機關科力學教科書

商船學校

目　次

第 壹 章

Particle ノ Kinematics.

第貳章

運動ノ定律,萬有引力

第參章

力ノ組合及ビ分解

第四章

重心

第五章

力ノ釣合ノ條件

第六章

綱ニ於ケル張力

第七章

摩擦

第八章

簡單ナル機械

第九章

Moment of Inertia.

第拾章

剛體ノ運動

第拾壹章

Work 及ビ Energy.

第拾貳章

衝突

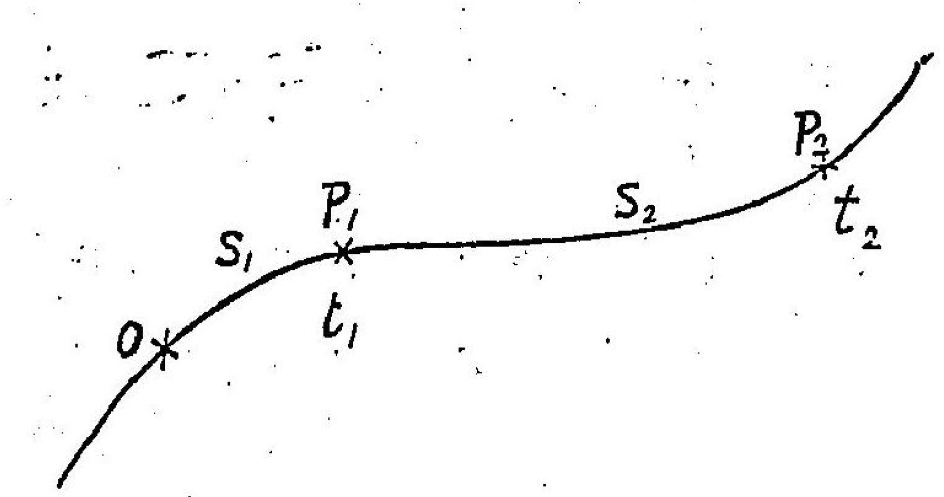
力學

第壹章

Particle ノ Kinematics.

1. Speed

或時間ニ於ケル運動點Pノ mean speed トハ,其時間ニP點ノ經過セル道程ヲ其時間ニテ除セシモノナリ,時ノ初ニ動點PハO點ニアリ,t_1ナル時ニP_1ニ至リ,t_2ナル



時ニP_2ニ至レリトス,道ニ沿ヒテ測リタルOヨリP_1ニ至ル道程ヲs_1トシ,OヨリP_2ニ至ル道程ヲs_2トス,長サノ單位ヲ foot トシ,時ノ單位ヲ second トスレバ,t_1ヨリt_2ニ至ル間ノ動點ノ mean speed ハ次式ニテ與ヘラル.

$$v=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}\ \text{feet per second.}$$

道ノ上ノ或一點 P_1 ニ於ケル speed, 又ハ或瞬時 t_1 ニ於ケル speed トハ上式ニ於テ t_2-t_1 カ微小トナレル極限ニ於ケル値ナリ, speed 一様ナル運動ニ於テハ mean speed ト,任意ノ時ニ於ケル instantaneous speed トハ其値同一ナリ.

speed ノ單位ハ單位時間ニ單位ノ長サノ割合ニテ動ク點ノ speed ナリ,長サノ單位ガ foot, 時ノ單位ガ second ナレバ幾何 feet per second ト呼ブ,長サノ單位ガ centimetre, 時ノ單位ガ second ナレバ幾何 centimetres per second ト稱ス.

2. Speed ノ變化.

v_1 及 v_2 ヲ夫々 t_1 及 t_2 ニ於ケル動點 P ノ speed トセバ, t_1 ヨリ t_2 迄ノ時間ニ speed ノ變化ノ割合ハ平均

$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1} \text{ feet per second per second.}$$

ナリ, t_2 ト t_1 トノ差ガ微小トナレル極限ニ於テ上式ノ値ハ其瞬時ニ於ケル speed ノ變スル割合ヲ與フルモノナリ.

speed ノ變スル割合ヲ呼ブニ幾何 feet per second per second 又ハ幾何 centimetres per second per second 等ト云フ.

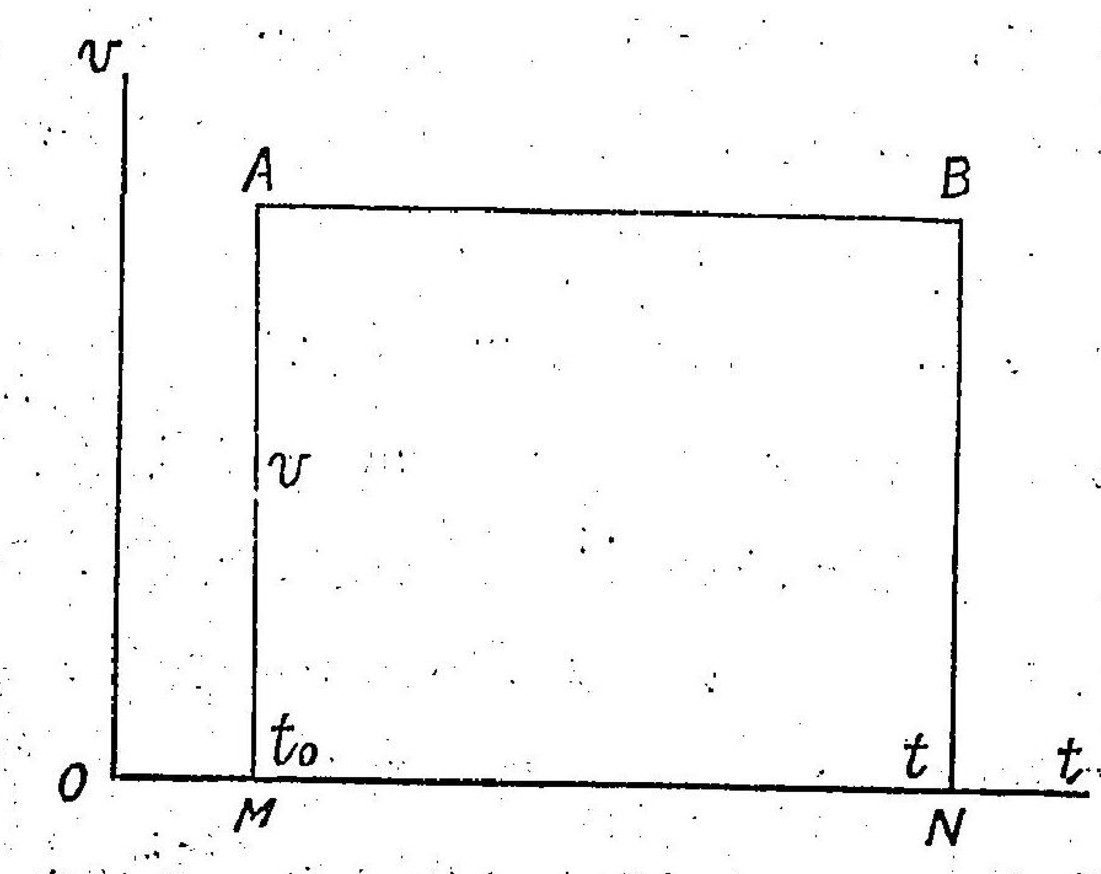
3. Speed ノ curve.

Speed v ト,時 t トヲ坐標トシテ畫ケル curve ヲ speed ノ curve ト云フ.

Speed 一様ナル場合ニ speed ノ curve ハ t 軸ニ平行ナ

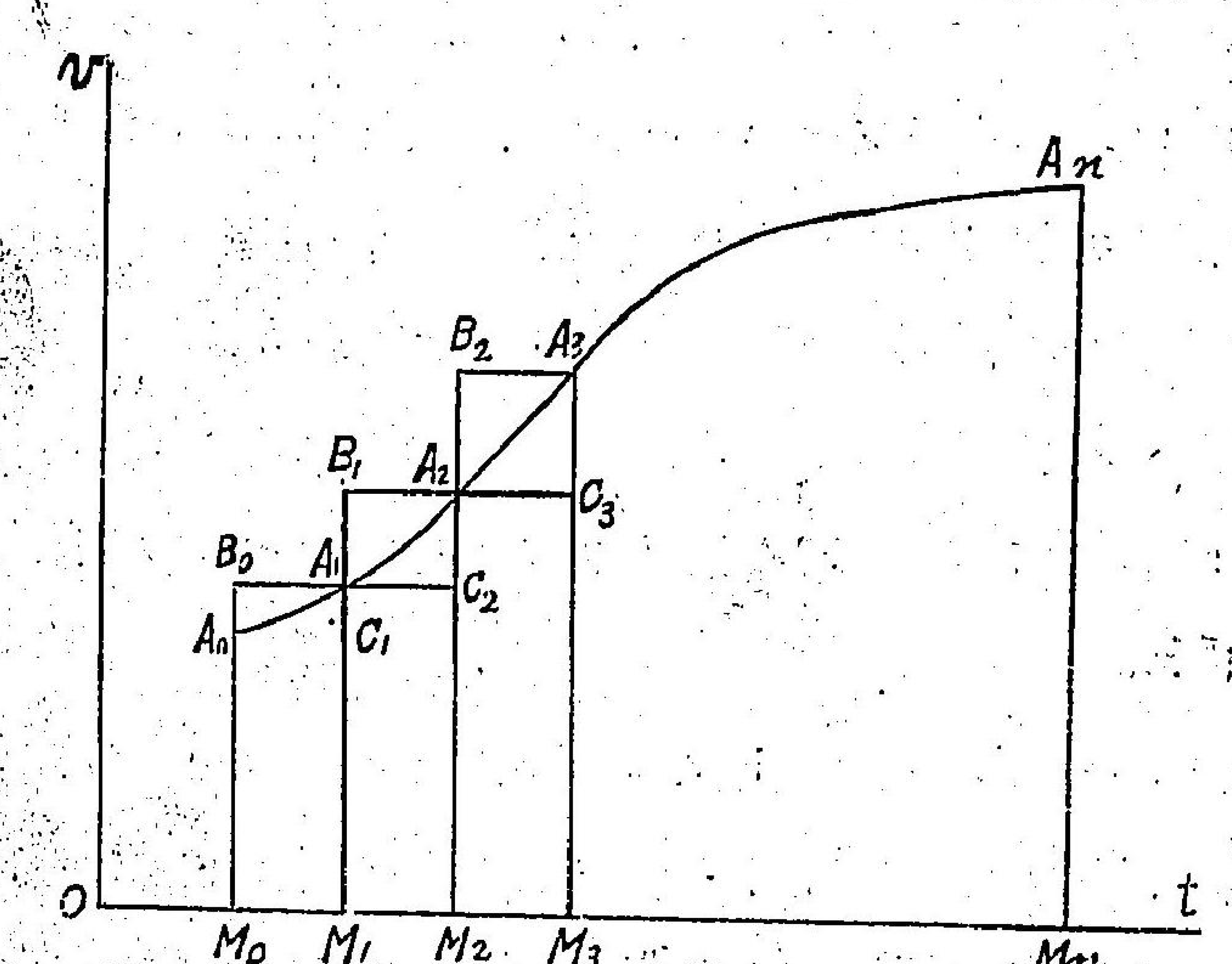
ル直線 AB トナルベシ, t_0 ヨリ t 迄ノ道程ヲ s トスレバ

$$s=v(t-t_0)$$



故ニ s ハ矩形 ABNM ノ面積ニテ表ハサル.

曲線 $A_0A_1A_2......A_n$ ハ speed 一様ナラザル運動點 P ノ speed ノ curve ナリトス, A_0M_0 ハ初ニ於ケル speed ヲ表ハシ, A_nM_n ハ終ニ於ケル speed ヲ表ハス,此時間中ニ於



ケルP ノ道程ヲ s トス.

時間 M_0M_n ヲ等分ス,其各分點ヲ M_1, M_2, M_3 等トス,是等ノ各瞬時 M_1, M_2, M_3, 等ニ於ケル speed ハ夫々 A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 等ニテ表ハサル,今假ニ動點カ時間 M_0M_1 ニハ speed A_0M_0 ヲ以テ動キ,時間 M_1M_2 ニハ speed A_1M_1 ヲ以テ動キ,時間 M_2M_3 ニハ speed A_2M_2 ヲ以テ動キ,追テ此クノ如キ運動ヲナシタリトセバ, speed ノ curve ハ $A_0C_1A_1C_2$...... トナリ,其各部分時間ニ於ケル道程ハ夫々矩形 $A_0M_0M_1C_1$, $A_1M_1M_2C_2$, $A_2M_2M_3C_3$ 等ヲ以テ表ハサレ,全時間 M_0Mn ニ於ケル道程ハ是等ノ面積ノ和,即チ此塲合ノ speed ノ curve ト,其兩端ノ ordinates ト, t 軸トノ間ノ面積ニテ表ハサル,此道程ヲ s_1 トス

次ニ假ニ動點ガ時間 M_0M_1 ニハ speed A_1M_1 ヲ以テ動キ,時間 M_1M_2 ニハ speed A_2M_2 ヲ以テ動キ,時間 M_2M_3 ニハ speed A_3M_3 ヲ以テ動キ,追テ此クノ如キ運動ヲナシタリト考フレバ, speed ノ curve ハ $B_0A_1B_1A_2B_2A_3$...... トナリ,其各分部時間ニ於ケル道程ハ,夫々矩形 $B_0M_0M_1A_1$, $B_1M_1M_2A_2$, $B_2M_2M_3A_3$, 等ノ面積ニテ表ハサレ,全時間 M_0M_n ノ道程ハ是等矩形ノ面積ノ和,即チ此塲合ノ speed ノ curve ト,其兩端ノ ordinates ト t 軸トノ間ノ面積ニテ表ハサル,此道程ヲ s_2 トス.

道程 s ハ明カニ s_1 ト s_2 トノ中間ノ値ヲ有ス,面積 s ト s_2 トノ差ハ n ヲ增加スルニ從ヒ如何程ニテモ微小トナルベシ, n ガ限リ無ク增大サレタル時, s_1 モ s_2 モ動

點實際ノ speed ノ curve $A_0A_1A_2$......A_n ト,其ノ兩端ノ ordinates ト, t 軸トノ間ノ面積トナルベシ,故ニ道程 s ハ其 speed ノ curve ト,其兩端ノ ordinates ト, t 軸トノ間ノ面積ニテ表ハサル.

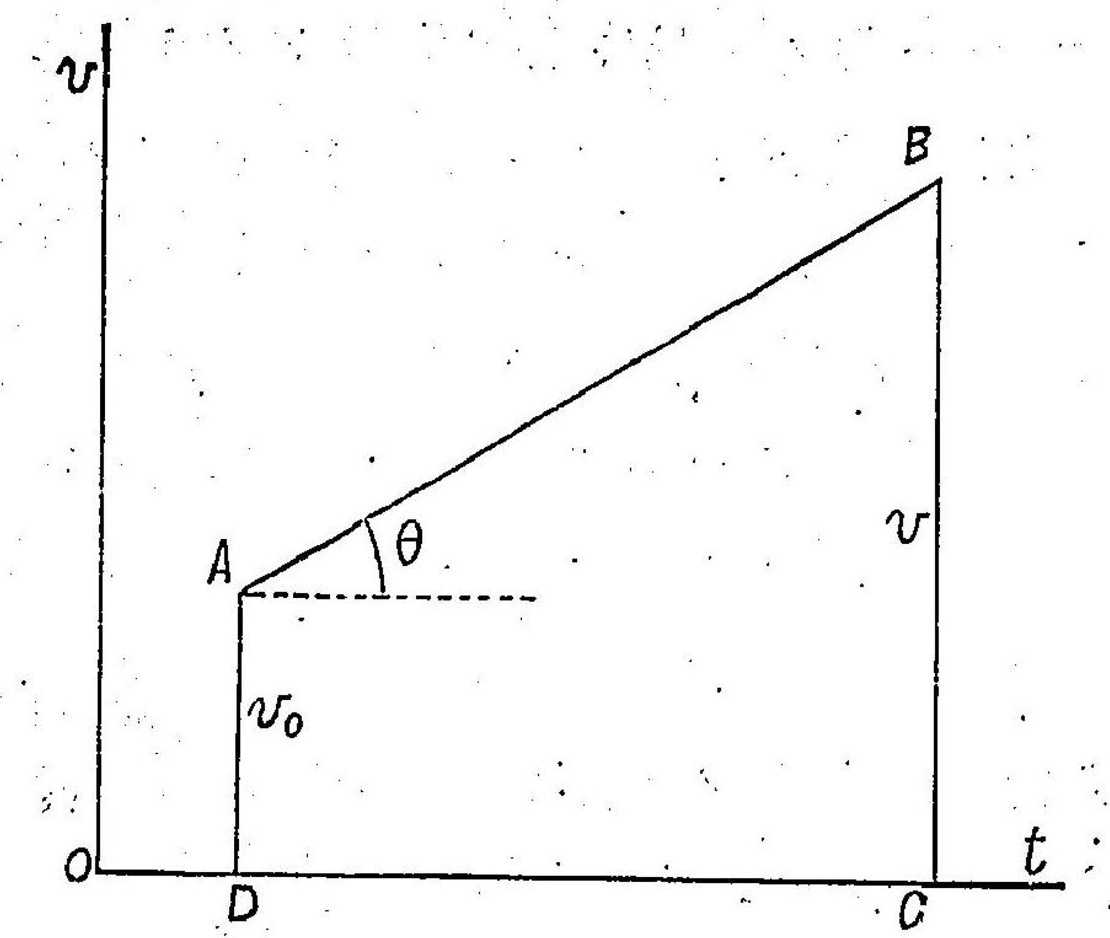
4. Speed ノ變スル割合一樣ナル運動.

Speed ノ變スル割合ヲ a ft, per sec. per sec. トシ初ノ speed ヲ v_0 ft. per sec., 終リノ speed ヲ v ft. per sec. トスレバ

$$a = \frac{v - v_0}{t} \text{ ft. per sec. per sec.}$$

ナルヲ以テ

$$v = v_0 \overset{+at}{\cancel{=}} \text{ft. per sec.} \qquad \text{(1)}$$



此塲合ニ speed ノ curve ハ直線 AB トナルベシ, AB ガ t 軸トナセル角ヲ θ トスレバ

$$\tan\theta = a$$

道程 s ハ梯形 ABCD ノ面積ニテ表ハサル,故ニ

$$s = v_0t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad \text{(2)}$$

(1) ト (2) トヨリ

$$v^2=v_0^2+2as \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

若シモ $v_0=0$ ナル場合ニハ (1), (2), (3) ハ夫々

$$\left.\begin{aligned} v &= at \\ s &= \tfrac{1}{2}at^2 \\ v^2 &= 2as \end{aligned}\right\}$$

5. Displacement.

動點 P ガ或位置 P_1 ヨリ他ノ位置 P_2 ニ來レリ,然ル時 P ハ P_1 ヨリ P_2 ノ方向ヘ直線 P_1P_2 ノ長サニヨリテ表ハサレタル大サノ Displacement ヲ受ケタリト云フ.

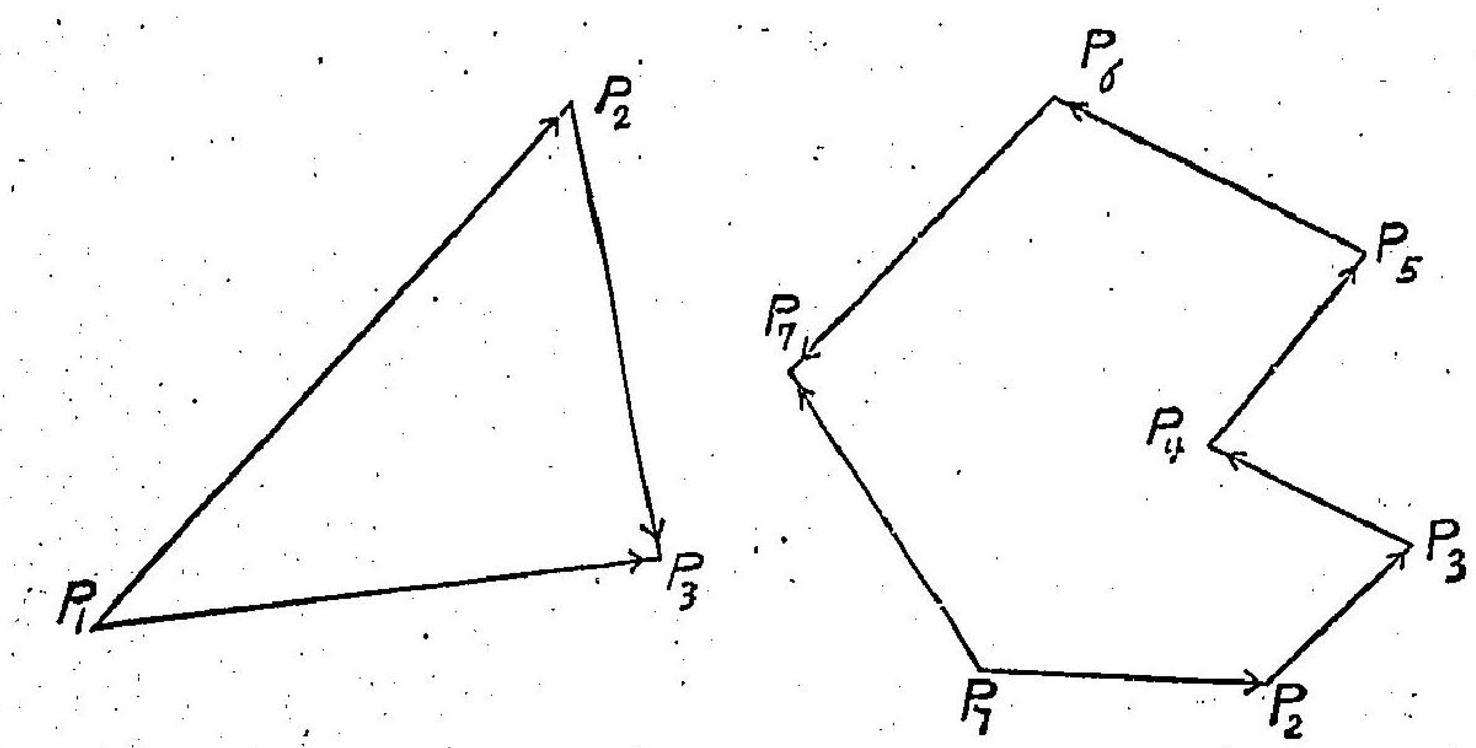
Displacement ハ初ノ位置ト終ノ位置トノミニ付テ考ヘラレタル位置ノ變更ヲ表ハスモノニシテ,P ガ經過セル道ニ關係セズ, displacement ハ大サ並ニ方向ヲ有スル量ナリ,此クノ如キ量ハ直線ニ矢ヲ附シテ表ハサレ得ルモノナリ,其直線ノ長サハ其量ノ大サヲ表ハシ,矢ハ其量ノ方向ヲ示スモノナリ

6. Displacements ノ組合.

I. 或動點ガ數多ノ displacements ヲ連續的ニ受ケタル場合.

動點 P ガ P_1P_2 ノ displacement ヲ受ケ,然ル後 P_2P_3 ノ displacement ヲ受ケタリトセバ, P ハ此間ニ結局 P_1P_3 ノ displacement ヲ受ケタルモノナリ,即 P_1P_3 ハ displacements P_1P_2 ト P_2P_3 トノ Resultant ヲ表ハス,同樣ニシテ動點 P ガ displacements P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4,......$P_{n-1}P_n$ ヲ順次ニ受ケタル時,

P ハ結局 displacement P_1P_n ヲ受ケタルモノナリ, P_1P_n ハ P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4,......$P_{n-1}P_n$ ノ Resultant ナリ.



Resultant ノ大サ及ヒ方向ハ動點ノ受ケタル所ノ displacement ノ順序ニ關係セス.

II. 動點カ同時ニ數多ノ displacements ヲ受ケタル場合.

A, B, C 等ヲ與ヘラレタル displacements トス,或點カ是等ノ displacements ヲ同時ニ受ケタル場合ニ於ケル Resultant ハ,是等ノ displacements ヲ連續的ニ受ケタル場合ノ Resultant ト,大サ,方向トモニ同一ナルコトヲ示サントス.

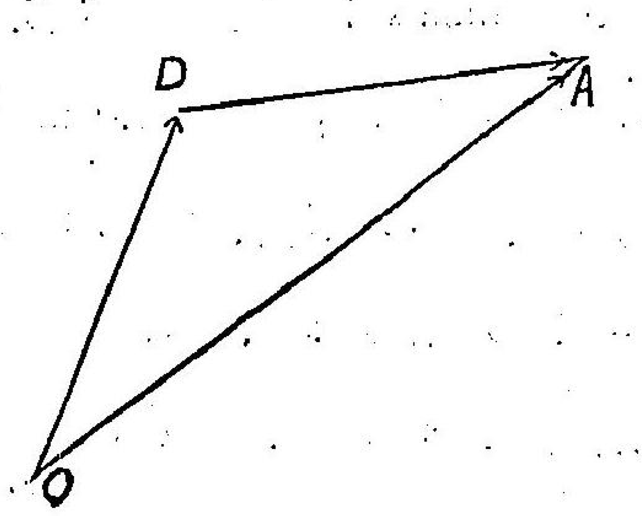
A ヲ $\frac{A}{n}$ ナル大サノ n 個ノ連續セル displacements ヨリ成ルモノト見ルコトヲ得. B ヲ $\frac{B}{n}$ ナル大サノ n 個ノ連續セル displacements ヨリ成ルモノト見ルコトヲ得, C 其他ニ付テモ同樣ニ考フルコトヲ得.

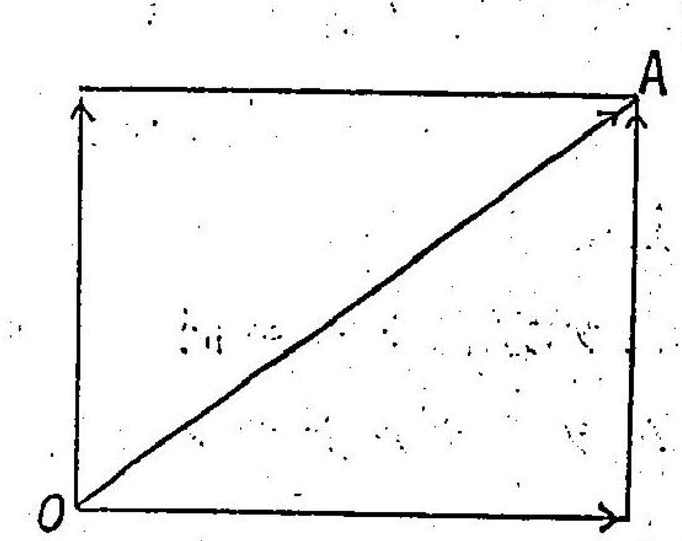
動點カ A, B, C 等ヲ連續的ニ受ケタル時ノ resultant ト, $\frac{A}{n},\frac{B}{n},\frac{C}{n},\ldots\ldots,\frac{A}{n},\frac{B}{n},\frac{C}{n},\ldots\ldots$ ノ如キ順序ニ $\frac{A}{n},\frac{B}{n},\frac{C}{n},\ldots\ldots$

等ヲ夫々 n 回宛受ケタル時ノ resultant トハ全ク同一ナリ, n カ極メテ大トナリシ極限ニ於テ $\frac{A}{n}, \frac{B}{n}, \frac{C}{n}, \ldots\ldots$, $\frac{A}{n}, \frac{B}{n}, \frac{C}{n} \ldots\ldots$ ヲ連續的ニ受クルコトハ, A, B, C, ……等ヲ同時ニ受クルコトニ同シ故ニ A, B, C, 等ヲ同時ニ受ケタル時ノ resultant ト, A, B, C 等ヲ連續的ノ受ケタル時ノ resultant トハ大サ幷ニ方向トモ同一ナリ.

7. Displacement ノ分解.

Displacement OA ヲ任意ノ方向ノ二個ノ displacements ニ分ツコトヲ得, O ヨリ指定サレタル方向ヘ直線 OD, DA ヲ引キテ三角形 ODA ヲ作ルベシ然ル時 OD, DA ハ指定サレタル方向ニ於ケル二個ノ components ナリ, 通常ハ互ニ直角ヲナセル components ニ分ツヲ便トナス場合多シ.

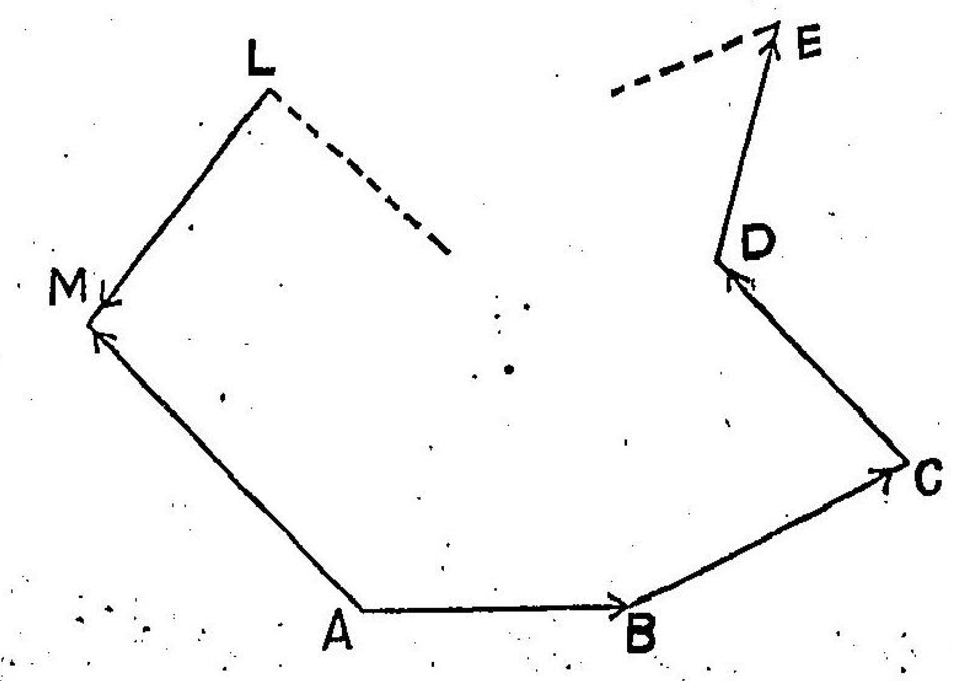




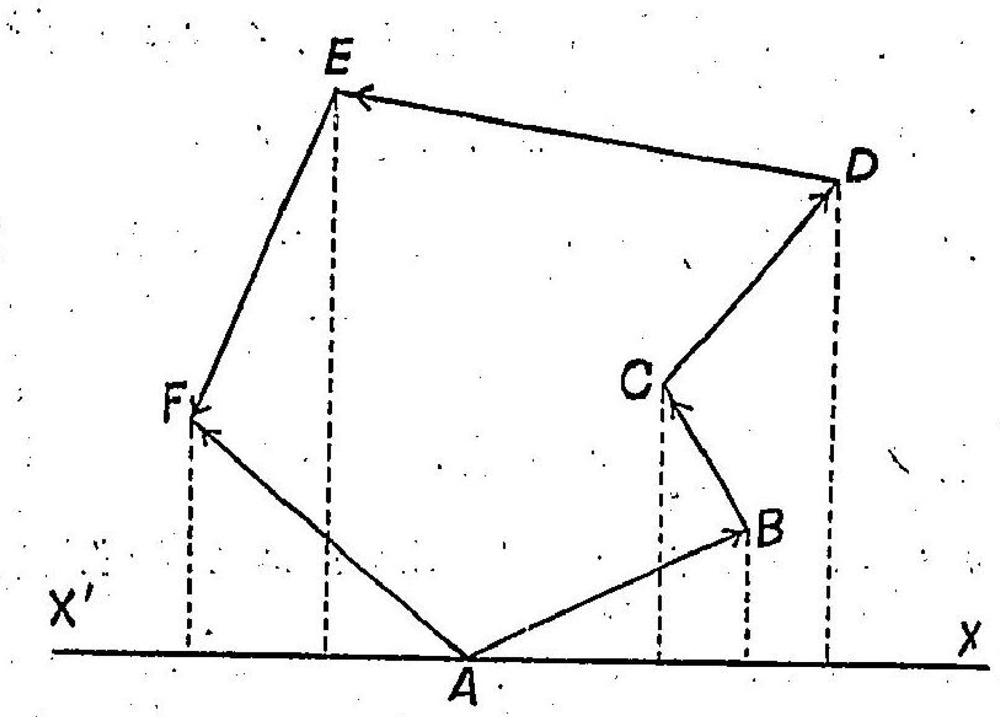
8. Vectors.

大サ幷ニ方向ヲ有スル量ヲ Vector 量ト云フ, 之ヲ直線ニ矢ヲ附シテ圖ニ示スコトヲ得, 其直線ノ長サハ其量ノ大サヲ表ハシ矢ハ其量ノ方向ヲ示スモノナリ.

同種類ノ數多ノ vectors アリ, 是等ノ vectors カ夫夫多角形 ABC……LM ノ邊ニヨリテ表ハサル然ル時邊 AM ニヨリテ表ハサルヽ vector ヲ, 與ヘラレタル vectors ノ vector sum ト云フ, vector sum ノ大サ及ビ方向ハ與ヘラレ



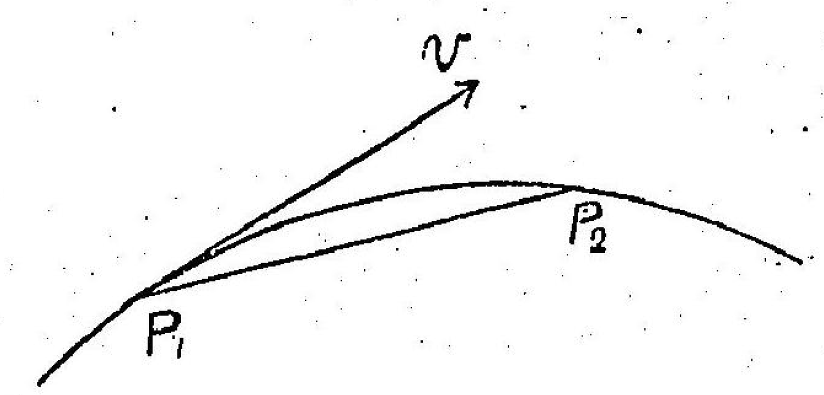
タル vectors ノ加ヘラルヽ順序ニ關セズ同一ナリ, 既ニ知レル如ク數多ノ displacements ノ resultant ハ其 vector sum ナリ.



數多ノ vectors ノ任意ニ撰ベル同一方向ニ於ケル components ノ代數和ハ, Resultant ノ方向ニ於ケル component ト大サ方向トモ同一ナリ.

9. Velocity.

單位時間ニ幾何ノ displacement ヲナスカノ割合ヲ Velocity ト云フ,或時ニ P_1 ニアリシ動點ガ t 秒ノ後 P_2 ニ來リタリトス,P_1 ト P_2 トヲ極メテ接近セル二點トス,從



テ t モ極テ小ナリ然ル時道 P_1P_2 ノ長サト直線 P_1P_2 ノ長サトハ等シキモノト見ルコトヲ得ベシ,故ニ P_2 ニ於ケル velocity ノ大サハ其點ニ於ケル speed ニ等シク,其方向ハ其點ニ於テ道ニ切線ナリ.

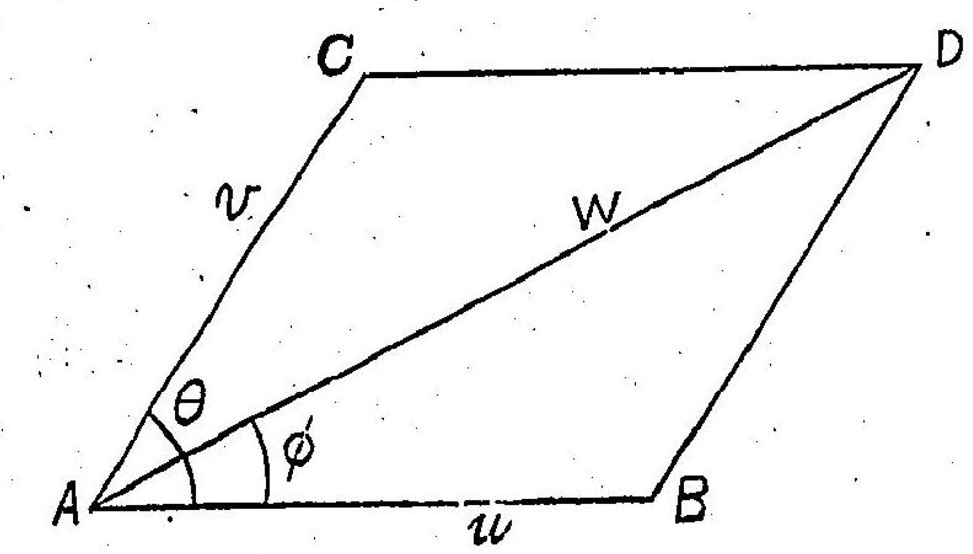
Velocity ハ大サト方向トヲ有ス,故ニ vector 量ナリ.

10. Velocities ノ組合及ヒ Velocity ノ分解.

Velocity ノ組合及分解ハ displacement ノ場合ト同樣ナリ.

I. 二個ノ velocities ノ組合.

AB, AC ヲ與ヘラレタル velocities トス,平行四邊形 ABCD ノ對角線 AD ハ resultant ヲ表ハスモノナリ,此平行四邊形ヲ velocity ノ平行四邊形ト云フ, AB, AC ノ大サヲ夫々 u, v トシ,其間ノ角ヲ θ トス, AD ノ大サヲ w トシ, AB ト AD トノ間ノ角ヲ ϕ トス.



$$w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta$$

$$\therefore \quad w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta}$$

又

sin

$$\tan\phi = \frac{v\,\cancel{\cos}\,\theta}{u + v\cos\theta}$$

AC ト BD トハ相等シ,故ニ三角形 ABD ノ二邊 AB, BD ガ夫々二個ノ velocities ヲ表ハス時,第三邊 AD ハ此二個ノ velocities ノ resultant ヲ表ハスベシ,此三角形ヲ velocity ノ三角形ト云フ.

II. Velocity ノ分解.

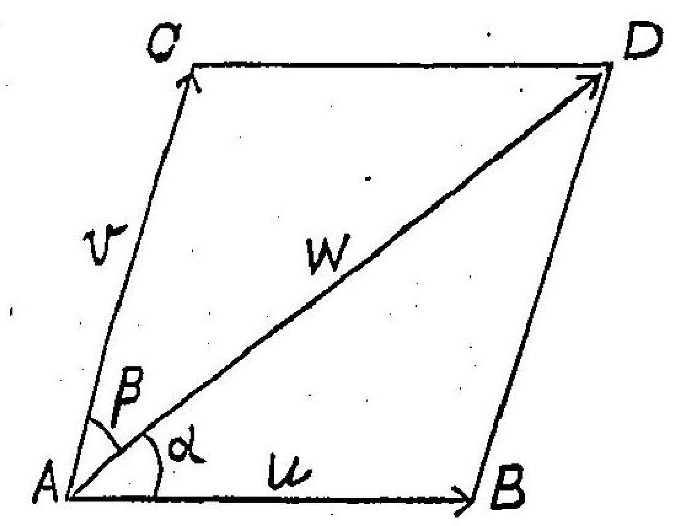
AD ヲ與ヘラレタル velocity トス,之ヲ任意ノ方向 AB ト他ノ方向 AC トニ於ケル components AB ト AC トニ分ツコトヲ得.

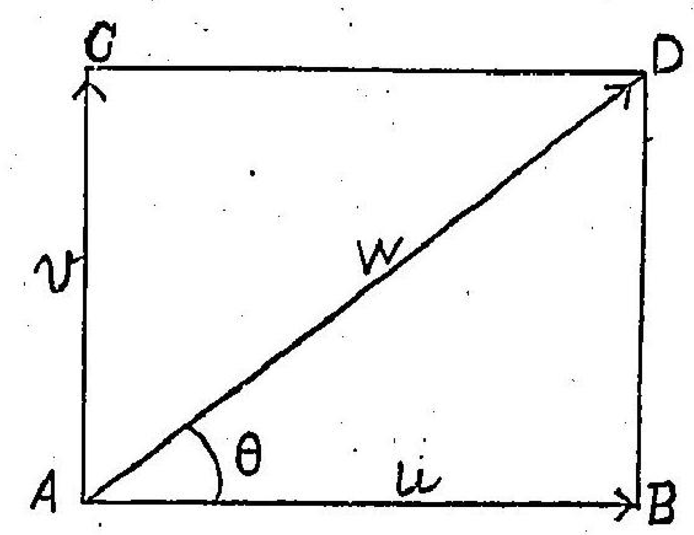
AB ハ AD ト角 α ヲナス如クニ, AC ハ AD ト角 β ヲナス如クニ分解スル場合ニハ, AB, AC, AD ノ大サヲ夫々 u, v, w トスレバ

$$\frac{u}{\sin\beta} = \frac{v}{\sin\alpha} = \frac{w}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \quad u = \frac{w \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$v = \frac{w \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$





AB ト AC ト互ニ直角ヲナス如クニ分ツテ便トナス塲合多シ,此塲合ニハ AB ト AD トノ間ノ角ヲ θ トスレバ

$$u = w \cos \theta$$

$$v = w \sin \theta$$

III. 數多ノ velocities ノ組合.

或點ガ多角形ノ邊 AB, BC, CD, ...KL ニヨリテ表ハサレタル數多ノ velocities ヲ同時ニ有スル時,其點ノ resultant velocity ハ AL ニヨリ大サ并ニ方向ガ表ハサル,此多角形ヲ velocity ノ多角形ト云フ, A ト L トー致スレバ resultant ハ零即チ其點ハ靜止セリ.

數多ノ velocities ノ resultant ヲ計算ニヨリテ定ムルニハ次ノ例ニ從フベシ.

$u_1, u_2, u_3,$ 及ビ u_4 ヲ與ヘラレタル velocities トス,是等ノ resultant ヲ V トス, u_1, u_2, u_3 及ビ u_4 ガ x 軸トナセル角ヲ夫々 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$ 及 α_4 トス, y 軸トナセル角ヲ夫々 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 及ビ β_4 トス, V カ x 及ビ y 軸トナセル角ヲ夫々 α_r, β_r トス然ル時 $u_1, u_2, u_3,$ 及ビ u_4 ノ x 及ビ y component ハ夫々

$$\left.\begin{matrix} u_1 \cos \alpha_1 \\ u_1 \cos \beta_1 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} u_2 \cos \alpha_2 \\ u_2 \cos \beta_2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} u_3 \cos \alpha_3 \\ u_3 \cos \beta_3 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} u_4 \cos \alpha_4 \\ u_4 \cos \beta_4 \end{matrix}\right\}$$

又 V ノ x 及ビ y component ハ

$$\mathrm{V} \cos \alpha_r, \qquad \mathrm{V} \cos \beta_r.$$

而シテ次ノ關係アリ,

$$\mathrm{V} \cos \alpha_r = u_1 \cos \alpha_1 + u_2 \cos \alpha_2 + u_3 \cos \alpha_3 + u_4 \cos \alpha_4$$

$$= \Sigma u \cos \alpha$$

$$\mathrm{V} \cos \beta_r = u_1 \cos \beta_1 + u_2 \cos \beta_2 + u_3 \cos \beta_3 + u_4 \cos \beta_4$$

$$= \Sigma u \cos \beta$$

$$\therefore \quad \mathrm{V}^2 = (\Sigma u \cos \alpha)^2 + (\Sigma u \cos \beta)^2$$

$$\therefore \quad \mathrm{V} = \sqrt{(\Sigma u \cos \alpha)^2 + (\Sigma u \cos \beta)^2}$$

又 $$\cos \alpha_r = \frac{\Sigma u \cos \alpha}{\mathrm{V}}$$

$$\cos \beta_r = \frac{\Sigma u \cos \beta}{\mathrm{V}}$$

IV. Relative Velocity.

一直線上ヲ方向大サトモ同一ナル velocity ヲ以テ動ク點 A 及ビ B アリトス,一點ニ對スル他點ノ位置ハ大サニ於テモ方向ニ於テモ一定不變ナリ,一點ヨリ他點ノ上ノミニ着目スレバ,恰モ靜止セルガ如ク見ユルベシ,即チ A ニ對スル B ノ relative velocity モ, B ニ對スル

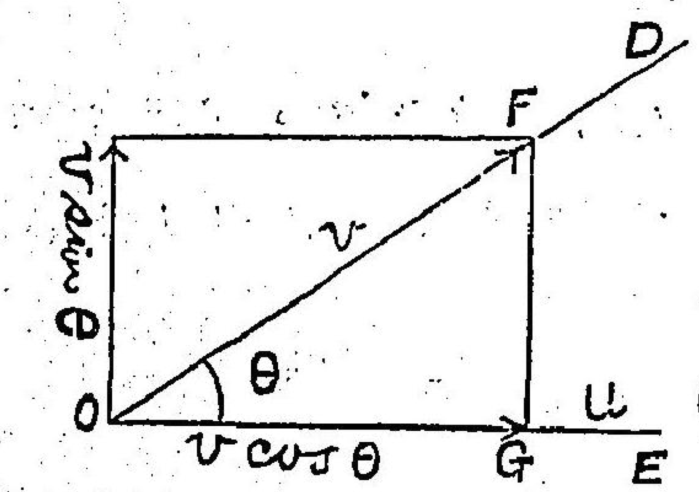
Aノ relative velocity モ零ナリ.

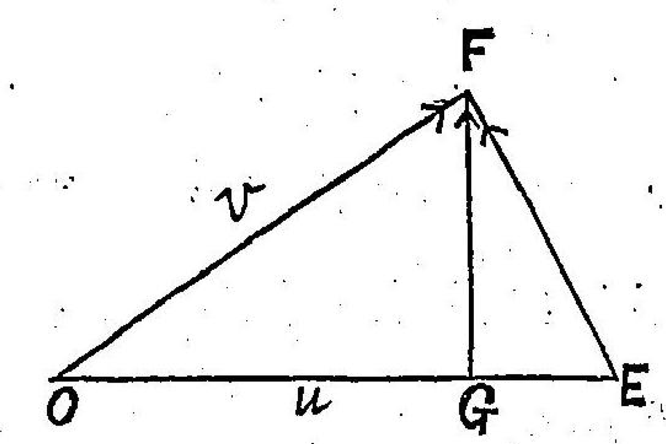
次ニ一直線上ヲ動ク點A及ヒBアリ, Aハ 20 ft. per second ノ speed ヲ有シ, Bハ同一ノ方向ヘ 25 ft. per second ノ speed ヲ有スルモノトセバ, AトBトノ距離ハ 5 ft per second ノ割合ヲ以テ變ジツツアルモノナリ,即チ一點ノ他點ニ對スル relative velocity ノ大サハ 5 ft. per sec. ナリ,而シテ其方向ハAニ對スルBノ relative velocity ハ是等ノ點ノ運動方向ト同一ニシテ,Bニ對スルAノ relative velocity ハ之ニ反對ナル方向ナリ.

上例ニ於テAトBトノ velocity ノ方向相反セル塲合ニハ,二點間ノ距離ハ 45 ft. per sec. ノ割合ヲ以テ變ジツヽアルモノナリ,即チ此塲合ニハ一點ノ他點ニ對スル relative voelcity ノ大サハ 45 ft. per sec. ナリ,而シテAノ velocity ノ方向ヲ正トスレバ, Aニ對スルBノ relative velocity ハ負ノ方向ニ向ヒ,又Bニ對スルAノ relative velocity ハ正ノ方向ニ向フ.

上記ノ諸例ニ於テAニ對スルBノ relative velocity ハBノ velocity ニAノ velocity ト大サ等シク方向反對ナル velocity ヲ加フレバ得ラルヽコトヲ知ル,又Bニ對スルAノ relative velocity ハ, Aノ velocity ニBノ velocity ト大サ等シク方向反對ナル velocity ヲ加フレバ得ラルヽコトヲ知ル.

次ニAハ直線OC上ヲ velocity u ヲ以テ動キ, Bハ直線OD上ヲ velocity v ヲ以テ動ク塲合ヲ考フ.





v ヲ OC ノ方向ト之ニ直角ナル方向トニ分解スレバ, OC ノ方向ノ component ハ $v\cos\theta$ ニシテ,之ニ直角ナル component ハ $v\sin\theta$ ナリ,但シ θ ハ u ト v トノ間ノ角ナリ.

Aニ對スルBノ relative velocity ノ OC ノ方向ノ component ハ

$$EG = v\cos\theta - u$$

ナリ, Aハ OC ニ直角ナル方向ニ component velocity ヲ有セズ,故ニAニ對スルBノ relative velocity ノ OC ニ直角ヲナセル component ハ

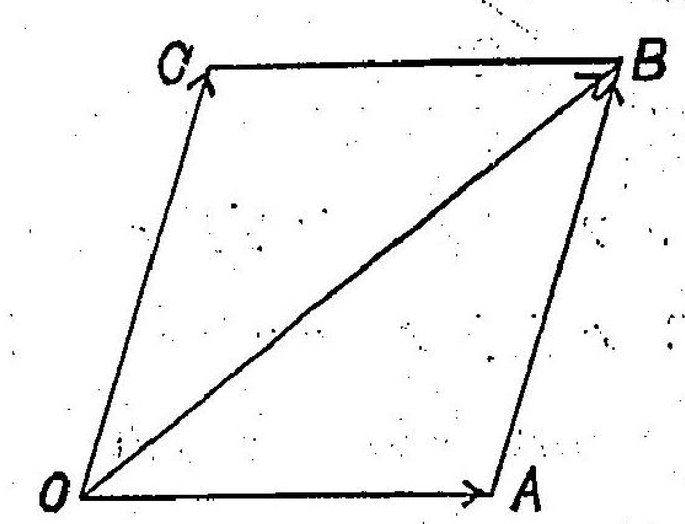
$$GF = v\sin\theta$$

ナリ,故ニAニ對スルBノ relative velocity ハ EG ト GF トノ resultant EF ニテ表ハサル, EF ハBノ velocity ニ, Aノ velocity ト大サ等シク方向反對ナル velocity ヲ加ヘテ得ベキ resultant ニ等シ.

一般ニAニ對スルBノ relative velocity ハ, Bノ velocity ニ, Aノ velecity ト大サ等シク方向反對ナル velocity ヲ加ヘテ得ラル,又Aニ對スルBノ relative velocity ト, Bニ對スルAノ relative velocity トハ大サ等シク方向反對ナリ.

12. Velocity ノ變化.

或時ニ動點ガ velocity OA ヲ以テ動キツヽアリシモノガ,其次ノ或時ニ於テ其 velocity OB トナリタリトス,平行四邊形 OABC ヲ作ル,然ル時 OB ハ OA ト OC トノ resultant ナリ.



OB ヲ得ル爲ニ OA ニ加フベキ velocity OC 即チ AB ヲ此時間ニ於ケル動點ノ velocity ノ變化ト云フ.

13. Acceleration.

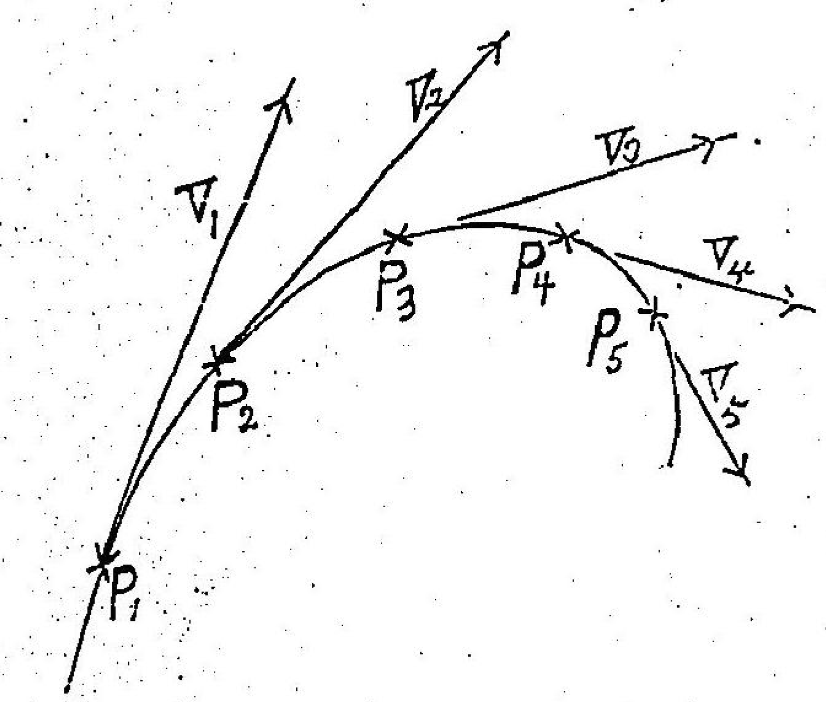
Velocity ノ時ニ對シテ變ズル塲合ヲ Acceleration ト云フ, acceleration ハ vector 量ナリ.

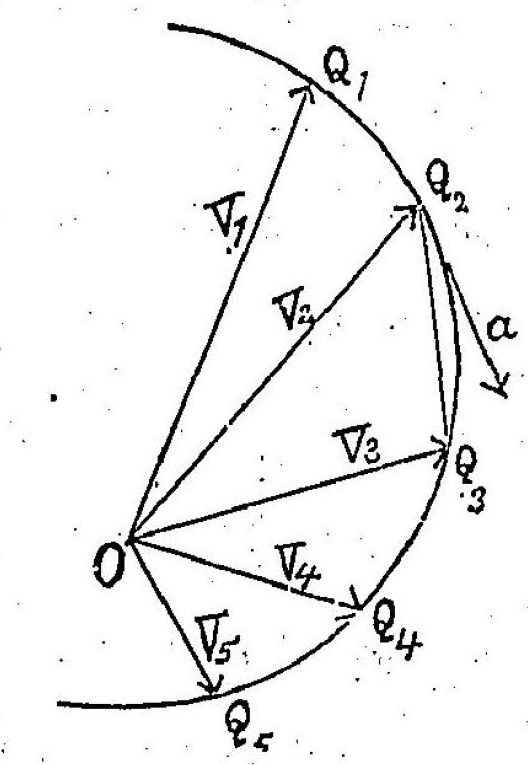
14. Hodograph.

動點ガ道ノ上ノ任意ノ點 P ヲ通過スルト同時ニ,其點ニ於ケル velocity ヲ表ハス vector OQ ヲ任意ノ點 O ヨリ引クモノトス,然ル時其 vector ヲ表ハス直線ノ端 Q ハ或線ヲ畫クベシ此線ヲ Hodograph ト云フ.

P_1, P_2, P_3 等ハ動點ノ道ノ上ノ點ナリ,是等ノ點ニ相當セル hodograph 上ノ點ハ夫々 Q_1, Q_2, Q_3 等ナリ,即チ P_1 ニ於ケル velocity ハ OQ_1, P_2 ニ於ケル velocity ハ OQ_2, P_3 ニ於ケル velocity ハ OQ_3 ナリ.

P_3 ハ P_2 ニ極メテ近キ點ナリトスレバ,從テ Q_2 ト Q_3 トモ亦極メテ近キ點ナリ,動點ガ P_2 ヨリ P_3 ニ至ル時間ヲ





t 秒トス此時間ハ hodograph 上ノ點 Q ガ Q_2 ヨリ Q_3 ニ至ル時間ニ同ジ, $\overline{Q_2Q_3}$ ハ P 點ニ付テハ t 秒時間ニ於ケル velocity ノ變化ナリ, Q 點ニ付テハ同時間中ニ於ケル displacement ナリ, P_2 ト P_3, 從テ Q_2 ト Q_3 トガ極メテ近キ二點トスレバ t モ亦極メテ小ナル時間ナリ此塲合ニ於テ

$$\frac{\overline{Q_2Q_3}}{t}$$

ハ hodograph 上ヲ動ク點 Q ニ付テハ Q_2 ナル位置ニ於ケル velocity ノ大サ即チ speed ヲ表ハス,動點 P ニ付テハ P_2 ナル位置ニ於ケル velocity ノ變スル割合ノ大サ,即チ acceleration ノ大サヲ與フルモノナリ,又 P_2 ニ於ケル acceleration ノ方向ハ t ガ微小トナレル極限ニ於ケル $\overline{Q_2Q_3}$ ノ方向,即チ Q_2 ニ於テ hodograph ニ切線ノ方向,尚換言スレバ Q_2 ニ於ケル Q ノ velocity ノ方向ナリ.

故ニ動點 P ノ hodograph ヲ畫ケバ,其道ノ上ノ任意ノ點ニ於ケル動點ノ acceleration ノ大サ及ビ方向ハ hodograph 上ノ點 Q ノ之ニ相當セル時ニ於ケル velocity ノ大サ及

ビ方向ト全ク同一ナリ.

例. constant velocity ノ運動點ノ hodograph ハ一點ナリ.

constant accleration ヲ以テ直線上ヲ動ク點ノ hodograph ハ直線ナリ.

一樣ナル speed ヲ以テ圓運動ヲナス點ノ hodograph ハ其 speed ヲ半徑トセル圓ニシテ, hodograph 上ノ點モ一樣ナル speed ヲ以テ動ク.

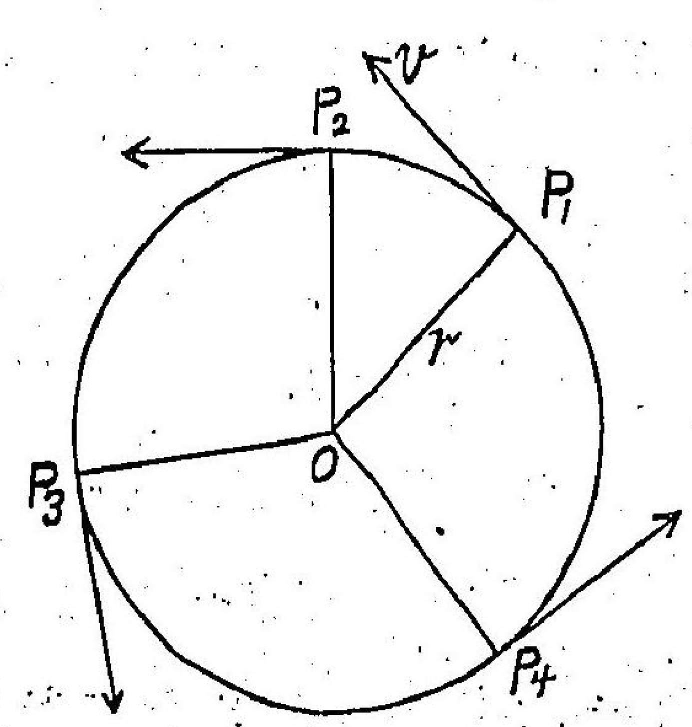
15. 一樣ナル speed ヲ以テ圓運動ヲナセル點ノ受クル acceleration.

