漢譯

范氏大代數

FINE: COLLEGE ALGEBRA

北平科學社印行

1940

訂正新版序

本書爲 Henry B. Fine 多年教授經驗之結
隨教隨編，經多次修改始成此書；所以次序
整，取材之實用，理論之精細，解法之簡明
爲他書所不及。譯者講教是書多年，深知其
中最完善之教本，遂於民國十八年起開始譯
文，至廿三年始行出版。出版之後，風行全
高中，遂爲奸商所垂涎，篡改翻印者有之，
翻版者有之。錯誤糢糊，有害學子。不得已
諸法律，科以罰金，並賠償損害。於是本社
努力，乃請數學家關景唐，王周卿兩先生本
年教授之經驗，各詳細校閱一遍，另製新版
者復親自校對，仍恐或有不周之處，務祈宏
隨時指教，致函本社，當致薄酬，並將台銜
校者，則學者幸甚，本社幸甚。

北平科學社高佩玉識

華東區財政經濟委員會

合作社工作指導委員會

目　　錄

第一編　數

第二編　代數

范氏大代數

第一編　數

I. 自然數，數法，加法及乘法

物羣及其基數

物羣. 世間萬物，非孑然獨存，蓋常聚合而成羣(*Group*) 1
或團(*assemblage*).

例如手指，馬隊，多角形之頂均物羣也.設視其一組全體物(非各個)與他組全體物有別，而於其概念中構成一團結之純粹目的物，即能想定某組全體物結合爲一羣.

凡組成一羣之諸物，簡稱爲該羣之元(*Element*).

等羣. 一一對應. 設有字母ABC及DEF二文字羣，可 2
以其一羣之各元與他羣之各元，一一配合，即可配合A與D，B與E，及C與F.

設能依此法配合二羣之諸元而無遺，則稱此二羣相等；而諸元之配合處置稱爲使二羣成一對一，或一一對應(*one-to-one correspondence*)之關係.

3 **定理.** 設二羣各等於同一第三羣 則彼此相等.

蓋由假定能令其二羣之各元與第三羣之各元成一一對應,設將二羣中與第三羣同元相配合之各二元視爲新偶,則致此二羣成一一對應矣.

4 **基數.** 於所有物羣中,可擇其相等者合爲一類,任二已知羣屬於同類或異類,當視其能否成一一對應而定.

如,二羣字母 $ABCD$ 及 $EFGH$ 屬於同類,而 $ABCD$ 及 EFG 二羣爲異類.

以一類諸羣所共有之性質,爲與他類諸羣所必無之性質區別羣類稱爲羣中物數,或爲其基數(*Cardinal number*).

換言之,一羣之物數或基數,爲其本羣及能與其成一一對應之各羣之共同性.

* 亦卽謂一羣物體之基數,爲"任意排列羣內之物體,或以他物一一換置而該羣仍保持不變之本性",又可述爲"羣之基數云者,該羣與物體本身特質及排列法無關之性質也".

因將諸物重行排列,或以他物一一換置之,只能變爲另一相等之羣,§2.又當此種變換時,其常有不變之性質,必與物之性質,及排列無關也.

部分 設第一羣之諸元爲第二羣之若干元，而非全部，則稱第一羣爲第二羣之一部分. 5

如，ABC羣爲$ABCD$羣之一部分.

由此定義即得

設三羣中之第一羣爲第二羣之一部分，而第二羣爲第三羣之一部分，則第一羣亦爲第三羣之一部分. 6

有限羣及無限羣 設一羣或團不等於其自身諸部分之一，則稱爲有限羣或有限團；設等於其本羣之某部分，則稱爲無限羣或無限團. 7

如，ABC爲有限羣，因不能令其與BC，或其他任一部分一一對應.

但任何無窮記號或符號串，例如無窮數串 1,2,3,4……，均爲一無限團.

例如，可於全團1,2,3,4,……及其自2起始之部分成一一對應之關係，即於 1, 2, 3, 4, 5,…… (a)

及 2, 3, 4, 5, 6,…… (b)

間，分配(a)中之1與(b)之2，(a)之2與(b)之3，依此類推——可任擇(a)之各數與(b)之諸數相當.

故集團(a)等於其部分(b)而(a)爲無限羣.

大小基數. 設M及N爲任意兩有限羣，則必合於下式之一. 8

1. M及N相等，

或 2. M等於N之一部分，

或 3. N等於M之一部分.

無限羣之諸元自然不能一一遍擧；然若能述一定律判定各已知物屬於此羣或否則亦可謂此羣有定義也。

於第一式稱 M 及 N 有同一基數，§4，或稱等基數；於第二式，稱 M 之基數小於 N 之基數；於第三式，稱 M 之基數大於 N 之基數.

設 M 表字母 *abc* 之羣，及 N 表 *defg* 羣，則 M 等於 N 之一部．例如，等於 *def* 之部分.

故 M 之基數爲小於 N 之基數，而 N 之基數爲大於 M 之基數.

9 **註.** 由§7有限羣之定義可知關於"等"，"大"，及"小"之關係如上文所示已無疑義.

可見，定義不能令 M 之基數同時等於及小於 N 之基數，若 M 等於 N 且爲 N 之一部分，§3，則 N 爲無限羣矣 §7.

10 **系.** 設三基數之第一基數小於第二基數，第二基數小於第三基數則第一基數亦小於第三基數.

設 M,N,P 表任意物羣之基數，M 等於 N 之一部分．而 N 等於 P 之一部分；則 M 等於 P 之一部分，§§3,6.

11 **基數法.** 設由含一元之羣自一起始而重復"加"一新物，於是得下面之基數表:

1. 一"羣"之基數，如 I，卽含一單元.
2. 一羣之基數，如 II，以一單元加於首類之一羣而得者.
3. 一羣之基數，如 III，以一單元加於第二類之一羣而得者.
4. 由此類推，以至無窮.

玆稱此諸連續基數爲"一"，"二"，"三"，…… 而以符號 1,2,3,…… 表之.

基數法之申述 任意有限羣之基數稱爲有限基數，下面之指示可視爲上述之基數表: 12

第一. 此表中各基數均有限.

如羣 I 爲有限, 因不能等於其一部分, §7; 而各相隣之羣有限, 因加一新物於有限羣故仍爲有限.* 如 II 爲有限羣, 因 I 爲有限羣; III 爲有限羣因 II 爲有限羣, 餘類推.

第二. 各有限基數均含於此表之內.

由定義, 各有限基數爲有羣限如 M 之基數, 設使每一符號 I 各與 M 中一元相當, 則可繪成符號羣 III ……I 等於任意已知有限羣 M, 以構成 M 內各目的物之記號, 此符號羣必有一最末記號, 故必含於 § 11 之表內, 若記號無有止境, 則其本羣與 M 爲無限矣, §7.

第三. 表內之基數無相等者.

由 §3 之定義而知之. 因已證明所有諸羣 I, II, III, ……爲有限; 且其中每二羣之一爲他羣之一部, 固甚明確.

---

*可證明如次(G Cantor, Math. Ann., 46 卷 490 頁):

設 M 表一有限羣, 及 e 爲單物, 則 Me 羣爲以 e 加於 M 而得, 亦爲有限.

證, 令 G ≡ H 表二羣 G 及 H 相等.

設 Me 爲無限, 必等於其部分之一, §7.

令 P 表此部分, 則 Me ≡ P.

(1 設 P 不含 e.

令 f 表 P 內與 M e 中之 e 配合之元, 而以 P_1 表 P 之餘部.

則因 Me ≡ P_1f 及 e ≡ f, 得 M ≡ P_1.

然此不可能, 因 M 爲有限羣而 P_1 爲 M 之一部, §7.

(2) 設 P 含 e.

P 中之 e 不能與 Me 中之 e 配合, 若能配合, 則 P 之餘部亦爲 M 之一部, 而等於 M 矣. 然可設 P 中之 e 與他元如 Me 中之 g 配合及 Me 中之 e 與 P 中之 f 配合.

設 Me ≡ P 爲眞, 則復配合 e, f, g. 諸元如 P 中之 e 與 M e 中之 e 及 P 中之 f 與 Me 中之 g 亦眞. 然如前證, P 之一部等於 M, 故此假設亦不可能.

自然基度. 方程式及不等式

13 **自然數.** 玆稱符號 1, 2, 3, ……或其名"一","二""三",……爲正整數或自然數 (*Naturrl numbers*). 故一自然數爲一基數之一象徵或符號.

14 **自然基度.** 試按 § 11 所表之已知基數之次序而排列之,得無窮之連續符號.

1,2,3,4,5,……

或"一","二","三",'四","五",……,稱爲自然基度(*Natural Scale*), 或自然數之度.

15 自然基度之各符號,表示已定部分之符號之個數.

如, 4表符號1,2,3,4之個數, 因此符號 1,2,3,4,之個數與 I, II, III, IIII, 諸羣之個數相等 換言之, 卽與末羣符號之線條數相等, §8.此通常之解釋也.

16 **自然基度之順序性質.** 自然基度, 由其本身言之, 僅爲一羣不同符號,如其首符號爲 1, 加之以定羣,得次符號,II 卽 2;再施之得下之符號, 卽3;進行至於無窮.

換言之, 自然基度僅爲按一定次序一個隨一個而構成一羣之不同符號而已,且有最前而無最末之符號.

由此觀之,自然數本身,僅爲次序之記號, 卽當讀此基度時——關於時間——之次序的記號.

17 普通基度與所有其他按定次序排列之已知元之聚合物,顯然有下之性質:

1. 其中任何二元,一在“先”而他在“後”,且“先”“後”二字應用於元中之任何一對有同樣意義.

2. 設已知其任意二元,恆可定孰先而孰後.

3. 設 a,b, 及 c 表任意三元而 a 先於 b, 及 b 先於 c, 則 a 先於 c.

設自然界示人之羣物,或人以己意規定擇去之順序而列置之物,則此集合物,均可具有前述性質,無論任何情形,均稱此種集合爲順序系(*ordinal system*).

第一類之例如(1)自然基度本身; (2)按時間先後之一連續事件; (3)由左至右沿水平線列成之點行.第二類之例爲按其姓名之字母次序排列之一羣人.

一集合體亦可有‘符合”之元,如,事物之羣有兩個或多 13
個爲同位或同時發生者卽爲符合之元.

設上述1,2,3之關係適用於不符合元中,而符合元適合下列條件者爲順序系.

4. 設 a 與 b 合,及 b 與 c 合,則 a 與 a 合.

5 設 a 與 b 合,而 b 先於 c, 則 a 先於 c.

基度中之次序關係可以定自然數所表之基數中之大小 13
關係.

任意二已知基數,其自然數在基度之較後者,必較大.

故可以“設 a 先於 b, 及 b 先於 c, 則 a 先於 c”之關係,以代表基度中“設三基數之第一個小於第二個,及第二個小於第三個,則第一個小於第三個’之關係.

實則於比較基數之大小時，罕有用其他任何方法者，因吾人不用 §8 之方法直接比較物羣之基數也．逆言之，即以適宜之自然數表之，由其自然數在基度中之關係次序惟知孰大與孰小．當述談任意二自然數時，若即刻認其孰先與孰後則能令人於此基度不費思索，迅速印入腦筋．如設談及A，B二城，A之人口爲 120000，而B爲 125000，則立刻斷定 B 城居民較多，因知其125000於基度中在120000之後故也．

20 **數之方程式及不等式** "數"之一字即謂自然數，§13；而字母a，b，c，即表此任意自然數．

21 設欲令 a 及 b 表同數，或自然基度中之"符合數"，應用方程式(*Equation*)．

$a=b$，讀作"a等於b"

22 設於自然基度中，欲表 a 先而 b 後，應用下列二不等式(*Inequality*)之一．

$a<b$，讀作"a 小於 b"，

$b>a$，讀作"b 大於 a"．

23 嚴密言之，此"等""小"及"大"諸字，自然非謂符號a及b之本身，而指其所代表之基數；如"a 小於 b"一語，僅爲"a 所表之基數小於 b 所表之基數"之簡稱而已。

然一切不等式 $a<b$ 於符號 a 及 b 本來之意義即謂在基度中 a 先於 b．

24 **方程式及不等式之規則．** 由§§17，18與§§21，22之定義，即得

1. 設 $a=b$ 及 $b=c$，則 $a=c$．

2. 設 $a<b$ 及 $b<c$ 則 $a<c$．

3. 設 $a=b$ 及 $b<c$，則 $a<c$．

數　法

算術者乃論及自然數間之順序關係，且用以連結此諸數之初步法則而已。 25

算術之運用以數法(*counting*)爲基本.

數法. 欲知某已知羣目的物之基數爲何，故計算此羣. 26

此驗算極爲尋常，即於一物上寫"一"，次物寫"二"，依此進行以至寫徧，須按基度次序讀口述符號「一」「二」……而按適宜或便利之順序擇定諸物愼勿遺漏，於此處置末後所記符號即所求——此羣基數之名，由度算之次序標識，此末一符號表已經讀過若干符號也，§15，故得此羣之物爲若干個，§8.

即數法之運算可認爲導所算之羣與自然基度之各部成一一對應，§2，——即自"一"起始至最後計算中之末數爲止之部分一一對應.

注意自然數於一數法中具有二重意義：(1) 僅用其一羣爲籌碼以完成此運算；及(2)應用末一字以記錄計算之結果.

數任一羣之物時，無形中已知與其所選定事物之順序無關，玆可證明如下：

定理. 計算一定羣物體無論如何擇定順序結果均同. 27

例如，設按一種順序P擇取諸物計算一有限羣之結果爲99. 然按他種順序Q，則爲97.

依是順序P中前97個事物以成立羣，必與順序Q中之全體相等. 因由假設二者皆須使與自然數基度之前97個數相配合 §3.

然此不可能，因此則羣之一部等於其全體矣；但由假設，此羣爲有限羣 §7，故曰不可能.

28 **基數之另一定義.** 茲可將上述定理,作成有限羣基數之基本定義,即一定物羣之基數爲該羣之本性,無論以任何順序計算此羣均得同一自然數.

此基數定義也,設如 §16 所規定,以數之討論作起點選擇諸物而構成自然基度,則此定義自然明瞭.

加法

29 **加法定義.** 加 3 於 5 即求自然基度 5 之後據其第三位置者爲何數,可由 6 起,在基度上向前讀計三數,即:6,7,8,而得數目,8.

茲以符號 + 表此演算,讀爲「加」(*Plus*),寫作 $5+3=8$. 總之,加 b 於 a 即求自然基度中 a 後據第 b 位置者爲何數.

因基度中無最末符號,此數常可求得,稱之爲 a 及 b 之和(*sum*)且以式 $a+b$ 表之.

30 **註.** 求 $a+b$ 之演算爲於自然基度中以 b 物一羣之元向後數一次一個而加於 a 物之一羣,故(1)其末後處置之結果爲 $a+b$ 物之一羣,§ 8,及(2)設 a 及 b 表有限基數,於是得 $a+b$ 亦表有限基數參看 5 頁底註.

31 因 $a+1$, $a+2$, 等等,表 a 後之第一,第二等數,連續數 $a+1, a+2, \cdots\cdots$ 表基度中 a 後之一切諸部.

故 a 後之任意已知數可以 $a+d$ 式表之,此處 d 表一有定自然數.

演算. 用數法加許多大數必甚繁難，必須記憶若干較小之數相加之和(加法表). 且應用下節說明之加法「定律」(*law*)以導出大數之和. 32

加法定律. 加法爲"交換"及"結合"之演算；卽依次二定律: 33

交換定律（*Commutative law*）. $a+b=b+a$. 34

加 b 於 a 與加 a 於 b 結果相等.

結合定律（*Associative law*）. $a+(b+c)=(a+b)+c$, 35

先加 c 於 b 再加其和於 a，與先加 b 於 a 再加 c 於其和，結果相等.

註. 於實用時，可以 $a+b+c$ 代 $(a+b)+c$ 式，更當瞭然 $a+b+c+\cdots\cdots$ 式表加 b 於 a 加 c 於其和，等等之結果. 36

定律之證明. 茲證明諸定律如下: 37

第一. 交換定律: $a+b=b+a$.

如，$3+2$ 之和與 $2+3$ 之和相等.

因 $3+2$ 示自然基度中先度三數，再度二數；卽

所算之羣　　1,2,3,　4,5,　　(a)

指算者標記之符號　1,2,3,　1,2.　　(b)

但於(a)及(b)之記號羣間爲一對一之關係，而每一對一之關係爲交互的，§2. 故可互換(a)及(b)之所表；卽設(b)爲所算之羣，(a)必表指算者所書符號之羣.

故得 $3+2$ 等於一一度算記號

1,2,3,　1,2　　(a)

之羣.

同理，得 $2+3$ 等於一一度算下面之記號羣

1,2.　1,2,3.　　(a)

然(b)及(c)含符號個數相同僅其符號之排列不同耳，故一一度算之結果相等，§27；卽

$$3+2=2+3.$$

任意二自然數 a 及 b 亦同此理.

第二. 結合定律: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

先於 a 後度至第 b 符號, 即至 $a+b$, 而於其後再度至第 c 符號, 即至 $(a+b)+c$, 若已度算 $b+c$ 個度號然後謂其在 a 後度至第 $(b+c)$ 符號, 即至第 $(b+a+c)$ 其在基度位置當然相同.

基數之意義即含於上面之證明, 然加法定律之獨立意義於下面底註釋明之.*

---

*意大利數學家皮偶氏不用基數之意義嘗用一種"假定"而立自然數法, 茲述於後——凡"數"均指"自然數".

(1) 符號 1 爲一數.

(2) 於各數 a 後必有一隣次數, 稱之爲 a+.

(3) 此 a+ 數永不爲 1.　　4. 設 a+=b+, 則 a=b.

(5) 設逐次取 a 之隣次數, 則各已知數 a 成連續數 1, 1+, (1+)+, 認定 2, 3 諸數爲: 2=1+, 3=2+, ……

如數 a+b, 意指由連續公式 a+1=a+, a+2=(a+1)+, ……而定者〔由(5)推出〕.

上面之連續公式等於簡單公式.

(6) $a+(b+1)=(a+b)+1$.

用, 算學歸納法可由 6 之導出加法二定律:

(7) $a+(b+c)=(a+b)+c$.　　8. $a+b=b+a$.

第一. 若 $c=k$, 設 (7) 爲眞, 則 $c=k+1$ 時 (7) 亦眞, 因由 (6) 及 (7)

$$a+[b+(k+1)]=a+[(b+k)+1]=[a+(b+k)]+1$$
$$=[(a+b)+k]+1$$
$$=(a+b)+(k+1).$$

由 (6) 設 $c=1$ 時 (7) 必爲眞.

故設 $c=2$, 知 (7) 爲眞, ∴ 設 $c=3$, ……設 $c=$ 任意數, (7) 亦爲眞, 由 (5).

第二. 茲先證特殊情形: (8) $a+1=1+a$, 然後證 (8).

於 $a=k$ 時, 設 (8) 爲眞, 則於 $a=k+1$ 時 (8) 亦眞.

茲於 $a=1$ 時, (8) 爲眞, 於 $a=2$ 時 (8) 亦眞, ∴ $a=3$……時 (8) 皆眞.

