに前にも述べた如くキルヒホッフの法則によつて次の關係がある。

$$\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3+\dot{I}_0=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(138)$$

前の第137式に於ける $\dot{I}_1$ $\dot{I}_2$ 等の價を此の式に入れて解いて行くならば次の如く $\dot{V}_0$ なる電位即ち負荷の中性點 O′の電位が求められるのである。

$$(\dot{V}_1-\dot{V}_0)\dot{Y}_1+(\dot{V}_2-\dot{V}_0)\dot{Y}_2+(\dot{V}_3-\dot{V}_0)\dot{Y}_3-\dot{V}_0\dot{Y}_0=0$$

$$\therefore\quad \dot{V}_0(\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3+\dot{Y}_0)=\dot{V}_1\dot{Y}_1+\dot{V}_2\dot{Y}_2+\dot{V}_3\dot{Y}_3$$

$$\dot{V}_0=\frac{\dot{V}_1\dot{Y}_1+\dot{V}_2\dot{Y}_2+\dot{V}_3\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3+\dot{Y}_0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(139)$$

上の式は負荷の中性點の電位を示すものであつて此の電位が定まれば $\dot{V}_0\dot{V}_1$ 間の電壓は $(\dot{V}_1-\dot{V}_0)$ より計算する事が出來、此の場合に流れる電流は $(\dot{V}_1-\dot{V}_0)$ を $\dot{Z}_1$ で割れば求める事が出來るのである。上の式は三相のみならず他の多相交流に於いても同樣であつて多相交流の場合には次の式によつて中性點の電位が求めらる。

$$\dot{V}_0=\frac{\Sigma\,(\dot{V}_n\dot{Y}_n)}{\dot{Y}_0+\Sigma\,\dot{Y}_n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(140)$$

今若し三相交流が三線式にして中性線を有しないとするならば上の式に於いて $\dot{Y}_0$ を零とすればよい譯であつて此の場合の電位 $\dot{V}_0$ は次の如くして求めらる。

$$\dot{V}_0=\frac{\dot{V}_1\dot{Y}_1+\dot{V}_2\dot{Y}_2+\dot{V}_3\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(141)$$

此の第 141 式と第 139 式との二つの式は不平衡負荷の中性點の電位を計算し此の電位から負荷の各相の電壓を計算する大切なる式であるから十分に記憶する必要がある。此の式は分母が

各相及び中性線のアドミタンスの和であり分母は各相の電壓とその相のアドミッタンスを乘じた積の和であるから之を記憶するにも樂である。上の式は各相の負荷をアドミッタンスで表はしたのであるが之をインピーダンスで表はしてもよい譯であつてインピーダンスで表はすと式が少し複雜になるので記憶するにはアドミッタンスで表はした方が樂である。アドミッタンスはインピーダンスの逆數であるからしてインピーダンスをZで表はすと次の通りになる。

$$\dot{Y}_1=\frac{1}{\dot{Z}_1}\quad \dot{Y}_2=\frac{1}{\dot{Z}_2}\quad \dot{Y}_3=\frac{1}{\dot{Z}_3}\quad \dot{Y}_0=\frac{1}{\dot{Z}_0}$$

斯くの如きインピーダンスを用ふると三相四線式の場合に於ける中性點の電位は次の式で表はされる。

$$\dot{V}_0=\frac{\dfrac{\dot{V}_1}{\dot{Z}_1}+\dfrac{\dot{V}_2}{\dot{Z}_2}+\dfrac{\dot{V}_3}{\dot{Z}_3}}{\dfrac{1}{\dot{Z}_1}+\dfrac{1}{\dot{Z}_2}+\dfrac{1}{\dot{Z}_3}+\dfrac{1}{\dot{Z}_0}}$$

$$\therefore\quad \dot{V}_0=\frac{\dot{Z}_0(\dot{V}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{V}_2\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{V}_3\dot{Z}_1\dot{Z}_2)}{\dot{Z}_2\dot{Z}_3\dot{Z}_0+\dot{Z}_1\dot{Z}_3\dot{Z}_0+\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_0+\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3}\cdots\cdots(142)$$

此の場合に於いて三相三線式であるならばインピーダンスで表はした中性點の電位は次の通りになる。

$$\dot{V}_0=\frac{\dfrac{\dot{V}_1}{\dot{Z}_1}+\dfrac{\dot{V}_2}{\dot{Z}_2}+\dfrac{\dot{V}_3}{\dot{Z}_3}}{\dfrac{1}{\dot{Z}_1}+\dfrac{1}{\dot{Z}_2}+\dfrac{1}{\dot{Z}_3}}=\frac{\dfrac{\dot{V}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{V}_2\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{V}_3\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3}}{\dfrac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3}}$$

$$\therefore\quad \dot{V}_0=\frac{\dot{V}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{V}_2\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{V}_3\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}\cdots\cdots\cdots(143)$$

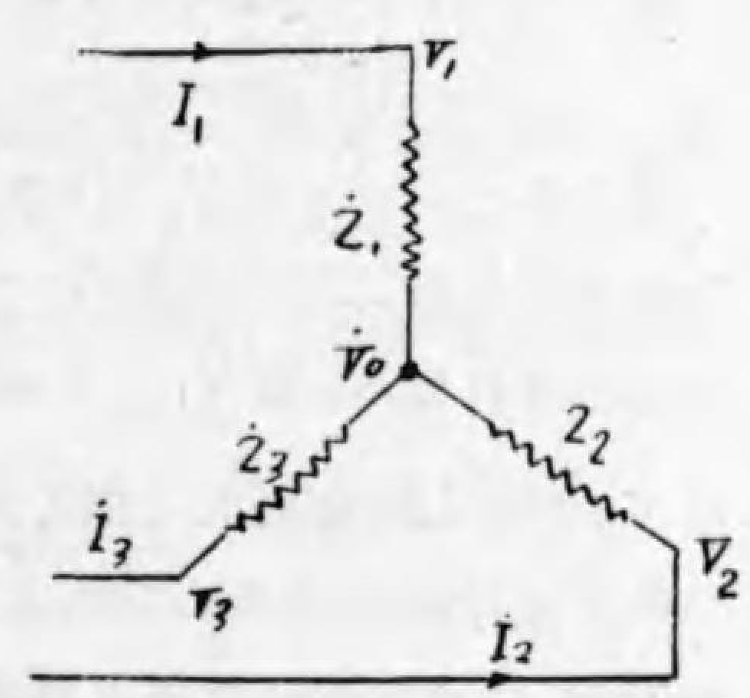
次の章に之等の式を應用して計算する方法を示す事とする。

第十八章 三相不平衡負荷の計算

1 中性點を求むる解法

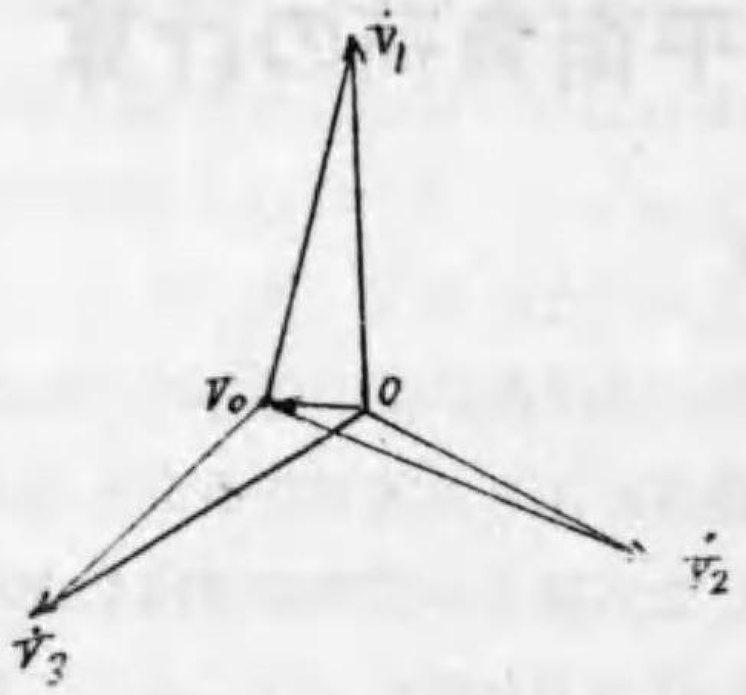
供給電壓が對稱三相電壓で負荷が不平衡負荷の場合の計算は如何にして行ふかと云ふ事は大體前に示した所であるがその方法に二通りある。第一は前に示した方法で中性點の電位を求めるのであつて、此處にその計算の行ひ方を例によつて示して見る。一般の三相交流は平衡した三相電壓か又は平衡三相電壓に近いものであつて負荷は平衡負荷もあるし不平衡負荷もあるので平衡三相電壓で負荷が不平衡の場合の計算は可成り多く出て來るものである。

先づ第214圖に示した如き不平衡負荷があつて此の負荷に三相電壓が供給せられたとする。此の場合のベクター圖を示せば第215圖の通りであつて OV_1 と OV_2 と OV_3 とは供給せられる平衡三相電壓であつてその大きさは相等しくその位相は互に $\frac{2\pi}{3}$ 即ち120度づゝの位相角を有して居る。此の場合の中性點Oは供給電壓の中性點であつて不平衡負荷に於いては此の供給電壓の中性點が必ずしも負荷の中性點とはならない。是は前に述べた通りで此の場合に於いても第214圖の中性點 V_0 は第215圖の O 點とはなら



第 2 1 4 圖

ない。今第215圖に於いて負荷の中性點を $\dot{V}_0$ とするならば第214圖に於けるインピーダンス $\dot{Z}_1$ の兩端にかゝる電壓は V_0V_1 のベクターで示す通りとなり同様にしてインピーダンス $\dot{Z}_2$ の兩端にかゝる電壓は V_0V_2 のベクター、インピーダンス $\dot{Z}_3$ の兩端にかゝる電壓は V_0V_3 のベクターとなる。



第215圖

然るに V_0V_1 のベクターは OV_1 のベクターより OV_0 のベクターをベクター的に引けばよいので V_0V_1 と V_0V_2 と V_0V_3 とのベクターは夫々次の式で表はされる。

$$V_0V_1\text{のベクター} = \dot{V}_1 - \dot{V}_0$$

$$V_0V_2\text{のベクター} = \dot{V}_2 - \dot{V}_0$$

$$V_0V_3\text{のベクター} = \dot{V}_3 - \dot{V}_0$$

但　$\dot{V}_1$……OV_1のベクター　　$\dot{V}_2$……OV_2のベクター

　　$\dot{V}_3$……OV_3のベクター　　$\dot{V}_0$……OV_0のベクター

然るに $\dot{V}_1\dot{V}_2\dot{V}_3$ の三つのベクターは如何にして表はすかと云へば先づ此の三つの電壓の一つを基線に取る。今 $\dot{V}_1$ を基線に取るとすれば $\dot{V}_2$ は $\dot{V}_1$ より120度即ち $\frac{2\pi}{3}$ の角度丈け遲れ $\dot{V}_3$ は $\dot{V}_2$ より120度遲れる譯で此の $\dot{V}_3$ は結局 $\dot{V}_1$ より240°即ち $\frac{4\pi}{3}$ の角度丈け遲れるものである。今一つのベクターより θ の角度丈け他のベクターを遲らさうと思ふならば $(\cos\theta - j\sin\theta)$ を乘すればよいと云ふ事は前に述べた所である、所が今 $\dot{V}_1$ を基線に取つた場合に此のベクターより120度及び240度即ち $\frac{2\pi}{3}$ 及

び $\frac{4\pi}{3}$ の角度丈け遲れたベクターを得るには V_1 に $(\cos120° - j\sin120°)$ を乘じたものと $(\cos240° - j\sin240°)$ を乘じたものとを求むればよいのである。然るに此の二つの式は夫々次の價を取る。

$$\cos120° - j\sin120° = -\sin30° - j\cos30° = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos240° - j\sin240° = -\cos60° + j\sin60° = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

之よりして $\dot{V}_1$ を基線に取れば $\dot{V}_2\dot{V}_3$ は夫々次の如きベクターとなる。

$$\left.\begin{aligned} \dot{V}_1 &= V_1 \\ \dot{V}_2 &= V_1\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \dot{V}_3 &= V_1\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (144)$$

次に負荷接續の中性點の電位は前の第141式に示された通り次の式の通りになる。

$$\dot{V}_0 = \frac{\dot{V}_1\dot{Y}_1 + \dot{V}_2\dot{Y}_2 + \dot{V}_3\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}$$

之によつて第214圖に示した負荷に流れる電流も計算する事が出來る。先づ第214圖の如く $\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3$ の三つのインピーダンスを有する三相負荷がある場合にその接續の中性點電位は次の如く計算せられる。

$$\dot{V}_0 = \frac{\dot{V}_1\dot{Y}_1 + \dot{V}_2\dot{Y}_2 + \dot{V}_3\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 \div \dot{Y}_3} = \frac{\dot{V}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{V}_2\dot{Z}_1\dot{Z}_3 + \dot{V}_3\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3 + \dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

此の式よりして圖の V_0V_1 間の電壓、V_0V_2 間の電壓、V_0V_3 間の電壓等が求められ之を第137式に代入すると之等の電壓は次の通りになる。

$$V_0V_1\text{間の電壓}=\dot{V}_1-\dot{V}_0=\dot{V}_1-\frac{\dot{V}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{V}_2\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{V}_3\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

$$=\dot{V}_1-$$

$$\frac{\dot{V}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3-\dot{V}_1\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\dot{Z}_1\dot{Z}_2-\dot{V}_1\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

$$=\frac{\dot{V}_1\left\{\frac{3}{2}(\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_1\dot{Z}_3)+j\frac{\sqrt{3}}{2}(\dot{Z}_1\dot{Z}_3-\dot{Z}_1\dot{Z}_2)\right\}}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

$$V_0V_2\text{間の電壓}=\dot{V}_2-\dot{V}_0=\dot{V}_2-\frac{\dot{V}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{V}_2\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{V}_3\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

$$=\frac{\dot{V}_1\left\{-\frac{3}{2}\dot{Z}_2\dot{Z}_3-j\sqrt{3}\left(\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\frac{1}{2}\dot{Z}_2\dot{Z}_3\right)\right\}}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

$$V_0V_3\text{間の電壓}=\dot{V}_3-\dot{V}_0=\dot{V}_3-$$

$$\frac{\dot{V}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{V}_2\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\dot{V}_3\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

$$=\frac{\dot{V}_1\left\{-\frac{3}{2}\dot{Z}_2\dot{Z}_3+j\sqrt{3}\left(\dot{Z}_1\dot{Z}_3+\frac{1}{2}\dot{Z}_2\dot{Z}_3\right)\right\}}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

斯くて負荷の接續中性點と各端子との間の電壓が求められた譯で各回路を流れる電流は負荷各相のインピーダンスで此の電壓を割れば良いのである。

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{V}_1-\dot{V}_0}{\dot{Z}_1}=\frac{\dot{V}_1\left\{\frac{3}{2}(\dot{Z}_2+\dot{Z}_3)+j\frac{\sqrt{2}}{3}(\dot{Z}_3-\dot{Z}_2)\right\}}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_3\dot{Z}_1}$$

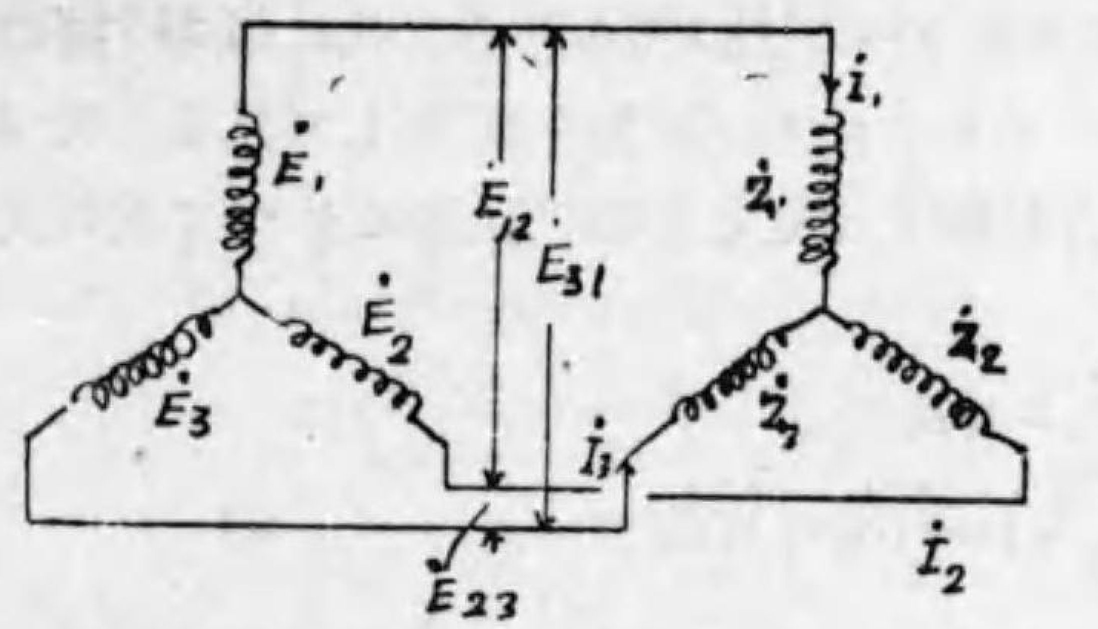
$$\dot{I}_2=\frac{\dot{V}_2-\dot{V}_0}{\dot{Z}_2}=\frac{-\dot{V}_1\left\{\frac{2}{3}\dot{Z}_3+j\sqrt{3}\left(\dot{Z}_1+\frac{1}{2}\dot{Z}_3\right)\right\}}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{V}_3-\dot{V}_0}{\dot{Z}_3}=\frac{\dot{V}_1\left\{-\frac{3}{2}\dot{Z}_2+j\sqrt{3}\left(\dot{Z}_1+\frac{\dot{Z}_2}{2}\right)\right\}}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

斯くて此の回路を流れる電流が求め得られた譯である。

2. キルヒホツフ法則による法

不平衡負荷の場合に於ける計算の行ひ方は二方法があつて今迄述べたのは負荷の接續中性點の電位を求めて之より計算を進めたものである。今度はキルヒホツフの法則を使用して解く方法を述べよう。此の方法は負荷接續の中性點の電位を別に計算する必要はない。キルヒホツフの法則を應用するためには一つの電流なり電壓なりを基線に取り他の電壓なり電流なりは此の基線を基準にしなければならない。今第 216 圖の如く接續せられたる負荷に電源より三相交流の平衡電壓を供給した場合の計算を示して見よう。電源の線間電壓を夫々 $\dot{E}_{12}\dot{E}_{23}\dot{E}_{31}$ となし相電壓を $\dot{E}_1\dot{E}_2\dot{E}_3$ とする此の場合に線間電壓 E_{12} を基線に取れば $\dot{E}_{23}$ $\dot{E}_{31}$ は夫々次の如くなる。



第 2 1 6 圖

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_{12}&=E_{12}\\ \dot{E}_{23}&=E_{12}(\cos 120^\circ-j\sin 120^\circ)=E_{12}\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ \dot{E}_{31}&=E_{12}(\cos 240^\circ-j\sin 240^\circ)=E_{12}\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}\right\}\quad(145)$$

今度は相電壓 E_1 を基線に取つて見ると $\dot{E}_{12}\dot{E}_{23}\dot{E}_{31}$ 等は次の通りになる。

$$\dot{E}_1=E_1$$

$$\dot{E}_2=E_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{E}_3=E_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \dot{E}_{12}=\dot{E}_1-\dot{E}_2=E_1-E_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=E_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{E}_{23}=\dot{E}_2-\dot{E}_3=E_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-j\sqrt{3}E_1$$

$$\dot{E}_{31}=\dot{E}_3-\dot{E}_1=E_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-E_1=E_1\left(-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

斯くして供給電壓の相電壓も線間電壓もその一つをベクターの基線に取れば他のベクターの式が得られる。次に第 216 圖の $\dot{E}_1\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{E}_2$ の回路にキルヒホツフの法則を應用して見る。先づ $\dot{E}_1$ を基線に取る場合を擧げて見ると第二法則によつて次の式が成立する。

$$\dot{E}_1-\dot{E}_2=\dot{I}_1\dot{Z}_1-\dot{I}_2\dot{Z}_2$$

$$\therefore\quad E_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dot{I}_1\dot{Z}_1-\dot{I}_2\dot{Z}_2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

次に $\dot{E}_2\dot{Z}_2\dot{Z}_3\dot{E}_3$ の回路にキルヒホツフの第二法則を應用すると次の式が成立する。

$$\dot{E}_2-\dot{E}_3=\dot{I}_2\dot{Z}_2-\dot{I}_3\dot{Z}_3$$

$$E_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-E_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dot{I}_2\dot{Z}_2-\dot{I}_3\dot{Z}_3$$

$$\therefore\quad -j\sqrt{3}E_1=\dot{I}_2\dot{Z}_2-\dot{I}_3\dot{Z}_3\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

最後にキルヒホツフの第一法則を應用すると次の式が出來上る。

$$\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

此の(a)式と(b)式と(c)式との三つの式からして $I_1I_2I_3$ を求むれば相電壓 E_1 を基線とした場合の各電流のベクターが求められる譯である。今その計算を行つて見る。先づ(c)式より I_3 を求め之を(b)式に代入して見る。

$$\dot{I}_3=-\dot{I}_1-\dot{I}_2$$

$$\therefore\quad -j\sqrt{3}E_1=\dot{I}_2\dot{Z}_2+\dot{I}_1\dot{Z}_3+\dot{I}_2\dot{Z}_3$$

$$\therefore\quad \dot{I}_2=\frac{-j\sqrt{3}\dot{E}_1-\dot{I}_1\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

此の(d)式を(a)式に代入すると次の如く $\dot{I}_1$ が求められる。

$$E_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dot{I}_1\dot{Z}_1-\frac{\dot{Z}_2(-j\sqrt{3}\dot{E}_1-\dot{I}_1\dot{Z}_3)}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

$$E_1\left(\frac{3}{2}\dot{Z}_2+\frac{3}{2}\dot{Z}_3+j\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{Z}_2+j\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{Z}_3\right)$$
$$=\dot{I}_1\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{I}_1\dot{Z}_1\dot{Z}_3+j\sqrt{3}\dot{E}_1\dot{Z}_2+\dot{I}_1\dot{Z}_3\dot{Z}_2$$

$$\therefore\quad \dot{I}_1(\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3)$$
$$=E_1\left(\frac{3}{2}\dot{Z}_2+\frac{3}{2}\dot{Z}_3+j\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{Z}_2+j\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{Z}_3-j\sqrt{3}\dot{Z}_2\right)$$

$$\therefore\quad \dot{I}_1=\frac{E_1\left\{\frac{3}{2}(\dot{Z}_2+\dot{Z}_3)+j\frac{\sqrt{3}}{2}(\dot{Z}_3-\dot{Z}_2)\right\}}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