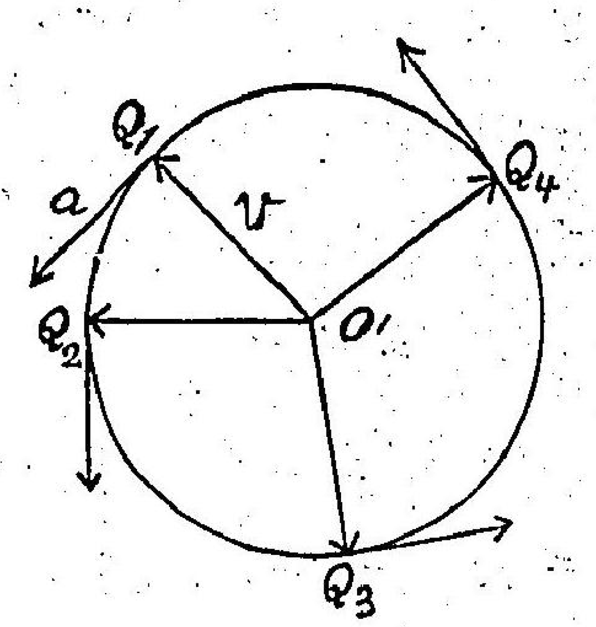
動點 P ノ speed ヲ v トス, P ノ畫ク圓ノ半徑ヲ r トス然ル時 hodograph ハ半徑 v ナル圓ニシテ hodograph 上ノ點 Q モ一樣ナル speed a ヲ以テ動クベシ a ハ即チ P 點ノ acceleration ノ大サナリ.

P ノ一周時間ハ Q ノ一周時間ニ等シ之ヲ T トス, 然ル時

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi v}{a}$$

$$\therefore \qquad a=\frac{v^2}{r}$$





而シテ其方向ハ常ニ動點ノ畫ク圓ノ中心ニ向フコトカ容易ニ證明セラル.

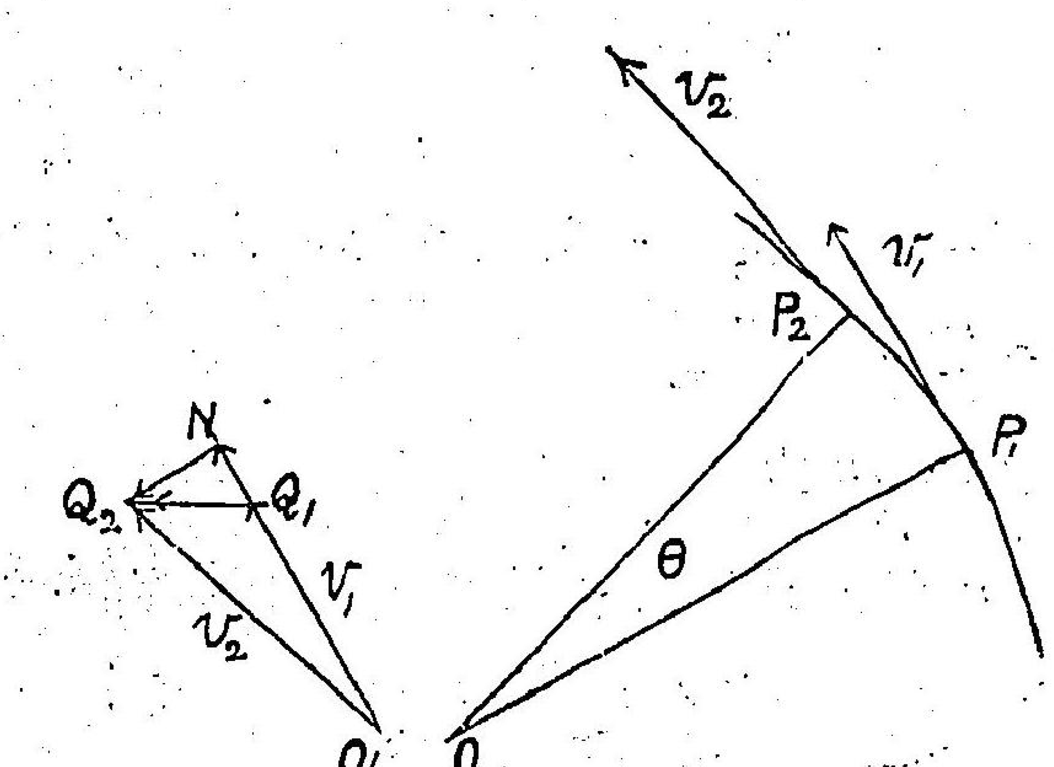
16. Acceleration ノ組合及ビ分解.

Velocity ノ場合ト全ク同樣ナリ.

17. Tangential Acceleration 及ビ Normal Acceleration.

P_1 及ビ P_2 ハ動點ノ道ノ上ノ極メテ近キ二點ニシテ, 是等二點ニ於ケル speeds ヲ夫々 v_1 及ビ v_2 トス, 又是等二點ニ於ケル normals ノ交點ヲ O トス, $O'Q_1$ 及ビ $O'Q_2$ ハ夫々 P_1 及ビ P_2 ニ於ケル velocity ヲ表ハスモノトス即チ Q_1 及ビ Q_2 ハ hodograph 上ノ點ナリ而シテ $\overline{Q_1Q_2}$ ハ P_1 ヨリ P_2 ニ至ル間ノ velecity ノ變化ヲ表ハスモノナリ.

Q_2N ハ $O'Q_1$ 又ハ其延長上ヘ引ケル垂線ナリ, 然ル時 velocity Q_1Q_2 ハ二個ノ velocities Q_1N ト NQ_2 トノ和ナリト考フルコトヲ得, Q_1N ハ P_1 ニ於ケル切線ニ平行ニシテ, NQ_2 ハ P_1 ニ於ケル normal ニ平行ナリ.



動點ガ P_1 ヨリ P_2 ニ至ル時間ヲ t トス, t ガ極メテ微小トナレル時角 P_1OP_2 ヲ θ トス, radius of curvature ヲ ρ トス,然ル時

$$\rho\theta = P_1P_2 = v_1 t$$

故ニ P_2 ニ於ケル normal acceleration ヲ a_n トスレバ

$$a_n = L_t \frac{NQ_2}{t} = L_t \frac{v_2 \sin\theta}{t}$$

$$= L_t v_2 \frac{\theta}{t} = L_t \frac{v_2 v_1}{\rho}$$

$$= \frac{v_1^2}{\rho}$$

又 P_2 ニ於ケル tangential acceleration ヲ a_t トスレバ

$$a_t = L_t \frac{Q_1N}{t} = L_t \frac{O'N - O'Q_1}{t}$$

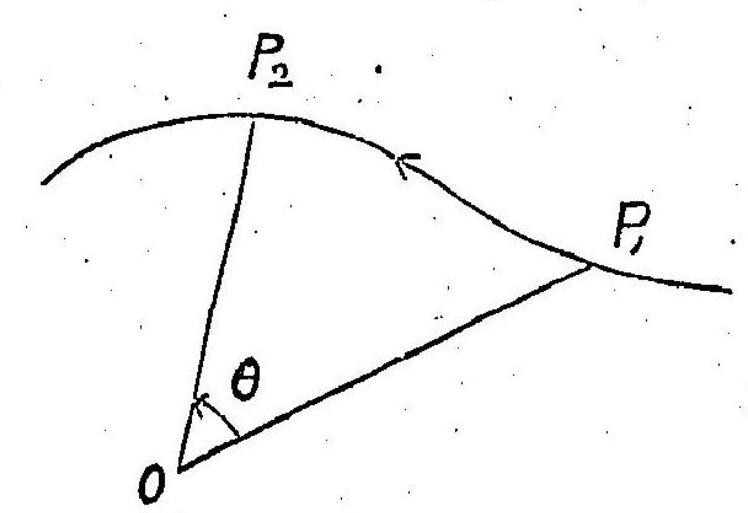
$$= L_t \frac{v_2 \cos\theta - v_1}{t}$$

$$= L_t \frac{v_2 - v_1}{t}$$

故ニ tangential acceleration ハ其點ニ於テ動點ノ speed ノ變ズル割合ニ等シ.

18. Angular Displacement.

或點 O ニ關シ或時間ニ於ケル動點 P ノ angular displacement トハ, O ヨリノ radius vector ノ時ノ初ニ於ケル位置ト終ニ於ケル位置トノ間ノ角 P_1OP_2 ノコトナリ.



19. Angular Velocity.

t 秒時間ニ於テ動點 P ノ或點 O ニ關スル angular displacement ヲ θ radians トスレバ, P ノ O ニ關スル mean angular velocity ハ次式ニテ表ハサル.

$$\omega = \frac{\theta}{t} \text{ radians per second.}$$

t ガ限リ無ク微小トナレル極限ニ於ケル上式ノ値ハ instantaneous angular velocity ヲ表ハス.

角ノ單位ハ通常 radian ナルヲ以テ angular velocity モ radians per second ヲ以テ表ハサル, P ガ O ヲ中心トシテ圓運動ヲナス如キ場合ニハ時トシテ revolutions per minute, 又ハ revolutions per second ニテ表ハサルヽコトアリ, N revolutions per minute ヲ radians per second ニテ表ハセバ

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} \text{ radians per second.}$$

ナリ.

動點 P ガ圓運動ヲナセル時, P ノ linear velocity v ト, 中心ニ關スル P ノ angular velocity ω トノ間ニ次ノ關係アリ.

圓ノ半徑ヲ r トシ, t 秒時間ノ angular displacement ヲ θ トシ, θ ニ對スル弧ノ長サヲ s トス, angular velocity 一様ナル場合ニハ

$$\omega=\frac{\theta}{t}=\frac{s}{rt}$$

$$=\frac{v}{r}$$

即チ

$$v=r\omega$$

r ガ feet ニテ表ハサレタル時,上式ヨリ得ラルヽ v ハ feet per second ニテ表ハサレタルモノナリ.

ω ガ一様ナラザル場合ニハ,上記ノ v ト ω トノ關係ハ或瞬時ニ動點ノ有スル linear velocity ト angular velocity トノ關係ヲ表ハスモノナリ:

一様ナル speed v ヲ以テ半徑 r ナル圓運動ヲナセル點ノ acceleration ヲ ω ヲ以テ示セバ

$$\frac{v^2}{r}=r\omega^2$$

20. Angular Acceleration.

Angular velocity ノ時ニ對シテ變化スル割合ヲ Angular Acceleration ト云フ,

Angular acceleration α ガ一様ナル場合ニ ω_0 ト ω トヲ夫々時ノ初ト終トニ於ケル angular velocity ノ値トシ,其時間ヲ t 秒トシ,此間ニ畫カレタル角ヲ θ トスレバ

$$\omega=\omega_0+\alpha t$$

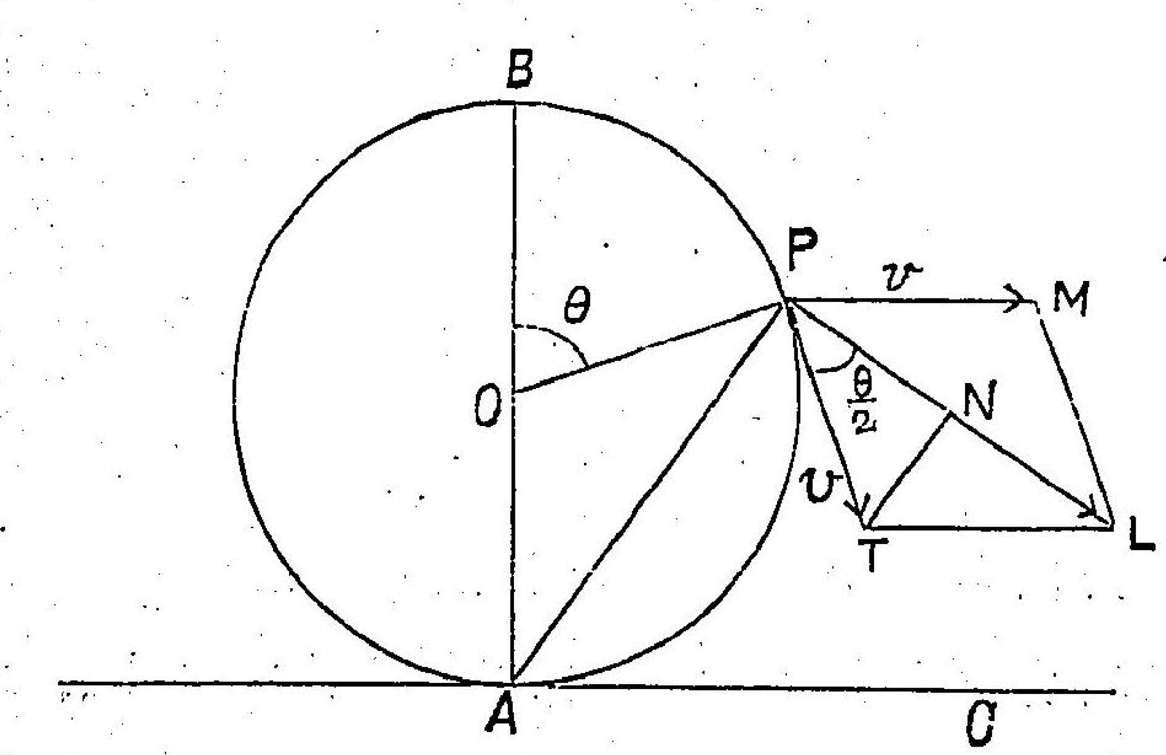
$$\theta=\omega_0 t+\tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2=\omega_0^2+2\alpha\theta$$

21. 平面上ヲ輾轉スル圓板ノ周上ノ點ノ速度.

平面 AC 上ヲ輾轉スル圓板 APB ノ周上ノ任意ノ點 P ノ速度ヲ見出サントス,圓板ノ中心 O ハ一直線上ヲ動キ其 velocity v ナリトス,圓板ノ半徑ヲ r トス, A ハ任意ノ時ニ於ケル圓周ト平面トノ接觸點ナリ.

周上ノ任意ノ點 P ハ中心 O ニ對シテ圓ノ周ヲ畫ク可ク其間ニ O ハ圓周ノ長サニ等シキ距離ヲ進ムベシ,故ニ周上ノ任意ノ點ガ O ニ對シテ有スル relative velocity ハ大サ v ニシテ方向ハ其點ニテ圓ニ切線ナリ,故ニ P ノ



absolute velocity ハ O ノ velocity ニ等シキ velocity PM $=v$ ト O ニ relative ナル P 點ノ velocity PT $=v$ トノ和 PL ニヨリテ表ハサル, A ニ於テハ

$$v-v=0$$

故ニ A ハ此瞬時ニ velocity ヲ有セズ, B ニ於テハ

$$v+v=2v$$

ナリ.

角 POB 即チ角 MPT ヲ θ トスレバ

$$\mathrm{PL} = 2\mathrm{PN} = 2v\cos\frac{\theta}{2}$$

又

$$角\ \mathrm{LPT} = 角\ \mathrm{OPA} = \frac{\theta}{2}$$

故ニ

$$角\ \mathrm{APL} = 90^\circ$$

故ニ此瞬時ニ於テ P ハ A ヲ中心トシ velocity PL ヲ以テ廻轉セントスルモノナリ,其 angular velocity ハ

$$\frac{2v\cos\frac{\theta}{2}}{\mathrm{AP}} = \frac{2v\cos\frac{\theta}{2}}{2r\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{v}{r}$$

$$= \omega$$

22. 鉛直ニ抛ケラレタル物體ノ運動.

地球引力ノ作用ニヨリ自由ニ落下スル物體,又ハ鉛直ニ上方ヘ抛ケラレタル物體ハ恒ニ地球ノ中心ヘ向ヘル acceleration アリ,此 acceleration ハ通常 g ヲ以テ表ハサル,其大サハ

$$g = 32.16 \text{ feet per second per second.}$$

ナリ.

時間ヲ t トシ,初速ヲ v_0 トシ終速ヲ v トシ,道程ヲ s

トスレバ

$$v = v_0 + gt$$

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gs$$

鉛直ニ抛ケ上ゲラレタル場合ニハ g ヲ負トスベシ,

初速 $v_0 = 0$ ナル場合ニハ

$$v = gt$$

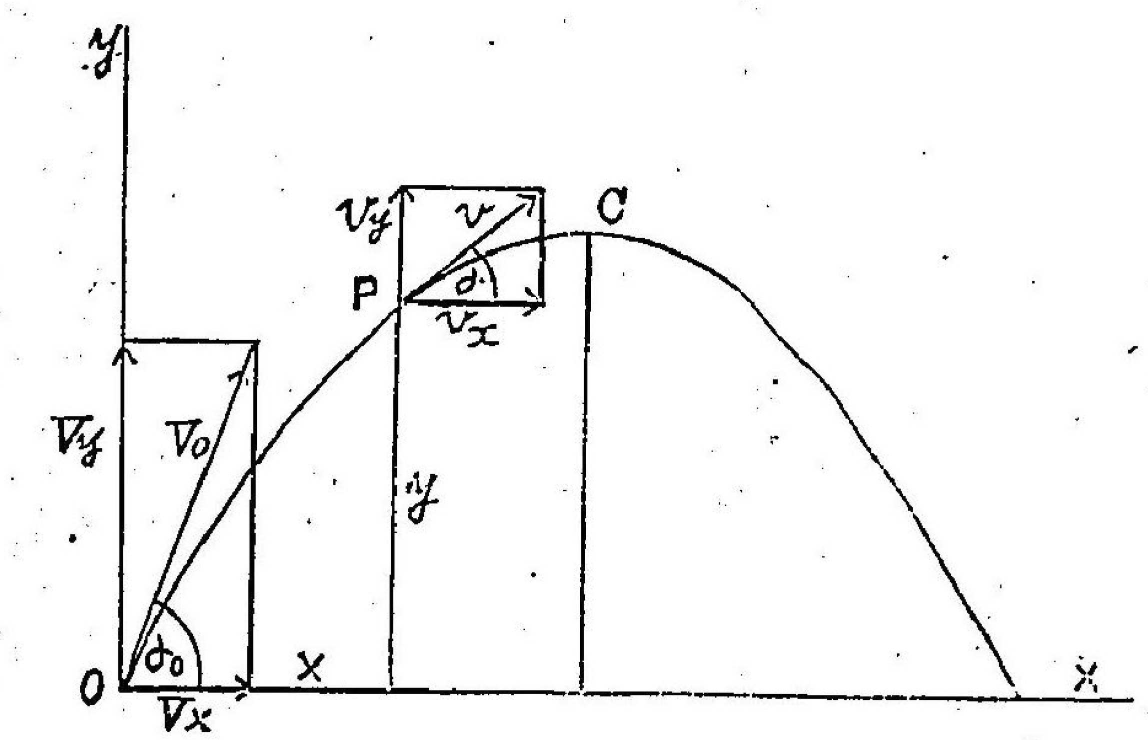
$$s = \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 = 2gs$$

23. 抛物體ノ運動.

空氣ノ抵抗無キモノトスレバ抛物體ノ受クル所ノ acceleration ハ一定ナリト見ルコトヲ得,此場合抛物體ノ畫ク道ハ parabola ナリ.

V_0 ヲ初ノ velocity トス V_0 カ水平方向トナス角ヲ α_0 トス, x 軸ヲ水平ニ採リ, y 軸ヲ鉛直ニ採ル, V_0 ノ x 及ビ



y component ヲ夫々 V_x, 及ビ V_y トスレバ

$$V_x = V_0\cos\alpha_0$$

$$V_y = V_0 \sin \alpha_0$$

P(x, y) ヲ道ノ上ノ任意ノ點トス,此點ニ於ケル速度ヲ v トシ, 其 x 及ビ y component ヲ夫々 v_x 及ビ v_y トスレバ

$$v_x = v \cos \alpha = V_0 \cos \alpha_0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$v_y = v \sin \alpha = V_0 \sin \alpha_0 - gt \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

但 α ハ v ガ水平方向ニ對シテナセル角ナリ, t ハ物體ガ O ヨリ P ニ至ル時間ナリ.

又

$$x = v_x t = V_0 t \cos \alpha_0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$y = v_y t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$= V_0 \sin \alpha_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

此兩式ヨリ

$$y = x \tan \alpha_0 - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha_0} \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

(5) ハ物體ノ道ヲ表ハセルモノニシテ Parabola ナリ,

(2) ヨリ

$$t = \frac{V_0 \sin \alpha_0 - v_y}{g}$$

最高點 C ニ於テハ $v_y = 0$ ナルヲ以テ O ヨリ C ニ至ル時間ヲ t_c トスレバ

$$t_c = \frac{V_0 \sin \alpha_0}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

此値ヲ(3)ト(4)トニ用ヒテ

$$x_c = \frac{V_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{g}$$

$$x_c = \frac{V_0 \sin 2\alpha_0}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$y_c = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}$$

$$= \frac{x_c^2 g}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha_0} \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

任意ノ點 P ニ於ケル velocity v ノ方向 α ヲ求ムルニハ (1) ト (2) トヨリ

$$\tan \alpha = \tan \alpha_0 - \frac{gt}{V_0 \cos \alpha_0}$$

然ルニ $x = V_0 t \cos \alpha_0$ ナルヲ以テ

$$\tan \alpha = \tan \alpha_0 - \frac{g t^2}{x}$$

又ハ

$$\tan \alpha = \tan \alpha_0 - \frac{g x}{V_0^2 \cos^2 \alpha_0}$$

次ニ任意ノ方向ニ於ケル displacement R, 幷ニ之ニ對スル時間ヲ見出サントス, OP ガ x 軸トナセル角ヲ θ トスレバ

$$y = x \tan \theta$$

然ルニ

$$y = \tan \alpha_0 - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha_0}$$

ナルヲ以テ

$$x = \frac{2 V_0^2 \cos \alpha_0 \sin(\alpha_0 - \theta)}{g \cos \theta}$$

$$x = \frac{2V_o^2\,[\sin(2\alpha_o - \theta) - \sin\theta]}{g\cos\theta}$$

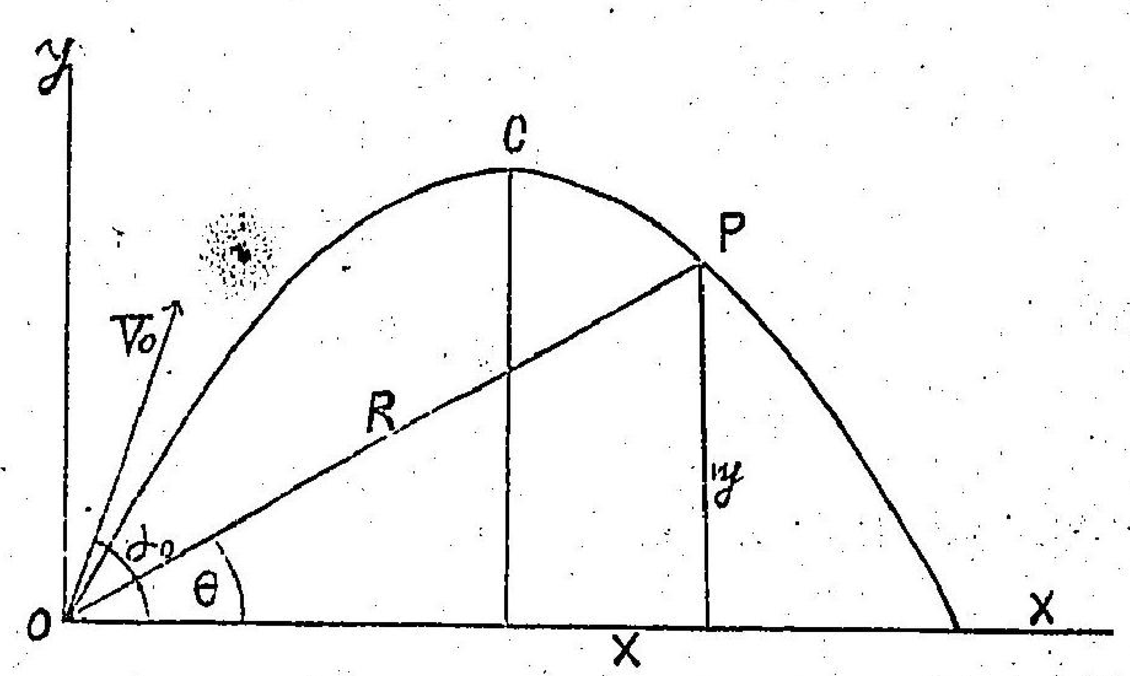
$R = \dfrac{x}{\cos\theta}$ ナルヲ以テ

$$R = \frac{2V_o^2\cos\alpha_o\sin(\alpha_o - \theta)}{g\cos^2\theta}$$

$$= \frac{V_o^2\,[\sin(2\alpha_o - \theta) - \sin\theta]}{g\cos^2\theta}$$

此 displacement ノ時間ハ

$$t = \frac{x}{V_o\cos\alpha_o} = \frac{2V_o\sin(\alpha_o - \theta)}{g\cos\theta}$$



R ハ $\sin(2\alpha_o - \theta)$ ガ最大ナルトキ,即チ $2\alpha_o - \theta = 90°$ ナル時,即チ $\alpha = \frac{1}{2}(90° + \theta)$ ナル塲合ニ最大ナリ,故ニ到達シ得ベキ最大ナル displacement ニ對スル角 α_o ハ

$$90° - \alpha° = \tfrac{1}{2}(90° - \theta)$$

ナル關係ヲ滿足セザル可ラズ,換言スレバ V_o ノ方向ハ鉛直線トRトノ間ノ角ヲ二等分スルモノナラザル可ラズ, $\theta = 0$ ナル塲合,即水平ノ方向ニ於テ最モ大ナル displacement ヲ與フル爲ノ投射角ハ水平方向ニ對シ 45°

ノ角ヲナス樣ニ撰バザル可ラズ.

次ニ或定マレル點ヲ打ツ爲ノ α_o ノ値ヲ見出サントス,

$$y = x\tan\alpha_o - \frac{gx^2}{2V_o^2\cos^2\alpha_o}$$

即チ
$$y = x\tan\alpha_o - \frac{gx^2}{2V_o^2}(1 + \tan^2\alpha_o)$$

即チ
$$\frac{gx}{V_o^2}\tan^2\alpha_o - 2\tan\alpha_o + \left(\frac{gx}{V_o^2} + \frac{2y}{x}\right) = 0$$

∴
$$\tan\alpha_o = \frac{V_o^2}{gx} \pm \sqrt{\left(\frac{V_o^2}{gx}\right)^2 - \left(1 + \frac{2yV_o^2}{gx^2}\right)}$$

又
$$x = \frac{V_o^2\,[\sin(2\alpha_o - \theta) - \sin\theta]}{g\cos\theta}$$

∴
$$\sin(2\alpha_o - \theta) = \frac{xg\cos\theta}{V_o^2} + \sin\theta$$

∴
$$\alpha_o = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{gx\cos\theta}{V_o^2} + \sin\theta\right)$$

又 $R = \dfrac{x}{\cos\theta}$ ナルヲ以テ

$$\alpha_o = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{gR\cos^2\theta}{V_o^2} + \sin\theta\right)$$

24. 摩擦無キ斜面ヲ降ル物體ノ運動

P ハ斜面ニヨリテ支ヘラルヽニアラザレバ g ナル大サノ acceleration ヲ以テ鉛直ニ落下スベキモ,斜面ニ支ヘラルヽ爲ニ斜面 AB ニ沿フテ降ルベシ, AE ハ鉛直線, BE ハ水平線ナリ, α ハ AB ト BE トノ間ノ角,即チ斜面ノ傾角ナリ,斜面ノ長サ AB ヲ l トシ斜面ノ高サ AE

ヲ l トス, g ヲ AB ノ方向ト之ニ直角ナル方向トニ分解スレバ AB ノ方向ノ component ハ

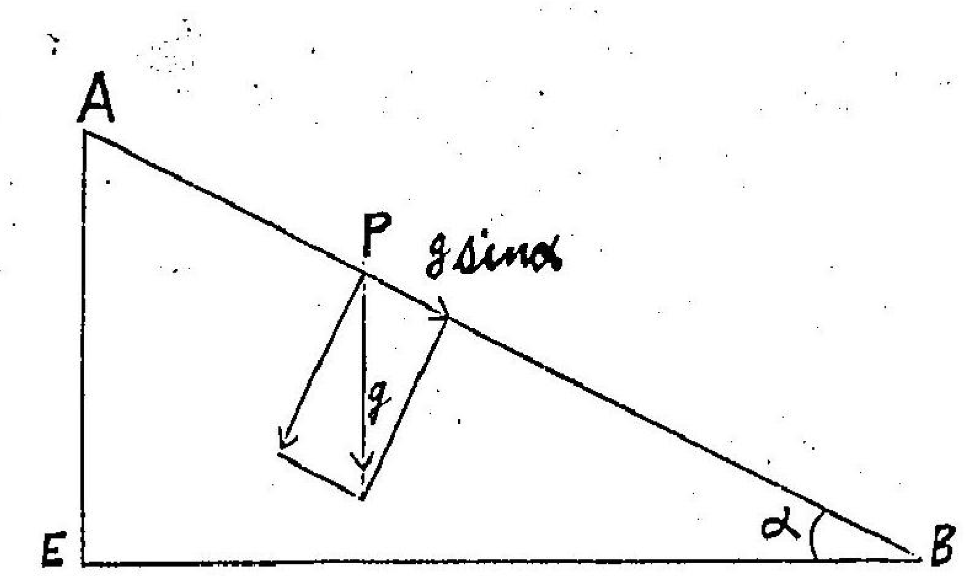
$$g\sin\alpha$$

ナリ,此値ハ AB 上ノ各點ニ於テ相等シキヲ以テ, P ガ AB ヲ降ル運動ハ constant acceleration ノ運動ナリ. v_0 及 v ヲ夫々 A 及ビ B ニ於ケル speed トスレバ

$$v^2-v_0^2=2(g\sin\alpha)l$$
$$=2gl\sin\alpha$$
$$=2gh$$

若シモ $v_0=0$ ナレバ

$$v^2=2gh$$



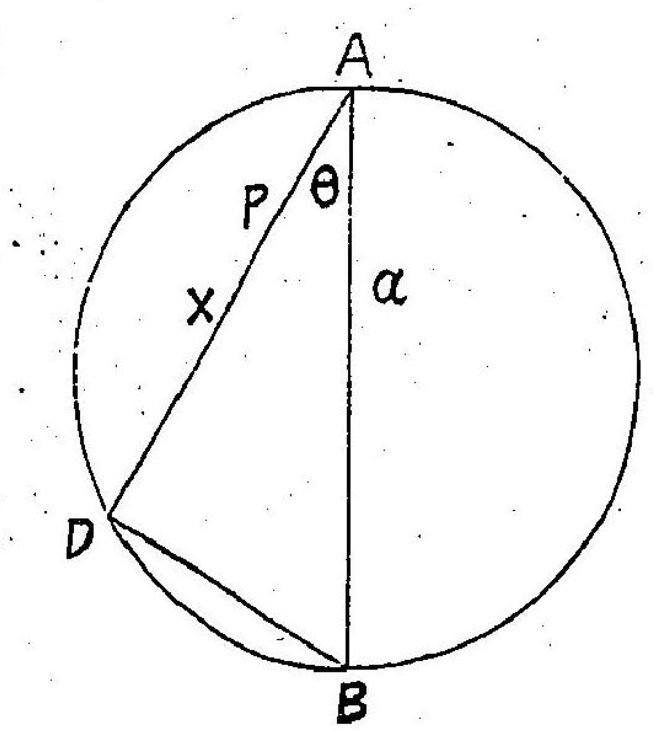
故ニ B ニ於テ P ノ有スル speed ハ恰モ P ガ A ヨリ自由ニ鉛直ニ落下シテ E ニ於テ有スベキ speed ニ等シ,但シ其時間ハ異ナレリ, P ガ AB ニ沿フテ A ヨリ B ニ至ル時間ヲ t トシ, P ガ AE ニ沿フテ自由ニ落ツルトキ A ヨリ E ニ至ル時間ヲ t' トスレバ

$$t=\frac{v-v_0}{g\sin\alpha}$$

$$t'=\frac{v-v_0}{g}$$

$$\therefore\quad \frac{t}{t'}=\operatorname{cosec}\alpha=\frac{l}{h}$$

圓 ADB ハ鉛直面内ニアリ, A ハ其周上ノ最高點ニシテ, AB ハ直徑ナリ. AB ヲ a トス, AD ハ任意ノ弦ナリ, 其長サヲ x トス角 DAB ヲ θ トス,斜面 AD ニ沿フテ A ヨリ D ニ降ル時間ヲ t トス.



然ルトキ

$$x=a\cos\theta$$

動點 P ノ AD ノ方向ノ acceleration ハ $g\cos\theta$ ナリ, P ガ A ニアルトキノ speed ヲ零トスレバ

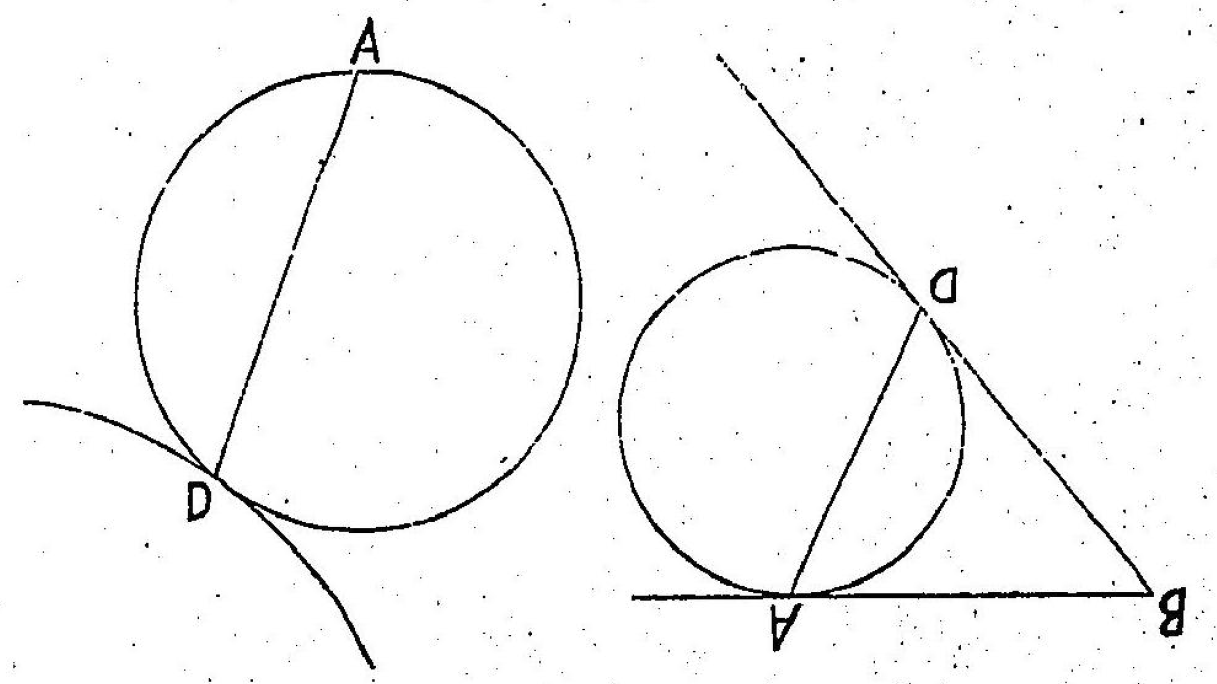
$$x=\tfrac{1}{2}(g\cos\theta)t^2$$

故ニ

$$t=\sqrt{\frac{2x}{g\cos\theta}}=\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

故ニ t ハ θ ニ關係無シ,即チ P ガ A ヨリ弦ニ沿フテ周

上ニ落ツル時間ハ何レノ弦ニ付テモ相等シ,從テAヨリ圓周外ノ一點ニ落ツルトキ如何ナル道ニ沿フテ降ルモ其時間ハ任意ノ弦ニ沿フテ周上ニ落ツル時間ヨリ大ナリ,例ヘバ或點AヨリAヲ含ム鉛直面内ノ或圓



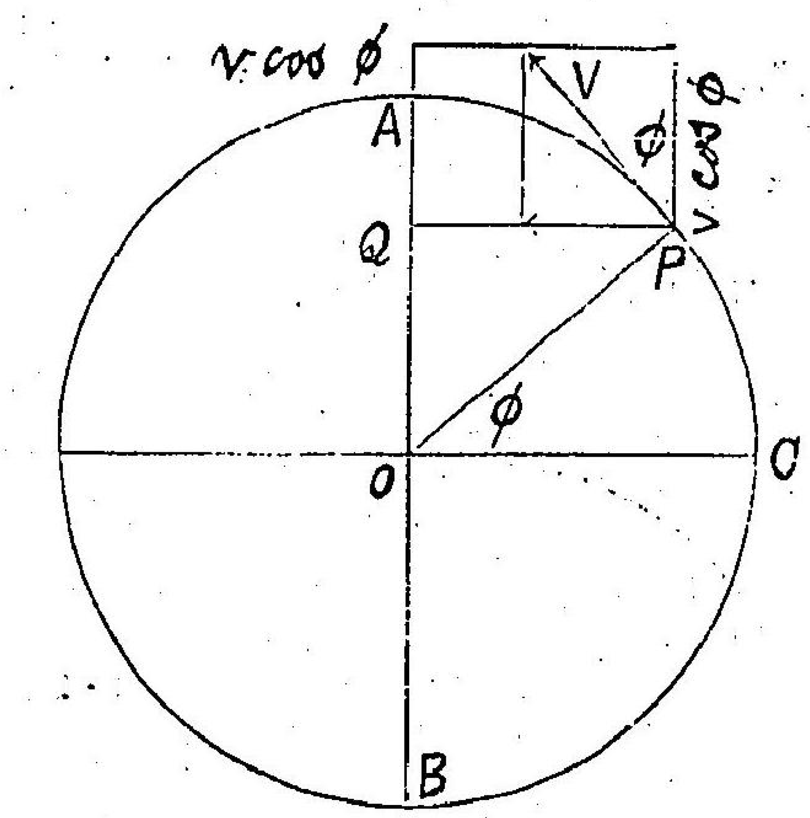
周上又ハ或直線上ヘノ quickest descent ノ線ハ AD ナリ,但DハAヲ最高點トシテ畫カレタル圓ガ與ヘラレタル圓又ハ直線ト切スル點ナリ.

25. Simple Harmonic Motion.

半徑aナル圓周上ヲ一樣ナル angular velocity ω ヲ以テ矢ノ方向ヘ動ク點Pアリ,任意ノ直徑AB上ヘノPノ正射影Qハ一種ノ週期運動ヲナスベシ,此Q點ノ運動ヲ Simple Harmonic Motion ト云フ.

OCハABニ垂線ナリ,PガCニアリシ時ヲ時間tヲ測ル初メトス,角COPヲϕトス,ϕヲ Phase ト云フ,OAヲaトス,aヲ Amplitude ト云フ,Qガ或點ヲ二回引續キ同一ノ方向ヘ通過スル時間ヲTトス,TヲPeriodト云フ,TハPガ圓

周ヲ一周スル時間ニ等シ,$\frac{1}{T}$ヲnトス,nヲ Frequency ト云フ,圓ABCヲ Circle of Reference 又ハ Auxiliary Circle ト云フ.



$$OA = y = a \sin \phi$$
$$= a \sin \omega t \text{..............................(1)}$$

此式ニヨリ任意ノ時ニ於ケルQノ位置ガ與ヘラル.

Pノ velocity ヲvトスレバ

$$v = a\omega$$

之ヲABニ平行ナルモノト直角ナルモノトニ分ツ,其内平行ナル component ハQノ之ニ相當セル時ニ於ケル velocity ナリ,Qノ velocity ヲ$\dot{y}$トスレバ

$$\dot{y} = a\omega \cos \omega t \text{..............................(2)}$$

此式ニヨリ任意ノ時ニ於ケルQノ velocity ガ與ヘラル

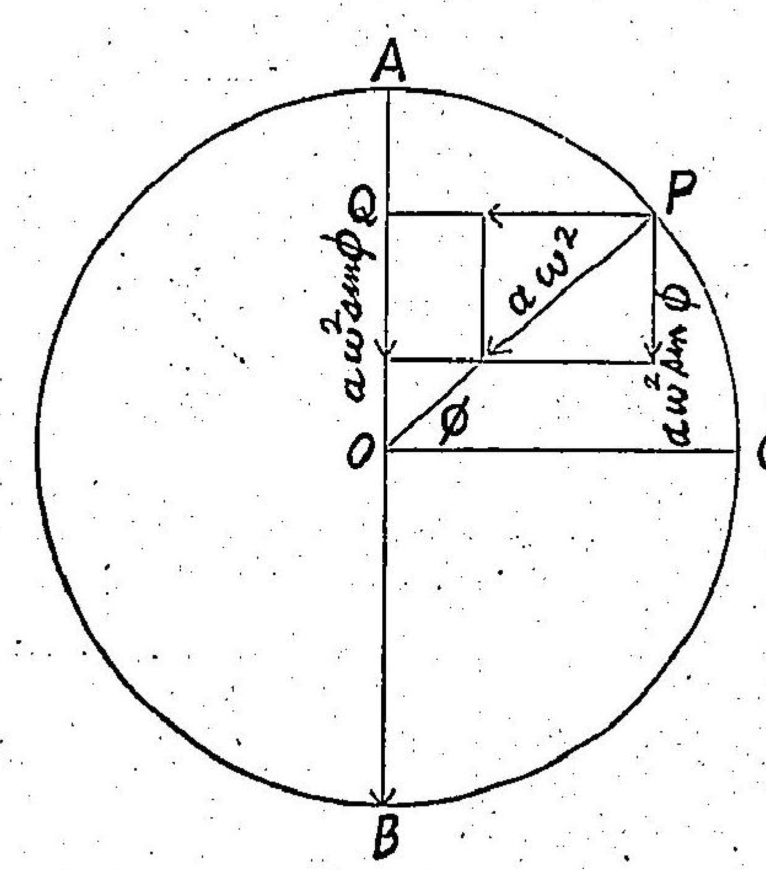
上式ニヨリテQノ velocity ハAトBトニ於テ零ニシテ,Oニ於テハ其絶對値最大トナリ其値ハ $a\omega$ ナルコトガ

知ラルヽ.

P ノ acceleration ハ

$$\frac{v^2}{a} \quad 即チ\ a\omega$$

ニシテ恒ニ中心Oニ向フ,之ヲ AB ニ平行ナルモノト直角ナルモノトニ分テハ其平行ナル component ハ Q ノ此瞬時ニ於ケル acceleration $\ddot{y}$ ナリ.



$$\ddot{y} = -a\omega^2 \sin \omega t$$
$$= -\omega^2 y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Acceleration ノ値ハOニ於テ零ニシテA及ビBニ於テ絶對値最大ニシテ $a\omega^2$ トナル,而シテ $\dot{y}$ ト $\ddot{y}$ トハ正負ノ符號相反セリ, acceleration ハ恒ニ中心Oニ向ヘリ.

若シモ時間ノ初ヲPカAニアリシ時トスレバ

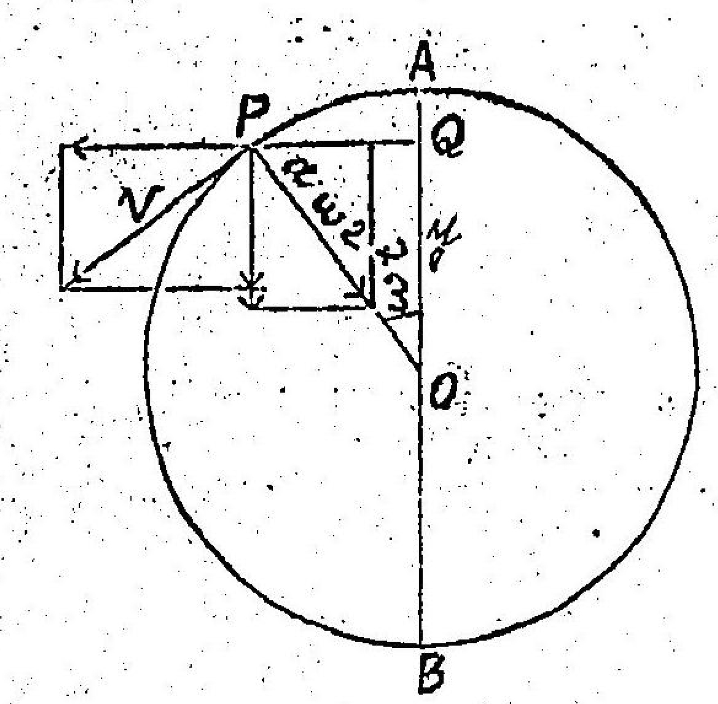
$$y = a \cos \omega t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)'$$
$$\dot{y} = -a\omega \sin \omega t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)'$$

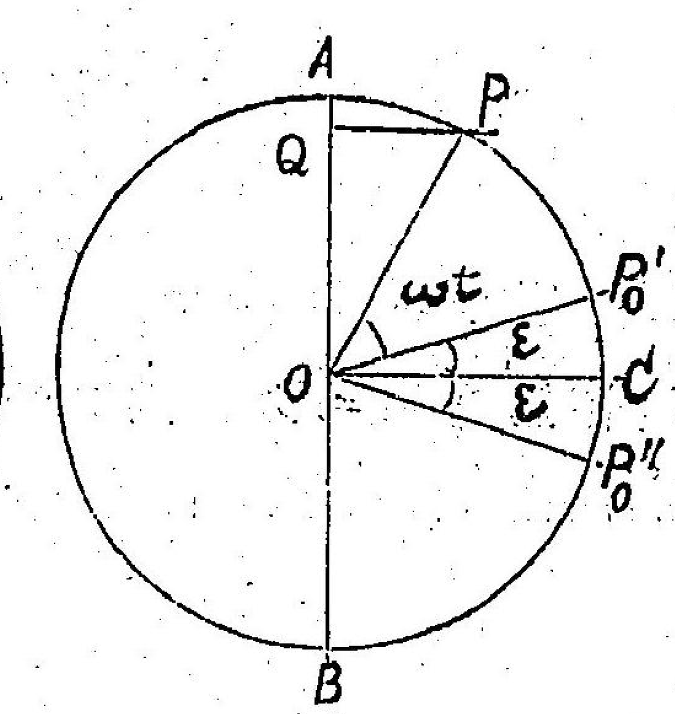
$$\ddot{y} = -a\omega^2 \cos \omega t$$
$$= -\omega^2 y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)'$$

又時ノ初ガPカ P_0' 又ハ P_0'' ニアリシ時トスレバ

$$y = a \sin(\omega t + \epsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)''$$
$$\dot{y} = a\omega \cos(\omega t + \epsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)''$$
$$\ddot{y} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \epsilon)$$
$$= -\omega^2 y$$

但時ノ初ガ P_0' ナレバ ϵ ヲ正トシ, P_0'' ナレバ ϵ ヲ負トスベシ.

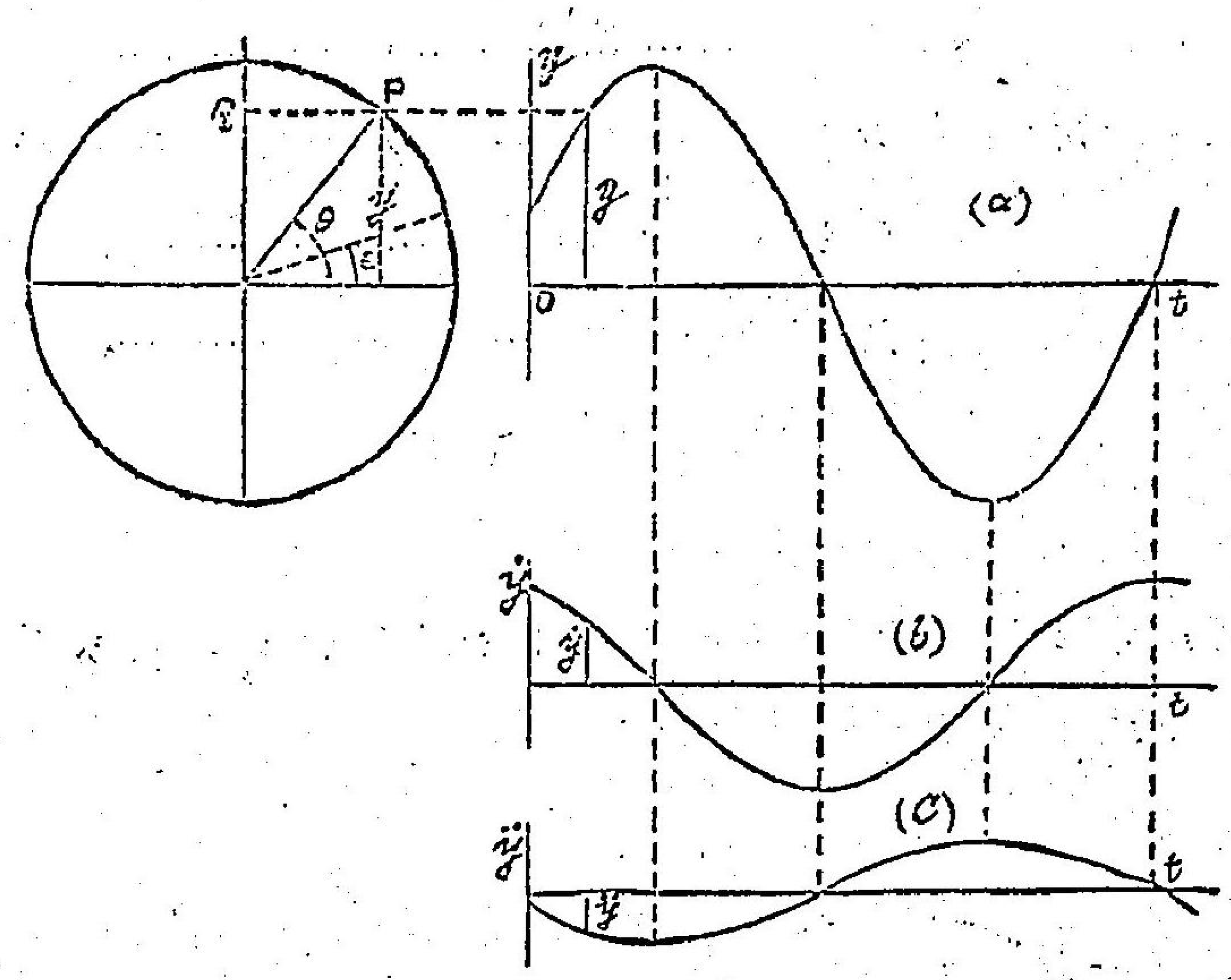




上述三組ノ式ハ同一ノ simple harmonic motion ニ關係セルモノナリ,其形式ノ異ナレルハ單ニ時ノ初ノ採リ方ガ異ナレル爲ナリ.

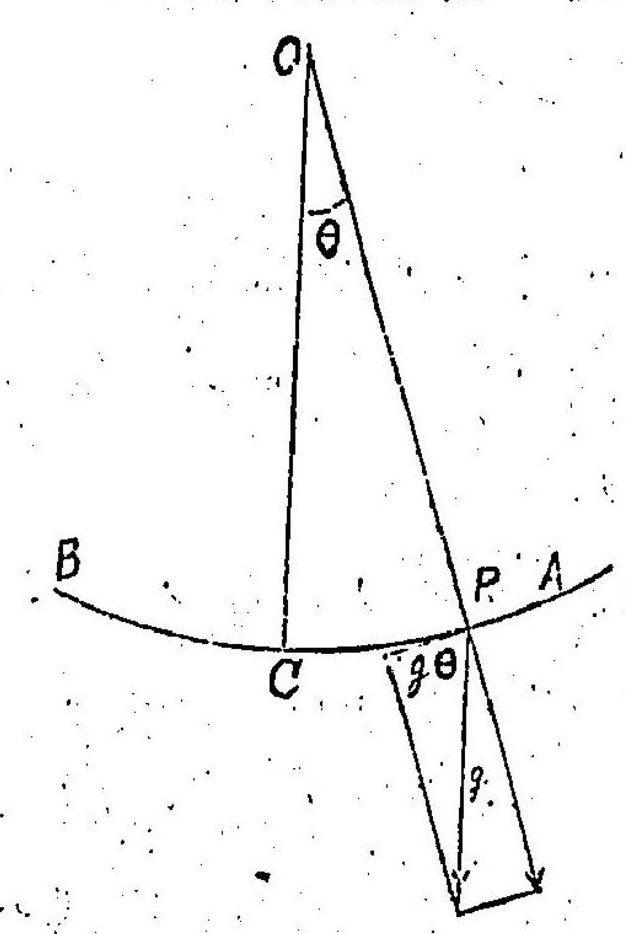
横軸ノ方ヘ時間 t ヲ測リ,縱軸ノ方ヘ displacement y ヲ測リテ畫ケル曲線ヲ Harmonic Curve ト云フ,(a)圖ハ harmonic curve ナリ,(b)圖ハ横軸ノ方ヘ時間 t ヲ測リ,縱軸ノ方ヘ $\dot{y}$ ヲ測リテ畫ケルモノナリ. (C)圖ハ横軸ノ方ヘ時

間ヲ測リ,縱軸ノ方ヘ$\dot{y}$ヲ測リテ畫ケルモノナリ.



26. Simple Pendulum.

質量無キ絲ニテ質點ヲ釣ルセシモノヲ Simple, 又ハ Mathematical Pendulum ト云フ,小物體ヲ輕キ細長ナル絲ニ



テ釣ルセバ略此 Pendulum ニ近キモノヲ得ベシ,絲ヲ支フル點Oト質點Pトノ距離,即絲ノ長lヲ pendulum ノ長サト云フ,Pヲ其靜止ノ位置Cヨリ側方ヘ持來タシ,之ヲ放テハPハ鉛直面內ニ弧ABヲ畫キ振動スベシ,角COP＝θトスレバ,道ニ切線ノ方向ノPノ acceleration ハ $g\sin\theta$ナリ,θガ小ナル場合ニハ此値ハ$g\theta$ト見ルヲ得,即チ acceleration ハθニ比例ス,即弧CP ニ比例ス,故ニθガ小ナル場合ニハPノ運動ハ Simple harmonic motion ト見做スヲ得,振動ノ period ヲTトスレバ前節(3)ヨリ

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{\text{acceleration}}{\text{displacement}} = \frac{g\theta}{l\theta} = \frac{g}{l}$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

第　貳　章

運動ノ定律、萬有引力

27. Newton ノ第一運動定律.

物體ハ外力ニ働カルヽニアラザレバ靜止セルモノハ依然靜止ノ狀態ヲ保持シ,運動セルモノハ其速度ノ大サ並ニ方向ヲ變セズ.

此定律ハ物體ハ Inertia ヲ有スルモノナルコトヲ示スモノナルヲ以テ Inertia ノ定律ト云フ. 此定律ハ一面ニハ力ノ定義ヲ與フルモノナリ,即チ力ハ物體ノ velocity ヲ變スルモノナリ.

28. Impulse 及ビ Momentum.

物體ニ働ケル力ト其力ノ働ケル時間トノ乘積ニヨリテ表ハサレタル量ヲ Impulse ト云フ. F ヲ力トシ, t ヲ時間トスレバ impulse ハ Ft ナリ.

物體ノ mass ト其 velocity ノ大サトノ乘積ニテ表ハサレタル量ヲ momentum ト云フ, m ヲ mass トシ, v ヲ velocity トスレバ momentum ハ mv ナリ.

29. Newton ノ第二運動定律.

Momentum ノ變化ハ Impulse ニ比例ス.

mass m ナル物體ガ velocity v_1 ヲ以テ動キツヽアル時,

其運動方向ニ一定ノ力Fガ働キ始メ t 秒時間ノ後ニハ此力ノ爲ニ velocity ガ v_2 トナリタリトスレバ

$$Ft = Km(v_2 - v_1)$$

但Kハ常數ナリ適當ニ單位ヲ撰ベバ K＝1 トナスコトヲ得然ル時上式ハ

$$Ft = m(v_2 - v_1)$$

トナルベシ,此式ヨリ

$$F = m\frac{(v_2 - v_1)}{t}$$

t ガ微小トナレル極限ニ於テ

$$\frac{v_2 - v_1}{t}$$

ノ値ハ其瞬時ニ於ケル acceleration a ヲ與フルモノナリ,故ニ

$$F = ma$$

即チ力ノ大サハ質量ノ大サト acceleration ノ大サトノ乘積ニテ表ハサル.

30. Impulsive Force.

前節ニヨリ

$$Ft = m(v_2 - v_1)$$

$m(v_2 - v_1)$ ガ有限ノ大サヲ有シテ而カモ t ガ甚ダ小ナル場合ニ F ヲ Impulsive force ト云フ.

31. Newton ノ第三運動定律.

物體 A ガ他ノ物體 B ニ或力ヲ働ケバ B モ亦同時ニ

或力ヲ A ニ働クモノナリ,一方ノ力ヲ Action ト云ヒ,他方ノ力ヲ Reaction ト呼ブ, Newton ノ第三運動定律ハ次ノ如シ.

Action ニハ必ズ Reaction ヲ伴フ,此兩者ハ大サ等シク方向反對ナリ.

32. Universal Gravitation ニ關スル Law.

地球表面上ニ於テ眞空内ヲ落下スル物體ノ受クル Acceleration ハ,地表ヨリノ距離ガ地球半徑ニ比シテ極メテ小ナル場合ニ付テノミ constant ト見做シ得ルモ,實際ニハ距離ノ平方ニ反比例スルモノナリ.

Universal Gravitation ニ關セル Newton ノ law ニヨレバ,二個ノ particles ノ質量ヲ夫々 m, m' トシ,其距離ヲ r トスレバ其間ニ引力アリ,其大サヲ F トスレバ

$$F \propto \frac{mm'}{r^2}$$

即チ

$$F = \kappa\frac{mm'}{r^2}$$

κ ヲ gravitation ノ constant ト云フ.

理論上 homogeneous ナル球體ト其球體外ノ或點ニアル particle トノ間ノ attraction ハ,恰モ其球體ノ全質量ガ其球ノ中心ニ集合セル場合ノ attraction ニ等シキモノナリ,若シ地球ヲ homogeneous ナル球體ナリトスレバ,地球引力ニヨル acceleration ハ地心ヨリノ距離ノ平方ニ反比例スベシ.

κ ハ

$$m = m' = 1, \quad r = 1$$

ナル塲合ノ F ノ大サニ等シ, m' ヨリノ attraction ノ爲ニ m ノ受クル acceleration ハ

$$\frac{m'}{r^2}$$

ナリ, m ヲ地球上ニアル物體ノ mass トシ, m' ヲ地球ノ mass トシ, r ヲ地球ノ半徑トスレバ $\kappa\frac{m'}{r^2}$ ハ m ノ受クル acceleration ナリ, 之ヲ g トスレバ

$$\kappa\frac{m'}{r^2} = g$$

故ニ

$$\kappa = \frac{3}{4}\frac{g}{\pi\rho r}$$

但 ρ ハ地球ノ density ナリ.