最後, 設於 $b=k$ 時, (8) 爲眞, 則於 $b=k+1$ (8) 亦眞, 由 (7) 及 (8).

$$a+(k+1)=(a+k)+1=1+(a+k)$$
$$=1+(k+a)=(1+k)+a=(k+1)+a.$$

因由 (8) 故設 $b=1$ 時而 (8) 爲眞, 於 $b=2$ 時 (8) 亦眞, 於 $b=3$, ……時, (8) 皆眞.

參看 Stolz 及 Gmeiner 1, 數論, 13 頁後, 所引證皮偶氏 (Peano) 說; 且引韓廷頓 (Huntington) 在美國數學會之報告, 第 IX 編, 40 頁. 高拉斯曼 H Grassmann (Lehrbuch der Arithmetik) 嘗首先自 (6) 導出 (7) 及 (8).

和之普通定理. 應用§§ 34, 35 定律可證 38

任何有限個之數，其相加時無論如何排定其次序，或無論若何結合之情形，加之均等.

如 $a+b+c+d=a+c+b+d$.

因 $a+b+c+d=a+(b+c)+d$ §35

$=a+(c+b)+d$ §34

$=a+c+b+d$ §35

和之等式及不等式之法則. 第一. 由§29 和之定義，及§24 之法則，因得 39

1. 設 $a=b$，則 $a+c=b+c$.
2. 設 $a<b$，則 $a+c<b+c$.
3. 設 $a>b$，則 $a+c>b+c$.

此處1已頗瞭然，因設 $a=b$，則 a 及 b 表同數.

玆可證3如下，且以同法證2.

設 $a>b$，令 $a=b+d$，§31.

則 $a+c=(b+d)+c=(b+c)+d$，§§34, 35，$\therefore a+c>b+c$.

第二. 由1, 2, 3, 之逆而得

4. 設 $a+c=b+c$，則 $a=b$.
5. 設 $a+c<b+c$，則 $a<b$.
6. 設 $a+c>b+c$，則 $a>b$.

玆設　$a+c=b+c$，則 $a=b$.

否則必得 $a<b$ 而或 $a+c<b+c$（由2），或 $a>b$ 而成 $a+c>b+c$ 矣（由3）. 均與假設不合.

第三. 且由1, 2, 3, 又得

7. 設 $a=b$，及 $c=d$，則 $a+c=b+d$.
8. 設 $a<b$，及 $c<d$，則 $a+c<b+d$.
9. 設 $a>b$，及 $c>d$，則 $a+c>b+d$.

玆設 $a=b$，則 $a+c=b+c$，及設 $c=d$，則 $b+c=b+d$ 故 $a+c=b+d$.

乘　法

40　**乘法定義.** 以 b 乘 a 卽求 b 個 a 相加之和.

茲稱其和爲以 b 乘 a 之積 (*product*) 而以 $a\times b$, 或 $a\cdot b$, 表之或簡書 ab.

故由定義

41　$$ab=a+a\cdots\cdots \text{至 } b \text{ 項.}$$

42　稱 a 於被乘數 (*multiplicand*), b 爲乘數 (*multiplier*), 且稱 a 及 b 爲 ab 之因數(*Factors*).

43　**演算.** 若以遞加法求積殊爲繁難,故宜熟記較小數之積(乘法表). 由此用加法定律與下面所釋之乘法定律之輔助而導出大數之積.

44　**乘法定律.** 乘法亦如加法，爲一交換及結合之施算,而於加法爲可分配卽依次之三定律:

45　**交換定律.** $ab=ba$,

以 b 乘 a 及以 a 乘 b, 結果相等.

如，$2\cdot3=6$ 及 $3\cdot2=6$.

46　**結合定律.** $a(bc)=(ab)c$,

以 bc 之積乘 a 與以 c 乘 ab 之結果相等.

如，$2(3\cdot4)=2\cdot12=24$;及$(2\cdot3)4=6\cdot4=24$.

於實用上則書 abc 以代$(ab)c$.比較 § 36.

47　**分配定律.** (*distributive law*). $a(b+c)=ab+ac$,

先以 b 及 c 之和乘 a 與先以 b 乘 a 次以 c 乘 a 然後加其各積,結果相等.

如　$3(4+5)=3\cdot 9=27$；及$3\cdot 4+3\cdot 5=12+15=27$.

三定律之證明　玆證此定律如下：　48

第一．分配定律：$ab+ac=a(b+c)$.　(1)

因　$ab+ac=(a+a+\cdots$至b項$)+(a+a\cdots$至c項$)$ §41

$=a+a+a+\cdots$至$(b+c)$項$=a(b+c)$. §§35, 41.

故　$a(b+c+\cdots\cdots)=ab+ac+\cdots\cdots$.　(2)

如，$a(b+c+d)=a(b+c)+ad=ab+ac+ad$.

由 (1) 及 § 35.

又得　$ac+bc=(a+b)c$.　(3)

因　$ac+bc=$（$a+a+\cdots\cdots$至 c 項）+（$b+b+\cdots\cdots$至 c 項）

$=(a+b)+(a+b)+\cdots\cdots$至 c 項$=(a+b)c$. §38

第二．交換定律：$ab=ba$.

$ab=(1+1+\cdots\cdots$至 a 項$)b$

$=1\cdot b+1\cdot b+\cdots\cdots$至 a 項　由 (3)

$=b+b+\cdots\cdots$至 a 項$=ba$　§ 41.

第三．結合定律：$(ab)c=a(bc)$.

$(ab)c=ab+ab+\cdots\cdots$至 c 項　§ 41.

$=a(b+b+\cdots\cdots$至 c 項$)=a\ (bc)$. 由 (2) 及 § 41.

積之普遍定理． 以上諸定律可推廣於任意有定個因數之積，均能適用．　49

即任何定個因數之積不必依所乘諸因數之結合次序．

積之等式及不等式． 即：　50

1．設 $a=b$，則 $ac=bc$．　*4*．設 $ac=ac$，則 $a=b$．

2. 設$a<b$,則$ac<bc$. 5. 設$ac<bc$,則$a<b$.

3 設$a>b$,則$ac>bc$. 6. 設$ac>bc$,則$a>b$.

此處1頗爲顯明,因設$a=b$,則a及b表同數,玆證3如下,且可以同理證2.

設$a>b$,令$a=b+d$,則$ac=(b+d)c=bc+dc$, $\therefore ac>bc$.

法則4,5,6爲1,2,3之逆,故由§39所用之理由而得其證.

應用§39之理由,自1,2,3,而得

設$a=b$及$c=d$,則$ac=bd$.

設$a<b$及$c<d$,則$ac<bd$.

設$a>b$及$a>d$,則$ac>bd$.

II. 減法與負數

完全基度

51 **減法.** 由5減3即求於自然基度中在5前據第三位置者何數.玆於4始,逆度三數,即4,3,2,而得2,

以符一號表此演算,讀作[減](*minus*),寫爲$5-3=2$.

總之,自a減b而求在a前據第b位置者爲何數.

由a減b所得之數稱爲餘數(*remainder*),而以$a-b$式表之,a稱爲被減數(*minuend*)而b稱爲減數(*subtrlhend*).

52 **加與減爲相反之演算.** 在5前之第三數當然加三而復得5.

總之,可稱此餘數$a-b$爲a前之第b數,或以b加之而復得a者之數,即可以下面方程決定之

53 $$(a-b)+b=a.$$

復次，因知7據4後第三位置與4據7前第三位置之語意相同，故得$4+3-3=4$.總之，

$$(a+b)-b=a.$$ 54

因　$a+b-b=a$，§ 54，故謂減法可以抵消加法，及因 55
$a-b+b=a$，§ 53，故謂加法可以抵消減法，故稱加與減爲互逆之演算.

完全基度.　自然基度不足應減法之需用；因其基度有 56
首數1，不能超過此數反向後面度算之.

如，於自然基度不能由2減4.

若能任意向前或向左度算，亦如向後或向右度算，則有重大便利；且自然基度本身僅爲一組按一定次序排列之符號，當然可以在其前順次反向另置一組新符號.

故在1前置0；　0前置-1；　-1前置-2；　餘類推.

用此法造成完全基度.

$\cdots\cdots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots$.

爲一串無始無終之符號或"數"，故向前(或左)任意推算，亦如向後(或右)推算.

注意此基度關於符號0爲對稱(*symmetry*)，如3爲0後 57
之第三符號，而-3爲0前之第三符號；推之一般他數亦然.

新數之意義.　諸新數中之0可有一基數意義，如，自3 58
反向數，相當於由一含三物之羣，一一將某元消去一個之演

算，此演算可繼續至於諸元完全消去，玆稱 0 爲此最後無物之"羣"之基數號符，故常視 0 爲自然數之一．

但 $-1, -2, -3, \cdots\cdots$ 無任何基數意義．

然此新符號與自然數之間有同樣順序性質，且可由其正確位置而決定之，亦如自然由基度中之位置而決定相同．此卽稱此諸符號 $-1, -2, -3, \cdots\cdots$ 爲數之充足理由．

59　**正數與負數．** 新數稱爲負數(*Negative number*)，舊數稱爲正數(*Positive number*)．此二類之數及 0，稱爲整數(*Integers*)示與後節所論之他數有別．

60　**代數之等式及不等式**　令 a, b, c，表完全基度中任何三數，視 a 先於，合於，或後於 b 而寫作 $a<b, a=b, a>b$．

61　由定義知完全基度爲一順序數組，§ 17，且應用 § 24 之法則；卽得

設 $a<b$ 及 $b<c$，則 $a<c$．

62　設 $a<b$，卽在完全基度中 a 先於 b，或 b 在代數意義上大於 a．

注意"小"及"大"二字，於完全基度中用作"先"及"後"（或左及右）之釋意——此外別無他意，如"-20"小於"-18"僅謂"-20"在"-18"之前（或左）而已；

63　**絕對值或數值．** 玆稱 3 爲 -3 之數值(*numerscal value*)或其對絕值(*absolute value*)，以符號 $|-3|$ 表之，寫作 $|-3|=3$．同法施於任何負數．

正數或 0 之數值，爲其本數．如 $|3|=3$．

絕對等式及不等式. 自另一方面言之，完全基度之任 64
二數如a及 b，其 a 之絕對值是否小於，等於，或大於b之絕對值，依 $|a|<,=,$或$>|b|$ 而定.

如， -3 之代數值小於2，而其絕對值大於2；又-7之代數值小於-3，而其絕對值大於-3之絕對值.

含負數式之演算

新演算. 以前曾用加，減，乘諸演算連結自然數，茲復 65
創立新法則以連結負數與0及自然數.

茲以同樣名詞稱此演算，且以表自然數演算之同樣方法表之.

如§60，應用a表完全基數之任意數，但a及b僅表自然數，茲規定新演算如下:

加法及減法之定義. 卽: 66

1. $a+b$意謂a後之第b數.

2. $a-b$意謂a前之第b數.

3. $a+0$及$a-0$意謂與a相同之數.

4. $a+(-b)$意謂與$a-b$相同之數.

5. $a-(-b)$意謂與$a+b$相同之數.

換言之，加正數b於任意數a，意卽在基度上，向後度算b個位置；若自a減之，則反向度算b個位置，惟加一負數等於減一相當正數，減一負數等於加一相當正數.

如，由$1-3+2=-1$，因-1爲-3後之第二數.

由 2, $2-5=-3$,因-3爲 2 前之第五數.

由 4, $-5+(-2)=-5-2=-7$(由2).

由 5, $-6-(-2)=-6+2=-4$(由1).

67 **乘法之定義.** 卽:

1. $0\cdot a$ 及 $a\cdot 0$ 意均爲 0.

2. $a(-b)$及$(-a)b$意卽$-ab$.

3. $(-a)(-b)$意卽ab.

換言之,若因數無一爲 0 者,則二因數之積爲正或負依因數有同號或異號而定;且於各式,其積之數值,爲其二因數之數值之積.

如,由 2, $3\times -2=-6$,及$-3\times 2=-6$.

由 3, $-3\times -2=6$.

68 **諸定義之原理及意義.** §§66 及 67 所述旣非假定,亦非待證之定理,吾人名之曰——新演算之定義.

如,試證$2(-3)=-2\cdot 3$,除由自然數之乘法定義而外,§40,無所適從,若勉強引用,亦不合理,因-3非自然數故耳.蓋"將 2 取 -3 次"一語爲無意義.

然則何須創作此種演算耶?蓋欲使負數亦能適用於研究數與數之關係及物與物之關係.

此新演算並非任意創造者;反可謂此法爲舊演算對於新數之自然推廣.

爲處理自然數起見,先規定加法爲——向後度計——演算,然後證明應用此演算之結果有兩種性質.卽:

1. $a+b=b+a$.　　　　2. $a+(b+c)=(a+b)+c$.

同理可證乘積具有下列三種普通性質:

3. $ab=ba$.　4. $a(bc)=(ab)c$.　5. $a(b+c)=ab+ac$.

設用字母以表數，此1至5之性質卽成加法及乘法演算之實用定義;蓋實際上勿須向後度計之演算也，餘類推.

設欲令加法，乘法適用於新數，則"定義"1—5亦必須用之，而§§66,67不過述及下面問題之解釋:

欲推廣加法，乘法，及減法之意義，使完全基度之任意數之和及積可有性質1—5，且其減法仍可繼續視為加法之逆.

如，(1)設規定加一正數b於a為向後方度算，而自a減之為反向推算，此不過加法及減法之舊定義之重述而已.

(2) 由此加法定義而得 $-b+b=0$.

設適用交換律 $a+b=b+a$，必得 $-b+b=b+(-b)$，故$b+(-b)=0$;因$b-b=0$，故得$b+(-b)=b-b$.

此卽暗示 $a+(-b)=a-b$.

(3) 設新加法及新減法亦如舊述為互逆之演算.則由前面〔$a-(-b)+(-b)=a$及$a+b+(-b)=a$〕之理，必得$a-(-b)=a+b$，如§66,5.

(4)復次，若保持加法及乘法之原舊關係，§41，如§67,2;卽得

$$\begin{aligned}(-a)b&=-a+(-a)+\cdots\cdots\text{至 } b \text{ 項}\\&=-a-a-\cdots\cdots\cdots\cdots\text{至 } b \text{ 項}=-ab.\end{aligned}$$

(5) 設欲令交換律$ab=ba$，亦可適用時必得$a(-b)=(-b)a=-ba=-ab$，如§67,2.

(6)同理，$0+0+\cdots\cdots$至a項$=0$，用此式定律$ab=ba$以導出§67,1之定義，卽$0\cdot a=0$及$a\cdot 0=0$.

(7)最後，由(6)而得$(-a)(-b+b)=-a\cdot 0=0$.

設欲令分配定律,亦可適用時必得$(-a)(-b+b)$

$=(-a)(-b)+(-a)b=(-a)(-b)-ab$,由(4).

故得 $(-a)(-b)-ab=0$. 且因 $ab-ab=0$, 遂導出 $(-a)(-b)$爲ab,如§67,3.

69 **上諸演算均適合於交換,結合,及分配定律.** 茲仍須證明此新演算完全合於所擬之諸定律.

用§§37, 52之理及法及減法之定義爲向後方度算及反向度算,得

$$a+(b+c)=a+b+c, \qquad (1)$$

$$a-(b+c)=a-b-c, \qquad (2)$$

$$a+b-b=a-b+b=a, \qquad (3)$$

I. **交換定律**, $a+b=b+a$.

第一, $-a+b=b+(-a)$.

因設 $a>b$, 令 $a=d+b$. §§31,34,

則 $-a+b=-(d+b)+b$

$=-d-b+b=-d$; 由(2)及(3)

及 $b+(-a)=b-(b+d)$, §66,4.

$=b-b-d=-d$. 由(2)

設$b>a$亦可用同法證之.

第二, $-a+(-b)=-b+(-a)$.

因$-a+(-b)=-(a+b)=-(b+a)=-b+(-a)$,由(2)及§66,4.

II. **結合定律** $a+(b+c)=(a+b)+c$.

第一, $a+[b+(-c)]=a+b+(-c)$.

設$b>c$,令 $b=d+c$. §§31,34.

則$a+[b+(-c)]=a+[d+c+(-c)]=a+d$.

及 $a+b+(-c)=a+d+c+(-c)=a+d$. 由(3)及§66,4.

設 $c>b$ 可以同法證之.

第二，$a+[(-b)+c]=a+(-b)+c$.

此結果可由1而得，且其式正如所擬.

第三，$a+[-b+(-c)]=a+(-b)+(-c)$.

此結果由(2)及§66,4而得，因$-b+(-c)=-(b+c)$.

III. **交換定律** $ab=ba$.

第一，$(-a)b=b(-a)$.

因 $(-a)b=-ab=-ba=b(-a)$. § 45; § 67;2

第二，$(-a)(-b)=(-b)(-a)$.

因 $(-a)(-b)=ab=ba=(-b)(-a)$. § 45, § 67,3

IV. **結合定律** $a(bc)=(ab)c$.

第一，$(-a)[(-b)(-c)]=[(-a)(-b)](-c)$.

因 $(-a)[(-b)(-c)]=(-a).bc=-abc$, §46;§67,2,3

及 $[(-a)(-b)](-c)=ab.(-c)=-abc$. §67,2,3

第二，其他諸式可由同法證之.

V. **分配定律**. $a(b+c)=ab+ac$.

第一，$a[b+(-c)]=ab+a(-c)$.

因$[b+(-c)]a=[b+(-c)]+[b+(-c)]+\cdots\cdots$至$a$項

$=b+b+\cdots\cdots$至a項$+(-c)+(-c)+\cdots\cdots$至a項

$=ba+(-c)a$. § 41; § 67,2; II 及 III

故 $a[b+(-c)]=ab+a(-c)$. 由 III

第二，其他諸式均可由此推出.

如，$(-a)[b+(-c)]=-a[b+(-c)]$

$=-[ab+a(-c)]=(-a)b+(-a)(-c)$.

70 **總結果**．如前 § 68 所示，於文字算術或代之數，定律 $a+b=b+a$ 等等，實等於加法及乘法之定義，即用字母 a, b, c 表自然數亦同；且已證明此諸定義可應用於完全基度之一切數．

由諸定律之意義可變換文字式之形狀而不影響其值，式中所含文字，可表完全基度之任何數．

如，無論 a,b,c,d 表正整數或負整數，得

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d$$
$$=ac+bc+ad+bd.$$

71 **和之等式及不等式之法則**． 由 § 39 中之同一理由可證

相當於 $a<,=$或$>b$者，

為 $a+c<,=$或$>b+c$；

及其逆亦眞．

下述定理於正數及負數均為眞確．

72 設於方程式或不等式之兩邊，加同數或減同數，則方程式仍為方程式，不等式仍為同序不等式．

73 **積之等式及不等式之法則**．若變更任意二數 a 及 b 符號即反其在完全基度中之順序，§ 57．

如，已知 $-3<-2$，然 $3>2$；$-5<2$ 然 $-5<2$．

由此事實及 § 50 之理由因得

相當於 $a<,=$，或 $>b$ 者，

為 $ac<,=$ 或 $>bc$，

但 $a(-c)>,=$，或 $<b(-c)$；

及其逆亦眞．故

以正或負等數乘方程之兩邊仍爲一方程. 74

以正號等數不等式乘之兩邊仍爲同序.

