Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 14

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 14.1. Interpretiere Lemma 14.2 für den Fall einer quadratischen Körpererweiterung.

Aufgabe 14.2. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq L$ der Zerfällungskörper von $X^n - 1$, also der n-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$ und es sei G die Galoisgruppe der Erweiterung. Zeige, dass bei n ungerade ein natürlicher injektiver Gruppenhomomorphismus $G \to S_{n-1}$ und bei n gerade ein natürlicher injektiver Gruppenhomomorphismus $G \to S_{n-2}$ vorliegt.

Aufgabe 14.3.*

(1) Bestimme die Zerlegung von $X^4 - 7$ in $\mathbb{C}$.
(2) Bestimme den Zerfällungskörper L von $X^4 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.
(3) Bestimme den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$.
(4) Beschreibe, welche Permutationen auf der Nullstellenmenge von $X^4 - 7$ von der Galoisgruppe herrühren.

Aufgabe 14.4. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}\,(L|K)$ und sei $K \subseteq M$ eine weitere Körpererweiterung. Es sei E die Menge der K-Algebrahomomorphismen von L nach M. Zeige, dass die Zuordung

$$G \longrightarrow \mathrm{Perm}\,(E),\ \varphi \longmapsto (\iota \mapsto \iota \circ \varphi),$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 14.5. Es sei M eine Menge und G eine Untergruppe der Menge aller Bijektionen von M nach M. Es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge mit der Eigenschaft, dass jedes $\varphi \in G$ die Menge T in sich selbst überführt. Zeige, dass die Abbildung

$$\psi\colon\ G \longrightarrow \mathrm{Perm}\,(T),\ \varphi \longmapsto \varphi|_T,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Man gebe Beispiel für solche Situationen, wo ψ (nicht) injektiv, (nicht) surjektiv ist.

Aufgabe 14.6. Zeige, dass jede Isometrie des $\mathbb{R}^n$ eine Selbstabbildung der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre

$$S^{n-1} = \{P \in \mathbb{R}^n | \ || P ||= 1\}$$

induziert.

Aufgabe 14.7. Beschreibe die Wirkungsweise der eigentlichen Würfelgruppe auf der Menge der Ecken, der Kantenmenge, der Menge der Seitenmittelpunkte, der Raumdiagonalen durch geeignete Gruppenhomorphismen.

Aufgabe 14.8. Betrachte die Menge $\mu_4(\mathbb{C})$ der vierten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Welche sind untereinander über $\mathbb{Q}$ konjugiert?

Aufgabe 14.9.*

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und seien $f, g \in L$ konjugierte Elemente. Zeige, dass dann $N(f) = N(g)$ und $S(f) = S(g)$ gilt.

Aufgabe 14.10. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die n Vektoren (im $\mathbb{C}^n$)

$$(1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}), \zeta \in \mu_n(\mathbb{C}),$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 14.11. Begründe mit dem Lemma von Dedekind, dass die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

den Rang 4 besitzt.

Aufgabe 14.12. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $\zeta = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$. Berechne die Determinante der $(n \times n)$-Matrix

$$((\zeta^{r+s})_{0 \leq r,s \leq n-1})$$

für $n = 1, 2, 3, 4$.

Aufgabe 14.13. Es sei K ein Körper mit einer Charakteristik $\neq 2$ und sei $K \subseteq L$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung ist.

Aufgabe 14.14. Zeige, dass die quadratische Körpererweiterung $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_4$ eine Galoiserweiterung ist.

Aufgabe 14.15. Zeige, dass die quadratische Körpererweiterung $\mathbb{F}_2(X) \subseteq \mathbb{F}_2(X)[T]/(T^2 - X)$ keine Galoiserweiterung ist.

Aufgabe 14.16. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $\mu_n(L)$ (zu $n \in \mathbb{N}_+$) die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln in L. Zeige, dass es zu jedem n einen natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{Gal}(L|K) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mu_n(L))$$

gibt.

Bei einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$ kann man jeden K-Algebraautomorphismus von L - also jedes Element der Galoisgruppe - als eine bijektive K-lineare Abbildung

$$L \cong K^n \longrightarrow L \cong K^n$$

auffassen und kann daher die Begriffe der linearen Algebra darauf anwenden. Damit hat man insbesondere den Begriff der Determinante zur Verfügung.

Aufgabe 14.17. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung mit Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(L|K)$. Zeige, dass die Abbildung

$$G \longrightarrow K^\times,\ \varphi \longmapsto \det \varphi,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 14.18. Sei D eine endliche kommutative Gruppe mit der zugehörigen Charaktergruppe $D^\vee$ in einen Körper K. Zeige, dass die Abbildung

$$D^\vee \longrightarrow K^\times,\ \chi \longmapsto \prod_{d \in D} \chi(d),$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.19. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei

$$\varphi\colon\ K \longrightarrow K$$

ein Körperautomorphismus. Zeige, dass die Abbildung

$$K[X] \longrightarrow K[X],\ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \varphi(a_i) X^i,$$

ein Ringautomorphismus des Polynomrings $K[X]$ ist.

Aufgabe 14.20. (2 Punkte)

Sei D eine endliche kommutative Gruppe und sei $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Beweise für $\chi \in D^\vee$ die Gleichheit

$$\prod_{d \in D} \chi(d) \, = \, \det \varphi_\chi,$$

wobei φ_χ den zugehörigen K-Automorphismus von L bezeichnet (siehe Lemma 12.15).

Aufgabe 14.21. (2 Punkte)

Betrachte die Menge $\mu_8(\mathbb{C})$ der achten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Welche sind untereinander über $\mathbb{Q}$ konjugiert?

Aufgabe 14.22. (5 Punkte)

Sei D eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n mit der zugehörigen Charaktergruppe $D^\vee$ mit Werten in einem Körper K.

a) Zeige, dass der Gruppenhomomorphismus

$$\psi \colon D^\vee \longrightarrow K^\times, \, \chi \longmapsto \prod_{d \in D} \chi(d),$$

nur die Werte 1 und -1 annehmen kann.

b) Es sei vorausgesetzt, dass K eine n-te primitive Einheitswurzel enthält. Zeige, dass ψ genau dann den Wert -1 annimmt, wenn n gerade ist.

Aufgabe 14.23. (3 Punkte)

Es sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, die in $\mathbb{Q}$ keine dritte Wurzel besitzt, so dass $\mathbb{Q} \subseteq L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - q)$ eine Körpererweiterung vom Grad 3 ist. Zeige, dass das Polynom $X^3 - q$ in L genau eine Nullstelle hat und dass diese Körpererweiterung nicht galoissch ist.

Abbildungsverzeichnis