C. G. S. system ニ於テハ

$$\kappa = 6.65 \times 10^{-8}$$

33. Mass ト Weight.

或物體ノ weight トハ其物體ニ働ケル地球ノ引力ノコトナリ, 或物體ノ mass ヲ m_1 トシ, 或塲所ニ於ケル acceleration ヲ g トスレバ其塲所ニ於テ其物體ノ weight W_1 ハ次式ニテ表ハサルベシ.

$$W_1 = m_1 g$$

或他ノ物體ノ mass ヲ m_2 トシ, 同一ノ塲所ニ於ケル其物體ノ weight ヲ W_2 トスレバ

$$W_2 = m_2 g$$

故ニ同一ノ塲所ニ於テ

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

塲所ヲ異ニスレバ g ノ値モ異ナルヲ以テ上記ノ關係ハ成立セズ.

34. 力ノ單位.

力ノ單位ニ重力單位ト絕對單位トアリ.

(i) 重力單位.

1 pound ノ mass ヲ有スル物體ニ働ケル地球引力ノ大サ, 即 1 pound ノ mass ヲ有スル物體ノ受クル weight ヲ以テ力ノ單位トシ之ヲ Pound ト呼ブ.

1 gram ノ mass ヲ有スル物體ニ働ケル地球引力ノ大サヲ力ノ單位トシ之ヲ Gram ト呼ブ, 又 mass 1 kilogram ニ働ケル weight ヲ單位トシテ之レヲ Kilogram ト呼ブ.

(ii) 絕對單位.

1 pound ノ mass ニ 1 foot per second per second ノ accleration ヲ與フル力ヲ力ノ單位トシ之ヲ Poundal ト呼ブ.

1 gram ノ mass ニ 1 centimetre per second per second ノ acceleration ヲ與フル力ヲ力ノ單位トシ之ヲ Dyne ト稱ス.

g ノ値ハ塲所ニヨリテ異ナレルヲ以テ重力單位ヲ採ル上ニハ g ノ値ヲ指定スル必要アリ, 通常用ヒラルル g ノ値ハ

$g = 32.16$ feet per second per second

$g = 980.6$ centimetres per second per second

故ニ力ノ單位ニ付重力單位ト絕對單位トノ關係ハ

1 pound　ノ力 = 32.16 poundals.

1 kilogram ノ力 = 980.6×10^3 dynes.

1 gram　ノ力 = 980.6 dynes.

故ニ mass m pounds ノ物體ニ a feet per second per second ノ acceleration ヲ與フル力ノ大サヲ F トスレバ

$$F = ma \text{ poundals}$$

又ハ

$$F = \frac{ma}{g} \text{ pounds}$$

第參章

力ノ組合及ヒ分解

35. Transmissibility ノ principle.

剛體ニ作用セル力ノ効果ハ其力ノ作用線上ニ於テ其着力點ヲ移スモ變セザルモノナリ.

36. 一點ニ働ケル二力ノ合力.

F_1, F_2 ヲ質點 P ニ働ケル二力トス, F_1 ノ爲ニ生セラルベキ acceleration ヲ a_1 トシ, F_2 ニヨリテ生セラルヘキ acceleration ヲ a_2 トス, P ノ mass ヲ m トス, 然ル時

$$F_1 = ma_1$$

$$F_2 = ma_2$$

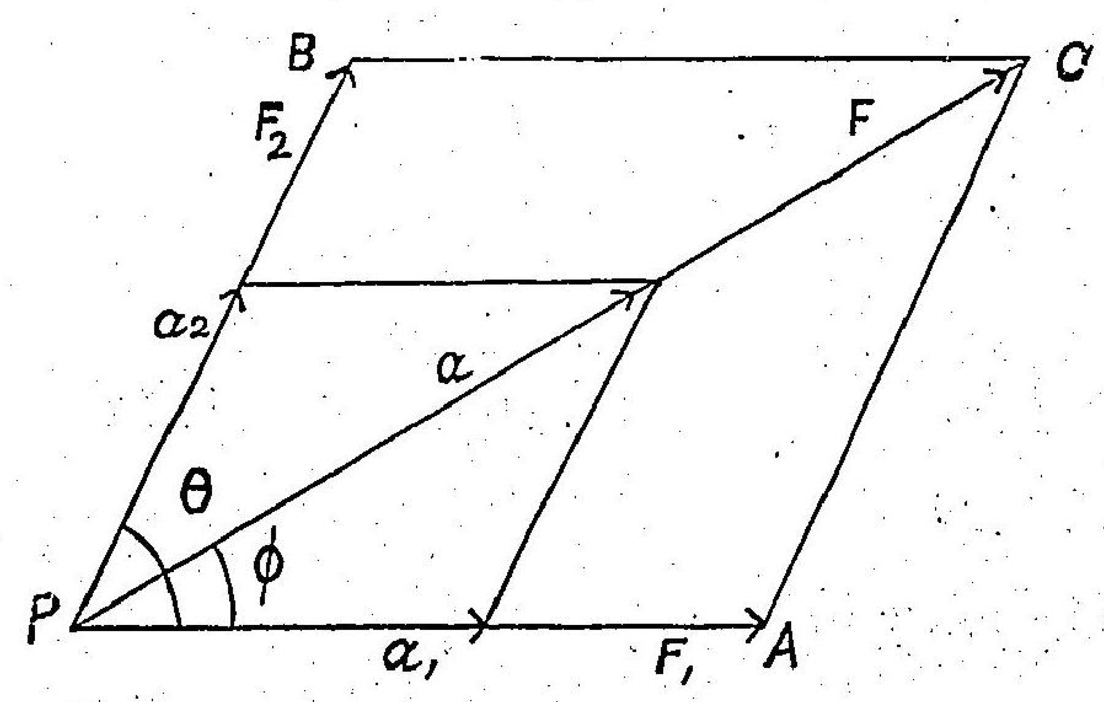
a_1 ト a_2 トノ resultant ヲ a トス, a ハ a_1 ト a_2 トニヨリテ定マル平行四邊形ノ對角線ニヨリ其大サ幷ニ方向トモ表ハサル, 此 acceleration a ハ

$$ma = F$$

ナル式ニヨリテ表ハサルヽ一力 F ヲ a ノ方向ニ作用スルモ得ラルベシ, 即チ F ハ F_1 ト F_2 トカ共ニ作用セルト同一ノ効果ヲ質點 P ニ與フルモノナリ, F ヲ F_1 ト F_2 トノ Resultant ト云フ, 圖ニ於テ

$$PA = F_1 \quad PB = F_2$$

Fノ大サ及方向ハ平方行四邊形 PACB ノ對角線 PC ニヨリテ表ハサル,此平行四邊形ヲ力ノ平行四邊形ト云フ,又 Resultant ハ三角形 PAC ノ邊 PC ニテ表ハサルヽ



モノト見ルコトヲ得,此三角形ヲ力ノ三角形ト云フ.

F_1 ト F_2 トノ間ノ角ヲ θ トシ, F ト F_1 トノ間ノ角ヲ ϕ トスレバ

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta$$

$$\therefore \quad F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$$

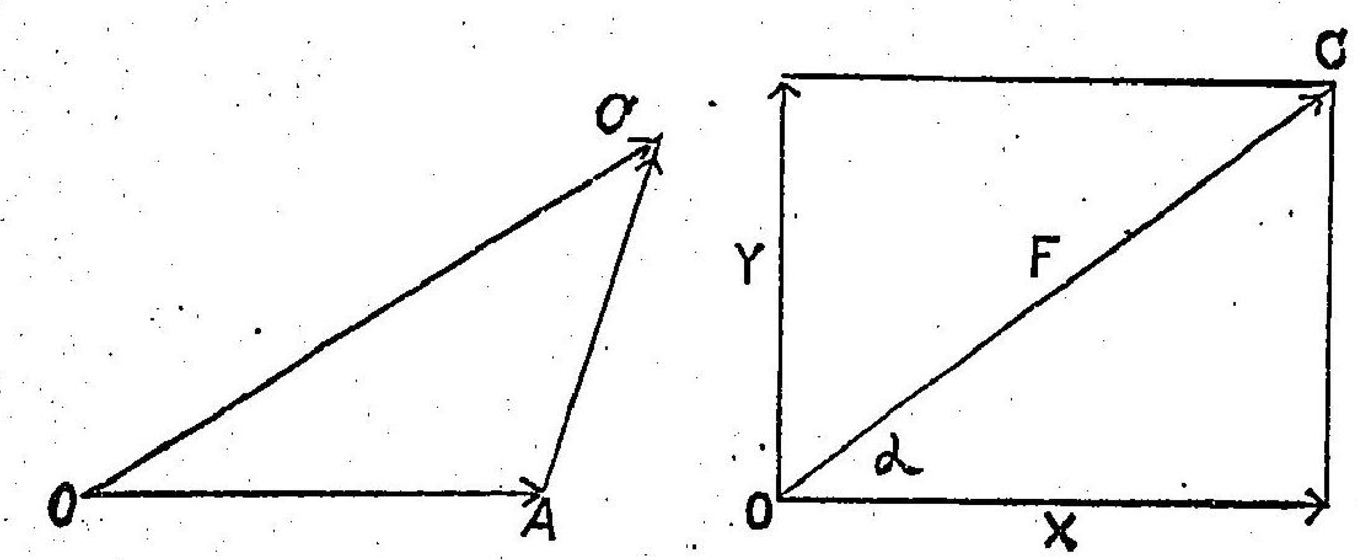
$$\tan\phi = \frac{F_2\sin\theta}{F_1 + F_2\cos\theta}$$

37. 一力ヲ作用線ノ交ハレル二力ニ分ツコト.

一力 OC ヲ與ヘラレタル方向ニ於ケル二力ニ分解スルコトヲ得, O ヲ過ギリ與ヘラレタル方向ヘ直線 OA ヲ引キ, C ヲ過ギリ他ノ與ヘラレタル方向ヘ直線 AC ヲ引キ三角形 OAC ヲ作ル,然ル時 OA, AC ハ OC ノ分力ナリ.

通常ハ互ニ直角ヲナセル二力ニ分ツヲ便トスル場

合多シ, F ヲ與ヘラレタル力トシ,互ニ直角ナル分力ヲ夫々 X, Y トシ F ト X トノ間ノ角ヲ α トス.



$$X = F\cos\alpha, \qquad Y = F\sin\alpha$$

38. 作用線同一ナル衆力ノ組合

F_1, F_2, F_3 等ガ同一ノ作用線ニ沿フテ働ケル時其合力ヲ R トスレバ

$$R = \Sigma F$$

但シ ΣF ハ一方ニ向ヘルモノヲ正トシ,他方ニ向ヘルモノヲ負トセル代數和ナリ, R ノ方向ハ ΣF ノ符號ニヨリテ定マル.

39. 作用線ガ互ニ直角ニ交ハレル三力ノ組合.

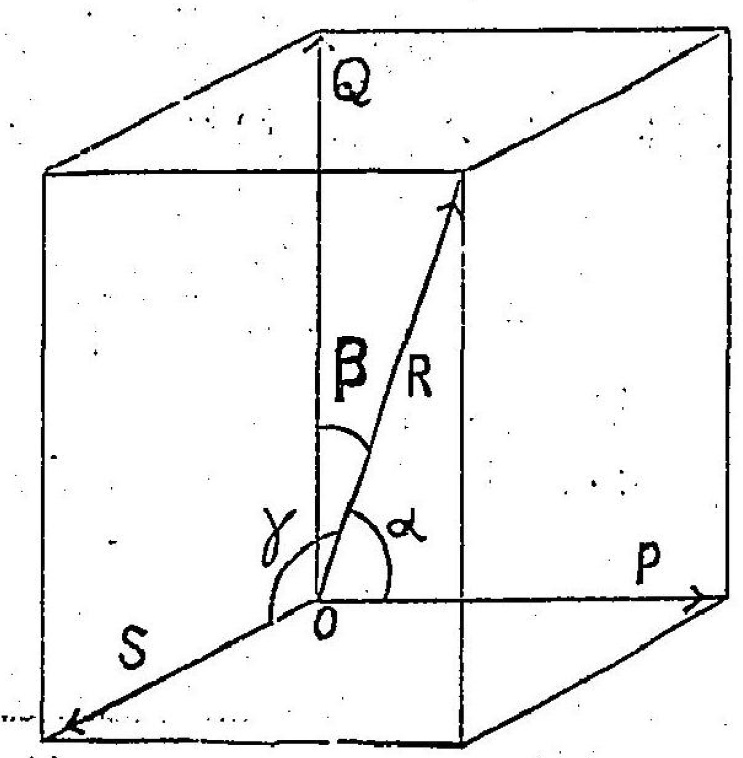
P, Q, S ヲ與ヘラレタル三力トス,其作用線ハ O 點ニ會シテ互ニ直角ヲナセリ,合力ヲ R トス, R ガ P, Q, S トナセル角ヲ夫々 α, β, γ トスレバ

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2$$

故ニ.

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}$$

又



$$\cos\alpha = \frac{P}{R} = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+S^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{Q}{R} = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2+S^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{S}{R} = \frac{S}{\sqrt{P^2+Q^2+S^2}}$$

40. 一力ヲ作用線ガ互ニ直角ニ交ハレル三力ニ分解スルコト.

F ヲ與ヘラレタル力トシ之ヲ坐標軸ノ方向ニ分解セントス, x, y, z 分力ヲ夫々 F_x, F_y, F_z トシ, F カ x 軸, y 軸, z 軸トナセル角ヲ夫々 α, β, γ トスレバ

$$F_x = F\cos\alpha$$

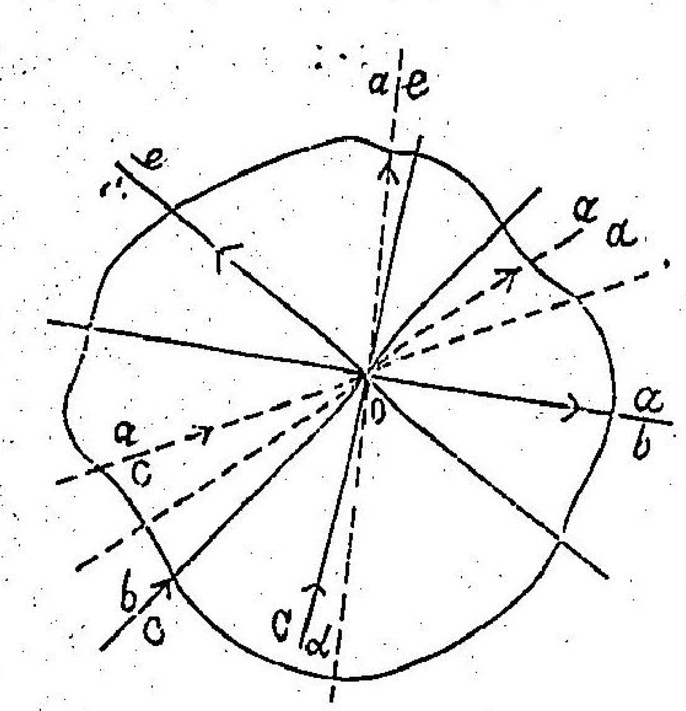
$$F_y = F\cos\beta$$

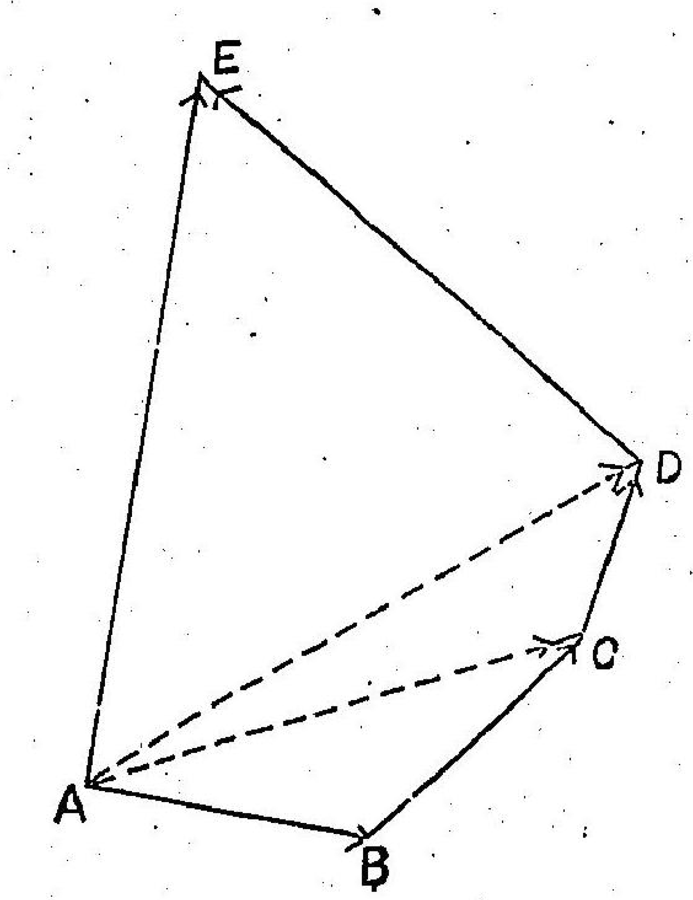
$$F_z = F\cos\gamma$$

41. 同一平面上ニ於テ作用線ガ一點ニ會セル衆力ノ組合.

AB, BC, CD, DE, ヲ與ヘラレタル諸力トシ,其作用線ヲ夫々 ab, bc, cd, de トス.

AB ト BC トノ和ハ AC ニシテ其作用線ハ AC ニ平行ナル ac ナリ, AC ト CD トノ和ハ AD ナリ,其作用線ハ AD ニ平行ナル ad ナリ, AD ト DE トノ和ハ AE ニシテ其作用線ハ AE ニ平行ナル ae ナリ,即チ AE ハ AB, BC, CD, DE ノ合力ノ大サ幷ニ方向ヲ示スモノニシテ,其作用線ハ共通ノ着力點ヲ通シ AE ニ平行ナル ae ナリ.



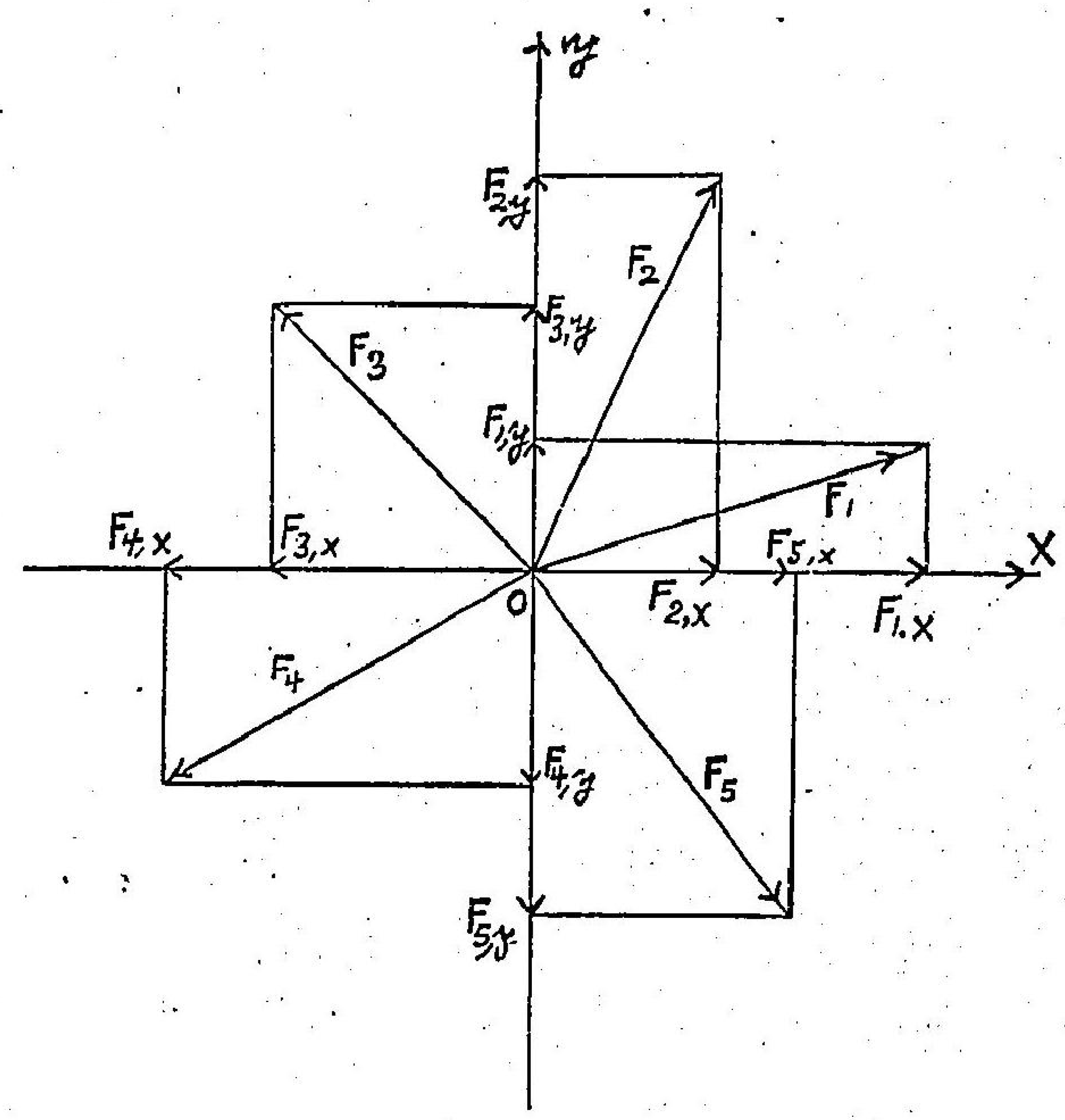


多角形 ABCDE ヲ力ノ多角形ト云フ.

又計算ニヨリテ合力ヲ定ムルニハ次ノ如クナスベシ, F_1, F_2, F_3 等ヲ與ヘラレタル諸力トス, F_1 ノ x, y 分力ヲ夫々 $F_{1,x}, F_{1,y}$ トシ, F_2 ノ x, y 分力ヲ夫々 $F_{2,x}, F_{2,y}$ トス, F_3 ノ x, y 分力ヲ夫々 $F_{3,x}, F_{3,y}$ トス,其他ノ力モ同様ニ x, y 軸ノ方向ニ分ツ, R ヲ合力トシ,其 x, y 分力ヲ夫々 R_x, R_y トス, R ノ x 軸, y 軸トナス角ヲ夫々 α, β トス.

$$R_x = R\cos\alpha = \Sigma F_x$$

$$R_y = R\cos\beta = \Sigma F_y$$



而シテ

$$R^2 = (\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2$$

$$\therefore \quad R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$$

又

$$\cos\alpha = \frac{\Sigma F_x}{R} = \frac{\Sigma F_x}{\left\{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

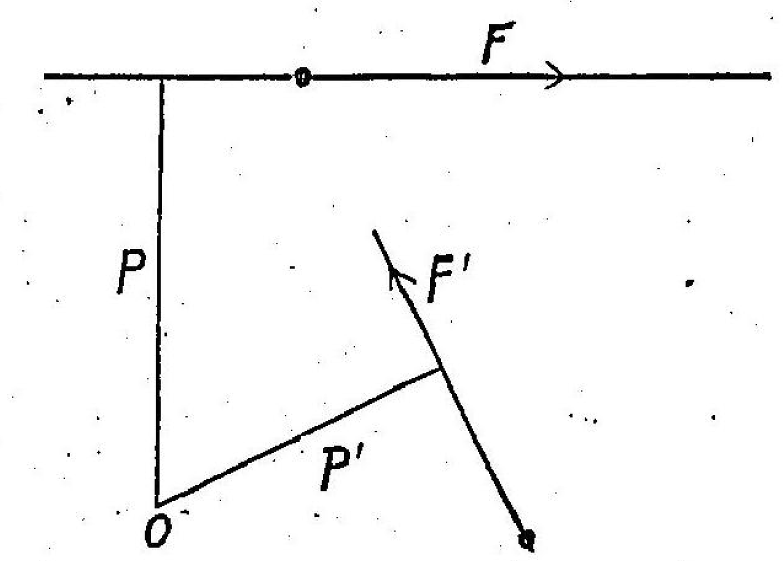
$$\cos\beta = \frac{\Sigma F_y}{R} = \frac{\Sigma F_y}{\left\{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

42. 點ニ關スル力ノ moment.

或點ニ關スル或力ノ moment トハ其力ノ大サト其點

ヨリ此力ノ作用線ヘノ垂直距離トノ乘積ニテ表ハサルヽ量ナリ,點ヲ moment ノ origin 又ハ centre ト云ヒ, origin ヨリ作用線ヘノ垂直距離ヲ moment ノ arm ト云フ.

或點ニ關スル或力ノ moment ハ其力ガ物體ニ作用セシ時物體ガ其點ヲ中心トシテ廻轉セントスル傾向ヲ測ルモノナリ,而シテ之ニ正負ノ符號ヲ附シテ廻轉ノ向キヲ表ハス,通常時計ノ針ノ廻轉ノ反對ノ方ヘ廻轉セシメントスル monent ニ正號ヲ附シ,時計ノ針ノ廻轉ト同方ヘ廻轉セシメントスル moment ニハ負號ヲ附スルモノトス,圖ニ示セル場合ニ於テ O 點ニ關スル F ノ moment ハ其 arm ヲ p トスレバ $-Fp$ ナリ,又 O 點ニ關スル F' ノ moment ハ其 arm ヲ p' トスレバ $+F'p'$ ナリ.

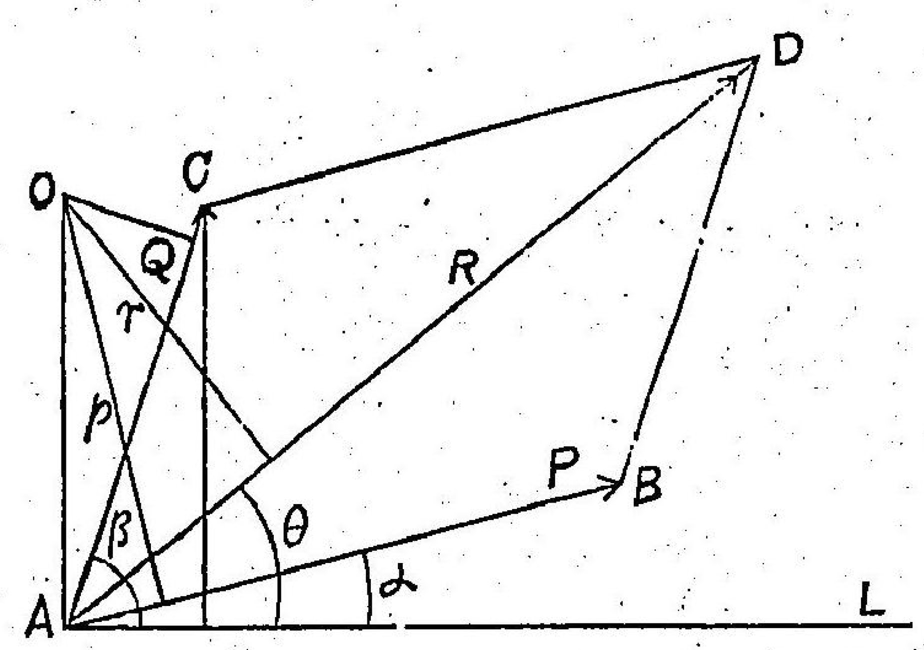


43. Varignon's Theorem.

P, Q ハ作用線ガ A 點ニテ交ハレル二力ナリ,其合力ヲ R トス, O 點ハ P ト Q トニヨリテ定マレル平面上ノ任意ノ點ナリ,然ル時 R ノ O 點ニ關スル moment ハ P ノ O 點ニ關スル moment ト Q ノ O 點ニ關スル moment トノ代數和ナリ.

AB, AC, AD ハ夫々 P, Q, R ヲ表ハス, AO ヲ結ブ, AO ニ直角ヲナセル直線 AL ヲ引ク, AL ト AB トノ間ノ角,

AL ト AC トノ間ノ角,及ビ AL ト AD トノ間ノ角ヲ夫々 α, β, θ トス.



然ル時

$$P\cos\alpha+Q\cos\beta=R\cos\theta$$

$$\therefore\quad P\cdot\overline{OA}\cdot\cos\alpha+Q\cdot\overline{OA}\cos\beta=R\cdot\overline{OA}\cdot\cos\theta$$

P, Q, R ノ O ニ關スル moment ノ arm ヲ夫々 p, q, r トスレバ

$$\overline{OA}\cos\alpha=p,\qquad \overline{OA}\cos\beta=q,\qquad \overline{OA}\cos\theta=r$$

ナルヲ以テ

$$Pp+Qq+Rr$$

此關係ハ O 點ガ此平面上何處ニ移サルヽモ成立ス,但シ O ノ位置ニヨリテ Pp, Qq, Rr ハ正又ハ負ナリ.

44. 力ノ直線ニ關スル moment.

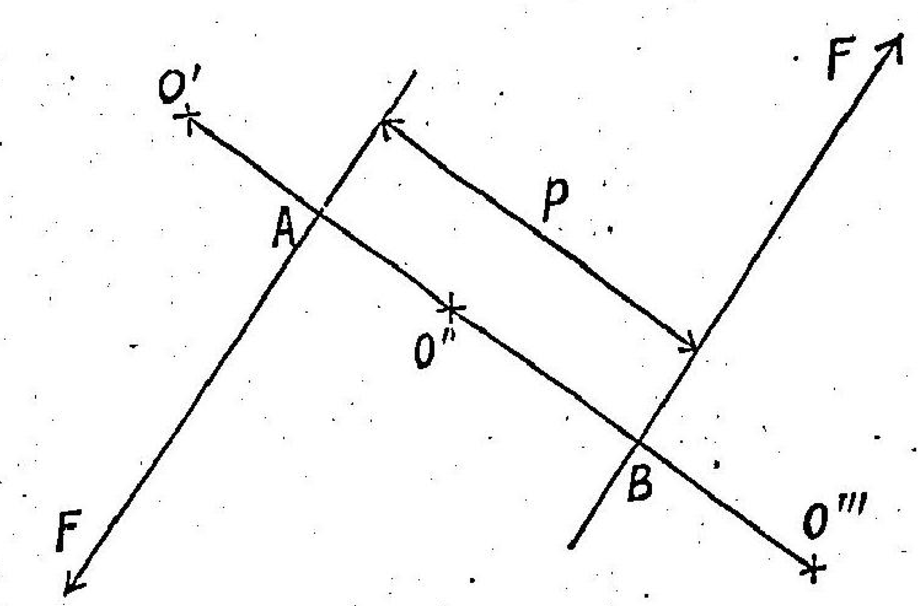
力 F ヲ直線 AB ニ平行ナルモノト直角ナルモノトニ分ツ,平行ナル分力ヲ P トシ,直角ナル分力ヲ Q トス, Q ノ作用線ト直線 AB トノ間ノ垂直距離ヲ p トス,然ル時乘積 Qp ニテ表ハサレタル量ヲ力 F ノ直線 AB ニ關

スル moment ト云フ, p ヲ其 arm ト云ヒ, AB ヲ軸ト云フ.

moment ノ符號ハ與ヘラレタル直線ヲ軸トシテ物體ガ左廻轉ヲ起サントスル時ハ正ニシテ,之ニ反對ナル時ヲ負トス,同一ノ moment モ軸ノ何レノ方面ヨリ見ルカニヨリテ其符號ヲ異ニス,坐標軸ヲ moment ノ軸トスル時ハ其 positive end ヨリ見ルヲ普通トス.

45. Couple.

一直線上ニアラサル二個ノ大サ等シク方向反對ナル力ヲ couple ト云フ,二力ノ作用線間ノ距離ヲ arm ト云フ.



couple ノ平面上ノ總テノ點ニ付 couple ヲ成セル二力ノ moments ノ代數和ハ相等シクシテ其大サハ一力ノ大サト couple ノ arm トノ乘積ニ等シ,而シテ此乘積ヲ couple ノ moment ト云フ,其符號ハ二力ノ moments ノ代數和ノ符號ニ同ジ,即チ物體ガ此 couple ノ作用ニヨリ左廻轉ヲ起サントスル時ハ其 couple ノ moment ハ正ニシテ,右廻轉ヲ起サントスル時ハ負ナリ.

F, F′ ハ couple ヲ成セル二力ナリ,其 arm ヲ p トス, O′, O″, O‴ ヲ圖ニ示セル如キ位置ニ採レバ是等三點ニ關シ二力ノ moments ノ代數和ハ夫々

$$-F\cdot\overline{O'A}+F'\cdot\overline{O'B}=F\cdot\overline{AB}=Fp$$

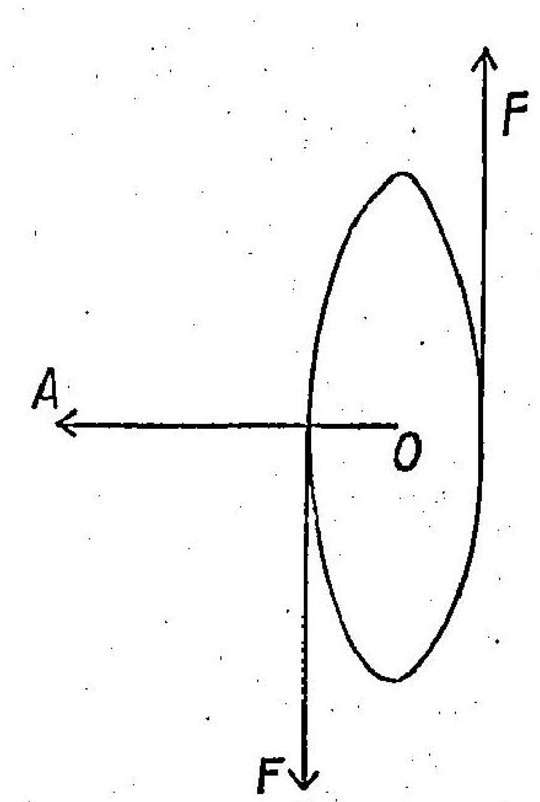
$$F\cdot\overline{O''A}+F'\cdot\overline{O''B}=F\cdot\overline{AB}=Fp$$

$$F\cdot\overline{O'''A}-F'\cdot\overline{O'''B}=F\cdot\overline{AB}=Fp$$

但シ A ハ O′ ヨリ,又ハ O″ ヨリ,又ハ O‴ ヨリ F ノ作用線ヘ引ケル垂線ノ足ナリ, B ハ O′, O″, O‴ ヨリ F′ ノ作用線ヘ引ケル垂線ノ足ナリ.

上記三ツノ場合ハ O ノ位置ニ付總テノ場合ヲ盡セリ.

Couple ノ moment ハ vector 量ナリ,其 vector ヲ表ハス直線ハ couple ノ平面ニ垂直ニシテ,其長サハ moment ノ大サヲ表ハス, vector ノ向キヲ表ハス可キ矢ハ其矢ヲ附スヘキ端ヨリ couple ヲ見タル時左廻轉ニ見ユル如クニ附スルモノトス.

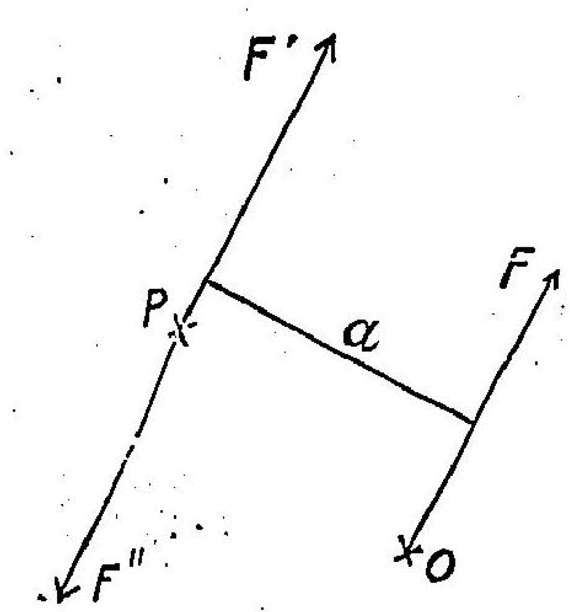


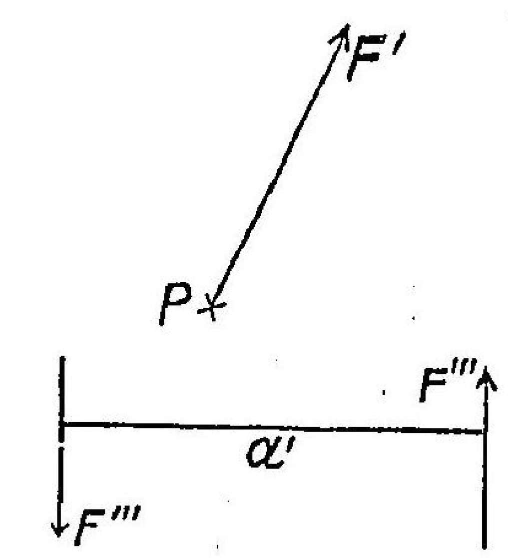
46. 一力ヲ他ノ一力トーツノ couple トニテ置キ換フルコト.

一力ヲ任意ノ點ニ働クーツノ力トーツノ couple トニテ置キ換フルコトヲ得.

與ヘラレタル力ヲ F トシ O 點ニ働クモノトス, P ヲ

任意ノ點トス, P ニ於テ大サ等シク方向反對ナル二力ヲ加フルモ此二力ハ何等ノ効果ヲ與ヘズ,故ニ實際此クノ如キ二力ガ存在スルモノト考フルモ差支ナシ,由テ P ニ於テ F ト大サ等シク且平行セル互ニ反對ナル





二力 F′, F″ ヲ加ヘタリトス, F ノ作用線ト F′ 及 F″ ノ作用線トノ間ノ距離ヲ a トス, F′, F″, F トノ三力ノ合力ハ F ナリ,而シテ F ト F″ トハ couple ヲ成ス,其 moment ハ Fa ナリ,故ニ F ハ F′ ト couple Fa トヨリ成ルモノト考フルコトヲ得,此 couple ハ

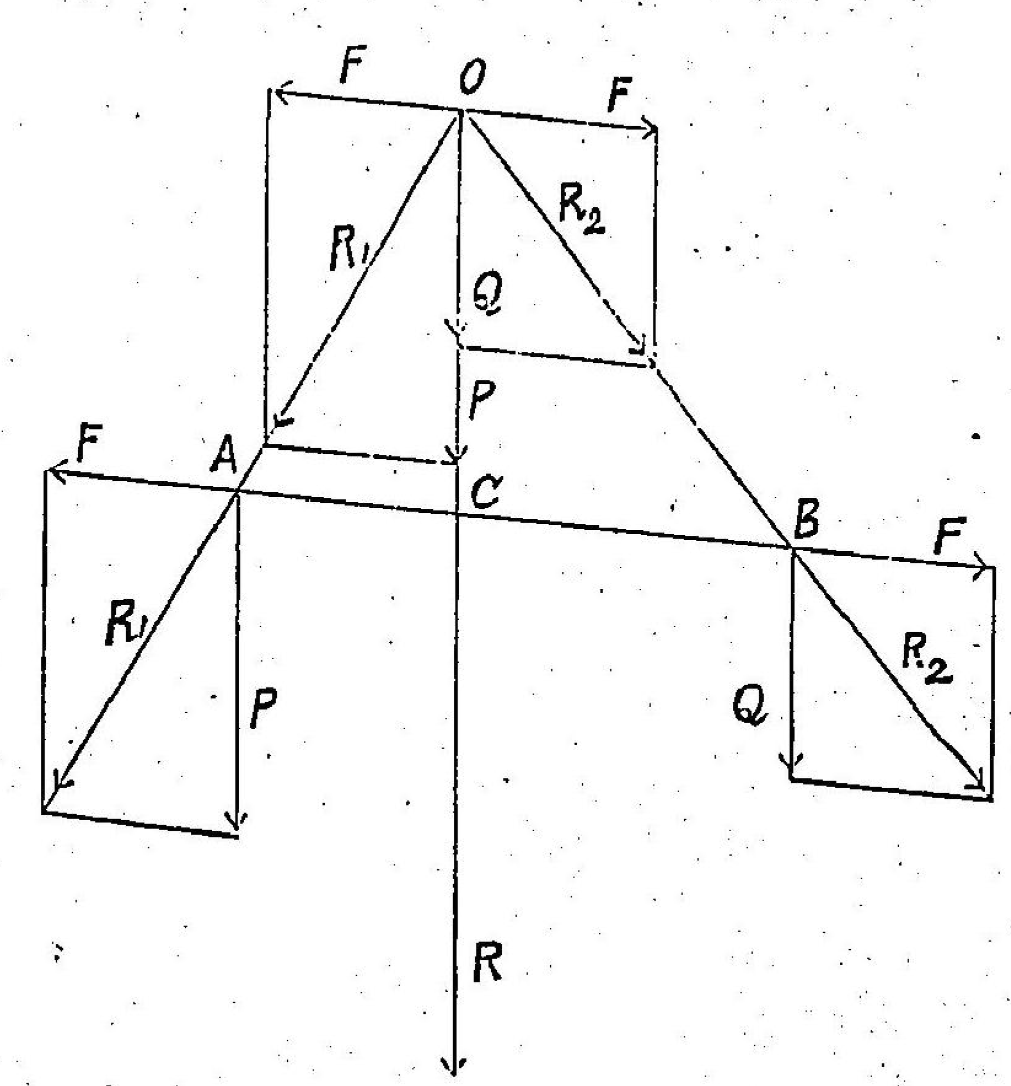
$$Fa=F'''a'$$

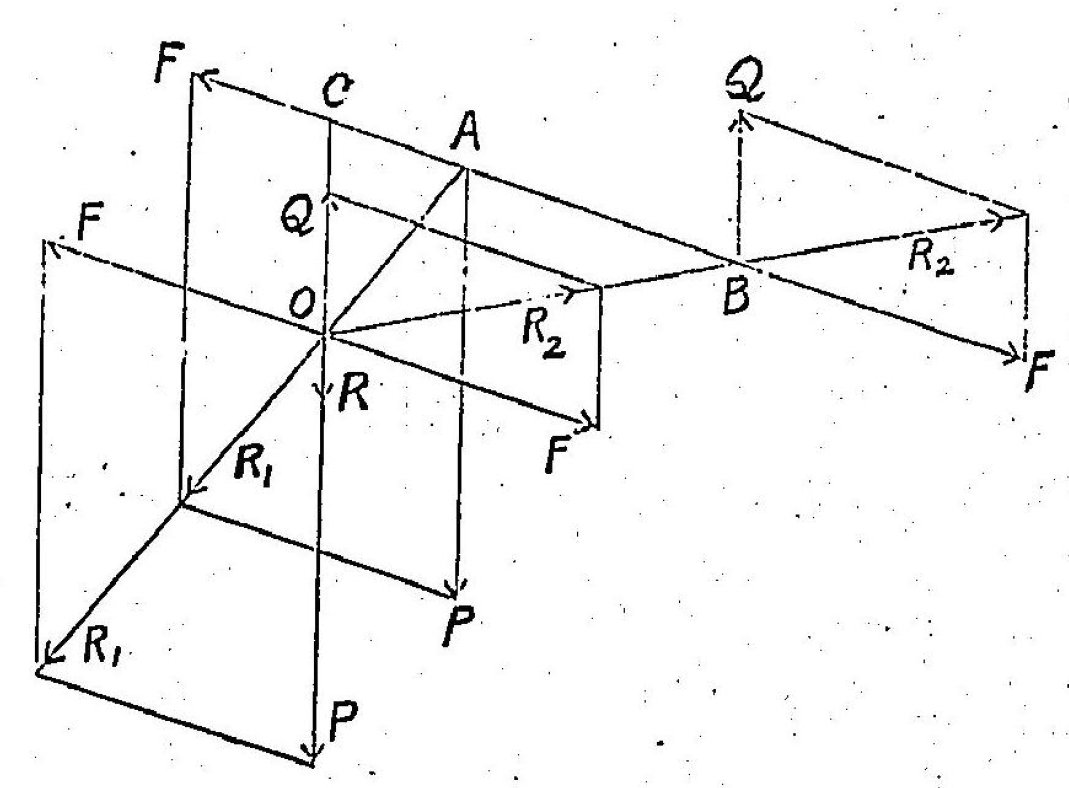
ヲ滿足スベキ couple $F'''a'$ ニテ署キ換フルコトヲ得,故ニ結局 F ハ P 點ヲ通ジテ働ク力 F′ ト couple $F'''a'$ トヲ以テ置キ換フルコトヲ得タリ.

47. 二個ノ平行力ノ組合.

P, Q ヲ平行セル二力トス, A, B ハ夫々 P, Q ノ作用線上ノ點ナリ, AB ニ沿フテ大サ等シク方向反對ナル二力ヲ加フ,其大サヲ F トス, F ト P トノ合力 R_1 ノ作用線

ハQト他ノFトノ合力R_2ノ作用線ト一點Oニテ會ス, R_1トR_2トハOニ働ケルモノト見ルコトヲ得, R_1トR_2ト





ノ合力ヲRトス, Rハ即チPトQトノ合力ナリ, RハOヲ通ジP及ビQニ平行セル力ニシテ其大サハPトQトガ同一方向ナル時ハ P+Q ニシテ方向ハP及ビQト

同一ナリ, 若シ又PトQトガ反對方向ヲ有スル時ハRノ大サハ, Pノ方向ヲ正トシQノ方向ヲ負トスレバ, P−Q ニシテ, 此値カ正ナレバRハPト同方向ナリ, 負ナレバQト同方向ナリ.

Rノ作用線ガABト交ハル點ヲCトスレバ次ノ關係アリ.

$$\frac{P}{Q}=\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

A, BハP及ビQノ作用線上ノ任意ノ點ナルヲ以テ, Rノ作用線ハ P, Q ノ作用線ニ交ハル任意ノ直線 AB ヲPトQトノ反比ニ内分(PトQト同方向ノ塲合)又ハ外分(PトQト反對方向ノ塲合)スト云フコトヲ得.

PトQトノ垂直距離ヲlトシ, PトRトノ垂直距離ヲmトシ, QトRトノ垂直距離ヲnトスレバ

$$Pm=Qn$$

即 $$\frac{P}{Q}=\frac{n}{m}$$

又 $$Ql=Rm$$

∴ $$m=\frac{Ql}{R}$$

又 $$Pl=Rn$$

∴ $$n=\frac{Pl}{R}$$

此塲合ニモ各力ノ moments ノ和ハ合力ノ moment ニ等シト云フコトヲ得.

48. 同一平面上ニアル數多ノ平行力ノ組合

與ヘラレタル諸力ヲ F_1, F_2, F_3 等トシ其合力ヲRトスレバ

$$R=\Sigma F \quad \cdots\cdots (1)$$

但ΣFハ一方ヘ向ヘルモノヲ正トシ他方ヘ向ヘルモノヲ負トセル代數和ナリ, Rノ方向ハ ΣF ノ方向ニテ定ル.

任意ノ點Oニ關スル諸力ノ moments ノ代數和ヲ ΣM トシ, Rノ此點ニ關スル moment ノ arm ヲ a トスレバ

$$\left.\begin{aligned} Ra &= \Sigma M \\ \therefore \quad a &= \frac{\Sigma M}{R} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

Rノ作用線ハOヨリ a ナル距離ニアリテ Ra ト ΣM トガ同符號トナルベキ側ニアリ.

(1)ニヨリテRノ大サト方向ト定マリ(2)ニヨリ作用線ノ位置ガ定マル.

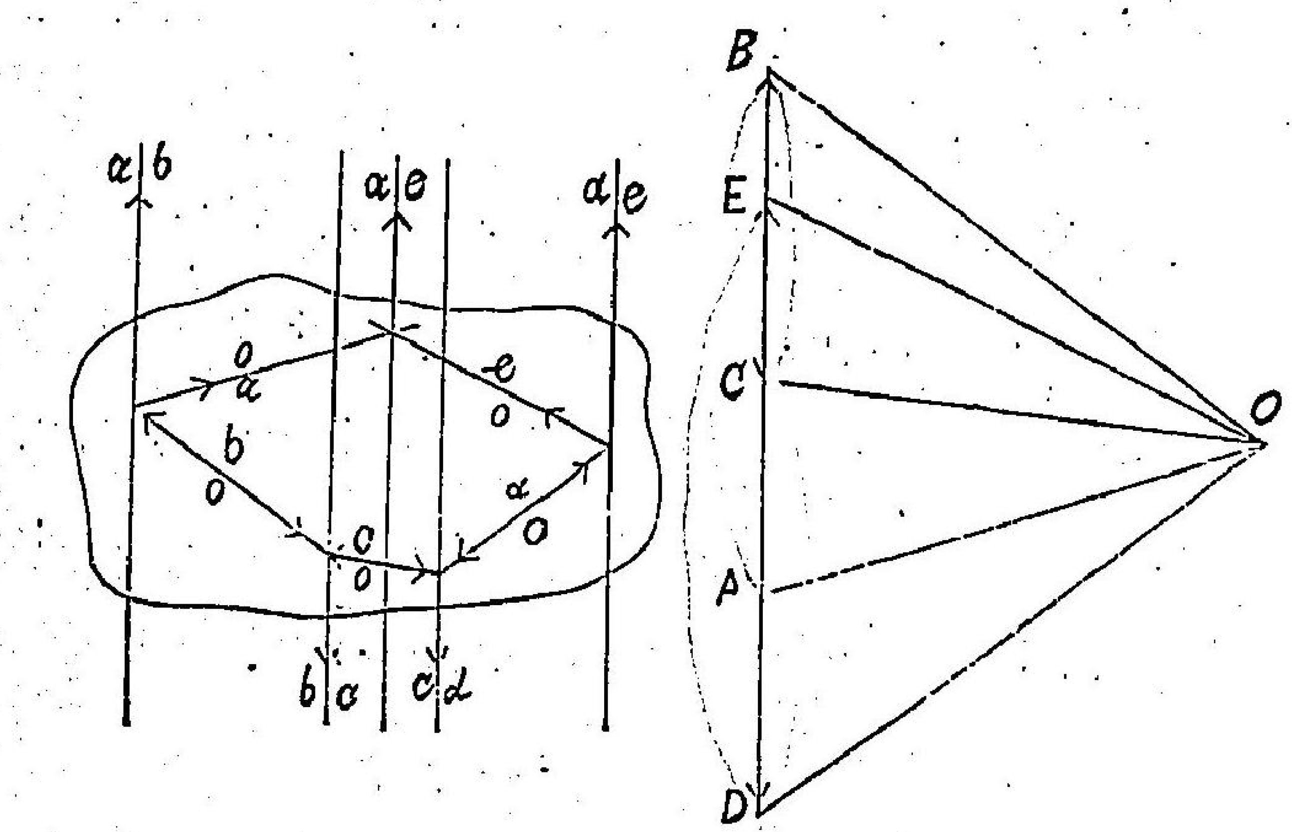
ΣF=R=O ナレバ諸力組合セノ結果ハ couple ナルコトヲ示スモノニシテ其 couple ノ moment ハ ΣM ナリ.

圖上ニ於テ合力Rヲ定ムルニハ次ノ如クナスベシ.

簡單ノ爲ニ與ヘラレタ力ヲ四個トス, AB, BC, CD, DE ハ與ヘラレタル力ヲ表ハス vectors ナリ然ル時 ABCDE ハ力ノ多角形ニシテ, AE ハ合力ノ大サ幷ニ方向ヲ表ハスモノナリ.

作用線ノ位置ヲ定ムル爲ニ任意ノ點Oヲ撰ビABヲ

AO ト OB トニ分ツ, BC ヲ BO ト OC トニ分ツ, CD ヲ CO ト OD トニ分ツ, DE ヲ DO ト OE トニ分ツ是等 vectors ニ對スル作用線ハ *ab, bc, ao, bo* 等ヲ以テ示ス.



ao ト *ob* トハ *ab* 上ノ任意ノ點ニテ交ハラシムルコトヲ得, *bo* ト *oc* トハ *bc* 上ノ任意ノ點ニテ交ハラシムルコトヲ得他ノ作用線ニ付テモ同樣ナリ,故ニ便宜上 *ob* ト *bo* ト一致スル樣ニ, *oc* ト *co* ト一致スル樣ニ, *od* ト *do* ト一致スル樣ニ置ケバ *ao* ト *oe* トハ交ハル可シ,其交點ハ AE ノ作用線ノ通過スベキ點ナリ.

O點ヲ力ノ多角形ノ Pole ト云ヒ, AO, BO, CO 等ヲ Rays ト云フ,又 *ao, bo, co* 等ニテ作ラレタル多角形ヲ Funicular Polygon ト云ヒ其各邊ヲ String ト云フ.

若シモ力ノ多角形ニ於テAトEトガ一致スレバ諸力組合ノ結果ハ couple ナルコトヲ示ス,而シテ *ao* ト *oe* トハ平行スベシ, *ao* ト *oe* トノ間ノ距離ハ即チ couple ノ arm

ナリ,之ニ AO ノ大サヲ乘シタルモノハ couple ノ moment ナリ.若シ ao ト oe トガ全ク一致スル時即チ funicular polygon ガ閉ヂタル塲合ニハ resultant ハ全ク無キナリ.

49. 同一平面上ニアリテ一點ニ會セザル且平行ナラザル諸力ノ組合

F_1, F_2, F_3 等ヲ與ヘラレタル諸力トシ, F_1 ガ x 及 y 軸トナセル角ヲ夫々 α_1, β_1 トシ, F_2 ガ x 及 y 軸トナセル角ヲ夫々 α_2, β_2 トシ F_3 カ x 及 y 軸トナセル角ヲ夫々 α_3, β_3 トス其他ノ力ニ付テモ同様ナルモノトス.合力ヲ R トシ R ガ x 及 y 軸トナセル角ヲ夫々 α_r, β_r トス.

$$R=\{(\Sigma F\cos\alpha)^2+(\Sigma F\cos\beta)^2\}^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots\cdots (1)$$

又

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_r&=\frac{\Sigma F\cos\alpha}{R}\\ \cos\beta_r&=\frac{\Sigma F\cos\beta}{R}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots (2)$$

又任意ノ點ニ關スル諸力ノ moments ノ和ヲ ΣM トシ R ノ此點ニ關スル moment ノ arm ヲ a トスレバ

$$\left.\begin{aligned}Ra&=\Sigma M\\ \therefore\quad a&=\frac{\Sigma M}{R}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots (3)$$

(1)ニヨリ R ノ大サガ與ヘラレ,(2)ニヨリ方向ガ定マリ,(3)ニヨリ作用線ノ位置確定ス但 R ノ moment ノ符號ガ ΣM ノ符號ト一致スル様ニ a ヲ採ルベシ.

若シモ

$$\Sigma F\cos\alpha=\Sigma F\cos\beta=0$$

ナレバ

$$R=0$$

故ニ resultant ハ couple ニシテ其 moment ハ ΣM ナリ.

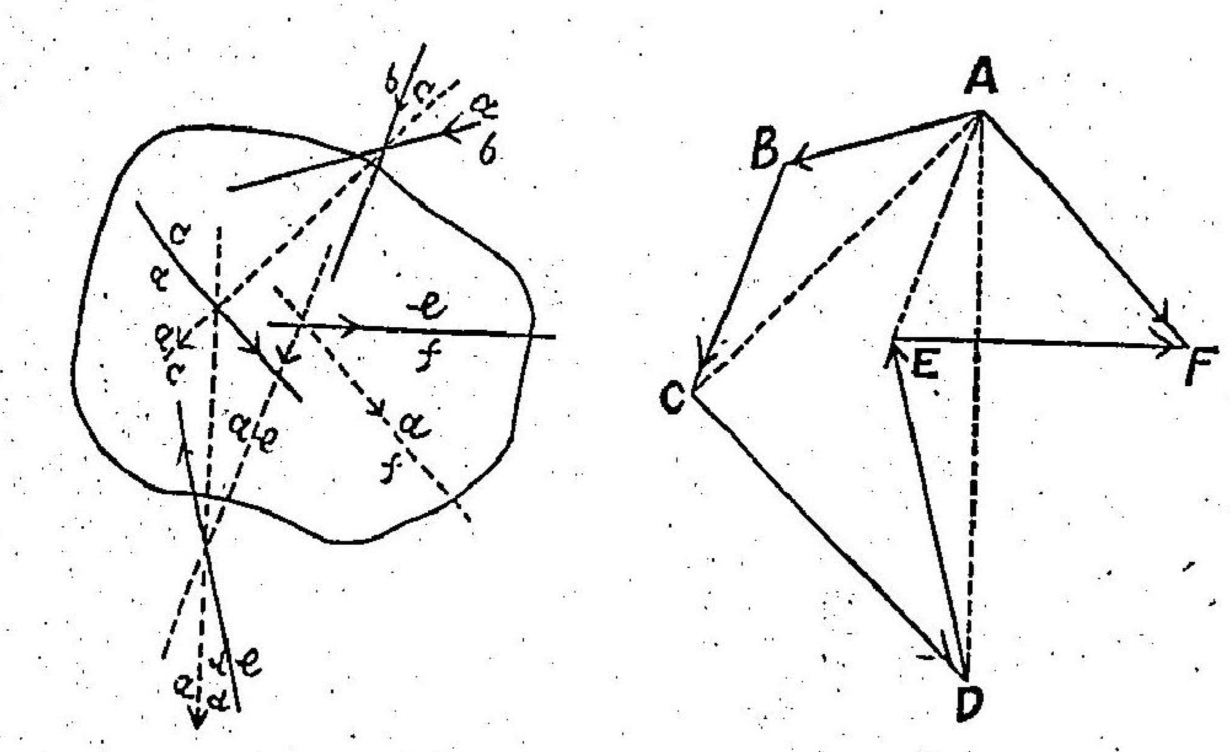
若シモ與ヘラレタル諸力ガ數多ノ couples ヨリ成ル時ニハ

$$\Sigma F\cos\alpha=\Sigma F\cos\beta=0$$

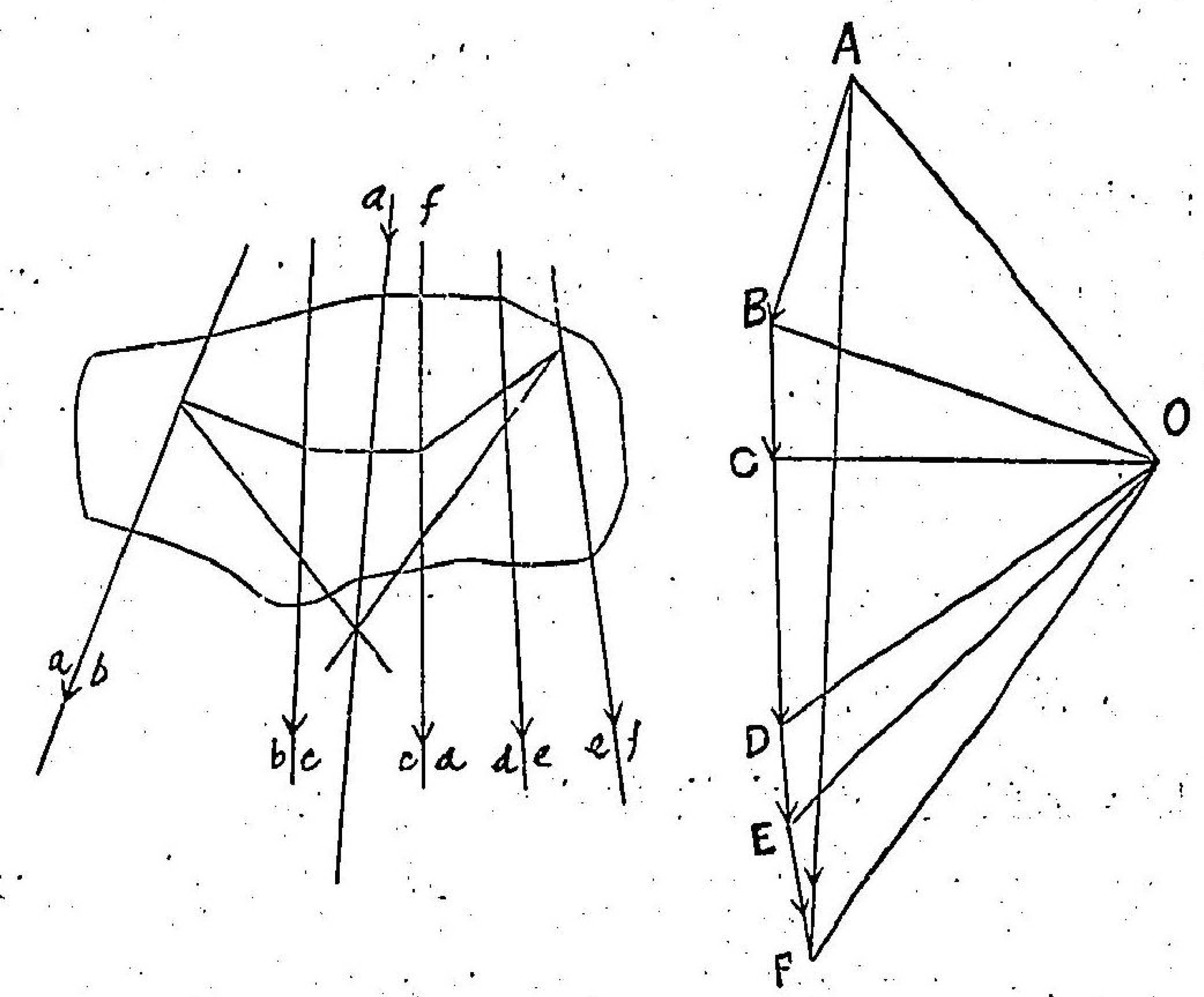
故ニ數多ノ couples ノ resultant ハ亦一ツノ couple ナリ,其 moment ハ ΣM ナリ.