然以負號等數乘不等式之兩邊則爲異序,卽由<至>,或其逆.

由此第一法則及用 0 乘之定義,卽 $a\cdot 0=0$, 導出次之重要定理.

1. 設 $a=b$, 則 $ac=bc$. 75

2. 設 $ac=bc$, 則 $a=b$, 但 $c=0$ 除外.

於2之例外式須特別注意.

如, 由實數方程 $2\cdot 0=3\cdot 0$, 自然不能得 $2=3$.

零之積. 設一積式爲 0, 其因數之一必爲 0. 76

如, 設 $ab=0$, 或 $a=0$, 或 $b=0$.

因, $0\cdot b$ 亦等於 0,

得 $ab=0\cdot b$,

故 $a=0$, 但 $b=0$ 除外. §75

積之絕對值. 二或多因數之積之絕對值爲其各因數之絕對值之積. 77

如 $|(-2)(-3)(-4)|=|-24|=24$;

及 $|-2|\cdot|-3|\cdot|-4|=24$.

和之絕對值. 設二數同號則其和之絕對值，爲其各絕對值之和;設二數爲異號則和之絕對值爲其絕對值之差. 78

如, $|-3+(-5)|=|-8|=8$;

及 $|-3|+|-5|=3+5=8$

然 $|2+(-5)|=|-3|=3$;及 $|-5|-2=3$.

量中之整數應用

79 **量.** 應用數目非只記綠度算異物之羣之結果也，且須表示度量(*measurement*)大小之結果；如時間，直線，表面等等之部分，凡大小久暫均稱爲量.

80 凡測度一"量"須選一同類之特別量作度量單位(*unit*)與原"量"比較之.

•81 設此量恰含單位之一定次數，即稱此數爲其量數(*measure*).

於特別類，稱線段之量數爲其線段之長.

如，度量一線段即選單位線段(稱爲尺)，沿線逐次貼置之，以求有若干次.

設得恰含尺之三次，則稱之爲三尺長，或其長——即其量數——爲3.

82 自然數應用於量數，即由於以其在自然基度中之位置關係，以表其量數之大小關係.

83 **負數之應用於量數.** 由某處"述及之點"，常能構成其反對"方向"之量數.

如，度量耶穌降生之前及後若干年；自格林維基或華盛頓之西及東若干經度，以及零下及上若干溫度.

由兩種方向所測之量，可以一簡法區別之，即以正數表其一，而以負數表其他.

84 如，下圖

$\cdots -4$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$4\cdots$
$\cdots\cdots P_{-4}$	P_{-3}	P_{-2}	P_{-1}	0	P_1	P_2	P_3	$P_4\cdots$

此圖起點，或原點，爲O．其單位爲OP_1，及諸點P_2，P_3，……，P_{-1}，P_{-2}，……均按$OP_1=P_1P_2=P_2P_3=\cdots\cdots=P_{-1}O=P_{-2}P_{-1}=\cdots\cdots$而截取者．

在諸點上按其本來順序，註以完全基度之數，令0正在O上．

自O至各點P之距離，——即線段OP之長，——以書於其上者之絕對值表之；而自O至P方向以該數之符號表之．

如，-3在P_{-4}上表P_{-4}在O之左距離3單位．

且線上之諸點之順序，以基度中之相當數之順序表之．

用點表數． 於諸點……，P_{-2}，P_{-1}，O，P_1，P_2，……之組 85
及諸數……，-2，-1，0，1，2……之組之間成一對一之關係，可用任一組以表其他組，因此常能用點表數．

III. 除法及分數

除及累次減

除法之二種釋義． 於算術及代數中，茲有兩種演算均 86
稱之爲除法(*division*)其一可稱爲累次減法，其他稱爲乘法之逆；又有二者相合之情形，吾人名之曰整除法，(卽除盡)

除卽累減． 以3除7其第一意卽答次二問題． 87

1. 若自7減3將減若干次始得一小於3之餘數?

2. 其餘數爲何?

茲逐次減3而得其兩個問題之答，卽，$7-3=4$及$4-3=1$，必減3兩次或必減3×2，而其餘數爲1．

故此類除法，等於累次減法，其關係於減法者類似乘法之於加法.

試觀 7,3,2,1, 四數可以下面方程結合之.

$$7=3\cdot2+1.$$

總之，設 a 及 b 爲任意二自然數，若以 b 除 a，意爲求二自然數，q 及 r，(其一可爲 0)，能合於

88　$$a=bq+r \text{ 及 } r<b \text{ 者.}$$

89　茲稱 a 爲被除數 (*dividend*)，b 爲除數 (*divisor*)，q 爲商數 (*quotient*)，及 r 爲餘數 (*remainder*).

90　**註**. 設 a 及 b 爲已知，常可求得適合於 § 88 之二數 q 及 r.

如，設 $a<b$，則得 $q=0$ 及 $r=a$.

如 $b\geqq b$，則由 §§ 31, 35 必能繼續 $b+b+\cdots\cdots$ 之和至等 a 或再加另一 b 而大於 a 且設 q 表此和之項數 則由 § 41，或得

$$a=bq, \text{ 或 } a=bq+r, \text{ 此處 } r<b.$$

復次，設 a 及 b 爲已知，則必有適合於 §§ 88 之 q 及 r 二數存在.

設另有其他二數，如 b',r'，能有

$$bq+r=bq'+r' \text{ 之關係，則必 } b(q-q')=r'-r.$$

然此不可能，因 $r'-r$ 之數值小於 b，而 $b(q-q')$ 之數值不小於 b 故也.

91　**整除**. 設被除數 a 爲除數 b 之倍數，如 $a=12$ 及 $b=3$，其餘數爲 0. 則稱 a 可以 b 整除之. 於此則 § 88 之方程化爲 $a=bq$，或

92　$$qb=a.$$

設 a 可以 b 整除之，亦可稱商數 q 為"以 b 乘之而得 93
a"之數.

且於此類，可表此除法如 $a \div b$，而於 a, b 項間用符號 94
$\frac{a}{b}$ 或 a/b 之一表其商，寫作 $q=\frac{a}{b}$，意與 $qb=a$ 相同.

關於整除之定理及公式

定理 1. 整除及乘法為互逆之演算；即 95

$$a \div b \times b = a, \text{及} a \times b \div b = a.$$

上二式各自 § 93 及 § 87 之定理而得

定理 2. 設除法為整除，則以同數乘被除數及除數而其 96
商數不變.

設，$a=qb$，　則 $am=q \cdot bm$.　§ § 50, 46

即，設　$q=\frac{a}{b}$，　則 $q=\frac{am}{bm}$.　§ 94

定理 3. 整除，亦如乘法，可關於加法及減法而分配之； 97
即，

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \text{及} \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

設　$a=qc$，及 $b=q'c$，

得　$a+b=qc+q'c=(q+q')c$.　§§39, 47

故　$\frac{a+b}{c}=q+q'=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.　§ 94

同法證其減法.

如　$\frac{18}{3}+\frac{9}{3}=6+3=9$，及 $\frac{18+9}{3}=\frac{27}{3}=9$.

商之加減公式. 98

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd};\ \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

因 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$. §§96, 97

可以同法證其減式.

如 $\frac{18}{3}+\frac{10}{5}=6+2=8$, 及 $\frac{18\cdot5+10\cdot3}{3\cdot5}=\frac{120}{15}=8$.

99 **商數乘積之公式.** 即

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

設 $a=qb$, 及 $c=q'd$, 得 $ac=qq'\cdot bd$. §§50, 45, 46

故 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=q\cdot q'=\frac{ac}{bd}$ §94

如, $\frac{15}{3}\cdot\frac{6}{2}=5\cdot3=15$; 及 $\frac{15\cdot6}{3\cdot2}=\frac{90}{6}=15$.

100 **設為整除,以一商數除他一商數之公式** 即

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

設 $a=qb, c=q'd$, 且 $q=q''q'$,

則得 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=q\div q'=q''$, §94

及 $\frac{ad}{bc}=\frac{qbd}{bq'd}=\frac{q}{q'}=q''$. §§96, 94

如 $\frac{24}{6}\div\frac{10}{5}=4\div2=2$; 及 $\frac{24\cdot5}{6\cdot10}=\frac{120}{60}=2$.

101 **負數之整除.** 絕對值可整除時, §93 所示之商之定義, 對於負數亦有意義, 此商數照 §94 表示之, 則得次之定理:

102 定理 4. 設 a 可以 b 整除之, 則

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b},\ \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b};\ \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}.$$

設 $a=qb$， 得 $-a=(-q)b$. §§73,67.

故 $$\frac{-a}{b}=-p=-\frac{a}{b}$$ §94

可以同法證他式.

零之於整除. *1.* 自另一方面而言，§93所示商之定義若除數爲0則無意義. 103

因無論 q 表何數 $q\times 0=0$，故(1)各數以0乘之得0；及(2)以0乘之而得 a 者，實無此數.

換言之，相當於§93及§94之定義，符號 $0/0$ 表任意各數，而 $a/0$ 則非數.

2. 然設被除數爲0，而除數 b 不爲0，則§93之意義有意義，卽以 $0/b$ 表其商爲0.

因依§94，$0/b$ 表以 b 乘之而得0之數；而0卽爲此數(僅此一個)，因 $0\cdot b=0$ 故也.

分數. 除法卽乘法之逆

於§56所述除法之第二類僅爲§93所規定整除之推廣，故須於數組之內部導出分數；玆求此新數之序數定義，類似於§56之負數者. 下面定理暗示其定義之一，其 a, b, c, d 表自然數.

定理5. 設 a 可以 b，及 c 可以 d 整除之. 則商數 a/b 及 c/d 在自然基度中之關係次序與積數 ad 及 bc 之次序相同；卽 104

$$a/b<,\ \text{或} =\ >c/d,\ \text{依}\ ad<,\ =\ \text{或}\ >bc\ \text{而定}.$$

1. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則 $\frac{a}{b}bd=\frac{c}{d}db$. §50

然 $\frac{a}{b}b=a$，及 $\frac{c}{d}d=c$. §§93,94

故 $$ad=bc.$$

可以同法證下式.

設 $a/b<c/d$,則 $ad<bc$,及設 $a/b>c/d$ 則 $ad>bc$.

2. 逆之,因上諸式而得,

設 $ad=bc$, 則 $a/b=c/d$.

否則必得 (1) $a/b<c/d$, 而致 $ad<bc$, 或 (2) $a/b>c/d$,而致 $ad>bc$,然均與假設不合.

設 $ad<bc$, 則 $a/d<c/d$;設 $ad>bc$, 則 $a/b>c/d$.

105 **順序數組之擴充.** a,b,c,d 所表諸值無論能否以 b 除 a 及以 d 除 c, 而 ad 及 bc 在基度中之關係次序爲已知.

故取任意二自然數 a 及 b, 而 b 不爲零, 卽可寫一新符號成 $\frac{a}{b}$, 或 a/b 之式.

設 a 確可以 b 整除之, 如前, 令 a/b 表自然數以 b 除 a 之商設不能整除可暫視 a/b 僅爲一新符號,讀作"b 分之 a",其於除法之關係將於 § 122 示之.

於是得許多符號 a/b, c/d 等等. 試用表自然數之順序性質依下述法則而排列之: a/b 先於, 合於, 或後於 c/d, 依 ab 先於,合於,或後於 bc 而定.

或應用符號 $<, =, >$, 如前, 以代 [先] [合] [後] 之意, ——

106 令 $a/b<,=,$或$>c/d$,按 $ad<,=,$或$>bc$ 而定.

因 $4\cdot8<7\cdot5$. 如 $4/5$ 先於 $7/8$. 卽 $4/5<7/8$. 復次 $2/3$ 在 0 及 1 之間,或 $0<2/3<1$.蓋因 $0\cdot3<2\cdot1$,則 $0/1<2/3$; 而因 $2\cdot1<1\cdot3$, 則 $2/3<1/1$ 也.

107 此 a/b 等符號表諸自然數, 此法卽於基度本體中指定其正當位置. 若 a/b 不表自然數則上述諸法則只規定其位置於基度中介乎連續諸數之間.

證. 擬求任一符號 a/b 關於基度中數之位置,只化 a 爲 $a=bq+r$ 式即可,其 $r<b$, §88. 設 $r=0$, 則 $a=bq$, 此規則致令 a/b 與 q 符合,然 r 不爲 0, 則按規則應置 a/b 於 q 及 $q+1$ 之間. 108

如此新符號 a/b 之完全集團應按——類似自然基度但只構成其部分——之規定而列爲次序組. 109

因其有 §§17,18 中一一枚舉之順序數組之一切性質.

如　設 $a/b<c/d$, 及 $c/d<e/f$, 則 $a/b<e/f$.

因　$a/b<c/d$, 及 $c/d<e/f$,

得　$ad<bc$, 及 $cf<ed$. §106

以第二不等式之兩邊乘第一式之相當邊, 得

$adcf<bced$. §50

因而　$af<be$. §50

故　$a/b<e/f$. §106

分式. 設 a/b 不表自然數則稱之爲分式 (*fraction*); 及 a 與 b 均爲分式之項 (*terms*). 故 110

分式爲 a/b 之形狀,而以其含於自然數中之順序數組之位置決定之.

故自順序數觀之,正可稱分式爲數*.

---

* §106 之法則亦可用以規定 1/0, 2/0 等式之順序數之符號.

如,由此法則, 若 b 不爲 0 則 1/0 必在 a/b 各數之後.因 1/0 > a/b, 而 1·b > a·0 故也.

復次, 1/0, 2/0, 等等,必據有順序數組之同一位置. 因 1·0=2·0, 則 1/0=2/0 故也.

然此法不能示符號 0/0 以定位置,無論 a 及 b 之值如何因 0·b=a·0 故式得 0/0=a/b 也.

111 **負分式.** 玆亦可作一分式令其分子,分母,或子母,均爲負整數者,如$\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$, $\frac{-a}{-b}$,其順序數定義如次:

1. $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$.
2. 各負分式均在0之前.
3. 關於各個負分式(及負整數)之排列,應依下法:

$-\frac{a}{b}<,=,$或$>-\frac{c}{d}$,依$-ad<,=,$或$>-bc$而定.

112 **有理數組.** 玆爲區別整數,分數與他種數起見,而稱之爲有理數(*rational numberr*).合一切此種數組稱爲有理數組(*ational system*).

此組具有一重要性質爲整數組所無者,即

113 有理數組爲稠密的;即在各二不等有理數間必另有許多有理數存在.

如,令$\frac{a}{b}$及$\frac{c}{d}$爲任意二分式,設$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$. 玆可證分式$\frac{bc+ad}{2bd}$在$\frac{a}{b}$及$\frac{c}{d}$之間,證之如下:

因$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$,得$ad<ba$. § 106

1. 設加ad於$ad<bc$之兩邊,由§§ 39,50,106,得

$2ad<bc+ad$, $\therefore a(2bd)<b(bc+ad)$, $\therefore \frac{a}{b}<\frac{bc+ad}{2bd}$.

2. 設加bc於$ad<bc$之兩邊,以同法得

$bc+ab<2bc$, $\therefore (bc+ad)d<c(2bd)$, $\therefore \frac{bc+ad}{2bd}<\frac{c}{d}$.

如,在$\frac{3}{4}$及$\frac{5}{6}$之間可得$\frac{4\cdot5+3\cdot6}{2\cdot4\cdot6}=\frac{38}{48}=\frac{19}{24}$.

故若述及有理數時，須避免“某數之前一數或後一數”之語句，因無此種數存在也．於每個整數可有一鄰次整數，然於任意有理數及一想定之鄰次有理數之間，仍有其他若干有理數． 114

分數演算． 茲令 a, b, c, d 表任意已知正負整數． 115
設 a/b 及 c/d 表整數，於§§98－102已證．得

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. *2.* $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.

3. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. *4.* 設 $\frac{ad}{bc}$ 為整數．$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

但若 a/b 及 c/d 非為整數而1，2，3，4各方程之右邊仍有意義．上列各式均為§§110，111所規定之定值分數類．

故1，2，3，4即暗示加減乘除之推廣意義而構成此諸算法應用於分數，即

二分數 a/b 及 c/d 之和意同於分數 $(ad+bc)/bd$. 116

由分數 a/b 減 c/d 之差意同於分數 $(ad-bc)/bd$. 117

二分數 a/b 與 c/d 之積意同於分數 ac/bd. 118

以分數 c/d 除分數 a/b 所得之商意同於分數 ad/bc. 119

由上可知此諸定義與算術所示分數計算之法則相同．

交換，結合，及分配定律． 亦能施於此諸推廣演算． 120

如 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ca}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$ §§118，69

121 此種計算於§§71,73,之等式及不等式亦眞.

如，設$\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{d}\cdot\frac{e}{f}$，　則$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

因 $\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$,則 $aedf=cebf$, §§118,106,111.

故 $ad=cb$, 因而$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ §§73,106,111.

122 **分數之定義亦爲商.** 分數 a/b 可玆視爲以 b 乘之而得 a 之一數，即以下列方程規定之一數.

123 $$\frac{a}{b}.b=a.$$

因 $\frac{a}{b}.b=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{1}=\frac{ab}{1\cdot b}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{b}=a.$ §§106,111,118

124 **除法爲乘法之逆.** 由§§118,119，可證

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\text{可}\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b};$$

換言之，依§§118,119之規定，乘法及除法爲相反(互逆)之施算.比較§55.

因由§§118,119，及§§106,111，得

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}\cdot\frac{dc}{cd}=\frac{a}{b};$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\div\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\div\frac{c}{d}=\frac{acd}{bdc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{cd}{dc}=\frac{a}{b}.$$

故可稱上面此種除法爲乘法之逆，且曰

125 若以 c/d 除 a/b，即求以 c/d 乘之而得 a/b 之一數.

將分數引入吾人數組內，常可依法求得一種結果而除數 c/d 爲0者除外.

此爲算術及代數中除法之普通意義，亦即整除除法之推廣§93.

約分數爲最低項. 不可約分數. 設分數之分子及分母 126
有一公因數，可同時消去之，其分數之値不變.

如 $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$， 因 $am\cdot b=a\cdot bm$， §106.

設其所有公因數均已消去，則此分數稱爲最低項或不可約分式 (*irreducible*).

定理. 設 a/b 爲不可約分數，及 a'/b' 爲與其相等之任 127
意他分數，則 a' 及 b' 各爲 a 及 b 之同倍數.

因 $a'/b'=a/b$，故 $a'b=ab'$，a 爲 $a'b$ 之一因數.

然由假設，a 與 b 無公因數，故 a 必爲 a' 之因數.

§492,1.

因得 $a'=ma$，其 m 爲整數.

代入 ma 於 $a'b=ab'$ 之 a'，得 $mab=ab'$，故 $b'=mb$， §50.

系. 設二不可約分數相等，則其分子必等，且分母亦必 128
等.

分數之應用於量

分數表長度. 於 § 81 已知長度之定義只能應用恰含 129
單位線段 s 一定倍數之某線段 S.

然設 S 不恰含 s 整倍數，則亦稱與 s 爲可度；即可正含 s 之半，三分之一，或其他有盡分數部分，茲規定長之定義如此：

設一已知線段正含單位線段 b 分劃中之 a 倍則稱其長 130
爲分數 a/b.