同様にして $\dot{I}_2$ も $\dot{I}_3$ も次の如く求める事が出來る。

$$\dot{I}_2=\frac{-E_1\left\{\frac{2}{3}Z_3+j\sqrt{3}\left(\dot{Z}_1+\frac{1}{2}\dot{Z}_3\right)\right\}}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

$$\dot{I}_3=\frac{E_1\left\{-\frac{3}{2}\dot{Z}_2+j\sqrt{3}(\dot{Z}_1+\dot{Z}_2)\right\}}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

此の方法で求めた答と前の負荷接續の中性點の電位を計算して求めた答と全く同一となる事を知る。

次に線間電壓を基線に取つて計算する場合を述べて見る。一般に三相交流の電壓は線間電壓を以つて云ひ表はすものであるから此の場合の計算も線間電壓をベクターの基線として計算した方が都合が良い。今假りに $\dot{E}_{12}$ なる線間電壓を基線に取る。先づ第216圖にキルヒホッフの第一法則を應用すれば次の式が得られる。

$$\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

次に第216圖の $\dot{E}_1\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{E}_2$ の回路にキルヒホッフの第二法則を應用すれば次の式が得られる。

$$\dot{E}_{12}=\dot{I}_1\dot{Z}_1-\dot{I}_2\dot{Z}_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

今度は $\dot{E}_2\dot{Z}_2\dot{Z}_3\dot{E}_3$ の同路に此の法則を應用して見る。

$$\dot{E}_{23}=\dot{I}_2\dot{Z}_2-\dot{I}_3\dot{Z}_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (c)$$

此の(a)(b)(c)の三つの式からして $\dot{I}_1\dot{I}_2\dot{I}_3$ を求めて見よう。先づ(a)式の $\dot{I}_3$ を(c)式に代入する。

$$\dot{I}_3=-\dot{I}_1-\dot{I}_2$$

$$\therefore\quad \dot{E}_{23}=\dot{I}_2\dot{Z}_2+\dot{I}_1\dot{Z}_3+\dot{I}_2\dot{Z}_3$$

$$\therefore\quad I_2=\frac{\dot{E}_{23}-\dot{I}_1\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (d)$$

此の(d)式を(b)式に代入すると次の如く $\dot{I}_1$ が求められる。

$$\dot{E}_{12}=\dot{I}_1\dot{Z}_1-\frac{\dot{Z}_2(\dot{E}_{23}-\dot{I}_1\dot{Z}_3)}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

$$\therefore\quad \dot{E}_{12}\dot{Z}_2+\dot{E}_{12}\dot{Z}_3=\dot{I}_1\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{I}_1\dot{Z}_1\dot{Z}_3-\dot{E}_{23}\dot{Z}_2+\dot{I}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3$$

$$\therefore\quad \dot{I}_1=\frac{\dot{E}_{12}\dot{Z}_2+\dot{E}_{23}\dot{Z}_2+\dot{E}_{12}\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

然るに $\dot{E}_{12}+\dot{E}_{23}$ は $\dot{E}_{12}$ と $\dot{E}_{23}$ とのベクターを合成したものであるからその合成和は $\dot{F}_{31}$ と等しく方向逆となる。之を此の式に入れゝば $\dot{I}_1$ は次の如くなる。

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{E}_{12}\dot{Z}_3-\dot{E}_{31}\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (146)$$

此の $\dot{I}_1$ を(d)式に代入して計算を行へば $\dot{I}_2$ が求められる。

$$\dot{I}_2=\frac{1}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}\left(\dot{F}_{23}-\frac{\dot{E}_{12}\dot{Z}_3-\dot{E}_{31}\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}\times\dot{Z}_3\right)$$

$$=\frac{\dot{F}_{23}\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{E}_{23}\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{E}_{23}\dot{Z}_1\dot{Z}_3-\dot{E}_{12}\dot{Z}_3{}^2+\dot{E}_{31}\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{(\dot{Z}_2+\dot{Z}_3)(\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3)}$$

此の場合も $\dot{E}_{23}\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{E}_{31}\dot{Z}_2\dot{Z}_3$ は $\dot{Z}_2\dot{Z}_3(\dot{E}_{23}+\dot{E}_{31})$ となり $\dot{E}_{23}$ と $\dot{E}_{31}$ との合成和は $\dot{E}_{12}$ と大きさが等しくなり方向が逆になるので此の式は次の通りになる。

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{E}_{23}\dot{Z}_1(\dot{Z}_2+\dot{Z}_3)-\dot{E}_{12}\dot{Z}_3(\dot{Z}_2+\dot{Z}_3)}{(\dot{Z}_2+\dot{Z}_3)(\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3)}$$

$$\therefore\quad \dot{I}_2=\frac{\dot{E}_{23}\dot{Z}_1-\dot{E}_{12}\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (147)$$

$\dot{I}_3$ は次の如くして見出さる。

$$\dot{I}_3=-\dot{I}_1-\dot{I}_2=\frac{-\dot{E}_{12}\dot{Z}_3+\dot{E}_{31}\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}-\frac{\dot{E}_{23}\dot{Z}_1-\dot{E}_{12}\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

$$\therefore\quad I_3=\frac{\dot{E}_{31}\dot{Z}_2-\dot{E}_{23}\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (148)$$

之で三線に流れる電流が見出された譯であるが此の $\dot{E}_{23}$ と $\dot{E}_{13}$ とは $\dot{E}_{12}$ を基線に取り之によつて表はす事が出來るので $\dot{E}_{12}$ の電壓で之等の電流を表はすと次の如くなる。

$$\dot{I}_1=\frac{E_{12}\dot{Z}_3-E_{12}\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

$$=\frac{E_{12}\left(\dot{Z}_3+\frac{1}{2}\dot{Z}_2-j\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{Z}_2\right)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

$$\dot{I}_2=\frac{E_{12}\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\dot{Z}_1-Z_{12}\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

$$=\frac{-E_{12}\left(\frac{1}{2}\dot{Z}_1+j\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{Z}_1+\dot{Z}_3\right)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

$$\dot{I}_3=\frac{E_{12}\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\dot{Z}_2-E_{12}\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

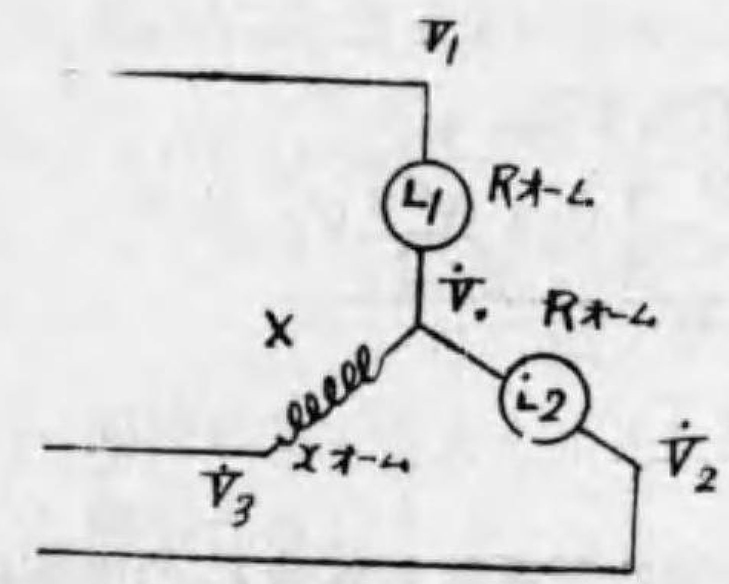
$$=\frac{E_{12}\left(\frac{1}{2}\dot{Z}_1-\frac{1}{2}\dot{Z}_2+j\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{Z}_1+j\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{Z}_2\right)}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}$$

之で各線の電線が一相の線間電壓を基線に取つた式で表はし得られた譯である。

3. 相廻轉の方向を知る裝置

一つの發電所と他の發電所とを並列に入れる場合に二つの發電所の廻轉位相が逆であるならば並列に入れる事は無論出來ない。此の場合卽ち相の廻轉方向が違つて居る場合に之を直さんとするには三つの線の中何れかの二線を交叉して置けばよい。然らば此の相の廻轉方向を知らうと思へば如何にすれば良いか

と云へば2箇の同じ電球とインダクタンスとを星形に接續し之を兩方の電源に接續して見る。此の場合に兩方の電源が同じ相廻轉であるならば同じ電球が明るく光るのであるが兩電源の相廻轉が違ふならば一方の電源に對して一方の電球が明るく光り他の電源に對して他の電球が明るく光る。此の場合に使用するインダクタンスはそのリアクタンスが大體電球の抵抗と同じ位のものを使用する。然らば何故一方は明るく一方は暗く光るかと云ふ事を計算によつて說明し三相不平衡負荷の計算例題として見よう。



第 2 1 7 圖

第217圖の如く電球L_1L_2とインダクタンスXとを星形に接續したとする。此の場合に誘導リアクタンスと電球の抵抗とは相等しいものとし各電球にかゝる電壓とインダクタンスにかゝる電壓とを計算して見る。

今供給電壓を三相平衡電壓としその相電壓を夫々 $V_1\,V_2\,V_3$ とする。今相電壓 V_1 をベクターの基線に取り $V_1V_2V_3$ の順に位相が廻轉するとすれば V_2V_3 は夫々次の式で表はされる。

$$\dot{V}_2=V_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad \dot{V}_3=V_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

今各電球にかゝる電壓の計算を行ふに當り中性點の電位を求めて計算する方法によつて此の問題を解いて見る。各回路のアドミッタンスを $Y_1\,Y_2\,Y_3$ とすれば中性點の電位は次の如くなる。

$$\dot{V}_0=\frac{\dot{V}_1\dot{Y}_1+\dot{V}_2\dot{Y}_2+\dot{V}_3\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3}=\frac{\frac{\dot{V}_1}{R}+\frac{\dot{V}_2}{R}+\frac{\dot{V}_3}{jx}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{jx}}$$

然るに題意によつてRとxとは相等しいのであるから此の式は次の如く變化する事が出來る。

$$\dot{V}_0=\frac{\frac{\dot{V}_1}{R}+\frac{\dot{V}_2}{R}+\frac{\dot{V}_3}{jR}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{jR}}=\frac{\frac{j\dot{V}_1+j\dot{V}_2+\dot{V}_3}{jR}}{\frac{j2+1}{jR}}$$

$$=\frac{j\dot{V}_1+j\dot{V}_2+\dot{V}_3}{1+j2}$$

此の式の$\dot{V}_2\dot{V}_3$に對して前式を代入する。

$$\dot{V}_0=\frac{jV_1-j\frac{1}{2}V_1+\frac{\sqrt{3}}{2}V_1-\frac{1}{2}V_1+j\frac{\sqrt{3}}{2}V_1}{1+j2}$$

$$=\frac{V_1(\sqrt{3}-1+j1+j\sqrt{3})}{2(1+j2)}$$

從つて第217圖のV_1とV_0との間の電壓即ち負荷L_1の兩端にかゝる相電壓$\dot{V}_{10}$は$\dot{V}_1-\dot{V}_0$であるから次の通りになる。

$$\dot{V}_{10}=\dot{V}_1-\dot{V}_0=V_1-\frac{V_1(\sqrt{3}-1+j1+j\sqrt{3})}{2(1+j2)}$$

$$=\frac{V_1(2+j4-\sqrt{3}+1-j1-j\sqrt{3})}{2(1+j2)}$$

$$=\frac{V_1\{3-\sqrt{3}+j(3-\sqrt{3})\}}{2(1+j2)}$$

$$=\frac{V_1(3-\sqrt{3})(1+j1)(1-j2)}{2(1+j2)(1-j2)}$$

$$=\frac{V_1(3-\sqrt{3})(3-j1)}{2\times5}$$

此のV_{10}を實效値で表はすならば次の通りになる。

$$V_{10}=\frac{V_1(3-\sqrt{3})\sqrt{9+1}}{10}=0.402V_1$$

次に電球L_2の兩端にかゝる電壓をV_{20}とすれば此の電壓は$\dot{V}_2-\dot{V}_0$であるから次の通りになる。

$$\dot{V}_{20}=\dot{V}_2-\dot{V}_0=V_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$-\frac{V_1(\sqrt{3}-1+j1+j\sqrt{3})}{2(1+j2)}$$

$$=\frac{V_1(-1-j\sqrt{3}-j2+2\sqrt{3}-\sqrt{3}+1-j1-j\sqrt{3})}{2(1+j2)}$$

$$=\frac{-V_1\{6+3\sqrt{3}+j(3+4\sqrt{3})\}}{2\times5}$$

此のV_{20}を實效値に直せば次の通りになる。

$$V_{20}=\frac{V_1\sqrt{(6+3\sqrt{3})^2+(3+4\sqrt{3})^2}}{10}$$

$$=\frac{V_1\sqrt{60}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{10}=1.5V_1$$

同様にしてリアクタンスXにかゝる電壓V_{30}も次の如く計算し得られる。

$$V_{30}=\dot{V}_3-\dot{V}_0=V_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$-\frac{V_1(\sqrt{3}-1+j1+j\sqrt{3})}{2(1+j2)}$$

$$=\frac{V_1(-1+j\sqrt{3}-j2-2\sqrt{3}-\sqrt{3}+1-j1-j\sqrt{3})}{2(1+j2)}$$

$$=\frac{-V_1(3\sqrt{3}+j3)}{2(1+j2)}=\frac{-V_1(3\sqrt{3}+j3)(1-j2)}{2(1+j2)(1-j2)}$$

$$=\frac{-V_1\{6+3\sqrt{3}+j(3-6\sqrt{3})\}}{2\times5}$$

是を實效値で表はすならば次の通りになる。

$$V_{30}=\frac{V_1\sqrt{(6+3\sqrt{3})^2+(3-6\sqrt{3})^2}}{10}=1.34V_1$$

斯くて L_1 には相電壓 0.402 倍がかゝり L_2 には相電壓の1.5倍がかゝり X には相電壓の 1.34倍がかゝる事になる。從つて此の際は L_2 は大きく光り L_1 は非常に暗く光るのである。此の場合に各電球及びインダクタンスにかゝる電壓を線間電壓で表はすならば上式の計算に於て夫々の電壓を$\sqrt{3}$で割ればよい。今線間電壓を V_L で表はすならば次の通りになる。

$$V_{10}=\frac{0.402}{\sqrt{3}}V_L=0.232V_L$$

$$V_{20}=\frac{1.5}{\sqrt{3}}V_L=0.866V_L$$

$$V_{30}=\frac{1.34}{\sqrt{3}}V_L=0.774V_L$$

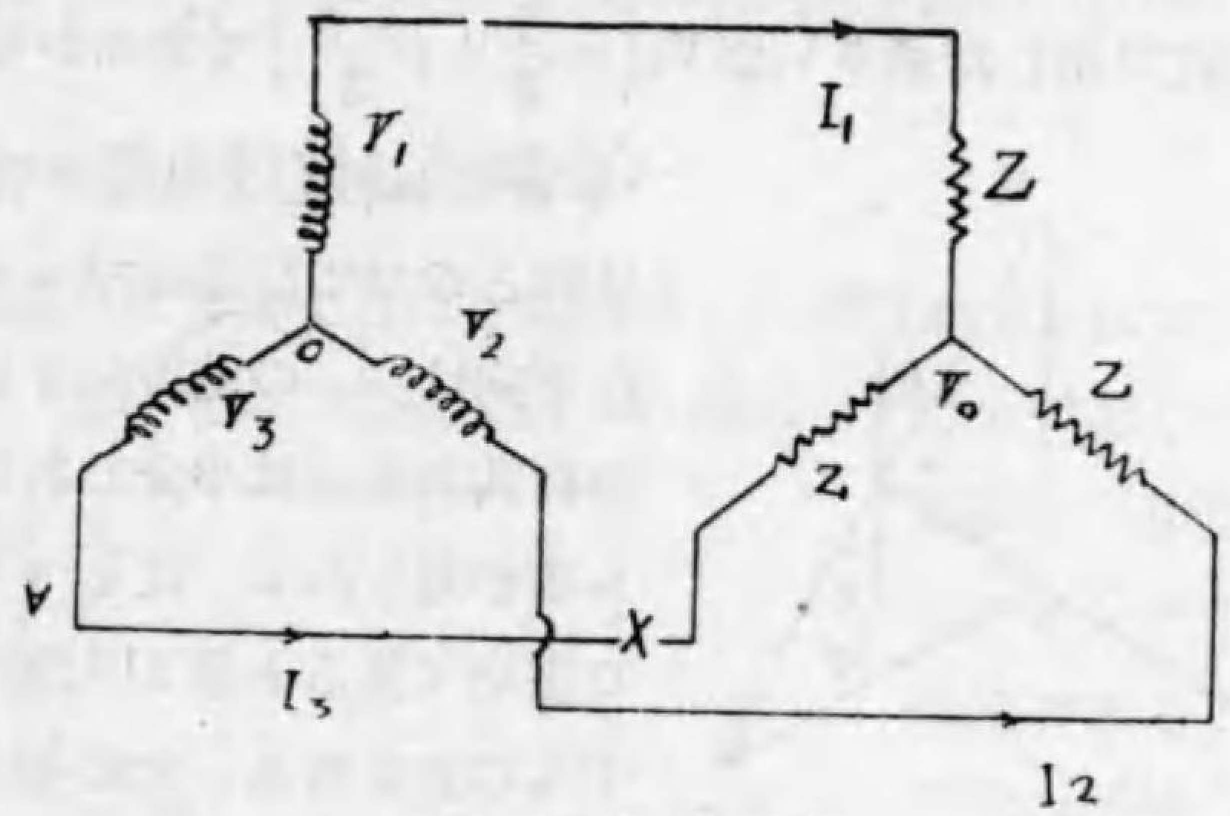
次に相の廻轉方向が今の場合と逆であつたならば如何になるかと云へば上の計算に於て $\dot{V}_2$ と $\dot{V}_3$とのベクターを次の如く取り前の場合の計算と反對にすればよいのである。

$$\dot{V}_2=V_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad \dot{V}_3=V_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

斯くして計算した結果はどうなるかと云ふと L_1 にかゝる電壓は相電壓の 1.5倍卽ち線間電壓の 0.866倍となりL_2にかゝる電壓は相電壓の 0.402倍卽ち線間電壓の 0.232倍となる。斯くて電球は L_1 が L_2 より明るく光り前の場合の逆となる。是によつての廻相轉方向が正しいか否かを知る事が出來るのである。

4.　一線開路せる場合

第218圖の如くインピーダンスZが星形に接續せられた負荷がある。此の負荷は三相平衡負荷であるが此の一線がXの箇所に於て斷線したとするならば此の負荷も不平衡負荷となる。此の場合に於ける負荷の電壓と電流とを求めて見る。先づ V_1なる相電壓を基線に取り V_2V_3 を求めると次の通りである。



第 2 1 8 圖

$$\dot{V}_1=\dot{V}_1\qquad \dot{V}_2=\dot{V}_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{V}_3=V_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right)$$

次に負荷中性點の電位 V_0 を計算する。此の場合に於けるインピーダンスZは無限大であつて從つてアドミッタンス Y_3 は零となる。

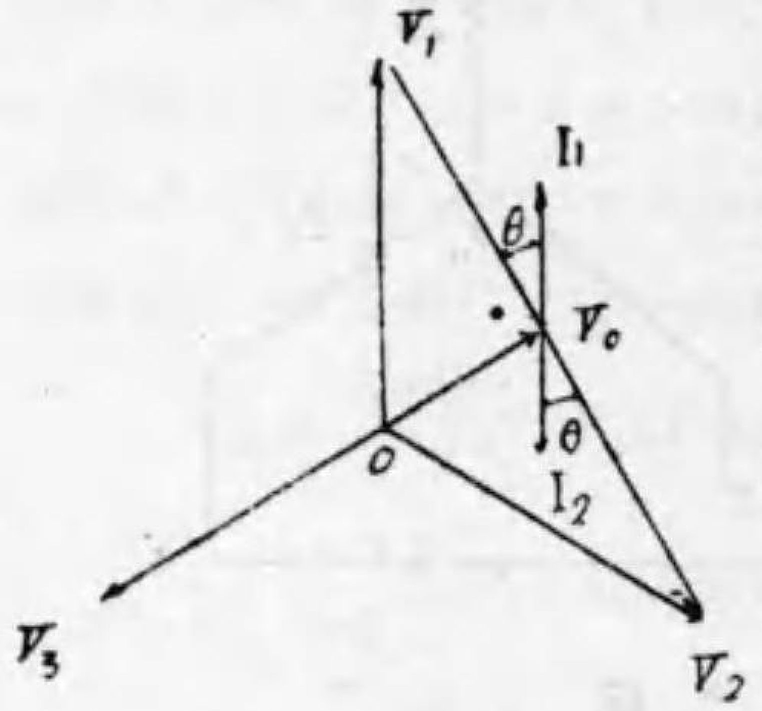
$$\dot{V}_0=\frac{\dot{V}_1\dot{Y}_1+\dot{V}_2\dot{Y}_2+\dot{V}_3\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3}=\frac{\dot{V}_1\dot{Y}_1+\dot{V}_2\dot{Y}_2}{\dot{Y}_1+\dot{Y}_2}$$

$$\dot{Y}_1=\dot{Y}_2=\frac{1}{\dot{Z}}$$

$$\therefore\quad \dot{V}_0=\frac{\dfrac{\dot{V}_1+\dot{V}_2}{\dot{Z}}}{\dfrac{2}{\dot{Z}}}=\frac{\dot{V}_1+\dot{V}_2}{2}$$

$$=\frac{V_1+V_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}V_1\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

即ち負荷に於ける中性點の電位は此の $\dot{V}_0$ 丈移動した譯であつて前の式で示した通り $\dot{V}_3$ が $V_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であるから之と



第 2 1 9 圖

$\dot{V}_0$ とを比較して見ると符號が反對となつて居るのでベクターの方向は $\dot{V}_3$ の逆方向なる事が知れ其大きさは半分であると云ふ事が知られる。之をベクターで書いて見ると第219圖に於て OV_0 の如くなる。次に各インピーダンスZにかゝる電壓と之に流れる電流 $\dot{I}_1\dot{I}_2$ を求めて見る。

$$\dot{V}_{10}=\dot{V}_1-\dot{V}_0=V_1-\frac{1}{2}V_1\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}V_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{V}_{20}=\dot{V}_2-\dot{V}_0=V_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}V_1\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}V_1\left(-\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \dot{I}_1=\frac{\dot{V}_{10}}{\dot{Z}}=\frac{\frac{1}{2}V_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{Z}=\frac{V_1}{4Z}(3+j\sqrt{3})$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{V}_{20}}{\dot{Z}}=\frac{\frac{1}{2}V_1\left(-\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{Z}=\frac{V_1}{4Z}(-3-j\sqrt{3})$$

従つて $\dot{I}_1$ と $\dot{I}_2$ との流れる方向は正反對の方向を取り此の電流は電壓より位相角 θ 丈遲れるものである。此の位相角は次の式から求めらる。