圖上ニテ組合ハス方法次ノ如シ.

ABCDEF ハ力ノ多角形ナリ, AF ハ合力ノ大サ及ビ方向ヲ表ハス,其作用線ハ af ナリ,力ノ多角形ガ閉ヅレバ Resultant ハ couple ナリ.



若シモ與ヘラレタル諸力ノ作用線ガ殆ト平行セル塲合ニハ作用線ノ交點ガ限リアル紙上ニ求メラレサルコトアリ此クノ如キ塲合ニハ平行力ノ塲合ニ用ヰタルト同様ナル方法ヲ採ルベシ.



ABCDEF ハ力ノ多角形ナリ,AF ハ合力ニシテ其作用線ハ *af* ナリ.

50. 同一平面上ニアラザル平行力ノ組合.

與ヘラレタル諸力ノ作用線ニ平行ニ z 軸ヲ採リタリトス,諸力ノ代數和ヲ ΣF トシ,合力ヲ R トスレバ

$$R=\Sigma F \qquad \text{(1)}$$

R ノ方向ハ ΣF ノ符號ニテ定マル.

諸力ノ x 及 y 軸ニ關スル moments ノ和ヲ夫々 ΣM_x, ΣM_y トス,又 R ノ作用線ガ xy 面ヲ切ル點ノ坐標ヲ $\bar{x}$, $\bar{y}$ トス,然ル時

$$R\bar{x}=\Sigma M_y$$

$$R\bar{y}=\Sigma M_x$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{\Sigma M_y}{R}\\ \bar{y}&=\frac{\Sigma M_x}{R}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(2)}$$

(1) ト (2) トニヨリ R ノ大サ,方向,及ビ作用線ノ位置ハ定マル.

$\Sigma F=R=0$ ナル時ハ couple ナリ.

51. 同一平面上ニアラザル,一點ニ會セザル,且平行ナラザル諸力ノ組合.

諸力ノ作用線ヲ延長シテ任意ニ撰バレタル平面 P ニ交ハラシム,作用線ガ此平面ニ交ハレル點ニ於テ各力ヲ夫々此平面上ノモノト之ニ直角ナルモノトニ分解スベシ然ル時與ヘラレタル諸力ハ同一平面 P 上ニアル數多ノ力ト,此平面ニ直角ナル平行力トノ二組トナルベシ,而シテ此二組ハ各一力ニ組合スコトヲ得,前者ノ合力ヲ R_t トシ後者ノ合力ヲ R_n トス是ニヨリテ與ヘラレタル諸力ハ R_t ト R_n トノ二力ニ組合ハスコトヲ得タルモノナリ.

第　四　章

重　心

52. 平行力ノ Centroid.

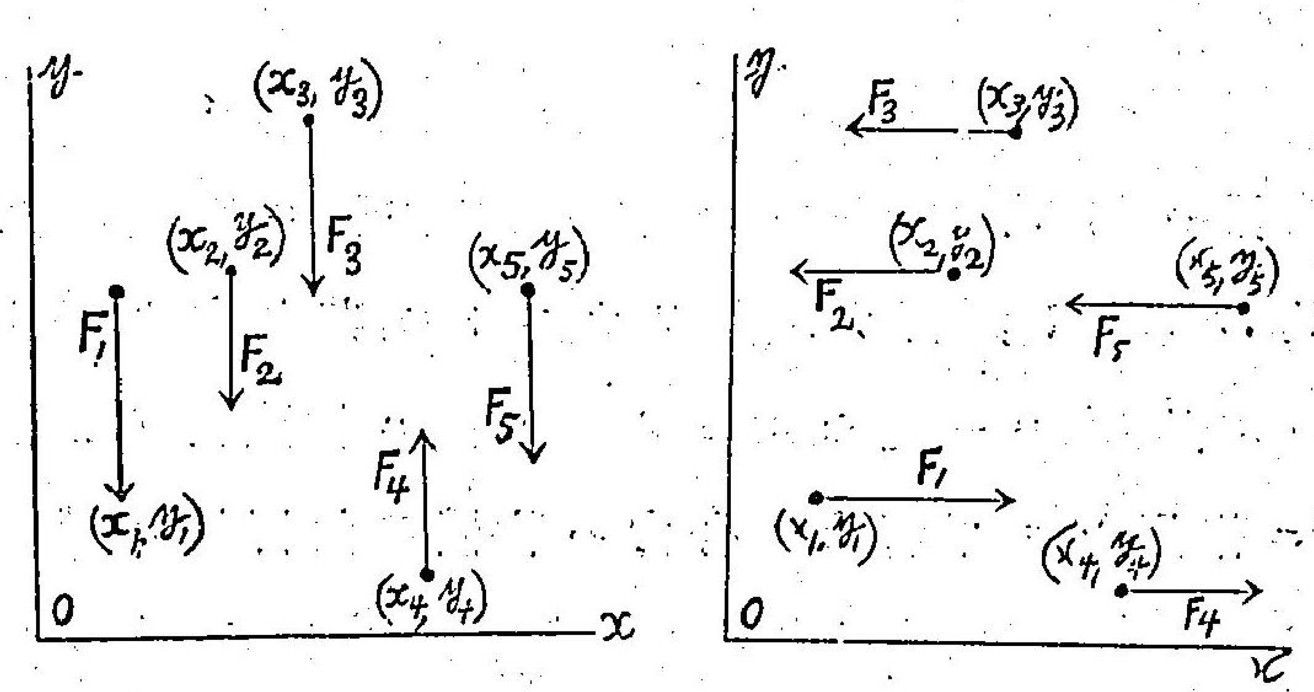
F_1, F_2 ハ平行力ニシテ着力點ヲ夫々 A, B トス,然ル時此二力ノ合力ハ直線AB,又ハ其延長上ノ定マレル點C′ヲ通ズ.

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}=\frac{F_2}{F_1}$$

此關係ハ F_1, F_2 カ AB トナセル角ノ如何ニ關セズ,即チ F_1, F_2 カ AB ト如何ナル角ヲナストモ,其合力カ AB ト交ハル點 C′ ハ一定セルモノナリ,故ニ物體内ノ二點A, B ニ作用セル平行力ノ合力ハ物體ヲ如何様ニ轉スルモ,與ヘラレタル平行力ノ方向及ビ着力點ヲ變セサル限リハ常ニ一定ノ點 C′ ヲ通スヘシ,此點 C′ ハ平行力ノ合力ノ着力點ト見做スコトヲ得,此物體ノ他ノ點 C ニ F_1, F_2 ニ平行ナル F_3 ナル力働ケリトス,然ル時 F_1, F_2 ノ合力ハ一定點 C′ ヲ通シテ働クベク,此 C′ ヲ通スル F_1, F_2 ノ合力ト, C ニ働ケル F_3 トノ合力モ亦前ト同理ニテ力ノ方向及ビ着力點ヲ變セザル限リハ一定點 C″ ヲ通シテ作用スベシ, C″ ハ三力 F_1, F_2 及ビ F_3 ノ合力ノ着力點ト

見做スコトヲ得同樣ニ數多ノ平行力 F_1, F_2, F_3, F_4 等ガ物體ノ A, B, C, D 等ニ働ケル時,是等ノ力ノ方向,及ヒ着力點ヲ變セサル限リハ,是等ノ力ノ合力ハ物體ヲ如何ニ轉スルモ物體ニ相對的ニ固定セル點ヲ通ズ,此點ハ與ヘラレタル數多ノ平行力ノ合力ノ着力點ト見做シ得ベキモノニシテ此點ヲ與ヘラレタル平行力ノ centroid ト云フ.

F_1, F_2, F_3 等ヲ xy 平面上ニアル平行力トス,各力ノ着力點ノ坐標ヲ夫々 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3 y_3)$ 等トス,合力ヲ R トシ, centroid ノ坐標ヲ $(\bar{x}, \bar{y})$ トス.



作用線ガ y 軸ニ平行セルモノトスレバ

$$R\bar{x} = E_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \cdots\cdots$$

但 Fx ハ正又ハ負ナリ.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\Sigma Fx}{R} = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F}$$

着力點ヲ固定セル儘同一ノ向キニ廻轉シ作用線ガ x 軸ニ平行トナリシ時

$$R\bar{y} = F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3 + \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{\Sigma Fy}{R} = \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F}$$

故ニ centroid ノ坐標ハ

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F} \\ \bar{y} &= \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F} \end{aligned}\right\}$$

同一平面上ニアラザル平行力ニ付テ其 centroid ノ坐標ヲ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ トスレハ

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F} \\ \bar{y} &= \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F} \\ \bar{z} &= \frac{\Sigma Fz}{\Sigma F} \end{aligned}\right\}$$

53. Centre of Gravity.

物體ヲ組成セル各質點ニ働ケル地球引力,即チ各質點ノ weight ハ平行力ト見做スコトヲ得,從ヒテ是等平行力ノ centroid アリ,此 centroid ヲ Centre of Gravity ト云フ各質點ノ重量ヲ夫々 w_1, w_2, w_3 等トシ全重量ヲ W トスレバ,前節ニヨリ centre of gravity ハ次式ニテ與ヘラル,平面ニ付

$$\bar{x} = \frac{\Sigma wx}{W}, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma wy}{W}$$

立體ニ付

$$\bar{x}=\frac{\Sigma wx}{W},\quad \bar{y}=\frac{\Sigma wy}{W},\quad \bar{z}=\frac{\Sigma wz}{W}$$

立體,面,又ハ線ノ centre of gravity ナル語ハ幾何學上ノ立體,面又ハ線ニハ重量無キヲ以テ適當ナラズ,故ニ立體,面,又ハ線ノ centroid ナル語ヲ用フルコトアリ,或立體ノ centroid トハ其立體ト同一ノ表面ヲ有スル homogeneous ナル物體ノ centre of gravity ト一致スベキ點ノコトナリ,或面ノ centroid トハ其面ト一致セル面ヲ有スル homogeneous ナル薄板ノ厚サガ零ニ近接セル場合其 centre of gravity ノ極限ノ位置ナリ,又線ノ centroid トハ其線ト一致セル軸ヲ有スル homogeneous ナル細キ棒ノ横斷面積ガ零ニ近接セル場合ノ其 centre of gravity ノ極限ノ位置ナリ.

54. 平面ニ關スル weight ノ moment.

或平面ニ關スル物體ノ weight ノ moment ハ,其物體ノ weight ト其平面ヨリ其物體ノ centre of gravity ヘノ距離トノ乘積ナリ,其 moment ノ符號ハ其 centre of gravity ノ坐標ノ符號ニ同一ナリトス,

此定義ニヨリテ物體ノ weight ノ moment ハ其ノ centre of gravity ヲ含ム平面ニ付テハ零ナルコトガ知ラル.

或平面ニ關スル物體ノ weight ノ moment ハ,其物體ノ部分ノ weight ノ同一平面ニ關スル moment ノ代數和ニ等シ.

或物體ノ重量ヲ W トシ,其 centre of gravity ノ x 坐標ヲ

$\bar{x}$ トス,此物體ノ或部分ニ屬スル質點ノ重量ヲ夫々 w_1', w_1'', w_1''' 等トシ,是等質點ノ x 坐標ヲ夫々 x_1', x_1'', x_1''' 等トス,又此物體ノ他ノ部分ニ屬スル質點ノ重量ヲ夫々 w_2', w_2'', w_2''' 等トシ,是等質點ノ x 坐標ヲ夫々 x_2', x_2'', x_2''' 等トス,他ノ部分ニ付テモ同樣ナリ,又

$$w_1'+w_1''+w_1'''+\cdots\cdots=W_1$$

$$w_2'+w_2''+w_2'''+\cdots\cdots=W_2$$

$$w_3'+w_3''+w_3'''+\cdots\cdots=W_3$$

等トス,從テ

$$\therefore\ W=W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots$$

然ル時

$$\bar{x}=\frac{(w_1'x_1'+w_1''x_1''+\cdots\cdots)+(w_2'x_2'+w_2''x_2''+\cdots\cdots)+\cdots\cdots}{(w_1'+w_1''+\cdots\cdots)+(w_2'+w_2''+\cdots\cdots)+\cdots\cdots}$$

故ニ

$$W\bar{x}=W_1\bar{x}_1+W_2\bar{x}_2+W_3\bar{x}_3+\cdots\cdots$$

但シ

$$\bar{x}_1=\frac{w_1'x_1'+w_1''x_1''+w_1'''x_1'''+\cdots\cdots}{W_1}$$

$$\bar{x}_2=\frac{w_2'x_2'+w_2''x_2''+w_2'''x_2'''+\cdots\cdots}{W_2}$$

$$\bar{x}_3=\frac{w_3'x_3'+w_3''x_3''+w_3'''x_3'''+\cdots\cdots}{W_3}$$

等トス.

前述セル所ニ於テ weight ナル語ノ代リニ容積,面積又ハ長サヲ用フレハ,前掲ノ關係ハ即所謂容積,面積,又ハ長サノ平面ニ關スル moment ニ對スル關係ナリ.

55. 部分ノ移動ニヨル全部重心ノ移動.

全體ノ重量ヲWハW_1, W_2, W_3ナル三部分ヨリ成レリトスレハ前節ヨリ.

$$\bar{x}=\frac{W_1\bar{x}_1+W_2\bar{x}_2+W_3\bar{x}_3}{W}$$

假ニW_2ノ重心ノx坐標カaダケ加ハリタリトスレハWノ重心ノ新位置ノx坐標ヲ$\bar{x}'$トナルベシ,而シテ

$$\bar{x}'=\frac{W_1\bar{x}_1+W_2(\bar{x}_2+a)+W_3\bar{x}_3}{W}$$

$$=\frac{W_1\bar{x}_1+W_2\bar{x}_2+W_3\bar{x}_3}{W}+\frac{W_2a}{W}$$

$$=\bar{x}+\frac{W_2a}{W}$$

$$\therefore \qquad \bar{x}'-\bar{x}=\frac{W_2a}{W}$$

56. Zero Moment ノ平面.

或平面ニ關シ容積(面積,長サ)ノ moment カ零ナル時其平面ヲ其立體(表面,線)ノ zero moment ノ平面ト云フ,立體(表面,線)ノ重心ハ zero moment ノ平面上ニアリ.

zero moment ノ平面ハ

圓ノ弧ニ付テハ直徑ヲ含ム bisecting plane ナリ.

Sector ニ付テハ直徑ヲ含ム bisecting plane ナリ.

三角形ニ付テハ中線ヲ通スル平面ナリ.

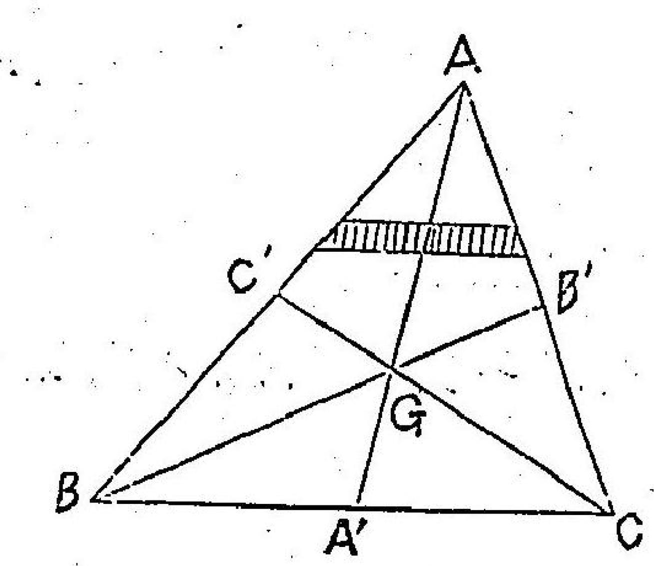
平行四邊形ニ付テハ其對角線ヲ含ム平面ナリ.

三角錐ニ付テハ其頂點ト底面ノ中線トヲ含ム平面ナリ.

57. 三角形ノ centroid.

三角形ノ centroid ハ其中線ノ交點ナリ.

AA′, BB′, CC′ハ三角形ABCノ中線ナリ,是等ノ一ヲ含メル平面ハ zero moment ノ平面ナリ,三角形ノ面モ亦 zero moment ノ平面ナリ,是等平面ノ交リノ點Gハ三角形ノ重心ナリ,又ハ次ノ如ク言フコトヲ得ヘシ,BCニ平行ナ



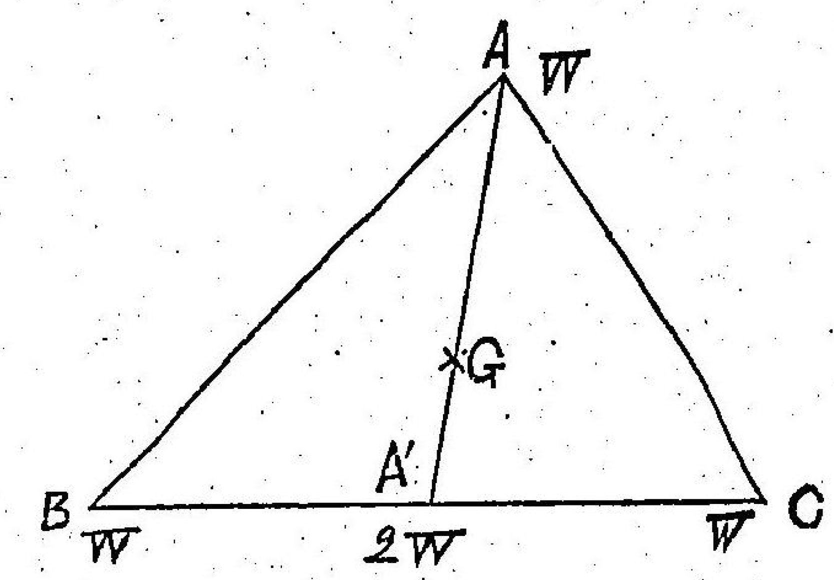
ル直線ヲ以テ三角形ヲ帶狀極微小面積ニ分ツ,各小面積ノ重心ハ夫々AA′直線上ニアリ,故ニABCノ重心ハAA′上ニアリ,同様ニBB′上ニモアラザル可ラス,故ニ其交點Gハ三角形ノ重心ナリ.

GハAヨリAA′ノ$\frac{2}{3}$ノ位置ニアリ.

58. 一直線上ニアラザル三點ニ置カレタル相等シキ重錘ノ重心.

A, B, Cノ三點ニ各重量Wナル三個ノ重錘アリトス, Bニアル重量WトCニアル重量Wトノ代リニ,BCノ

中點A'ニアル2Wヲ以テ置キ換フルコトヲ得, AニアルWト, A'ニアル2WトノT重心ハ即チA,B,Cニアル三個ノ重錘ノ重心Gナリ, Gハ



$$\frac{AG}{GA'}=\frac{2W}{W}$$

ノ關係ヲ滿足スヘキ點ナリ故ニAGハAA'ノ$\frac{2}{3}$ナリ,故ニA,B,Cノ各點ニ相等シキ重量ガ配置サレタル時其重心ハ三角形ABCノ重心ト一致ス.

59. 平行四邊形ノ重心.

平行四邊形ノ重心ハ其對角線ノ交點ナルコトガ容易ニ證明セラル.

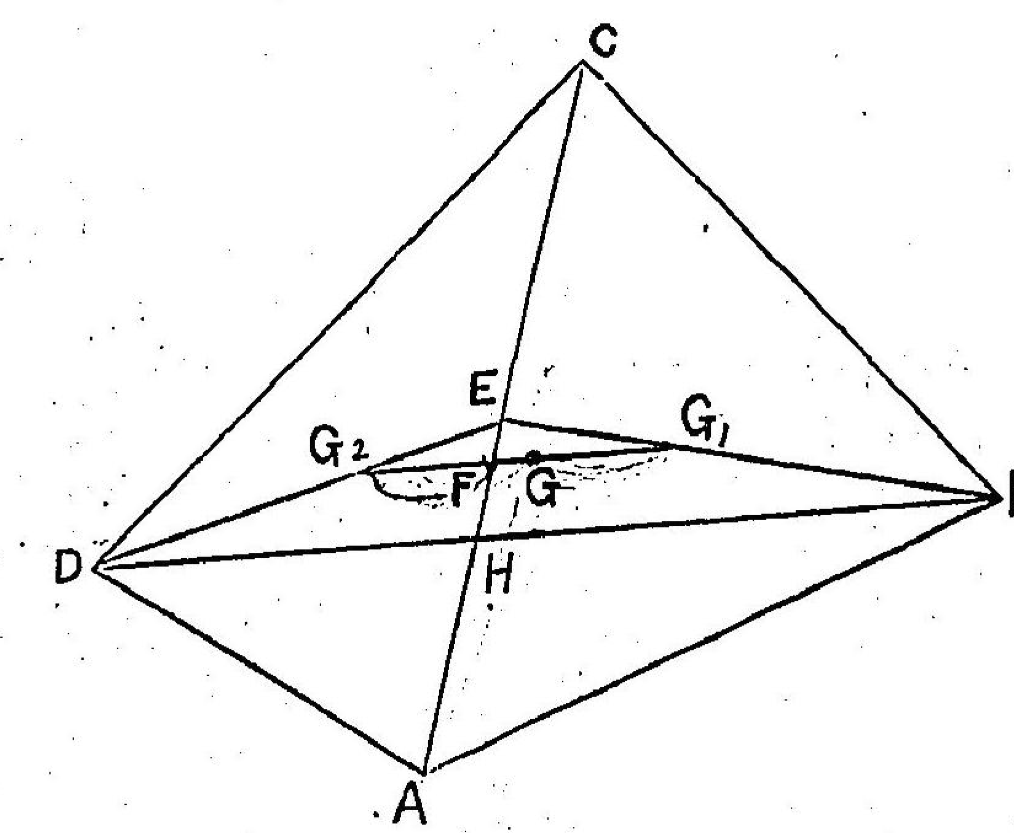
60. 四邊形ノ重心.

四邊形ABCDノ對角線ACノ中點EヲB,及ビDト結ビ, BE, DEノ上ニ二點G_1, G_2ヲ設ケEG_1ヲBEノ$\frac{1}{3}$, EG_2ヲDEノ$\frac{1}{3}$ニ等シカラシメ, G_1トG_2トヲ結ビACトFニテ交ハラシム, G_1G_2ノ上ニテG_1GヲG_2Fニ等シクスレバGハ所求ノ重心ナリ.

何ントナレバ對角線BDヲ引キテACトHニテ交ハラシムレバ, G_1, G_2ハ夫々△ABC,△ACDノ重心ナリ且

$$\triangle ABC:\triangle ACD=BH:DH.$$

然ルニ



$$BH:DH=G_1F:G_2F$$
$$=G_2G:G_1G$$

故ニ

$$\triangle ABC:\triangle ACD=G_2G:G_1G$$

故ニGハABCDノ重心ナリ.

61. 梯形ノ重心.

ABCDハ梯形ナリ, E,Fハ夫々AB,CDノ中點ナリ, EトFトヲ結ブ,

$$AB=a,\quad CD=b,\quad EF=c$$

トス然ル時重心GハEF上ニアリテ

$$EG=\frac{c}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}$$

ナリ.

AF, BFニヨリテ梯形ハ三個ノ三角形CAF, AFB, FBDトナレリ, △ACFト△BFDトハ面積相等シ其面積ヲSトス他ノ△AFBノ面積ヲS'トスレバ

$$\frac{S}{S'}=\frac{\frac{1}{2}b}{a}=\frac{b}{2a}\cdots\cdots(1)$$

一般ニ三角形ノ重心ハ,其角點ニ三角形ノ重量ノ$\frac{1}{3}$宛分配サレタル其三個ノ重量ノ重心ト一致スルヲ以テ, S 及ビ S′ ヲ夫々其三角形ノ角點ニ分配スレバ

A, 及ビ B ノ各點ニ

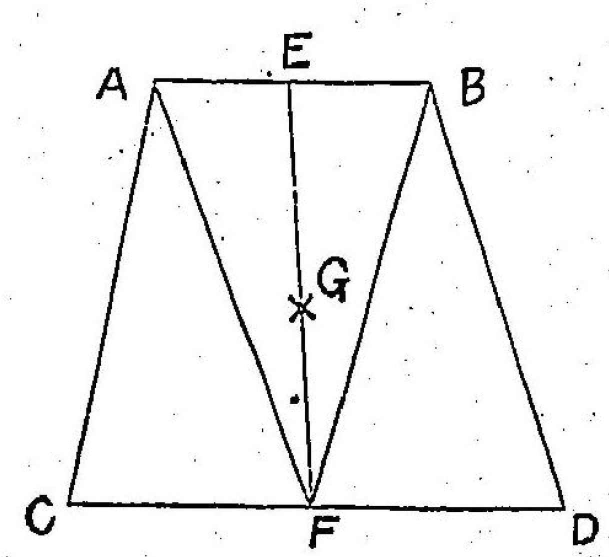
$$\tfrac{1}{3}(S+S')$$

C, 及ビ D ノ各點ニ

$$\tfrac{1}{3}S$$

F ニ於テ

$$\tfrac{1}{3}S'+\tfrac{2}{3}S$$



宛トナルベシ, A 及ビ B ニアルモノハ E ニ於ケル

$$\tfrac{2}{3}(S+S')$$

ニテ置キ換フルコトヲ得, C, D, F ニアルモノハ F ニ於ケル

$$\tfrac{1}{3}S'+\tfrac{4}{3}S$$

ニテ置キ換フルコトヲ得,故ニ梯形ノ重心 G ハ EF 上ニアリテ

$$\tfrac{2}{3}(S+S')\times EG=\tfrac{1}{3}(S'+4S)\times FG\cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トヨリ

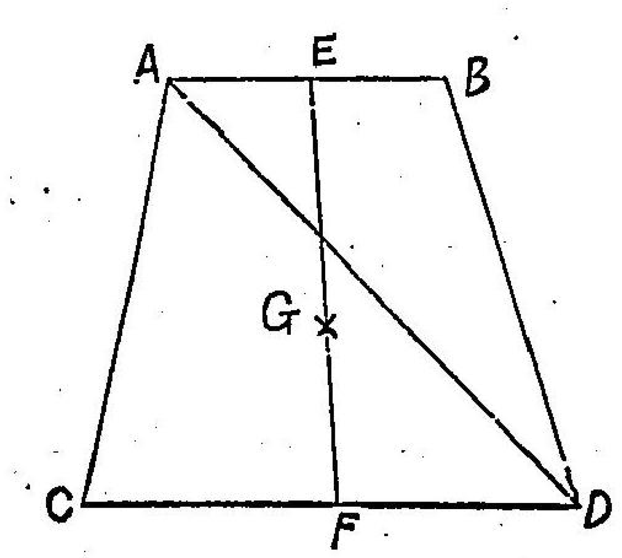
$$\frac{EG}{FG}=\frac{a+2b}{b+2a}\cdots\cdots(3)$$

故ニ EF ヲ c トスレバ

$$EG=\frac{(a+2b)c}{3(a+b)}$$

又次ノ如クニシテモ見出サル,梯形ノ高サヲ h トス, ABCD ヲ二ツノ三角形 ABD, ADC ニ分ツ時各面積ハ夫々

∴ $\frac{1}{2}ah,\quad \frac{1}{2}bh,$



而シテ底邊 CD ヨリ是等ノ三角形ノ重心ヘノ距離ハ夫々

$\frac{2}{3}h,\quad \frac{1}{3}h.$

ナリ,又梯形ノ面積ハ

$$\tfrac{1}{2}(a+b)h$$

ナリ, y ヲ CD ヨリ G ニ至ル距離トスレバ

$$\frac{1}{2}(a+b)hy=\frac{ah}{2}\times\frac{2}{3}h+\frac{bh}{2}\times\frac{1}{3}h$$

$$\therefore\quad y=\frac{2a+b}{a+b}\times\frac{h}{3}$$

$$\therefore\quad FG=\frac{(2a+b)c}{3(a+b)}$$

或ハ

$$EG=\frac{(a+2b)c}{3(a+b)}$$

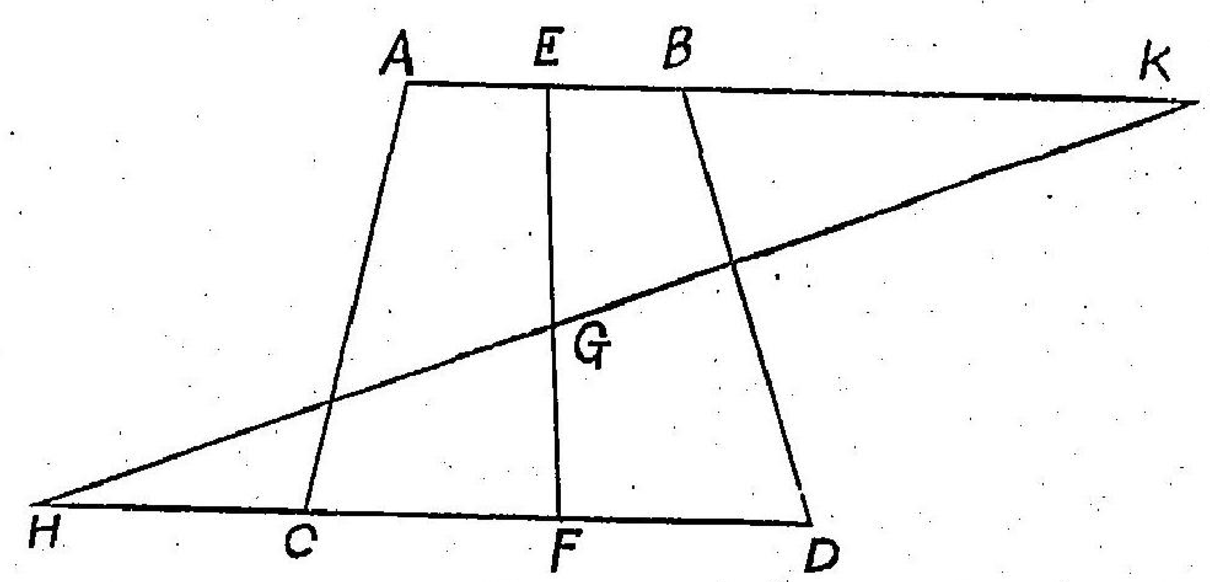
圖上ニテ定ムルニハ AB ヲ K 迄延長シ

$$BK=b$$

ナラシメ, DC ヲ H 迄延長シ

$$CH=a$$

ナラシムベシ然ル時 HK ト EF トノ交點 G ハ所求ノ重心ナリ.



何ントナレバ CD ニ平行ナル直線ニテ數多ノ帶狀ノ微小面積ニ分テバ其各ノ重心ハ EF 上ニアルヲ以テ梯形ノ重心モ EF 上ニアリ,又(3)式ヨリ.

$$\frac{EG}{FG}=\frac{a+2b}{b+2a}=\frac{\frac{1}{2}a+b}{a+\frac{1}{2}b}$$

$$=\frac{EK}{HF}$$

62. 三角錐ノ重心,

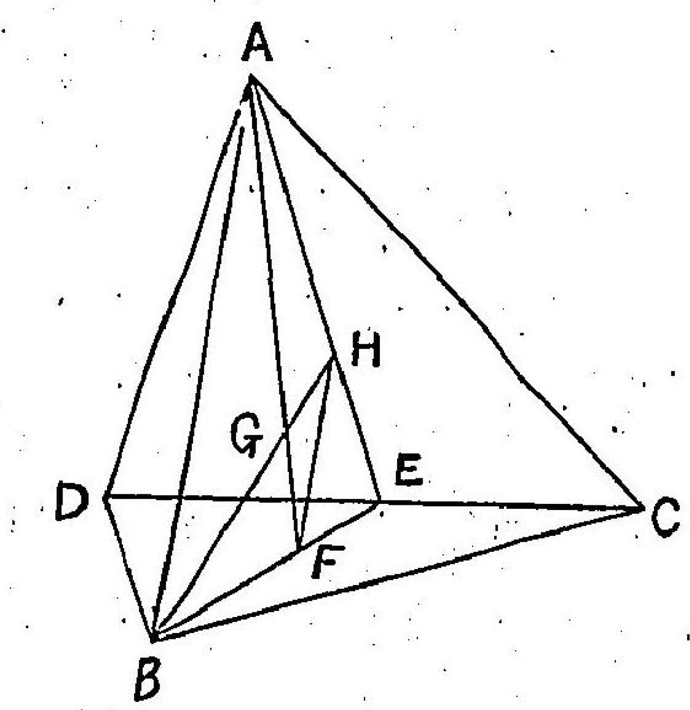
三角錐ノ重心ハ頂點ト底面ノ重心トヲ結ブ直線上ニ沿フテ,底面ノ重心ヨリ其直線ノ長サノ $\frac{1}{4}$ ノ位置ニアリ.

三角錐 ABCD ノ面 BDC ノ重心ヲ F トス, E ハ CD ノ中點ナリ,然ル時 ABE ノ面ハ zero moment ノ平面ナリ,此クノ如キ三個ノ平面ノ交リノ點 G ハ三角錐ノ重心ナリ.

H ハ三角形 ACD ノ重心ナリトスレ

$$EF=\frac{EB}{3},$$

$$EH=\frac{EA}{3}$$



故ニ HF ト AB トハ平行ナリ,而シテ

$$HF=\frac{1}{3}AB$$

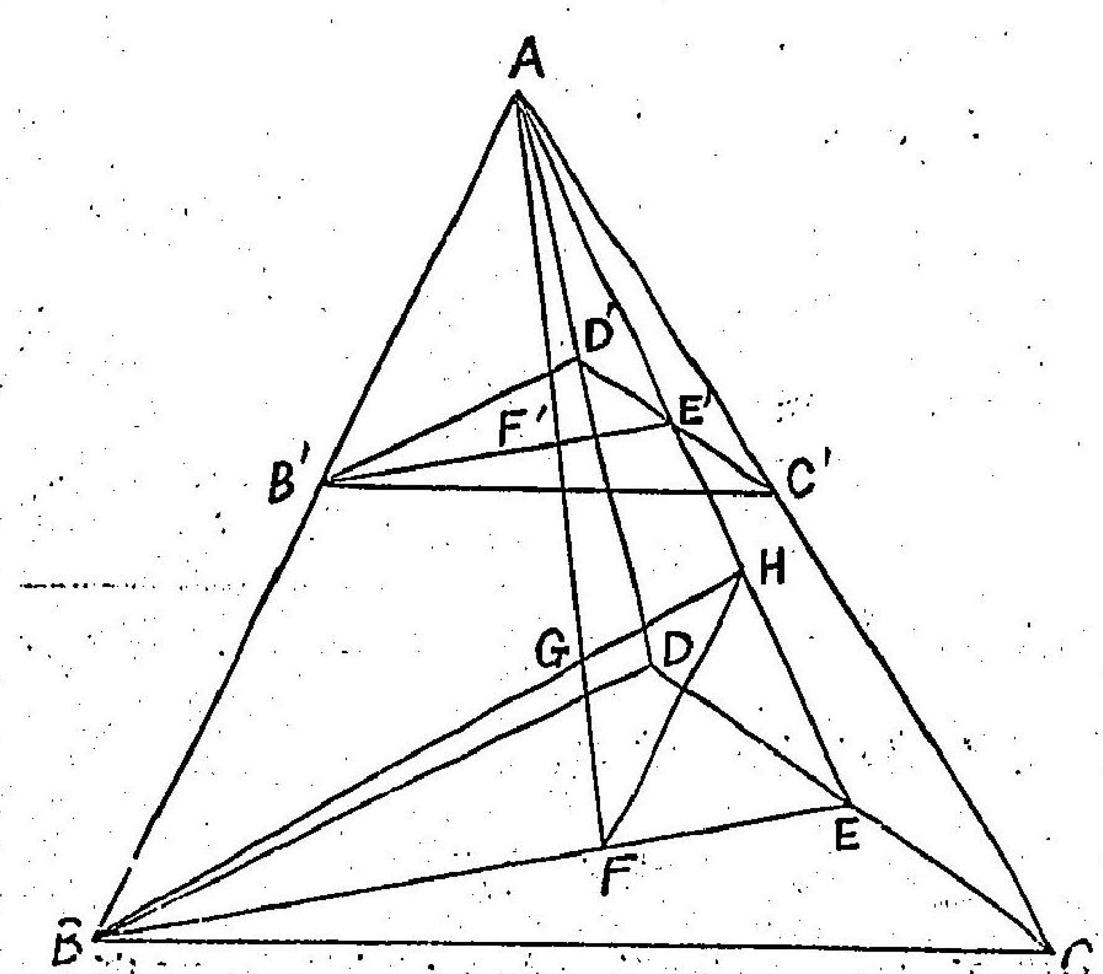
△GFH ト △GAB トハ相似形ナルヲ以テ

$$GF=\frac{1}{3}GA$$

故ニ

$$GF=\frac{1}{4}AF$$

又次ノ如クニナスモ見出サル底面ニ平行ナル截面 B′C′D′ ト AE, AF トノ交點ヲ E′, F′ トスレバ E′ ハ C′D′ ノ中點ニシテ,

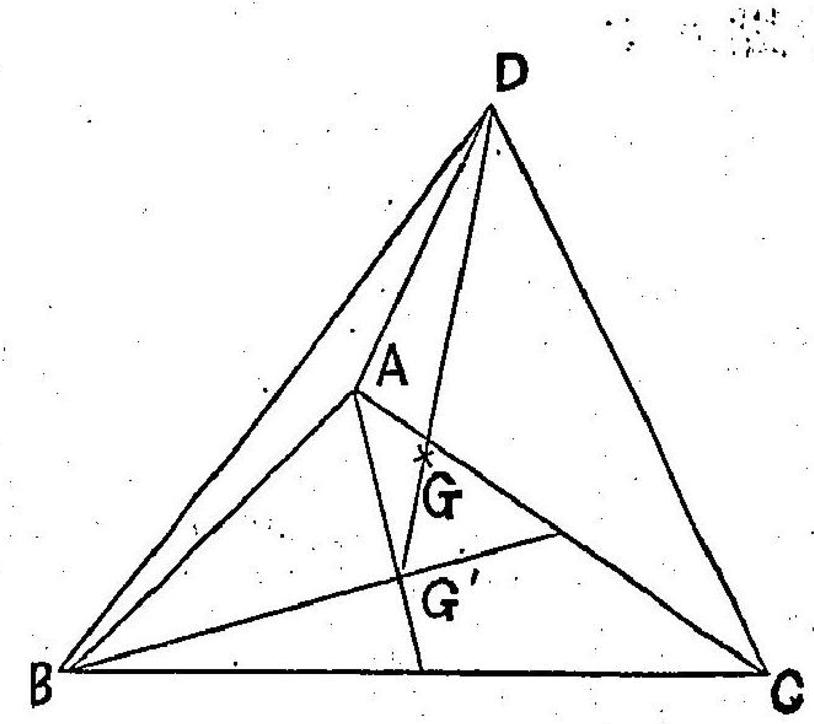


$$\frac{E'F'}{B'E'}=\frac{EF}{BE}=\frac{1}{3}$$

ナルヲ以テ F' ハ三角形 $B'C'D'$ ノ重心ナリ,是ニ由テ三角錐ヲ底面ニ平行ナル極メテ薄キ數多ノ三角板ヨリ成ルモノトセバ,是等三角形ノ重心ハ皆 AF ノ上ニアルヲ以テ,三角錐ノ重心モ亦 AF 上ニアラザル可ラズ,同樣ニシテ △ADC ノ重心ヲ H トスレバ,三角錐ノ重心ハ BH 上ニアラザル可ラス,故ニ AF ト BH トノ交點 G ハ三角錐ノ重心ナリ.

63. 三角錐ノ角點ニ置カレタル四個ノ相等シキ重量ノ重心.

ABCD ハ三角錐ナリ,各角點 A, B, C, D ニ W ナル大サノ重量アリトス, G' ヲ △ABC ノ重心トスレバ, A, B, C ニアル三個ノ重量ノ和ハ 3W ニシテ其重心ハ G' ナリ, G ヲ所求ノ重心トスレバ



$$\frac{DG}{GG'}=\frac{3W}{W}=3$$

故ニ

$$GG'=\frac{1}{4}DG'$$

故ニ三角錐ノ重心ト一致ス.

64. 任意ノ底面ノ錐體ノ重心.

任意ノ底面ノ pyramid 及 cone ノ重心ハ其底面ノ重心

ト頂點トヲ結ヘル直線ニ沿フテ,底面ノ重心ヨリ其直線ノ長サノ $\frac{1}{4}$ ノ位置ニアリ.

Pyramid ハ數多ノ elementary frustums ヨリ成ルモノト見ルコトヲ得,是等ノ內ノ任意ノ frustums ノ重心ハ其 frustum ノ面ノ重心ト終ニハ一致スベキモノナリ然ルニ是等 frustum ノ面ハ皆 pyramid ノ底面ニ similar ナルモノナリ,故ニ frustum ノ面及ビ frustums ノ重心ハ皆頂點ト底面ノ重心トヲ結ヘル軸上ニアラザル可ラズ,從テ pyramid ノ重心モ此軸上ニアリ.

又 pyramid ノ底面ヲ數多ノ三角形ニ分チ,是等ノ三角形ヲ底トシ, pyramid ノ頂點ヲ頂點トセル數多ノ pyramids トス,是等ノ細長ナル pyramids ノ重心ハ皆同一ノ平面上ニアリ,其平面ハ元ノ pyramid ノ底面ノ重心ト頂點トヲ結ブ直線ヲ,其底面ノ重心ヨリ其直線ノ長サノ $\frac{1}{4}$ ノ點ニテ切ルベシ,此點ハ即チ元ノ pyramid ノ重心ナリ.

cone ハ pyramid ノ面ノ數ガ限リ無ク增加サレタル場合ノ limit トシテ見ルコトヲ得,從テ其重心ハ pyramid ノ場合ニ同ジ.

65. 圓ノ弧ノ重心.

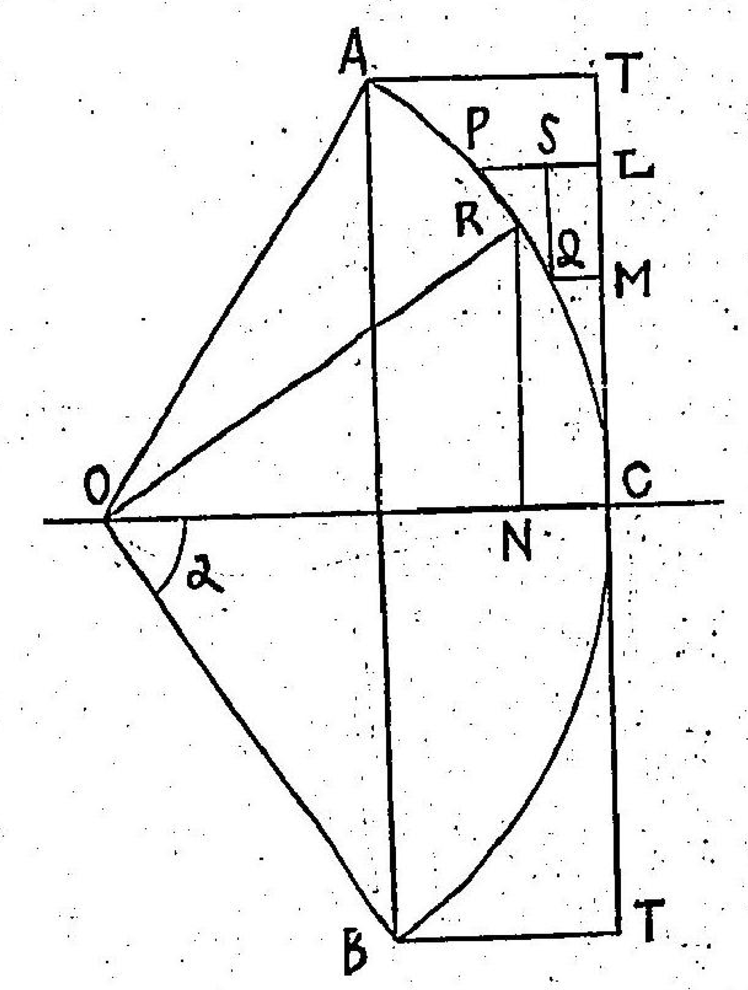
圓ノ弧ノ重心ハ中心ヨリ,中心角ノ二等分線ニ沿フテ

$$\frac{\text{半徑}\times\text{弧ノ弦}}{\text{弧ノ長}}$$

ナル位置ニアリ.

弧ABノ中心角AOBノ二等分線ヲOCトス,重心ハ明ニOCノ直線上ニアリ.

ABノ微小分ヲPQトス,其中點RヨリOCニ垂線RNヲ立テ,P,QヨリCニ於ケル切線TT'ヘ垂線PL,QMヲ引ク,SハPLトQSトノ交點ナリ,QSハTT'ニ平行ナリ,直角三角形ORNトPQSトニ於テ



$$OR:ON=PQ:OS$$

即

$$OC:ON=PQ:LM$$

$$\therefore\ OC\cdot LM=PQ\cdot ON$$

故ニ

$$\Sigma PQ\cdot ON=\Sigma OC\cdot LM=OC\Sigma LM$$
$$=OC\cdot TT'$$

而シテ

$$\Sigma PQ=\text{弧}AB$$

是等ノ値ヲ

$$\bar{x}=\frac{\Sigma wx}{W}$$

ニ用フレバ

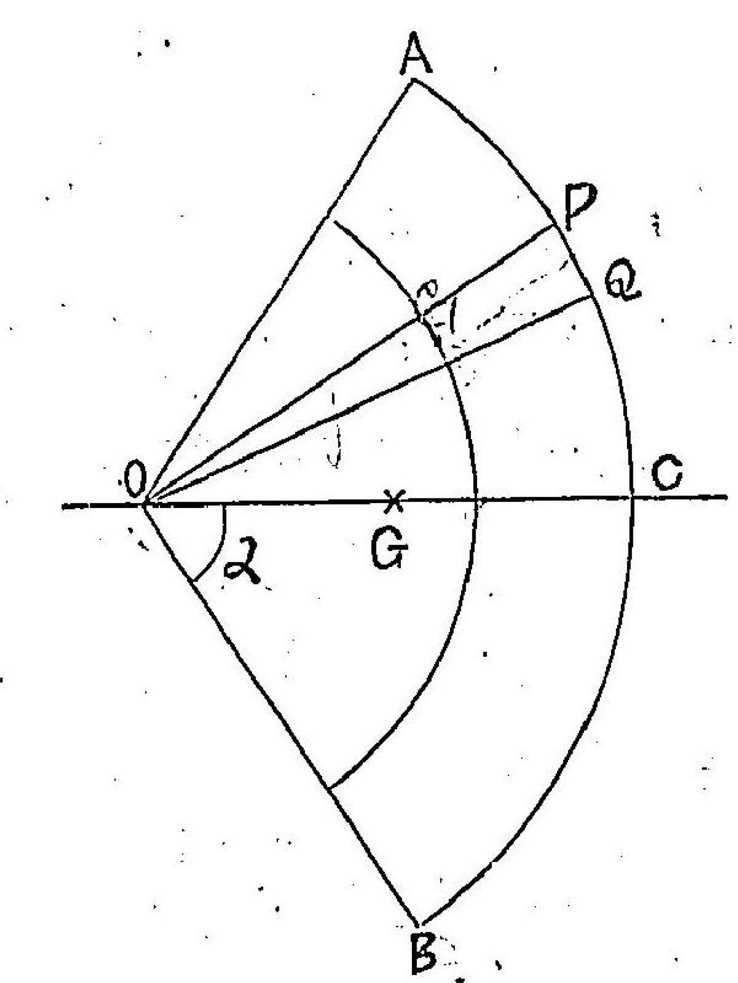
$$\bar{x}=\frac{OC\times\text{弦}AB}{\text{弧}AB}$$

半徑ヲrトシ,中心角ヲ2αトスレバ

$$\bar{x}=\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

66. 圓ノ sector 及 segment ノ重心.

AOBハsectorナリ,弧ABノ微小分ヲPQトスレバ,OPQハsectorナレドモ,PQハ甚ダ小ナルヲ以テ三角形ト見做スコトヲ得,故ニ其重心ハPQヨリOニ向テ其半徑ノ$\frac{1}{3}$ノ點ナリ,sector AOBハ此クノ如キ多數ノsectorsヨリ成ルモノト見ルコトヲ得故ニsector AOBノ重心ハ之ト同一ノ重量ヲ有シ,同一ノ中心角ヲ有シ,半徑ハ$\frac{2}{3}$ナル圓ノ弧ノ重心ト同一ナリ,故ニGヲ重心トスレバ



$$OG=\frac{2}{3}\,\frac{OA\times\text{弦}AB}{\text{弧}AB}$$

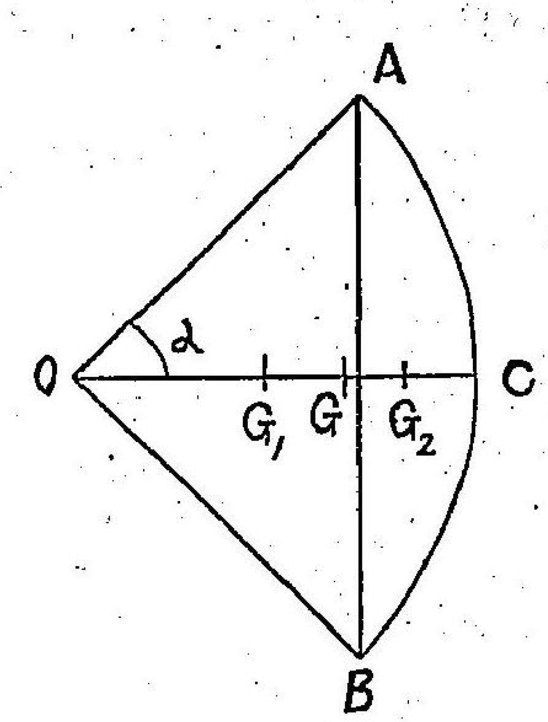
中心角AOBヲ2α radiansトスレバ

$$OG=\frac{2}{3}\cdot\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

次ニsegment ABCノ重心ヲ求メントス,sctor AOBノ重心ヲGトシ,三角形AOBノ重心ヲG_1トシ,segment ABCノ重心ヲG_2トス.

$$OG_1=\frac{2}{3}r\cos\alpha$$

$$OG=\frac{2}{3}\cdot\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$



而シテ

$\triangle ABC$ ノ面積$=r^2\sin\alpha\cos\alpha$

sector AOB ノ面積$=r^2\alpha$

故ニ

segment ノ面積$=r^2(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$

故ニ O ニ關スル moment ニ付次ノ關係アリ.

$$r^2\alpha\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}=r^2(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)\times OG_2$$
$$+r^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{2}{3}r\cos\alpha$$

故ニ

$$OG_2=\frac{2}{3}\frac{r(\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha)}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{2}{3}\frac{r\sin^3\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{(2r\sin\alpha)^3}{r^2(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)}$$
$$=\frac{1}{12}\frac{(\text{弦}\,AB)^3}{\text{segment ノ面積}}$$

直徑 d ナル半圓ノ重心ヲ求ムルニ sector ノ重心ノ式ニ於テ

$$OA=\frac{d}{2},\quad \text{弦}\,AB=d,\quad \text{弧}\,AB=\pi\frac{d}{2}$$

ト置ケハ

$$OG=\frac{2d}{3\pi}$$

又 segment ノ重心ノ式ニ於テ

$$\alpha=\frac{\pi}{2}$$

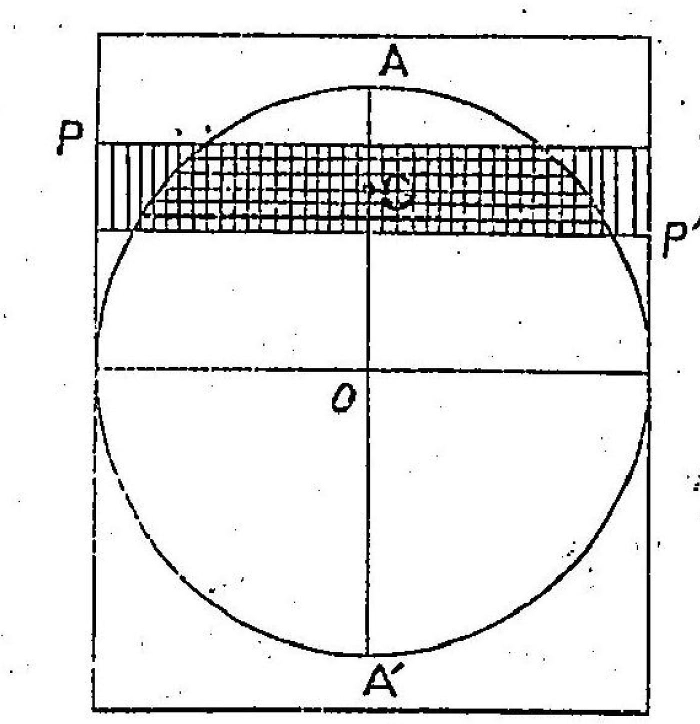
トスレバ

$$OG_2=\frac{2d}{3\pi}$$

是即チ中心ヨリ半圓ノ重心ニ至ル距離ナリ.

67. 二個ノ平行平面ニテ截リ離サレタル球面ノ部分ノ重心.

O ヲ中心トセル球面ヲ或直徑 AA′ ニ直角ナル二個ノ平面 P, P′ ニテ截リタリトス,更ニ AA′ ヲ軸トシ球ヲ丁度包ム所ノ cylinder ヲ作クレバ其面モ亦 P, P′ ニテ截リ取ラルベシ,然ル時 P ト P′ トノ距離ノ大小ニ關セズ,此兩平面ニテ截リ取ラレタル球面ノ部分ノ面積ト cylinder ノ部分ノ面積トハ相等シキモノナリ,



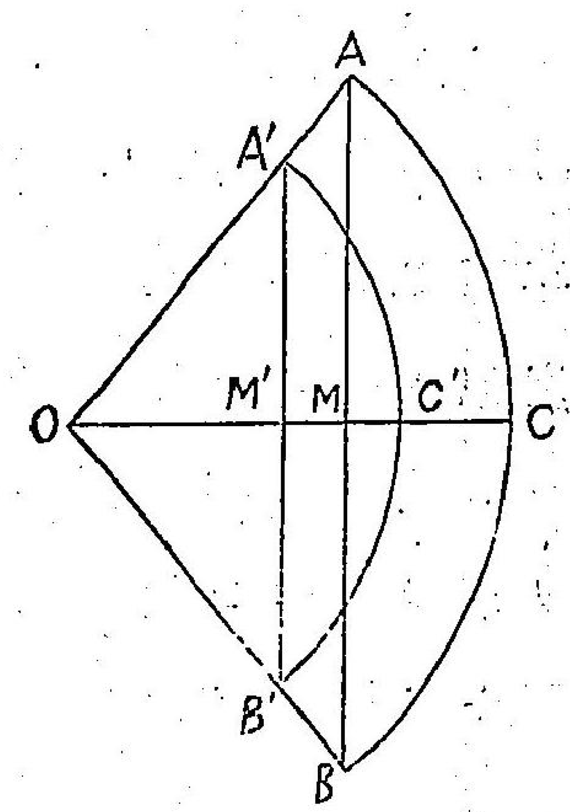
故ニ此兩者ノ重心ハ一致ス, cylinder ヨリ截リ取ラレタル面ノ部分ノ重心ハ其軸 AA′ ニアリテ,截リタル二個ノ平面 P, P′ ノ間ノ中點ナリ,故ニ P, P′ ニテ截リ取ラレタル球面ノ部分ノ重心モ亦此點ナリ.

hemispherical shell ノ重心ハ

$$OG=\frac{1}{2}OA.$$

68. 球ノ sector 及ヒ segment ノ重心.

球ノ sector ハ其中心ヲ頂點トシ,其表面上ニ底面ヲ有スル數多ノ小ナル圓錐體ヨリ成ルモノト見ルコトヲ得,而シテ是等ノ各圓錐體ノ重心ハ皆中心ヨリ半徑ニ沿フテ半徑ノ $\frac{3}{4}$ ノ點ニアリ,故ニ sector ノ重心ハ之ト同一ノ重量ヲ有シ,同一ノ中心ヲ有シ,半徑カ其 $\frac{3}{4}$ ナル spherical cap ノ重心ト一致ス.