如設 S 恰含 s 之 10 分劃中之 7 倍，則 S 之長 (以 s 表之) 爲 7/10.

註. 依定義可知設 a/b 爲以 s 所表 S 之長，亦必爲 131
ma/mb 式之分數.

因 S 恰含 s 之 b 分劃中之 a 分劃，亦必含 s 之 mb 分劃中之 ma 分劃．

132 分數在量中甚爲有用，與整數之應用於量中之理由相同．卽，以有理數組中之關係位置表其線段之長之尺寸關係也．

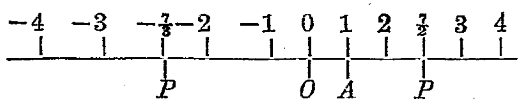
如，設 a/b 及 c/d 表以 s 所計 S 及 T 之長，且 ad/bd，及 bc/bd，亦表其長 § 131；卽於 s 之 bd 分劃中 S 正含 ad 分劃，在 T 正含 bc 分劃．

故 $S<,=,$或$>T$，依 $ad<,=,$或$>bc$ 而定，

卽 $S<,=,$或$>T$，依 $a/b<,=,$或$>c/d$而定．§ 106

133 註 略言之，此處所示之線長定義與初等算術中之分數定義相同．而算術中較大或較小之分數，應視相當於較大或較小之線段或其他量相當之分數而定．

134 **以點繪出之有理數．** 分數，亦同於整數，可以在無限長的直線上之點繪出之，§ 85．



如，欲繪一點 P，表 $7/3$，蓋與繪 A 表 1 有同樣方法，不過由原點 O 起向右截取單位 OA 之三分之一分劃向右七次．

P 爲 O 之左邊之相當點，$-7/3$ 之圖形．

於任意已知分數．無論正負均可以此同法施之．

35 所有此類諸點均可按其相當於有理數之順序沿線繪出之，須熟記普通稱謂一有理數，在他有理數之左或右，或在他二有理數之間．

IV. 無理數

序　論

定義. 茲以 a^2 表乘積 aa, 讀作"a 之平方," 以 a^3 表乘積 aaa, 讀作"a 之立方"; 以 a^n 表 $aaa\cdots\cdots$至 n 個因數之積, 讀作"a 之 n 次冪"(*nth power*). 136

於記號 a^2, a^3, a^n, 其 $2, 3, n$ 諸數稱爲指數, (*exponents*); a 稱爲其各冪之底(*base*).

由 a 求 a^2 稱爲 a 之平方; 求 a^3, 稱爲 a 之立方; 求 a^n, 即連乘 a 至 n 次冪.

凡乘一已知數至一已知方冪亦稱爲乘方(*involution*).

根及對數. 設 a 爲有理數, 及 n 爲正整數, a^n 亦爲有理數. 稱之爲 b; 則 137

$$a^n = b.$$

此方法暗示二新問題.

第一. 予 n 及 b 以定値而求 a.

第二. 予 a 及 b 以定値而求 n.

如(1)令 $n=2$ 及 $b=9$. 則方程化爲

$$a^2 = 9,$$

而求得 $a=3$ 或 -3; 因 $3^2=9$ 及 $(-3)^2=9$.

復次, (2)令 $a=2$ 及 $b=8$. 則此方程化爲

$$2^n = 8,$$

而得 $n=3$; 因 $2^3=8$.

設　$a^n = b$, 138

1. 稱 a 爲 b 之 n 次根(*nth root*), 用 n 及 b 以符號 $\sqrt[n]{b}$ 表之, 其簡單符號 $\sqrt{b}$, 稱"b 之平方根", 於 $n=2$ 時用之.

2. 稱 n 爲 b 之 a 底之對數(*logarithm*), 而以 a 及 b 各項組成之符號 $\log_a b$ 表之.

如 $3^2=9$ 及 $(-3)^2=9$ 其 3 及 -3 皆爲 9 之平方根，且均可寫作 $\sqrt{9}$；仍宜參看 §139.

復次，2 爲 9 之對數以 3 爲底者；即 $2=\log_3 9$.

139 **註.** 以記號 $\sqrt{9}$ 代表 9 之兩平方根時，可以 $\sqrt{9}$ 表其正根 3，而以 $-\sqrt{9}$ 表其負根 -3，此爲初等代數中表示平方根之普通方法，後面仍之.

140 **開方與求對數.** 設 n 及 b 爲已知，求 $\sqrt[n]{b}$ 之演算，稱爲求 b 之 n 次根或開方(*evolution*).

設 a 及 b 爲已知，求 $\log_a b$ 之演算，稱爲求 b 之 a 底之對數.

此種演算爲乘方之逆法，§§55, 124.

141 **註.** 加法及乘法各有一種逆算，而乘方則有兩種逆算，其理由可比較下三方程而知之.

1. $a+b=c$, *2.* $ab=c$, *3.* $a^b=c$.

因 $a+b=b+a$ 及 $ab=ba$，問題：已知 1 或 2 中之 c 及 b，求 a，與已知 c 及 a 求 b 之問題爲同類.

然 a^b 不等於 b^a，問題：已知 3 中之 c 及 b 求 a，與已知 c 及 a 求 b 之問題完全不同.

142 **新數之需要.** 俟後當逐次學習新計算法，因對於代數學中之基本四則而言，此不過次要而已；然關於數之部分之進一步之推廣殊爲必要.

實際，$\sqrt[n]{a}$ 僅在例外情形能表有理數，不難看出.

如極簡單之例 $\sqrt{-1}$ 及 $\sqrt{2}$ 均非有理數．因

1. 各有理數之平方爲正，凡有理數蓋無平方爲 -1 者，故 $\sqrt{-1}$ 不能表一有理數.

2. 凡有理數實無平方爲 2 者存在．當然 2 非任何整數之平方，下面且可證 2 非任何分數之平方.

設 p/q 爲一最低項分數，而

$$(p/q)^2=2, \text{或} p^2/q^2=2/1.$$

然因 p^2/q^2 爲其最低項，§ 492,2，由此而得，§ 128，$p^2=2$，然此不可能，因 p 爲整數．

故$\sqrt{2}$不能表一有理數．

同法可證設 a/b 爲任意最低項之分數，$\sqrt{a/b}$ 不能表一有理數，除非 a 及 b 均爲整數之 n 次冪方可．

茲創作二種新數以補數組之不足：即無理數(*irrational numbers*)，如$\sqrt{2}$其一也，及虛數(*imaginary numbers*)，如$\sqrt{-1}$其一也．

茲於本章討論無理數，而於次章討論虛數．

無理數之普通定義

本章凡 a, b, c 等字母，表正或負整數或分數之任意有理數．

有理數組之普通性質　有理數構成之一組有下列性質：143

1、爲一順序數組．

2. 此數組有稠密性(*dense*)；即此組內各二不等數 a 及 b 之間，仍有此組之他數在焉．

3. 此組之各二數之和，差，積及商，仍爲此組之數；惟以零除任意數之商須除外．

由下述定義，再創立一種較擴大之數組，而有理數組亦含其內．

第一種截斷．*1*. 一數 $\frac{1}{3}$ 截斷有理數組爲二部，一部含(小於) $\frac{1}{3}$ 前之有理數，他部含(大於) $\frac{1}{3}$ 後之一切有理數．茲各稱此二部數爲 C_1 及 C_2．144

$$\underline{\quad C_1 \qquad\qquad \tfrac{1}{3} \qquad\qquad C_2 \quad}$$

如圖，在 $\frac{1}{3}$ 點左邊之半線含 C_1 部中一切數之圖點，而其右邊之半線含 C_2 部中一切數之圖點，§134.

由 §109，111，及 113，卽得

1. C_1 中之各數必在 C_2 中之各數之前.

2. 無 C_1 中之最後數，亦無 C_2 中之最前數.

如，設 C_1 中有一最後數，則此數及 $\frac{1}{3}$ 之間仍有若干數，§113，此不可能，因由假設，所有小於 $\frac{1}{3}$ 之有理數均在 C_1 中也.

145 *2.* 爲表示截斷有理數組爲三部分 C_1，$\frac{1}{3}$，C_2 計，可連接 $\frac{1}{3}$ 於 C_1，則構成 C_1' 一部以總括 C_1 及 $\frac{1}{3}$，則可曰：

數 $\frac{1}{3}$ 截斷全部有理數組爲兩部分，C_1' 及 C_2；且令

1. C_1' 中各數均在 C_2 中各數之前.

2. C_1' 中有一末數卽 $\frac{1}{3}$，然 C_2 中無首數.

146 *3.* 或連接 $\frac{1}{3}$ 於 C_2，稱其結果部分爲 C_2'，則可曰：

數 $\frac{1}{3}$ 截斷全部有理數組爲兩部分 C_1 及 C_2'，且令

1. C_1 中各數均在 C_2' 中各數之前.

2. C_1 中無末數，然 C_2' 中有一首數，卽 $\frac{1}{3}$.

當然每個有理數，均能仿此截斷有理數組.

147 逆言之，設能以任何法截斷完全有理數組爲兩部，B_1 及 B_2，其 B_1 中各數均在 B_2 中各數之前，而 B_1 中有一末數，或 B_2 中有一首數；此截斷數當視爲首數或末數，以別於其他一切諸數，換言之，卽不能再有他數爲此截斷數.

如，指定諸負有理數含於 B_1，而其餘諸有理數含於 B_2，則 B_1 中無末數．而 0 爲 B_2 中之首數，當稱 0 爲 B_2 之首數時，示與其他諸數有別，因無他數能爲 B_1 中之末數或爲 B_2 中之首數也．

證． 當然不能同時 B_1 有一末數，而 B_2 有一首數，因此二有理數之間必有若干有理數也，§ 113．茲由假設，此各有理數或屬於 B_1，或屬於 B_2．與上述之截斷，原意不符． 148

第二種截斷． 仍可以各種方法截斷全部有理數組爲無末數之 A_1 部分，及無首數之 A_2 部分． 149

如，因無平方爲 2 者之有理數存在，§ 142，各有理數或有一個其平方小於 2，或有一個平方大於 2 者．

令 A_2 包括其平方大於 2 者之一切正有理數，且令 A_1 包含其他一切有理數，則

1. A_1 中各數均在 A_2 中各數之前．

因令 a_1 爲 A_1 中任意數，及 a_2 爲 A_2 中任意數．

設 a_1 爲負或 0，當然 $a_1<a_2$． 又設 a_1 爲正，$a_1^2<a_2^2$，故 $a_1<a_2$．

2. A_1 中無末數，而 A_2 中無首數

設任意正有理數 a_1 已指定爲平方小於 2 者之某值，然可再求一較前數稍大之有理數其平方仍小於 2 者，§ 183，2(3)；故不能指定某有理數爲 A_1 中之末數．同理可證不能指定某有理數爲 A_2 中之首數．

新數$a=\sqrt{2}$． 在 A_1 及 A_2 二部數間之關係，與 § 144 中所述由 $\frac{1}{3}$ 所截斷之兩類 C_1 及 C_2 間之關係恰有相似之處． 150

但任何有理數未有可當 A_1, A_2 之截斷者.

因各有理數或屬於 A_1 或屬於 A_2 然在 A_1 及 A_2 之間無有理數可以存在,如 $\frac{1}{3}$ 之在 C_1 及 C_2 之間者.

且因 A_1 無末數及 A_2 無首數,故相當於此隔離無有理數存在,如 $\frac{1}{3}$ 相當於 § 145 之隔離部分 C_1', C_2, 或如 § 146 之隔離部分 C_1, C_2' 者.(比較 § 147).

故此隔離部分 A_1, A_2 創立一新序數位置,即在 A_1 中一切數之後及 A_2 中一切數之前之一數.

茲創造此類之一數. 以字母 a 表之,嗣後設因 a 而施行乘法可得 $a^2=2$, 故可用更有意義之符號 $\sqrt{2}$ 以代表 a, § 182.

151 於是定此新數 a 爲介於平方小於 2 及其平方大於 2 之一切正整數間之一數.

亦可用下之公式表此定義.

$$a_1 < a < a_2$$

式中 a_1 之及 a_2 各爲 A_1 及 A_2 內之任何數,而 $<$ 即"先於"之意,同前章.

152 註. 注意此定義與第 56, 110 節所示之負數及分數定義相同. a 亦爲一符號,亦含在自然數內諸符號之順序數組中,亦可以位置而定之而已;故可確定其在同一右方(自然數方位)而稱之爲數.

創立此數及相似諸數之理由與創立負數及分數之理由相同,亦因其於研究原有各數間之關係,及於世間各種事物中之關係,確爲有用.*

* 由序數立場上言之. 增此無理數與前章隔離部分 A_1, A_2. 中以公式 $a_1 < a < b < a_2$, 按次序決定之二數 a 及 b 任何隔離部分之間多於一數之說,並無矛盾.

但與另外創造之他種數多於一個之說不合. 參看 67 頁底註(3).

一般之無理數．實數組． 前面論述有理數組之特別間 153
隔，只爲截斷之一種，其他相類性質之截斷正多．

茲於每一間隔創一新數，關於有理數組諸數按次序定之，確如 § 151 所定 $a=\sqrt{2}$ 之一數．

爲別此新數於有理數，而稱之爲無理數（*irrational numbers*）．

復次，爲別此有理數及無理數於虛數又另擬名稱，稱之爲實數（*real numbers*）．

末後，稱包含一切有理數及無理數者爲實數組（*system of real numbers, or real system*）．

故用 a 表任意無理數，因得此理之普通定義：

若任述一法則，凡已知有理數均可由之以定其屬於 A_1 154
類或 A_2 類，必屬一類且僅屬一類，而令 (1) A_1 中各數均在 A_2 中各數之前，及 (2) A_1 中無末數，且 A_2 中無首數；如此即決定一無理數 a；於是 a 之定義爲：介於 A_1 內及 A_2 內諸數中間之一數．

此處表示在 A_1 及 A_2 兩部均有若干數存在；且示 A_1 及 A_2 含全部有理數組．

無理數 a 按其在 0 之先或後而稱爲負或正． 155

實數組爲順序數組． 凡構成之諸數均可按一定及已知 156
之次序而排列之，§ 12．各無理數之定義表明其位置與各有理數之關係；且由每兩個已知無理數之定義，即能知其彼此相互之關係位置若何．

如令 a 及 b 表任意二已知無理數；於是

1. 設各有理數均先於 a 且先於 b，及其他各有理數均後於 a 同時且後於 b，則 a,b 二數關於有理數組諸數而據有同一位置；故由 § 154 無理數之定義，a 及 b 表一相同數，可用下之公式表之：

$$a=b.$$

2. 設有理數中，有若干數後於 a 而先於 b，則 a 必先於 b（或 b 後於 a）。可以下之公式表之：

$$a<b \quad 或 \quad b>a.$$

3. 設有理數中有若干數先於 a 而後於 b，則 a 必後於 b（或 b 先於 a）。可以下之公式表之：

$$a>b \quad 或 \quad b<a.$$

157　因此推知設有兩個不同實數，立能道其孰先而孰後；關於三已知實數 a,b,c，可書出下面之結論。

設 $a=b$，　及　$b=c$，　則 $a=c$。

設 $a<b$，　及　$b<c$，　則 $a<c$。

設 $a=b$，　及　$b<c$，　則 $a<c$。

158　**實數組爲稠密的．**　介於任意二不等有理數間非僅有幾個有理數也，§ 113，且在任何二不等無理數間，及任何一有理數一無理數間亦然，§ 156。

159　**實數組爲連續的**（*Continuous*）．　實數組實具有 § 143 中列舉之有理數組諸性質之第一及第二，然亦有不屬於有理數組之另外性質，即：

設分完全實數組爲兩部分 R_1 及 R_2，令其 R_1 內各數均先於 R_2 內各數，則 R_1 內或無末數，R_2 內或無首數，但不能同時成立.

擬分實數組成 R_1 及 R_2 兩部可先分有理數組爲 A_1 及 A_2 兩部，則一部包含 R_1 內一切有理數，他部含 R_2 內一切有理數.

各有理數或屬於 A_1 或屬於 A_2，且 A_1 內各有理數均在 A_2 內各有理數之前.

令 a 爲 §§147，154 所規定間隔 A_1, A_2 中之一數.

則 a 或爲有理數——即 A_1 內之末數或 A_2 中之首數，§147，——或設 A_1 無末數而 A_2 無首數，於是 a 爲在 A_1 及 A_2 間之一無理數，§154.

1. 設 a 爲 A_1 之末數，則亦爲 R_1 之末數；因若 R_1 中在 a 後尚有數，則在該數及 a 之間還有若干有理數，即 A_1 中在 a_1 後還有其他若干有理數，此與 A_1 含 R_1 內一切有理數之假設不合，故不可能.

2. 同理，設 a 爲 A_2 中之首數，則亦爲 R_2 中之首數.

3. 設 a 爲無理數，必設其屬於 R_1 或 R_2，設 a 屬於 R_1，必爲 R_1 中之末數；若在 R_1 中有任何數在 a 之後，則在該數及 a 之間必有若干有理數，§158，亦即在 A_1 中後有若干有理數，然不可能．同理，設 a 屬於 R_2，必爲 R_2 之首數.

最後，一數不能同時爲 R_1 之末數及 R_2 之首數，否則該二數之間，必有若干有理數，§158，即有若干有理數不屬 A_1，亦不屬於 A_2，但此不可能.

爲表示實數組爲稠密的，且同時具有上述之性質，故曰實數組爲連續的(*Continuous*).

定理. 於完全實數組隨時引述一律分爲 R_1、R_2 兩部，令其 R_1 內各數先於 R_2 內各數，如此即指定一實數 a，無論其爲有理數或無理數；則 a 或爲 R_1 內之末數，或爲 R_2 內之首數. 160

此卽 §§147,159 之結論.

無理數之漸近值

161　已知一無理數 a,如 §154 之所規定. 由下法可得一小於 a,一大於 a 之二有理數;且能令其差至任意小, 此二有理數稱為 a 之漸近值.

令 a 為無理數 $\sqrt{2}$,則此數在兩個正有理數之間, 其一之平方小於2,他一之方平大於2.

1. 逐此計算1,2,3,之平方,至大於2者而止.可求 a 數於某二連續整數之間.

卽得　$1^2<2$ 及 $2^2>2$.

故 a 在1及2之間, 或 $1<a<2$.

2. 於是逐次計算 $1.1^2, 1.2^2$, ……至其平方大於2者而止.以求 a 介於某二連續的一位小數之間.

因得 $1.4^2<2$ 及 $1.5^2>2$, 因 $1.4^2=1.96, 1.5^2=2.25$.

故 a 在1.4及1.5間, 或 $1.4<a<1.5$.

3. 逐次以同法進行,卽得

$1.41<a<1.42$, $1.414<a<1.415$, 依此推算以至無窮.

4. 令 a_1 表連續數1.4,1.41,1.414,……中之第 n 數,及 a_2 表連續數, 1.5,1.42,1.415,……中之第 n 數.

則 $a_1<a<a_2$ 及 $a_2-a_1=1/10^n$.

選 n 為足用之大數, 卽令 $1/10^n$ 小於任何正數 δ,可任意選定 δ 至任何小.