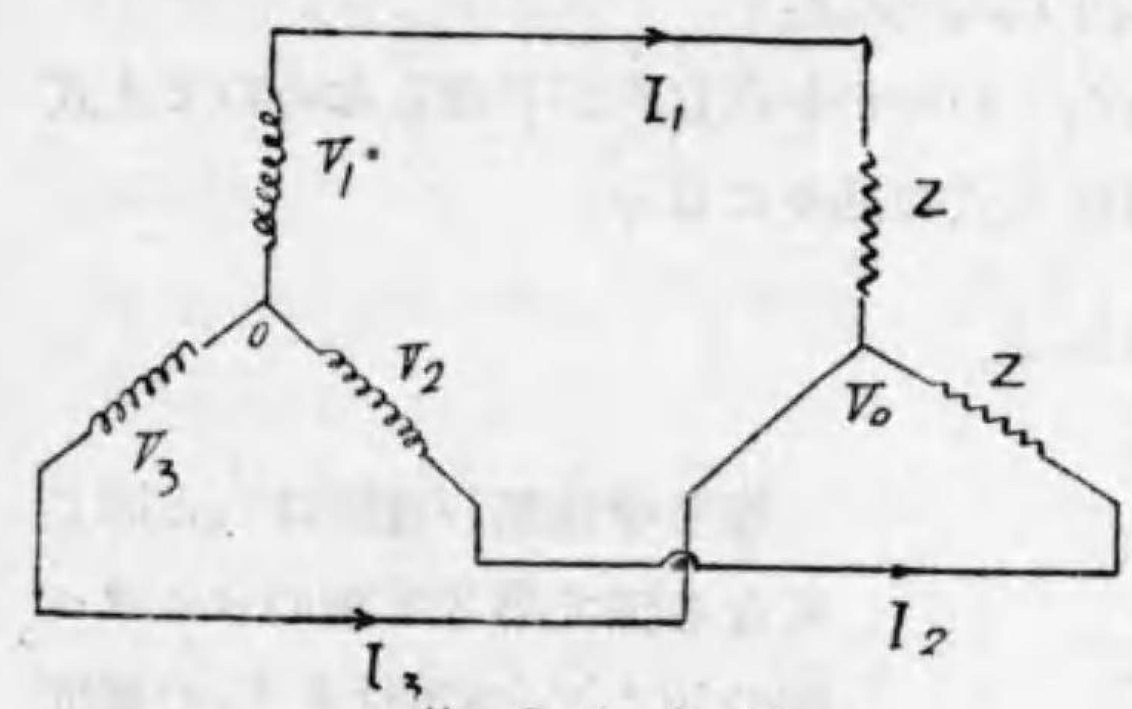
$$\cos\theta=\frac{r}{Z}$$

此の電流の實效値は次の通りである。

$$I_1=I_2=\frac{V_1}{4Z}\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{V_1}{4Z}\sqrt{12}=\frac{\sqrt{3}\,V_1}{2Z}$$

5. 一線が短絡した場合

今度は星形に接續せられた回路の一つが短絡せられて居る場合を示す。此の場合の接續は第220圖に示す通りであつて此の



第 2 2 0 圖

接續はV接續即ちオープンデルタの接續である。從つて此の接續の計算は星形接續の計算でなくして三角形接續の計算によつて行ふのが本當であるが星形接續でもその計算を行ふ事が出來るので此の方法で解く例を示す事とする。此のV接續の負荷は明らかに不平衡負荷であつて一相のインピーダンスが零の場合である。今相電壓 $\dot{V}_1$ を基線に取れば $\dot{V}_2\dot{V}_3$ は次の如くなる。

$$\dot{V}_1=V_1\qquad \dot{V}_2=V_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{V}_3=V_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

次に中性點 V_0 の電位を求めると次の通りになる、$Z_1Z_2Z_3$ は各相のインピーダンスである。

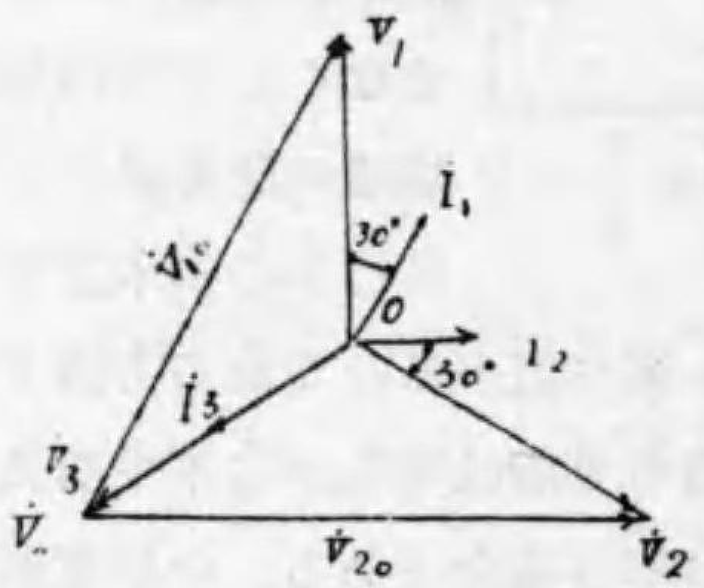
$$\dot{V}_0=\frac{V_1Y_1+V_2Y_2+V_3Y_3}{Y_1+Y_2+Y_3}=\frac{\frac{\dot{V}_1}{\dot{Z}_1}+\frac{\dot{V}_2}{\dot{Z}_2}+\frac{\dot{V}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1}+\frac{1}{\dot{Z}_2}+\frac{1}{\dot{Z}_3}}$$

$$=\frac{\dfrac{\dot V_1\dot Z_2\dot Z_3+\dot V_2\dot Z_1\dot Z_3+\dot V_3\dot Z_1\dot Z_2}{\dot Z_1\dot Z_2\dot Z_3}}{\dfrac{\dot Z_1\dot Z_2+\dot Z_2\dot Z_3+\dot Z_3\dot Z_1}{\dot Z_1\dot Z_2\dot Z_3}}$$

$$=\frac{\dot V_1\dot Z_2\dot Z_3+\dot V_2\dot Z_1\dot Z_3+\dot V_3\dot Z_1\dot Z_2}{\dot Z_1\dot Z_2+\dot Z_2\dot Z_3+\dot Z_3\dot Z_1}$$

此の場合には$\dot Z_1$と$\dot Z_2$とのみが存在し$\dot Z_3$が存在しないので上式に於てZ_3を零と置けば次式の通りになる。

$$\dot V_0=\frac{\dot V_3\dot Z_1\dot Z_2}{\dot Z_1\dot Z_2}=\dot V_3$$



第 2 2 1 圖

即ち中性點の電位は$\dot V_3$と同じになる譯で第221圖のベクター圖の如く$\dot V_0$の電位とV_3の電位とは一致する。次に$\dot V_0$と$\dot V_1$との間の電壓及び$\dot V_0$と$\dot V_2$との間の電壓を$\dot V_{10}$及び$\dot V_{20}$とすれば是等は夫々次の通りになるのである。

$$\dot V_{10}=\dot V_1-\dot V_0=\dot V_1-\dot V_3=V_1\left(1+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=V_1\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot V_{20}=\dot V_2-\dot V_0=\dot V_2-\dot V_3=V_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$-V_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-jV_1\sqrt{3}$$

之をベクターで示すと第221圖の如く$\dot V_{10}$は$\dot V_1$のベクターより$\dot V_3$のベクターを引いたもの$\dot V_{20}$のベクターは$\dot V_2$のベクターより$\dot V_3$のベクターを引いたものである。次に各回路に流れる電流$I_1I_2I_3$を求むれば次の通りである。但しV_Lは線間電壓である。

$$\dot I_1=\frac{\dot V_{10}}{\dot Z}=\frac{V_1\left(\dfrac{3}{2}-j\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\dot Z}=\frac{V_1}{\dot Z}\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot I_2=\frac{\dot V_{20}}{\dot Z}=\frac{-j\sqrt{3}\,V_1}{\dot Z}$$

$$\dot I_3=-\dot I_1-\dot I_2=\frac{-V_1}{\dot Z}\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{-j\sqrt{3}\,V_1}{\dot Z}$$

$$=\frac{V_1}{\dot Z}\left(-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}+j\sqrt{3}\right)=\frac{3V_1}{\dot Z}\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore\quad I_1=\frac{V_1}{Z}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}\,V_1}{Z}=\frac{V_L}{Z}$$

$$I_2=\frac{\sqrt{3}\,V_1}{Z}=\frac{V_L}{Z}$$

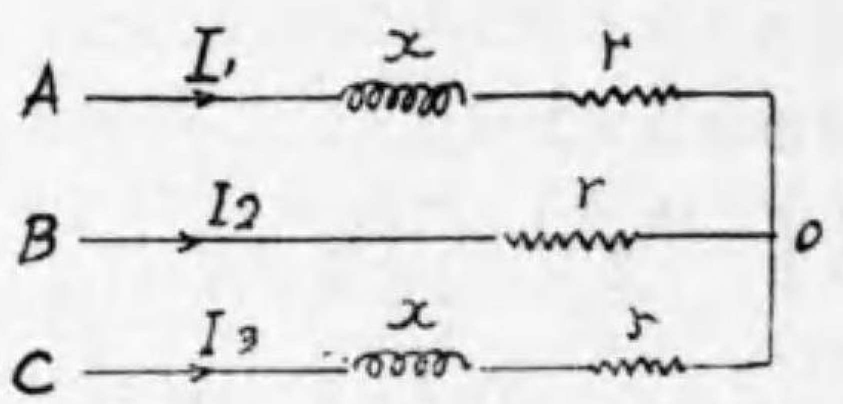
$$I_3=\frac{3V_1}{Z}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{3V_1}{Z}=\frac{\sqrt{3}\,V_L}{Z}$$

是で$I_1I_2I_3$の方向とその大きさが知れた譯であつて今簡單にするためにZを無誘導抵抗のみとするならば電流I_1の方向は$\dot V_{10}$の方向と同相となりI_2の方向は$\dot V_{20}$と同相になる。I_3の方向は$\dot I_3$の式に示された所で知れる通り$\dot V_3$の方向と同相となる。之をベクター圖に示すならば第221圖に示された通りで$\dot I_1$は$\dot V_1$より30度遲れ$\dot I_2$は$\dot V_2$より30度進み$\dot I_1$と$\dot I_2$との間の位相角は60度である。又Zにリアクタンスを含んで居るならば此のインピーダンスの力率を求め是より位相角を出して圖の$\dot I_1\,\dot I_2\,\dot I_3$の位置より此の位相角丈遲らせばよいのである。此の電流の大きさは上

の計算に示した通り I_1 I_2は線間電壓をインピーダンスで割つたもので此の二つの電流は相等しく I_3は是等の電流の$\sqrt{3}$である。

6. 例　　題

例 1. 第222圖の如く接續せられたる三相回路があつて三つの抵抗 r は互に相等しく二つのリアクタンスも相等しい。今此の回路に三相平衡電壓を供給するとすれば各線に流れる電流を求む。



第 2 2 2 圖

解　相電壓を $V_1V_2V_3$ とし V_1 をベクターの基線に取る。V_0 は接續中性點の電位である。

$$\dot{V}_1=V_1 \qquad \dot{V}_2=V_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{V}_3=V_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{V}_0=\frac{\dot{V}_1\dot{Y}_1+\dot{V}_2\dot{Y}_2+\dot{V}_3\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3}=\frac{\dfrac{\dot{V}_1}{r+jx}+\dfrac{\dot{V}_2}{r}+\dfrac{\dot{V}_3}{r+jx}}{\dfrac{1}{r+jx}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r+jx}}$$

$$=\frac{V_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}jx\right)}{3r+jx}=\frac{V_1x(\sqrt{3}-j1)}{2(3r+jx)}$$

$$\therefore \quad \dot{I}_1=\frac{\dot{V}_1-\dot{V}_0}{r+jx}=\frac{V_1}{r+jx}\left\{1-\frac{x(\sqrt{3}-j1)}{2(3r+jx)}\right\}$$

$$=\frac{V_1(6r-\sqrt{3}x-3jx)}{2(r+jx)(3r+jx)}$$

$$\therefore \quad I_1=\frac{V_1\sqrt{(6r-\sqrt{3}x)^2+x^2}}{2\sqrt{(r^2+x^2)(9r^2+x^2)}}=\frac{V_1\sqrt{9r^2-3\sqrt{3}xr+3x^2}}{\sqrt{(r^2+x^2)(9r^2+x^2)}}$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{V}_2-\dot{V}_0}{r}=\frac{V_1}{r}\left\{-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{x(\sqrt{3}-j1)}{2(3r+jx)}\right\}$$

$$=\frac{3V_1(-r-j\sqrt{3}r)}{2r(3r+jx)}=\frac{-3V_1(1+j\sqrt{3})}{2(3r+jx)}$$

$$\therefore \quad I_2=\frac{3V_1\sqrt{1+3}}{2\sqrt{9r^2+x^2}}=\frac{3V_1}{\sqrt{9r^2+x^2}}$$

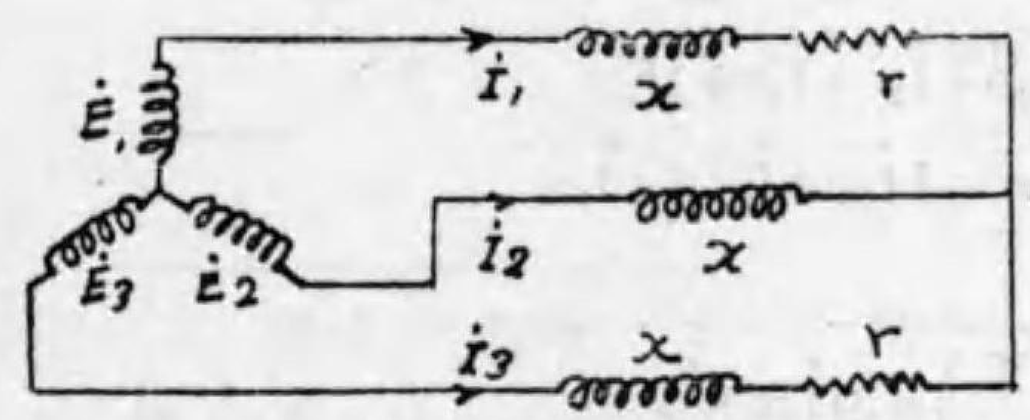
$$\dot{I}_3=\frac{\dot{V}_3-\dot{V}_0}{r+jx}=\frac{V_1}{r+jx}\left\{-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{x(\sqrt{3}-j1)}{2(3r+jx)}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}V_1(-\sqrt{3}r-2x+j3r)}{2(r+jx)(3r+jx)}$$

$$\therefore \quad I_3=\frac{\sqrt{3}V_1\sqrt{(\sqrt{3}r+2x)^2+9r^2}}{2\sqrt{(r^2+x^2)(9r^2+x^2)}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}V_1\sqrt{3r^2+\sqrt{3}rx+x^2}}{\sqrt{(r^2+x^2)(9r^2+x^2)}}$$

例 2. 第223圖に示すが如き回路があつて E_1 E_2 E_3 は平衡三相の相電壓とし x はリアクタンス、r は抵抗とすれば、各線に流れる電流 I_1 I_2 I_3 を求む。



第 2 2 3 圖

解　先づキルヒホッフの第一法則を應用すれば次の式が成立する。

$$\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

I_1 の流れる回路と I_2の回路にキルヒホッフの第二法則を應用し次に I_2の流れる回路と I_3の流れる回路とに第二法則を應用す

れば次の二式が得られる。

$$\dot{E}_1-\dot{E}_2=\dot{I}_1r+j\dot{I}_1x-j\dot{I}_2x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

$$\dot{E}_2-\dot{E}_3=j\dot{I}_2x-\dot{I}_3r-j\dot{I}_3x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

今E_1なる相電壓を基線に取れば$(\dot{E}_1-\dot{E}_2)$と$(\dot{E}_2-\dot{E}_3)$とは次の通りになる。

$$\dot{E}_1-\dot{E}_2=E_1-E_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=E_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{E}_2-\dot{E}_3=E_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$-E_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-E_1j\sqrt{3}$$

之を(b)式と(c)式とに入れる。

$$E_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dot{I}_1r+j\dot{I}_1x-j\dot{I}_2x \cdots\cdots\cdots(d)$$

$$-E_1j\sqrt{3}=j\dot{I}_2x-\dot{I}_3r-j\dot{I}_3x \cdots\cdots\cdots\cdots(e)$$

(a)式より$\dot{I}_3$は$\dot{I}_1-\dot{I}_2$となり之を(e)式に代入し此の式より(d)式を引けば$\dot{I}_2$が求められる。

$$-E_1j\sqrt{3}=jI_2x-(-\dot{I}_1-\dot{I}_2)r-j(-\dot{I}_1-\dot{I}_2)x$$

$$-E_1j\sqrt{3}=2j\dot{I}_2x+\dot{I}_2r+\dot{I}_1r+j\dot{I}_1x$$

$$E_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-j\dot{I}_2x+\dot{I}_1r+j\dot{I}_1x$$

(－)

$$-E_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=3j\dot{I}_2x+\dot{I}_2r$$

$$\therefore\quad \dot{I}_2=\frac{-E_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}{r+j3x}$$

(d)より$E_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dot{I}_1(r+jx)+j\frac{E_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)x}{r+j3x}$

$$\dot{I}_1(r+jx)=E_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-j\frac{E_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)x}{r+j3x}$$

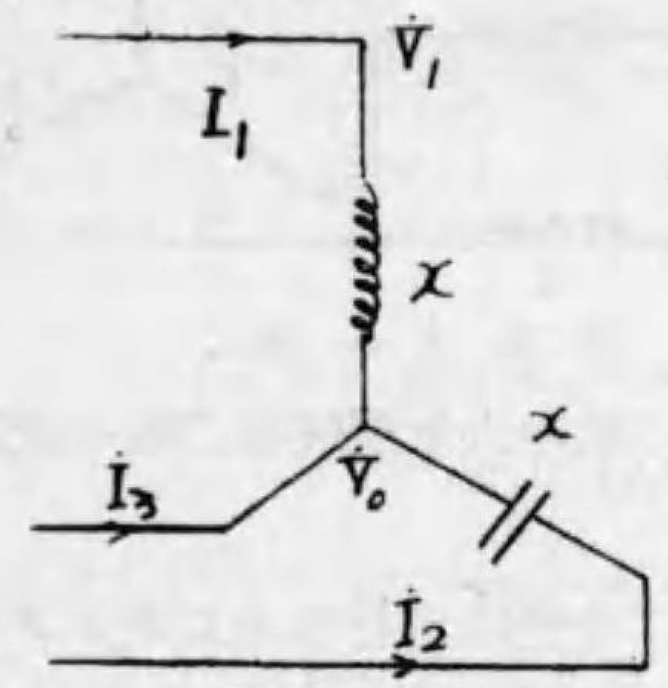
$$\therefore\quad \dot{I}_1=\frac{E_1\left\{\frac{3}{2}r+j\left(3x+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)\right\}}{(r+jx)(r+j3x)}$$

$$\dot{I}_3=-\dot{I}_1-\dot{I}_2=-\frac{E_1\left\{\frac{3}{2}r+j\left(3x+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)\right\}}{(r+jx)(r+j3x)}$$

$$+\frac{E_1\left(\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}{r+j3x}$$

$$=\frac{E_1\left\{-\frac{3\sqrt{3}}{2}x+j\left(\sqrt{3}r-\frac{3}{2}x\right)\right\}}{(r+jx)(r+j3x)}$$

斯くて$\dot{I}_1\dot{I}_2\dot{I}_3$が相電壓$E_1$を基線としたベクターの式で書き表はされた譯である。



第 2 2 4 圖

例 3. 第224圖の如くインダクタンスのリアクタンスxとキヤパシチーのリアクタンスxとを接續した。此の場合に二つのリアクタンスが相等しければ流れる電流とその方向とを定めよ。

解　V_1V_0間及びV_2V_0間の電壓$\dot{V}_{10}\dot{V}_{20}$は次の通りになる。

$$\dot{V}_{10}=V_1\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad \dot{V}_{20}=-j\sqrt{3}V_1$$

從つてI_1I_2は次の通りになる。

$$\dot{I}_1=\frac{V_{10}}{jx}=\frac{V_1}{jx}\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{jV_1}{x}\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

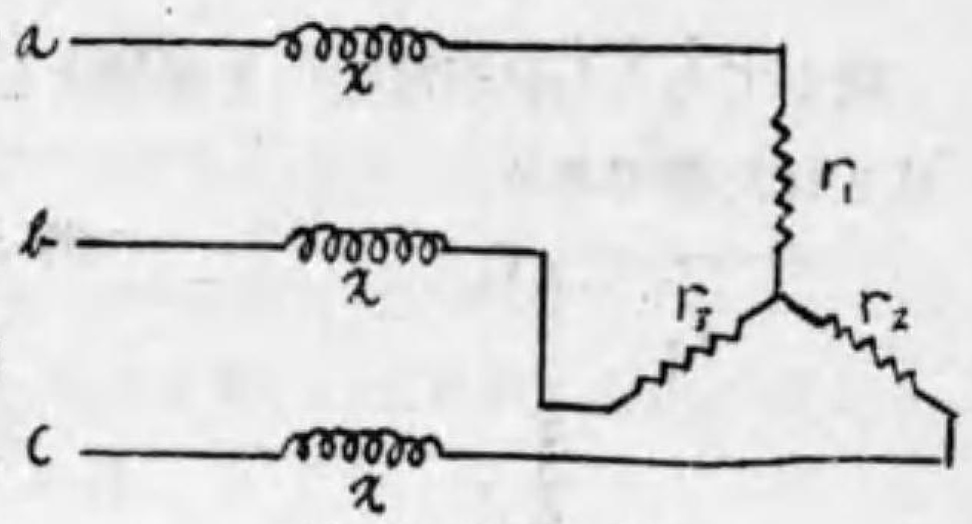
$$=-\frac{\sqrt{3}V_1}{x}\left(j\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}V_1}{x}\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{I}_2=\frac{V_{20}}{-jx}=\frac{V_1}{-jx}\times(-j\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}V_1}{x}$$