AOB ハ與ヘラレタル sector ニシテ, A′C′B′ ハ sector ノ半徑ノ $\frac{3}{4}$ ノ半徑ノ spherical cap ナリ, OC ヲ centre line トスレハ sector ノ重心ハ OC 上ニアリテ O ヨリ

$$\frac{1}{2}(OC'+OM')=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}(OC+OM)$$

$$=\frac{3}{8}(OC+OM)$$

ニアリ.

半球ニ付テ中心ヨリ半徑ノ $\frac{3}{8}$ ナル點ナリ.

球ノ sector ハ其 segment ト圓錐體トヨリ成レリ,而シテ球ノ中心ヨリ segment ノ底ニ至ル距離ヲ h トシ,半徑ヲ r トスレハ

$$\text{sector ノ容積}=\frac{2}{3}\pi r^2(r-h)$$

$$\text{錐體ノ容積}=\frac{1}{3}\pi h(r^2-h^2)$$

故ニ

$$\text{segment ノ容積}=\frac{2}{3}\pi r^2(r-h)-\frac{1}{3}\pi h(r^2-h^2)$$

$$=\frac{1}{3}\pi(2r+h)(r-h)^2$$

中心ヨリ segment ノ重心ニ至ル距離ヲ x トシ,中心ニ關スル moment ヲ採レハ

$$\frac{2}{3}\pi r^2(r-h)\times\frac{3}{8}(r+h)=\frac{1}{3}\pi h(r^2-h^2)\times\frac{3}{4}h$$

$$+\frac{1}{3}\pi(2r+h)(r-h)^2x$$

$$\therefore\quad x=\frac{\frac{1}{4}\pi r^2(r^2-h^2)-\frac{1}{4}\pi h^2(r^2-h^2)}{\frac{1}{3}\pi(2r+h)(r-h)^2}$$

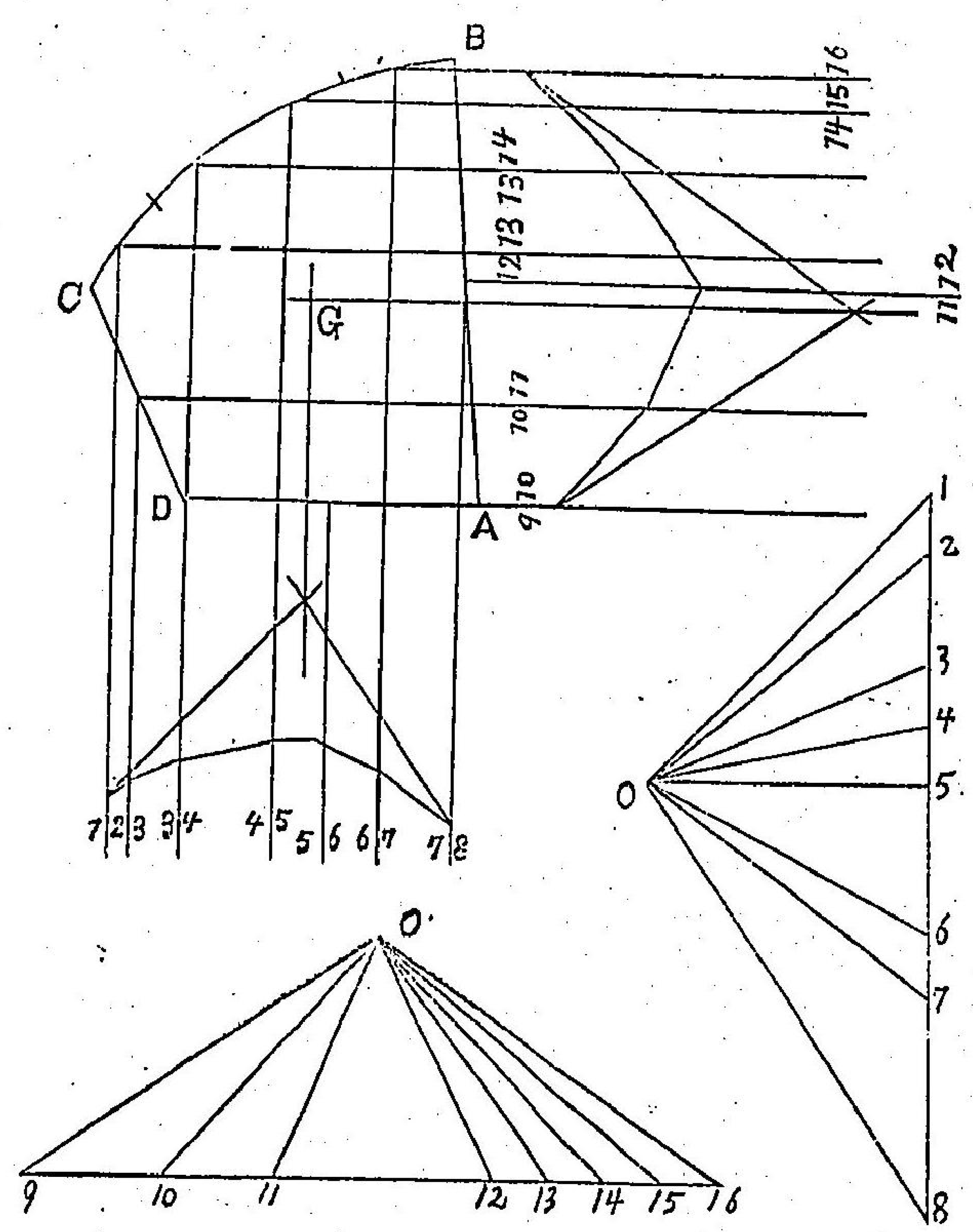
$$=\frac{3}{4}\frac{(r+h)^2}{2r+h}$$

69. Funicular polygon ヲ用井テ重心ヲ求ムルコト.

例ヘハ ABCD ハ一様ナル太サノ針金ナリトス, AB, CD, DA ハ直線ニシテ, BC ハ中心 A ナル圓ノ弧ナリ,然ル時 ABCD ノ重心ヲ定ムルコト.

弧 BC ヲ或數例ヘハ四等分ス,各分ノ重心ハ其部分ノ中點ナリト見做シ,其重量ハ弦ノ長サニテ表ハサルヽモノト見做ス,此假定ハ半徑ニ比シ弧カ小ナレハ誤差ハ小ナリ,直線ノ部分 AB, CD, DA ノ重心ハ夫々ノ中點ニシテ各重量ハ長サニ比例ス.

Funicular polygon ニヨリテ Resultant ノ作用線ヲ見出シ,更ニ着力點ヲ變セスニ各部分ノ重量ノ作用線ヲ同シ向キニ同シ角ダケ廻轉シ,其位置ニ對シテ Funicular



Polygon ニヨリ Resultant ノ作用線ヲ見出ス,此作用線ト前ノ位置ニ於ケル Resultant ノ作用線トノ交點Gハ所求ノ ABCD ノ重心ナリ.

第五章

力ノ釣合條件

70. 一直線上ニアル諸力ノ釣合.

此場合ノ條件ハ諸力ノ代數和ヲ ΣF トスレハ

$$\Sigma F=0$$

何ントナレハ合力ヲ R トスレハ

$$R=\Sigma F=0$$

71. 同一平面上ニアリテ一點ニ會セル諸力ノ釣合.

此場合ノ條件ハ

(*a*) $\Sigma F_x=0$, 及ヒ $\Sigma F_y=0$

但 ΣF_x 及ヒ ΣF_y ハ夫々 x 及ヒ y 分力ノ代數和ナリ.

又ハ

(*b*) $\Sigma F_x=0$, 及ヒ $\Sigma M=0$

但 ΣM ハ共通ノ着力點以外ノ任意ノ點ニ關スル諸力ノ moments ノ和ナルモ,共通ノ着力點ト moment ノ centre トヲ結付クル直線カ x 軸ト直角ヲナサザル樣ニ moment ノ centre ヲ撰フヘキモノトス.

又ハ

(*c*) $\Sigma M_A=0$, 及ヒ $\Sigma M_B=0$

但 ΣM_A 及ヒ ΣM_B ハ夫々共通ノ着力點ト同一直線上ニ

アラサル樣ニ撰ハレタル二點A及ヒBニ關スル諸力ノ moments ノ和ナリ.

(*a*) ノ場合

合力ヲRトスレハ

$$R=\{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

然ルニ

$$\Sigma F_x=\Sigma F_y=0$$

$$\therefore \quad R=0.$$

(*b*) ノ場合.

$$\Sigma M=0$$

故ニRカアラハRハ共通ノ着力點ト moment ノ centre トヲ通セサル可ラス,此二點ヲ結ブ直線ト x 軸トノ間ノ角ヲ α トスレハRノ x 分力 R_x ハ

$$R_x=\Sigma F_x=R\cos\alpha$$

然ルニ

$$\Sigma F_x=0$$

故ニ $\quad R\cos\alpha=0$

然ルニ $\quad \cos\alpha\neq 0$

故ニ $\quad R=0$

(*c*) ノ場合.

Oヲ共通ノ着力點トス.

$$\Sigma M_A=\Sigma M_B=0$$

故ニRカアラハRハA及Bヲ通過スヘシ,Rハ亦Oヲモ通過セサル可ラス,即チRハA,B,Oノ三點ヲ通過セ

サル可ラス.然ルニ此三點ハ一直線ニアラサル樣ニ撰バレタルモノナリ,故ニ

$$R=0$$

ナラサル可ラス.

圖上ニ於ケル釣合條件ハ力ノ多角形カ閉ツルコトナリ.

72. 同一平面上ニアル平行力ノ釣合.

此場合ノ條件ハ

(*a*) $\quad \Sigma F=0, \quad$ 及ヒ $\quad \Sigma M=0.$

但 ΣF ハ諸力ノ代數和ニシテ,ΣM ハ任意ノ點ニ關スル諸力ノ moments ノ代數和ナリ.

又ハ

(*b*) $\quad \Sigma M_A=0, \quad$ 及ヒ $\quad \Sigma M_B=0$

但 moments ノ中心A及ヒBヲ結ヘル直線ABカFノ方向ニ平行ナラサルコトヲ要ス.

(*a*) ノ場合.

$$\Sigma F=0$$

$$\therefore \quad R=0$$

且 $\quad \Sigma M=0$

故ニ couple ニモアラズ.

(*b*) ノ場合.

$$\Sigma M_A=0$$

故ニ couple ナラズ,RカアラハRハAヲ通ズ,亦

$$\Sigma M_B=0$$

故ニRハBヲモ通ス,故ニRハAトBトヲ通ス.然ルニABハ與ヘラレタル諸力ニ平行ナラズ,即チ平行力ノ合力Rカ其平行力ニ平行ナラサルコトヽナリテ不都合ナリ,故ニRハ零ナラサル可ラス.

圖上ニ於ケル條件ハ力ノ多角形并ニ funicular polygon カ閉ツルコトナリ.

73. 同一平面上ニアラサル平行力ノ釣合.

此塲合ノ條件ハ

$$\Sigma F=0,\quad \Sigma M_x=0\quad \text{及ビ}\quad \Sigma M_y=0$$

但ΣFハ諸力ノ和ナリ,是等諸力ハz軸ニ平行ナリトス,ΣM_x, ΣM_yハ夫々x及y軸ニ關スル moments ノ和ナリ.

何ントナレバ

$$\Sigma F=0$$

$$\therefore\quad R=0$$

又

$$\Sigma M_x=\Sigma M_y=0$$

故ニ couple ニモアラズ.

74. 同一平面上ニアリテ,一點ニ會セサル,且平行ナラサル諸力ノ釣合.

此塲合ノ條件ハ

(a) $\Sigma F_x=0\quad \Sigma F_y=0,\quad$ 及ビ $\quad\Sigma M=0$

但ΣF_x及ビΣF_yハ夫々x及y分力ノ和ナリ,又ΣMハ任意ノ點ニ關スル moment ノ和ナリ.

又ハ

(b) $\Sigma M_A=0,\quad \Sigma M_B=0,\quad$ 及ビ $\quad\Sigma F_x=0$

但AトBトヲ結ヘル直線カx軸ニ直角ナラサルコトヲ要ス.

又ハ

(c) $\Sigma M_A=0,\quad \Sigma M_B=0,\quad$ 及ビ $\quad\Sigma M_C=0$

但是等 moments ノ centres A, B, C ハ一直線上アラサル如クニ撰フコトヲ要ス.

(a) ノ塲合.

$$R=\{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

然ルニ

$$\Sigma F_x=\Sigma F_y=0$$

$$\therefore\quad R=0$$

又

$$\Sigma M=0$$

故ニ couple ニモアラス.

(b) ノ塲合.

$$\Sigma M=0$$

故ニ couple ニアラズ,若シモRカアリトスレハ

$$\Sigma M_A=\Sigma M_B=0$$

ナルヲ以テRハA, Bヲ通ス, ABトx軸トノ間ノ角ヲαトスレハ

$$R\cos\alpha=\Sigma F_x=0$$

然ルニ $\alpha\fallingdotseq 90°$ 故ニ

$$R=0$$

(*c*) ノ場合.

$$\Sigma M=0$$

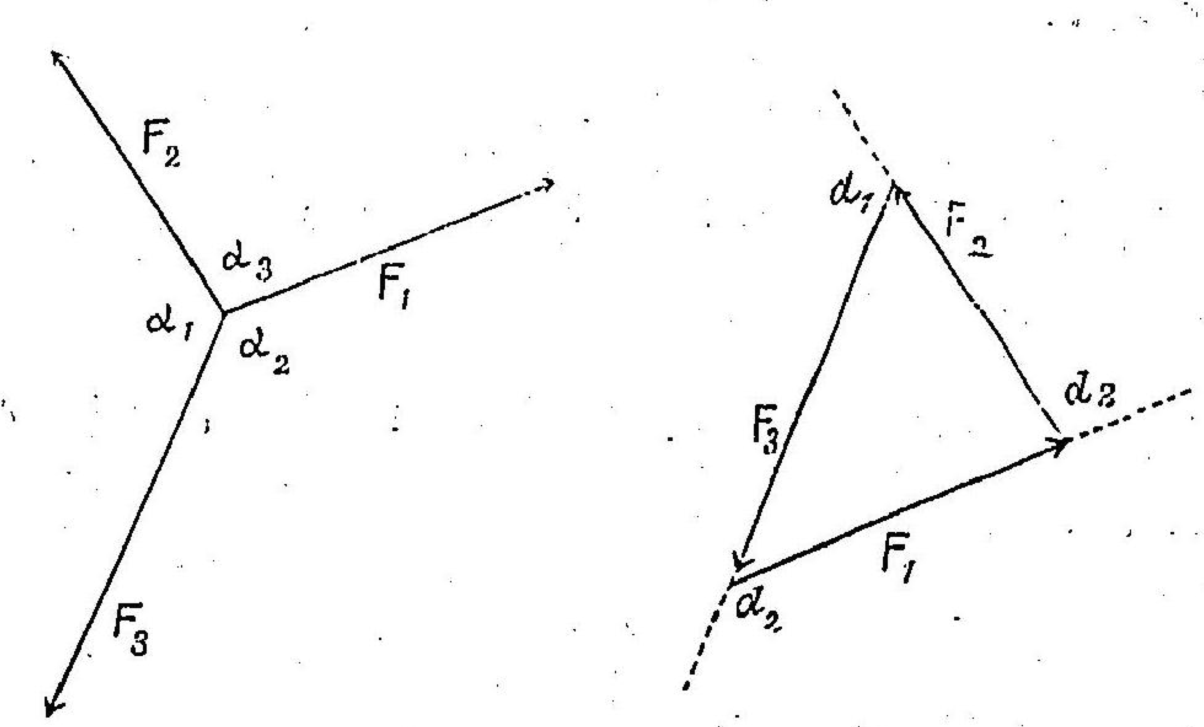
故ニ couple ナラス, R アリトスレハ R ハ A,B,C ノ三點ヲ通シテ働カサル可ラス.然ルニ此三點ハ一直線上ニアラサル様ニ撰ハレタルモノナリ.故ニ R ハ存在スルコト能ハス.

圖上ニ於ケル釣合條件ハ力ノ多角形及 funicular polygon カ閉ツルコトナリ.

與ヘラレタル力ノ數カ四個ナル時ハ,其内ノ一對ノ合力ト他ノ一對ノ合力トハ釣合ハサル可ラス.

75. 三力ノ釣合.

三力カ釣合フ為ニハ同一平面上ニアリテ,各力トモ平行セルカ,又ハ一點ニ會セサル可ラス.而シテ平行セル場合,又ハ一點ニ會セル場合夫々既述ノ條件ニ適合セサル可ラス.



F_1, F_2, F_3 カ一點ニ會セル三力ナル時, F_1 ト F_2 トノ間

ノ角ヲ α_3 トシ, F_1 ト F_3 トノ間ノ角ヲ α_2 トシ, F_2 ト F_3 トノ間ノ角ヲ α_1 トスレハ釣合ヘル場合ニ

$$\frac{F_1}{\sin\alpha_1}=\frac{F_2}{\sin\alpha_2}=\frac{F_3}{\sin\alpha_3}$$

76. 問題 I.

同一平面上ニアル平行セル乗力ノ内二力ヲ除キ他ノ諸力ハ完全ニ與ヘラレ,二力ノミハ作用線ノ位置ノミ與ヘラレタリ,是等諸力カ釣合ヘル時此二力ノ大サ幷ニ方向ヲ定ムルコト.

此場合ニ於ケル釣合條件ハ

(*a*) $\Sigma F=0$ 及ビ $\Sigma M=0$

又ハ

(*b*) $\Sigma M_A=0$ 及ビ $\Sigma M_B=0$

但 A ト B トヲ結ヘル直線 AB ハ F ニ平行ナラズ.

例ヘハ F_1, F_2, F_3, F', F'' ヲ與ヘラレタル諸力トス,内 F_1, F_2, F_3 ハ完全ニ與ヘラレ, F', F'' ハ作用線ノミ與ヘラレタリ,是等五個ノ力カ釣合ヘル場合ノ F', F'' ノ大サ及ビ方向ヲ定メレトス.

$F_1=500$ 斤, $F_2=200$ 斤, $F_3=100$ 斤

$a=5$ 呎, $b=3$ 呎, $c=4$ 呎, $d=2$ 呎

F_1, F_3 ハ下方ハ向ヒ, F_2 ハ上方ヘ向ヘリ, F', F'' ハ方向未知ナルモ假ニ上方ヘ向ヘルモノト想像ス,上方ヲ正ノ方向トス.

(*a*) ノ條件ヲ用フレハ

$$\Sigma F=-500+200+F'-100+F''=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

又 moment ノ中心ヲ F″ ノ作用線上ニ撰ベバ

$$\Sigma M=500\times 14-200\times 9-6F'+100\times 2=0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

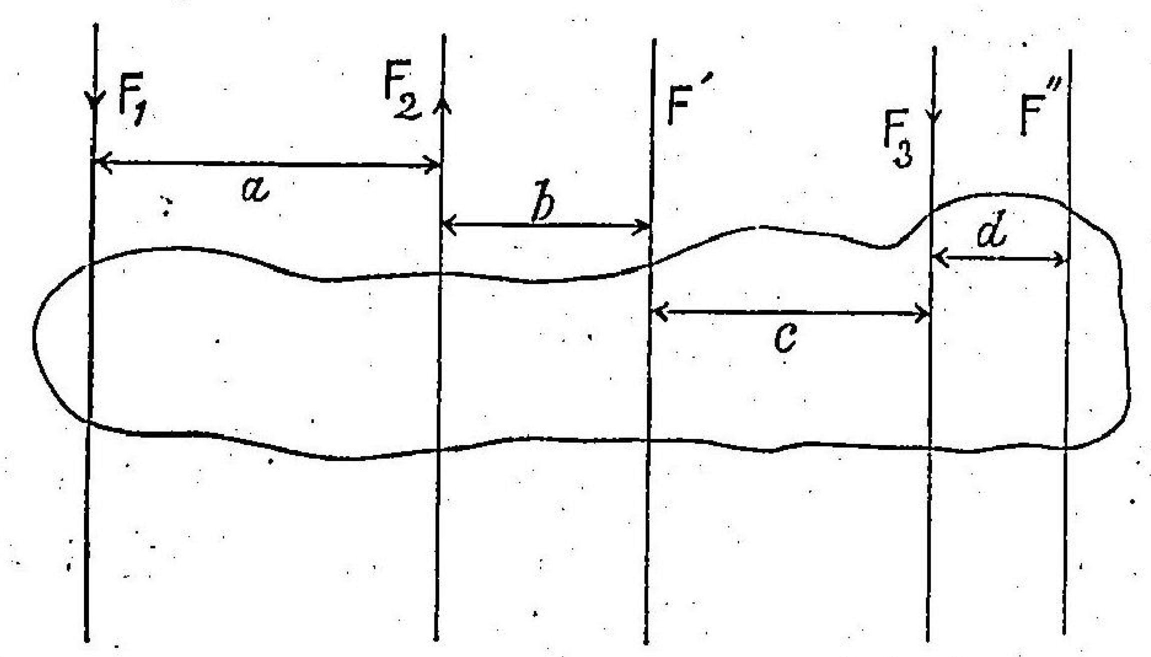
(2) ヨリ

$$F'=900\text{斤}$$

此値ヲ (1) ニ用ヒテ

$$F''=-500\text{斤}$$

F″ カ負號ナルハ最初ノ假定ニ反シテF″ハ下方ヘ向ヘルコトヲ示スモノナリ.



(*b*) ノ條件ヲ用フルモ同一ノ結果ヲ得ヘシ, A, B 二點ノ内一ツハ F′ ノ作用線上ニ他ノ一ツヲF″ ノ作用線上ニ撰ベバ

$$\Sigma M_A=500\times 8-200\times 3-100\times 4+6F''=0$$

$$\Sigma M_B=500\times 14-200\times 9-6F'+100\times 2=0$$

是等ノ式ヨリ

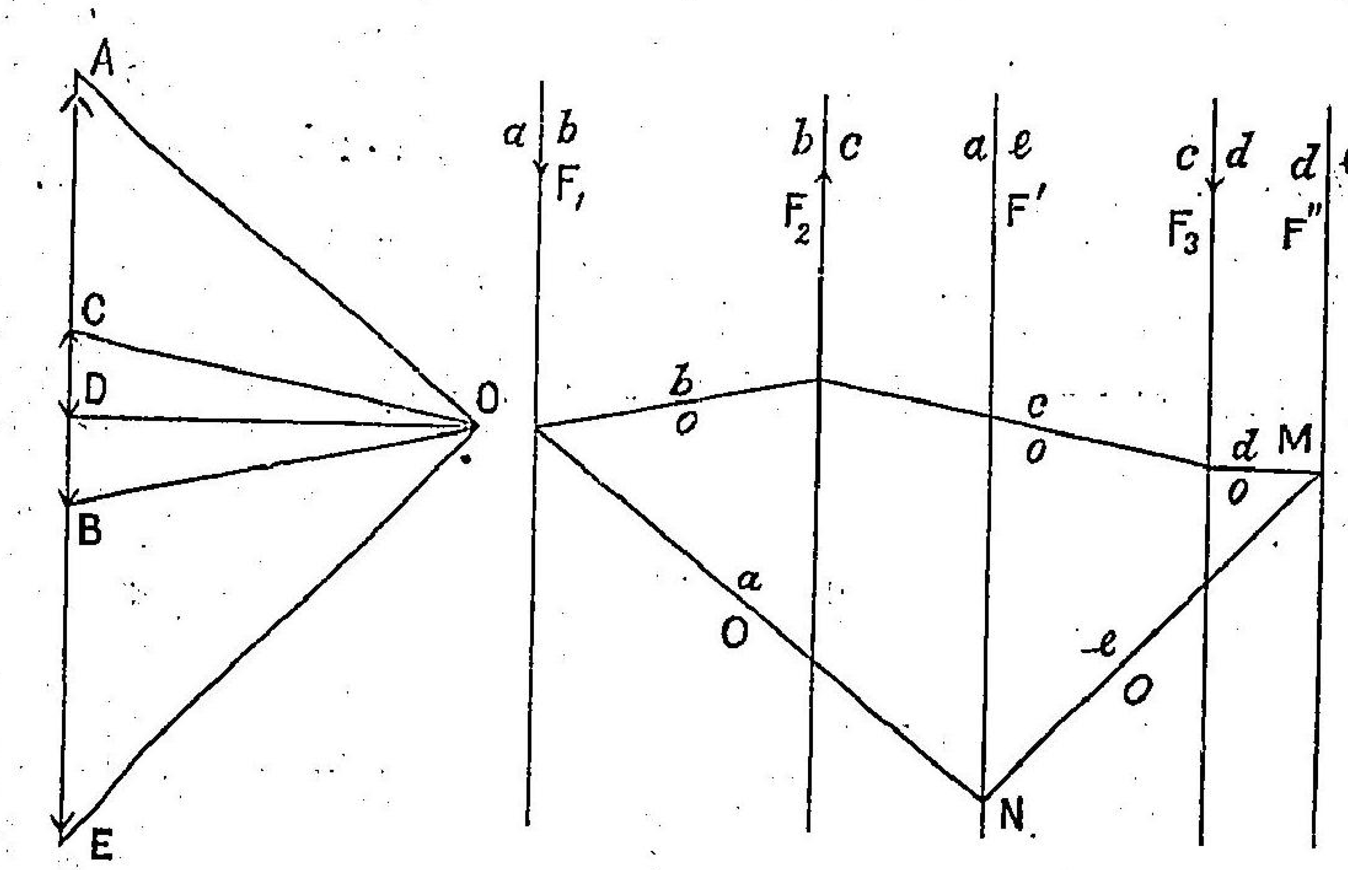
$$F'=900, \qquad F''=-500$$

圖上ニテ此問題ヲ解クニハ次ノ如クナスベシ.

此場合ノ釣合條件ハ力ノ多角形並ニ funicular polygon ガ閉ヅルコトナリ.

F_1=AB,　F_2=BC,　F_3=CD トス.

E ハ未定ナルモ力ノ多角形ガ閉ヂザル可ラザルヲ以テ F″ ヲ DE トスレバ,殘リノ F′ ハ EA ナラザル可ラズ, E ヲ定ムル爲ニハ funicular polygon ガ閉ヅ可キ條件ヲ用フ, string *do* ハ F″ ノ作用線 *de* ト M ニテ交ハル,又 *ao* ハ F′ ノ作用線 *ae* ト N ニテ交ハル, M ト N トヲ結ベ



バ funicualr polygon ハ閉ヂラル, MN ニ平行ニ OE ヲ引ケバ此直線ハ直線 AB ト E ニテ交ハル,是ニ由テ E ハ定マル,從テ F′, F″ ノ大サ及ビ方向モ定マル, F″ ノ大サハ DE ニシテ下方ヘ向ヒ, F′ ノ大サハ EA ニシテ上方ヘ向フ.

77. 問題 II.

同一平面上ニアリテ作用線ガ平行ナラザル場合ニ諸力ノ内二力ヲ除キ他ハ完全ニ與ヘラレタリ,二力ノ

内一力ハ作用線ノミ與ヘラレ,他ノ一力ニ付テハ其作用線上ノ一點ノミ與ヘランタリ,是等衆力ガ釣合ヘル場合ニ此二力ヲ定ムルコト.

釣合條件ハ

(a) $\Sigma F_x = \Sigma F_y = 0$ 及ビ $\Sigma M = 0$

又ハ

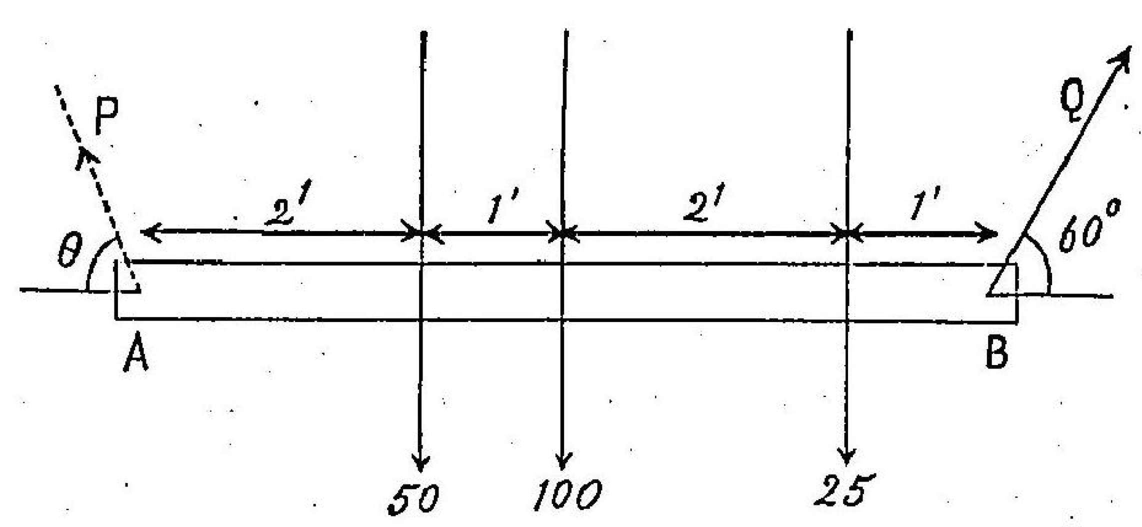
(b) $\Sigma F_x = 0$ 及ビ $\Sigma M_A = \Sigma M_B = 0$

但A,Bヲ結ブ直線ABハx軸ニ直角ナラザルモノトス.

又ハ

(c) $\Sigma M_A = \Sigma M_B = \Sigma M_C = 0$

但A,B,Cハ一直線上ニ無キモノトス.



例ヘバ棒ABノ重量100斤ナリ,之ニ圖ニ示セル如キ位置ニ50斤及ビ25斤ノ重量懸レリ,而シテB端ハABニ對シ60°ノ角ヲナセルcordニテ支ヘラレ,A端ハhingeニテ止メラレタルモノトス,此場合ニ於ケルcordノtension Q,並ニAニ働ケル力Pヲ見出サントス.

條件(a),(b),(c)ノ内何レヲ用フルモ差支ナシ,(a)ヲ用ヒABヲx軸トシ,y軸ヲ之ニ直角ニ採レバ

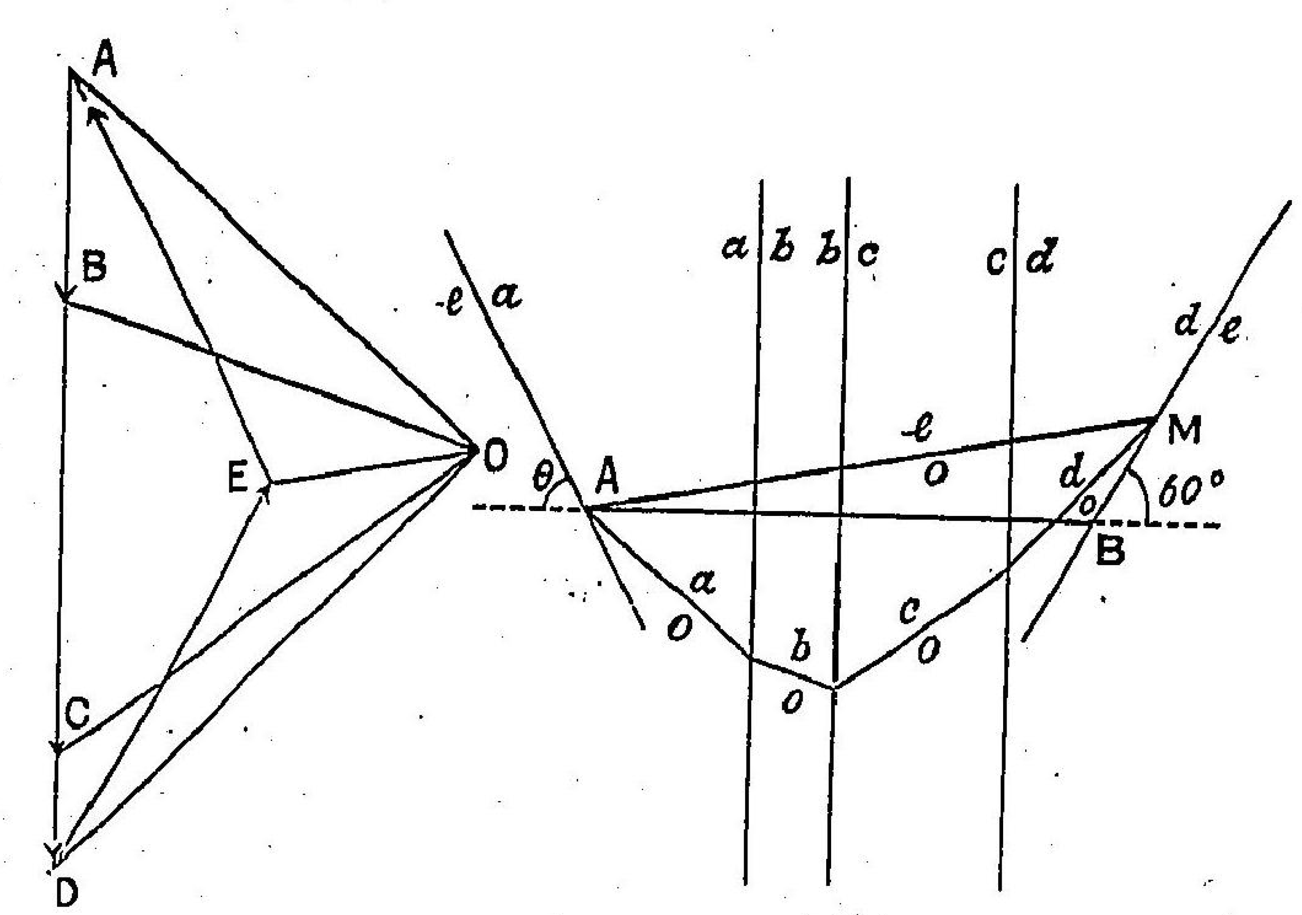
$$\Sigma F_x = -P\cos\theta + Q\cos 60^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = P\sin\theta + Q\sin 60^\circ - 50 - 100 - 25 = 0$$

$$\Sigma M_A = 6Q\sin 60^\circ - 2\times 50 - 3\times 100 - 5\times 25 = 0$$

是等三式ヨリθ,P,及Qハ求メラル.

圖上ニテ之ヲ解クニハ先ヅAヲ通ジテaoヲ引キ,然ル後bo, co, doヲ引ク,doハdeトMニテ交ハル,MトAトヲ結ブ,MAニ平行ニOヨリ引ケル直線ハDEト



Eニテ交ハル,之ニ由テDE即チQハ定マル,EトAトヲ結ブ,EAハPノ大サ及方向ヲ與フルモノナリ.

78. 問題III.

同一平面上ニアリテ平行ナラザル諸力ガ釣合ニアリ,三力ヲ除キ他ノ諸力ハ完全ニ知ラレタルモ,三力ノ

ミハ作用線ノミ知ラレタリ此三力ヲ定ムルコト.

釣合條件ハ前問題ニ於ケルト同一ナリ.

例ヘハ前例ニ於テ P ヲ x 及ヒ y 分力ニ分解シ其 x 分力ヲ P_x, y 分力ヲ P_y トス.

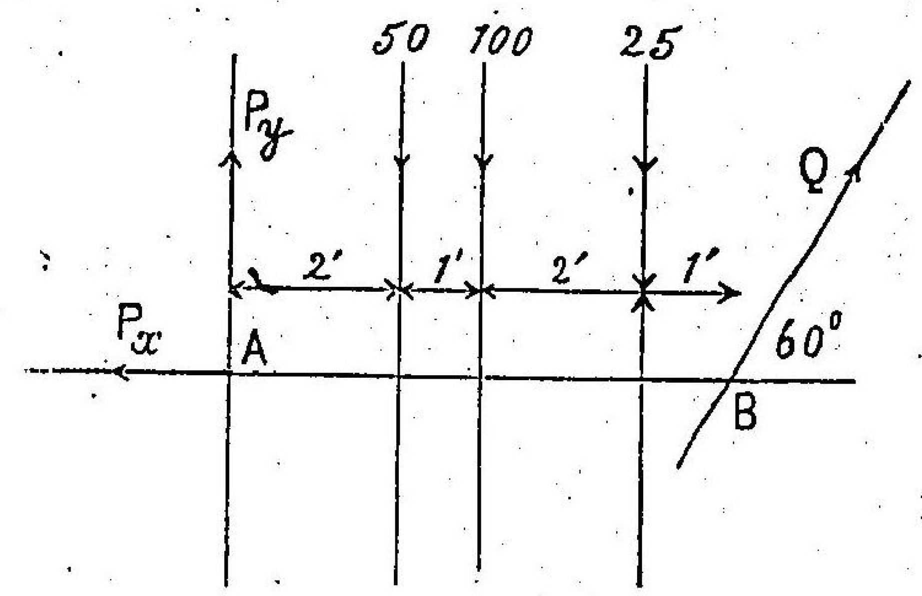
釣合條件(b)ヲ用フレハ

$$\Sigma F_x = -P_x + Q\cos 60^\circ = 0$$

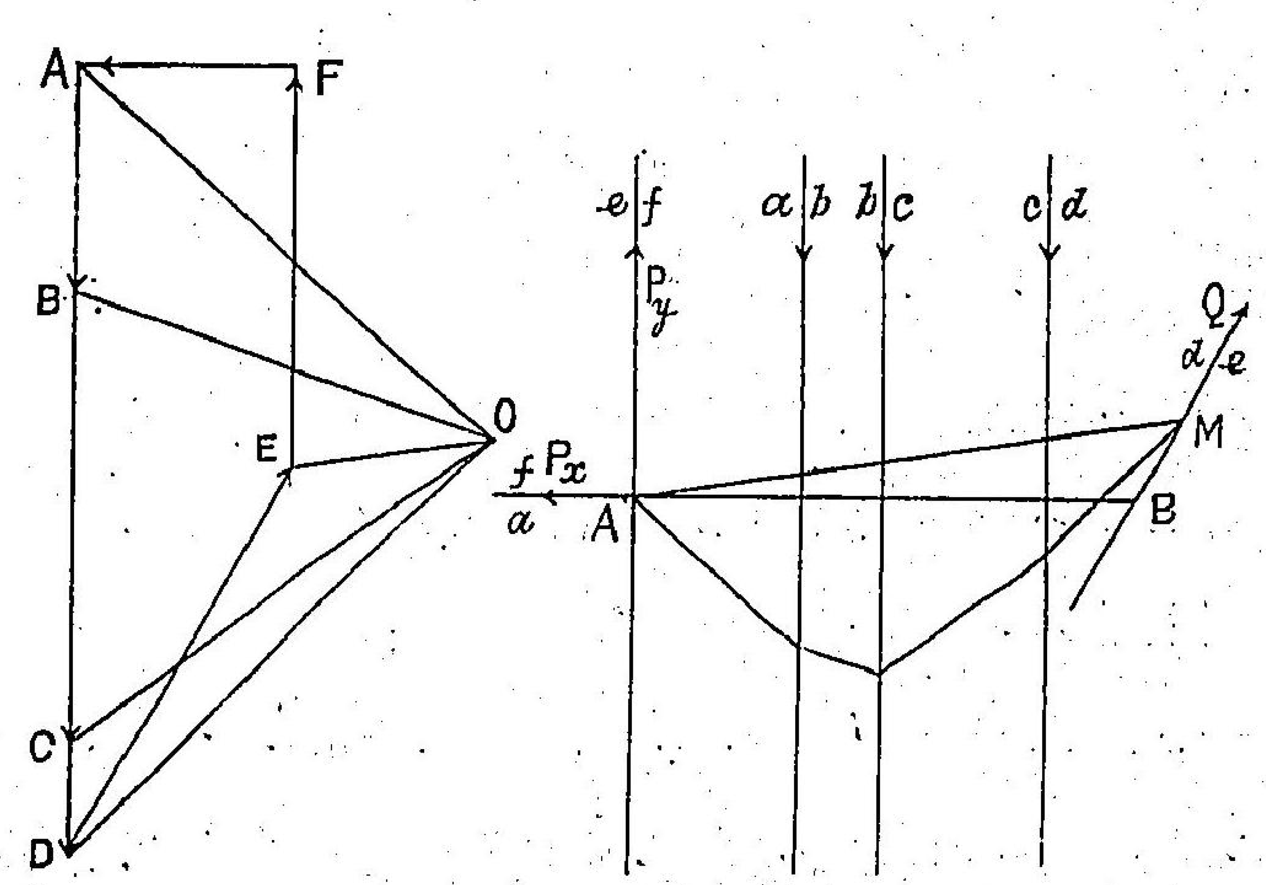
$$\Sigma M_A = 6Q\sin 60^\circ - 50\times 2 - 100\times 3 - 25\times 5 = 0$$

$$\Sigma M_B = -P_y\times 6 + 50\times 4 + 100\times 3 + 25\times 1 = 0$$

此三式ヨリ P_x, P_y 及ヒ Q ノ三力ハ確定ス.



圖ニヨリ見出スニハ次ノ如クナスヘシ.

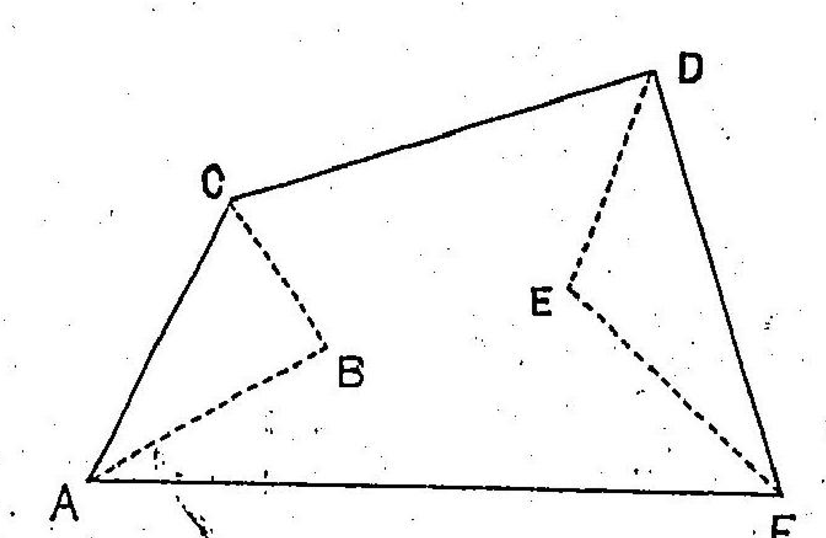


先ツ A ヨリ *ao* ヲ引キ然ル後 *bo, co, do* ヲ引ケハ *do* ハ *de* ト M ニテ交ハル, O ヲ通シ MA ニ平行ニ引カレタル直線ハ Q ノ方向ニ引カレタル直線 DE ト E ニテ交ハル, DE ノ大サハ Q ノ大サヲ表ハスモノナリ, E ヨリ y 軸ニ平行ニ引ケル直線 EF ト, A ヲ通シ x 軸ニ平行ニ引ケル直線 FA トハ F ニテ交ハルヘシ, EF 及 FA ハ夫々 P_y 及ヒ P_x ノ大サ及ヒ方向ヲ表ハスモノナリ.

79. 重力ノ作用ヲ受ケテ靜止セル物體ノ釣合.

物體カ床上ニ靜止セル時ニハ物體ノ重心ヲ通スル重量ト接觸セル各點ニ於ケル Reactions トハ互ニ釣合ヘリ,若シモ reactions ノ合力カ物體ノ重心ヲ通スル重量ニ釣合ヒ得サル如キ狀況ニアレハ物體ハ其位置ニ靜止スルコト能ハス.

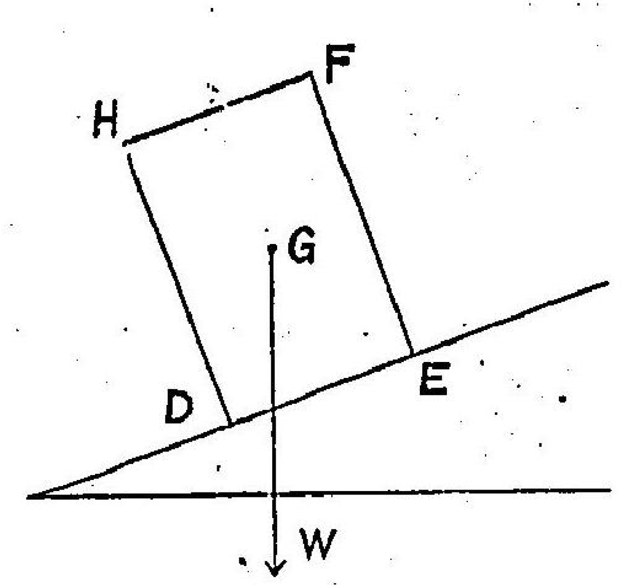
A, B, C, 等ヲ或水平面上ニアル物體カ其平面ト接觸セル點トス,是等接觸點ノ内ノ外線ニアルモノヲ結付ケテ凸多角形ヲ作ルヘシ,其多角形ヲ ACDF...... トス, A, B, C, D, E, ... ニ於ケル reactions

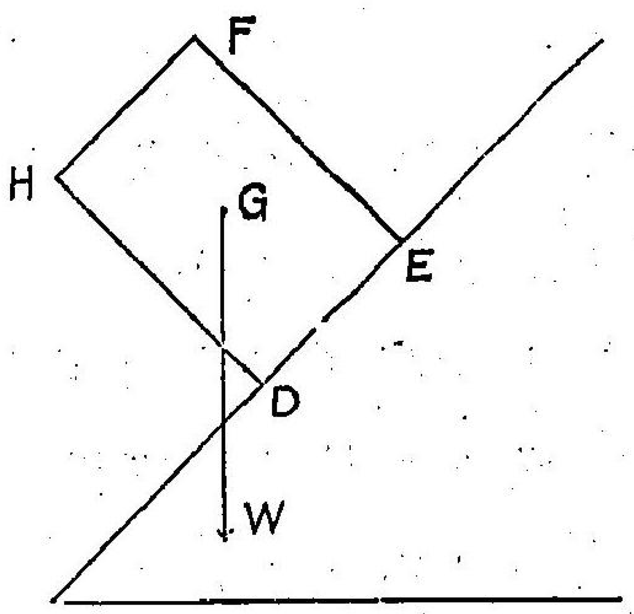


ノ合力ハ此凸多角形内ノ或點ヲ過ギリテ作用ス,故ニ物體ノ重心ヲ通シテ働ケル重量ノ作用線カ此多角形内ノ或點ヲ通スル如キ場合ニハ此重量ニ釣合ヒ得ヘキ關係ヲ以テ A, B, C, D, E 等ニ於ケル reactions ハ作用ス

ルモノナリ,從テ物體ハ其位置ニアリテ靜止スベシ,故ニ物體ハ其重心ヨリノ鉛直線ガ其物體ト水平面トノ接觸點ヲ結付ケテ得ベキ凸多角形內ノ點ヲ通ズルカ否カニヨリテ靜止シ又ハ轉倒スベシ.

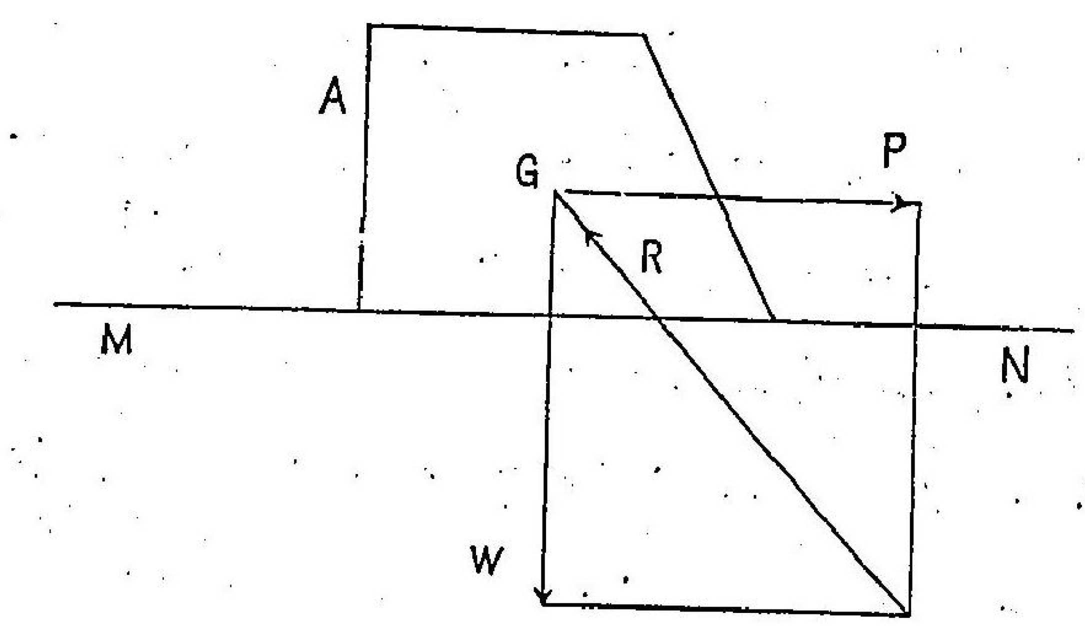
物體ノ立テル場所ガ水平面ナラズシテ斜面ナル場合モ同樣ナリ,斜面上ニアル物體 DEFH ガ D ヲ通ズル水平線ヲ軸トシテ廻轉シ得ル場合ニハ物體ノ重量 W ノ作用線ガ DE 內ヲ通ズル間ハ顚倒セザルモ斜面ノ傾角ガ大トナリテ W ノ作用線ガ DE ノ外ニ落ツルニ





至レバ終ニ顚覆スベシ.

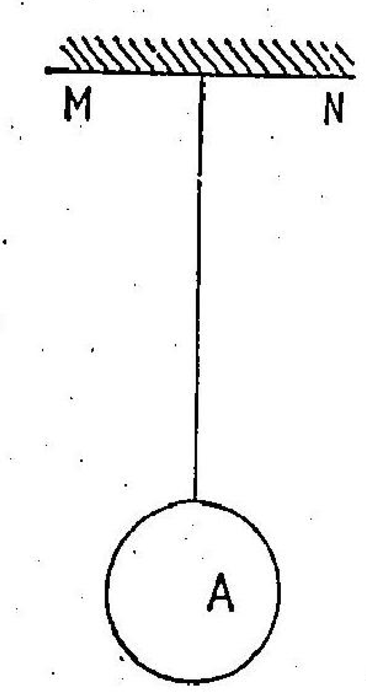
次ニ物體 A ガ水平表面 MN 上ニアリテ之ニ水平方向ヘ力 P ガ加ヘラレタル場合ヲ考フルニ,物體ヘ水平表面ヨリ働クル reaction R ハ, P ト物體ノ重量 W トノ合力ト大サ等シク方向反對ニシテ同一直線上ニアリ, R ノ作用線ガ物體ノ接觸面ヲ切ラザレバ釣合フ能ハザルヲ以テ, P カ加ヘラルヽモ猶顚覆セザル爲ニハ R ノ



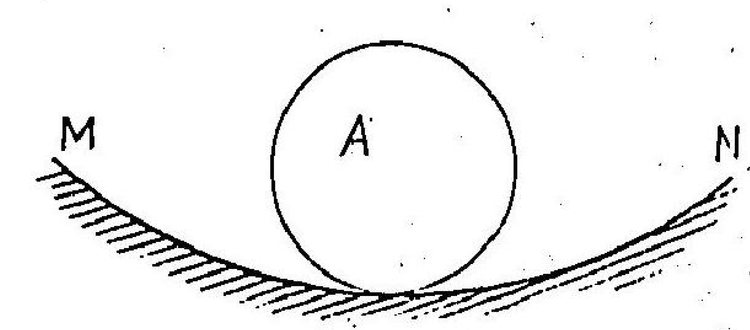
作用線ガ接觸セル表面ヲ切ラザルベカラズ.

80. 釣合ノ安定,不安定及ヒ中性.

重力ノ作用ノ下ニ靜止セル爲物體水平方向ヘノ小ナル力ノ適用ニヨリテ,其靜止ノ位置ヨリ僅カニ動カサルヽモ其適用サレタル力ノ作用止メハ直ニ舊位置ニ復



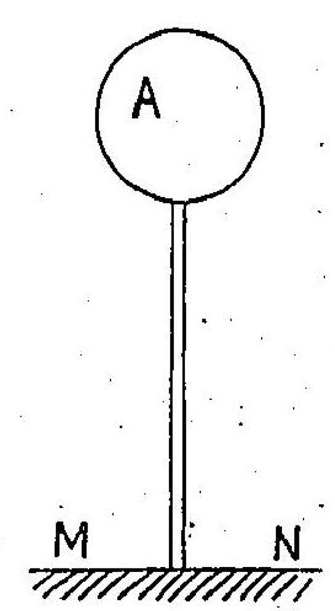
第一圖



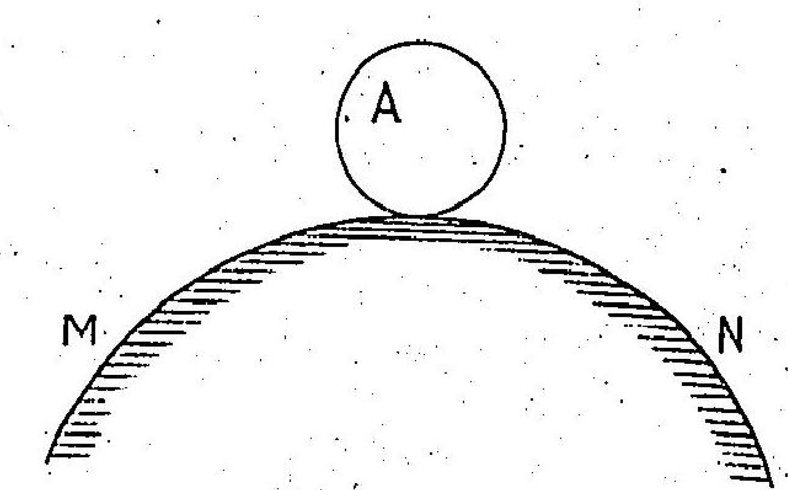
第二圖

スルカ如キ場合ノ釣合ハ安定ノ釣合ナリト云フ,例ヘバ第一圖及ビ第二圖ニ示セル場合ニ物體 A ノ釣合ハ安定ノ釣合ナリ,之ニ反シテ再ビ舊位置ニ復スル能ハザル

如キ場合ノ釣合ハ不安定ノ釣合ナリト云フ,第三圖第四圖ニ示セル物體 A ノ釣合ハ不安定ナリ,一般ニ安定ノ釣合ニアル場合ニハ,若シモ側方ヨリ或力ガ加ヘラレテ物體ガ動カサルヽナラバ其重心ハ原位置ヨリモ高クナリ,不安定ノ釣合ニアル場合ニハ之ガ爲ニ其重心ハ原位置ヨリモ低クナルモノナリ,故ニ水平方向ヘ



第三圖



第四圖

加ヘラレタル力ノ爲ニ物體ガ動キテ其重心カ高クナル如キ場合ノ釣合ハ安定ニシテ,低クセラルヽ如キ場合ノ釣合ハ不安定ナリ.

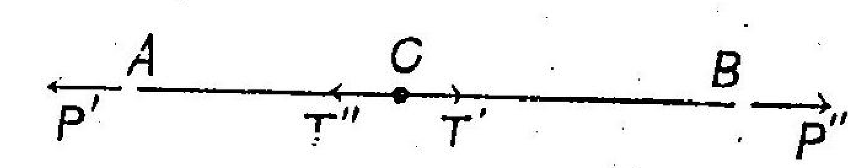
上述二種ノ釣合ノ外ニ尚第三ノ釣合アリ,側方ヨリノ力ノ爲ニ重心カ昇リモセズ,降リモセサル場合ニシテ之ヲ中性ノ釣合ト云フ,例ヘバ机上ニアル球體横ハレル圓柱ノ如シ.

第六章

綱ニ於ケル張力

81. cord ニ於ケル張力.

cord ノ兩端 A, B ヘ力 P', P'' カ働キテ釣合ニアリトス, C ハ AB 上ノ任意ノ點ナリ, AC ハ釣合ニアリ,而シテ其左端ニハ P' カ働ケルヲ以テ之ト釣合フ爲ニ P' ト大サ等シク方向反對ナル力 T' カ AC ノ右端ニ働カサル可ラス,此 T' ハ BC ナル部分ニヨリテ AC ノ上ヘ働カルヽモノナリ,同樣ニ CB モ釣合ヘルヲ以テ C ニハ B ニ働ケル P'' ト



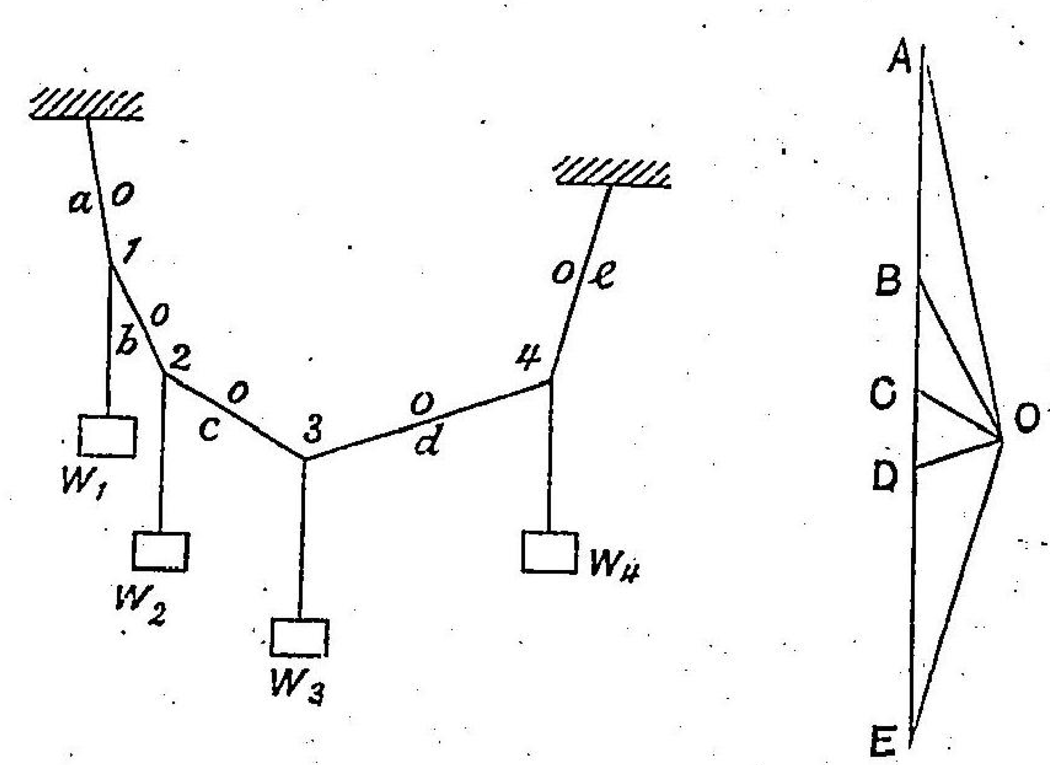
大サ等シク方向反對ナル力 T'' カ存在スベシ, T'' ハ AC ナル部分ヨリ BC ノ上ヘ働クモノナリ,然ルニ AB モ釣合ヘルヲ以テ P' ト P'' トハ大サ等シク方向反對ナリ,故ニ T' ト T'' トハ大サ相等シ之ヲ T トスレバ T ハ即チ張力ノ大サニシテ, AB カ釣合ニアル時其上ノ任意ノ點ニ於テ其大サ相等シキモノナリ.