5. 玆稱1.4,1.41,1.414為 $a=\sqrt{2}$ 至第一,第二,第三位小數之漸近值;餘類推.

上法當然可應用於任意無理數 a;為決定小於 a 或大於 a 之某二有理數之一切必要施算乃為試驗;由 §154,而 a 之定義常能用於此種試驗,故得下之定理:

令 a 表任何已知無理數，設定 δ 爲任意正數但不太小．常能求二有理數 a_1, a_2，而令其 162

$$a_1<a<a_2 \text{ 及 } a_2-a_1<\delta.$$

此定理當然對於有理數亦眞．

例如設 a 表已知有理數，及 $a_1=a-1/10^n$，$a_2=a+1/10^n$，已知 $a_1<a<a_2$，可得 $a_2-a_1=2/10^n$，選 n 至足用之大而令 2/10n 至適意之小．

加，減，乘，除．

玆述及實數組中列舉於 § 143 之有理數組之第三性質，須用下面之定理：

定理．令 A_1 及 A_2 爲兩部有理數，且令 163

1．A_1 中各數均小於 A_2 中各數．

2．A_2 中無末數，而 A_2 中無首數．

3．於任一可指定之正數 δ，無論其如何小，吾人能於 A_1 中求一數 a_1，於 A_2 中求一數 a_2，令

$$a_2-a_1<\delta.$$

則可斷定 A_1 及 A_2 之間有一數但僅有一數．

由 § 154，1 及 2 而知其至少必有一數．

復由 3 而知其不能多於一數．

設在 A_1 中每個 a_1 及 A_2 中每個 a_2 之間有二有理數 d 及 d'，如下圖所示：

則於每個 a_1, a_2 而得

$$a_2>d\,,\quad \text{及}\quad -a_1>-d, \qquad \text{§§ } 73, 121$$

故 $$a_2-a_1>d'-d, \qquad \text{§§ } 39, 121$$

此與 3 矛盾，故不可能．

亦非有二數（一數或兩數爲無理數）在每個 a_1 及 a_2 之間也；若然，則在該二數之間仍有有二理數在每個 a_1 及 a_2 之間，§158，前已示其不可能矣.

164 註. 此定理與 §154 無理數之定義不同者，在於並未假設凡有理數，佔在 A_1 或 A_2 內之一部分.

165 **加法.** 令 a 及 b 表任二已知實數，有理或無理數均可，且令 a_1, a_2, b_1, b_2 表任意有理數，同時令其

$$a_1<a<a_2 \text{ 及 } b_1<b<b_2. \qquad (1)$$

注意由 a_1 或 b_1 所表之各數無末數，而由 a_2 或 b_2 所表之各數無首數；設指定無論如何小之任一正數 δ，則由 §162 可選定 a_1, a_2 及 b_1, b_2，令其

$$a_2-a_1<\delta \text{ 及 } b_2-b_1<\delta. \qquad (2)$$

設 a 及 b 均爲有理數，即云 $a=\alpha$ 而 $b=\beta$，可由 §116 之法則求其和 $\alpha+\beta$；自 §121 而得

$$a_1+b_1<\alpha+\beta<a_2+b_2.$$

且無論 a 及 b 爲有理與否，由 §121，自(1)而得

$$a_1+b_1<a_2+b_2. \qquad (3)$$

此式可定 a, b 之和（其一或二數均爲無理數）如下：

166 a 及 b 之和書作 $a+b$，意謂介在 a_1+b_1 所有諸數及 a_2+b_2 所有諸數之間之一數. 換言之，即由下面公式所定之一數.

$$a_1+b_1<a+b<a_2+b_2.$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2, 表任意有理數，而

$$a_1<a<a_2 \text{ 及 } b_1<b<b_2.$$

爲明此定義，須示其有一個且僅有一個 $a+b$ 數．由 §163 而得

1. 每個 a_1+b_1 小於每個 a_2+b_2．

2. a_1+b_1 無末數，而 a_2+b_2 無首數．

即 a_1+b_1 不能爲 a_1+b_1 所表之末數，因 a_1 無末數．且 b_1 亦無末數，於是可選定 a_1 及 b_1 令 $a_1'>a_1'$ 及 $b_1>b_1'$，故 $a_1+b_1>a_1'+b_1'$．

3. 設定一任意正有理數 δ，則能選出 a_1，a_2，b_1，b_2，令

$$a_2-a_1<\delta/2 \text{及} b_2-b_1<\delta/2, \qquad §162$$

故能令 $$(a_2+b_2)-(a_1+b_2)<\delta. \qquad §121$$

$-a$ 之定義． 令 a，a_1，a_2，之意義同於§165，亦如 §165 之假定．若 a 爲無理數，可定 $-a$ 之義如下： 167

號符 $-a$ 意謂以下列公式 168

$$-a_2<-a<-a_1,$$

規定之一數，式中 a_1，a_2 表示常具下列關係之任意有理數

$$a_1<a<a_2.$$

自 §163 知其必有一數 $-a$ 但僅有一數；因

1. $-a_2$ 所表各數必小於 $-a_1$ 所表各數因 $a_1<a_2$．§73，§111．

2. $-a_2$ 無末數，且 $-a_1$ 無首數．若 $-a_2$ 有一末數，則 $-a_2$ 必有首數；但無此種數存在．

3. 常能選定 a_1，a_2 令適合於下式．

$$-a_1-(-a_2)=a_2-a_1<\delta. \qquad §162$$

減法． 由 a 減 b 之結果寫作 $a-b$，意謂 $a+(-b)$ 之一數，即 169

$$a-b=a+(-b).$$

$a+(-b)$ 之義已見於 §§166，168．

自 §§166，168 而知 $a-b$ 亦可用下列公式定之：

$$a_1-b_2<a-b<a_2-b_1,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2,,表恆具下列關係之任意有理數:

$$a_1 < a < a_2 \quad 及 \quad b_1 < b < b_2.$$

170 **乘法,兩因數均正者.** 令 a 及 b 爲任意二已知正數,及 a_1, a_2, b_1, b_2 爲恆具下列關係之有理正數:

$$a_1 < a < a_2, \quad 及 \quad b_1 < b < b_2. \qquad (1)$$

設 a 及 b 均爲有理數,$a = \alpha, b = \beta$.則由 § 121 (1) 而得

$$a_1 b_1 < \alpha\beta < a_2 b_2,$$

且於 a_1, a_2, b_1, b_2 之逐次各數,無論如何均有下列關係.

$$a_1 b_1 < a_2 b_2. \qquad (2)$$

若a, b 二數之一或均爲無理數,故因上式而定其積爲:

171 二正數 a, b 之積寫作 ab, 意謂介在 $a_1 b_1$ 所有諸數及 $a_2 b_2$ 所有諸數之間之一數.換言之, ab 爲以下列公式規定之一數:

$$a_1 b_1 < ab < a_2 b_2,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2 表示恆具下列關係之正數.

$$a_1 < a < a_2 \ 及 \ b_1 < b < b_2.$$

由 § 163 可知其必有一數,且僅有一數 ab; 因

1. 每個 $a_1 b_1$ 小於每個 $a_2 b_2$.

2. $a_2 b_2$無末數.且 $a_2 b_2$ 無首數.(比較 § 166,2 之證).

3. 可由下式選定 a_1, a_2, b_1, b_2 設已知任意正數 δ.

$$a_2 b_2 - a_1 b_1 < \delta.$$

因 $a_2 b_2 - a_1 b_1 = a_2(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1)$,

由 § 162 且能選定 a_1, a_2, b_1, b_2 令其

$$b_2 - b_1 < \delta/2a_2 及 a_2 - a_1 < \delta/2b_1, \qquad (1)$$

故能令 $a_2(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_2) < \delta.$ (2)

茲可選擇 a_1, a_2, b_1, b_2, 如下法:

先於 b_2 取任意特別數 b_2', 再選 a_1, a_2, 令適合於

$$a_2 - a_1 < \delta/2b_2'. \qquad (3)$$

次用依上法求得之 a_2，而選 b_1，b_2，令適合於

$$b_2-b_1<\delta/2a_2, \qquad 如(1)$$

因 $b_1<b_2$ 故 $\delta/2b_2<\delta/2b_1$ 由 (3) 可證

$$a_2-a_1<\delta/2b_1, \qquad 如(1)$$

乘法，有一或二因子爲負或零者. 令 a 及 b 表任意二已知正數，則 172

1. $a(-b)$ 及 $(-a)b$ 意爲 $-ab$.
2. $(-a)(-b)$ 意爲 ab.
3. $a\cdot 0$ 及 $0\cdot a$ 意爲 0.

$1/a$ 之定義. 令 a 爲任意正數，而 a_1，a_2 爲任意正有理數 同時令適合於 173

$$a_1<a<a_2.$$

若 a 爲無理數亦如 §165 之假設，則定 $1/a$ 之定義如下:

符號 $1/a$ 意謂以下列公式而定之一數: 174

$$1/a_2<1/a<1/a_1,$$

式中 a_2，a_2 表示恆具下列關係之任意有理數:

$$a_1<a<a_2$$

由 §163，而知其必有一數，且僅有一數 $1/a$; 因

1. $1/a_2$ 所表各數均小於 $1/a_1$ 所表各數 §106.
2. $1/a_2$ 無末數，且 $1/a_1$ 無首數.(比較 §168, 2 之證).
3. 選定任意正數 δ，茲可選出 a_1，a_2，令適合於

$$1/a_1-1/a_2<\delta.$$

設 $a_1-a_1<\delta\cdot a_1a_2$ 則 $1/a_1-1/b_2<\delta$. §§106, 117.

然設 a'_1，表 a_1 類中任意特別數，必能選擇 a_1，a_2，令其適合於 $a_1<a_1'$，及 $a_2-a_1<\delta a'^2_1$，故能 $<\beta a_1a_2$.

$1/(-a)$ 之定義. 令 a 表任意已知正數，則 $1/(-a)$ 意爲 $-1/a$. 175

176 除法. 以 b 除 a 之商(b不爲0)意爲 $a\cdot 1/b$ 之一數,即

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}.$$

$a\cdot 1/b$ 之意由前諸定義蓋已明瞭.

若 a 及 b 爲正,則由§§171,174可以下列公式而定 a/b;

$$a_1/b_2<a/b<a_2/b_1,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2, 表示具有下列關係之正有理數:

$$a_1<a<a_2 \text{ 及 } b_1<b<b_2$$

177 交換,結合 及分配定律. 玆所闡釋之演算,適合於有理數演算之推廣,減法繼加法之後而爲加法之逆,除法繼出爲乘法之逆. 終則繼加法乘法之後依法而生交換,結合,及分配諸律.

設 a, b 及 c 爲規定之任意三正數,如§170,用公式

$$a_1<a<a_2,\quad b_1<b<b_2\quad c_1<c<c_2,$$

所決定者.

則得 $$a(b+c)=ab+ac.$$

由§§166,171,$a(b+c)$ 及 $ab+ac$ 以下式定之:

$$a_1(b_1+c_1)<a(b+c)<a_2(b_2+c_2),\qquad(1)$$

$$a_1b_1+a_1c_1<ab+ac<a_2b_2+a_2c_2.\qquad(2)$$

由§120,$a_1(b_1+c_1)=a_1b_1+a_1c_1$ 及 $a(b_2+c_2)=a_2b_2+a_2c_2$.

故由(1)及(2)所定之數必同.

178 等式及不等式之法則. 此節亦能適用於前所論釋之和及積,即

從 $a<,=,$或$>b,$

因而 $a+c<,=,$或$>b+c,$

又 $ac<,=,$或$>bc,$ 設 $c>0$,

但 $ac>,=,$或$<bc,$ 設 $c<0$,

設 $a<b$, 則 $a+c<b+c$.

令 d 及 $d+a$ 爲 a 及 b 間任意二有理數，且選 c_1 令適合於 $c_1<c<c_1+a$。

因 $a<d$ 及 $c<c_1+a$，故得 $a+c<d+c_1+a$　　(1)

且因 $d+a<b$ 及 $c_1<c$，故得 $d+a+c_1<b+c$，§ 166.　　(2)

然自 (1) 及 (2) 而知 $a+c<b+c$，§ 157.

設 $a<b$ 而 $c>0$，則 $ac<bc$，證法同上.

但於此試選 c_1 令其 $c_1<c<c_1(1+a/d)$。

如 § 39，由此法而知設 $a<b$ 及 $c<d$，則 $a+c<b+d$， 179
餘類推；且如 § 50，若 a, b, c, d 爲正數時，設 $a<b$ 及 $c<d$，則 $ac<bd$，依此類推.

論漸近值. *1.* 於 § 169 已闡釋無理數之減法，茲 180
§ 162 之定義可改述如下：

設任意無理數 a 爲已知，且定 δ 爲頗小之任意有理數，必能求得有理數 a_1 及 a_2 令其與 a 之差小於 δ.

由 § 162，可得 a_1 及 a_2 令其 $a_1<a<a_2$ 及 $a_2-a_1<\delta$.

然自 § 178，$a<a_2$，而知 $a-a_1<a_2-a_1$，故 $a-a_1<\delta$.

同法，因 $-a<-a_1$，可證 $a_2-a<\delta$.

如 § 161，$\sqrt{2}-1\cdot41<\cdot01$ 及 $1\cdot42-\sqrt{2}<\cdot01$.

故謂 a_1 或 a_2 可代表 a 雖有誤差不超過 δ.

2. 於實際計算時常用無理數之漸近值，較用本數更爲普通. 設 a_1 及 b_1 各爲 a 及 b 之漸近值，則 a_1+b_1 必爲其和 $a+b$ 之漸近值. 然爲確保其誤差不超過 δ，通常須擇 a_1 及 b_1 各令其誤差不超過 $\delta/2$. 此由 §166 之證明而知之. 自 §§168, 171, 174 之證明引申之，同法可求 $a-b, ab$，及 a/b 之漸近值，令其誤差不超過 δ.

乘方及開方

181　**方冪**．無理數之方冪與有理數之方冪同形，以 a^2．a^3，……表aa，aaa，……

812　**根**．任意已知正數 b 之 m 次根書作 $\sqrt[m]{b}$ 意謂其 m 次方爲 b 之一正數；卽 $\sqrt[m]{b}$ 表示以公式$(\sqrt[m]{b})^m=b$ 所規定之正數．

爲明此定義，須示其必有一數，且僅有一數，確實存在；茲述之如下．

183　**定理**．實數組包含每個實數 b 之 m 次根．

1．設 b 爲有理數之 m 次方冪，此定理爲眞已甚明瞭．如，設 $b=8/27=(2/3)^3$，則 $\sqrt[3]{b}=2/3$．

2．設 b 非一有理數之 m 次方冪 則 b 之 m 次根爲在其 m 次方小於 b 之一切有理數 a_1，及其 m 次方大於 b 之一切有理數 a_2 之間之一實數．比較 § 151．

由 § 154 知其必有一數，且僅有一數，a，因 (1)每個正有理數爲 a_1 或 a_2 (2) 每個 a_1 小於每個 a_2 及 (3) a_1 無末數且 a_2 無首數．

茲可證 (3) 如下：

設 a_1 有一末數稱之爲 p．則 $p^m<b$，於 p^m 及 b 之間必有若干有理數．令其中一數爲 $p^m+\delta$．茲僅證可求得一有理數 $q>p$ 令適合 $p^m<p^m+\delta$，或 $q^m-p^m<\delta$；蓋於是得 $p^m<q^m<p^m+\delta<b$，故 p 非 a_1 中末數．

但 $q^m-p^m=(q-p)(q^{m-1}+q^{m-2}p+\cdots+qp^{m-2}+p^{m-1})$　§ 308．

設 a_2' 爲任意特別數 a_2，　則$q^m-p^m<(q-p)ma_2'^{m-1}$，

設 $q=p+\delta/ma_2'^{m-1}$．　則 $q-p^m$ ∴ $<\delta$．

同法可證 a_2 無首數，

此理成立，卽可迅速證明，$a=\sqrt[m]{b}$．

因$a_1<a<a_2$,得$a^m_1<a^m<a_2^m$.　　　§§ 171,181.

但b爲a_1^m所表各數及a_2^m所表各數間之僅有數.

故$a^m=b$, 卽$a=\sqrt[m]{b}$.

184 **等式及不等式之法則.**　令a及b表任意正實數,及m爲任意正整數. 則

從　　$a<,=,$或$>b$,

因而　　$a^m<,=,$或$>b^m$,　　(1)

及　　$\sqrt[m]{a}<,=,$或$>\sqrt[m]{b}$.　　(2)

可復用 § 179 而證明 (1).

設$a<b$, 則$a.a<b.b$, 卽$a^2<b^2$, 餘類推.

復自 (1) 引申 (2). 設 $a=b$, 則 $\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{b}$; 又若$\sqrt[m]{a}<$或$>\sqrt[m]{b}$, 則必$a<$或$>b$.

185 **指數法則.**　令a及b表任意二實數,而m及n表任意二正整數, 則

1.　$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.　　*2.*　$(a^m)^n=a^{mn}$

3.　$(ab)^m=a^mb^m$.

如 $a^3\cdot a^2=aaa\cdot aa=aaaaa=a^5=a^{3+2}$,　　§ 177

$(a^2)^3=a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^{2+2+2}=a^{2\cdot 3}$,　　由 1

$(ab)^3=ab\cdot ab\cdot ab=aaa\cdot bbb=a^3\cdot b^3$.　　§ 177

於m及n之任何其他正整數均同此理.

186 **關於根之定理.**　令a及b表任意正實數,及m表任意正整數, 則

$$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}.$$

因　$(\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b})^m=(\sqrt[m]{a})^m\cdot(\sqrt[m]{b})^m=ab$　　§§ 182,185,3

及　$(\sqrt[m]{ab})^m=ab$.　　§ 182

故 $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^m=(\sqrt[n]{ab})^m$.

故 $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$. §184,(2)

變數與極限

187 **變數.** 設有無窮數串

$$a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots,$$

若當指示位置之數 n 已知時，其每特項 a_n 之值已知，或已示其標號 n 之位置，其每特項 a_n 之值可知，或可計算而得，則稱此數串爲已知

算術中常用一變數，(*variables*) 代表一數串之各數，卽令其經過該數串之諸值。

如 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots \frac{n}{n+1}, \cdots\cdots$ 卽一無窮連續數．而設 x 爲歷此連續數，而逐次取得 $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots$ 諸值之一變數．

188 **極限．** 若 x 遍歷數串 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots$ 時，顯然其值繼續漸近於 1，設指定任一正數 δ．無論其如何小，$1-x$ 之差，終可變至永遠小於指定之數．如，x 至數串之第 100 項，則 $1-x$ 永遠小於 $\cdot 01$．

當 x 歷經此連續數 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots$，爲表此情形，稱 x 漸近於 1 爲其極限 (*limit*)．總之

189 設變數 x 歷經已知無窮數之各值，則稱 x 漸近於數 a，以之爲極限，設差數 $a-x$ 最後變成且永遠小於可指定之正數 δ.