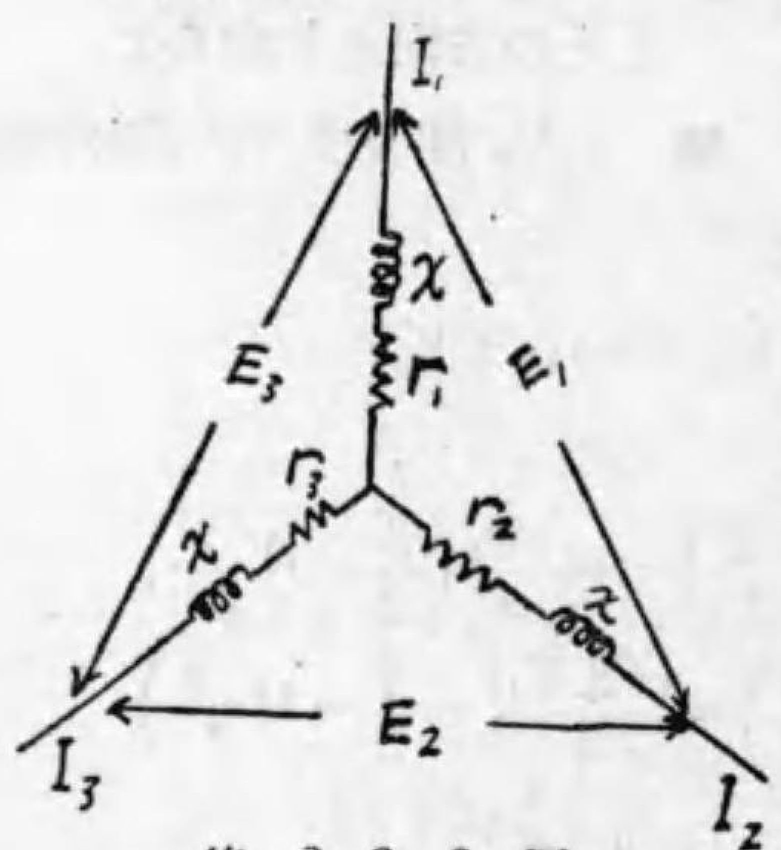
$$\dot{I}_3=-\dot{I}_1-\dot{I}_2=\frac{\sqrt{3}\,V_1}{x}\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}\,V_1}{x}\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

此の式で見ると電流I_1は $V_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$と同相となる譯であつて云ひ換へれば$\dot{V}_2$と同相となる譯である。同様にして$\dot{I}_2$は$\dot{V}_1$と同相になり$\dot{I}_3$は$\dot{V}_3$と同相になる。又各電流はその實效値が皆相等しくなるもので是等の電流は何れも實效値は$\frac{\sqrt{3}\,V_1}{x}$となる。

例 4. 第225圖に示す回路に於て端子 abc に平衡三相電壓 E を加ふる時、各線に通ずる電流如何。但し x はリアクタンス r_1 r_2 及び r_3 は無誘對抵抗とす。(昭和六年遞試第二種一次試驗問題)



第 2 2 5 圖



第 2 2 6 圖

解 今度は之をキルヒホッフの法則によつて解いて見る、線間電壓 E_1 を基線に取り電流電壓を第226圖の如く I_1 I_2 I_3 とする。然る時は$\dot{E}_1\dot{E}_2\dot{E}_3$は夫々次の式で表はされる。

$$\dot{E}_1=E$$
$$\dot{E}_2=E\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{E}_3=E\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

次にキルヒホッフの法則によつて次の三つの方程式が成立する。

$$\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=0\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$
$$\dot{E}_1=\dot{I}_1(r_1+jx)-\dot{I}_2(r_2+jx)\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$
$$\dot{E}_2=\dot{I}_2(r_2+jx)-\dot{I}_3(r_3+jx)\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

(a)より$\dot{I}_3=-\dot{I}_1-\dot{I}_2$を得之を(c)に代入する。

$$\dot{E}_2=\dot{I}_2(r_2+jx)+\dot{I}_1(r_3+jx)+\dot{I}_2(r_3+jx)$$
$$\dot{E}_2=\dot{I}_1(r_3+jx)+\dot{I}_2(r_2+r_3+2jx)\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

(b)式より$\dot{I}_2$を求め、之を此の(d)式に代入する。

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{I}_1(r_1+jx)-\dot{E}_1}{r_2+jx}$$

$$\therefore\quad \dot{E}_2=\dot{I}_1(r_3+jx)+\frac{\dot{I}_1(r_1+jx)-\dot{E}_1}{r_2+jx}\times(r_2+r_3+2jx)$$

$$\dot{E}_2(r_2+jx)+\dot{E}_1(r_2+r_3+2jx)=\dot{I}_1(r_3+jx)(r_2+jx)$$
$$+\dot{I}_1(r_1+jx)(r_2+r_3+2jx)$$

$$E\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(r_2+jx)+E\ (r_2+r_3+2jx)=\dot{I}_1(r_2r_3$$
$$+jr_3x+jr_2x-x^2+r_1r_2+r_1r_3+2jr_1x+jr_2x+jr_3x-2x^2)$$

$$E\left(-\frac{1}{2}r_2-j\frac{1}{2}x-j\frac{\sqrt{3}}{2}r_2+\frac{\sqrt{3}}{2}x+r_2+r_3+2jx\right)$$
$$=I_1\{r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3-3x^2+2jx(r_1+r_2+r_3)\}$$

$$\therefore\quad \dot{I}_1=\frac{E\left(\frac{1}{2}r_2+r_3+\frac{\sqrt{3}}{2}x+j\frac{3}{2}x-j\frac{\sqrt{3}}{2}r_2\right)}{r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3-3x^2+2jx(r_1+r_2+r_3)}$$

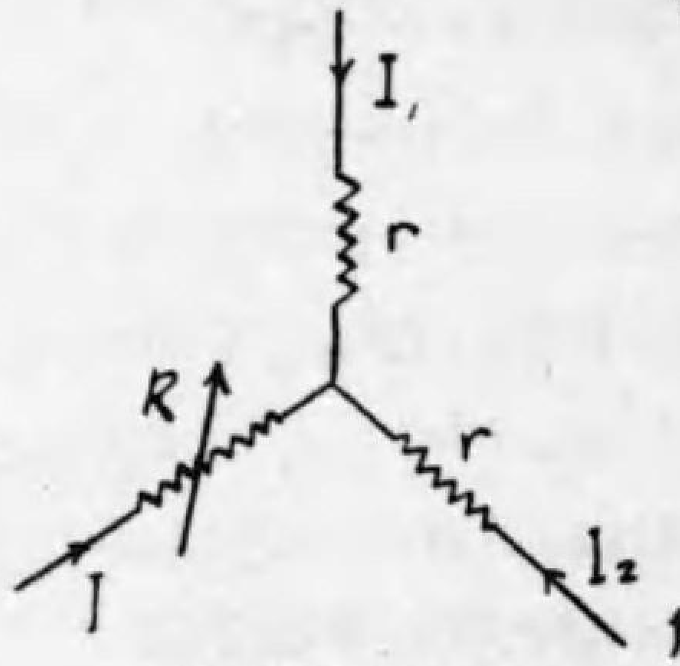
此の$\dot{I}_1$を$\dot{I}_2$の式に代入するならば$\dot{I}_2$が次の如く求めらる。

$$\dot{I}_2=\frac{E\left(-\frac{1}{2}r_1-r_3+\frac{\sqrt{3}}{2}x+j\frac{3}{2}x-j\frac{\sqrt{3}}{2}r_1\right)}{r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3-3x^2+2jx(r_1+r_2+r_3)}$$

$$\dot{I}_3=\dot{I}_1-\dot{I}_2=\frac{E\left(\frac{1}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2-\sqrt{3}x+j\frac{\sqrt{3}}{2}r_1+j\frac{\sqrt{3}}{2}r_2\right)}{r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3-3x^2-2jx(r_1+r_2+r_3)}$$

之で三つの電流が複素數で求められた譯である。

例 5. 第227圖に示すが如く二つの抵抗 r と一つの可變抵抗 R とを星形に接續して之に三相平衡電壓をかけて見る、此の場合に電流 I_1 と I_2 とを相等しくし、且つその相差を90度ならしめんには R に如何なる値を持たすべきか。



第 2 2 7 圖

解 之もキルヒホッフの法則を使用する方法で解いて見る rr にかゝる線間電壓を V_1 とし之を基線に取る。

$$\dot{V}_1=V_1 \qquad \dot{V}_2=V_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{V}_1=\dot{I}_1r-\dot{I}_2r \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

$$\dot{V}_2=\dot{I}_2r-\dot{I}_3R \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

$$\dot{I}_3=-\dot{I}_1-\dot{I}_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (c)$$

(c)を(b)に代入　$\dot{V}_2=\dot{I}_2r+\dot{I}_1R+\dot{I}_2R$

$$\dot{V}_2=\dot{I}_2(R+r)+\dot{I}_1R \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (d)$$

(a)より　$I_2=\dfrac{\dot{I}_1r-\dot{V}_1}{r} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (e)$

(e)を(d)に代入

$$\dot{V}_2=\frac{(\dot{I}_1r-\dot{V}_1)(R+r)}{r}+\dot{I}_1R$$

$$\dot{V}_2r=\dot{I}_1rR+\dot{I}_1r^2-\dot{V}_1R-\dot{V}_1r+\dot{I}_1Rr$$

$$V_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r=-V_1R-V_1r+\dot{I}_1r^2+2\dot{I}_1Rr$$

$$\dot{I}_1r(r+2R)=V_1\left(\frac{1}{2}r-j\frac{\sqrt{3}}{2}r+R\right)$$

$$\dot{I}_1=\frac{V_1(r-j\sqrt{3}r+2R)}{2r(r+2R)}$$

$$\dot{I}_2=\frac{1}{r}\left\{\frac{V_1(r-j\sqrt{3}r+2R)}{2r(r+2R)}\times r-V_1\right\}$$

$$=\frac{V_1(r-j\sqrt{3}r+2R-2r-4R)}{2r(r+2R)}$$

$$=\frac{V_1(-r-2R-j\sqrt{3}r)}{2r(r+2R)}$$

今 $\dot{I}_1$ と $\dot{I}_2$ との大きさを等しくし $\dot{I}_1$ の位相を $\dot{I}_2$ より90度進めたいと思ふならば $\dot{I}_1=j\dot{I}_2$ と置けばよい譯である。從つて $\dot{I}_2$ に j を乘じ之を $\dot{I}_1$ と等しくすれば次の通りになり之より R が見出さる。

$$\frac{V_1(r-j\sqrt{3}r+2R)}{2r(r+2R)}=\frac{jV_1(-r-2R-j\sqrt{3}r)}{2r(r+2R)}$$

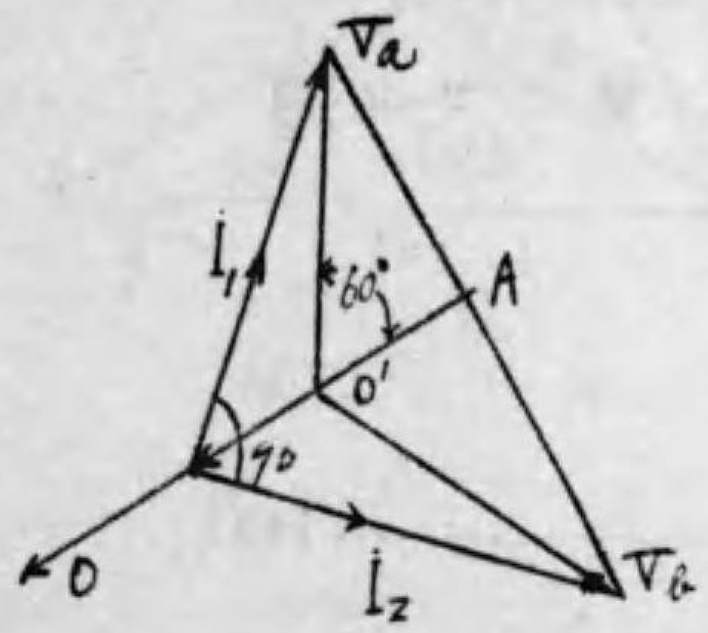
$$\therefore\quad r-j\sqrt{3}r+2R=-jr-j2R+\sqrt{3}r$$

$$\therefore\quad 2R(1+j)=-r-jr+\sqrt{3}r+j\sqrt{3}r$$

$$2R(1+j)=(1+j)(\sqrt{3}-1)r$$

$$\therefore\quad R=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\times r=0.366r$$

之で求めたる R は0.366r とすればよい事が知れた譯で今度は之を中性點を求めて行ふ方法を簡單に示す。



第 2 2 8 圖

$\dot{I}_1$ と $\dot{I}_2$ とが90度の位相を有し相等しいためには第228圖に示した方向に $\dot{I}_1$ と $\dot{I}_2$ がなければならない。從つて中性點の電位は O'O まで移動する事を要する。又 OA と V_aA とは角 AO V_a が45度であるから等しくなり、今 V_a を基線に取れば V_0 は次の如くなる。

$$V_0=OO'=OA-O'A=V_aA-O'A$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,V_a}{2} - V_a\cos 60° = \frac{1}{2}V_a(\sqrt{3}-1)$$

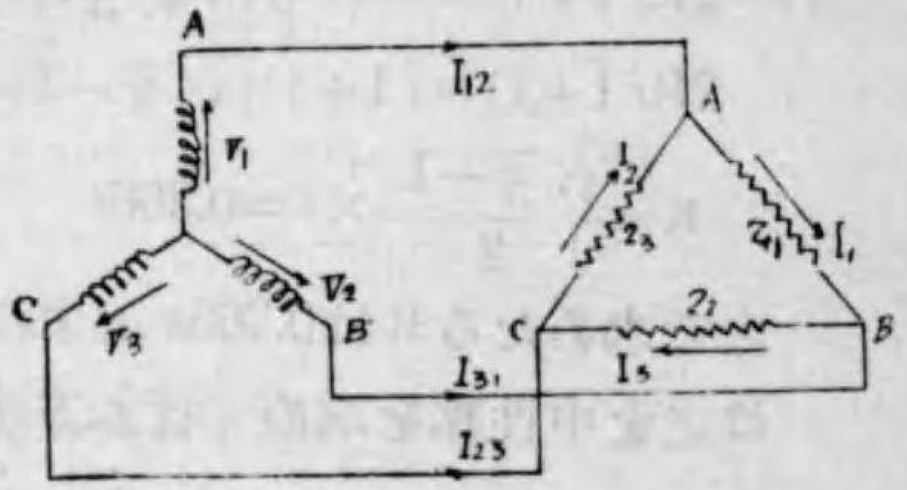
$$\therefore\ \dot{V}_0 = \frac{1}{2}V_a(\sqrt{3}-1)\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

此の V_0 と前に示した方法卽ち中性點を求むる方法で求めた電位 V_0 を等しと置けば R が求めらるる。

第十九章　三角形接續の解法

1.　一般の三角形接續

第229圖は三角形接續の負荷に對稱電壓を供給する場合の接續であつて $V_1V_2V_3$ は電源の相電壓である。今各負荷の一相のインピーダンスを $r+jx$ とし之を Z で表はして見る。電源の線間電壓を $\dot{V}_{12}$, $\dot{V}_{23}$, $\dot{V}_{31}$ で表はすならば此の線間電壓は $(\dot{V}_1-\dot{V}_2)$、$(\dot{V}_2-\dot{V}_3)$ 及び $(\dot{V}_3-\dot{V}_1)$ で表はされる。此の相電壓をインピーダンスで割れば負荷の各相を流れる電流 $I_1I_2I_3$ は夫々次の式で表はされる。



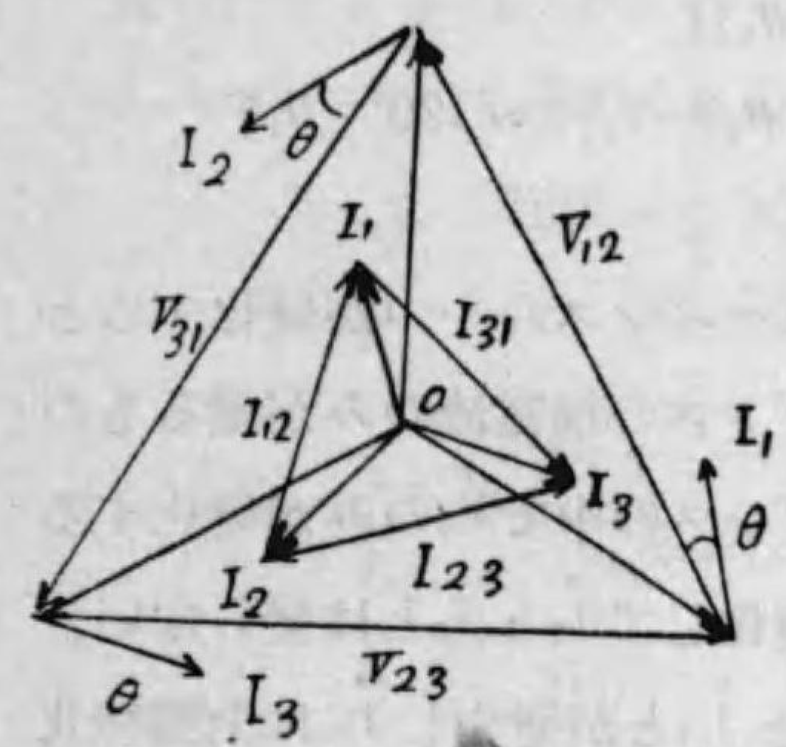
第 2 2 9 圖

$$\left.\begin{aligned}
\dot{I}_1 &= \frac{\dot{V}_1-\dot{V}_2}{\dot{Z}} = \frac{\dot{V}_{12}}{\dot{Z}}\\
\dot{I}_3 &= \frac{\dot{V}_2-\dot{V}_3}{\dot{Z}} = \frac{\dot{V}_{23}}{\dot{Z}}\\
\dot{I}_2 &= \frac{\dot{V}_3-\dot{V}_1}{\dot{Z}} = \frac{\dot{V}_{31}}{\dot{Z}}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(149)$$

次に各線を流れる線電流を $\dot{I}_{12}\ \dot{I}_{23}\ \dot{I}_{31}$ とするならば是等は互に相隣れる相を流れる電流の差となる譯で之を式で示すと次の通りである。

$$\left.\begin{aligned}
\dot{I}_{12} &= \dot{I}_1-\dot{I}_2\\
\dot{I}_{23} &= \dot{I}_2-\dot{I}_3\\
\dot{I}_{31} &= \dot{I}_3-\dot{I}_1
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(150)$$

此の有樣をベクター圖で示して見ると第230圖の通りになり I_1 は V_{12} より位相角 θ 丈遲れ I_3 は V_{23} より I_2 は V_{31} より夫々 θ の角丈位相が遲れる。此の $I_1\ I_2\ I_3$ を中性點Oの所に移してそのベクターの差を求めると線電流 $I_{12}\ I_{23}\ I_{31}$ が求めらる。斯くて第230圖に示されて居る如き三角形接續のベクター圖が書き得られた譯である。



第 2 3 0 圖

今のは接續せられた負荷が平衡負荷として考へたものであるが三角接續の負荷が不平衡の場合に於てはその計算は次の如く行ふのである。今三角形接續に於て各岐路のインピーダンスを第229圖の如く $Z_1\ Z_2Z_3$ とするならば各回路に流れる電流 $I_1\ I_2\ I_3$ は次式で示す通りである。

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_{12}}{\dot{Z}_1}\qquad \dot{I}_3 = \frac{\dot{V}_{23}}{\dot{Z}_2}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_{31}}{\dot{Z}_3}\cdots\cdots\cdots\cdots(151)$$

斯くて $\dot{I}_1\ \dot{I}_2\ \dot{I}_3$ が求められたならば是より線電流 $\dot{I}_{12}$, $\dot{I}_{23}$, $\dot{I}_{31}$ が次の式より求め得られるのである。

$$\dot{I}_{12}=\dot{I}_1-\dot{I}_2\quad \dot{I}_{23}=\dot{I}_2-\dot{I}_3\quad \dot{I}_{31}=\dot{I}_3-\dot{I}_1\ \cdots\cdots (152)$$

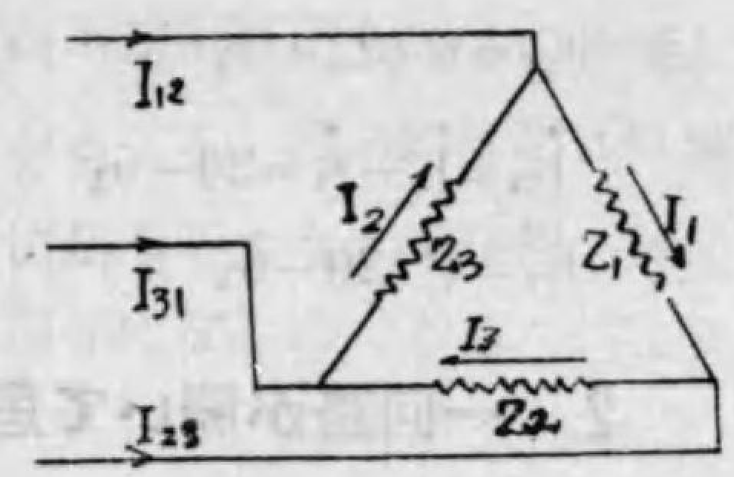
今相電流 $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$ が相電壓 $\dot{V}_{12}$, $\dot{V}_{23}$, $\dot{V}_{31}$ より夫々 θ_1, θ_2, θ_3 の位相角丈遲れるものと假定し $\dot{V}_{23}$ を基準のベクターに取れば各電流は次の式で表はされる。

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_3&=I_3\ (\cos\theta_2-j\sin\theta_2)\\ \dot{I}_1&=I_1\ \{\cos(120^\circ-\theta_1)+j\sin(120^\circ-\theta_1)\}\\ \dot{I}_2&=I_2\ \{\cos(120^\circ+\theta_3)-j\sin(120^\circ+\theta_3)\}\end{aligned}\right\}\cdots(153)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \dot{I}_{12}&=\dot{I}_1-\dot{I}_2=I_1\{\cos(120^\circ-\theta_1)+j\sin(120^\circ-\theta_1)\}\\ &\qquad -I_2\{\cos(120^\circ+\theta_3)+j\sin(120^\circ+\theta_3)\}\\ \dot{I}_{23}&=\dot{I}_2-\dot{I}_3=I_2\{\cos(120^\circ+\theta_3)-j\sin(120^\circ+\theta_3)\}\\ &\qquad -I_3(\cos\theta_2-j\sin\theta_2)\}\\ \dot{I}_{31}&=\dot{I}_3-\dot{I}_1=I_3(\cos\theta_2-j\sin\theta_2)-I_1\{\cos(120^\circ-\theta_1)\\ &\qquad +j\sin(120^\circ-\theta)\}\end{aligned}$$

三角形に接續せられたるインピーダンスの一つが變化するとその相電流は變化したインピーダンスの相電流のみが變るものである。例へば三つのインピーダンスの中で $\dot{Z}_1$ のみが變化するとするならば相電流は $\dot{I}_1$ のみが變化して $\dot{I}_2$ と $\dot{I}_3$ とは變らない。線電流の方は $\dot{I}_1$ が變化すると $\dot{I}_{12}$ と $\dot{I}_{31}$ とが變化し $\dot{I}_{23}$ は全然變化しない。

是で三角形接續の問題が解ける譯であつて今一つの例を擧げて之を解いて見る事とする。第231圖の如く三つのインピーダンスがあつて Z_1 は $4+j3$ で Z_2 は $3+j4$ を有し Z_3 は $4+j2$ である。今此の三角形接續に100ヴォルトの三相交流をかけると各線に流れる線電流は何程となるかと云ふ事を計算して見よう。インピーダンス Z_1 にかゝる電壓を V_1 とし Z_2 Z_3 にかゝる電壓を夫夫 V_2 V_3 とする。今 V_2 をベクターの基線に取れば是等の電壓は次の式で表はされる。