82. cord ヲ一定ノ位置ニ保ツ爲ニ各結合點ニ加フベキ重量.

cord ヲ圖ニ示セル如キ位置ニ保ツ爲ニ各結合點ニ懸

クベキ重量ノ割合ヲ定メントス.

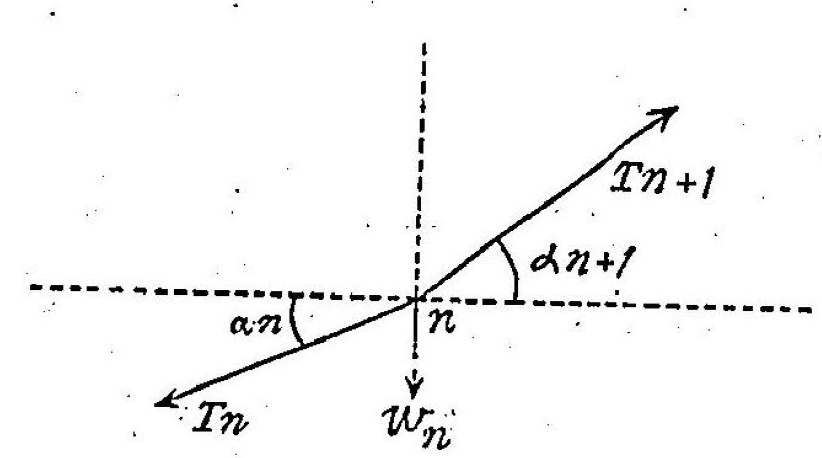
Oヨリ oa =平行=OA, ob =平行=OB, oc =平行=OC, od =平行=OD, oe =平行=OE ヲ引ク,鉛直線 AE ヲ引ケバ AE



ハ OA, OB, OC, OD, OE ト夫々 A, B, C, D, E ニテ交ハル, 然ル時 AB, BC, CD, DE ハ加フベキ重量 w_1, w_2, w_3, w_4 ノ大サノ割合ヲ表ハス.

83. load ヲ保持スル cord ノ位置.

圖ニ示セルハ第 n 番目ノ結合點ナリ,之ガ釣合ニアル時



$$\Sigma F_x = T_{n+1}\cos\alpha_{n+1} - T_n\cos\alpha_n = 0 \quad\text{..................(1)}$$

$$\Sigma F_y = T_{n+1}\sin\alpha_{n+1} - T_n\sin\alpha_n - w_n = 0 \quad\text{............(2)}$$

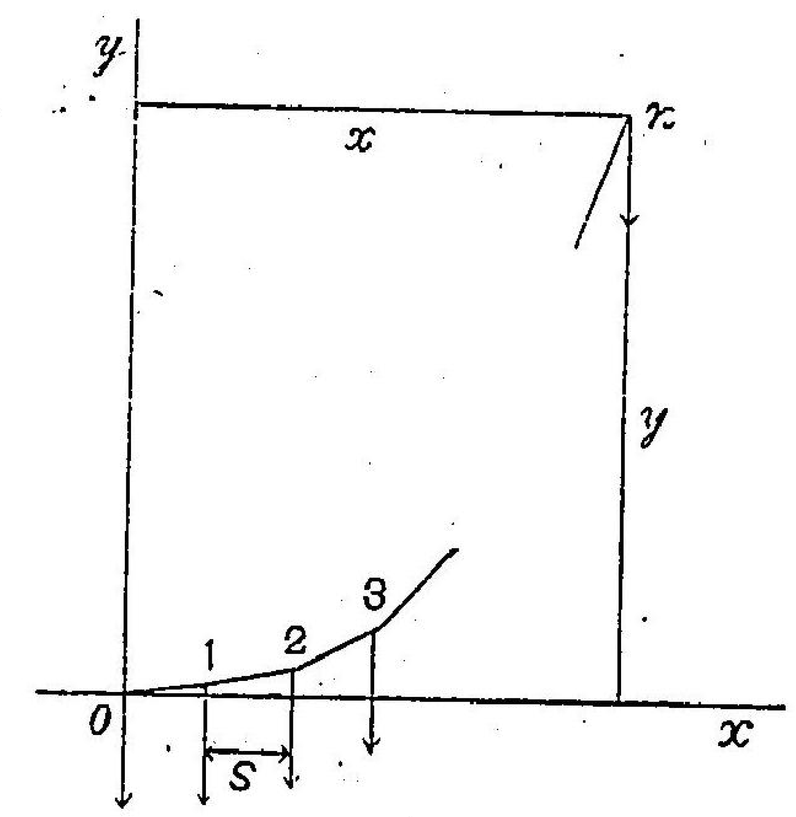
tension T ノ水平分力ハ第一式ニヨリ cord ノ各部ニ付相等シキコトヲ知ル,此分力ヲ H トスレバ

$$H = T_n\cos\alpha_n = T_{n+1}\cos\alpha_{n+1} = \ldots\ldots$$

此關係ト第二式トヨリ

$$\tan\alpha_{n+1} = \tan\alpha_n + \frac{w_n}{H}$$

84. loads ノ作用線間ノ距離等シキ場合ノ cord ノ位置但各 load ハ相等シ.



作用線間ノ距離ヲ s トス, n 番目ノ結合點ノ坐標ヲ x, y トスレバ

$$x = ns \quad\text{..(1)}$$

$$y = s(\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2 + \ldots\ldots)$$

前節ヨリ

$$\tan\alpha_2 = \tan\alpha_1 + \frac{w}{H}$$

$$\tan\alpha_3 = \tan\alpha_2 + \frac{w}{H} = \tan\alpha_1 + 2\frac{w}{H}$$

$$\tan\alpha_4=\tan\alpha_1+3\frac{w}{H}$$

等ノ關係アルヲ以テ

$$y=s\left[n\tan\alpha_1+\frac{1}{2}n(n-1)\frac{w}{H}\right]\dots\dots\dots\dots(2)$$

(1) ト (2) トヨリ

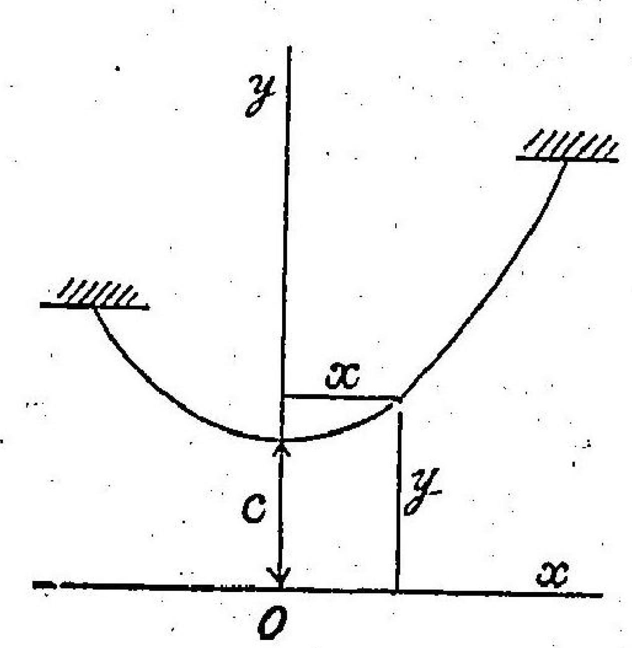
$$x^2+\frac{2\tan\alpha_1 H-w}{w}sx=\frac{2Hs}{w}y$$

此式ハ Parabola ヲ表ハス.

85. 兩端ニテ支ヘラレタル heavy flexible cord.

此場合ニ cord ノ形ハ catenary ニシテ其式ハ

$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+c^{-\frac{x}{c}}\right)$$

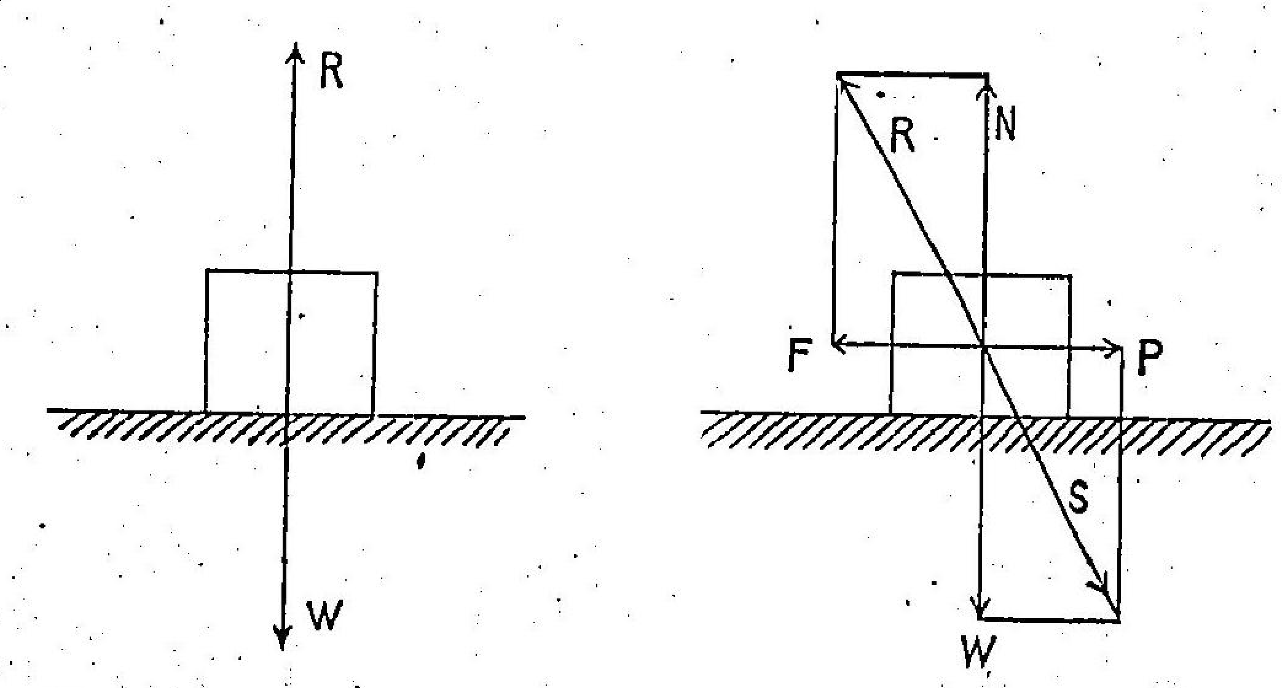


第七章

摩擦

86. 摩擦.

或物體カ或表面上ニ靜止セル時其表面ニ平行ニ或力ヲ加フルモ其力ノ大サガ或値ニ達セザル迄ハ動カズ,其力ヲ增シテ或値ニ達スレバ物體ハ終ニ動キ始メントス,此クノ如ク物體ヲ或表面ニ沿フテ動カサントスレバ其運動セントスル方向ニ反對ノ方向ヘ働ク抵抗力アリ,此抵抗力ヲ Friction ト云フ.



物體ガ机上ニ放置サレアル時ハ,物體ノ重量ト物體ヘ机ノ表面ヨリノ reaction トハ釣合ニアリ,此場合ニハ水平方向ヘ働ケル力モ無ク, friction モ無シ,更ニ此物體ニ水平方向ヘ力 P′ ヲ加フルモ P′ ガ或値 P ヨリモ小ナ

ル間ハ依然靜止シ釣合ノ狀態ニアリ,此際 friction ハ F' ニシテ其大サハ P' ニ等シク,其方向ハ P' ノ方向ト反對ナリ, P' ノ値ヲ增シテ P トスレバ終ニ物體ハ表面ニ沿フテ滑リ始メントスルニ至ルベシ,此塲合ノ friction ヲ F トス, F ハ P ト大サ等シク方向反對ナリ, P ノ大サヲ少シニテモ增セバ物體ハ滑リ始ム,此 F ヲ limiting static friction ト云フ,實驗上 F ハ接觸表面ニ垂直ニ働クル力 N ニ正比例ス,即チ

$$F \propto N$$

即チ

$$F=\mu N$$

但 μ ハ表面ノ材料及滑カサニ關スルモノナルモ, N ノ大小幷ニ表面積ノ大小,形狀ニ關セズ,上式ヨリ

$$\mu=\frac{F}{N}$$

μ ヲ摩擦係數 coefficient of friction ト云フ.

上記ノ關係ハ通常ノ N ノ値ニ對シ正シキモ N ガ極メテ大ナル塲合,又ハ小ナル塲合ニハ精確ニ適合セズ.

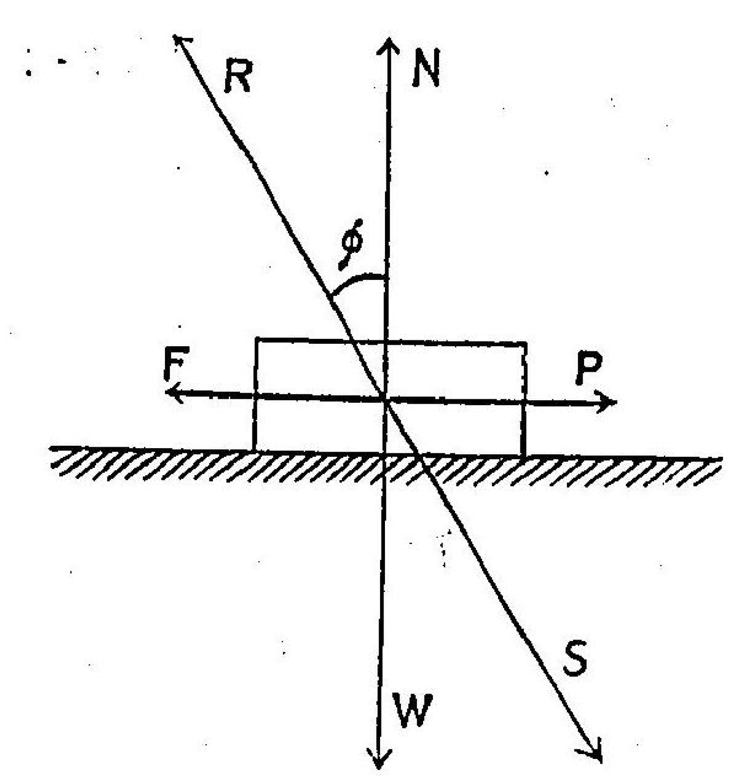
μ ノ値ハ概子次表ノ如シ.

Wood on wood, soaped	0.22—0.44
„ „ „ dry	0.30—0.70
Metal on metal, dry	0.15—0.24
„ „ „ as in polished and well-lubricated bearings	0.05—0,08

Wood on metal, dry	0.60
Hemp rope on wood	0.50—0.80
Sole-leather on wood on cast iron, as in packings, dry	0.40—0.60
Leather belting on pulleys	0.25—1.00

水平面上ニアル物體ノ重量ヲ W トシ,將ニ滑ラントセル時水平方向ヘ働クル力ヲ P トシ, P ト W トノ合力ヲ S トスレバ

$$S=\sqrt{P^2+W^2}$$



物體ハ釣合ヘルヲ以テ机ヨリ物體ヘノ reaction ヲ R トスレバ R ト S トハ大サ等シク方向反對ナリ, R ノ鉛直分力ハ W ニ釣合ヒ, R ノ水平分力即チ friction ハ P ニ釣合フ.

$$\mu=\frac{P}{W}$$

此塲合ノ S ト W トノ間ノ角,即チ接觸面ヘノ normal ト R トノ間ノ角ヲ ϕ トスレバ

$$\tan\phi=\mu$$

ϕ ヲ Friction Angle ト云フ.

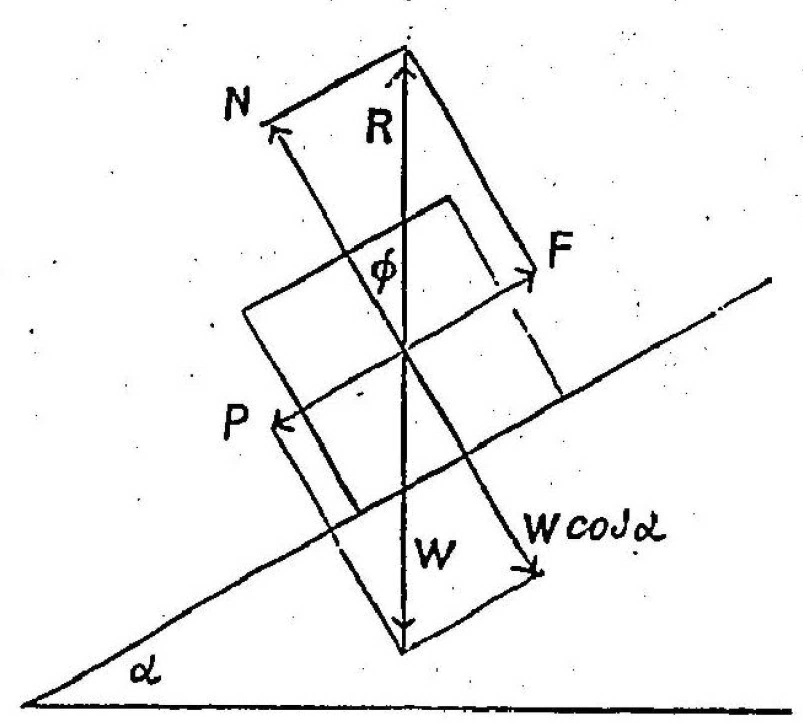
表面ガ水平方向ニ對シ α' ダケ傾ケラレテ猶物體ガ靜止セル時物體ノ重量 W ト物體ヘノ reaction R トハ釣合ニアリ,表面ニ直角ナル分力ハ

$$W\cos\alpha'$$

表面ニ沿ヘル分力ハ

$$W\sin\alpha'$$

ナリ.



α' ヲ增セバ物體ハ終ニ斜面ニ沿フテ滑リ降ラントス,此場合ノ斜面ノ傾角ヲ α トスレバ

$$W\sin\alpha=\mu W\cos\beta$$

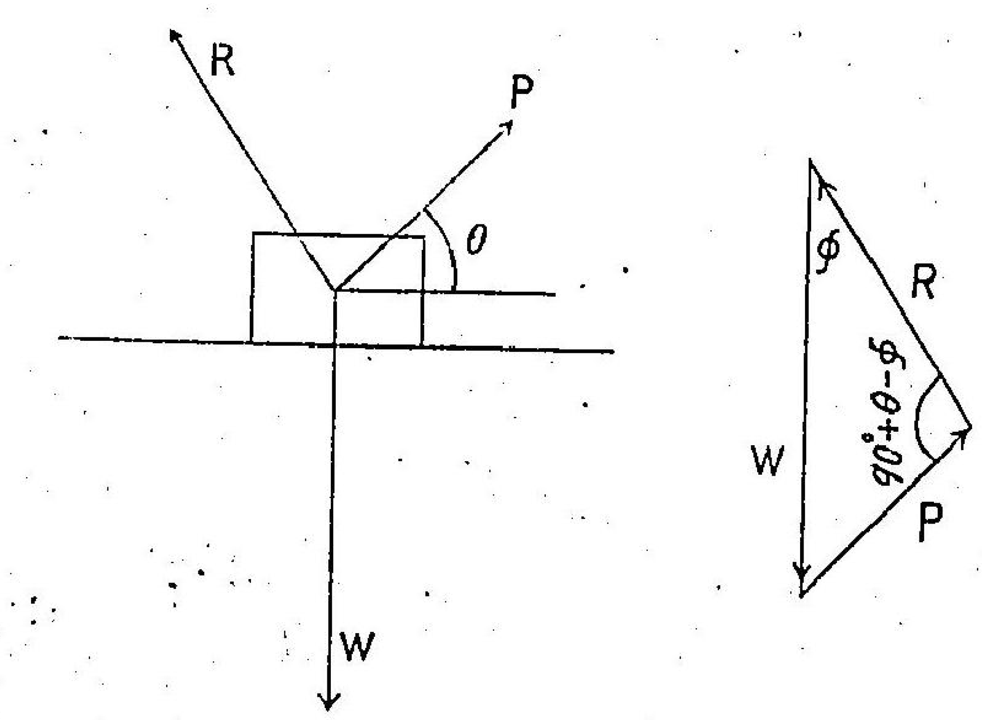
$$\therefore\quad \tan\alpha=\mu=\tan\phi$$

故ニ物體ガ重力ノ爲ニ將ニ滑リ降ラントスル時ノ斜面ノ傾角 α ハ ϕ ニ等シ, α ヲ Angle of Repose ト云フ.

物體ガ水平表面ヲ滑ラントスル場合 P ノ方向ガ水

平方向ニ對シ角 θ ヲナセル時, P, W, R ヲ釣合ヘルヲ以テ

$$\frac{P}{W}=\frac{\sin\phi}{\sin(90^\circ-\phi+\theta)}=\frac{\sin\phi}{\cos(\theta-\phi)}$$



W 及ビ ϕ ノ値ガ與ヘラレタル場合ニ $\cos(\theta-\phi)$ ガ最大ナル時,即チ $\theta=\phi$ ナル時 P ハ最小ナリ,而シテ P ノ方向ハ R ノ方向ニ直角ナリ.

次ニ斜面ニ沿フテ物體ガ引キ上ゲラレントスル時ノ釣合ヲ考フルニ,斜面ノ傾角ヲ α トシ, P ガ斜面ニ平行ニ働ケルモノトスレバ, P ト W ト R トノ釣合ニ於テ

$$\frac{P}{W}=\frac{\sin(\alpha+\phi)}{\sin(90^\circ-\phi)}$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\phi)}{\cos\phi}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\phi+\cos\alpha\sin\phi}{\cos\phi}$$

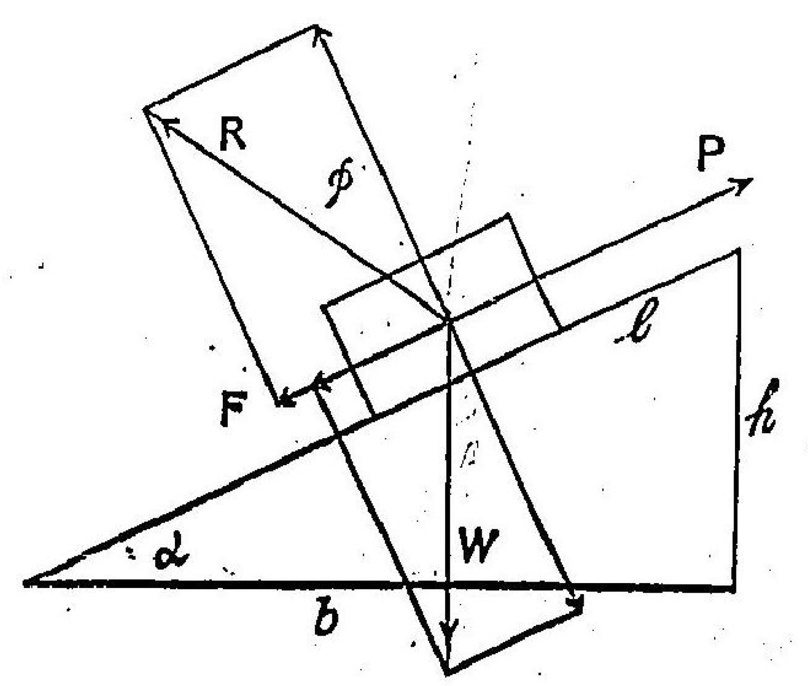
$$=\sin\alpha+\mu\cos\alpha$$

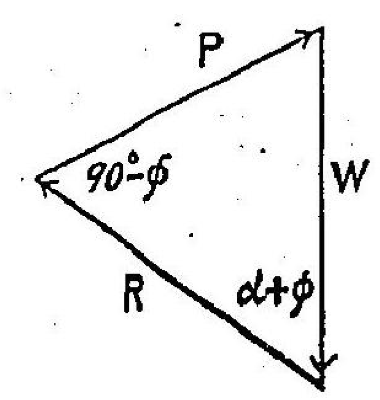
斜面ノ底ヲbトシ,高サヲhトシ,長サヲlトスレバ前式ヨリ

$$\frac{P}{W}=\frac{h}{l}+\mu\frac{b}{l}$$

即チ

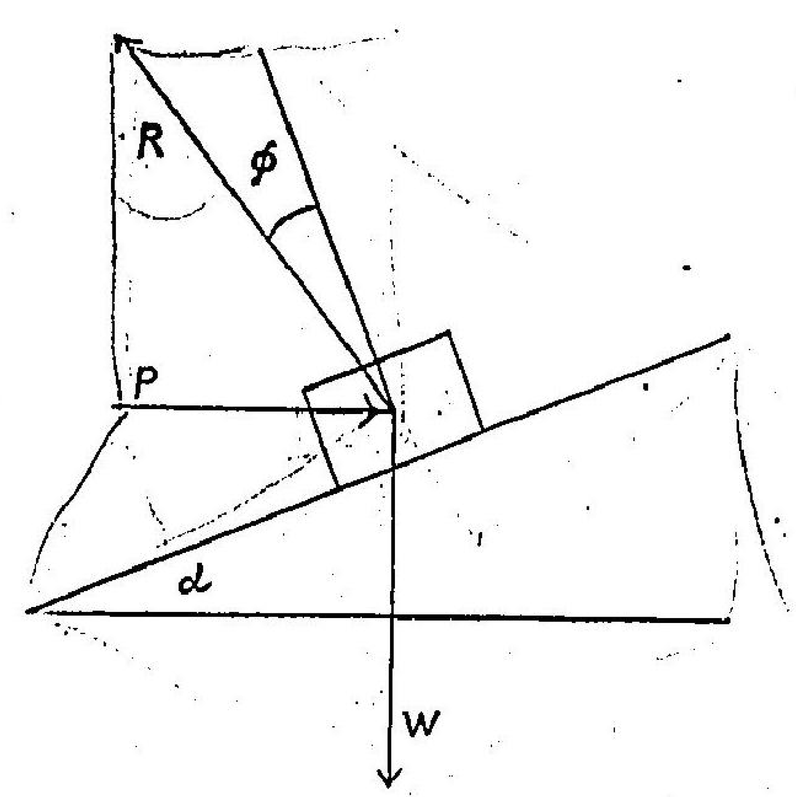
$$Pl=Wh+\mu Wb$$

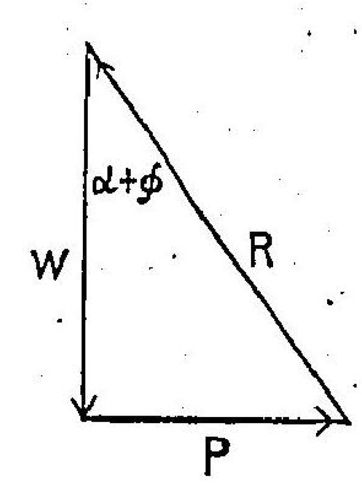




次ニPガ斜面ノ底ニ平行セル場合ニハ

$$P=W\tan(\alpha+\phi)$$



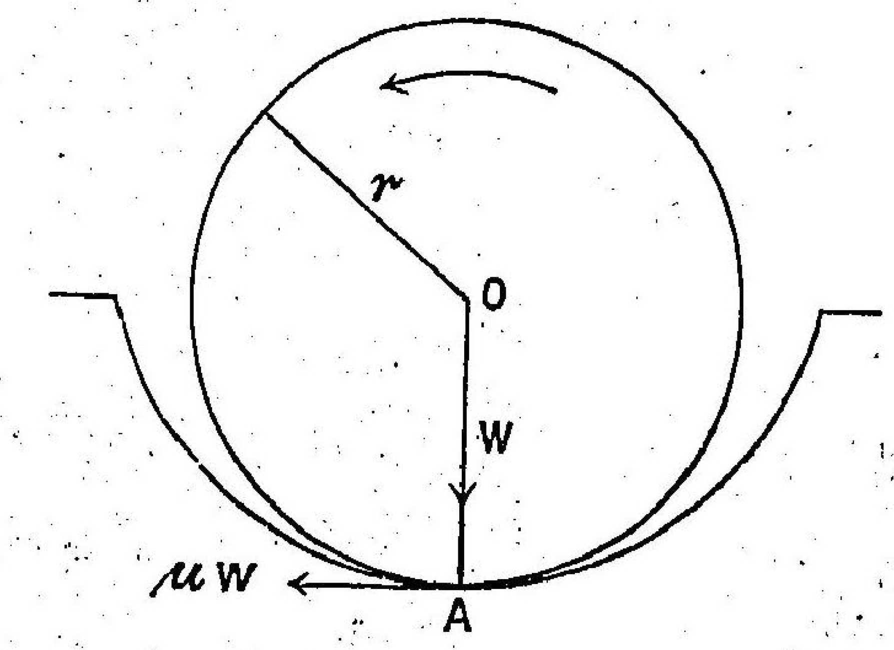


物體ガ水平表面ニ沿フテ引カルヽ時引ク力Pノ大

サガ limiting static friction F ニ打勝ツニ至レバ物體ハ表面ニ沿フテ滑リ始ムベシ,物體ガ滑リツヽアル場合ノ friction ヲ kinetic friction ト云フ, kinetic friction ノ係數ハ static friction ノ係數ヨリモ稍小ナリ,而シテ通常ノ速度ニ於テハ kinetic friction ハ接觸表面間ノ relative velocity ニハ殆ド關係セズ.

87. Journal Friction.

Shaft ガ靜止セル時 bearing ノ上ヘ journal ノ壓力 W ハ中心 O ヲ通シ,且最下點 A ヲ通ジ鉛直下方ヘ向フベシ,矢ニテ示セル方向ヘ廻轉セントスレバ A 點ハ水平ニ



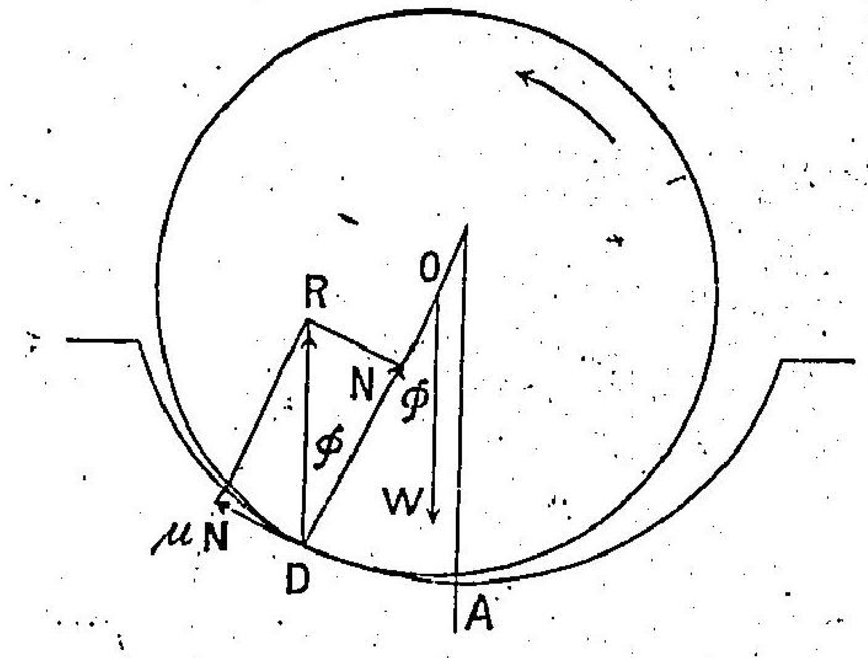
右方ヘ動カントシ,從テ friction μW ヲ左方ヘ受クベシ,此摩擦抵抗力ノ O 點ニ關スル能率ハ μWr ナリ,此 friction moment ニ打勝ツ爲ニ大サ等シクシテ反對ナル moment ヲ要スベシ,然レドモ全部ガ釣合ノ狀態ニアル爲ニハ此 moment ノミニテハ不足ナリ,水平方向ニ於ケル諸力ノ和ガ零トナル條件ヲ滿足セザル可ラズ,然ルニ A ニ

frictional force ガアルモノトシテハ後ノ條件ハ滿足サレズ,實際ニ於テハ接觸點ハAヨリモ側方ノ點Dニアリテ normal reaction N ト fiction μN トノ兩水平分力ガ釣合ニアリ, OD ガ鉛直線トナセル角ヲ α トスレバ

$$N \sin \alpha = \mu N \cos \alpha$$

$$\therefore \quad \tan \alpha = \mu = \tan \phi$$

$$\therefore \quad \alpha = \phi$$



Bearing ヨリノ total reaction R ハ N ト μN トノ合力ニシテ DO ト ϕ ナル角ヲナス, R ト W トハ大サ等シク方向反對ニシテ Friction couple ヲ作ル,而シテ其 couple ノ moment ハ

$$W r \sin \phi$$

ナリ, O點ノ側方ヘノ移動ハ甚ダ僅カナルヲ以テ W ハ猶 Bearing ノ最下點 A ヲ通スルモノト見做シテ可ナリ, lubricated journals ニ付

$$\mu = \tan \phi < 0.1$$

故ニ $\tan\phi$ ノ代リニ $\sin\phi$ ヲ用フルモ可ナルヲ以テ

$$Wr \sin \phi = \mu Wr$$

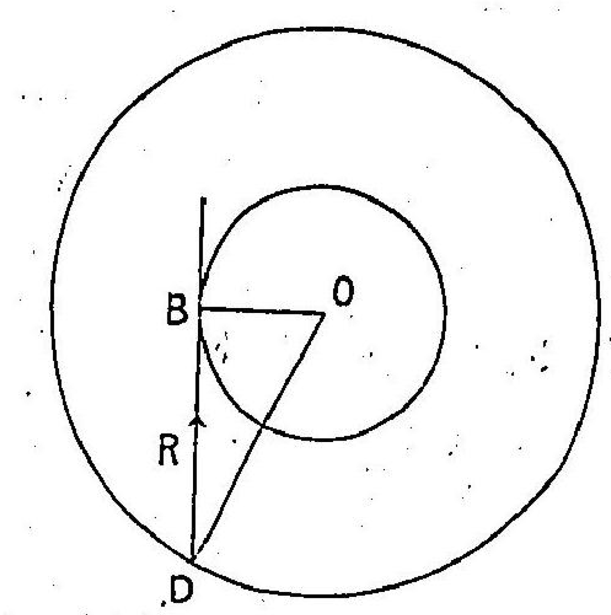
即チ frictional force μW ガ r ナル lever-arm ヲ以テ働クモノト見做シ得ラル.

O ヲ中心トシ,半徑 $r \sin \phi$ ヲ以テ畫ケル圓ヲ friction circle ト云フ.

$$\sin \mathrm{BDO} = \frac{r \sin \phi}{r}$$

$$= \sin \phi$$

$\therefore$ 角 $\mathrm{BDO} = \phi$



故ニ slipping ガ起ラントスル時, bearing ヨリ働ク resitance ノ作用線ハ其ノ friction circle ニ切線ナリ.

88. Rolling Friction.

Cylinder ガ水平面上ヲ廻轉スル場合ヲ考フ,廻轉體ノ重量ヲ W トス,表面ヘ落チ込ミタル深サヲ h トス,廻轉體ノ半徑ヲ R トス,水平ニ加ヘラレタル力 P ニヨリテ將ニ廻轉ヲ起サントスル時ノ釣合ニ於テ

$$P \cdot \overline{BA} = W \cdot \overline{AC}$$

即チ

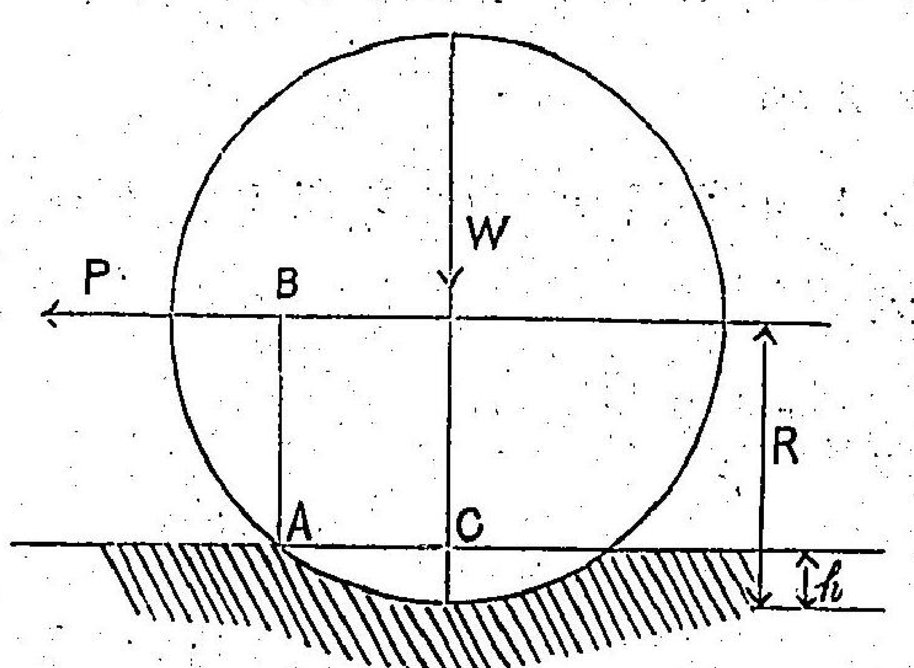
$$P = \frac{AC}{BA}$$

AC=K トスレバ

$$P = \frac{W \cdot K}{R - h}$$

h ハ R ニ比シテ極メテ小ナルヲ以テ

$$P=K\frac{W}{R}$$



P ト W, 及 R ト K トハ夫々同一ノ單位ニテ測ラレザル可ラズ, K ノ値ヲ吋ニテ與フレバ略次表ノ如シ.

		K (inches)
Iron or steel wheels on iron or steel rails		0.007—0.015
„ „	wood	0.06 —0.10
„ „	macadam	0.05 —0.20
„ „	soft ground	3—5

第 八 章

簡 單 ナ ル 機 械

89. 簡單ナル機械.

通常 simple machines ト稱セラルヽモノハ次ノ六種ナリ.

1. 槓杆, 2. 軸車, 3. 滑車, 4. 斜面, 5. 楔. 6. 螺旋.

機械ノ一部ニ働ケル Resistance ニ打勝ツ為ニ他ノ一部ニ加ヘラレタル力ヲ Effort ト云フ,又時トシテ Resistance ヲ Weight ト云ヒ, Effort ヲ Power ト稱スルコトアリ.

Resistance ヲ W トシ, effort ヲ P トス.然ル時

$$\frac{W}{P}=A$$

A ヲ其機械ノ mechanical advantage ト云フ.

二個ノ機械 M_1 ト M_2 トカ組合ハサレテ M_1 ノ受クル所ノ resistance W′ ガ M_2 ニ對シ effort トシテ働ク場合ニハ, M_1 ニ働ケル effort ヲ P, M_2 ニ働ケル resistance ヲ W トシ, M_1, M_2 ノ mechanical advantage ヲ夫々 A_1, A_2 トシ組合サレテ得タル機械ノ mechanical advantage ヲ A トスレバ

$$A_1=\frac{W'}{P},\quad A_2=\frac{W}{W'}$$

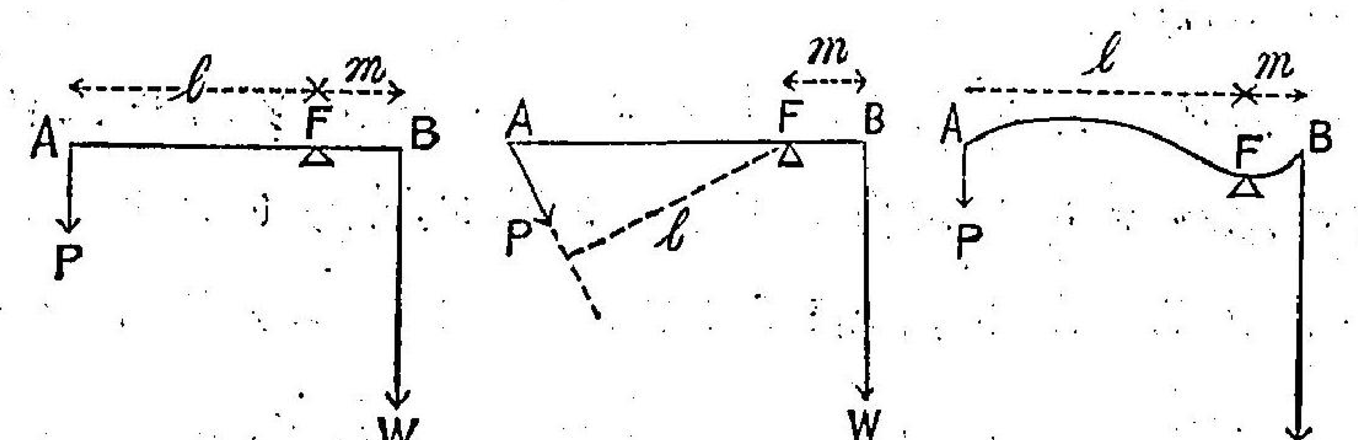
而シテ

$$A_1 \times A_2 = \frac{W'}{P} \times \frac{W}{W'} = \frac{W}{P} = A$$

此結果ハ二個ノ機械ノ組合ニ付テノミナラズ,多數ノ機械ガ組合ハサレタル場合モ同樣ナリ.

90. 槓杆.

槓杆ニハ眞直ナルアリ,屈曲セルアリ,釣合ヘル時ニハ W ト P ト支點ニ於ケル reaction トノ三力ニヨリテ釣合ヘリ,其作用線ハ平行ナルコトアリ然ラザルコトアリ,平行ナラザル場合ニハ釣合ノ條件ニヨリテ三作



(a)

線ハ一點ニ會ス,何レノ場合ニモ支點 F ヨリ P ノ作用線ニ至ル距離ヲ l トシ, W ノ作用線ニ至ル距離ヲ m トスレバ釣合ヘル時 F ニ關スル moment ニ付

$$Pl - Wm = 0$$

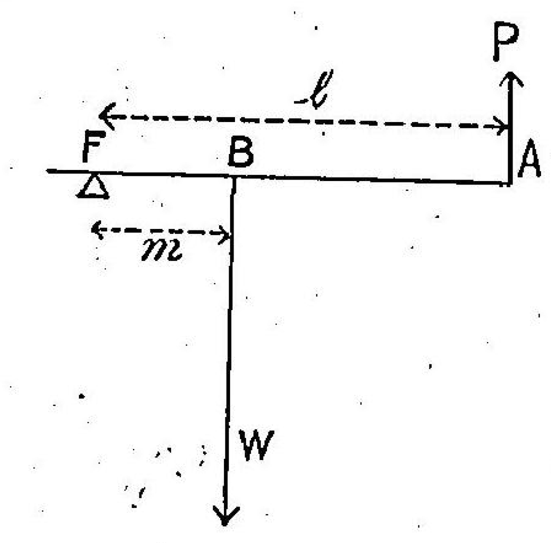
$$\therefore \quad \frac{W}{P} = \frac{l}{m}$$

又

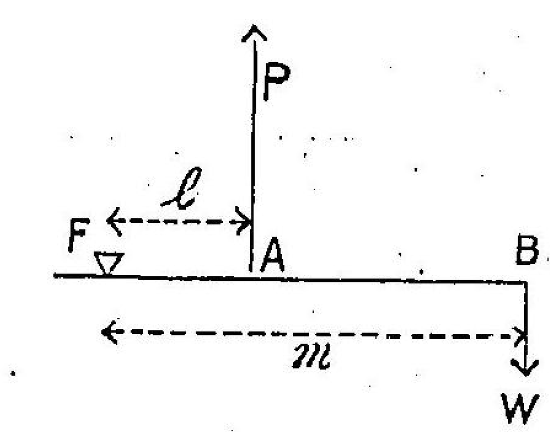
$$P = \frac{m}{l} W$$

支點トPノ着力點AトWノ着力點Bトノ位置ニヨ

リテ圖ニ示セル如ク (a), (b) 及ビ (c) ノ三種類トナル.



(b)



(c)

上述セル所ニ於テハ棒ノ重量ハ棄却セラレタルモ,此重量ヲモ計算ニ入ルヽ場合ニハ,棒ノ太サ一樣ニシテ,密度亦一樣ナリトシ,單位ノ長サニ付テ重量 w ナリトス,棒ノ全長ヲ L トス,從テ棒ノ重量ハ wL ナリ, (a) ノ場合ヲ例トシテ考フルニ,棒ノ重心ハ支點ヨリ

$$l - \tfrac{1}{2}L$$

故ニ釣合ニ於テ

$$Pl + wL(l - \tfrac{1}{2}L) - Wm = 0$$

$$\therefore \quad W = P\frac{l}{m} + \frac{wL(l - \frac{1}{2}L)}{m}$$

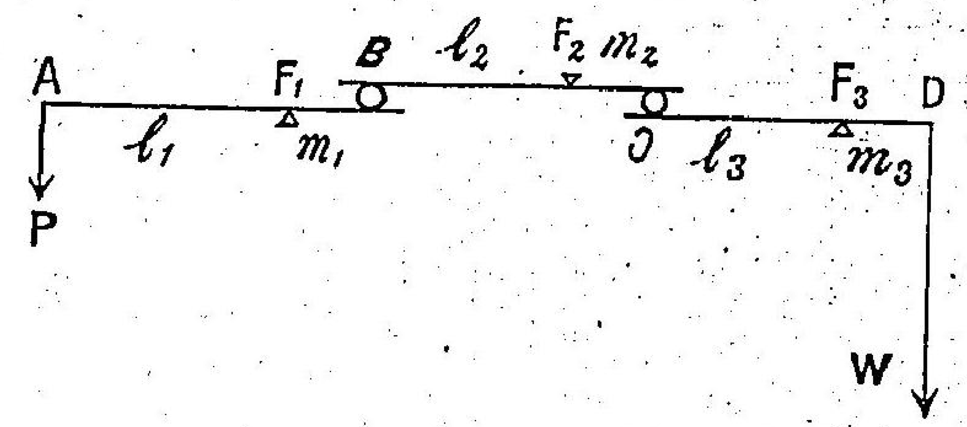
同樣ニ (b) ノ場合ニハ

$$PL - Wm - wL \times \tfrac{1}{2}L = 0$$

$$\therefore \quad W = P\frac{L}{m} - \frac{wL^2}{2m}$$

AB, BC, CD ハ三個ノ槓杆ナリ,其支點ヲ夫々 F_1, F_2, F_3 トス,長キ arm ヲ夫々 l_1, l_2, l_3 トシ,短キ arm ヲ m_1, m_2, m_3 ト

ス,又 B ニ於ケル pressure ヲ R_B トシ, C ニ於ケルヲ R_C トス.



釣合ヘル時

$$R_C=\frac{m_3}{l_3}W$$

$$R_B=\frac{m_2R_C}{l_2}=\frac{m_2m_3}{l_2l_3}W$$

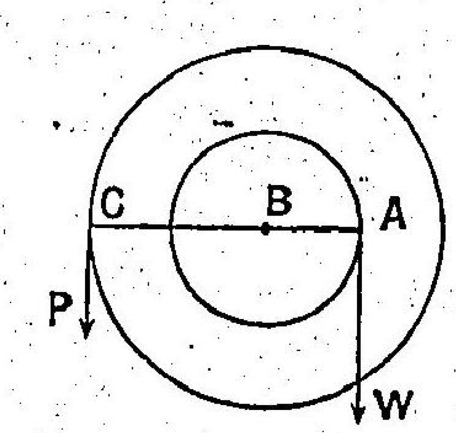
$$P=\frac{m_1}{l_1}R_B=\frac{m_1m_2m_3}{l_1l_2l_3}W$$

又

$$\frac{W}{P}=\frac{l_1l_2l_3}{m_1m_2m_3}$$

91. Wheel and Axle.

釣合ニ於テ



$$P\times\overline{BC}=W\times\overline{AB}$$

BC=R, AB=r トスレバ

$$\frac{W}{P}=\frac{R}{r}$$

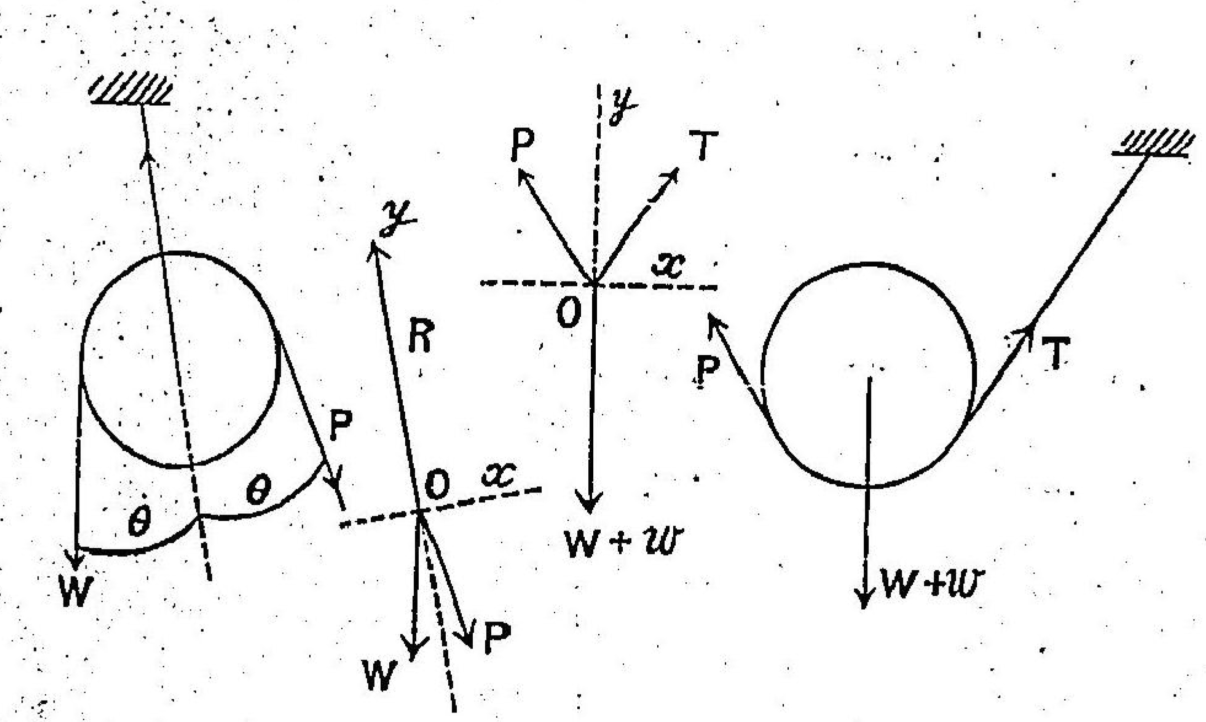
$$P=\frac{r}{R}W$$

92. 滑車.

摩擦無シト假定ス, 定滑車ニ付其半徑ヲ r トスレバ

$$Pr=Wr$$

$$\therefore\quad P=W$$



x 及ビ y 軸ヲ圖ニ示セル如クニ採レバ釣合ニ付

$$R-W\cos\theta-W\cos\theta=0$$

但シ R ハ block ヲ支持スル staple ノ reaction ナリ,故ニ

$$R=2W\cos\theta$$

動滑車ノ釣合ニ於テ T ヲ綱ノ tension トスレバ

$$-Pr+Tr=0$$

$$\therefore\quad P=T.$$

w ヲ動滑車ノ重量トスレバ

$$P\cos\theta+P\cos\theta-W-w=0$$

故ニ

$$P=\frac{W+w}{2\cos\theta}$$

93. 數多ノ滑車ノ組合.

釣合ヘル場合ニ綱ノ各部ノ tension ハ同一ナリトシテ各部ノ釣合ヲ考フベシ.

第一圖ニ於テ下ノblockニ懸レル綱ノ數ヲnトスレハ

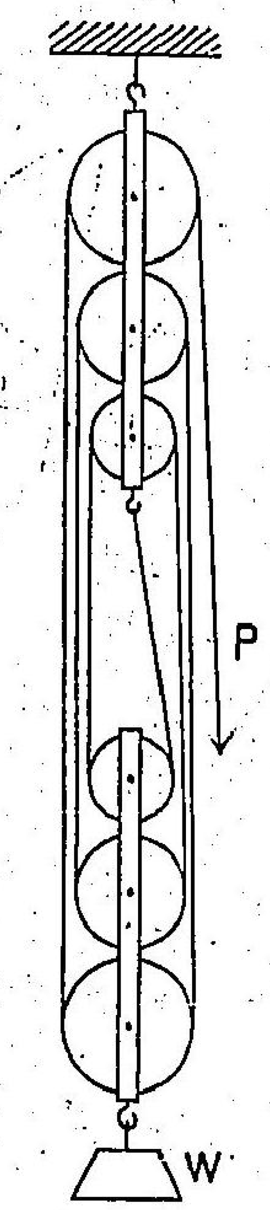
$$W=nP$$

ナルコトカ容易ニ證明セラル,下ノ block ノ重量ヲ w トシ之ヲモ考フレハ

$$W=nP-w$$

第二圖ニ於テハ第 n 番目ノ滑車ニ働ケル力ヲ T_n トスレハ

$$W=T_n=2T_{n-1}=2^2T_{n-2}=2^3T_{n-3}$$
$$=\cdots\cdots=2^nT_0$$
$$=2^nP$$



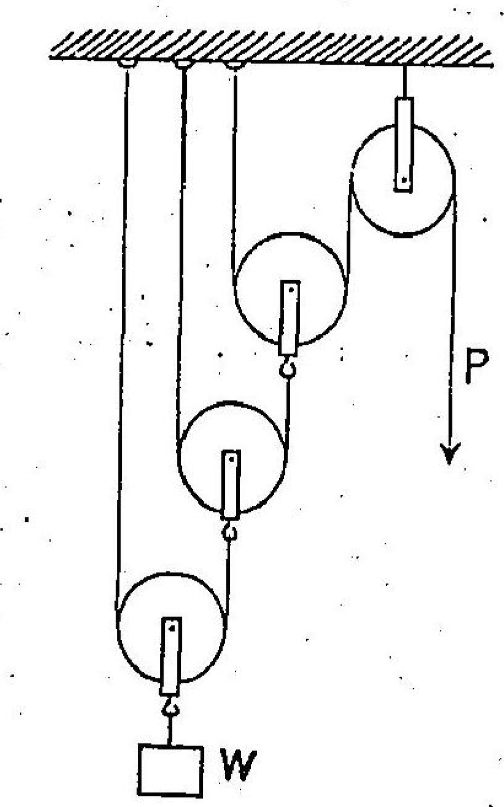
第 一 圖

又滑車ノ重量ヲ各 $w_1\ w_2\ w_3\cdots\cdots$ w_n トスレハ各部ノ釣合ニ於テ

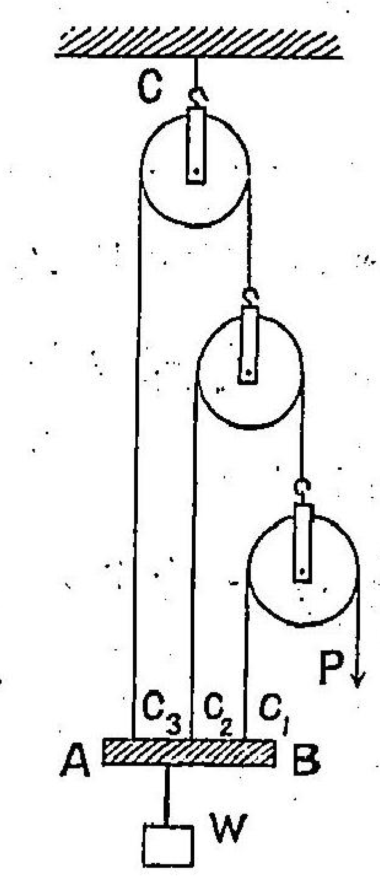
$$\left.\begin{array}{l} W-2T_{n-1}+w_n=0 \\ T_{n-1}-2T_{n-2}+w_{n-1}=0 \\ T_{n-2}-2T^{n}{}_{-3}+w_{n-2}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_1-2P+w_1=0 \end{array}\right\}$$

第二式ニ 2 ヲ乘シ,第三式ニ 2^2,第四式ニ 2^3 ヲ乘ス,追テ此クノ如クスレハ

$$\left.\begin{array}{l} W-2T_{n-1}+w_n=0 \\ 2T_{n-1}-2^2T_{n-2}+2w_{n-1}=0 \\ 2^2T_{n-2}-2^3T_{n-3}+2^3w_{n-2}=0 \\ 2^3T_{n-3}-2^4T_{n-4}+2^3w_{n-3}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2^{n-1}T_1-2^nP+2^{n-1}w_1=0 \end{array}\right\}$$



第 二 圖



第 三 圖

是等ノ式ヲ加フレハ

$$W-2^nP+w_n+2w_{n-1}+2^2w_{n-2}+\cdots\cdots+2^{n-1}w_1=0$$

故ニ

$$W=2^nP-(w_n+2w_{n-1}+2^2w_{n-2}+\cdots\cdots+2^{n-1}w_1)$$

若シモ $w_1=w_2=w_3=\cdots\cdots=w_n=w$ ナラハ

$$W=2^nP-(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})w$$
$$=2^nP-(2^n-1)w$$

第三圖ノ場合ハ第二圖ノ場合ヲ逆ニセシモノナリ,Cニ於テ滑車ニ働ケル力ハ第二圖ノ場合ノ W ニ相當ス之ヲ W' トスレハ

$$W'=2^nP$$

滑車ノ組合全部ハ W', W 及ヒ P ニテ釣合ヘルヲ以テ

$$W'=P+W=2^nP$$

故ニ $W=(2^n-1)P$

Wヲ釣ルス可キ位置ヲ求ムルニハ, c_1, c_2, c_3 等ニ於ケル綱ノ tension ヲ見出シ,是等ノ tensions ノ合力 W ノ AB 上ニ於ケル着力點ヲ見出セハ其着力點カ即Wヲ釣ルスヘキ位置ナリ.

c_1 ニ於ケル tension $=P$

c_2 〃 〃 $=2P$

c_3 〃 〃 $=2^2P$

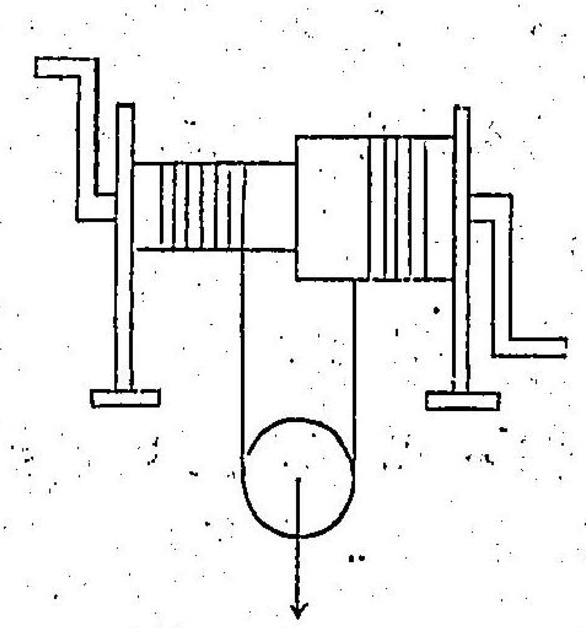
c_4 〃 〃 $=2^3P$

94. Chinese Windlass.

綱ノ tension ハ動滑車ニ懸レル重量ノ半分ナリ,大ナル barrel ノ半徑ヲ R, 小ナル barrel ノ半徑ヲ r トス, handle ノ半徑ヲ l トス, 一廻轉ニ付 W ハ $R-r$ ダケ上昇スヘシ.