注意設 x 漸近於 a 以之爲極限，僅謂 $a-x$ 變爲小於 δ 尙不圓滿，必須更謂其永遠小於 δ．

如設 x 經過數串 $\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0, \cdots\cdots$; $1-x$ 之差雖可變成小於指定之各 δ，但不能永遠小於 δ，則 x 仍不能漸近於 1 以之爲極限．

於特別值 $a-x$ 可成 0，卽 x 可至其限 a．

爲表明 x 漸近其限 a，書作 $a \doteq x$，讀作“x 漸近於 a 爲其限”，或 $lim\ x=a$，讀作“x 之限爲 a”. 190

變數 x 是否漸近於一極限，完全依照其所歷經諸數串之性質而定. 191

如，設 x 歷經連續數 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots$ 則 x 漸近於一限，設其歷經連續數 $1, 2, 3, 4, \cdots\cdots$，或連續數 $1, 2, 1, 2, \cdots\cdots$ 則 x 不能漸近於一限.

故得次之重要定理；

定理 1. 設變數 x 繼續增加，但常保持其值小於已知數 c，則 x 漸近於限，且其限爲 c 或小於 c 之一數. 192

由假設，必有 x 永不超過之若干數，令此諸數屬於 R_2 部，而 x 最後超過之其他諸數屬於 R_1 部.

則分離完全實數組爲 R_1, R_2，兩部，其 R_1 內各數均小於 R_2 內各數.

R_1 中當然無末數，由 § 160，R_2 內有一首數，稱此數爲 a，當 x 增加，必漸近於 a 爲其極限.

設 δ 可爲任何小之正數，$a-\delta$ 屬於 x 最後超過之 R_1 諸數之部，因 x 最後保持於 $a-\delta$ 及 a 之間，故與 a 之差小於 δ.

同法可證

設變數 x 繼續減少，但常保持其值大於已知數 c，則 x 漸近於極限，且其極限爲 c 或大於 c 之某數. 193

規律連續數串. 設 x 漸近於極限時，有時逐次增加，或逐次減少，故不一定. 194

如當 x 歷經連續數串，$-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots\cdots$，故有時增加，有時減少；然 x 漸近於 0 爲其極限。

若證 x 漸近於極限或否，應視 x 是否歷經下列定義所述數目 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 諸值之連續數串.

195 設連續數串 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 中能求一適當之一 a_k 項與各鄰次項數目之差之絕對值小於可指定之各正試算數 δ，則此連續數串稱爲規律的（*Regular*）.

1. 如 § 161 (1) 連續數串 1·4，1·41，1·414，……爲規律的.

其第一項 1·4與各次項之差小於 1/10；第二項 1·41與各次項之差小於 $1/10^2$，其第 n 項與各次項之差小於$1/10^n$.

δ 固可爲小數，茲能予 n 一值令 $1/10^n$ 更小；且設 k 關於 n 值表示一數能令 1·4，1·41……之第 k 項與各次項之差小於 δ 值.

例如，設與 δ 之值爲 1/500000，則得 $1/10^6<\delta$，故 1·4，1·41……之第六項與其後各鄰項之差，比此 δ 之值爲小.

2. 下列諸連續數串亦爲規律的：

$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\cdots\cdots,$　　(2)　　$\frac{3}{2},\frac{5}{4},\frac{9}{8},\frac{17}{16},\cdots\cdots$　　(3)

$-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$　　(4)　　2, 1, 1, 1……　　(5)

試觀(2)中各項均繼以較大之數；(3)中則繼以較小之數；於(4)內，時而繼以較大數，時而繼以較小數.

有時遇規律連續數串如 (5)，在某定項後之諸項均同，當然一變數歷經此種連續數串最後成爲常數，即達其極限.

3. 下面諸連續數串爲不規律的：

1，2，3，4，……，　　(6)　　$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\cdots$　　(7)

因 (6) 內一項與一後項之差恆可爲無限大，而 (7) 內可常爲 $\frac{1}{6}$，故不能小於一指定數，例如 $\frac{1}{7}$.

規律連續數串之公式. *1.* 玆以公式表 a_k 項與其後各項 a_p 之關係，由 § 63: 196

$$\text{當 } p>k \text{ 時,} \qquad |a_p-a_k|<\delta \qquad (1)$$

2. 復次，凡此種項 a_p 之 $>a_k$ 者必在 a_k 及 $a_k+\delta$ 之間，其 $<a_k$ 者必在 $a_k-\delta$ 及 a_k 之間，亦可寫作

$$a_k-\delta<a_p<a_k+\delta \qquad \text{當 } p>k \text{ 時} \qquad (2)$$

3. 由(2)，可知若諸 a_p 項中有若干小於 a_k，有若干大於 a_k，則此等項中某二項之差可大於 δ，但不能大於 2δ.

然永能求得一項 a_l 其與 $\frac{\delta}{2}$ 之關係相同於 a_k 之與 δ 之關係，在 a_l 後各二項之差之絕對值必小於 $2(\delta/2)$，或 δ，即此諸項中各二項之關係可以下列公式表之:

$$|a_p-a_q|<\delta \qquad \text{於每個 } p>q>l. \qquad (3)$$

定理2. 若變數 x 歷經諸值之數串 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n, \cdots\cdots$，爲規律數串，則 x 漸近一極限. 197

因其右方之諸數 x 最後必逐次止於其所歷經 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 之連續數串. (1)

如設 δ 及 a_k 之意如上，則 x 恆在 $a_k-\delta$ 之右，此後且達於 a_k 値，§ 196(2).

令此諸數屬於 R_1 類，而其他諸數——即 x 不能在其右方之諸數——屬於 R_2 類.

因得劃分完全實數組爲 R_1，R_2 兩部，其在 R_1 內之各數均小於 R_2 內之各數，由 § 160，知其間隔中必有一定數 a 存在。

如，設連續數爲 $-\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{4}{16}, \cdots\cdots$，則諸負有理數構成 R_1，且 0 及諸正有理數組成 R_2；而 a 爲 0.

當 x 歷經連續數串(1)，則必漸近於 a 爲其極限.

指定任意正試算數 δ，其值并不太小，因(1)爲規律的，故由 § 196 (3) 可求得 a_m 項令適合於

凡當 $q>p>m$ 時 $\qquad |a_p - a_q| < \delta/2 \qquad (2)$

但因 $a-\delta/2$ 屬於 R_1，於某項後 x 之諸值必在 $a-\delta/2$ 之右。且因 $a+\delta/2$ 屬於 R_2，此諸值中必有若干項在 a_m 之後在 $a+\delta/2$ 之左；否則 $a+\delta/2$ 屬於 I'_1，因而最後終居於其右也.

如設連續數串爲 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots$ 而 $\delta = \frac{1}{10}$，在第四項 $\frac{1}{16}$ 後 x 之一切值必在 $a-\delta/2$ 及 $a+\delta/2$ 之間，卽在 $-\frac{1}{20}$ 及 $\frac{1}{20}$ 之間.

因此 $\qquad a-\delta/2 < a_{q'} < a+\delta/2,$

或 $\qquad |a - a_{q'}| < \delta/2. \qquad (3)$

由(2)及(3)，因 $q'>m$，自 §§ 78，178 而得

凡當 $p>q'$ 時. $\qquad |a - a_q| < \delta$

換言之，在 x 達到 $a_{q'}$ 值之後，其差 $a-x$ 之絕對值漸減而小於 δ.

故 x 漸近於 a 爲其極限，§ 189.

193 **逆言之** 設 x 漸近於極限 a，則 x 所歷經 a_1，a_2，$\cdots\cdots$ $a_n \cdots\cdots$ 值諸之連續數串爲規律的.

因差數 $a-x$ 之絕對值最後化成且損減至小於各指定之正數 δ 由 § 189 可選出 a_k 令適合於

$$|a-a_k|<\delta/2 \text{ 及 } |a-a_p|<\delta/2 \qquad \text{凡當 } p>k \text{;時}$$

因得

$$|a_p-a_k|<\delta \qquad \text{凡當 } p>k\text{.時}$$

故連續數 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 爲規律的, § 196(1).

變數漸近一極限之充分必需條件爲該變數所歷經之諸值之數串爲規律數串. 199

關於極限之重要定理

本節中 a 及 b 表任意已知實數, x 及 y 表示假定其歷經已知無窮連續數串之變數.

極限 0. 由 § 189 極限定義, 卽得 200

1. 設變數 x 之絕對值最後化成且損減至小於可指定之正數 δ, 則 x 漸近於 0 爲其極限; 其逆亦眞.

2. 設 x 漸近於 a 爲其極限, 則 $a-x$ 漸近於零爲其極限; 其逆亦眞.

若 x 歷經連續數 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots$, 則漸近於極限 0; 若 x 歷經連續數串 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots$, 則 $1-x$ 漸近於極限 0.

極限爲 0 之一變數稱爲無限小(*infinitesimal*).

定理 1 設 $x \doteq 0$ 及 $y \doteq 0$, 且當 x 及 y 變時 而 A 及 B 之絕對值永遠保持小於某定數 c, 則 $Ax+By \doteq 0$. 201

指定任意正數 δ, 其值幷不太小.

因 $x \doteq 0$, x 絕對值最後損減至 $<\delta/2c$. 　　§ 200,1

因 $y \doteq 0$，y 絕對值最後損減至 $<\delta/2c$.　　200,1

故 $Ax+By$ 之絕對值最後損減至 $<2c\dfrac{\delta}{2c}$，$\therefore <\delta$，故漸近於 0 爲其極限，§200,1.

如，設 $x \doteq 0$ 及 $y \doteq 0$，則 $(xy-3)x+2y \doteq 0$.

202 註．此定理可推廣於任何有限個之變數．

如，設 $x \doteq 0, y \doteq 0$ 及 $z \doteq 0$，則 $Ax+By+Cz \doteq 0$.

203 **定理 2.** 各漸近極限之二變數之和，差，積，商之極限，等於其極限之和，差，積，商；即設 x 及 y 漸近其極限 a 及 b，則

1. $x+y \doteq a+b$.　　*3.* $xy \doteq ab$.

2. $x-y \doteq a-b$.　　*4.* $x/y \doteq a/b$,　　但 b 不爲 0.

因　$a-x \doteq 0$ 及 $b-y \doteq 0$，§200，則自 §201 而得

$$A(a-x)+B(b-y) \doteq 0. \tag{1}$$

公式 1,2,3,4 可自(1)導出．即

1. $a+b-(x+y)=(a-x)+(b-y)$　　$\therefore \doteq 0$，由(1)

即　　$x+y \doteq a+b$.　　§200,2

2. $a-b-(x-y)=(a-x)-(b-y)$　　$\therefore \doteq 0$，由(1)

即　　$x-y \doteq a-b$.　　§200,2

3. $ab-xy=(a-x)b+(b-y)x$　　$\therefore \doteq 0$，由(1)

即　　$xy \doteq ab$.　　§200,2

4. $$\frac{a}{b}-\frac{x}{y}=\left(\frac{a}{b}-\frac{x}{b}\right)+\left(\frac{x}{b}-\frac{x}{y}\right)$$

$$=(a-x)\frac{1}{b}-(b-y)\frac{x}{by}$$　　$\therefore \doteq 0$，由(1)

即　　$x/y \doteq a/b$.　　§200,2

204 **系．** 若 $x \doteq a$，則 $x^n \doteq a^n$.

205 **定理 3** 漸近於極限之一變數之 n 次根之極限等於其極限之 n 次根；即

設　$x \doteq a$，則 $\sqrt[n]{x} \doteq \sqrt[n]{a}$.

1. 設 $a=0$. 指定任意正數 δ.

因 $x \doteq 0$, x 之絕對值最後損減而 $<\delta^n$. §200,1

則 $\sqrt[n]{x}$ 之絕對值最後損減而 $<\delta$. §184

故 $\sqrt[n]{x} \doteq 0$. §200,1

2. 設 a 不爲 0,則由後面 §308 可知 $x-a$ 恰可被 $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}$ 除盡,設 $x \doteq a$,而其商 Q 不漸近於極限 0.

故由 §203(1) 可知, 置 $A=1/Q$ 及 $B=0$,則

$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}=(x-a)/Q \doteq 0$, 即 $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$. §200,2

無理數於度量中之關係

用單位量不可公度線段之長. 設一線段 S 與單位線段 s 爲不可公度(*incommensurable*),——如設 S 及 s 爲一正方形之對角線及一邊, 則可證雖分 s 至任何小, 均不能用以量盡 S,——則 §130 內之長度定義不適用於 S. 206

但有一固定無理數 a 與 s 有下面之關係:

能與單位線段 S 可公度之二線段,可屬於小於 S 及大於 S 之二類.

於 §130 內線段之長適合此二類者,可以有理數表之,茲稱爲 A_1 及 A_2,各正有理數或屬 A_1 或屬 A_2, A_1 內各數在 A_2 內各數之前,且 A_1 內無末數 A_2 內無首數*.

* 若 A_1 內有末數,則在與 s 可公度且小於 S 之諸線段中必有一極大者,如稱爲 S'.

但無此線段存在,依後面底註阿奇默德氏公理, 可求得 s 之簡約量 $\frac{s}{n}$ 小於 $S-S'$; 所以 $S'<\frac{s}{n}+S'<S$, 而 S' 不得爲小於 S 而與 S 能通約之量中最大者.

由§151，於 A_1 內諸數及 A_2 諸數之中間必有一定無理數 a 在焉，玆稱此數 a 爲 S 之長．故有次之定義：

207 凡與單位 s 不正公度之任意線段 S 之長，爲任小於 S 線段長度之一切有理數及大於 S 線段長度之一切有理數中間之無理數 a．

如 $\sqrt{2}$ 爲正方形以其一邊作單位所表對角線之長．

208 設以 s 作單位以表 S 之長爲 a，寫作 $S=as$，而 a 可爲有理數或無理數．

209 **以點繪出之實數．** 如§134內之圖，作任意正線，線上定點 O 爲原點；且取適當單位 s，以度線長，其任意點 P 至 O 之直線距離，顯然爲以 s 表示之線段 OP 之長，§§130，207．

若擬繪任意已知數 a 之圖形．卽自 O 取與 O 之距離之線長絕對値爲 a 之一點 P，此點在 O 之右或左，視 a 之爲正或負而定．

設 a 爲有理數，必能將 a 確實繪出，§134．若設 a 爲無理數，則 P 常不能繪出．換言之可假定 P 能存在，則該線上必有一單獨點 P，位在小於 a 之圖示有理數之諸點及大於 a 之圖示有理數之諸點之中間*．

---

* 此非討論幾何公理之處；但應注意下面關於度量本旨之原理．

1．阿奇默德氏公理，設 s 及 S 表二線段 $s<S$，必能求一整數 m 致 $ms>S$ 者．

2．連續之公理 設一正線內所有諸點分爲 R_1 及 R_2 兩部，令其 R_1 內各點在 R_2 內各點之左，則 R_1 內必有一末點或 R_2 內有一首點．

(1) 阿奇默德氏公理含於凡各線段均能度量之假定，第一步以 s 作單位度 S 以求整數 m，因得 $(m-1)s<S<ms$．

(2) 公理 1 及 2 可證§209"各已知無理數 a 必有一相當點 p 存在"之假定．

因 a 劃分有理組兩爲部分，玆各命爲 B 及 C，其相當於各數之諸點各

逆言之 設 P 爲已知，必能度 OP 以得 a，至少可求得其漸近值，其結果符號屬於＋或－視 P 在 O 之右或左而定． 210

如設 P 在 O 之右．則可沿 OP 截 s 五倍，沿此部分尙超出 s 之十分之一分割之七倍，且沿此部分尙超出 s 之百分之一分割之六倍，於是 5.76 爲 a 至第二位小數之値．

觀此情形可於一切實數及線上諸點之間創立一一對應之關係，由 § 2；且設 a 及 b 表任意二實數，而 P 及 Q 表其相應點，P 在 O 之左或右依 a 小於或大於 b 而定． 211

如設 a 及 b 爲正及 a<b，且設 c 表 a 及 b 間之有理數，而 R 表其相應點，由 § 206 得

$$OP<OR \text{ 及 } OR<OQ,\text{ 故 } OP<OQ.$$

稱爲 B 點及 C 點，茲須證者在線內有一定點 P，能將一切 C 點與一切 B 點隔開也．

先指定 B 點及中間所有無理數之點屬於 R_1 部，與其右方之一切諸點屬 R_2 部，且令 P 表示以 2 限定之間隔點．

次指定 C 點及中間所有各點屬於 S_2 部與左方所有各點屬於 S_1 部，且令 Q 表示以 2 限定之間隔點．

則 P 及 Q 點必相合．設不重合，令 PQ 表其中間線段．自 1，可求一整數 m，令

$$m.PQ>s,\text{ 故 } PQ>s/m.$$

然此不可能，因能自 B 選一數 b，自 C 選一數 c，令適合於 $c-b<1/m$，且設 L 及 M 各爲相當與 b 及 c 之點，則得

$$LM<s/m,\text{ 及 } PQ<TM,\text{故 } PQ<s/m.$$

卽此處僅有一點 P 或 Q，能適合於 § 209.（卽與 a 相當之點）.

(3) 末後，試觀相當於 2 之實數組有 § 160 所述之性質及相當於 1 者其下列之性質．

設 **a** 及 **b** 爲任意二正實數，必能求一整數 m，令適合於其 **mb>a.**

因自 §§ 108,176,178 能選一整數 m，令 **m>n/b** 則 **mb>a.**

對於 § 154 所述實數組之間隔，則實數組能不具此性質——至少亦須棄捨其他若干性質，蓋能創造多於一個之無理數．

如設各有理數爲 a_1 或 a_2 且 $a_1<b<c<a_2$ 於任何 a_1，a_2，均能適合，得 $c-b<a_1-a_1$，§ 178 及 § 163 之證

雖指定任何小之正數δ，然不能求一整數m，令其足大以致適合於 $m(c-b)>\delta$．

設爲可求，則得 $c-b>\delta/m$，此不可能；因 $c-b<a_2-a_1$，且能選定 a_1,a_2 令 $a_2-a_1<\delta/m$．

212 **定理.** 設以 T 作單位表 S 之長爲 a, 又以 s 表 T 之長爲 b, 則以 s 作單位表 S 之長爲 ab.

1. 設 a 及 b 爲有理數.

令 $\mathrm{a}=a/b$, 及 $\mathrm{b}=c/d$, 式中 a,b,c,d 均表整數.

因 S 含 T 之 b 分之一之 a 倍, § 130, 故 bS 必含 T 之 a 倍, 即

$$bS=aT. \tag{1}$$

同理 $$dT=cs. \tag{2}$$

但由(1)及(2)即得

$$bdS=adT,\text{ 及 } adT=acs,$$

故 $$bdS=acs.$$

即以 s 度量 S 之長爲 $\frac{ac}{bd}$ 或 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$. § 130

2. 設 a 及 b 有一或二數爲無理數.