第 2 3 1 圖

$$\begin{aligned}\dot{V}_2&=V_2=100\\ \dot{V}_1&=-V_1\cos60^\circ+jV_1\sin60^\circ\\ &=V_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=100\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ \dot{V}_3&=-V_3\cos60^\circ-jV_3\sin60^\circ\\ &=V_3\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=100\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

此の電壓を各相のインピーダンスで割れば各相を流れる電流 $\dot{I}_1\ \dot{I}_2\ \dot{I}_3$ が次の如く求められる。

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{V}_1}{\dot{Z}_1}=\frac{100\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{4+j3}=2(3\sqrt{3}-4+j4\sqrt{3}+j3)$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{V}_3}{\dot{Z}_3}=\frac{100\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{4+j2}=5(-2-\sqrt{3}+j1-j2\sqrt{3})$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{V}_2}{\dot{Z}_2}=\frac{100}{3+j4}=\frac{100(3-j4)}{(3+j4)(3-j4)}=4\ (3-j4)$$

是よりして線電流 $\dot{I}_{12}\ \dot{I}_{23}\ \dot{I}_{31}$ は次の如く計算せられる。

$$\dot{I}_{12}=\dot{I}_1-\dot{I}_2=2+11\sqrt{3}+j1+j18\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad I_{12}=\sqrt{(2+11\sqrt{3})^2+(1+18\sqrt{3})^2}\fallingdotseq 38.5\ \text{アンペア}$$

$$\dot{I}_{31}=\dot{I}_2-\dot{I}_3=-22-5\sqrt{3}+j(21-10\sqrt{3})$$

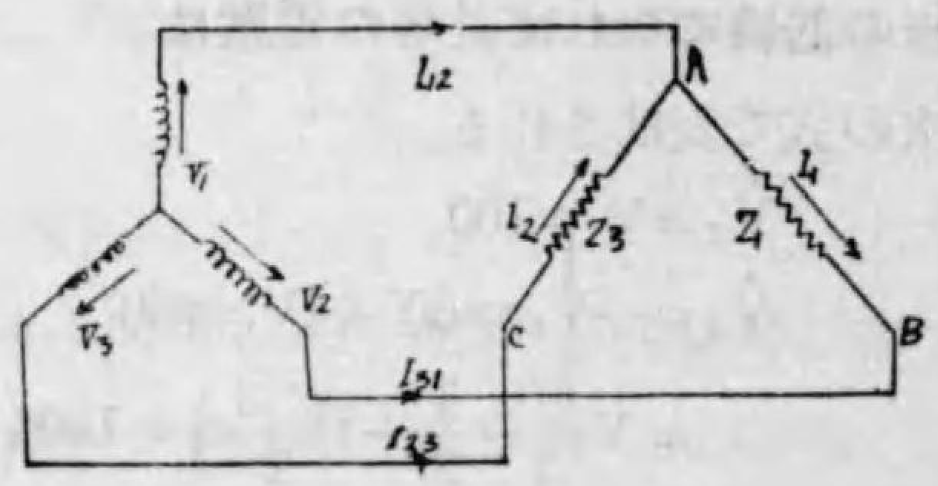
∴ $I_{31}=\sqrt{(22+5\sqrt{3})^2+(21-10\sqrt{3})^2}\fallingdotseq30.9$アンペア

$\dot{I}_{23}=\dot{I}_3-\dot{I}_1=20-6\sqrt{3}-j(22+8\sqrt{3})$

∴ $I_{23}=\sqrt{(20-6\sqrt{3})^2+(22+8\sqrt{3})^2}\fallingdotseq37$アンペア

2. 一回路が開いて居る場合

次に第229圖に示した三角接續の一相が開いて居る場合、云ひ換へれば第229圖の三つのインピーダンスの中でZ_2が取除かれて無限大となつた場合を述べて見る。此の接續は負荷が**V接續**即ち**オープンデルタ**に接續せられて居る場合である。此の場合にはZ_2なるインピーダンスは無限大であつて從つて此の相を流れるI_3は零と云ふ事になるのである。是よりして第232圖の場合に於ける負荷に流れる線電流は次の式を以つて表はされる事となる。



第 2 3 2 圖

$$\dot{I}_{12}=\dot{I}_1-\dot{I}_2 \qquad \dot{I}_{23}=\dot{I}_2 \qquad \dot{I}_{31}=-\dot{I}_1\cdots\cdots(154)$$

今電壓$\dot{V}_{23}$をベクターの基準に取つた場合を考へて見ると是等の線電流は次の式で示された通りになる。

$$\dot{I}_{12}=\dot{I}_1-\dot{I}_2=I_1\{\cos(120^\circ-\theta_1)+j\sin(120^\circ-\theta_1)\}$$
$$-I_2\{\cos(120^\circ+\theta_3)-j\sin(120^\circ+\theta_3)\}$$
$$\dot{I}_{23}=\dot{I}_2\{\cos(120^\circ+\theta_3)-j\sin(120^\circ+\theta_3)\}$$
$$\dot{I}_{31}=-\dot{I}_1=-I_1\{\cos(120^\circ-\theta_1)+j\sin(120^\circ-\theta_1)\}$$

然らば是等の$\dot{I}_{12}$ $\dot{I}_{23}$ $\dot{I}_{31}$等は如何なる方向と如何なる大きさを有するかをベクター圖で示して見る事とする。先づ最も簡單な

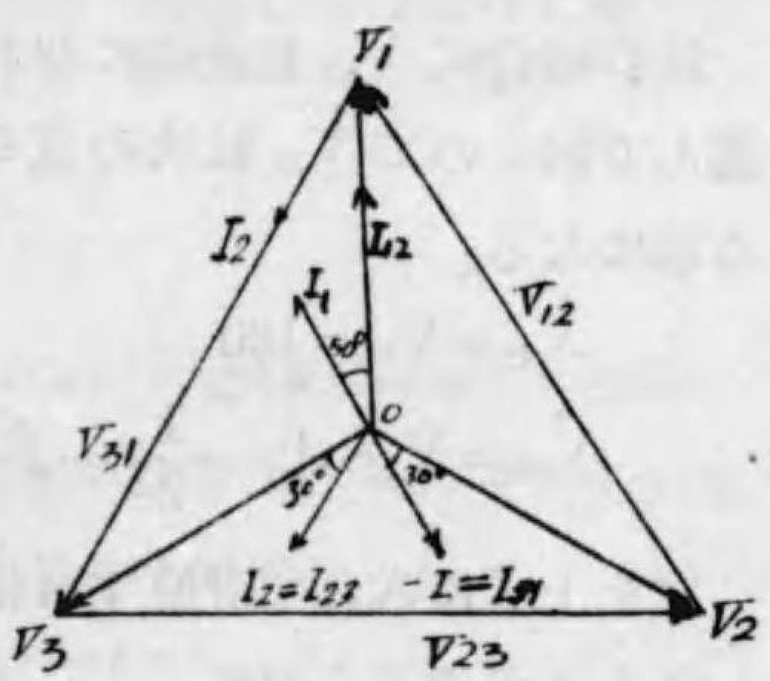
場合としてZ_1とZ_3とのインピーダンスが何れも大きさの相等しい無誘導抵抗 r より成つて居るものとする。然る時は第230圖のベクター圖に於いて位相角θは何れも零となり云ひ換へれば$\dot{I}_1$は$\dot{V}_{12}$と同相になり$\dot{I}_2$は$\dot{V}_{31}$と同相になるのである。是よりして次の式が出來る。

$$\dot{Z}_1=\dot{Z}_2=r \qquad \therefore\ \theta_1=\theta_3=0$$

$$I_2=I_3=\frac{V}{r}$$

是によつて此の回路を流れる電流のベクター圖を書いて見ると第233圖の通りで$\dot{I}_1$は$\dot{V}_{12}$と同相であるから$\dot{V}_1$より30度進む、然るに第154式により$\dot{I}_{31}$は$-\dot{I}_1$であるから是は$\dot{I}_1$を逆の方向に引き長さを等しく取つた$-I_1$と同じベクターとなりV_2よりも30度遲れるベクターとなる。

次に$\dot{I}_2$は$\dot{V}_{31}$と同相であつて第154式により$\dot{I}_{23}$と$\dot{I}_2$とは方向大きさ共に等しいので$\dot{I}_2$のベクターがそのまゝ$\dot{I}_{23}$のベクターとなる。從つて$\dot{I}_{23}$は$\dot{V}_3$のベクターよりも30度進む事になる。次に$\dot{I}_{12}$のベクターは$\dot{I}_1$より$\dot{I}_2$を引いたものであるから第233圖のI_{12}で示された方向を取り$\dot{V}_1$と同相になる。是等のI_{12} I_{23} I_{31}の電流の大きさは次の式で計算される通りになる。



第 2 3 3 圖

$$I_{31}=I_{23}=I_1=I_2=I=\frac{V}{r}$$

$$I_{12}=I(\cos120^\circ+j\sin120^\circ)-I(\cos120^\circ-j\sin120^\circ)$$
$$=2jI\sin120^\circ=2jI\cos60^\circ=j\sqrt{3}I$$

∴ $I_{12}=\sqrt{3}\,I=\frac{\sqrt{3}\,V}{r}$

但しIはI_1及びI_2を代表せしめた電流でVは線間電壓を代表せしめた電流である。從つて I_{12} なる電流は他の電流の$\sqrt{3}$倍の大きさを有し I_{23} と I_{31}との間の位相角及びI_{12}との間の位相角とは何れも150度の大きさを有し I_{23} と I_{31}との間の位相角は60度の大きさを有する。

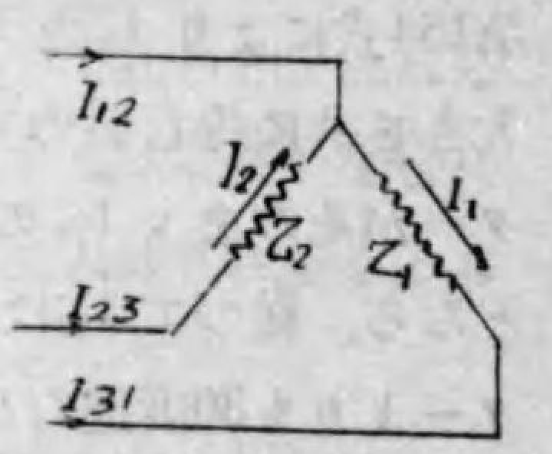
次に一般の場合の計算を行つて見る。先づ第234圖に於て$\dot{Z}_1$が3＋j1, $\dot{Z}_2$が1＋j2 なる場合此の回路に100ヴォルトの三相交流をかけた場合の線電流を求めて見よう。$\dot{I}_1$と$\dot{I}_2$とは次の如く求めらる。

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{V}_{12}}{\dot{Z}_1}\qquad \dot{I}_2=\frac{\dot{V}_{31}}{\dot{Z}_2}$$

此の場合に $\dot{V}_{12}$ を基線に取れば $\dot{V}_{23}$ は此の電壓よりも120度進んで居るので $\dot{V}_{31}$ は次の式で表はされる事になる。

$$\dot{V}_{12}=V_{12}=100$$

$$\dot{V}_{31}=V_{12}\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



第 2 3 4 圖

之を上式に入れて計算すれば次の如く $\dot{I}_1$ と $\dot{I}_2$とが求められる。

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{V}_{12}}{\dot{Z}_1}=\frac{100}{3+j1}=\frac{100(3-j1)}{(3+j1)(3-j1)}=10(3-j1)$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{V}_{31}}{\dot{Z}_2}=\frac{100\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1+j2}=\frac{50-1+j\sqrt{3})(1-j2)}{(1+j2)(1-j2)}$$

$$=\frac{50(-1+j\sqrt{3}+j2+2\sqrt{3})}{5}$$

$$=10(2\sqrt{3}-1+j\sqrt{3}+j2)$$

$$\dot{I}_{23}=\dot{I}_2=10(2\sqrt{3}-1+j\sqrt{3}+j2)$$

∴ $I_{23}=10\sqrt{(2\sqrt{3}-1^2)+(\sqrt{3}+2)^2}=10\times4.46=44.6$ アンペア

$$\dot{I}_{31}=-\dot{I}_1=-10\ (3-j1)$$

∴ $I_{31}=10\sqrt{3^2+1}=31.6$ アンペア

$$\dot{I}_{12}=\dot{I}_1-\dot{I}_2=10(3-j1)-10(2\sqrt{3}-1+j\sqrt{3}+j2)$$

$$=10(4-2\sqrt{3}-j3-j\sqrt{3})$$

∴ $I_{12}=10\sqrt{(4-2\sqrt{3})^2+(3+\sqrt{3})^2}=47.7$ アンペア

是で各電流の大きさと方向とが知れた譯で $\dot{I}_{23}$ の電流は次の位相角θ_1丈基線に取つた$\dot{V}_{12}$の電壓より進む、

$$\cos\theta_1=\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+2)^2}}=\frac{2.46}{4.46}=0.55$$

是と同樣に他の電流の方向も知る事が出來るのである。次には是等三角形接續に於ける計算問題の例題を出し是等を解いて練習を行つて見る事とする。

3. 例　　題

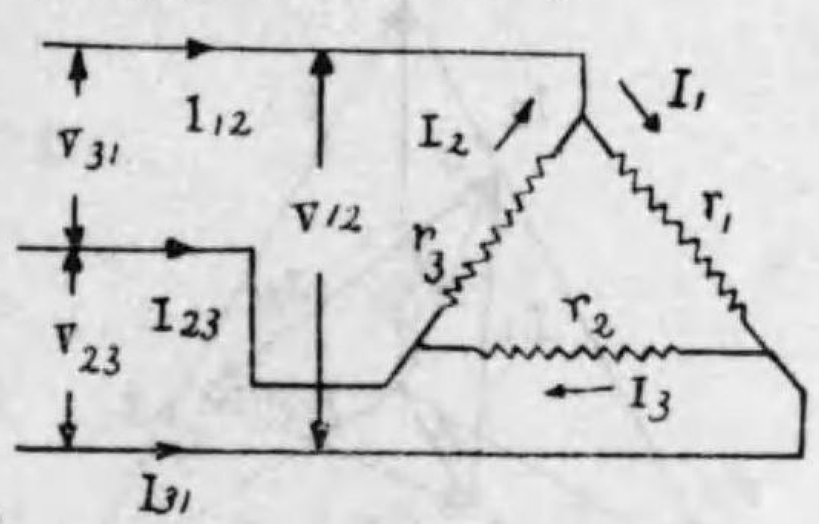
例 1. 第235圖に於てr_1は40オーム、r_2は80オーム、r_3は60オームである。今此の回路に電壓240ヴォルトの三相交流を供給すれば各線路に流れる線電流は何程なるか。

解　今相電壓 $\dot{V}_{23}$ をベクターの基線に取れば $\dot{V}_{12}$ 及び $\dot{V}_{31}$ は次の式で表はされる。

$$\dot{V}_{23}=V_{23}=240$$

$$\dot{V}_{12}=V_{23}\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=240\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



第 2 3 5 圖

$$\dot{V}_{31}=V_{23}\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=240\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\dot{I}_1$ $\dot{I}_2$ $\dot{I}_3$は次の式で表はされる。

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{V}_{12}}{r_1}=\frac{240\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{40}=3(-1+j\sqrt{3})$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{V}_{23}}{r_2}=\frac{240}{80}=3$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{V}_{31}}{r_3}=\frac{240\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{60}=2(-1-j\sqrt{3})$$

是よりして線電流 $\dot{I}_{12}$ $\dot{I}_{23}$ $\dot{I}_{31}$ は次の如く求める事が出來る。

$$\dot{I}_{12}=\dot{I}_1-\dot{I}_2=3(-1+j\sqrt{3})-2(-1-j\sqrt{3})=-1+j5\sqrt{3}$$

$$\dot{I}_{23}=\dot{I}_2-\dot{I}_3=2(-1-j\sqrt{3})-3=-5-j2\sqrt{3})$$

$$\dot{I}_{31}=\dot{I}_3-\dot{I}_1=3-3(-1+j\sqrt{3})=6-j3\sqrt{3}$$

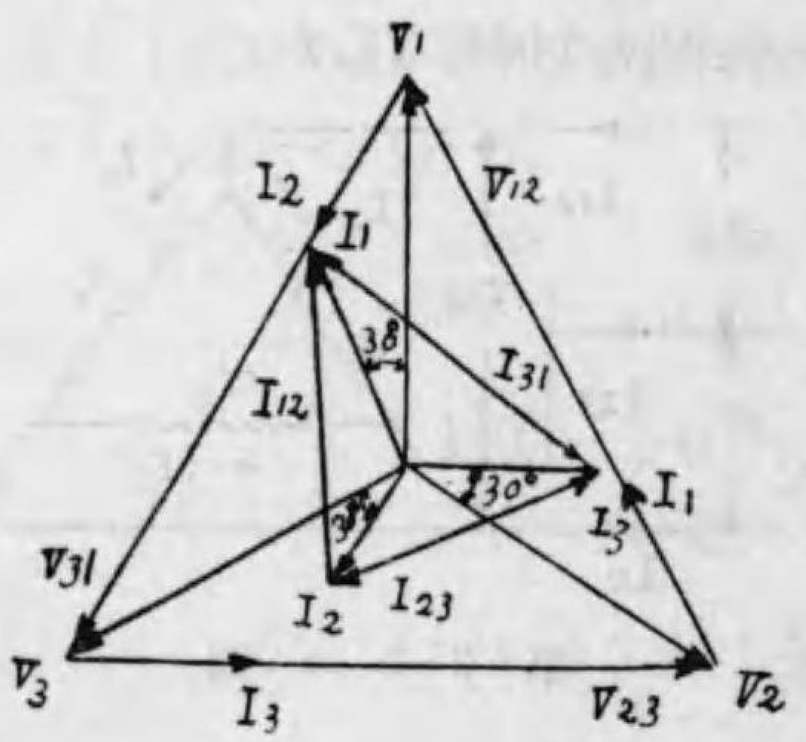
是等の電流の大きさを計算して見ると次の如くなる。

$I_{12}=\sqrt{1^2+(5\sqrt{3})^2}=8.72$アンペア

$I_{23}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{3})^2}=6.08$アンペア

$I_{31}=\sqrt{6^2+(3\sqrt{3})^2}=7.93$アンペア

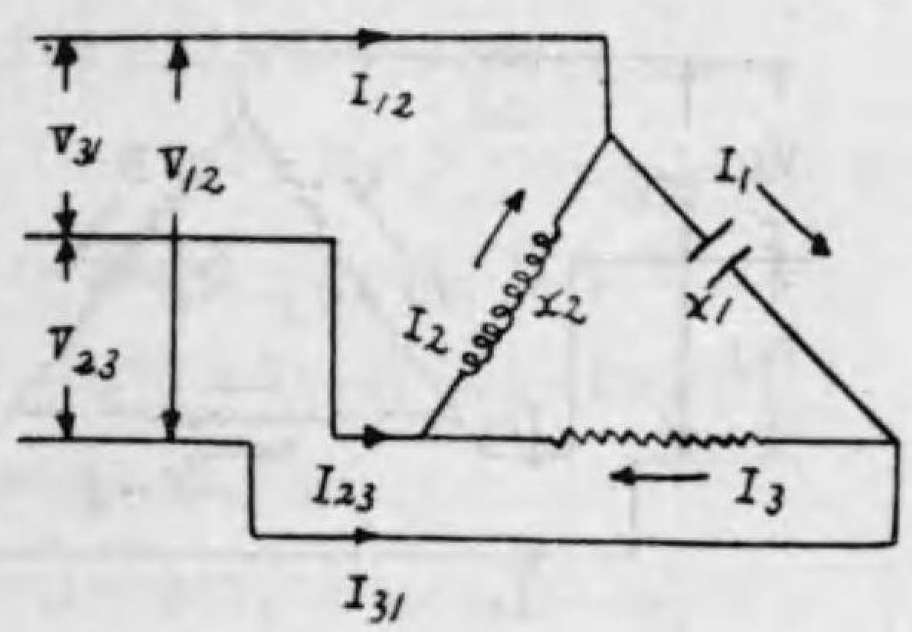
是で各線電流の大きさが知れた譯で今此の場合の電流のベクターを示して見ると第236圖の如くなり $\dot{I}_1$は$\dot{V}_{12}$と同相に、$\dot{I}_2$は$\dot{V}_{31}$と同相に、$\dot{I}_3$は$\dot{V}_{23}$のベクターと同相になる。その大きさは電壓を抵抗で割つた丈の大きさとなるものでI_1は6アンペア、I_2は4アンペア、I_3は3アンペアとなる。線電流$\dot{I}_{12}$は$\dot{I}_1$より$\dot{I}_2$を引いたもの$\dot{I}_{23}$は$\dot{I}_2$より$\dot{I}_3$を引いたものであるから夫等の線電流はベクタ



第 2 3 6 圖

ーにて示した通りになる。

例 2. 今度は第237圖の如くキヤパシチーによるリアクタンス30オームのx_1と無誘導抵抗40オームのrと誘導リアクタンス60オームのx_2とを三角形に接續した回路があつて此の回路に三相交流120ヴオルトを供給すれば各線路に流れる電流は何程なるか。



第 2 3 7 圖

解 此の問題に對しても$\dot{V}_{23}$を基準のベクターに取る。さうすると各相を流れる電流は次の通りになる。

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{V}_{12}}{-jx_1}=\frac{120\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-j30}=-j2-2\sqrt{3}$$

$$\dot{I}_3=\frac{V_{23}}{r}=\frac{120}{40}=3$$

$$\dot{I}_2=\frac{V_{31}}{jx_2}=\frac{120\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{j60}=j1-\sqrt{3}$$