釣合ニ於テ

$$\frac{W}{2}\times R=\frac{W}{2}\times r+Pl$$



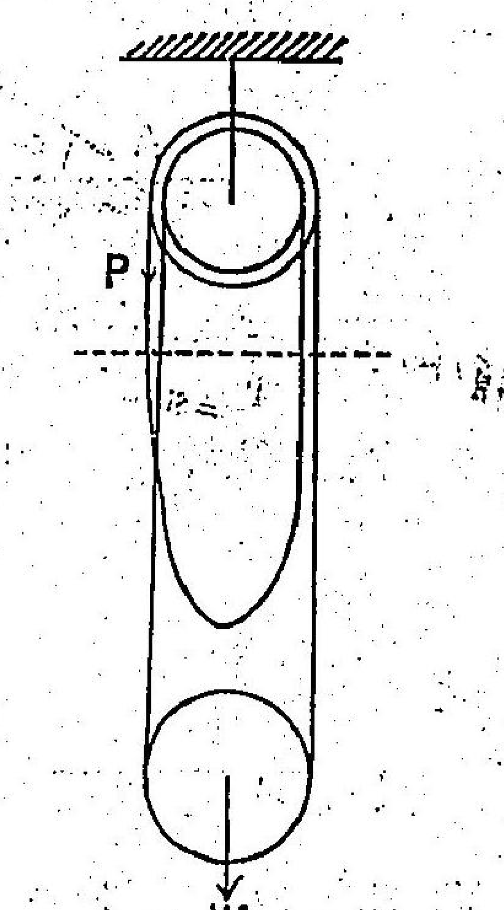
故ニ

$$W=\frac{2Pl}{R-r}$$

故ニ R ト r トノ差ヲ小ニナセハ從テ小ナル力ヲ以テ大ナル重量ヲ引キ上クルコトヲ得.

95. Weston's Differential Tackle.

先ヅ點線ヨリ上部ノ tackle ノ部分ノ釣合ヲ考フ,其重量ヲ無キモノトスレハ,此部分ニ働ケル力ハ四個ナリ,其四力トハ P, hook ニ於テ上方ヘ働ケル pull, 小ナル wheel ヲ越エテ左方ヘ懸レル綱ノ tension $\frac{W}{2}$, 及ヒ大ナル wheel ヲ經テ其右方ヘ懸レル綱ノ tension $\frac{W}{2}$ ナリ,小ナル滑車ノ半徑ヲ r トシ,大ナル滑車ノ半徑ヲ R トスレハ釣合ノ條件トシテ次ノ關係アリ.



$$PR+\frac{Wr}{2}-\frac{WR}{2}=0$$

故ニ

$$W=\frac{2R}{R-r}P$$

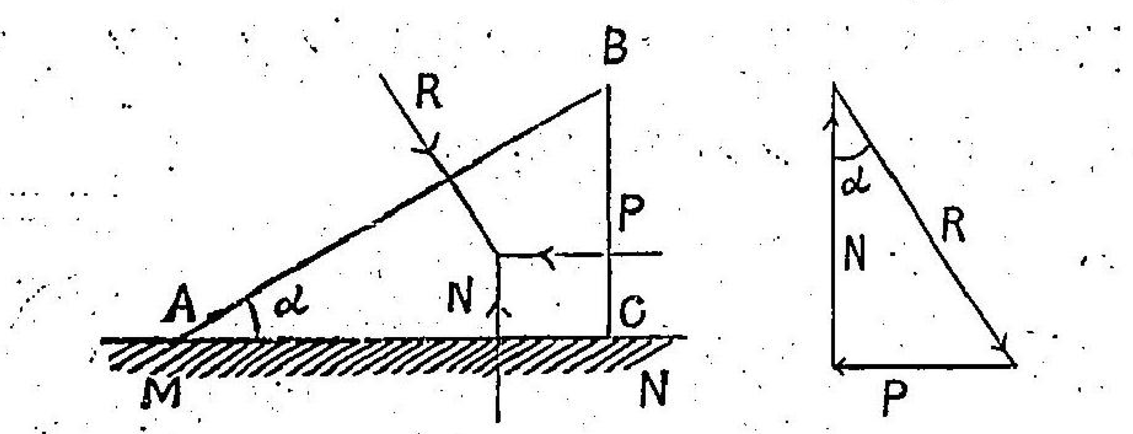
Weston ノ differential tackle ハ Chinese windlass ノ handle ニ働ク力ノ代リニ大ナル wheel ニ懸レル綱ニ力ヲ作用セシムルモノナレハ,前條ニテ得タル式ニ於テ l ノ代ニ R ヲ用フレハ上式ヲ得ベシ.

96. 斜面.

斜面ニ關シテハ既ニ第七章, 84ニ記述セラレタリ.

97. 楔.

摩擦無キ場合ニ於テ wedge ノ斷面ガ直角三角形ヲナセル場合ニ, P ヲ BC 面ニ直角ニ加ヘラレタル力トシ, R ヲ AB 面ヘノ壓力トシ, N ヲ MN ヨリ AC ヘ働ケル

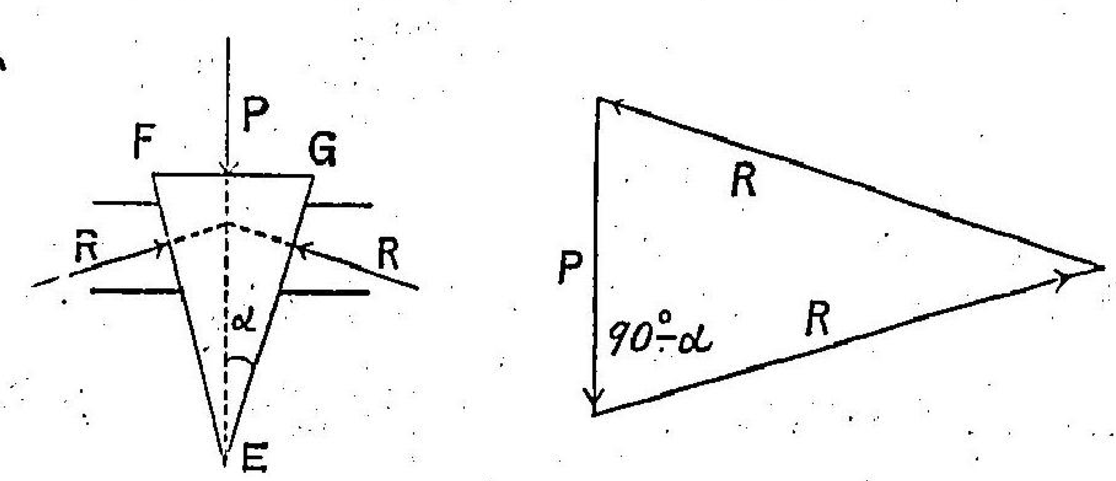


reaction トス,是等三力ガ釣合ヘル時ニハ一點ニ會スベシ,斜面ノ傾角ヲ α トスレバ力ノ三角形ヨリ

$$\frac{P}{R}=\sin\alpha$$

故ニ $$P=R\sin\alpha$$

又楔ノ横斷面ガ二等邊三角形ヲナセル場合ニ楔ノ面 EF ト EG トニ働ケル抵抗力 R ノ P ニ平行ナル分力ト直角ナル分力トヲ夫々 V, H トシ,角 FEG ノ半分ヲ α トスレバ



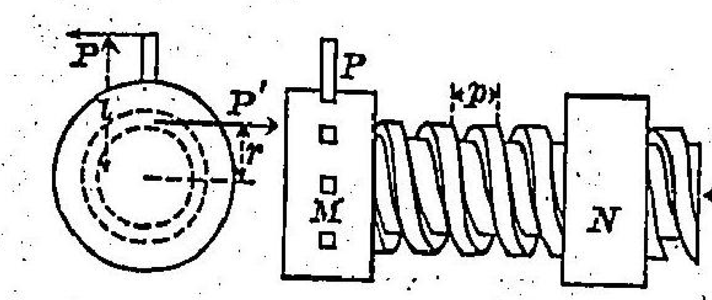
$$\frac{P}{2}=R\sin\alpha=V$$

$$\frac{P}{2}\cot\alpha=R\cos\alpha=H$$

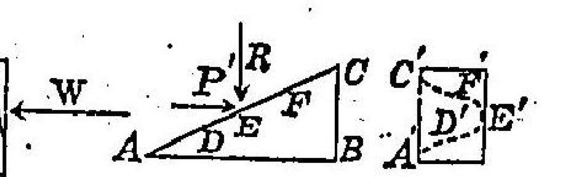
α ガ小ナレバ H ハ P ニ比シ大トナル可シ.

98. 螺旋.

N ハ fixed nut ナリ, l ハ lever arm ノ長サナリ, W ハ resisting force ナリ.



第一圖



第二圖

第二圖 ABC ハ直角三角形ナリ,底邊 AB ハ半徑 r ノ cylinder ノ周 $2\pi r$ ニ等シクシテ,之ヲ其 cylinder ニ捲ケバ其表面上ニ helix A′D′E′F′C′ ヲ作ル可シ,其傾キハ斜面 AC ノ傾キ α ナリ, A′C′ ヲ p トス, p ハ直角三角形 ABC ノ高サ BC ニ相當ス, p ヲ helix ノ pitch ト云フ, p ハ screw ガ effort P ニヨリテ一廻轉スル間ニ fixed nut N 中ヲ進行スル距離ナリ.

r ヲ screw ノ helical surface ノ平均半徑トシ, d ヲ其直徑トシ,其 mean inclination ヲ α トスレバ

$$\tan\alpha=\frac{p}{\pi d}$$

斜面 AC ニ沿ヒ, weight W ヲ, AB ノ方向ニ加ヘラレタル力 P′ ニヨリテ引キ上ケントスル場合ノ釣合ニ付 84 條ノ末尾ニ與ヘラレタル如ク

$$P'=W\tan(\alpha+\phi)$$

但シ ϕ ハ friction angle ナリ.

故ニ

$$\frac{P'}{W}=\tan(\alpha+\phi)$$
$$=\frac{\tan\alpha+\tan\phi}{1-\tan\alpha\tan\phi}$$
$$=\frac{p+\mu\pi d}{\pi d-\mu p}$$

P′ カ arm r ヲ以テ作用スル代リニ arm l ナル lever ニ加ヘラレタル effort P ヲ以テスル時ハ

$$P'd=2Pl$$

故ニ
$$P=\frac{d}{2l}P'$$
$$=\frac{dW}{2l}\tan(\alpha+\phi)$$

又
$$\frac{W}{P}=\frac{2l}{d}\frac{\pi d-\mu p}{p+\mu\pi d}$$

Screw ノ運動方向ヲ逆ニシテ load W ヲ下ロス爲ニハ effort P′ ハ逆ニセラレ其値ハ

$$P'=W\tan(\phi-\alpha)$$

ナリ,若シモ

$$\phi>\alpha$$

ナレハ P′ ハ正號ナリ,然ルニ若シモ

$$\phi<\alpha$$

ナレハ P′ ハ負號ナリ,即チ W ヲ下ロサントスル場合ニモ引キ上クル場合ト同一ノ方向ヘ P ヲ働カシムルコトヲ要ス,然ラサレハ W ノミノ作用ニヨリテ運動ハ逆ニセラルヘシ.

第 九 章

Moment of Inertia.

99. Moment of Inertia.

或直線ニ關スル或物體ノ moment of inertia トハ其物體ヲ組成スル質點ノ質量 dm ト,其質點ト其直線トノ間ノ距離 r ノ平方トノ乘積 dmr^2 ヲ物體全部ニ付テ加ヘ合セタル總和 Σdmr^2 ナリ,之ヲ I ヲ以テ表ハセハ

$$I=\Sigma dmr^2$$

直線ハ moment of inertia ノ軸ト名ケラル.

密度一樣ナル物體ニ付テハ其密度ヲ δ トシ,dm ニ對スル容積ヲ dv トスレハ

$$I=\delta\Sigma dvr^2$$

100. Radius of Gyration.

$$I=\Sigma dmr^2$$

之ヲ次ノ如ク置ク

$$I=M\kappa^2$$

但シ $M=\Sigma dm$ 即チ物體ノ全質量ナリ.

上記ノ關係ヲ滿足スル κ ヲ Radius of Gyration ト云フ.

$$\kappa=\sqrt{\frac{I}{M}}$$

密度一様ナル物體ニ付物體ガ n 個ノ質點ヨリ成ルモノトスレバ

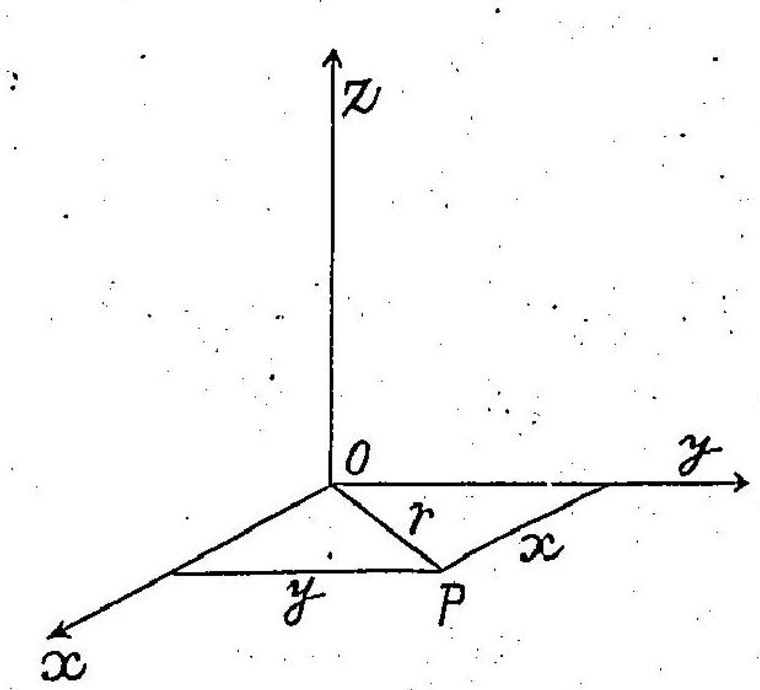
$$\frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2+\cdots\cdots+r_n^2}{n}=\frac{r_1^2dm+r_2^2dm+r_3^2dm+\cdots\cdots+r_n^2dm}{n\,dm}$$

$$=\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{M}}=\kappa^2$$

101. Moment of Inertia ニ關スル定理 I.

xy 平面上ニアル或平面板ノ z 軸ニ關スル moment of inertia ヲ I_z トシ, x 軸ニ關スルモノヲ I_x, y 軸ニ關スルモノヲ I_y トスレバ

$$\mathrm{I}_z=\mathrm{I}_x+\mathrm{I}_y$$



何ントナレバ

$$r^2=x^2+y^2$$

故ニ
$$\mathrm{I}_z=\Sigma r^2dm=\Sigma(x^2+y^2)dm$$
$$=\Sigma x^2dm+\Sigma y^2dm$$

然ルニ

$$\Sigma x^2dm=\mathrm{I}_y,\quad \Sigma y^2dm=\mathrm{I}_x$$

故ニ

$$\mathrm{I}_z=\mathrm{I}_x+\mathrm{I}_y$$

若シモ

$$\mathrm{I}_x=\mathrm{I}_y=\mathrm{I}$$

ナル場合ニハ

$$\mathrm{I}_z=2\mathrm{I}$$

102. Moment of Inertia ニ關スル定理 II.

x,y,z 軸ニ關スル或物體ノ moment of inertia ヲ夫々 I_x, I_y, I_z トスレバ

$$\mathrm{I}_x+\mathrm{I}_y+\mathrm{I}_z=2\Sigma dm\,r^2$$

但シ r ハ origin O ヨリ質點ニ至ル距離ナリ.

質點 $\mathrm{P}_1(x_1,y_1,z_1)$ ノ質量ヲ dm_1 トス.此點ノ x,y,z 軸ニ關スル moment of inertia ヲ夫々 i_x, i_y, i_z トスレバ

$$\left.\begin{aligned} i_x&=(z_1^2+y_1^2)dm_1\\ i_y&=(x_1^2+z_1^2)dm_1\\ i_z&=(y_1^2+x_1^2)dm_1 \end{aligned}\right\}$$

故ニ

$$i_x+i_y+i_z=2(x_1^2+y_1^2+z_1^2)dm_1$$
$$=2r_1^2dm_1$$

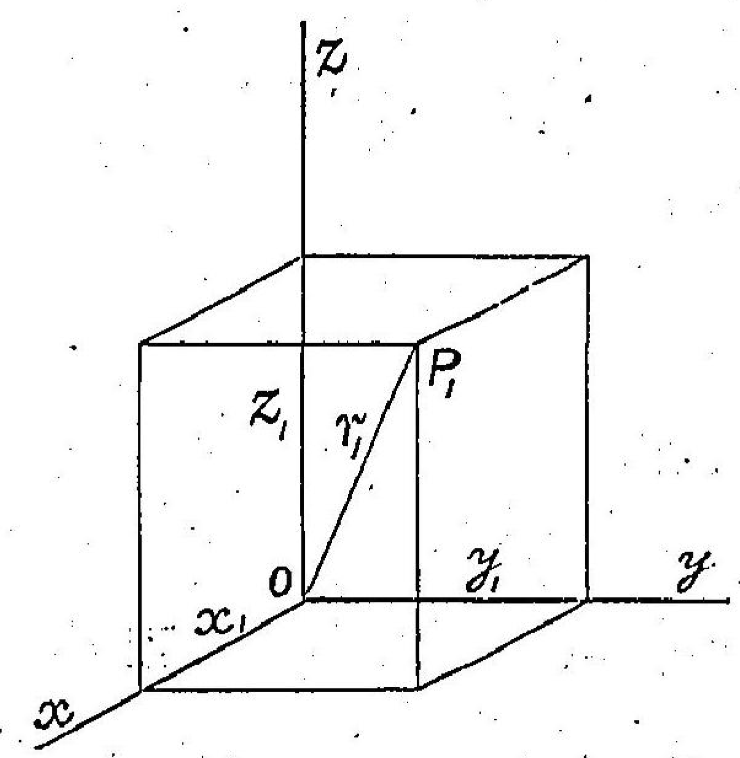
故ニ

$$\mathrm{I}_x+\mathrm{I}_y+\mathrm{I}_z=2\Sigma r^2dm$$

$\Sigma dm\,r^2$ ヲ I_o トスレバ

$$\mathrm{I}_x+\mathrm{I}_y+\mathrm{I}_z=2\mathrm{I}_o$$

I_o ヲ O ニ關スル物體ノ Polar Moment of Inertia ト云フ.



$$I_0=\Sigma dm\, r^2$$
$$=\Sigma dm(x^2+y^2+z^2)$$
$$=\Sigma dm\, x^2+\Sigma dm\, y^2+\Sigma dm\, z^2$$
$$=I_{yz}+I_{xz}+I_{xy}$$

但シ $I_{yz}=\Sigma dm\, x^2$, $I_{xz}=\Sigma dm\, y^2$, $I_{xy}=\Sigma dm\, z^2$

I_{yz}, I_{xz}, I_{xy} ヲ夫々 yz, xz, xy 平面ニ關セル物體ノ moment of inertia ト云フ.

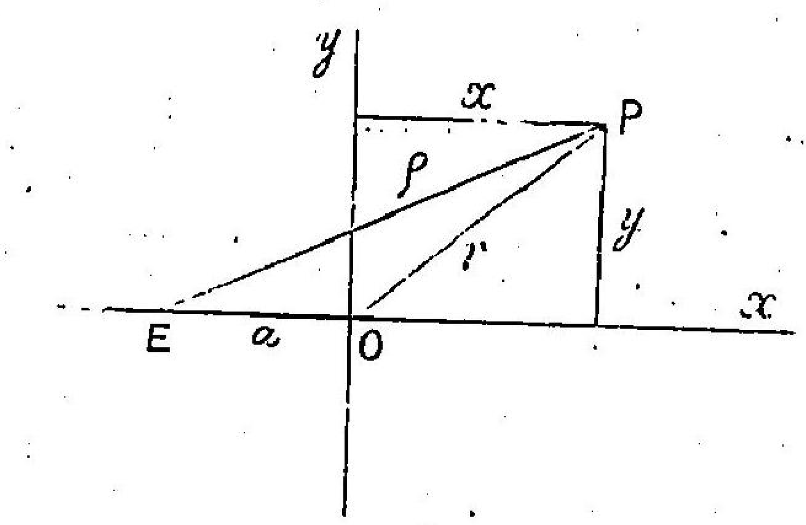
103. Moment of Inertia ニ關スル定理 III.

軸 AB ニ關スル moment of inertia ヲ I トス, AB ニ平行ニシテ重心ヲ通ズル軸 CD ニ關スル moment of inertia ヲ I_0 トシ, AB ト CD トノ間ノ距離ヲ a トシ,物體ノ mass ヲ M トスレバ

$$I=I_0+Ma^2$$

CD ヲ z 軸トス,其軸ノ xy 平面トノ交リヲ O トス, AB ハ xz 平面上ニアリトシ,其軸ノ xy 平面トノ交點ヲ E トス, O ト E トノ距離ハ即チ a ナリ, P ハ xy 平面上ノ

任意ノ點ナリ, OP ヲ r トシ, EP ヲ ρ トス.



然ル時

$$I=\Sigma dm\, \rho^2$$

然ルニ

$$\rho^2=y^2+(x+a)^2$$
$$=y^2+x^2+2ax+a^2$$

$$\therefore\quad I=\Sigma dm(x^2+y^2)+2a\Sigma dm\, x+a^2\Sigma dm$$
$$=\Sigma dm\, r^2+2a\Sigma dm\, x+a^2\Sigma dm.$$

然ルニ

$$\Sigma dm\, r^2=I_0$$

又 yz ノ平面ハ重心ヲ通ズ,即チ Zero moment ノ平面ナルヲ以テ

$$\Sigma dm\, x=0$$

故ニ

$$I=I_0+Ma^2$$

CD ニ關スル radius of gyration ヲ κ_0 トシ, AB ニ關スル radius of gyration ヲ κ トスレバ

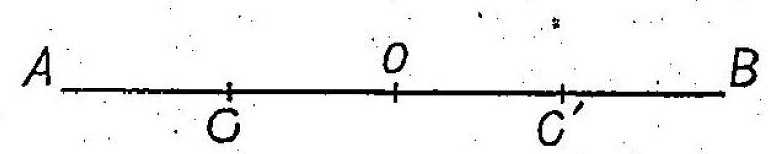
$$M\kappa^2=M\kappa_0^2+Ma^2$$
$$\therefore\quad \kappa^2=\kappa_0^2+a^2$$

104. 直線ノ moment of inertia.

AB ハ眞直ナル針金ナリ,其長サ $2a$ ナリ,中點ヲ O トス, AO ノ中點ヲ C, OB ノ中點ヲ C′ トス.

O ヲ通ジ AB ニ直角ニ交ハル直線ニ關スル AB ノ radius of gyration ヲ κ トシ, AB ノ mass ヲ m トスレバ其 moment of inertia ハ

$$m\kappa^2$$



C ヲ通ジ AO ニ直角ナル軸ニ關スル AO ノ moment of inertia ハ

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2=\frac{1}{8}m\kappa^2$$

$$\therefore\quad m\kappa^2=\frac{m}{2}\left(OC^2+\frac{\kappa^2}{4}\right)+\frac{m}{2}\left(OC'^2+\frac{\kappa^2}{4}\right)$$

$$=m\left(OC^2+\frac{\kappa^2}{4}\right)$$

$$\therefore\quad \kappa^2=OC^2+\frac{\kappa^2}{4}$$

$$\therefore\quad \kappa^2=\frac{a^2}{3}$$

故ニ O ヲ通ジ AB ニ直角ナル軸ニ關スル AB ノ I ノ値ハ

$$I=\tfrac{1}{3}ma^2$$

但 a ハ AB ノ半分ナリ.

A ヲ通ジ AB ニ直角ナル軸ニ關スル moment of inertia ヲ I′ トス,然ル時

$$I'=I+ma^2$$

$$=\tfrac{1}{3}ma^2+ma^2$$

$$=\tfrac{4}{3}ma^2$$

故ニ其 radius of gyration ハ

$$\kappa=\frac{2}{\sqrt{3}}a$$

AB ノ長サヲ l トスレバ

$$\kappa=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{l}{2}$$

$$=\frac{l}{\sqrt{3}}$$

此結果ハ次ノ如クニシテモ得ラル, r_1 ヲ O ヨリ dm_1 ニ至ル距離トス, O ト B トノ間ニ於ケル

$$\Sigma_0^a dm\, r^2$$

ノ値ハ O ヲ通ジ AB ニ直角ナル軸ニ關スル AB 全部ニ付テノ半分ナリ即チ

$$\Sigma_0^a dm\, r^2=\tfrac{1}{6}ma^2$$

OB ノ質量ヲ m' トス即チ $2m'=m$ 故ニ OB ノ一端 O ヲ通ジ OB ニ直角ナル軸ニ關スル OB ノ moment of inertia ハ

$$\tfrac{1}{3}m'a^2$$

但 a ハ OB ノ長サナリ其 radius of gyration ヲ κ トスレバ

$$\kappa=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

105. 矩形ノ moment of inertia.

矩形ノ邊ヲ a,b トス邊 a ヲ軸トセル moment of inertia ヲ求メントス.

軸ニ平行ナル直線ヲ以テ矩形ノ面積ヲ n 等分スレバ其一分ノ面積ハ

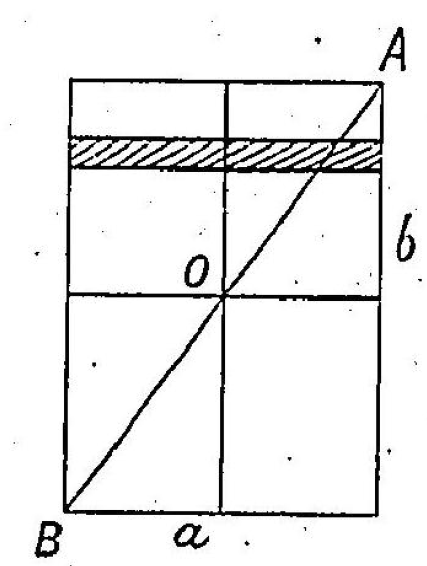
$$\frac{ab}{n}$$

又軸ヨリ第 m 番目ノ面積ニ至ル距離ハ

$$\frac{mb}{n}$$

故ニ此小面積ノ moment of inertia ハ

$$\frac{ab}{n}\times\left(\frac{mb}{n}\right)^2=\frac{ab^3m^2}{n^3}$$



故ニ矩形全面積ニ付テハ

$$\lim_{n=\infty}\Sigma_1^n\frac{ab^3m^2}{n^3}=ab^3\lim_{n=\infty}\frac{\Sigma m^2}{n^3}$$

$$=\frac{ab^3}{3}$$

其 radius of gyration ヲ κ トセバ

$$\frac{ab^3}{3}=ab\kappa^2$$

$$\therefore \quad \kappa=\frac{b}{\sqrt{3}}$$

更ニ此結果ヨリ矩形ノ重心 O ヲ通ジ邊 a ニ平行ナル直線ヲ軸トセル矩形ノ moment of inertia ヲ導クニ

$$2\frac{a\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3}=\frac{ab^3}{12}$$

$$\therefore \quad \frac{ab^3}{12}=ab\kappa^2$$

$$\therefore \quad \kappa^2=\frac{b^2}{12}$$

矩形ノ質量ヲ m トスレバ邊 a ニ關スル moment of inertia ハ

$$m\frac{b^2}{3}$$

又 O ヲ通シ a ニ平行ナル軸ニ關スル moment of inertia ハ

$$\frac{mb^2}{12}$$

ナリ.

次ニ O ヲ通シ矩形ニ直角ナル軸ニ關スル moment of inertia ヲ見出サントス之ヲ I トスレバ

$$\mathrm{I}=\frac{ma^2}{12}+\frac{mb^2}{12}$$

$$=\frac{m(a^2+b^2)}{12}$$

其 radius of gyration ハ

$$\kappa=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2\sqrt{3}}$$

106. 圓形ニ曲ケラレタル針金ノ moment of inertia.

中心ヲ通シ圓面ニ直角ナル軸ヲ z 軸トスレバ此軸ニ關スル moment of inertia I_z ハ

$$\mathrm{I}_z=\Sigma dm\, r^2$$

$$=r^2\Sigma dm$$

$$=mr^2$$

但シ r ハ半徑ナリ.

任意ノ直徑ニ關スル moment of inertia ヲ I_x トスレハ

$$I_z=2I_x$$

$$\therefore\quad 2I_x=mr^2$$

$$\therefore\quad I_x=\tfrac{1}{2}mr^2$$

此軸ニ關スル radius of gyration ハ

$$\kappa=\frac{r}{\sqrt{2}}$$

107. 圓板ノ moment of inertia.

圓ノ半徑ヲ a トス,半徑ヲ n 等分シテ $\frac{ma}{n}$ ト $\frac{m+1}{n}a$ トヲ半徑トシテ書ケル圓周ニテ限ラレタル ring ノ面積ハ

$$2\pi\frac{ma}{n}\times\frac{a}{n}$$

中心ヲ通シ圓ノ面ニ直角ナル軸ニ關スル此 ring ノ moment of inertia ハ

$$2\pi\frac{ma}{n}\times\frac{a}{n}\times\left(\frac{ma}{n}\right)^2=\frac{2\pi a^4m^3}{n^4}$$

故ニ圓板ノ moment of inertia ハ

$$\lim_{n=\infty}\Sigma_1^n\frac{2\pi a^4m^3}{n^4}=2\pi a^4\lim_{n=\infty}\frac{\Sigma_1^n m^3}{n^4}=\frac{\pi a^4}{2}$$

又

$$\kappa^2=\frac{a^2}{2}$$

即チ

$$\kappa=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

質量ヲ m トスレハ中心ヲ通シ,圓板ノ面ニ直角ナル軸ニ關スル moment of inertia ハ

$$I=\tfrac{1}{2}ma^2$$

直徑ニ關スル monent of inertia ヲ I' トスレハ

$$2I'=\tfrac{1}{2}ma^2$$

$$\therefore\quad I'=\frac{ma^2}{4}$$

其 radius of gyration ハ $\frac{a}{2}$ ナリ.

108. 球殼ノ moment of inertia.

任意ノ直徑ニ關シ moment of inertia ハ相等シキヲ以テ

$$\begin{aligned}3I&=2\Sigma dm\,r^2\\&=2r^2\Sigma dm\\&=2mr^2\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}I&=\tfrac{2}{3}mr^2\\ \kappa&=r\sqrt{\tfrac{2}{3}}\end{aligned}\right\}$$

109. 球體ノ moment of inertia.

半徑 a ヲ n 等分シ, $\frac{m}{n}a$ ト $\frac{m+1}{n}a$ トヲ半徑トセル球面ニテ限ラレタル部分ノ容積ハ

$$4\pi\left(\frac{ma}{n}\right)^2\times\frac{a}{n}$$

ナルヲ以テ,其中心ニ關スル polar moment of inertia ハ

$$4\pi\left(\frac{ma}{n}\right)^2\frac{a}{n}\times\left(\frac{ma}{n}\right)^2=\frac{4\pi a^4m^4}{n^5}$$

故ニ球ノ中心ニ關シ其球ノ容積ノ polar moment of inertia ハ

$$\lim_{n=\infty} \Sigma_1^n \frac{4\pi a^5 m^4}{n^5} = 4\pi a^5 \lim_{n=\infty} \frac{\Sigma_1^n m^4}{n^5}$$

$$= \frac{4\pi}{5} a^5$$

質量ヲ m トスレバ中心ニ關スル polar moment of inertia ハ

$$\tfrac{3}{5} m a^2$$

任意ノ直徑ニ關スル moment of inertia ヲ I トスレハ

$$3\mathrm{I} = 2\Sigma dm\, r^2$$

$$= 2 \times \tfrac{3}{5} m a^2$$

$$\left. \begin{aligned} \mathrm{I} &= \tfrac{2}{5} m a^2 \\ \kappa &= \sqrt{\tfrac{2}{5}}\, a \end{aligned} \right\}$$

κ ノ表（第一）

	Name of solid, and Dimensions.	Position of Axis through c. g.	$\kappa^2 = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{M}}$
I.	Circular hoop of thin wire—Radius, r	Perp. to plane of figure.	r^2
II.	Circular hoop of thin wire—Radius, r	About a diameter.	$\frac{1}{2}r^2$
III.	Uniform circular rod—Length, l; radius, r	Perp. to length.	$\frac{1}{12}l^2 + \frac{1}{4}r^2$
IV.	Solid circular cylinder—Radius, r	About its own axis.	$\frac{1}{2}r^2$
V.	Hollow circular cylinder or ring—Radii, R, r	About its own axis.	$\frac{1}{2}(\mathrm{R}^2 + r^2)$
VI.	Thin cylindrical shell—Radius, r	About its own axis.	r^2
VII.	Solid sphere—Radius, r	About a diameter.	$\frac{2}{5}r^2$
VIII.	Hollow sphere—Radii, R, r	About a diameter.	$\frac{2}{5}\frac{\mathrm{R}^5 - r^5}{\mathrm{R}^3 - r^3}$
XI.	Thin spherical shell—Radius, r	About a diameter.	$\frac{2}{3}r^2$
X.	Solid cone—Radius of base, r	About its own axis.	$\frac{3}{10}r^2$

κ^2 ノ表（第二）

	Form of Lamina, Surface, or Section.	Position of Axis through c. g.	κ^2
I.	Rectangle-Sides, a, b.	Parallel to side, b	$\frac{1}{12}a^2$
II.	Rectangle-Sides, a, b.	Perp. to plane of figure.	$\frac{1}{12}(a^2+b^2)$
III.	Hollow rectangle—Sides, A, B, and a, b.	Parallel to sides, B, b	$\frac{1}{12}\frac{A^3B-a^3b}{AB-ab}$
IV.	Triangle-Altitude, a; base, b.	Parallel to base, b	$\frac{1}{18}a^2$
V.	Circular section-Radius, r	Perp. to plane of figure.	$\frac{1}{2}r^2$
VI.	Circular section-Radius, r.	About a diameter.	$\frac{1}{4}r^2$
VII.	Hollow circular section—Radii, R, r.	Perp. to plane of figure.	$\frac{1}{2}(R^2+r^2)$
VIII.	Hollow circular section—Radii, R, r.	About a diameter.	$\frac{1}{4}(R^2+r^2)$
IX.	Elliptical section—Axes, a, b.	About axis, b.	$\frac{1}{16}a^2$
X.	Elliptical section—Axes, a, b.	Perp. to plane of figure.	$\frac{1}{16}(a^2+b^2)$
XI.	Hollow elliptical section—Axes, A, B, and a, b.	About axis, B, b	$\frac{1}{16}\frac{A^3B-a^3b}{AB-ab}$

第拾章

剛體ノ運動

110. Centre of Mass.

一物體又ハ數個ノ物體ノ全質量ヲ M トシ,之ヲ組成セル質點ノ質量ヲ dm トス.

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{\Sigma dm\,x}{M},\\ \bar{y}&=\frac{\Sigma dm\,y}{M},\\ \bar{z}&=\frac{\Sigma dm\,z}{M}\end{aligned}\right\}$$

此式ニヨリテ定メラルヽ點$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ヲ是等ノ物體ノ centre of mass ト云フ, centre of gravity ヲ $(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$ トスレバ

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_0&=\frac{\Sigma dw\,x}{W},\\ \bar{y}_0&=\frac{\Sigma dw\,y}{W},\\ \bar{z}_0&=\frac{\Sigma dw\,z}{W}\end{aligned}\right\}$$

然ルニ $dw=dm\,g$, 故ニ

$$\begin{aligned}x_0&=\frac{\Sigma dw\,x}{W}=\frac{\Sigma dm\,gx}{Mg}\\ &=\frac{g\Sigma dm\,x}{Mg}\\ &=\frac{\Sigma dm\,x}{M}\end{aligned}$$

故ニ

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\bar{x}_0\\ \bar{y}&=\bar{y}_0\\ \bar{z}&=\bar{z}_0\end{aligned}\right\}$$

故ニ centre of gravity ハ centre of mass ニアリ.

111. Rigid Bodies.

或質點群ニ於テ各質點相互間ノ距離カ不變ナルモノナル時其群ハ Rigid Body ナリト云フ.

112. 質點群ニ働ケル諸力.

質點ノ群ニ働ケル諸力ノ中ニハ自己ノ群ニ屬セザル他ノ群ヨリ働カルヽ諸力アリ,是等ノ力ヲ external forces ト云フ,又或質點ノ群ニ屬スル或質點カ自己ノ屬スル群ノ內ノ他ノ質點ヨリ受クル諸力アリ,之ヲ其質點ニ働ケル internal forces ト云フ, Newton ノ第三運動定律ニヨリ或質點群內ノ質點 A ガ同一群內ノ他ノ質點 B ヨリ受クル internal force ハ, B カ A ヨリ受クル internal force ト大サ等シク方向反對ナリ,故ニ或質點群ノ internal forces ハ是等ノ大サ等シク方向反對ニシテ同一直線上ニアル二力ノ數多ノ組合ヨリ成レリ.

或質點ニ働ケル internal forces 及ビ external forces ノ resultant ヲ其質點ニ働ケル effective forces ト云フ,其質點ノ質量ヲ dm トシ,其質點ノ受クル acceleration ヲ a トスレバ effective force ハ

$$dm\,a$$

ナリ

113. D'Alembert's Principle.

或質點群ニ於テ其群ノ總テノ質點ノ effective forces ノ總體ハ總テノ external 及ビ internal forces ヨリ成ルヲ以テ, effective forces ノ resultant ハ external forces 及ビ internal forces ノ resultant ニ同ジ.然ルニ internal forces ハ大サ等シク方向反對ニシテ同一直線上ニアル二力ノ數多ノ組合ヨリ成ルヲ以テ internal forces ノ resultant ハ零ナリ,故ニ

I. 任意ノ質點群ニ付 effective forces ノ resultant ト external forces ノ resultant トハ大サ等シク方向モ亦同一ナリ.

之ヲ更ニ換言スレバ

II. Effective forces ノ resultant ノ方向ヲ反對ニセシ力ト external forces ノ resultant トハ釣合ニアリ.

114. Rigid body ノ translation.

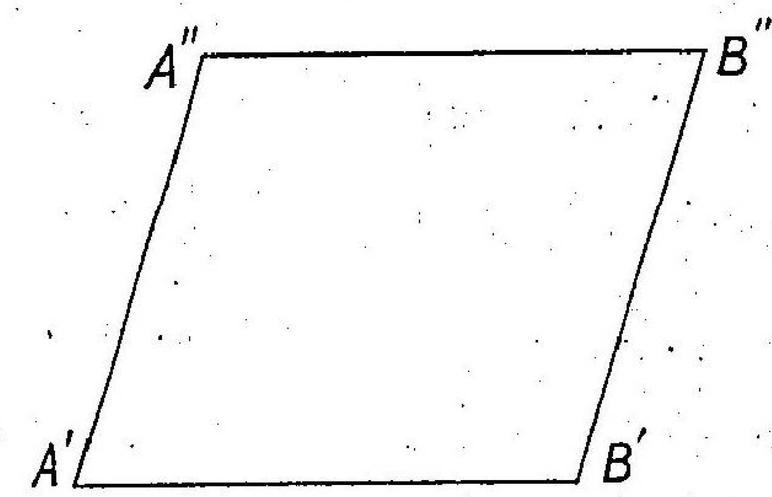
運動體內ノ各直線ガ運動ノ間方向一定セル時其運動ヲ Translation ト云フ.

A, B ヲ translation ヲナセル運動體內ノ任意ノ二點トス,是等ノ點ハ或瞬時ニ夫々 A', B' ニアリ,次ノ他ノ瞬時ニ A'', B'' ニアリトス,定義ニヨリ A'B' ト A''B'' トハ平行セリ,又 rigid body ナルヲ以テ

$$A'B'=A''B''$$

ナリ,故ニ四邊形 A'B'A''B'' ハ平行四邊形ナリ,而シテ

$$A'A''=B'B''$$



且 $A'A''$ ト $B'B''$ トハ平行ナリ,故ニ此時間ニ於テ A 點ノ displacement ト B 點ノ displacement トハ大サ並ニ方向トモ全ク同一ナリ,從テ translation ヲナセル剛體ヲ組成スル各點ノ有スル velocity 及ビ acceleration ハ總テノ點ニ付大サ並ニ方向トモ同一ナリ.

115. Translation ヲナセル剛體ニ働ケル effective forces ノ合力.

前條ニ述ベタル如ク translation ニ於テハ各質點ノ acceleration ハ大サ方向トモニ等シキヲ以テ,各質點ノ effective force ハ夫々ノ質量ニ比例シ,是等 effective forces ハ平行力ヲ成ス,故ニ effective forces ノ合力ハ其平行力ノ centroid ニ働ケル單一ナル力ナリ.

質點ノ質量ヲ夫々 dm_1, dm_2, dm_3 等トシ,各質點ニ共通セル acceleration ヲ a トスレバ effective forces ノ resultant ハ

$$dm_1a+dm_2a+dm_3a+\cdots\cdots=a\Sigma dm$$
$$=ma$$

但シ m ハ質點ノ質量ノ總和ナリ.

External forces ノ合力ヲ R トスレバ D'Alembert ノ Principle ニヨリ

$$R=ma$$

各質點ノ effective forces ヨリ成レル平行力ノ centroid 即チ ma ノ着力點ヲ $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ トシ,此物體ノ centre of mass ヲ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ トスレバ

$$\bar{x}_0=\frac{\Sigma dm\,ax}{ma}=\frac{\Sigma dm\,x}{m}=\bar{x}$$

同樣ニ

$$\bar{y}_0=\bar{y}$$
$$\bar{z}_0=\bar{z}$$

故ニ ma ノ着力點ハ其物體ノ centre of mass ナリ.

116. Rotation.

運動體內又ハ運動體ノ extension 內ニ於ケル一ノ直線ガ固定セル運動ヲ Rotation ト云フ,其固定直線ヲ rotation ノ軸ト云フ, rotation ニ於テハ其物體ノ各質點ハ軸上ニ中心ヲ有シ,軸ヨリ其點ニ至ル距離ヲ半徑トセル圓運動ヲナス,而シテ軸ハ是等ノ圓面ニ直角ニ交ハル.

Rotation ニ於テ其軸ト直角ニ交ハル平面ヲ名ケテ Rotation ノ平面ト云フ.

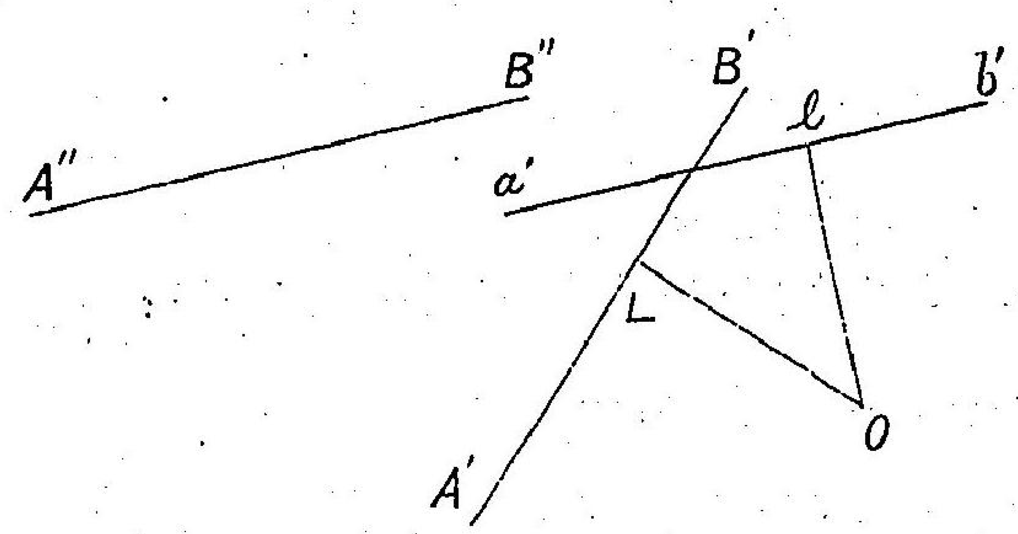
Rotation ノ軸ニ平行ナル任意直線上ノ各點ハ同一ノ運動ヲナス故ニ, rotation ノ平面上ヘ其直線ノ正射影ノ運動ハ,其直線上ノ總テノ運動ヲ表ハスベシ,從テ物體全體ノ運動ハ, rotation ノ平面ヘ其物體ノ正射影ノ運

動ニヨリテ表ハサル.

117. Plane Motion.

運動體ノ各點ガ運動ノ間或定マレル平面ヨリ一定距離ニアル時其運動ヲ Plane Motion ト云フ,其平面ヲ運動ノ平面ト云フ.

A, B ヲ plane motion ヲナセル剛體内ノ二點トス共ニ運動ノ平面上ニアリトス,或瞬時ニ是等ノ二點ハ A', B' ナル位置ニアリ,次ノ或瞬時ニ A'', B'' ナル位置ヲ占メ



タリトス,即チ物體ハ A', B' ニテ定マル可キ位置ヨリ A'', B'' ニテ定マルベキ位置迄此時間ニ displacement ヲ受ケタルナリ, 此 displacement ハ種々ナル方法ヲ以テ仕遂クルコトヲ得ベシ.

O ヲ運動ノ平面上ノ任意ノ點トス,先ヅ物體ヲ $A'B'$ ガ $A''B''$ ニ平行ナル位置 $a'b'$ ナル位置ヲ占ムル迄O點ヲ中心トシテ廻轉シ,然ル後物體ヲ $a'A''$, 又ハ $b'B''$ ニ平行ニ translation ヲナサシメ, $a'b'$ ヲシテ $A''B''$ ニ合セシム,此クノ如ク一回ノ rotation ト之ニ次クトコロノ translation トニヨリテ, $A'B'$ ナル位置ヨリ $A''B''$ ナル位置ヘ移

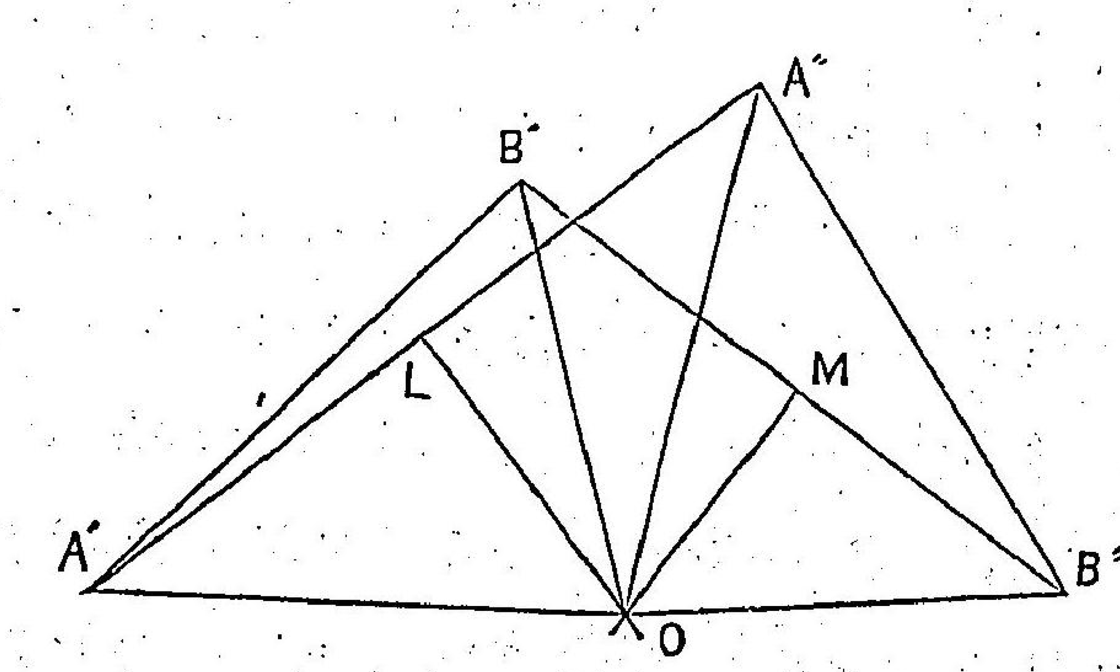
スコトヲ得タリ, OL 及ビ Ol ハ夫々 O ヨリ $A'B'$ 及ビ $a'b'$ ヘ下セル垂線ナリ,然ル時 LOl ナル角ハ物體ガ廻轉セル角ナリ,此角ハ $A'B'$ ト $a'b'$ トノ間ノ角,即チ $A'B'$ ト $A''B''$ トノ間ノ角ニ等シキヲ以テ物體ガ $A'B'$ ナル位置ヨリ $A''B''$ ナル位置ヘ移サルヽ爲ニ廻轉スベキ角ノ大サハ O 點ノ位置ニ關セズ同一ナルモノナリ,然レドモ translation ニヨル displacement ハ O 點ノ位置ニヨリテ異ナレリ.

又次ノ如キ方法ニヨリテモ物體ヲ $A'B'$ ナル位置ヨリ $A''B''$ ナル位置ヘ移スコトヲ得.

A' ト A'' ト及ビ B' ト B'' トヲ結ブベシ, $A'A''$ 及ビ $B'B''$ ヲ夫々 L 及ビ M ニテ等分シ, L ヨリ $A'A''$ ヘノ垂線及ビ M ヨリ $B'B''$ ヘノ垂線ノ交點ヲ O トスレバ

$$OA'=OA'',$$
$$OB'=OB'',$$
$$A'B'=A''B''$$

故ニ三角形 $A'OB'$ ト三角形 $A''OB''$ トハ全ク相等シ



而シテ

$$角 A'OB' = 角 A''OB''$$

$$\therefore \quad 角 A'OA'' = 角 B'OB''$$

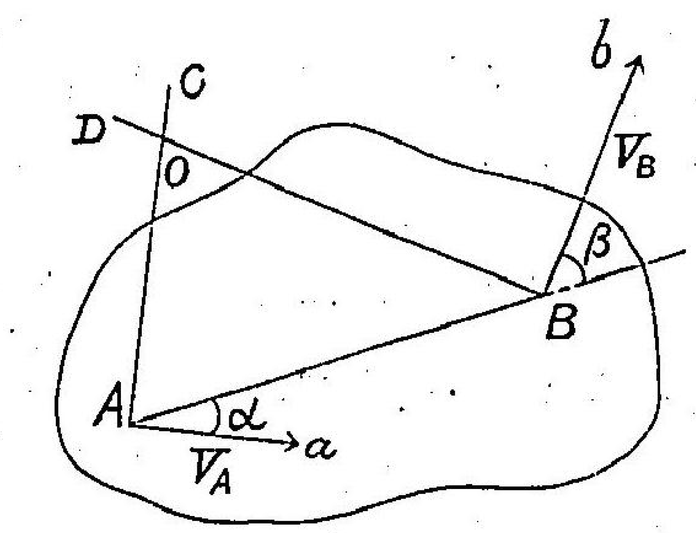
故ニ物體ヲOヲ中心トシテ角 A'OA'' ダケ廻轉スレバ物體ヲ A'B' ノ位置ヨリ A''B'' ノ位置ヘ移スコトヲ得.

118. Instantaneous Rotation.

前條ヨリ plane motion ハ或瞬時ニ於テ或點ヲ通シ運動平面ニ直角ナル直線ヲ軸トセル Instantaneous Rotation ト見ラルヽコトガ知ラル,此クノ如ク任意ノ plane motion ガ instantaneous rotation ナルコトハ更ニ次ノ如ク考ヘテモ知ラルベシ.

A, B ハ plane motion ヲナセル剛體內ノ二點ニシテ運動平面上ニアリトス,紙面ヲ運動平面トス,或時ニ A ハ Aa ノ方向ヘ, B ハ Bb ノ方向ヘ動キツヽアリトス, Aa, Bb ガ AB トナセル角ヲ夫々 α, β トス, Aa ヘノ垂線 AC ト, Bb ヘノ垂線 BD トハOニテ會スベシ,或瞬時ニ於テ A ノ運動ハ AC 上ニ中心ヲ有スル圓運動ト見ルモ A ノ運動方向ノミニ付テハ差支無シ,同樣ニ B ノ運動ハ BD 上ニ中心ヲ有スル圓運動ト見ルモ其運動方向ノミニ付テハ差支無シ,故ニ此瞬時ニ於テ運動平面上ヘノ物體ノ正射影ノ運動ハ,Oヲ中心トセル rotation ト見ルモ,其運動方向ノミニ付テハ差支無シ,即チ此瞬時ニ於テ物體ハOヲ通シ運動平面ニ直角ニ交ハレル直線ヲ

軸トシテ rotation ヲナシツヽアルモノト見ルモ其運動方向ノミニ付テハ差支無キモノナリ.



A ノ velocity ヲ V_A, B ノ velocity ヲ V_B トス, A ト B トノ距離ハ一定不變ナルヲ以テ, AB ノ方向ニ於ケル A 及ビ B ノ component velocities ハ大サ方向トモニ同一ナラザル可ラサルヲ以テ

$$V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta$$

$$\therefore \quad V_A \sin OAB = V_B \sin OBA$$

$$\therefore \quad \frac{V_A}{V_B} = \frac{\sin OBA}{\sin OAB} = \frac{AO}{BO}$$

若シモ正射影カOヲ中心トシテ rotation ヲナスナラバ

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AO}{BO}.$$

故ニ此瞬時ニ於テ正射影ノ運動ハ,Oヲ中心トセル rotation ト見ルモ其運動方向ニ付テノミナラズ,其各點ノ velocity ノ大サニ付テモ差支無シ,是故ニ物體ハ此瞬時ニ於テ,Oヲ通シ運動平面ニ直角ニ交ハレル直線ヲ

軸トセル rotation ヲナシツヽアルモノト見ルモ差支無シ.

O ヲ此瞬時ニ於ケル Instantaneous Centre ト云フ.此點ハ時ト共ニ其位置ヲ變ズ,其 locus ヲハ名ケテ Centrode ト云フ.

Instantaneous centre ヲ通シ運動平面ニ直角ニ交ハレル直線ヲ Instantaneous Axis ト云フ,而シテ其 locus ヲ Axode ト云フ.

119. Centripetal Force ト Centrifugal Force.

一樣ナル speed ノ圓運動ヲナセル點ニハ常ニ中心ニ向ヘル acceleration アリ,其大サハ v ヲ speed トシ r ヲ半徑トスレバ

$$\frac{v^2}{r}$$

angular velocity ヲ ω トスレバ

$$r\omega^2$$

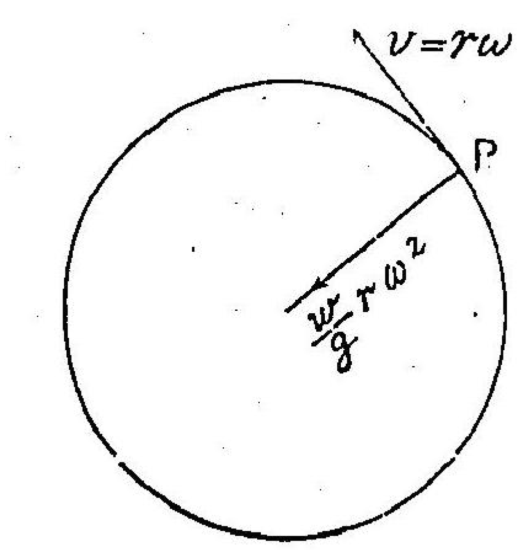
ニテ表ハサル.

此質點ノ重量ヲ w トス.然ル時

$$\frac{w}{g}\frac{v^2}{r} \quad 又ハ \quad \frac{w}{g}r\omega^2$$

ハ此質點ニ作用セル力ニシテ其方向ハ acceleration ノ方向,即チ常ニ圓ノ中心ニ向ヘリ,之ヲ Centripetal Force ト云フ,而シテ所謂 Centrifugal Force ナルモノハ此 Reaction ヲ指セルモノナリ, centripetal force ハ質點カ圓運動ヲナス爲ニ他ノ物體ヨリ此ノ質點ニ働ケル力ニシテ常ニ中

心ニ向ヘリ, centrifugal force ハ其 reaction ニシテ centripetal force ト大サ等シク方向反對ナリ,即チ中心ヨリ外方ヘ向ヘリ,



圓運動ヲナセル質點 P ニ働ケル力ハ centripetal force ニシテ centrifugal force ニハアラザレドモ,此種ノ問題ヲ考フルニ centrifugal force ヲ時トシテ考フルコトアリ.

A, B ハ二個ノ質點ニシテ其重量ヲ夫々 w_1, w_2 トス,此二點ハ同一平面ニアリテ O ヲ中心トシテ一樣ナル angular velocity ω ヲ以テ廻轉セルモノトス.