令 S_1 及 S_2 表與 T 公度之任意線段, 令適合

$$S_1<S<S_2,$$

且令 a_1, a_2 爲以 T 作單位所表 S_1,S_2 之長, 即

$$S_1=a_1T\text{ 及 }S_2=a_2T,\text{ 式中 } a_1<\mathrm{a}<a_2. \quad § 208$$

同法, 令 T_1 及 T_2 表與 s 可公度之任意線段, 令適合

$$T_1<T<T_2.$$

且令 b_1, b_2, 爲以 s 作單位所表 T_1, T_2 之長, 則

$$T_1=b_1s,\text{ 及 }T_2=b_2s,\text{ 式中 } b_1<\mathrm{b}<b_2.$$

因 $S_1=a_1T$ 及 $T>T_1$, 與 $T_1=b_1s$,

自前段 1 而得 $$S_1>a_1b_2s.$$

同理, $$S_2<a_2b_2s.$$

因而 $$a_1b_1S<S_1<S<S_2<a_2b_2s,$$

故得 $$a_1b_1s<S<a_2b_2s.$$

上述諸數 a_1b_1 及 a_2b_2 爲以 s 作單位所表之線段之長, 各表於及大於 S 者, 故在 a_1b_1 及 b_2b_2 一切數之間之一數 ab 由 § 171 知爲以 s 作單位所表 S 之長, § 207.

系．設以 s 作單位表 S 及 T 之長各為 a 及 b，則以 T 213
作單位表 S 之長為 a/b．

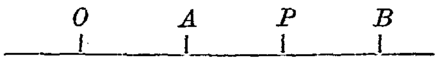
令 T 作單位所表 S 之長為 x，而以 s 作單位表 T 之長為 b，故以 s 量 S 之長為 xb，§ 212．

前已假定，以 s 量 S 之長為 a．

則 $$\mathrm{xb}=\mathrm{a},$$

故 $$\mathrm{x}=\mathrm{a}/\mathrm{b}.$$

連續變數． 吾人最熟直覺之一為連續運動． 214



設 P 點沿 OAB 線自 A 繼續運動至 B；且令 a，x 及 b 各表 OA，OP 及 OB 之長，O 為原點．

按 § 209 之假定，線段 AB 包含 a 及 b 間之各數之一點，自然當 P 自 A 向 B 運動時必經過之，故 P 自 A 至 B 連續運動時，x 自 a 值增至 b 值經過中間一切諸值，或曰 x 連續運動自 A 以至 B．

若繪出 x 之變動當然確屬重要，其諸值中之任何已知一數，實無隨後相鄰之值．設以 x 作數學的考論，當以下列之規定為滿意：(1) x 可於 a 及 b 間取任何已知值，及 (2) 設 p 及 q 表此值中之任意兩個，而 $p<q$，則 x 在取 q 值之前取 p 值．當 x 只有第一性質時有時亦可稱之為連續變數．

比． 令 M 及 N 值任意二同類量．若 M 及 N 同表線 215
段，如 §§ 81，130，207 所定之線長之各數，茲稱之為以 N 所表 M 之度數(*measure*)，或稱 M 與 M 之比(*ratio*)．

故§§212 213 之定理可以線長應用於任意同類量之度數或比。於特例

216 設以同單位所表 M 及 N 之度數各爲 a 及 b，則 M 與 N 之比爲 a/b.

V. 虛數及複素數

純虛數

217 實數組不含負數之偶次根；因一切實數之偶次方冪均爲正，故實數組不含 -1 之平方根。

遇此困難，故創一種新符號組稱爲虛數（*imaginary*），或複素數（*Complex numbers*）。

218 此新符號之最簡單者爲 i，稱爲虛數單位。用此單位及實數 a，構成符號 ai，此數亦可視如實數組中依其係數 a 之順序而排列者。茲得一新連續數之順序數組，稱爲純虛數。

展開實數組如前，可先作成虛數之完全基度。

$$\cdots\cdots-3i,\ -2i,\ -i,\ 0,\ i,\ 2i,\ 3i,\cdots\cdots,$$

然後用分數係數以推廣虛數於稠密組，最後用無理係數導虛數於連續組。

$2i$ 不過爲此新數中之一名稱，其僅有之性質爲於新順序組組中有一定位置而已。然於乘法可知 $2i$ 尙能表示 $2\times i$ 或 $i\times 2$ 之積。各純虛數 ai 均同此理。

於特例 $0i$ 等於 0，故於 $0i$ 可書作 0。

注意此 0 爲實數組及純虛數組唯一之公共數。

茲於此新數創造加法及乘法之演算． 此法可以下式定之： 219

$1.\quad ai+bi=(a+b)i,\qquad 2.\quad a\cdot bi=bi\cdot a=abi,$

$3.\quad ai\cdot bi=-ab.$

如 3，二純虛數 ai 及 bi 之積爲實數 $-ab$，乃乘其 ai 及 bi 之係數之積而變其結果之符號以得者．

茲定乘法方法如 § 136．即 $(ai)^2=ai\cdot ai$．

純虛數組包含實數內一切負組數之平方根，即： 220

$$\sqrt{-1}=i \quad 及 \quad \sqrt{-a^2}=ai.$$

因得 $\qquad i^2=i\cdot i=1i\cdot 1i=-1.$ § 219．3

故 i 爲 -1 之平方根，§ 138． 茲以 $\sqrt{-1}$ 表此根，即得 $i=\sqrt{-1}$．

同法， $-i$ 亦爲 -1 之平方根，表以 $-\sqrt{-1}$．

同理， 因 $(ai)^2=ai\cdot ai=-a^2$，故得 $ai=\sqrt{-a^2}$．

複 素 數

爲確知一數組包含負數之較高偶次根，遂創複素數，此數形如 $a+bi$ 乃以＋號連結實數 a，與純虛數 bi 而構成者．此種亦常稱爲虛數． 221

在未規定複素數加法之前，$a+bi$ 僅視爲一單純符號，而視符號"＋"爲此符號之一部．

因 $a=a+0i$ 及 $bi=0+bi$，故實數及純虛數均含於複素數中． 222

複素數可視爲下述二排列中之元： (1) 凡具等值 b 之一切 $a+bi$ 數在同一列，按其 a 值之順序自左而右排成橫列； 223

(2)凡具等值 a 之一切 $a+bi$ 數在同一行，按其 b 值之順序自下而上排成縱行．故可假設任一複素數，乃於此“二度序數排列”中由其位置而定者．

後面 § 238 將述此排列於 a, b 一切諸值之圖解法．茲表 a 及 b 之整數值者如下：

……	· ·	· ·	·	· ·	· ·	……
……	$-2+2i$	$-1+2i$	$2i$	$1+2i$	$2+2i$	
……	$-2+i$	$-1+i$	i	$1+i$	$2+i$	……
……	-2	-1	0	1	2	……,
……	$-2-i$	$-1-i$	$-i$	$1-i$	$2-i$	……
……	$-2-2i$	$-1-2i$	$-2t$	$1-2i$	$2-2i$	……
……	· ·	· ·	·	· ·	· ·	……

此排列亦可釋爲以諸列(或行)爲元之順序數組，§ 17，而其每列(或行)則爲式 $a+bi$ 之符號之順序數組．

224　**等式定義**．設二複素數在上述二度序數組中據同一位置，則稱爲相等．如

225　設 $a+bi=c+pi$，　則 $a=c$ 及 $b=d$；　其逆亦眞．於特例，設 $a+bi=0$，則 $a=0$ 及 $b=0$；及其逆亦眞

二不等複素數．如 $2+3i$ 及 $3+i$ 不能謂其一數小於或大於——卽先於或後於——他數，因複素數不能作成一單純序數組故也．

226　**加，減，乘之定義**．　二複素數 $a+bi, c+di$ 之和．差，與積爲由下列方程作成之第二種各項之複素數．

1. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

2. $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.

3. $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

按1及2，加與減爲反演算.於1之特例，

$(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(0+b)i=a+bi$; 卽由定義1，$a+bi$ 爲 a 及 bi 之和.

此諸定義與交換，結合，分配諸律亦能相合，實則化合此諸定律於上述定義而得者也．如

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=(a+bi)c+(a+bi)di\\&=ac+bi\cdot c+a\cdot di+bi\cdot di\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i,\text{ 因 } i^2=-1.\end{aligned}$$

系．設一因子爲零則其積爲零. 227

因 $(a+bi)(0+0i)=(a\cdot 0-b\cdot 0)+(a\cdot 0+b\cdot 0)i=0$.

除法．玆定 $c+di$ 除 $a+bi$ 之商爲以 $c+di$ 乘之而仍得 $a+bi$ 之複素數．設 $c+di$ 不爲 0，則其商僅有一數，卽下列方程右邊爲複素數: 228

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

若 $c+di$ 爲 0，則無定商存在.

因上式右邊與 $c+di$ 之積爲 $a+bi$，讀者可用§226極易證明之.

玆發現此數卽爲其商如次:

設有以 $c+di$ 乘之而得 $a+bi$ 之一數存在，命之爲 $x+yi$

則 $(x+yi)(c+di)=a+bi$. (1)

或 $(cx-dy)+(dx+cy)i=a+bi$. (2)

故 $(cx-dy)=a$ 及 $dx+cy=b$. (3) §225

解此二方程式之 x, y，得

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\text{ 但 } c^2+d^2=0\text{ 除外}. \quad (4)$$

且因 (4) 爲僅能滿足 (3) 之 x, y 值之二方程，故相當數 $x+yi$ 爲以 $c+di$ 乘之而得 $a+bi$ 之僅有數.

由 (4) 設 $c^2+d^2=0$，按商之定義當然知其無意義. 然設 $c^2+d^2=0$ 則必 $c=0$ 及 $d=0$，否則一正數等於 0 矣. 且若 $c=0$ 及 $d=0$，其除數 $c+di$ 爲 0.

229 **交換，結合，及分配定律.** 上面規定之演算，當然包含與諸實數之相當計算. 下面示其仍合於交換，結合，及分配定律.

如 $$(a+a'i)(b+b'i)=ab-a'b'+(ab'+a'b)i, \qquad (1)$$

$$(b+b'i)(a+a'i)=ba-b'a'+(b'a+b'a)i, \qquad (2)$$

然 (1) 及 (2) 之右邊相等，由 § 177.

故 $$(a+a'i)(b+b'i)=(b+b'i)(a+a'i).$$

其餘定律亦可以同樣成立.

230 **相等法則.** 令 $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ 表任意複素數.

1. 設 $\mathrm{a}=\mathrm{b}$, 則 $\mathrm{a}+\mathrm{c}=\mathrm{b}+\mathrm{c}$.
2. 設 $\mathrm{a}+\mathrm{c}=\mathrm{b}+\mathrm{c}$, 則 $\mathrm{a}=\mathrm{b}$.
3. 設 $\mathrm{a}=\mathrm{b}$, 則 $\mathrm{ac}=\mathrm{bc}$.
4. 設 $\mathrm{ac}=\mathrm{bc}$, 則 $\mathrm{a}=\mathrm{b}$, 但 $\mathrm{c}=0$ 除外.

1. 令 $\mathrm{a}=a+a'i$, $\mathrm{b}=b+b'i$, 及 $\mathrm{c}=c+c'i$.

設 $$a+a'i=b+b'i,$$

則 $a=b$ 及 $a'=b'$. § 225

且 $a+c=b+c$ 及 $a'+c'=b'+c'$, § 178

故 $(a+c)+(a'+c')i=(b+c)+(b'+c')i$, § 225

即 $\mathrm{a}+\mathrm{c}=\mathrm{b}+\mathrm{c}$. § 226

2. 設 $\mathrm{a}+\mathrm{c}=\mathrm{b}+\mathrm{c}$.

即得 $\mathrm{a}+\mathrm{c}+(-\mathrm{c})=\mathrm{b}+\mathrm{c}+(-\mathrm{c})$. 由 1

故 $\mathrm{a}=\mathrm{b}$. § 226

3 及 4. 此二法則之證各與 1 及 2 同.

系. 設一乘積爲零,則其因子之一必爲零. 231

由 § 230,4 用 § 76 之理卽得.

複素數之絕對值. 正實數 $\sqrt{a^2+b^2}$ 稱爲 $a+bi$ 之絕對 232
値或數値,以 $|a+bi|$ 表之. 卽由定義,

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

如, $|2+i|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}.$

設 $b=0$, 此絕對值之定義卽化爲前章已述之實數絕對值, § 63. 於此定義之幾何解釋參看 § 239.

兩複素數稱第一數之數値小於, 等於, 或大於第二數, 233
而謂第一數之絕對値小於,等於,或大於第二數.

如 $2+3i$ 之數値大於 $3+i$.

因 $|2+3i|=\sqrt{13}$ 及 $|3+i|=\sqrt{10}$, 而 $\sqrt{13}>\sqrt{10}$.

定理 1. 二複素數之積之絕對值等於其絕對值之積. 234

令此二數爲 $\mathrm{a}=a+a'i$ 及 $\mathrm{b}=b+b'i$.

因 $$\mathrm{ab}=ab-a'b'+(ab'+a'b)i, \qquad § 226$$

得 $$|\mathrm{ab}|=\sqrt{(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2}. \qquad § 232$$

若完成此項計算, 則得

$$(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2=(a^2+a'^2)(b^2+b'^2).$$

故 $$\sqrt{(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2}=\sqrt{a^2+a'^2}\sqrt{b^2+b'^2}. \qquad § 186$$

卽 $$|\mathrm{ab}|=|\mathrm{a}|\cdot|\mathrm{b}|.$$

定理 2. 二複素數之和之絕對值不能超過其各絕對値 235
之和.

用 § 234 之記法.

假定 $$\sqrt{a^2+a'^2}+\sqrt{b^2+b'^2}=\sqrt{(a+b)^2+(a'+b')^2} \qquad (1)$$

必因 $$a^2+a'^2+b^2+b'^2+2\sqrt{(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)}$$
$$\geqq a^2+b^2+a'^2+b'^2+2(ab+a'b') \qquad § 184$$

∴必因 $\sqrt{(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)} \geqq ab+a'b'$ § 178

∴必因 $a^2b^2+a'^2b^{\ 2}+a^2b^{\ 2}+{}'a^2b^2$

$\geqq a^2b^2+a'^2b'^2+2aba'b'$ § 184

∴必因 $a^2b'^2+a'^2b^2 \geqq 2aba'b'$ § 178

∴必因 $(ab'-a'b)^2 \geqq 0$ (2) § 178

但 (2) 常眞,因各實數之平方爲正(或 0)故也. 故(1)常眞——定理 2 因以證明.

如, $|2+i|=\sqrt{5}$ 及 $|1+3i|=\sqrt{10}$.

但 $|(2+i)+(1+3i)|=5$,而$5<\sqrt{5}+\sqrt{10}$.

236 **冪及根.** *1.* $a+bi$ 之 n 次冪書作 $(a+bi)^n$, 意卽各數均爲 $a+bi$ 之 n 個因數之積.由 § 226,3 可知其積仍爲複素數如 $c+di$ 者.

可由 § 185 證明指數定律仍可適用於複素數之方冪.

2. 設 $(a+bi)^n=c+di$, 則稱 $a+bi$ 爲 $c+di$ 之一 n 次根, 且以 $\sqrt[n]{c+di}$ 表之.

後來尙可證明凡已知複素數均有 n 個 n 次根:換言之,卽複數組中有 n 個不同之數,其 n 次冪均等於 $c+di$.

如, $(1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2})^2=1/2+2i/2-1/2=i$, 如 $1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}$ 數爲 i 之平方根,故爲 -1 之四次根, -1 之其他三根爲

$$-1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2}.$$

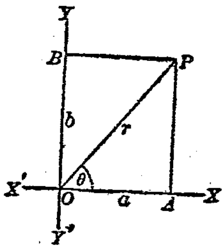
237 **總結論.** 關於數組似無須再行擴充.因如 § § 226,236 所示虛數組已能應付一切四種基本演算與開方之需要. 且當用實數以作他種演算時, 則虛數在數學中有相當位置,——如 § 140 求數之對數之演算, 卽其一例,—— 此種計算須用無窮級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ 其諸項均爲複素數者; 且設級數有一總和,其和亦爲複素數.

複素數之幾何表示法

複素數可以平面上諸點繪出之，其點稱爲相當數之圖形. 238

取任意二直線 $X'OX$，$Y'OY$ 互相直交於原點O；且用定單位線段以度線長.

1. 茲於 $X'OX$ 上與以s作單位所表自 O 之距離爲 $|a|$ 者之一點 A 表各實數 a，§209，取 A 於 O 之右或左，視 a 之爲正或負而定.



2. 次於 $Y'OY$ 上與 O 之距離爲 $|b|$ 者之一點 B 表各純虛數 bi，取 B 於 O 之上或下視 b 之爲正或負而定.

3. 茲以下述作法所得之 P 點表各複素數 $a+bi$. 先求 a 及 bi 之圖形 A 及 B，如 1 及 2 然後過 A 及 B 作線各平行於 $Y'OY$ 及 $X'OX$，二線相交之 P 點即 $a+bi$ 之圖形.

茲稱 $X'OX$ 爲實數軸及 $Y'OY$ 爲純虛數軸.

由此法可導複素數組與平面內諸點之集團成一一對應之關係，§2. 茲更得複素數組之二度順數序之完全表示法. §223

觀此可知凡有同一虛數部分之諸數之圖形，必在 $X'OX$ 之同一平行線上，及有同一實數部分之圖形，必在 $Y'OY$ 之同一平行綫上.

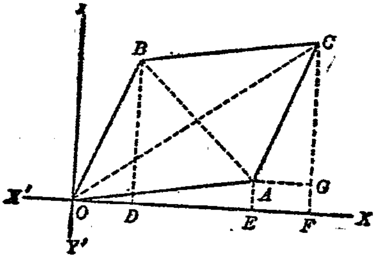
任意複素數之絕對值爲其圖形與原點之距離. 239

如上節 OA 及 AP 之長各爲 a 及 b，故 OP 之長爲

$$\sqrt{a^2+b^2} \text{ 或 } |a+bi|，§232.$$

二複素數$a=a+a\,i$，$b=x+b\,i$ 之和及積之圖形可求得如下: 240

已知 A 及 B 各爲 a 及 b 之圖形．連 OA 及 OB 且畫全平行四邊形 $OABC$．則 C 爲 a+b 之圖形．



作垂線 BD, AE, CF, AG．則 a, a′, b, b′ 各爲 OE, EA, OD, DB 之長，而 ODB 及 AGC 爲全同三角形．

今 $OF=OE+EF=OE+OD=a+b$ 之其長．

$FC=FG+GC=EA+DB=a'+b'$，之其長．

故 C 爲 $a+b+(a'+b')i$，或 a+b 之圖形，§226，1．

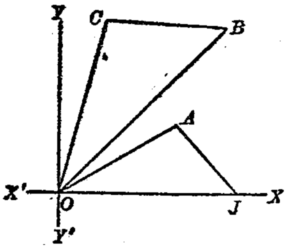
設 O, A, B 在一直線上（且時常）可於 OB 之引長線上，作 AC 等於 OB 卽得 C．

因 $OC=OA+AC$，卽 $=OA+OB$，因得 $|a+b|=|a|+|b|$．

a−b 之圖形卽 a+(−b) 之圖形．

已知 a 及 b 之圖形爲 A 及 B，且令 I 表 1 之圖形．連 OA, OB, IA，在 OB 上作三角形 OBC 相似於 OIA．設令 OB 繞 O 旋轉至 OX，則 OC 落於 OA 上．則 C 爲 ab 之圖形．

此法將於後來證明之，且自此導出作商及方冪之圖形諸法．設 $b=i$，則 OC 爲以 OA 繞 O 逆時針方向轉 90°．



241　各複素數之恆等關係可移用幾何定理解釋之．故虛數可表實際事物之關係．

如 $(a+b)/2=a+(b-a)/2$ 表示平行四邊形之對角線互被平分；因 $(a+b)/2$ 及 $a+(b-a)/2$ 之圖形爲第一圖內 OC 及 AB 之中點 §240．

第二編　代　數

I. 關於用文字表數之初步研究

常數與變數. 代數學中常用文字表任意種類之數. 如 242
公式 $ab=ba$,字母 a 及 b 表任意二數, 此公式意爲:以任意第一數乘任意第二數之積等於以第二數乘第一數之積.