I_1 I_2 I_3の大きさは次の通りである。

$$I_1=\frac{120}{30}=4 \qquad I_3=\frac{120}{40}=3 \qquad I_2=\frac{120}{60}=2$$

線電流 I_{12} I_{23} I_{31} は次の如くして求めらる。

$$\dot{I}_{12}=\dot{I}_1-\dot{I}_2=-j2-2\sqrt{3}-(j1-\sqrt{3})=-\sqrt{3}-j3$$

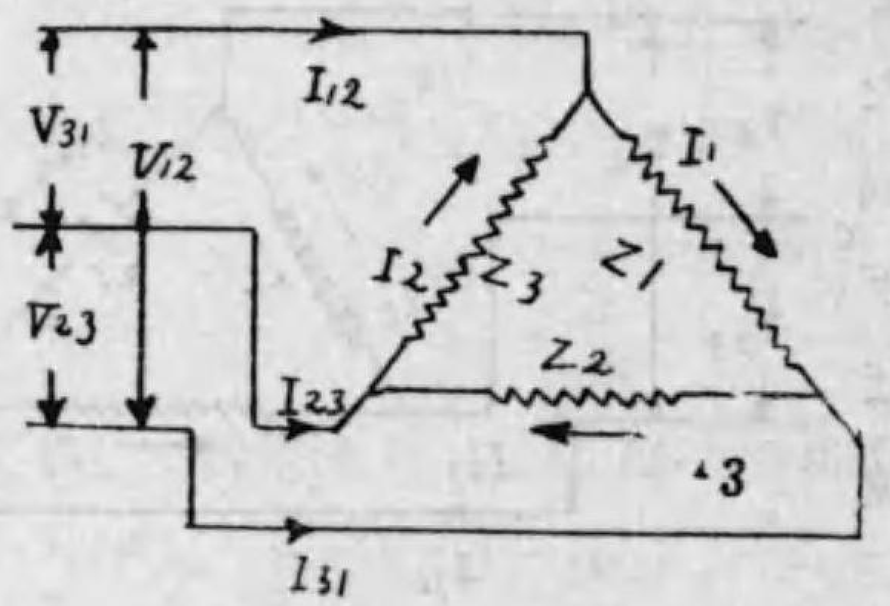
$$\dot{I}_{23}=\dot{I}_2-\dot{I}_3=j1-\sqrt{3}-3 \qquad \dot{I}_{31}=\dot{I}_3-\dot{I}_1=3+j2+2\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad I_{12}=\sqrt{3+3^2}=3.46\ \text{アンペア}$$

$I_{23}=\sqrt{(3+\sqrt{3})^2+1}=4.84$ アンペア

$I_{31}=\sqrt{(3+2\sqrt{3})^2+2^2}=5.78$ アンペア

例 3. 第238圖の如く三つのインピーダンス$Z_1Z_2Z_3$を三角形に接續した回路がある。今是等のインピーダンスが夫々次の如き大きさを有するものと假定する。



第 2 3 8 圖

$$\dot{Z}_1=4+j3$$
$$\dot{Z}_2=4-j2$$
$$\dot{Z}_3=1+j3$$

此の時此の回路に100ヴォルトの三相交流を供給するとすれば各線に流れる線電流を求む。

解 此の問題も V_{23} をベクターの基線に取るものとする。

$$\dot{V}_{12}=V_{23}\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=100\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{V}_{31}=V_{23}\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=100\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\dot{I}_1\,\dot{I}_2\,\dot{I}_3$ は次の式で表はされる。

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{V}_{12}}{\dot{Z}_1}=\frac{100\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{4+j3}=\frac{50(-1+j\sqrt{3})(4-j3)}{(4+j3)(4-j3)}$$

$$=\frac{50(-4+j3+j4\sqrt{3}+3\sqrt{3})}{25}$$

$$=2(3\sqrt{3}-4+j3+j4\sqrt{3})$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{V}_{31}}{\dot{Z}_3}=\frac{100\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1+j3}=5(-1-3\sqrt{3}+j3-j\sqrt{3})$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{V}_{23}}{\dot{Z}_2}=\frac{100}{4-j2}=\frac{100(4+j2)}{(4-j2)(4+j2)}=\frac{100(4+j2)}{20}$$
$$=10(2+j1)$$

是より $\dot{I}_{12}\,\dot{I}_{23}\,\dot{I}_{31}$ は次の如き式で計算する事が出來る。

$$\dot{I}_{12}=\dot{I}_1-\dot{I}_2=2(3\sqrt{3}-4+j3+j4\sqrt{3})-5(-1-3\sqrt{3}+j3-j\sqrt{3})=21\sqrt{3}-3-j9+j13\sqrt{3}$$

$$\dot{I}_{23}=\dot{I}_2-\dot{I}_3=5(-1-3\sqrt{3}+j3-j\sqrt{3})-10(2+j1)$$
$$=-25-15\sqrt{3}+j5-j5\sqrt{3}$$

$$\dot{I}_{31}=\dot{I}_3-\dot{I}_1=10(2+j1)-2(3\sqrt{3}-4+j3+j4\sqrt{3})$$
$$=28-6\sqrt{3}+j4-j8\sqrt{3}$$

是よりして各線電流の大きさは次の如く計算する事が出來る。

$I_{12}=\sqrt{(21\sqrt{3}-3)^2+(13\sqrt{3}-9)^2}=36$ アンペア

$I_{23}=\sqrt{(25+15\sqrt{3})^2+(5-5\sqrt{3})^2}=51.1$ アンペア

$I_{31}=\sqrt{(28-6\sqrt{3})^2+(4-8\sqrt{3})^2}=20.2$ アンペア

是で各線を流れる電流が見出された譯で $\dot{I}_{12}$ の方向はその式から知れる通り基線たる $\dot{V}_{23}$ の方向より次の式から計算された θ_1 の角度丈進んで居る。

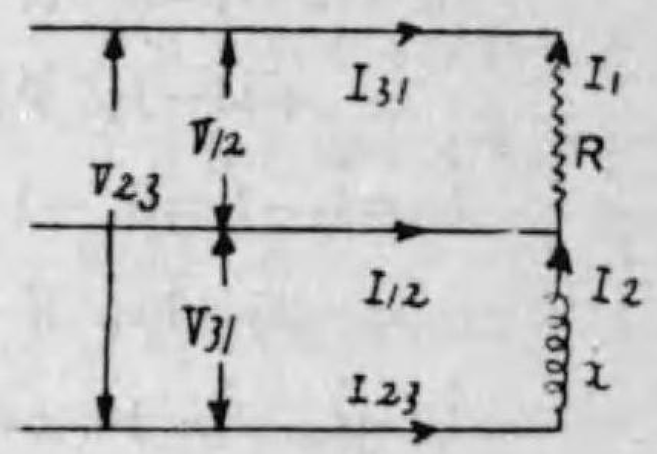
$$\cos\theta_1=\frac{21\sqrt{3}-3}{\sqrt{(21\sqrt{3}-3)^2+(13\sqrt{3}-9)^2}}=\frac{33.4}{36}=0.928$$

$\dot{I}_{23}$の電流は$\dot{V}_{23}$の方向の逆の方向即ち$-\dot{V}_{23}$より次の式で計算したθ_2の角度丈遲れて居る譯で同様に$\dot{I}_{31}$は$\dot{V}_{23}$の方向より次のθ_3丈遲れて居る。

$$\cos\theta_2=\frac{25+15\sqrt{3}}{\sqrt{(25+15\sqrt{3})^2+(5-5\sqrt{3})^2}}=\frac{51}{51.1}=0.999$$

$$\cos\theta_3 = \frac{28-6\sqrt{3}}{20.2} = \frac{17.6}{20.2} = 0.871$$

例 4. 第239圖の如く抵抗Rと誘導リアクタンスxとをV形に接續した負荷がある。Rは20オーム、xは25オームとし之に三相交流の100ヴォルトを加へた時各回路に流れる電流を求む。



第 2 3 9 圖

解 ベクターの基線には今迄 V_{23} を取つて居たが今度はRの上にかゝる電壓 V_{12} を基線に取つて見る事とし V_{31} は是より120度進むとする。さうすると $\dot{V}_{12}$ は100と云ふ事になり V_{31} は是より120度進んで居るから次の式で表はされる。

$$\dot{V}_{31} = V_{12}\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 100\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

是より電流 I_1 I_2は次の式で計算する事が出來る。

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_{12}}{R} = \frac{100}{20} = 5$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_{31}}{jx} = \frac{100\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{j25} = -j4\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 2\sqrt{3}+j2$$

$$\dot{I}_{31} = -\dot{I}_1 = -5. \qquad \dot{I}_{23} = \dot{I}_2 = 2\sqrt{3}+j2$$

$$\dot{I}_{12} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 5-(2\sqrt{3}-j2) = 5-2\sqrt{3}-j2$$

$\dot{I}_{12}$ $\dot{I}_{31}$ $\dot{I}_{23}$ の電流の大きさは次の通りである。

$$I_{12} = \sqrt{(5-2\sqrt{3})^2+2^2} = 2.52 \text{ アンペア}$$

$$I_{31} = \frac{100}{20} = 5\text{アンペア} \qquad I_{23} = \frac{100}{25} = 4 \text{ アンペア}$$

第二十章　三相非對稱電壓

1. 平 衡 負 荷

今迄は三相負荷に供給せられる電壓が對稱三相電壓として考へた場合であつて實際に於ては此の三相對稱電壓が最も多い。然るに供給せられる三相電壓が不平衡なる場合は今迄の計算方法では正確な計算が出來ない。今度は供給せられる電壓が非對稱の場合の計算方法を示す事とする。此の非對稱電壓を供給せられる場合に之を受ける負荷は平衡負荷もあるし不平衡負荷もあつて平衡負荷の場合はその計算も樂であるが不平衡負荷の場合は面倒である。何れの場合に於ても相電壓を $V_1V_2V_3$ とし線間電壓を $V_{12}V_{23}V_{31}$ とすれば次の關係がある。

$$\dot{V}_{12} = \dot{V}_1 - \dot{V}_2 \qquad \dot{V}_{23} = \dot{V}_2 - \dot{V}_3 \qquad \dot{V}_{31} = \dot{V}_3 - \dot{V}_1$$

此の三つの式を加へ合すと右邊は零となり次の式が成立する。

$$\dot{V}_{12} + \dot{V}_{23} + \dot{V}_{31} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (155)$$

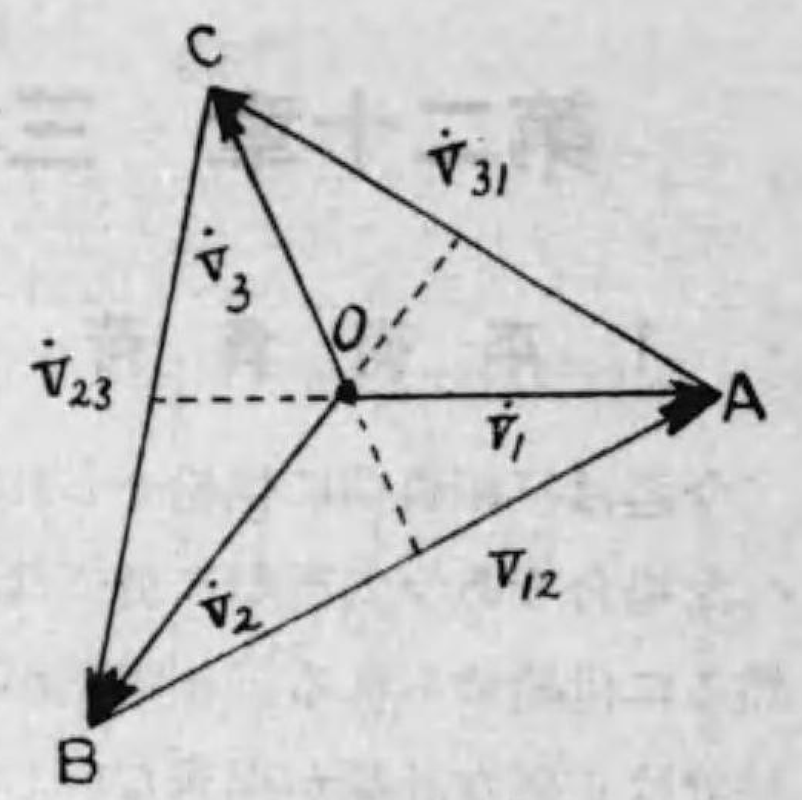
今各相がZなる星形インピーダンスを有する三相平衡負荷があるとし之に $V_{12}V_{23}V_{31}$ なる線間電壓を與へるものとする。今假りにその相電壓を $V_1V_2V_3$ とし之を第240圖の如きベクターで表はすならば線間電壓 $V_{12}V_{23}V_{31}$ は圖に示すが如く一つの三角形ABCを形成する。Oはその中性點であつて各相を流れる電流は各相電壓を各相のインピーダンスZで割つたものに等しい。從つて此の中性點Oにキルヒホッフの第一法則を應用すると次の式が出來上る。

$$\frac{\dot{V}_1}{\dot{Z}}+\frac{\dot{V}_2}{\dot{Z}}+\frac{\dot{V}_3}{\dot{Z}}=0$$

従つて分母のＺを拂ふと次の如き關係が見出さる。

$$\dot{V}_1+\dot{V}_2+\dot{V}_3=0\cdots\cdots(156)$$

之によつて中性點の電位は如何なる點にあるかと云へば第240圖の三角形ＡＢＣの重心にあると云ふ事になる。つまり三相平衡負荷に三相非對稱電壓を供給した場合にその中性點の電位は線間電壓を以つて作る三角形の重心にあると云ふ事になるのである。次に相電壓$\dot{V}_1$は相電壓$\dot{V}_2$と線間電壓$\dot{V}_{12}$とを加へたもので同じく線間電壓$\dot{V}_{31}$より相電壓$\dot{V}_3$を引いたものである。之は第240圖を見れば知れる事で之よりして次の三つの方程式が出來上る。



第２４０圖

$$\dot{V}_1=\dot{V}_2+\dot{V}_{12}\qquad \dot{V}_1=\dot{V}_3-\dot{V}_{31}\qquad \dot{V}_1=\dot{V}_1$$

此の三つの式を邊々相加へて見ると次の如くなる。

$$3\dot{V}_1=\dot{V}_2+\dot{V}_3+\dot{V}_1+\dot{V}_{12}-\dot{V}_{31}$$

然るに$\dot{V}_1+\dot{V}_2+\dot{V}_3$は零である。從つて$\dot{V}_1$は次の式で表はさる。

$$\dot{V}_1=\frac{1}{3}\left(\dot{V}_{12}-\dot{V}_{31}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(157)$$

同様にして$\dot{V}_2$も$\dot{V}_3$も次の關係あり。

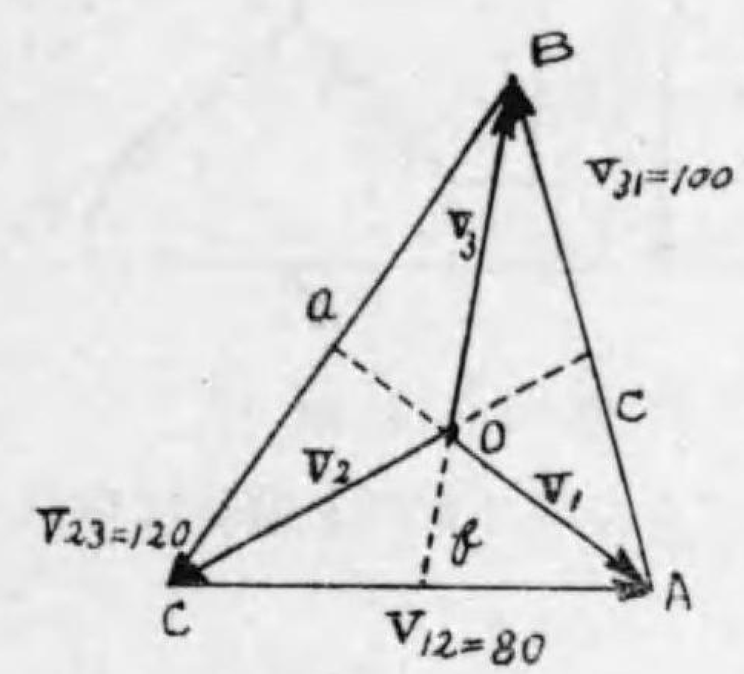
$$\dot{V}_2=\frac{1}{3}\left(\dot{V}_{23}-\dot{V}_{12}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(158)$$

$$\dot{V}_3=\frac{1}{3}\left(\dot{V}_{31}-\dot{V}_{23}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(159)$$

之よりして各相に流れる電流を求めようと思へば此の相電壓を各相のインピーダンスで割ればよい。I_1 I_2 I_3を各相に流れる電流とすれば之等の電流は次の式で表はさる。

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_1&=\frac{\dot{V}_1}{\dot{Z}}=\frac{\dot{V}_{12}-\dot{V}_{31}}{3\dot{Z}}\\ \dot{I}_2&=\frac{\dot{V}_2}{\dot{Z}}=\frac{\dot{V}_{23}-\dot{V}_{12}}{3\dot{Z}}\\ \dot{I}_3&=\frac{\dot{V}_3}{\dot{Z}}=\frac{\dot{V}_{31}-\dot{V}_{23}}{3\dot{Z}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(160)$$

之によつて三相非對稱電壓を供給する場合に於てもその負荷が平衡負荷であるならば容易に之を解く事が出來るものである。然るに非對稱電壓を普通の數字のみで與へて居る場合、即ち非對稱電壓が複素數で與へられて居らない場合にはその相電壓を計算するのにベクターを書いて之から計算するか又は供給電壓を複素數に直すかしなければならない。例へば供給電壓が80ヴォルト、100ヴォルト、120ヴォルトとすれば第241圖の三角形ＡＢＣに示された如きベクターとなる。各邊の中點とその對する頂點とを結ぶと三つの線はＯ點で交り此のＯ點が重心であつて三相負荷の中性點となる。從つて各相の電壓はＯＡ, OB, OCとなる譯で此の長さを測れば星形に結ばれた各相の相電壓が求められるのである。次に與へられたる線間電壓が複素數で表はされて居ない場合に之を複素數で表はす方法を示す。第241圖に於て各角を



第２４１圖

ＡＢＣで表はしその對邊の長さをａｂｃで表はすとする。さうすると各角の餘弦、卽ち cosA, cosB, cosC は次の如き式で表はされる事は三角法の敎へる所である。

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\qquad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

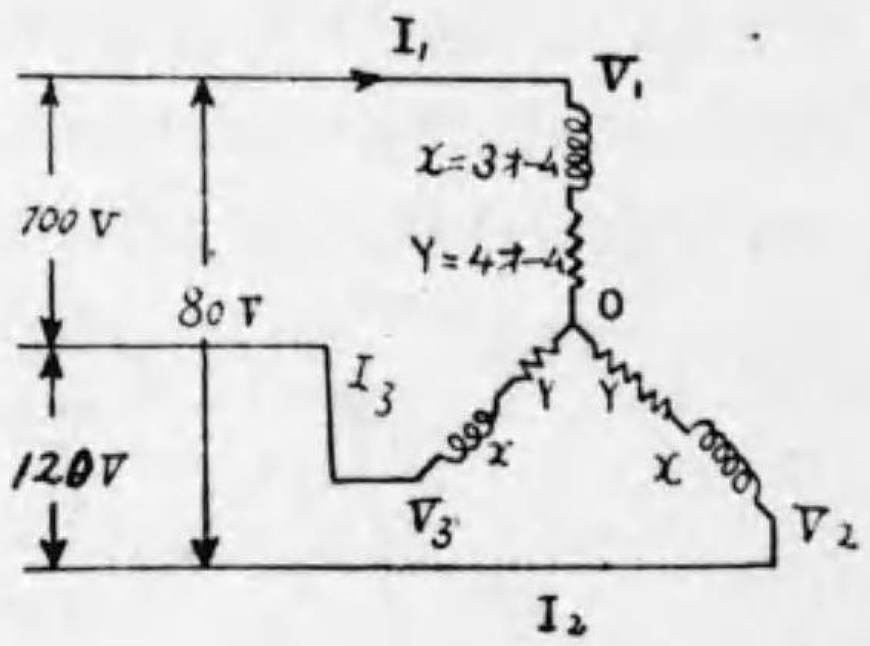
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

次に第241圖のｂ卽ち V_{12} を基線に取るとａ卽ち V_{23} のベクターとｃ卽ち V_{31} のベクターとは次の複素數で表はす事が出來る。

$$\dot V_{23}=-V_{23}\cos C-jV_{23}\sin C$$

$$\dot V_{31}=-V_{31}\cos A+jV_{31}\sin A$$

然るに cosA と cosC とは前の式によつて計算せられるし sinA と sinC とは cosA cosC から計算せられるので各線間電壓を複素數にて表はす事が出來る。今例として前に出した80ヴォルト、100ヴォルト、120ヴォルトの三相非對稱電壓を第242圖の如く各星形のインピーダンスが等しい平衡負荷に供給した場合の相電壓と電流とを計算して見る。各相インピーダンスの抵抗を４オームとしリアクタンスを３オームとする先づ第242圖に於て V_{12} なる電壓を基線に取れば各線間電壓は次の式で表はさる。



第 2 4 2 圖

$$\dot V_{12}=V_{12}=80$$

$$\dot V_{23}=-V_{23}\cos C-jV_{23}\sin C=-120\cos C-j120\sin C$$

$$\dot V_{31}=-V_{31}\cos A+jV_{31}\sin A=-100\cos A+j100\sin A$$

cosA と cosC とは次の如く計算せられる。

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{80^2+100^2-120^2}{2\times80\times100}=\frac{1}{8}=0.125$$

$$\sin A=\sqrt{1-0.125^2}=0.994$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{120^2+80^2-100^2}{2\times120\times80}=0.56$$

$$\sin C=\sqrt{1-0.56^2}=0.828$$

$$\therefore\quad \dot V_{23}=-120\times0.56-j120\times0.828=-66.2-j99.4$$

$$\dot V_{31}=-100\times0.125+j100\times0.994=-12.5+j99.4$$

之等の式よりして相電壓 $V_1V_2V_3$ は次の如く求めらる。

$$\dot V_1=\frac{1}{3}(\dot V_{12}-\dot V_{31})=\frac{1}{3}(80+12.5-j99.4)$$

$$=\frac{1}{3}(92.5-j99.4)$$

$$\therefore\quad V_1=\frac{1}{3}\sqrt{92.5^2+99.4^2}=\frac{1}{3}\times135=45\text{ヴォルト}$$

$$\dot V_2=\frac{1}{3}(\dot V_{23}-\dot V_{12})=\frac{1}{3}(-66.2-j99.4-80)$$

$$=\frac{1}{3}(-146.2-j99.4)$$

$$\therefore\quad V_2=\frac{1}{3}\sqrt{146.2^2+99.4^2}=\frac{1}{3}\times177=59\text{ヴォルト}$$

$$\dot V_3=\frac{1}{3}(\dot V_{31}-\dot V_{23})=\frac{1}{3}(-12.5+j99.4+66.2+j99.4)$$

$$=\frac{1}{3}(53.7+j198.8)$$

$$\therefore\quad V_3=\frac{1}{3}\sqrt{53.7^2+198.8^2}=\frac{1}{3}\times206=69\text{ ヴォルト}$$