$OA=r_1$, $OB=r_2$ トス, A ノ centrifugal force ヲ F_1 トスレバ

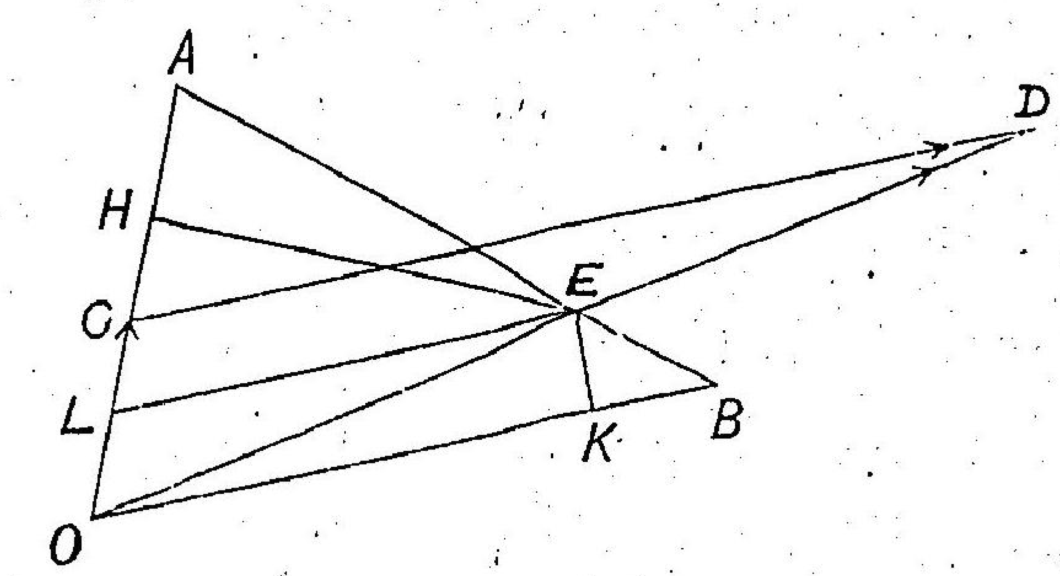
$$F_1=\frac{w_1\omega^2r_1}{g}$$

其方向ハ O ヨリ A ニ向フ, B ノ centrifugal force ヲ F_2 トスレバ

$$F_2=\frac{w_2\omega^2r_2}{g}$$

其方向ハ O ヨリ B ニ向フ.

OA 上ニ OC ヲ F_1 ニ等シク採リ, OB ニ平行ニ CD ヲ F_2 ニ等シクナセバ, OD ハ F_1 ト F_2 トノ二力ノ合力ナル centrifugal force ニシテ O ヨリ D ニ向フ, AB ト OD トノ交點ヲ E トス, E ヨリ OA, OB ヘ夫々垂線 EH ト EK トヲ引ク,又 E ヨリ OB ニ平行,即チ CD ニ平行ニ LE ヲ引



クベシ,然ル時Eハ合力 OD ノ作用線上ニアルヲ以テ E ニ關スル F_1 ノ moment ト F_2 ノ moment トハ其大サ相等シ,故ニ

$$\frac{w_1}{g}r_1\omega^2\cdot\overline{EH}=\frac{w_2}{g}r_2\omega^2\cdot\overline{EK}$$

$$\therefore \quad \frac{w_1}{w_2}=\frac{r_2\cdot\overline{EK}}{r_1\cdot\overline{EH}}=\frac{\triangle OBE}{\triangle OAE}=\frac{BE}{AE}$$

故ニEハAトBトノ centre of gravity ナリ.

又

$$\frac{OL}{OA}=\frac{BE}{BA}=\frac{w_1}{w_1+w_2}$$

$$\therefore \quad OL=\frac{w_1r_1}{w_1+w_2}$$

尙

$$\frac{OD}{OE}=\frac{OC}{OL}=\frac{F_1(w_1+w_2)}{w_1r_1}$$

$$=\frac{w_1\omega^2r_1(w_1+w_2)}{gw_1r_1}$$

故ニ

$$\frac{OD}{OE}=\frac{(w_1+w_2)}{g}\omega^2$$

OD=F, OE=r トスレバ

$$F=\frac{(w_1+w_2)}{g}rw^2$$

故ニA及ビBノ centrifugal forces ノ合力ハ,AトBトノ centre of mass ニ,Aノ質量トBノ質量トカ集リテ成レル一個ノ質點ノ centrifugual force ニ等シ.

或平面板アリテ其平面ニ直角ナル軸ノ周圍ニ廻轉セリ,此平面板ハ數多ノ質點ヨリ成ルモノト見ルコトヲ得,是等質點ノ重量ヲ夫々 w_1, w_2, w_3 等トス,然ル時前述ノ理ニヨリ w_1 ナル點ノ centrifugal force ト w_2 ナル點ノ centrifugal force トノ合力ハ此二點ノ centre of mass ニ (w_1+w_2) ナル重量ノ物體ノ centrifugal force ニ等シ,又 w_1, w_2 w_3 ナル各點ノ centrifugal forces ノ合力ハ此三質點ノ centre of mass ニ是等三點ノ全質量ガ集マリテ成レル一質點ノ centrifugal force ニ等シ,追テ此ノ如シ,故ニ與ヘラレタル平面板ノ働クトコロノ centrifugal force ハ其全質量ガ其物體ノ centre of mass ナル一點ニ集マリテ成レル一個ノ質點ノ centrifugal force ニ等シ.

物體ハ數多ノ薄キ plates ヨリ成ルモノト見做スコトヲ得,是等各 plate ノ centre of mass カ皆物體ノ廻轉軸ニ平行ナル同一直線上ニ存在セル場合ニハ物體ノ centrifugal force ハ其物體ノ centre of mass ニ全質量ガ集マリテ成レル一個ノ質點ノ centrifugal force ニ等シ.

120. Momentum ノ Moment.

迴轉體ノ或質點ノ質量ヲ dm トシ,迴轉軸ヨリノ距離ヲ r トシ,物體迴轉ノ angular velocity ヲ ω トスレバ dm ノ linear momentum ハ

$$dm\,r\omega$$

ナリ,此 momentum ノ迴轉軸ニ關スル moment ハ

$$dm\,r^2\omega$$

物體全部ニ付

$$\Sigma dm\,r^2\omega=\omega\Sigma dm\,r^2$$

然ルニ迴轉軸ニ關スル物體ノ moment of inertia ハ

$$I=\Sigma dm\,r^2$$

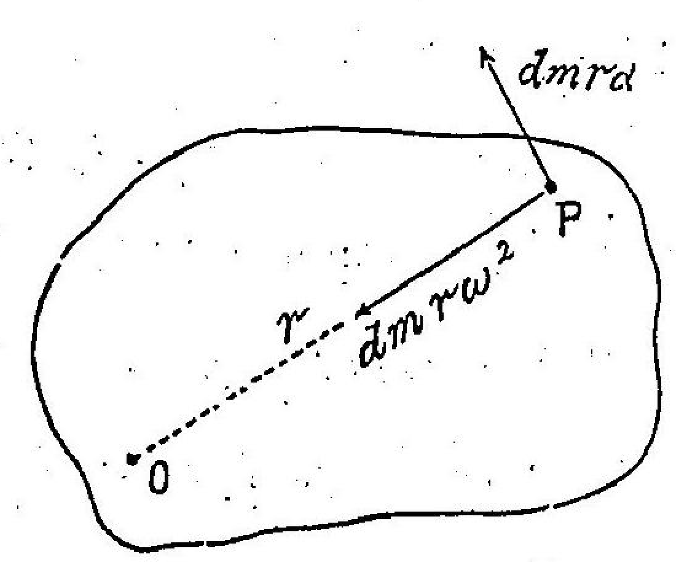
故ニ上式ハ

$$I\omega$$

之ヲ迴轉軸ニ關スル物體ノ momentum ノ moment 又ハ angular momentum ト云フ.

121. Rotation ニ付テノ Equation of Motion.

P ハ迴轉體內ノ任意ノ點ナリ,其質量ヲ dm トス, O 點ヲ rotation ノ軸ノ位置トス,軸ヨリ P ニ至ル距離ヲ r



トス,或瞬時ニ於ケル物體ノ angular velocity ヲ ω トス, angular acceleration ヲ α トス, P ハ O 點ヲ中心トシテ圓ヲ畫クベシ.

P ニ作用セル effective force ノ P ノ道ニ切線ノ方向ノ分力ハ

$$dm\,r\alpha$$

ナリ,道ニ normal ナル分力ハ

$$dm\,r\omega^2$$

ナリ, P ノ effective force ノ O ニ關スル moment ハ上記二分力ノ moments ノ和ナルモ,二分力ノ內後者ノ O ニ關スル moment ハ零ナリ,故ニ P ノ effective force ノ O ニ關スル moment ハ $dmr\alpha$ ノ O ニ關スル moment $dmr\alpha\cdot r$ 即チ

$$\alpha\,dm\,r^2$$

故ニ物體ヲ組織セル總テノ質點ニ働ケル effective forces ノ O ニ關スル moments ノ和ハ

$$\alpha\Sigma dm\,r^2$$

然ルニ $\Sigma dm\,r^2$ ハ迴轉軸ニ關スル物體ノ moment of inertia I ナリ,故ニ上式ハ

$$I\alpha$$

ニテ表ハサル, D'Alembert ノ Principle ニヨリテ一般ニ effective forces ノ moments ノ和ハ external forces ノ moments ノ和ニ等シキヲ以テ,此物體ニ働ケル external forces ノ軸ニ關スル moments ノ和ヲ ΣM トスレバ

$$\Sigma M=I\alpha$$

122. Compound Pendulum.

centre of mass ヲ通ゼザル水平直線ヲ軸トシテ廻轉セル物體ヲ compound pendulum ト云ヒ,又ハ Physical pendulum トモ云フ.

C ハ重心ナリ, S ハ廻轉軸ノ位置ナリ, W ヲ物體ノ重量トス, SN ハ鉛直線ナリ, SC ハ SN ト角 θ ヲナセリ,又 SC$=h$ トス,廻轉軸ニ關スル物體ノ radius of gyration ヲ κ トス,然ル時廻轉軸ニ付重量ノ moment ハ

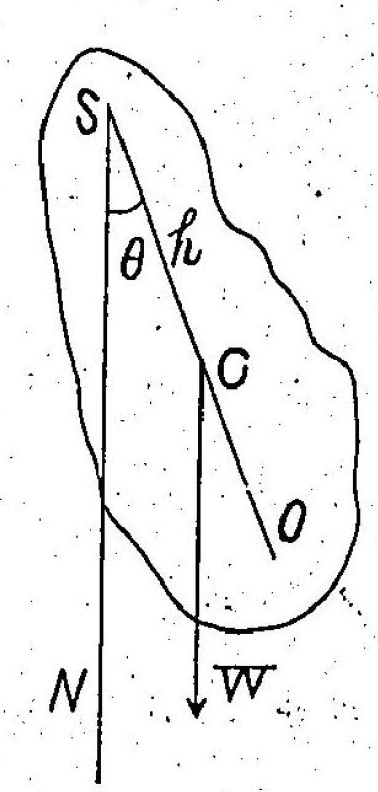
$$Wh\sin\theta$$

ナリ, angular acceleration ヲ ω トスレバ

$$\dot{\omega}=-\frac{Wh\sin\theta}{\frac{W}{g}\kappa^2}$$

廻轉軸ニ平行ニシテ重心ヲ通ズル軸ニ關スル物體ノ radius of gyration ヲ κ_0 トスレバ

$$\dot{\omega}=-\frac{Wh\sin\theta}{\frac{W}{g}(\kappa_0^2+h^2)}$$



故ニ ω ハ SC ノ鉛直ナル位置ヨリノ displacement ニ比例ス,物體ノ運動ガ

$$\sin\theta=\theta$$

ト見做シ得ル程ニ小ナル場合ニハ

$$\dot{\omega}=-\frac{gh}{\kappa_0^2+h^2}\cdot\theta$$

然ルニ simple pendulum ニ於テ其長サヲ l トスレバ

$$\dot{\omega}=-\frac{g}{l}\theta$$

故ニ compound pendulum ハ

$$l=\frac{\kappa_0^2+h^2}{h}$$

ナル長サノ simple pendulum ト見做スコトヲ得.

Pendulum ガ simple pendulum ナル時 period ヲ T トスレバ

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

故ニ compound pendulum ニ於テハ

$$T=2\pi\sqrt{\frac{h^2+\kappa_0^2}{gh}}$$

SC ヲ O マデ延長シ SO ヲ l ニ等シカラシムベシ, S ヲ centre of suspension ト云ヒ, O ヲ centre of oscillation ト云フ, SO ヲ equivalent simple pendulum ノ長サト云フ.

$$l=\frac{\kappa_0^2+h^2}{h}$$

故ニ

$$\kappa_0^2=h(l-h)$$
$$=\overline{SC}\cdot\overline{CO}$$

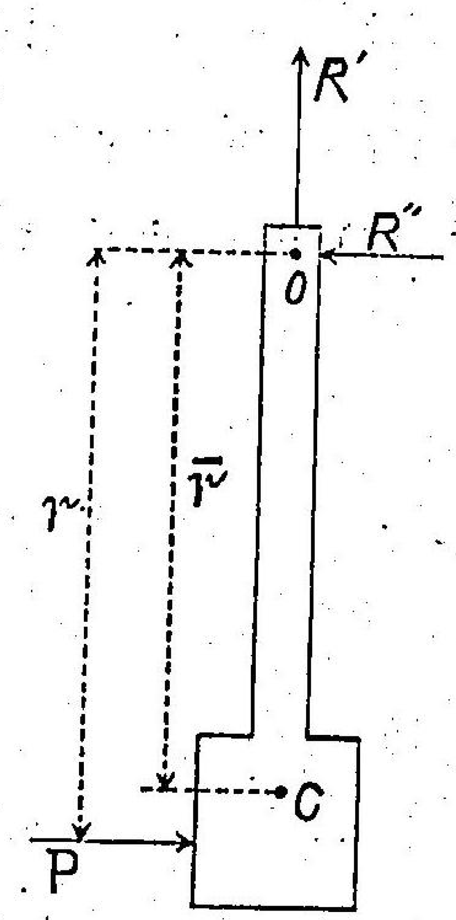
更ニ O ヲ centre of suspension トシテ物體ヲ振動セシム, OC ヲ延長シ OC 上ニ S′ ヲ OS′ ガ新ニ得タル compound pendulum ト isochronous ナル simple pendulum ノ長サニ等シクアル様ニ定ム,然ル時

$$\kappa_0^2=\overline{OC}\cdot\overline{CS'}$$

故ニ S ト S′ トハ一致ス,故ニ centre of suspension ト centre of oscillation トヲ取替フルモ period ヲ變セズ.

123. Ballistic Pendulum 及ヒ Centre of Percussion.

M ヲ pendulum ノ質量トシ m ヲ彈丸ノ質量トス, O ヲ廻轉軸ノ位置トス,此軸ニ關スル物體ノ radius of gyration ヲ κ トス, 彈丸ガ pendulum ヲ打ツ時ノ velocity ヲ v トシ,衝突ニヨリテ起レル angular velocity ヲ ω トス; r ヲ O ヨリ blow ノ作用線ニ至ル距離トスレハ彈丸ノ velocity ハ $r\omega$ ナリ,突入時間ハ極メテ小ナルヲ以テ, angular displacement ハ零ト見做シ得ベシ,故ニ彈丸ガ突入シ終リタル瞬時ニ於ケル彈丸ノ velocity $r\omega$ ハ水平ノ方向,即 blow ノ方向ナリト見ルコトヲ得.



Pendulum ヨリ彈丸ニ作用セル impulse 及ヒ彈丸ニヨリ pendulum ニ作用セル impluse ノ大サハ

$$m(v-r\omega)$$

pendulum ノ上ヘ働ケル彈丸ノ impulse ノ軸ニ關スルトコロノ moment ハ

$$m(v-r\omega)r$$

又 blow ノ間ニ於テ pendulum ノ momentum ノ moment ノ變化ハ

$$M\kappa^2\omega$$

故ニ

$$m(v-r\omega)r=M\kappa^2\omega$$

$$\therefore\quad v=\frac{(M\kappa^2+mr^2)\omega}{mr}$$

R′ 及ビ R″ ヲ blow ノ際ニ於ケル pendulum ヘノ hinge reaction ノ鉛直及ビ水平分力トス, P ヲ以テ blow ノ大サヲ表ハシ, t ヲ其時間トス, $\bar{r}$ ヲ支持點 O ト centre of gravity C トノ距離トス, pendulum ノ momentum ハ水平方向ヘ

$$M\bar{r}\omega$$

故ニ次ノ關係アリ

$$R't-Wt=0,$$

$$Pt-R''t=M\bar{r}\omega,$$

$$Ptr=M\kappa^2\omega$$

但シ W ハ pendulum ノ重量ナリ.

故ニ

$$\left.\begin{aligned} R'&=W \\ R''&=\frac{M\omega\left(\frac{\kappa^2}{r}-\bar{r}\right)}{t}\end{aligned}\right\}$$

故ニ R′ ハ blow ニ關係無キモノナリ,若シモ blow ガ O ヨリ

$$\frac{\kappa^2}{\bar{r}}$$

ダケ下方ニアル點ニ加ヘラルヽナラバ

$$R''=0$$

即チ此クノ如キ位置ニ於テ pendulum ヲ打ツモ其爲ニOヲ通スル軸ニ衝擊ヲ與ヘズ,此點ヲ centre of Percussion ト云フ,Oヨリ鉛直下方ヘ

$$\frac{K^2}{p}$$

ノ位置ニアリ,此點ハ centre of oscillation ト一致ス.

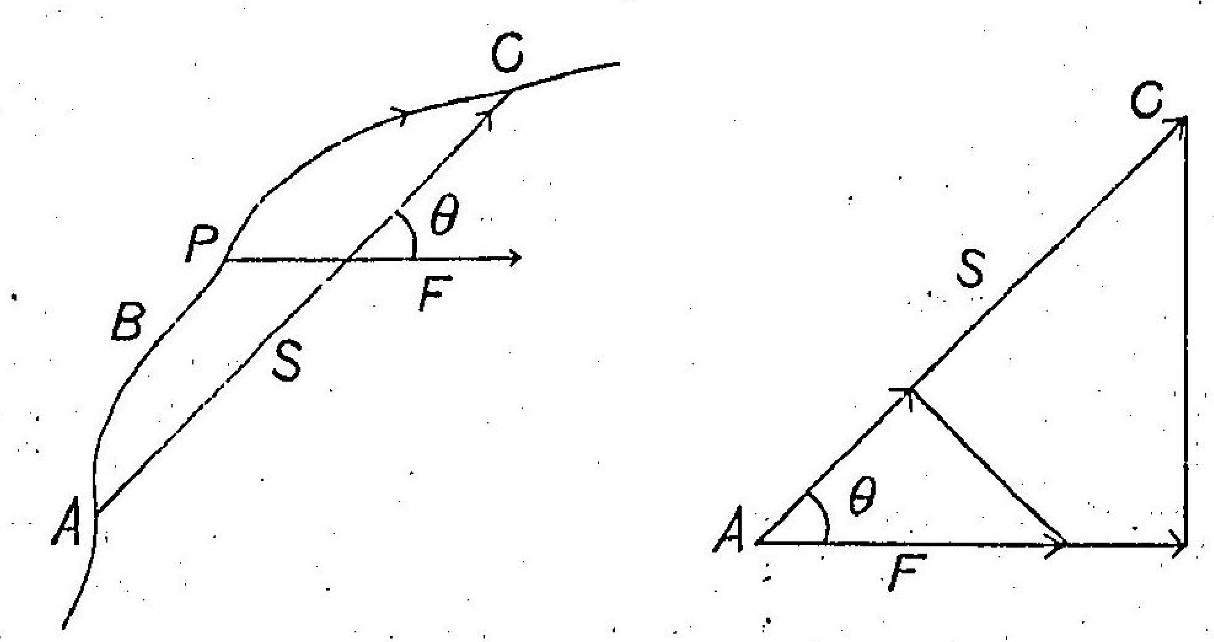
第拾壹章

Work 及ビ Energy.

124. Work.

物體ガ力ノ作用ヲ受ケツヽ動キ其力ノ作用線ニ沿ヒテ displacement ノ component ヲ有スル時其力ニヨリテ物體ノ上ニ Work ガ爲サレタリト云フ.

Work ハ物體ニ働ケル力ノ大サト其力ニ働カレナガラ受ケタル displacement ノ,力ノ作用線ニ沿ヘル component ノ大サトノ乘積ニテ測ラル.



故ニ若シ一定ノ力 F ノ作用ヲ受ケツヽ物體ガ其力ノ方向ヘ displacement S ヲ受ケタリトセバ, F ニヨリ此物體ノ上ニ爲サレタル work W ハ

$$W=FS$$

若シモFトSトカ角θヲナセルナラバ

$$W=F\cdot S\cos\theta$$

圖ニ於テPハ物體內ニ一定セル着力點ナリ,曲線 ABC ハP點ノ道ナリ,直線 AC ハ其 displacement ナリ.

上式ニヨリ work ハ displacement S ト S ノ方向ニ於ケル力ノ component $F\cos\theta$ トノ乘積ニテ與ヘラルヽモノトモ云フコトヲ得ヘシ.

$\theta<90°$ ナレバ W ハ正號ヲ有ス,此場合ニハ F ニヨリテ work ガナサレタルコトヲ示ス,$\theta>90°$ ナレバ W ハ負號ヲ有ス,此場合ニハ力 F ニ逆ヒテ work ガ爲サレタリト云フ,$\theta=90°$ ナレバ $W=0$.

125. Work ノ單位.

I. 重力單位.

物體ガ 1 pound ノ力ノ作用ヲ受ケナガラ其力ノ方向ヘ 1 foot ノ displacement ヲナセル時,其力ニヨリテ爲サレタル work ヲ work ノ單位トシ,此單位ニテ測ラレタル work ハ幾 foot-pounds ト稱セラル.

物體ガ 1 kilogram ノ力ノ作用ヲ受ケナガラ其力ノ方向ヘ 1 metre ノ displacement ヲナセル時,其力ニヨリテ爲サレタル work ヲ work ノ單位トシ,其單位名ヲ kilogram-metre ト呼ブ.

II. 絕對單位.

物體ガ 1 poundal ノ力ノ作用ヲ受ケナガラ其力ノ方向ヘ 1 foot ノ displacement ヲナセル時ノ其力ニヨリ爲サレタル work ヲ work ノ單位トシ,其單位名ハ foot-poundal ト呼バル.

物體カ 1 dyne ノ力ニ働カレツヽ其力ノ方向ヘ 1 centimetre ノ displacement ヲナセル時ニ其力ニヨリテ爲サレタル work ヲ work ノ單位トシ,其單位名ヲ 1 erg ト呼フ,又 10^7 ergs ヲ 1 joule ト云フ.

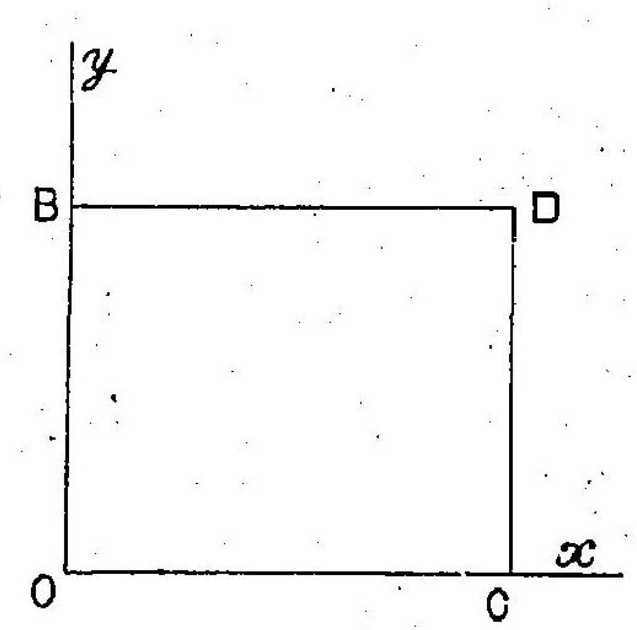
126. Power.

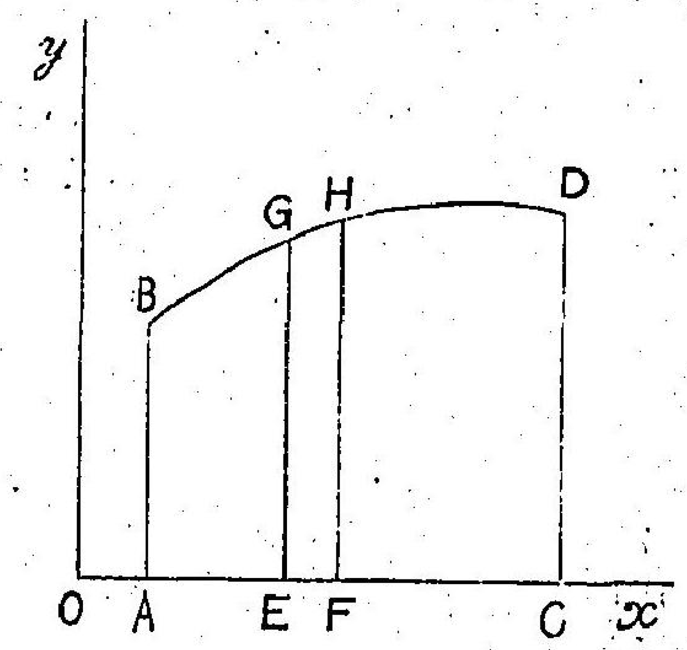
時間ニ對シ work ノ爲サルヽ割合ヲ Power ト云フ,重力單位ノ power ノ單位ハ 1 foot-pound per second, 或ハ 1 kilogram-metre per second ナリ,又絕對單位ニテハ 1 foot-poundal per second, 或ハ 1 erg per second ナリ,通常工業上ニ於テ用ヒラルヽ power ノ單位ハ horse-power 及ビ watt ニシテ 1 horse-power ハ 550 foot-pounds per second, 即チ 3300 foot-pounds per second ナリ,又 1 watt ハ 10^7 ergs per second, 即チ 1 joule per second ナリ.

127. Work ノ Diagram.

物體カ一定ノ力 F ノ作用ヲ受ケツヽ動ケル時,其作用線ノ方向ニ於ケル displacement ノ component ヲ x 軸ニ沿フテ測リ之ヲ OC トス, F ノ大サヲ y 軸ニ沿フテ測リ之ヲ OB トス,然ル時矩形 BOCD ノ面積ハ此 displacement ノ間ニ F ニヨリテ爲サレタル work ヲ表ハスヘシ.

力ガ一定ナラサル場合ニモ displacement ヲ x 軸ノ方向ヘ測リ,力ノ大サヲ y 軸ニ平行ニ測リテ畫ケル曲線 BGHD ト,兩端 B, D ニ於ケル ordinates BA, DC ト x 軸ト





ノ間ノ面積 ABDCA ハ AC ナル displacement ノ間ノ work ヲ表ハスベシ.

128. 數多ノ物體ヲ引キ揚クル場合ノ work.

數多ノ物體ガ夫々異ナレル高サニ引キ揚ケラレタル場合又ハ一物體ノ各部分ガ引キ揚ケラレタル高サ異ナレル場合ニ爲サレタル work ノ全量ハ全重量ニ前後ニ於ケル全部ノ重心ノ位置ノ間ノ鉛直距離ヲ乘セシモノニ等シ.

w_1, w_2, w_3 等ヲ夫々各物體ノ重量又ハ一物體各部ノ重量トス,全重量ヲ W トス,引キ揚ケラルヽ前ニ於テ或水平面ヨリ各部ヘノ高サヲ夫々 h_1, h_2, h_3 等トシ,全部ノ重心ノ高サヲ H トス,引キ揚ケラレシ後ニ於テ同一水平面ヨリ各部ヘノ高サヲ夫々 k_1, k_2, k_3 等トシ,全部重心ヘノ高サヲ K トス, work ノ全量ヲ U トス.

$$U=w_1(k_1-h_1)+w_2(k_2-h_2)+w_3(k_3-h_3)+\cdots\cdots$$

即チ

$$U=(w_1k_1+w_2k_2+w_3k_3+\cdots\cdots)-(w_1h_1+w_2h_2+w_3h_3+\cdots\cdots$$

重心ノ定義ニヨリ

$$WH=\Sigma wh$$

$$WK=\Sigma wk$$

故ニ

$$U=WK-WH$$
$$=W(K-H)$$

129. 廻轉ニ於ケル work.

固定軸ニ直角ナル平面上ニ力 P ガ働キテ物體ガ其固定軸ヲ廻轉軸トシテ廻轉ヲ起ス時,軸ヨリ P ノ作用線ニ至ル距離ヲ R トスレバ turning moment 即チ torque ハ PR ナリ,物體ガ θ radians 廻轉シ其間 P 及ビ R カ一定ナリシナラバ,此廻轉ノ間ニ P ニヨリテナサレタル work ハ

$$PR\theta \quad 即 \quad T\theta$$

但シ T ハ torque PR ナリ.

一廻轉ニ付テハ上式ヨリ

$$2\pi RP$$

n 廻轉ニ付テハ

$$2n\pi RP$$

130. Energy.

物體ガ其物體ニ働クル力ニ逆ヒテ work ヲ爲シ得ル時物體ハ Energy ヲ有スト云フ, energy ハ物體ガ work ヲナシ得ル能ニシテ其量ハ爲シ得ル work ノ量ニヨリテ表ハサルヽモノナルヲ以テ work ト同一ノ單位ニテ表ハサル.

131. Kinetic Energy.

Velocity ヲ有スル物體ハ其運動方向ニ反對ニ働ク力ニ逆ヒテ work ヲナスコトヲ得此 velocity ニ基ク energy ヲ Kinetic Energy ト云フ.

u feet per second ヲ以テ動キツヽアル重量 w 听ノ質點ガ其運動方向ニ反對ニ F 听ノ力ヲ受クレバ其點ノ受クル acceleration ハ

$$-\frac{F}{\frac{w}{g}} \text{ feet per sec. per sec.}$$

ナリ, velocity カ零トナル迄ニ動クル道ヲ S トスレバ

$$-u^2=-\frac{2FS}{\frac{w}{g}}$$

$$\therefore \quad FS=\frac{1}{2}\frac{w}{g}u^2$$

FS ハ F ニ逆テ為サレタル work ナリ故ニ此質點ガ u feet per second ノ大サノ velocity ヲ有スル時ニ其 velocity ヲ失フ迄ニ

$$\frac{1}{2}\frac{w}{g}u^2 \text{ foot-pounds}$$

ダケノ work ヲ為シ得ヘシ即此質點ハ velocity u ヲ有スルガ為ニ上式ニヨリ表ハサレタル kinetic energy ヲ有ス.

物體ノ kinetic energy ヲ E トシ此物體ヲ組成スル質點ノ質量ヲ dm トシ其質點ノ velocity ヲ v トスレバ

$$E=\tfrac{1}{2}\Sigma dm\, v^2$$

Translation ヲナセル物體ニ付テハ v ノ値各質點ニ付同一ナルヲ以テ

$$E=\tfrac{1}{2}v^2\Sigma dm$$
$$=\tfrac{1}{2}mv^2$$

但シ $m=\Sigma dm$.

W pounds ノ物體ガ v feet per sec. ノ velocity ヲ以テ translation ヲナセル時.

$$E=\frac{1}{2}\frac{W}{g}v^2 \text{ foot-pounds.}$$

Rotation ヲナセル物體ニ付廻轉軸ヨリ r ナル距離ニアル質點 dm ノ kinetic energy ハ angular velocity ヲ ω トスレバ

$$\tfrac{1}{2}dm(r\omega)^2$$

全物體ニ付

$$E=\tfrac{1}{2}\Sigma dm(r\omega)^2$$
$$=\tfrac{1}{2}\omega^2\Sigma dm\, r^2$$
$$=\tfrac{1}{2}I\omega^2$$

但シ I ハ廻轉軸ニ關スル物體ノ moment of inertia ナリ,其 radius of gyration ヲ K トシ,全質量ヲ m トスレバ

$$E=\tfrac{1}{2}mK^2\omega^2$$

更ニ

$$K\omega=u$$

トスレバ

$$E=\tfrac{1}{2}mu^2$$

u ハ軸ヨリ κ ナル距離ニアル點ノ linear velocity ナルヲ以テ rotation ヲナセル物體ノ kinetic energy ハ rotation ノ軸ヨリ κ ナル距離ニ全質量ガ集合セルモノト見做セル場合ノ kinetic energy ニ等シ.

物體ノ重量ガ W pounds ナル時

$$E=\frac{1}{2}\frac{W}{g}\kappa^2\omega^2 \text{ foot-pounds.}$$

上式ニ於テ angular velocity ハ radians per second ニテ表ハサレタルモノナリ,若シ angular velocity ガ N revolutions per minute ナル時ニハ

$$E=\frac{1}{2}\frac{W}{g}\kappa^2\left(\frac{2\pi N}{60}\right)^2$$

$$=\frac{2\pi^2 N^2}{60^2}\frac{W}{g}\kappa^2 \text{ foot-pounds.}$$

Plane motion ハ instantaneous rotation ナルヲ以テ instantaneous axis ニ關スル moment of inertia ヲ I トスレハ

$$E=\tfrac{1}{2}I\omega^2$$

$\bar{r}$ ヲ instantaneous axis ト centre of mass トノ間ノ距離トシ, $\bar{I}$ ヲ instantaneous axis ニ平行ニシテ centre of mass ヲ通ズル軸ニ關スル moment of inertia トス. $\bar{v}$ ヲ centre of mass ノ linear velocity トスレバ

$$E=\tfrac{1}{2}I\omega^2$$

$$=\tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2+\tfrac{1}{2}m\bar{r}^2\omega^2$$

$$=\tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2+\tfrac{1}{2}m\bar{v}^2$$

但シ m ハ全質量ナリ.

物體ノ重量 W pounds シテ, centre of mass ヲ通ズル軸ニ關スル radius of gyration ガ κ_0 ナル時

$$E=\frac{W\kappa_0^2\omega^2}{2g}+\frac{W\bar{v}^2}{2g} \text{ foot-pounds.}$$

右邊ノ第一項ハ物體ガ centre of mass ヲ通ズル直線ヲ軸トシテ rotation ヲナセル場合ノ kinetic energy ニ相當シ, 第二項ハ物體ガ velocity $\bar{v}$ ニテ translation ヲナセル場合ノ kinetic energy ニ相當ス.

132. Potential Energy.

物體ガ運動シツヽアラザル時モ,或狀況ノ下ニアル物體ハ力ニ逆ヒテ work ヲナシ得ル能即チ energy ヲ有ス.例ヘバ互ニ引力ヲ働ク二物體ガ互ニ相接近シ得ル如キ位置ニアル時,或ハ壓縮又ハ伸張サレタル spring ガ自然狀態ニ復シ得ルガ如キ狀況ニアル場合ノ如シ,此クノ如ク物體ノ configuration ニ基ケル energy ヲ Potentia energy ト云フ.

或 configuration ニ於ケル potential energy ハ其 configuration ヨリ標準ノ configuration ヘ變化スル間ニ為シ得ル work ニテ測ラル,其標準 configuration ハ任意ニ撰ビ得ルモ通常ハ他ノ configuration ニ於ケル potential energy ガ正號トナル如クニ撰バルヽモノトス.

或 configuration ヨリ標準ノ configuration ニ至ル間ニ external forces ニ逆テ為サルヽ work ハ internal forces ニヨリ

テ爲サルヽ work ニ等シ.

何ソトナレバ後節述ブル如ク configuration ノ變化ノ間ニ於テ internal 及ビ external forces ニヨリテ爲サレタル work ハ其 system ノ kinetic energy ノ增加ニ等シキモノナリ,然ルニ今ノ場合ニ於テ或 configuration ニ於ケル potential energy ハ各質點ノ velocity ノ變化ヲ生ゼシメズニ,即チ其 system ノ kinetic energy ノ變化ヲ生ゼシメズニ,其 configuration ヨリ標準ノ configuration ニ至ル間ニ external forces ニ逆テ爲サルヽ work ナルヲ以テ internal 及ビ external forces ニヨリテ爲サルヽ work ヲ夫々 w_i 及ビ w_e トスレバ

$$w_i+w_e=0$$

ナラザル可ラズ,故ニ

$$w_i=-w_e$$

$-w_e$ ハ external forces ニ逆テ爲サレタル work 即チ初メノ configuration ニ於ケル potential energy ナリ,故ニ或 configuration ニ於ケル potential energy ハ其 configuration ヨリ標準ノ configuration ニ至ル間ニ internal forces ニヨリテ爲サルヽ work ニ等シ.

133. Conservative Forces.

Configuration ノ或變化ノ間ニ internal forces ニヨリ爲サレタル work ハ其變化ガ如何ナル道ヲ經テ行ハレタルカニ關係無キコトアリ,又關係スルコトアリ,關係無キ場合ニ其等 internal force-pairs (action 及ビ reaction) ハ conservative forces ナリト云フ,其變化ガ如何ニ行ハレタルカ其方法ニヨリテ work ガ異ナレル場合ニ其等 internal force-pairs ヲ名ケテ non-conservative forces ナリト云フ,物體間ニ働ケル引力ノ如キハ conservative force ナリ,一般ニ conservative forces ノ性質トシテ其等力ノ作用ヲ受クル質點ノ velocity ニ無關係ナリ, non-conservative forces ハ其大サ或ハ方向ガ其作用ヲ受クル質點ノ velocity ニ關係ス, friction ハ non-conservative force ナリ,常ニ物體ノ運動方向ニ反對ニ作用スルモノナリ.

134. Work ト Kinetic Energy.

一個ノ質點ニ付,其點ノ或 displacement ノ間ニ,其點ニ働ケル諸力ニヨリテ爲サレタル work ヲ W トスレバ,其 work ハ悉ク其點ノ kinetic energy ノ增加 ΔE_k トナル,即チ

$$W=\Delta E_k$$

數多ノ質點ノ任意ノ system ニ付テハ internal, 及ビ external forces ニヨリテ爲サレタル work ハ,上式ニ與ヘラレタル關係ガ各質點ニ付成立スルヲ以テ,其 system ノ kinetic energy ノ增加トナルベシ, external, 及ビ internal work ヲ夫々 W_e, 及ビ W_i トシ, syetem ノ kinetic energy ノ增加ヲ ΔE_k トスレバ

$$W_e+W_i=\Delta E_k$$

剛體ニ付テハ各質點相互間ノ距離一定不變ナルヲ以テ

$$W_i=0$$

故ニ

$$W_e=\triangle E_k$$

135. Conservative System ニ付 Work ト Energy.

Conservative system ノ任意 displacement ノ間ニ, external force ニヨリテ其 system ノ上ニ爲サレタル work ハ,其 system ノ kinetic energy ノ増加ト potential energy ノ増加トニナル,即チ potential energy ノ増加ヲ $\triangle E_p$ トスレバ

$$W_e=\triangle E_k+\triangle E_p$$

何ントナレバ C_1 及ビ C_2 ヲ夫々 initial 及ビ final configuration トシ, C_0 ヲ標準ノ configuration トス,又 E_p' 及ビ E_p'' ヲ以テ夫々 C_1 及 C_2 ニ於ケル potential energy トス,然ル時 C_1 ヨリ C_0 ヘ displacement ノ間ニ internal forces ニヨリテ爲サレタル work ハ E_p' ナリ,同様ニ C_2 ヨリ C_0 ヘノ work ハ E_p'' ナリ,故ニ C_1 ヨリ C_2 ヘノ變化ノ間ニ internal forces ニヨリ爲サレタル work ハ

$$E_p'-E_p''$$

故ニ前節ニヨリテ

$$W_e+(E_p'-E_p'')=\triangle E_k$$

即チ

$$W_e=\triangle E_k+(E_p''-E_p')$$

$$=\triangle E_k+\triangle E_p$$

External forces ニヨリテ爲サレタル work ガ正號ノモノナレバ system ハ energy ヲ得, work ガ負號ノモノナレバ system ハ energy ヲ損ス,更ニ換言スレバ positive work ガ system ノ上ニ爲サレタルコトハ其 work ト同量ノ energy

ヲ増加セシコトヲ表ハシ, positive work ガ system ニヨリテ爲サレタルコトハ其 work ト同量ノ energy ヲ損ゼシコトヲ示スモノナリ.

136. Energy ノ Conservation.

Potential energy ト kinetic energy トヲ mechanical energy ト云フ,此外ニ熱ノ energy, 電氣ノ energy 等アリ.

他ノ system ト關係ヲ有セザル或 material system ガ其狀態ヲ變ズル時,如何ナル變化ニ於テモ其 system ノ有スル energy ノ總和ハ一定不變ナリ,即 energy ハ indestructible ナリ.

conservative system ニ付テハ前節ヨリ

$$\triangle E_k+\triangle E_p=0$$

何ントナレバ單獨ニ存在セル場合ナルヲ以テ W_e ハ零ナルヲ以テナリ,故ニ此場合ニハ任意ノ變化ノ間ニ於テ potential energy ト kinetic energy トノ和ハ一定不變ナリ.

或 material system ガ孤獨ニ存在セズシテ他ノ system ト關聯セル場合ニハ,一方ノ system ガ或量ダケ energy ヲ増セシナラバ他方ノ system ハ其ト同額ノ energy ヲ減ズベシ,即チ此兩 systems ヲ更ニ一個ノ system ト見レバ其 energy ノ總和ハ一定ナリ.

137. 機械ニヨリ移サルヽ Energy.

機械ハ或物體 A ヨリ他ノ物體 B ヘ energy ノ傳達ヲナスモノナリ,傳達ノ際 energy ノ形式ヲ變ズルコトアリ變ゼザルコトアリ,例ヘバ A ヨリ mechanical energy ヲ受取リ,其形式ヲ變ゼズ mechanical energy ノ儘 B ヘ傳達ス

ルコトアリ,又ハ其形式ヲ變シテ他種ノ energy, 例ヘバ電氣ノ energy, 又ハ熱ノ energy 等ノ形ヲ以テ B ニ傳フルコトアリ.

機械ガ A ヨリ受取リタル energy ヲ input ト云ヒ, B ヘ與フル energy ヲ output ト云フ,或瞬時ニ於テ機械ノ有スル energy ヲ其瞬時ニ於ケル stored energy ト云フ,摩擦等ノ爲 A ヨリ受ケタル energy ヲ少シモ減スルコト無ク,之ヲ B ヘ移スコト能ハズシテ他ノ方面ヘ放散セラルヽモノアリ,之ヲ lost energy ト云フ.

E_i ヲ input, E_o ヲ output, E_l ヲ loss, $\triangle E_s$ ヲ機械ノ stored energy ノ増加トスレバ, energy 不滅ノ法則ニヨリテ

$$E_i-(E_o+E_l)=\triangle E_s$$

即チ

$$E_i=E_o+E_l+\triangle E_s$$

若シモ $\triangle E_s=0$ ナラバ

$$E_i=E_o+E_l$$

138. Efficiency.

前節ニヨリ

$$E_i=E_o+E_l$$

此場合ニ於テ E_o ト E_i トノ比ヲ其機械ノ efficiency ト云フ, efficiency ヲ η トスレバ

$$\eta=\frac{E_o}{E_i}$$

η ハ常ニ 1 ヨリ小ナリ,唯 E_l ガ無キ場合ノミニ 1 トナルベシ.

第拾貳章

衝突

139. 彈性體衝突ニ付 Newton ノ法則.

Newton ハ實驗ニヨリ,同一直線上ヲ動キツヽアル同一材料ヨリ成レル二個ノ球體ガ衝突セル場合ニ,衝突後ノ relative velocity ト衝突前ノ relative velocity トノ比ハ其材料ニヨリテ異ナルモ,其質量ニ關係セズ,且衝突前ノ各ノ velocity ニモ關係セズ,而シテ relative velocity ノ方向ハ衝突前後ニ於テ反對ナルコトヲ知リタリ,此比ヲ通常 e ヲ以テ示ス, u 及ビ v ヲ夫々衝突前ニ於ケル二球 A 及ビ B ノ velocity トシ, u' 及ビ v' ヲ夫々衝突後ニ於ケル二球ノ velocity トスレバ,上記ノ法則ハ次式ニテ表ハサル.

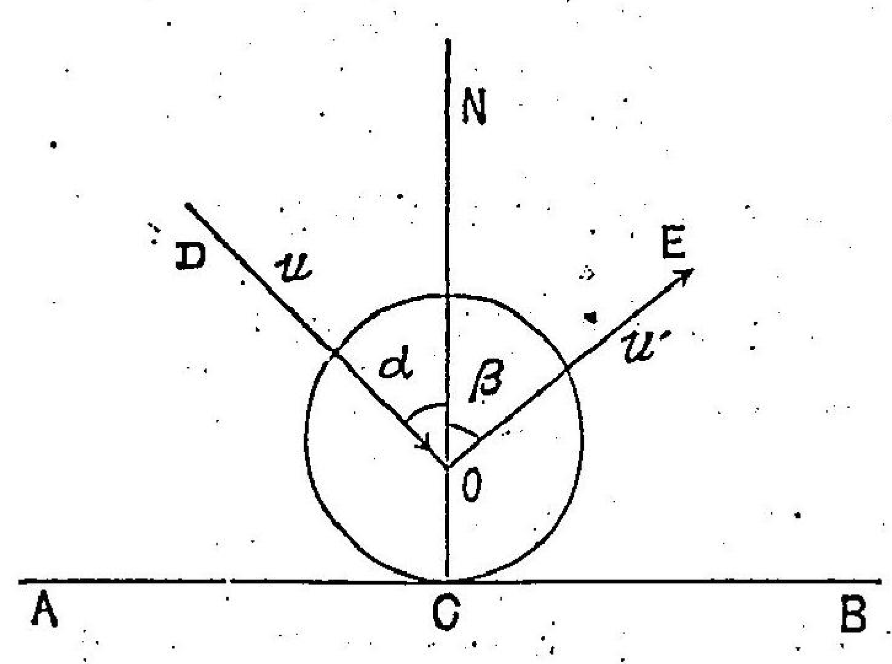
$$-\frac{u'-v'}{u-v}=e$$

e ヲ coefficient of restitution ト云フ, e ハ通常 1 ヨリ小ナリ, $e=1$ ナルモノヲ perfectly elastic body ト云ヒ, $e=0$ ナルモノヲ non-elastic body ト云フ,上式ニ於ケル負號ハ relative velocity ノ方向ガ前後ニ於テ反對トナルコトヲ示セルモノナリ,若シモ u ガ v ヨリ大ナレバ u' ハ v' ヨリ小ナルベシ, e ノ値ハ大略次ノ如シ.

硝子	0.94	cast-iron	0.66
象牙	0.81	鉛	0.20
cork	0.65		

140. 固定表面ヘ球ノ衝突.

球ノ質量ヲ m トス,衝突前後ニ於ケル球ノ velocity ヲ夫々 u 及ビ u' トス, AB ハ固定表面ニシテ C ハ接觸點ナリ, CN ハ AB ヘノ垂線ニシテ球ノ中心 O ヲ通ス, DO ハ u ノ方向, OE ハ u' ノ方向ヲ表ハス, u ガ NO トナセル角ヲ α トシ, u' ガ ON トナセル角ヲ β トス.



接觸面ニ摩擦無シトスレバ,接觸面ニ tangential force 無シ,故ニ AB ニ平行ナル component velocity ハ變化ヲ受ケズ,故ニ

$$u\sin\alpha = u'\sin\beta \quad\text{.........................(1)}$$

AB ニ normal ナル component ハ, AB ハ固定セルヲ以テ v 及ビ v' ガ零ナルガ故ニ

$$u'\cos\beta = eu\cos\alpha \quad\text{.........................(2)}$$

(1) ト (2) トヨリ

$$\therefore u' = u\sqrt{\sin^2\alpha + e^2\cos^2\alpha}$$

又

$$\cot\beta = e\cot\alpha$$

表面 AB ヘノ pressure ノ impulse ハ球ノ受クルモノト大サ等シク方向反對ナリ,故ニ AB ヘノ pressure ノ impulse ノ大サハ球ノ AB ニ直角ノ momentum ノ變化ニテ測ラル,即チ

$$\text{blow ノ impulse} = mu\cos\alpha + mu'\cos\beta$$

$$= m(1+e)u\cos\alpha$$

若シモ $\alpha = 0$ ナレバ

$$\beta = 0, \qquad u' = eu$$

$e = 1$ ナル時

$$\beta = \alpha, \qquad u' = u$$

$e = 0$ ナレバ

$$\beta = 90^\circ, \qquad u' = u\sin\alpha.$$

141. 同一直線上ヲ動キツヽアル二球ノ衝突.

兩球ハ同一ノ方向ヘ動キツヽアルモノトシ,質量ヲ夫々 m_1 及ビ m_2 トス,衝突前後ニ於ケル m_1 ノ velocity ヲ夫々 u, u' トシ, m_2 ノ velocity ヲ夫々 v, v' トス.

$$u' - v' = -e(u - v) \quad\text{.........................(1)}$$

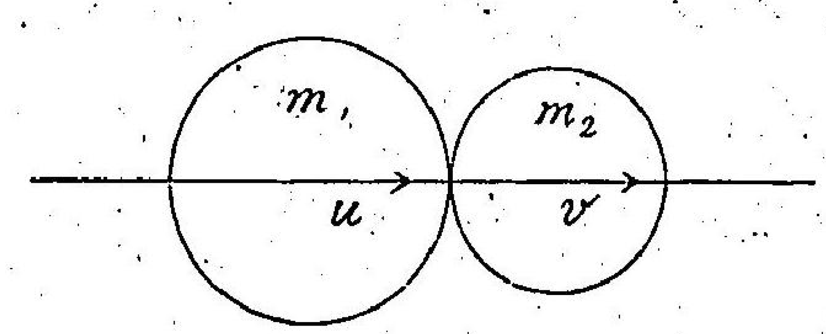
又 momentum ノ總和ハ衝突前後ニ於テ變ゼザルモノナルヲ以テ

$$m_1u' + m_2v' = m_1u + m_2v \quad\text{.........................(2)}$$

(1) ト (2) トヨリ

$$\left.\begin{aligned}(m_1+m_2)u'&=(m_1-em_2)u+m_2(1+e)v\\(m_1+m_2)v'&=m_1(1+e)u+(m_2-em_1)v\end{aligned}\right\}$$

此兩式ヨリ u' 及ビ v' ヲ得ベシ.



又 m_1 ノ上ヘ blow ノ impulse ハ

$$m_1(u-u')=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1+e)(u-v)$$

m_2 ノ上ヘ blow ノ impulse ハ之ト大サ等シク方向反對ナリ.

若シモ $m_1=m_2$, 且 $e=1$ ナレバ

$$u_1=v,\qquad v'=u$$

又 $e=0$ ナレバ

$$u'=v'=\frac{m_1u+m_2v}{m_1+m_2}$$

142. 二球ガ斜ニ衝突セル場合.

質量 m_1 ナル球ガ velocity u ヲ以テ質量 m_2; velocity v ナル他ノ球ニ斜ニ衝突セル場合ヲ考フ,兩球ガ衝突接觸セル際其兩者ノ中心ヲ結ベル直線ヲ AB トス, u 及ビ v ガ AB トナセル角ヲ夫々 α,β トス,衝突後ニ於ケル m_1, m_2 ノ velocity ヲ夫々 u' 及ビ v' トシ, u' 及ビ v' ガ AB トナセル角ヲ夫々 θ 及ビ ϕ トス然ル時

$$u'\sin\theta=u\sin\alpha \quad\ldots\ldots(1)$$

$$v'\sin\phi=v\sin\beta \quad\ldots\ldots(2)$$

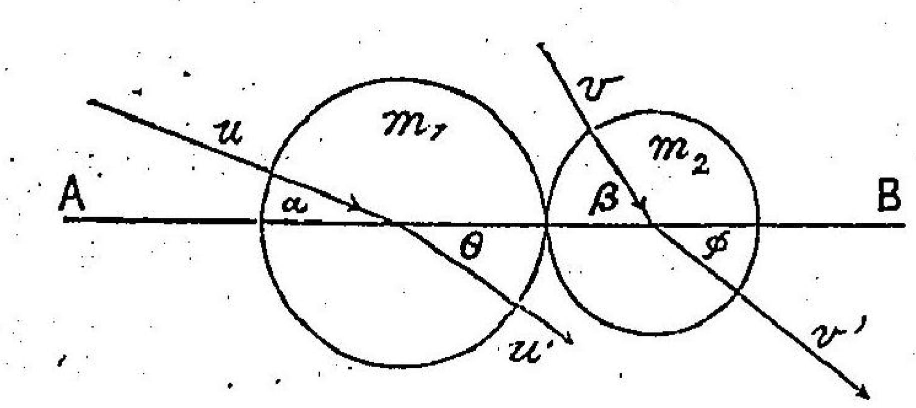
$$u'\cos\theta-v'\cos\phi=-e(u\cos\alpha-v\cos\beta)\quad\ldots\ldots(3)$$

又 momentum ノ關係ヨリ

$$m_1u'\cos\theta+m_2v'\cos\phi=m_1u\cos\alpha+m_2v\cos\beta\quad\ldots\ldots(4)$$

(1), (2), (3), (4) ノ四式ヨリ u',v',θ,ϕ ハ定メラル, (3) ニ m_2 ヲ乘シテ (4) ニ加フレバ

$$u'\cos\theta=\frac{(m_1-em_2)u\cos\alpha+m_2(1+e)v\cos\beta}{m_1+m_2}\quad\ldots\ldots(5)$$



(3) ニ m_1 ヲ乘シテ (4) ヨリ減スレバ

$$v'\cos\phi=\frac{m_1(1+e)u\cos\alpha+(m_2-em_1)v\cos\beta}{m_1+m_2}\quad\ldots\ldots(6)$$

(1) ノ平方ニ (5) ノ平方ヲ加フレバ u'^2 ヲ得, (1) ヲ (5) ニテ除スレバ $\tan\theta$ ヲ得ベシ,同様ニ (2) ト (6) トヨリ v'^2 及ビ $\tan\phi$ ヲ得ベシ.

m_1 ノ上ヘ blow ノ impulse ハ

$$m_1(u\cos\alpha-u'\cos\theta)=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1+e)(u\cos\alpha-v\cos\beta)$$

m_2 ノ上ヘ blow ノ impulse ハ之ト大サ等シク方向反對ナリ.

若シモ $v=0$ ナレバ

$$\phi=0$$

$m_1=m_2$ 且 $e=1$ ナレバ

$$u'\cos\theta=v\cos\beta$$

$$v'\cos\phi=u\cos\alpha$$

143. 衝突ニ基ク kinetic enery ノ損失.

先ヅ二球ガ同一直線上ヲ動キツヽアリシ塲合ヲ考フレバ

$$m_1u'+m_2v'=m_1u+m_2v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$u'-v'=-e(u-v) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(2) ノ平方ニ m_1m_2 ヲ乘シ之ヲ (1) ノ平方ニ加フレバ

$$(m_1^2+m_1m_2)u'^2+(m_2^2+m_1m_2)v'^2$$

$$=(m_1u+m_2v)^2+e^2m_1m_2(u-v)^2$$

即チ

$$(m_1+m_2)(m_1u'^2+m_2v'^2)$$

$$=(m_1u+m_2v)^2+m_1m_2(u-v)^2-(1-e^2)m_1m_2(u-v)^2$$

$$=(m_1+m_2)(m_1u^2+m_2v^2)-(1-e^2)m_1m_2(u-v)^2$$

故ニ

$$\tfrac{1}{2}m_1u'^2+\tfrac{1}{2}m_2v'^2$$

$$=\frac{1}{2}m_1u^2+\frac{1}{2}m_2v^2-\frac{1-e^2}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(u-v)^2$$

故ニ衝突ニヨリテ kinetic enery ノ損失ハ

$$\frac{1-e^2}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(u-v)^2$$

ナリ, $e=1$ ナル塲合ニハ此項ハ消失ス,即チ完全ナル彈性體ニ付テハ衝突ノ爲 kinetic energy ノ損失無シ.

次ニ斜ニ衝突セル塲合ヲ考フルニ前ト同樣ニシテ

$$\tfrac{1}{2}m_1u'^2\cos^2\theta+\tfrac{1}{2}m_2v'^2\cos^2\phi=\tfrac{1}{2}m_1u^2\cos^2\alpha+\tfrac{1}{2}m_2v^2\cos^2\beta$$

$$-\frac{1-e^2}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(u\cos\alpha-v\cos\beta)^2\ldots(3)$$

又 $u'\sin\theta=u\sin\alpha$, 及ビ $v'\sin\phi=v\sin\beta$ ナルヲ以テ

$$\tfrac{1}{2}m_1u'^2\sin^2\theta+\tfrac{1}{2}m_2v'^2\sin^2\phi=\tfrac{1}{2}m_1u^2\sin^2\alpha+\tfrac{1}{2}m_2v^2\sin^2\beta \quad \ldots\ldots(4)$$

(3) ト (4) トヲ加フレバ

衝突後ノ kinetic energy=衝突前ノ kinetic energy

$$-\frac{1-e^2}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(u\cos\alpha-v\cos\beta)^2$$

故ニ $e=1$ ノ塲ヲ除キテハ kinetic energy ノ損失アリ,此 energy ハ主トシテ熱ノ energy トナル.

144. 彈性體衝突時間中ニ於ケル作用.

二個ノ彈性體ガ衝突セル時其衝突中ノ時間ヲ二部分ニ區分スルコトヲ得,最初ノ部分ハ兩者互ニ壓迫スル時間ニシテ,後ノ部分ハ兩者ガ其形狀ヲ恢復セントスル時間ナリ,壓迫ヲ終リ將ニ復歸ヲ始メントスル瞬時ニハ兩者共通ノ velocity ヲ有ス,衝突ノ前部分ニ働ケル力ヲ compression ノ力ト云ヒ,後ノ部分ニ働ケル力ヲ restitution ノ力ト云フ.

同一直線上ヲ動ケル球體ガ衝突セル塲合ニ於テ, U ヲ以テ衝突時間中ノ或瞬時ニ於テ兩球體ガ共通ニ有スル velocity トスレハ, m_1 ナル球ニヨリ失ハレタル momentum ハ

$$m_1(u-\mathrm{U})$$

又 m_2 カ得タル momentum ハ

$$m_2(\mathrm{U}-v)$$

故ニ compression ノ力ノ impulse ヲ I トスレバ

$$\mathrm{I}=m_1(u-\mathrm{U})$$

$$=m_2(\mathrm{U}-v)$$

故ニ

$$\frac{\mathrm{I}}{m_1}+\frac{\mathrm{I}}{m_2}=u-\mathrm{U}+\mathrm{U}-v$$

$$=u-v \text{.............................} (1)$$

又 restitution ノ間ニ m_1 ノ失ヘル momentum ハ

$$m_1(\mathrm{U}-u')$$

m_2 ノ得タル momentum ハ

$$m_2(v'-\mathrm{U})$$

故ニ I′ ヲ restitution ノ力ノ impulse トスレバ

$$\mathrm{I}'=m_1(\mathrm{U}-u')$$

$$=m_2(v'-\mathrm{U})$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{I}'}{m_1}+\frac{\mathrm{I}'}{m_2}=\mathrm{U}-u'+v'-\mathrm{U}$$

$$=v'-u' \text{.............................} (2)$$

故ニ (1) ト (2) トヨリ

$$\frac{\mathrm{I}'}{\mathrm{I}}=\frac{v'-u'}{u-v}=e$$

故ニ

$$\mathrm{I}'=e\mathrm{I}$$

印刷所　田村印刷所
東京市神田區皆川町二番地

印刷人　田村茂太郎
東京市神田區皆川町二番地

商船學校長　石橋甫
代表者

著作兼發行者　商船學校
東京市深川區越中島八番地

明治四拾四年十一月一日發行

明治四拾四年十月廿五日印刷