之で各相の相電壓が求められた譯である。電流を出すには之をインピーダンスで割りさへすればよい譯である。

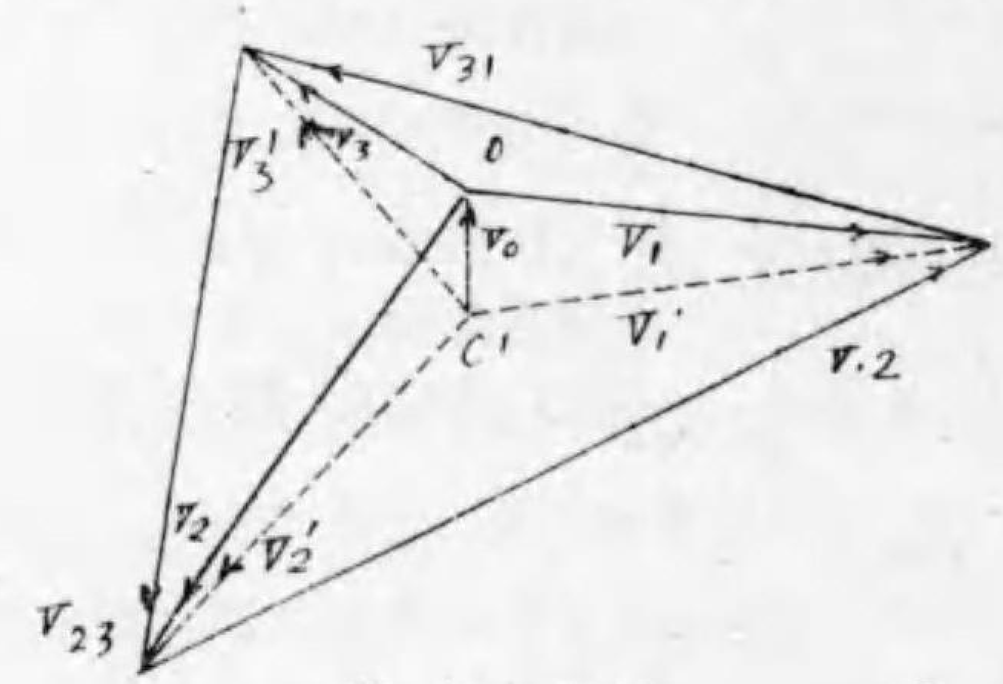
$$\dot{I}_1=\frac{\dot{V}_1}{\dot{Z}}=\frac{92.5-j99.4}{3(4+j3)}\qquad I_1=\frac{45}{5}=9\ \text{アンペア}$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{V}_2}{\dot{Z}}=\frac{-146.2-j99.4}{3(4+j3)}\qquad I_2=\frac{59}{5}=11.8\ \text{アンペア}$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{V}_3}{\dot{Z}}=\frac{53.7+j198.8}{3(4+j3)}\qquad I_3=\frac{69}{5}=13.8\ \text{アンペア}$$

2. 不平衡負荷

非對稱電壓を平衡負荷に供給するとその中性點の電位は電壓三角形の重心と一致するものであるが不平衡負荷に於ては負荷の中性點と電壓三角形の重心とは一致するものではない。第243圖は不平衡負荷に非對稱電壓をかけた場合の電壓のベクターで $\dot{V}_{12}\dot{V}_{23}\dot{V}_{31}$ 等は各々の線間電壓である。Oなる點は此の負荷の中性點を示し從つて各相の相電壓は $V_1V_2V_3$ となる譯である。O′は此の電壓三角形の重心であつて若し此の負荷が平衡負荷であるならばO′が負荷の中性點となり $V_1'V_2'V_3'$ が各相の相電壓となる譯である。此の場合は不平衡負荷であるから中性點Oと電壓三角形の重心O′との間には電位差がある譯で此の電位を $\dot{V}_0$ とする。つまり中性點は三角



第 2 4 3 圖

形の重心に對して $\dot{V}_0$ の電位を有するものと假定する。さうすると第243圖よりして次の關係ある事を知る。

$$\dot{V}_0=\dot{V}_1'-\dot{V}_1\qquad \dot{V}_0=\dot{V}_2'-\dot{V}_2\qquad \dot{V}_0=\dot{V}_3'-\dot{V}_3\cdots\cdots\cdots(161)$$

此の三つの式に於て第一の式の兩邊にはアドミッタンス $\dot{Y}_1$ を掛け、第二の式にはアドミッタンス $\dot{Y}_2$ を、第三の式にはアドミッタンス $\dot{Y}_3$ を掛けて此の三式を邊々相加へて見ると次式の通りになる。

$$\dot{V}_0(\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3)=\dot{V}_1'\dot{Y}_1+\dot{V}_2'\dot{Y}_2+\dot{V}_3'\dot{Y}_3$$
$$-(\dot{V}_1\dot{Y}_1+\dot{V}_2\dot{Y}_2+\dot{V}_3\dot{Y}_3)$$

然るに $\dot{Y}_1\dot{Y}_2\dot{Y}_3$ のアドミッタンスは夫々インピーダンス $\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3$ の逆數であつて $\dot{V}_1\dot{Y}_1$ や $\dot{V}_2\dot{Y}_2$ 又は $\dot{V}_3\dot{Y}_3$ 等は各相を流れる電流となる。然るに第243圖のO點に於てはキルヒホッフの第一法則によつて電流が零であるから次の式が成立し之より電壓三角形の重心O′と負荷の中性點との間の電位差 $\dot{V}_0$ が求められる。

$$\dot{V}_1\dot{Y}_1+\dot{V}_2\dot{Y}_2+\dot{V}_3\dot{Y}_3=0$$

$$\therefore\quad \dot{V}_0(\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3)=\dot{V}_1'\dot{Y}_1+\dot{V}_2'\dot{Y}_2+\dot{V}_3'\dot{Y}_3$$

$$\therefore\quad \dot{V}_0=\frac{\dot{V}_1'\dot{Y}_1+\dot{V}_2'\dot{Y}_2+\dot{V}_3'\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3}\cdots\cdots\cdots(162)$$

此の式は前に述べた不平衡負荷の中性點の電位を求める式と同様で是よりして線間電壓 $\dot{V}_{12}\dot{V}_{23}\dot{V}_{31}$ が知れ負荷の各相に於けるインピーダンスなりアドミッタンスなりが知れて居る場合の各相電壓を求める事が出來る。その方法は先づ前の平衡負荷に於ける計算と同様にして電壓三角形の重心の電位 $\dot{V}_1'\dot{V}_2'\dot{V}_3'$ を

求め之を第162式に代入し更に之を第161式に代入すれば$\dot{V}_1\dot{V}_2\dot{V}_3$が求められるのである。それでは此處に此の相電壓$\dot{V}_1\dot{V}_2\dot{V}_3$の求め方を計算して見る事とする。第157式、第158式、第159式により三角形の重心と各頂點との間の電壓$\dot{V}_1'\dot{V}_2'\dot{V}_3'$は次の如く求めらる。

$$\dot{V}_1' = \frac{1}{3}(\dot{V}_{12} - \dot{V}_{31}) \qquad \dot{V}_2' = \frac{1}{3}(\dot{V}_{23} - \dot{V}_{12})$$

$$\dot{V}'_3 = \frac{1}{3}(\dot{V}_{31} - \dot{V}_{23})$$

此の三式を第162式に代入すれば次の通りになる。

$$\dot{V}_0 = \frac{\frac{1}{3}\{(\dot{V}_{12} - \dot{V}_{31})\dot{Y}_1 + (\dot{V}_{23} - \dot{V}_{12})\dot{Y}_2 + (\dot{V}_{31} - \dot{V}_{23})\dot{Y}_3\}}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}$$

上の$\dot{V}_1'\dot{V}_2'\dot{V}_3'$の三つの式と此の$\dot{V}_0$の式とを第161式に代入する。

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_1' - \dot{V}_0$$
$$= \frac{(2\dot{V}_{12} - \dot{V}_{23} - \dot{V}_{31})\dot{Y}_2 + (\dot{V}_{12} + \dot{V}_{23} - 2\dot{V}_{31})\dot{Y}_3}{3(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3)} \cdots (163)$$

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_2' - \dot{V}_0$$
$$= \frac{(\dot{V}_{23} + \dot{V}_{31} - 2\dot{V}_{12})\dot{Y}_1 + (2\dot{V}_{23} - \dot{V}_{12} - \dot{V}_{31})\dot{Y}_3}{3(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3)} \cdots\cdots (164)$$

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_3' - \dot{V}_0$$
$$= \frac{(2\dot{V}_{31} - \dot{V}_{23} - \dot{V}_{12})\dot{Y}_1 + (\dot{V}_{31} + \dot{V}_{12} - 2\dot{V}_{23})\dot{Y}_2}{3(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3)} \cdots\cdots (165)$$

之で不平衡負荷に非對稱電壓を加へた場合の各相電壓が求められた譯で此の相電壓を各相のインピーダンスで割るか之に各

相のアドミッタンスを乘ずるかするならば各相に流れる電流が見出される譯である。此の電流を$\dot{I}_1\dot{I}_2\dot{I}_3$とすれば之等は次の式で表はされる。

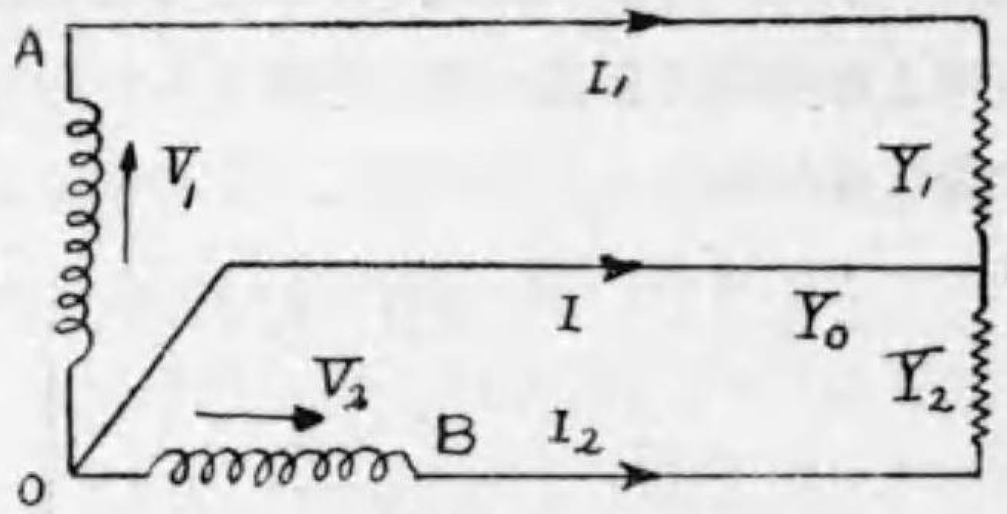
$$\left.\begin{array}{ll}\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{V}_1}{\dot{Z}_1} & \text{又は}\ \dot{I}_1 = \dot{V}_1\dot{Y}_1 \\ \dot{I}_2 = \dfrac{\dot{V}_2}{\dot{Z}_2} & \text{又は}\ \dot{I}_2 = \dot{V}_2\dot{Y}_2 \\ \dot{I}_3 = \dfrac{\dot{V}_3}{\dot{Z}_3} & \text{又は}\ \dot{I}_3 = \dot{V}_3\dot{Y}_3\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (166)$$

此の不平衡負荷に於てもその電壓を複素數で表はさずに單に何ヴォルトと云ふ實效値のみで表はされて居る事もあつて此の場合に於ても平衡負荷の場合と同樣に線間電壓を複素數に直し之より計算を進めればよいのである。

3. 二相三線式

二相三線式は三相非對稱電壓の特殊の場合であつて供給電壓は三相電壓の一相が全然無く他の二相が互に直角なる位相を有するものである。從つて此の二相三線式は不平衡負荷に非對稱電壓を加へた場合と同樣な方法によつて解く事が出來るものである。先づ第244圖に於て電源の電壓を夫々$\dot{V}_1$及び$\dot{V}_2$とし此の二電壓中の中性點をOとする。$\dot{Y}_1$と$\dot{Y}_2$とは夫々負荷と線とのアドミッタンスであつて$\dot{Y}_0$は中性線のアドミッタンスとする。O'は負荷の中性點であつて此の電位の電源の中性點Oに對して$\dot{V}_0$なる電位差を有するものとする。此の場合に於けるA點とO'點との間の電壓は$(\dot{V}_1 - \dot{V}_0)$となりB點とO'との間の電壓は$(\dot{V}_2 - \dot{V}_0)$となる。OとO'との間の電壓は$\dot{V}_0$である事は論

を待たない。各線を流れる電流 $\dot{I}_1\,\dot{I}_2\,\dot{I}$ は之等の電壓を各相のインピーダンスで割ればよい譯であつて言ひ換へれば之等の電壓に各相のアドミタンスを乘ずればよい譯である。從つて各縣に流れる電流 $\dot{I}_1\,\dot{I}_2\,\dot{I}$ は次の式で表はされる事になる。



第 2 4 4 圖

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_1&=(\dot{V}_1-\dot{V}_0)\dot{Y}_1\\ \dot{I}_2&=(\dot{V}_2-\dot{V}_0)\dot{Y}_2\\ \dot{I}&=(-\dot{V}_0)\dot{Y}_0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(167)$$

然るにキルヒホツフの法則によつてO′點に於ける電流は零である。

$$\dot{I}+\dot{I}_2+\dot{I}=0$$

此の式に前の $\dot{I}_1\,\dot{I}_2\,\dot{I}$ を代入すると次の通りになる。

$$(\dot{V}_1-\dot{V}_0)\dot{Y}_1+(\dot{V}_2-\dot{V}_0)\dot{Y}_2+(-\dot{V}_0)\dot{Y}_0=0$$

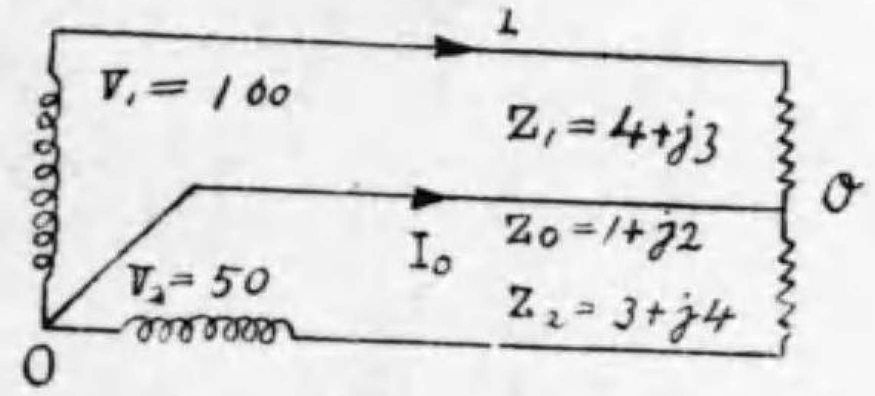
$$\dot{V}_1\dot{Y}_1+\dot{V}_2\dot{Y}_2-\dot{V}_0(\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_0)=0$$

$$\therefore\quad \dot{V}_0=\frac{\dot{V}_1\dot{Y}_1+\dot{V}_2\dot{Y}_2}{\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(168)$$

之によつて中性點の電位 $\dot{V}_0$ を求める事が出來た譯である。此の V_0 さへ知れたならば第167式によつて容易に各線を流れる電流を計算し得るのである。此の二相三線式は V_1 なる電壓と V_2 なる電壓とが互に90度の相差を有して居るので $\dot{V}_2$ を基線に

取れば $\dot{V}_1$ は $+jV_1$ となる譯である。今此の二相三流式の例題を出して之を解いて見る。

第245圖の如き接續の二相三線式の回路があつて V_1 は100ヴォルト、V_2は50ヴォルトである。インピーダンスZ_1は抵抗4オーム、リアクタンス3オーム、インピーダンスZ_2は抵抗3オーム、リアクタンス4オームでインピーダンスZ_0は抵抗1オームでリアクタンス2オームとする。此の場合に於ける各線の電流 $I_1\,I_2\,I_0$ を求めて見る。先づ各回路のアドミツタンスを $Y_1Y_2Y_0$ とすれば之は次の如く計算せられる。



第 2 4 5 圖

$$\dot{Y}_1=\frac{1}{\dot{Z}_1}=\frac{1}{4+j3}=\frac{4-j3}{(4+j3)(4-j3)}=\frac{4-j^3}{25}$$

$$\dot{Y}_2=\frac{1}{\dot{Z}_2}=\frac{1}{3+j4}=\frac{3-j4}{(3+j4)(3-j4)}=\frac{3-j4}{25}$$

$$\dot{Y}_0=\frac{1}{\dot{Z}_0}=\frac{1}{1+j2}=\frac{1-j2}{(1+j2)(1-j2)}=\frac{1-j2}{5}$$

次に V_2なる電壓を電壓の基線に取れば V_1はjV_1 となる。卽ち次の二つの式が出來る譯である。

$$\dot{V}_2=50\qquad \dot{V}_1=j100$$

之等を使用して O′點の電位 $\dot{V}_0$ を求むると次の通りになる。

$$\dot{V}_0=\frac{j100\times\dfrac{4-j3}{25}+50\times\dfrac{3-j4}{25}}{\dfrac{4-j3}{25}+\dfrac{3-j4}{25}+\dfrac{1-j2}{5}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{25}(j400+300+150-j200)}{\dfrac{1}{25}(4-j3+3-j4+5-j10)}=\frac{450+j200}{12-j17}$$

$$\therefore\ \dot{I}_1=(\dot{V}_1-\dot{V}_0)\,\dot{Y}_1=\left(j100-\frac{450+j200}{12-j17}\right)\times\frac{4-j3}{25}$$

$$=\frac{(50+j56)(4-j3)}{12-j17}=\frac{368+j74}{12-j17}$$

$$\therefore\ I_1=\frac{\sqrt{368^2+74^2}}{\sqrt{12^2+17^2}}=\frac{375}{20.6}=18.2\ \text{アンペア}$$

$$\dot{I}_2=(\dot{V}_2-\dot{V}_0)\dot{Y}_2=\left(50-\frac{450+j200}{12-j17}\right)\times\frac{3-j4}{25}$$

$$=\frac{86-j102}{12-j17}$$

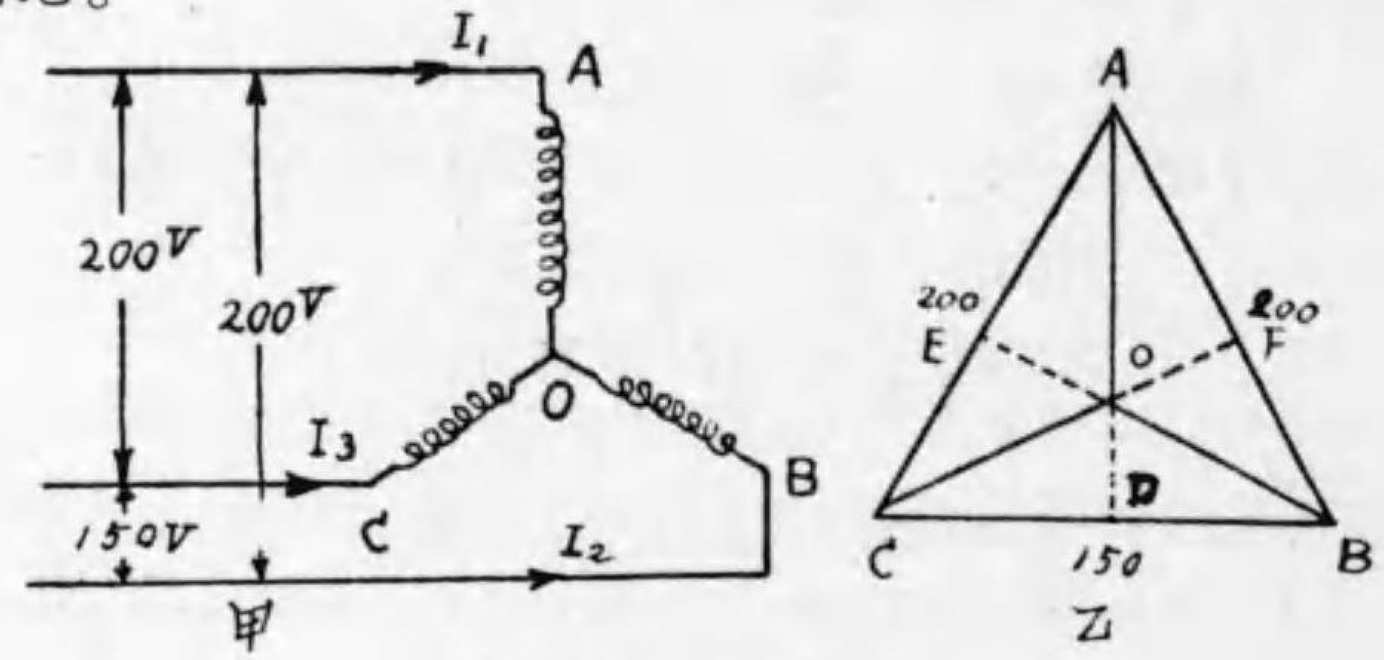
$$\therefore\ I_2=\frac{\sqrt{86^2+102^2}}{\sqrt{12^2+17^2}}=\frac{133.4}{20.6}=6.5\text{アンペア}$$

$$\dot{I}_0=-\dot{V}_0\dot{Y}_0=\frac{-450-j200}{12-j17}\times\frac{1-j2}{5}=\frac{-170+j140}{12-j17}$$

$$\therefore\ I_0=\frac{\sqrt{170^2+140^2}}{\sqrt{12^2+17^2}}=\frac{220}{20.6}=10.7\ \text{アンペア}$$

4. 例　　題

例　第246圖甲の如く星形に接續せられた回路があつて負荷は各相ともインピーダンス8オームの平衡三相負荷である。此の場合に於ける各相の電壓及び流れる各線の電流を求む。



第246圖

解　此の負荷のベクター圖を書いて見ると乙圖の通りになりO點の電位は三角形ABCの重心と一致する。之よりしてOA, OB, OCの各相電壓は次の如く計算する事が出來る。

$$AO=\frac{2}{3}AD \qquad BO=CO=\frac{2}{3}BE$$

$$AD=\sqrt{AB^2-DB^2}=\sqrt{200^2-75^2}=185.5$$

$$BE=\sqrt{CB^2-CE^2}=\sqrt{150^2-100^2}=112$$

$$\therefore\ \text{AO間の相電壓}=\frac{2}{3}\times185.5=123.6\ \text{ヴォルト}$$

$$\text{BO間の相電壓}=\frac{2}{3}\times112=74.7\ \text{ヴォルト}$$

$$\text{CO間の相電壓}=\frac{2}{3}\times112=74.7\ \text{ヴォルト}$$

之でAO, BO, COの相電壓が求められた譯であつて各線に流れる電流を求むるには之をインピーダンスで割ればよい。

$$I_1=\frac{123.6}{8}=15.45\ \text{アンペア}$$

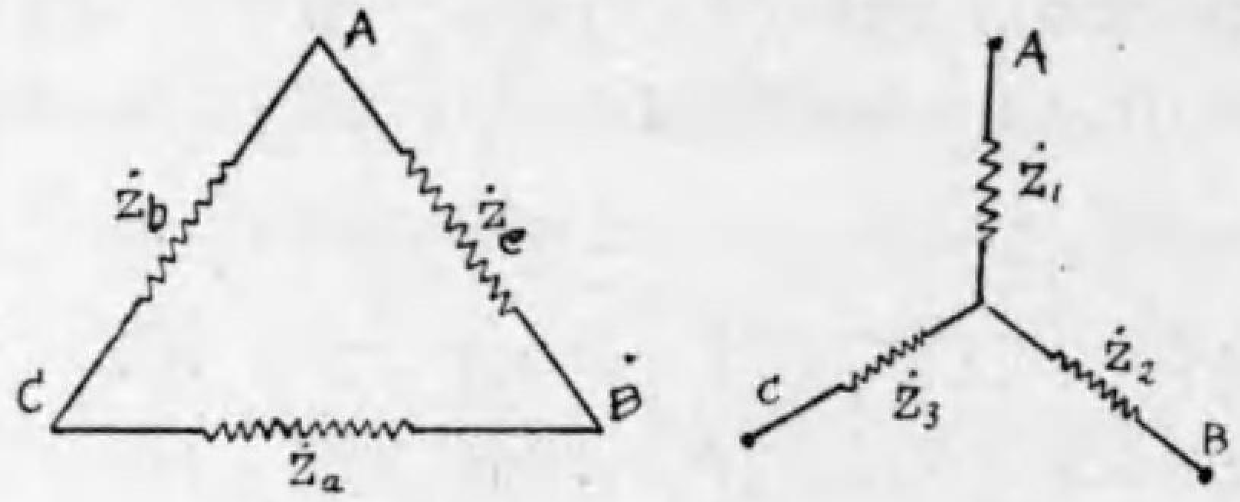
$$I_2=I_3=\frac{74.7}{8}=9.34\ \text{アンペア}$$

第二十一章　三角形星形接續の變換

1. 三角形接續を星形接續に

三角形に接續してある回路を星形接續と考へて色々な問題を計算すると便利な事がある。此處に述べるのは此の三角形接續を星形接續と考へた場合、例へば第247圖甲圖のABC三點に

流れて來る電流が之を乙圖の如き回路に流れてその大きさも力



甲　　第２４７圖　　乙

率も全く變化しないやうなインピーダンスを求める事である。つまり甲圖の如く三角形に接續され居る場合に各邊のインピーダンスが圖の如く$\dot{Z}_a\dot{Z}_b\dot{Z}_c$であつたとするならば之を乙圖の如く星形接續と考へた時、同じ電流を流すためには各相のインピーダンス$\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3$はどんなものと考へればよいかを求むるのである。今第247圖甲の三角形接續を同圖乙の星形接續に換算した場合そのインピーダンスの關係を公式で示して見ると次の通りである。之は直流計算に於ける場合と同樣の式である。

$$\dot{Z}_1=\frac{\dot{Z}_b\dot{Z}_c}{\dot{Z}_a+\dot{Z}_b+\dot{Z}_c}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(169)$$

$$\dot{Z}_2=\frac{\dot{Z}_c\dot{Z}_a}{\dot{Z}_a+\dot{Z}_b+\dot{Z}_c}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(170)$$

$$\dot{Z}_3=\frac{\dot{Z}_a\dot{Z}_b}{\dot{Z}_a+\dot{Z}_b+\dot{Z}_c}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(171)$$

之で三角形接續に於けるインピーダンスを星形接續のインピーダンスに書き換へる事が出來た譯で之を**等價インピーダンス**(Equivalent impedance エクイヴアレント インピーダンス)と呼んで居る。此の式は直流や單相の計算にも使用せられる事が

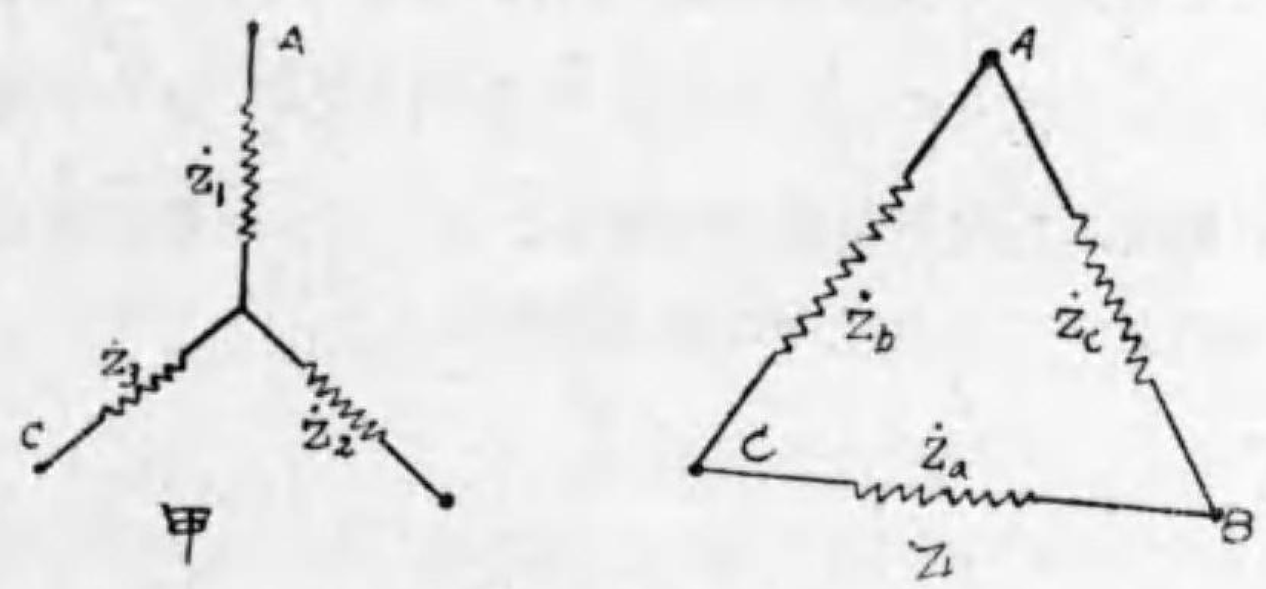
往々あつて記憶して置く必要がある。此の式を記憶するには分母に各邊のインピーダンスの和を取り分子には求むる星形インピーダンスの兩邊のインピーダンスを掛け合したものを取ればよい。つまり乙圖の$\dot{Z}_1$を求むるにはその分子に甲圖の$\dot{Z}_b\dot{Z}_c$を置けばよい譯で$\dot{Z}_b\dot{Z}_c$は夫々A點より見て三角形の兩邊になつて居る。又三角形の負荷が平衡負荷であるならば次の如くなる。

$$\dot{Z}_a=\dot{Z}_b=\dot{Z}_c=\dot{Z}$$

$$\therefore\quad \dot{Z}_1=\dot{Z}_2=\dot{Z}_3=\frac{\dot{Z}}{3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(172)$$

2.　星形接續を三角形接續に

今のは三角形接續を星形接續にする場合の等價インピーダンスを求めたのであるが今度は星形接續のものを三角形接續と考へて等價インピーダンスを求める方法を述べて見る。此の場合



第２４８圖

には第248圖甲及び同圖乙の如く星形接續に於けるインピーダンスを夫々$\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3$とし三角形接續に於ける各邊の等價インピーダンスを夫々$\dot{Z}_a\dot{Z}_b\dot{Z}_c$とする。此の場合に$\dot{Z}_a\dot{Z}_b\dot{Z}_c$が知れて居て$\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3$を求めようと思へば前に述べた公式より次の如く之を求める事が出來る。

$$\dot{Z}_a=\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(173)$$

$$\dot{Z}_b=\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(174)$$

$$\dot{Z}_c=\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3}{\dot{Z}_3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(175)$$

之で星形接續を三角型接續に變更する場合に於ける等價インピーダンスが求め得られた譯で此の式を記憶するには分子は何れも$\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_1\dot{Z}_3$と置き分子は三角形接續に於ける一邊のインピーダンスの對頂點を見て此の頂點に接續されて居る星形インピーダンスを持つて來ればよいのである。斯くて此の公式も比較的容易に記憶し得られるのである。

次に星形接續に於ても三角形接續に於ても各インピーダンスをアドミッタンスで表はして見る。卽ち$\dot{Z}_1$の代りに$\frac{1}{\dot{Z}_1}$である$\dot{Y}_1$を用ひ$\dot{Z}_a$の代りに$\frac{1}{\dot{Z}_a}$である$\dot{Y}_a$を用ふる。さうすると前の三角形接續から星形接續の等價インピーダンスを求めたと同樣な方法によつて次の三つの公式が出來上る。

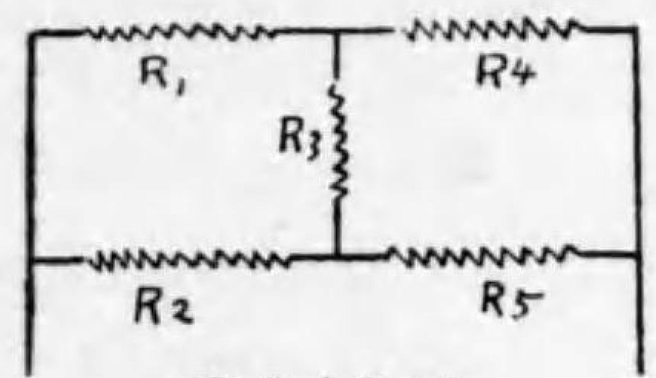
$$\dot{Y}_a=\frac{\dot{Y}_2\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(176)$$

$$\dot{Y}_b=\frac{\dot{Y}_1\dot{Y}_3}{\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(177)$$

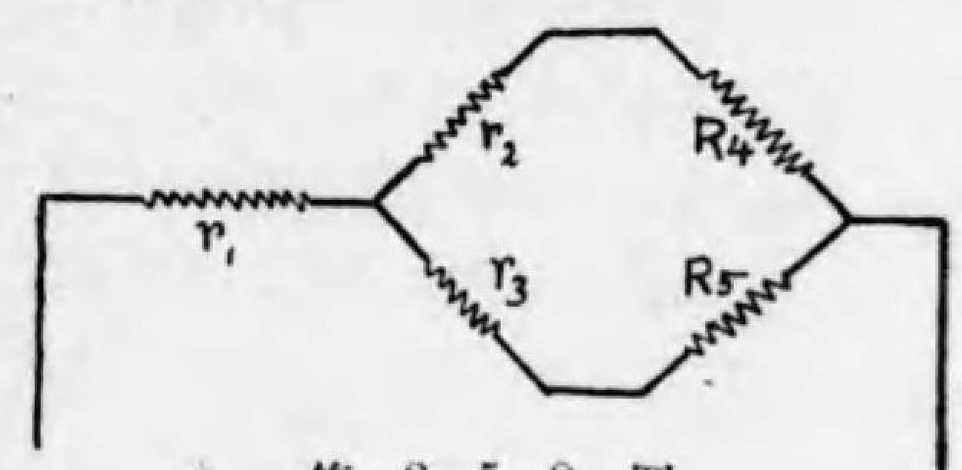
$$\dot{Y}_c=\frac{\dot{Y}_1\dot{Y}_2}{\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(178)$$

3. 例 題

例 1. 第249圖に於て抵抗R_1は3オーム、R_2は4オーム、R_3は5オーム、R_4は0.75オーム、R_5は$\frac{7}{3}$オームとして之に電壓14ヴォルトを供給すれば此の回路に流れる電流は何程なるか。



第 2 4 9 圖



第 2 5 0 圖

解 先づ$R_1R_2R_3$の抵抗を第250圖の如く星形に接續しその等價抵抗を夫々$r_1r_2r_3$とすれば$r_1r_2r_3$は第169式により次の如く計算する事が出來る。此の場合にr_1はその分子に之を挾むR_1R_2を置けばよく同樣にr_2はその兩邊のR_1R_3を置けばよくr_3はR_2R_3を置けばよい。

$$r_1=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}=\frac{3\times4}{3+4+5}=\frac{12}{12}=1\text{オーム}$$

$$r_2=\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}\text{オーム}$$

$$r_3=\frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}\text{オーム}$$

此の抵抗が第250圖の如く接續されて居るので此の回路の合成抵抗Rは次の如くなる。

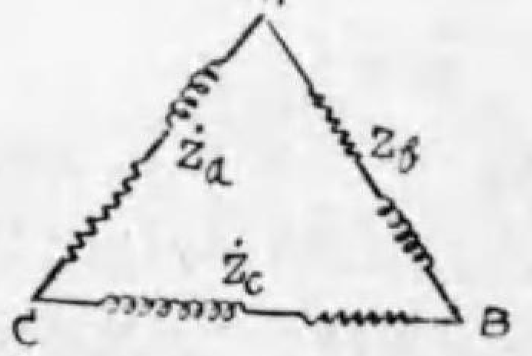
$$R=r_1+\frac{1}{\dfrac{1}{r_2+R_4}+\dfrac{1}{r_3+R_5}}$$

$$=1+\frac{1}{\dfrac{1}{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}+\dfrac{1}{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}}}=1+\frac{1}{\frac{4}{8}+\frac{3}{12}}$$

$$=1+\frac{1}{\frac{3}{4}}=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}\text{オーム}$$

従つて此の回路を流れる電流は次の通りになる。

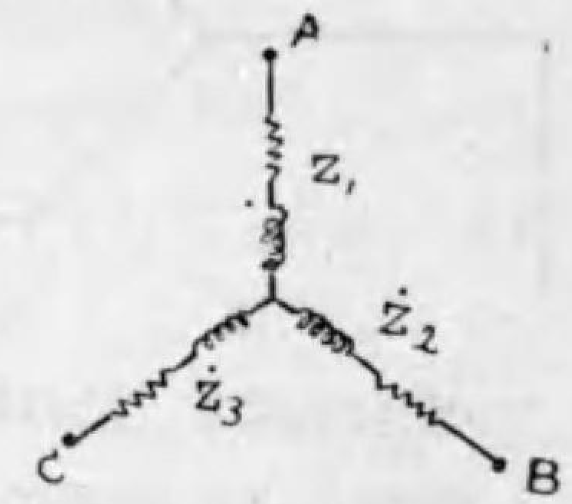
$$\text{電流}=14\div\frac{7}{3}=6\text{アンペア}$$



第251圖

例 2. 第251圖に於てZ_aは$3+j2$, Z_bは$1+j3$, Z_cは$4+j1$であるとすれば此の回路を星形に接續した等價インピーダンスを求む。

解 是は169式の公式をそのまゝ使用すれば求められるのであつて第252圖は此の回路を星形に變更したものを示し此の回路の$\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3$を求むれば次の如くなる。此の場合に$\dot{Z}_1$の分子はその兩邊に位置する$\dot{Z}_a$と$\dot{Z}_b$とを乘じたものを置けばよい。



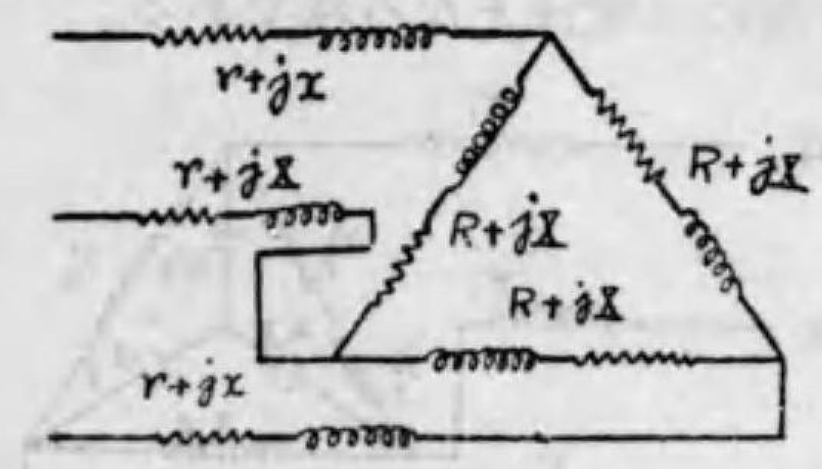
第252圖

$$\dot{Z}_1=\frac{\dot{Z}_a\dot{Z}_b}{\dot{Z}_a+\dot{Z}_b+\dot{Z}_c}=\frac{(3+j2)(1+j3)}{3+j2+1+j3+4+j1}$$

$$=\frac{3+j2+j9-6}{8+j6}=\frac{-3+j11}{2(4+j3)}$$

$$\dot{Z}_2=\frac{\dot{Z}_b\dot{Z}_c}{\dot{Z}_a+\dot{Z}_b+\dot{Z}_c}=\frac{(1+j3)(4+j1)}{2(4+j3)}=\frac{1+j13}{2(4+j3)}$$

$$\dot{Z}_3=\frac{\dot{Z}_a\dot{Z}_c}{\dot{Z}_a+\dot{Z}_b+\dot{Z}_c}=\frac{(3+j2)(4+j1)}{2(4+j3)}=\frac{10+j11}{2(4+j3)}$$



第253圖

例 3. 第254圖の如くR+jXなるインピーダンスを三角形に接續した平衡負荷がある、此の負荷に供給する線のインピーダンスを各$r+jx$とするならば此の回路にEなる電壓を供給した時流れる電流を求む。

解 斯くの如き問題は負荷の三角形接續を星形接續に變換して計算すると容易に解く事が出來る。三角形負荷を星形負荷に接續した場合のインピーダンスをZ_1とすれば此のインピーダンスは次の如くなる。

$$Z_1=\frac{(R+jx)^2}{3(R+jx)}=\frac{1}{3}(R+jx)$$

従つて一相に接續されて居るインピーダンスは之に$r+jx$を加へればよい譯でその大きさは次の如くなり之をZ_0で表はす。

$$Z_0=r+jx+\frac{1}{3}(R+jx)$$

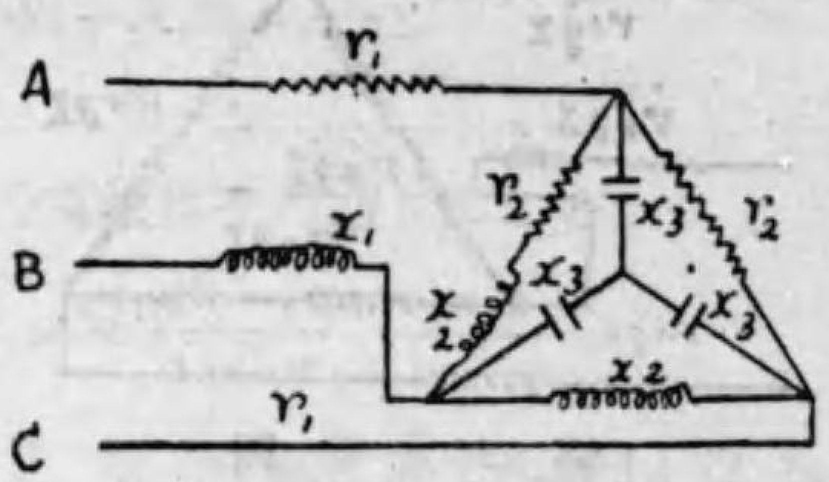
此の負荷は平衡負荷であるから各相の星形インピーダンスは何れも上式のZ_0となり又之に供給せられる電壓も各相とも同じ電壓となる。従つてEなる電壓を供給すれば此の相のインピーダンスZ_0にかゝる電壓は$\frac{\dot{E}}{\sqrt{3}}$と云ふ事になり是より各線に流れる電流Iは次の如く計算し得られる。

$$\dot{I}=\frac{\dot{E}}{\sqrt{3}}\div\left\{r+jx+\frac{1}{3}(R+jx)\right\}$$

$$=\frac{\dot{E}}{\sqrt{3}\left\{r+\frac{R}{3}+j\left(x+\frac{x}{3}\right)\right\}}$$

つまり此の電流 I が各線を流れる電流となる譯である。

例 4. 第256圖に示すが如き回路があつて $r_1 r_2$ は抵抗 $x_1 x_2$ は誘導リアクタンス、x_3 は容量リアクタンスである。此の回路を星形に接續したと考へその等價インピーダンス $\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3$ を求めよ。



第 2 5 4 圖

解　先づ第 254 圖の三角形に接續されて居る負荷を星形負荷の等價インピーダンスに換算して見ると此のインピーダンス $\dot{Z}_a\dot{Z}_b\dot{Z}_c$ は次の通りになる。

$$\dot{Z}_a=\frac{(r_2+jx_2)r_2}{r_2+jx_2+r_2+jx_2}=\frac{(r_2+jx_2)r_2}{2(r_2+jx_2)}=\frac{r_2}{2}$$

$$\dot{Z}_c=\frac{r_2 jx_2}{r_2+jx_2+r_2+jx_2}=\frac{jr_2x_2}{2(r_2+jx_2)}$$

$$\dot{Z}_b=\frac{(r_2+jx_2)jx_2}{2(r_2+jx_2)}=\frac{jx_2}{2}$$

此の $\dot{Z}_a\dot{Z}_b\dot{Z}_c$ と容量リアクタンス x_3 とは並列に接續されて居るのでその並列合成インピーダンスを求め之に r_1 や x_1 の直列インピーダンスを加へれば各相の相インピーダンスが求めらる。之を $\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{Z}_3$ とする。

$$\dot{Z}_1=r_1+\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{r_2}{2}}+\dfrac{1}{-jx_3}}=r_1+\frac{1}{\dfrac{2}{r_2}+\dfrac{j1}{x_3}}$$

$$=r_1+\frac{r_2x_3}{2x_3+jr_2}=\frac{2r_1x_3+r_2x_3+jr_1r_2}{2x_3+jr_2}$$

$$\dot{Z}_3=r_1+\frac{1}{\dfrac{2(r_2+jx_2)}{jr_2x_2}+\dfrac{1}{-jx_3}}=r_1+\frac{r_2x_2x_3}{2x_2x_3+jr_2x_2-j2r_2x_3}$$

$$=\frac{2r_1x_2x_3+r_2x_2x_3+jr_1r_2(x_2-x_3)}{2x_2x_3+jr_2x_2-j2r_2x_3}$$

$$\dot{Z}_2=jx_1+\frac{1}{\dfrac{2}{jx_2}+\dfrac{1}{-jx_3}}=jx_1+\frac{x_2x_3}{j(x_2-2x_3)}$$

$$=\frac{x_2x_3-x_1x_2-j2x_1x_3}{j(x_2-2x_3)}$$

第二十二章　對稱座標法

1.　複素數の他の表示法

是は對稱座標法とは別に大きな關係はないが此處で一寸述べて置く。今迄複素數を表はすには一般に $a+jb$ なる記號を使用して居たが此の記號以外に此の複素數を $A^{ej\theta}$ なる記號によつて表はす事がある。今次の如きベクター $\dot{A}$ があるとする。

$$\dot{A}=a+jb$$

此のベクターに於て絕對値 A と位相角 θ とは夫々次の式で表はされるものである。

$$A=\sqrt{a^2+b^2}\qquad \theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

是により a と b とは夫々次の式で表はされる事は容易に知れる事である。

$$a=A\cos\theta\qquad b=A\sin\theta$$

從つて $\dot{A}$ なるベクターは次の式で表はされる事になる。

$$\dot{A}=a+jb=A(\cos\theta+j\sin\theta)$$

此の式の $\cos\theta+j\sin\theta$ を表はすのに $e^{j\theta}$ なる記號を使用する事がある。之を**ド モアブルの定理**（Theory of De Moivre セオリー オヴ ド モアブル）と呼んで居て是によつて複素數を