然在代數研究中, $x+b$ 中之 x 與 b 兩文字所表數之意義,仍須加以下之區別,始覺方便.

第一. 茲視其一字 b 含有任意指定之特別值首先規定之,然後保留於一切討論之中. 茲稱此文字爲已知字或已知數或常數(*Constant*).

第二. 反之,在討論問題中, 視其他文字 x 始終可予以任意可能之值,且可自任一值變至任一他值. 茲稱此文字爲變數(*Variable*).

未知文字. 但文字亦可用以表示問題中所求之值. 茲 243
稱此文字爲未知字或未知數.

惟不能如常數或變數而予未知字以任意之值.

如, 於方程 $2x-5=0$, x 爲未知字,其值頗易求得爲 $5/2$. 於 $2x-5$ 式可予 x 以任意值,然於方程式 $2x-5=0$ 則除 $5/2$ 外不能予 x 以他值.

244 **文字之選擇.** 選擇文字之必要限制爲一字不能同時代表二數.

通常以前諸字母表已知數或常數,如 a, b, c; 而以末後諸字母表未知數或變數,如 x, y, z.

於字母之外有時如以小撇或附碼如 a', a'', a''', 讀作"a 第一", "a 第二", "a 第三"; 而 a_0, a_1, a_2, 讀作"a 附零", "a 附 1", "a 附 2".

245 **文字計算.** 當以文字 a, b, c 表諸數時, 則吾人僅能指出用算術結合此等數之結果. 如加 b 於 a 僅指作成代數式 $a+b$, 故即稱爲 a 及 b 之和. 同理, b 乘 a 之積爲 ab 式.

故上述之文字式表諸數, 可以算術方法演之, 但不能直接用各式之値運算, 因其値未尙知故也. 今只能以適當之演算符號結合各式, 然後以不影響其値之方法化簡之.

對於和及積, 僅變其形而不影響其値之法則, 已見 §68, 玆總述之於下:

1. $a+b=b+a$.   *2.* $a+(b+c)=(a+b)+c$.

3. $ab=ba$.   *4.* $a(bc)=(ab)c$.   *5.* $a(b+c)=ab+ac$.

公式 1 至 5 亦可視爲加法及乘法之定義, 其他法則亦同此.

如，加 $2x+3y$ 及 $4x+5y$ 意僅謂代數式 $2x+3y+(4x+5y)$ 用公式 1 至 5，加其所設數化，爲最簡式，於是得

$$2x+3x+(4x+5y)=2x+3y+4x+5y \qquad \text{由 } 2$$
$$=2x+(3y+4x)+5y=2x+(4x+3y)+5y \qquad \text{由 } 2 \text{ 及 } 1$$
$$=2x+4x+3y+5y \quad =(2x+4x)+(3y+5y) \qquad \text{由 } 2$$
$$=(2+4)x+(3+5)y=6x+8y, \text{即所求之和.} \qquad \text{由 } 3 \text{ 及 } 5.$$

演算之基本法則

依上節所述，加，減，乘，除，乘方，及開方可以下列法則及公式規定於代數學之定義，茲稱之爲演算之基本法則． 246

於本書第一編所創造之各類諸數各公式中，文字 a, b, c 恆表定數，而等號 $=$，表示"兩數相同"．

加法． 加 b 於 a 之結果爲代數式 $a+b$．茲稱此式爲 a 及 b 之和．此式必有一值，即於 a 及 b 之任何予值而僅有一值，於特例，$a+0=0+a=a$． 247

加法爲交換及結合演算；即適合於 §§ 34, 35 之二定律： 248

$$a+b=b+a, \qquad a+(b+c)=(a+b)+c.$$

下面之相等法則爲和之眞實根據 § 39． 249

$$\text{設} \quad a=b, \qquad \text{則} \quad a+c=b+c.$$
$$\text{設} \quad a+c=b+c, \qquad \text{則} \quad a=b^{*}.$$

減法 減爲加之逆，§ 55．已知任意數 a 及 b，必有一數，且僅有一數可加 b 而得 a 者，茲稱此數爲自 a 減 b 所得之餘數，而以代數式 $a-b$ 表之．故由定義， 250

* 後面將知若 c 爲無限，則此法不適用．

$$(a-b)+b=a.$$

於特例，可以 $-b$ 表 $0-b$.

251 **乘法.** 以 b 乘 a 之結果爲 ab 式. 稱 ab 爲以 b 乘 a 之積. 此式於 a 及 b 之任何予數必有一值，且僅有一值.

於特例，$a\cdot 0=0\cdot a=0$，無論 a 爲任何定值.

若 b 爲正整數，$ab=a+a+\cdots\cdots$ 至 b 項.

252 乘法爲交換及結合之演算，且關於加法爲分配演算；即合於 §§ 45—47 節之三定律:

$$ab=ba, \quad a(bc)=(ab)c, \quad a(b+c)=ab+ac.$$

253 下列關於乘積之等式法則亦屬眞確，§§ 75, 76:

設 $a=b$，　則 $ac=bc$.

設 $ac=bc$，　則 $a=b$，　但 $c=0$ 除外*.

設 $ac=0$，　則 $a=0$，　或 $c=0$.

254 **除法** 除爲乘之逆，§ 124 已知任意二數 a 及 b；除 b 爲 0 外，必有一數，且僅有一數以 b 乘之而得 a 者. 茲稱此數爲以 b 除 a 所得之商而以代數式 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 表之. 故由定義

$$\left(\frac{a}{b}\right)b=a, \text{ 但 } b=0 \text{ 除外}.$$

255 **乘方.** 乘方爲重複乘法之一種，以 a^n 表 $a\cdot a\cdots\cdots$ 至 n 因子之連乘積，而積之爲 a 之 n 次冪(*nth power*).

---

* 俟後將知，設 c 爲無限，此法不適用.

於符號 a^n，稱 n 爲指數 (*exponent*)，而 a 爲其底 (*base*)。

乘方或增冪適合於下之三定律，稱爲指數定律，§185 256

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},\quad (a^m)^n = a^{mn},\quad (ab)^n = a^n b^n.$$

下列爲方冪之等式法則，§184： 257

設 $a=b$，　則 $a^n=b^n$。

設 $a^2=b^2$，　則 $a=b$，或 $a=-b$。

此第二法則及其通則詳於後編。

開方．開方爲乘方之逆算之一種，§§138,140．已知任意正數 a，必有一正數，且僅有一正數，其 n 次冪等於 a 者．茲稱此數爲 a 之 n 次主根，而以 $\sqrt[n]{a}$ 表之，設 $n=2$，則以 $\sqrt{a}$ 表之．故由定義 258

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

然此正數 $\sqrt[n]{a}$，並非 n 次冪等於 a 者之僅有數．俟後將知其 n 次冪等於 a 者固有 n 個不同之數；且不僅設 a 爲正始爲眞確，而 a 爲任何他種之數亦眞．

設 a 爲正及 n 爲奇，則 $-a$ 之 n 次主根爲 $-\sqrt[n]{a}$。

上法之逆理．　茲稱上述之相等諸法一部稱等式法則；其餘可稱爲結合法則(*rules of combidatson*)。 259

注意一切結合法則及等式法則於和爲可逆的，但等式法則於積及方冪則不完全可逆。

如，分配定律 $a(b+c)=ab+ac$，此卽結合法則之一，茲可以 $ab+ac$ 代 $a(b+c)$，或逆之，以 $a(b+c)$ 代 $ab+ac$，

復次，設 $a=b$，常可斷定 $a+c=b+c$，且逆之，設 $a+c=b+c$，則 $a=b$.

又設 $a=b$，常可斷定 $ac=bc$，然其逆，設 $ac=bc$，尙須知 c 不爲 0 始能斷定 $a=b$.

自 $a=b$ 常能得 $a^2=b^2$，但自 $a^2=b^2$，則能得 $a=b$ 或 $a=-b$.

260 **不等法則.** 公式 $a\neq b$ 意爲"a 不等於 b".

二已知不等實數 a 及 b 必有一代數之值較大而他數之值較小，§ 62.

設 a 較大而 b 較小，寫作

$$a>b \text{ 或 } b<a.$$

於特例，$a>0$ 或 $a<0$，視 a 爲正或負而定.

261 於任意已知實數 a, b, c，由 § § 173,184 得下列法則：

1. 設 $a=b$ 及 $b=c$，則 $a=c$.
設 $a=b$ 及 $b<c$，則 $a<c$.
設 $a<b$ 及 $b<c$ 則 $a<c$.

2. 依 $a<, =,$ 或 $>b$,
推知 $a+c<, =,$ 或 $>b+c$,
及 $ac<, =,$ 或 $>bc$，設 $c>0$;
但 $ac>, =,$ 或 $<bc$，設 $c<0$.

3. 設 a 及 b 爲正,
依 $a<, =,$ 或 $<b$,
推知 $a^n<, =,$ 或 $>b^n$;
及 $\sqrt[n]{a}<, =,$ 或 $>\sqrt[n]{b}$.

如前所指示，2 及 3 下之法則只含＝號者亦適用於虛數. 設 $a=b$ 及 $b=c$，則 $a=c$，此法於虛數亦眞；故可稱爲等式總則.

代數符號之擴充

除前諸節所釋之符號外，代數學中常用下之符號． 262

1. 各種總括符號，如前用之符號（ ），及［ ］，{ }，用以總括代數式，而視如簡單符號者．

2. 複號 $\pm$，讀作"加或減"及$\mp$讀作"減或加"．

如 $a\pm b\mp c$，意為 $a+b-c$ 或 $a-b+c$，其上層符號須連帶讀出，下層符號亦然．

3. 符號 $\therefore$ 表「故」或「所以」．

4. 符號……表類推或等等．

6. 又，$\because$ 因為；$\not>$ 不大於；$\not<$ 不小於；$\gtrless$ 大於或小於．

代　數　式

凡用上述演算結合文字或文字與數所成之式均稱為代數式 (*algebraic expression*)． 263

註．式中所含一種演算之次數，有有限者，如 $1+x+x^2$，有無限者，如 $1+x+x^2+\cdots\cdots$ 以至無限．茲僅研究有限式． 264

通常代數式依其變數（或未知數）文字在式中情形而分類如下： 265

設表除數之式不含變數文字，則稱此代數式為整式(*integral*)；否則稱為分式(*fractional*)． 266

如試 x 及 y 為變數文字，a, b, c，為常數，

則　　ax^2+bx+c 及 $\frac{y}{b}+\sqrt{x}$ 為整式，

但　　$y+\frac{1}{x}$　　及 $\frac{2+x}{1-x}$ 為分式．

267　凡不含根式，或含根式而根號下無變數之式稱爲有理式，如 $a+\sqrt{b}\,x$ 爲有理式，而如 $\sqrt{y}+\sqrt{y-x}$ 則爲無理式.

268　註. *1.* 用此諸名稱於一式．須假定該式已化爲最簡式．如 $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ 爲有理式，因能化爲有理式 $x+y$ 故也.

2. 整式，分式，等等名稱僅指其形式而言，若用之於該式之眞數值，則整式未必均爲整數，分式未必皆爲分數，餘類推．如 $x+2$ 爲有理整式，若 x 表一整數則該式表一整數．然設 x 表各分數，則該式表一分數，於 x 之各無理數值．則表一無理數.

269　當代數式 A 爲由＋，－號結合若干部分而成時，各部分連帶其前之符號稱爲 A 式之項(*terms*).

如下式

$$a+a^2c-(b+c)+[d+e]-\{f+g\}+\overline{h+i}+\left.\begin{matrix} j \\ +k \end{matrix}\right| -\frac{l+m}{n+p}$$

之諸項爲 $a, a^2c, -(b+c)$ 等等，其諸項本身含有多於一項者均以括弧或其他括號括之，§ 262，1.

270　依整式之項數而稱爲獨項式(*monomials*)，二項式(*binomials*)，三項式(*trinomials*)，及總稱多項式(*polynomials*).

271　與任意獨項式中相乘之常數因子稱爲變數因子之積之係數(*coefficient*).

如 $4ab^2x^3y^4$，$4ab^2$ 爲 x^3y^4 之係數.

且應稱任意因子爲其餘因子之積之係數.

各獨項式係數應書於前. 設係數爲 1, 則可不書. 如, 1 爲 x^2y 之係數.

同類項(*like terms*)爲僅其係數不同之諸項. **272**

如 $-2x^2y$ 及 bx^2y 爲同類項.

獨項式之次數(*degree*)爲其項內變數之指數之和. **273**

如設變數爲 x 及 y, 則 $4ab^2x^3y^4$ 之次數爲 7; ax^3 之次數爲 3, b 之次數爲零 (閱 §595).

多項式之次數爲其最高次項之次數; 且任意整式之次數爲可化成最簡多項式後之次數. **274**

如, $ax^3+bx^2y+cy^3+dx^2+ey+f$ 之次數爲三; 而 $(x-1)(x-2)$ 之次數爲二.

多項式之諸項若按其次數之順序升冪或降冪排之最爲便利, 設有幾項同次則按其一變數之次數順序而排列之. **275**

注意, § 274 中多項式即依順序而排列者.

諸項次數相同之多項式稱爲齊次式 (*homogeneous*). **276**

如 $5x^3-2x^2y+4xy^2+y^3$ 爲齊次式.

一變數之多項式. 含一變數 (如 x) 之有理整式, 尤爲特別重要. 其在代數中之任務亦如整數之於算術也. 確能知其具有若干性質類似於整數者, 此類常能化爲 x 之多項式, 即下列諸式之一: **277**

$a_0x+a_1,\quad a_0x^2+a_1x+a_2,\quad a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3, \cdots\cdots,$

或成下式之形:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

式中 n 表此式之次數及虛綫處表示作成 $n+1$ 項之全部所需之諸項.

係數 $a_0, a_1, \cdots$ ，表任何種類之常數.於特例，除 a_0 外均可爲 0，則此多項式稱爲不全式.

注意，各項內 a 之附碼與 x 之指數之和爲此多項式之次數.

如於 $5x^6-x^3+2x_1+x-3$，其 $n=6$，$a_0=5$，$a_1=0$，$a_2=0$，$a_3=-1$，$a_4=2$ $a_5=1$，$a_6=-3$.

278 函數. 凡含一或多變數之代數式如 $x+2$ 或 x_2+y，其本身亦爲變數. 並稱 $x+2$ 爲 x 之函數(*function*)，因其值依 x 而變，於 x 之每一值相當於 $x+2$ 之一定值.

同理稱 x^2+y 爲 x 及 y 之函數，總之可稱各代數式爲其所含諸變數之函數.

279 按前所規定 x，x 及 y 等等之整式，分式，有理式或無理式之名稱，可稱爲 x，x 及 y 等等之整函數 分函數，有理函數，或無理函數.

280 x 之已知函數常以符號 $f(x)$ 表之，讀作"x 之函數".而以 $f(0)$，$f(1)$，$f(b)$ 表函數適合於 $x=0,1,b$，時之值。

如，設 $f(x)=x+2$，則 $f(0)=2$，$f(1)=3$，$f(b)=b+2$. 總之，設 $f(x)$ 表示含 x 之任何已知式，則 $f(b)$ 表以 b 代入已知式內所得之結果.

若於 x 之二個以上之函數，可用 $f(x)$ 表其一，其他則用相似符號如 $F(x)$，$\phi(x)$，$\psi(x)$ 表之.

同樣，可以符號 $f(x,y)$ 表二變數 x 及 y 之函數，餘類推.

習　題　I

1. $a^2yz^3+2x^5y^4z^5+3x^7y^2z^3$ 各關於 x, y 及 z 之次數若何?關於 y 及 z 之次數若何? 連同 x, y, z, 之次數若何?

2. $(x+1)(2x^2+3)(x^4-7)$之次數若何?

3. 已知 $3x^7+x^5-4x^4+x^3-12$; 則 § 277 記法內之 n, a_0, a_1, ……之值若何?

4. 設 $f(x)=2x^3-x^2+3$, 求 $f(0)$, $f(-1)$, $f(3)$, $f(8)$.

5. 設 $f(x)=(x^2-3x+2)/(2x+5)$, 求 $f(0)$, $f(-2)$, $f(6)$.

6. 設 $f(x)=x+\sqrt{x}+3$, 求 $f(1)$, $f(4)$, $f(5)$.

7. 設 $f(x)=2x+3$, 則 $f(x-2)$ 爲何? $f(x^2+1)$ 爲何?

8. 設 $f(x,y)=x^2+x-y+8$, 求下列各值:

$f(0,0)$, $f(1,0)$, $f(0,1)$, $f(1,1)$, $f(-2,-3)$.

恆等方程或恆等式

若 A 式與 B 式完全相同，或可用 § 247－258 之演算方法而化爲相同，則稱 A 恆等於 B. **281**

記法 $A \equiv B$ 意謂 "A 恆等於 b".

如 $x(x+2)+4$ 恆等於 $x^2+2(x+2)$.

因 $x(x+2)+4 \equiv (x^2+2x)+4$

$$\equiv x^2+(2x+4) \equiv x^2+2(x+2). \quad §§ 248, 252.$$

玆稱 $A \equiv B$ 爲恆等方程 (*identical equation*) 或恆等式 (*identity*). 故

恆等式 $A \equiv B$ 者，爲第一式 A 能以演算法則變換成 B 式之謂也. **282**

於特例，恆等式如 **283**

$$3-8+2 \equiv 4+7-14$$

式中無文字，稱爲數目恆等式.

下面定理(含於 § 282),極有用.

284 **定理.** 設含 x 之二多項式恆等, 則其相當係數相等; 即

設 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n$,

則 $a_0=b_0, a_1=b_1, \cdots\cdots, a_n=b_n$.

若諸係數不等, 則二多項式亦不等, 而第一式不能以演算方法化爲第二式也.

如, 設 $ax^2+3x-3\equiv 2x^2+bx+c$, 則 $a=2$, $b=3$, $c=-3$.

設係數 $a_0, a_1, \cdots\cdots, b_0, b_1, \cdots\cdots$ 表不含 x 之代數式, 則自恆等式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots$ 而得 $a_0\equiv b_0, a_1\equiv b_1, \cdots\cdots$, 換言之, 則此諸代數式可以其相當係數表之, a_0 及 b_0 等等均爲恆等.

285 二變數以上之兩恆等式, 其各項爲諸變數方式之積, 且係數爲常數時, 則上述定理亦可相似適用.

如, 設 $a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+\cdots\cdots$

$$\equiv a'+b'x+c'y+d'x^2+e'xy+f'y^2+\cdots\cdots$$

則 $a=a', b=b', c=c', d=d', e=e', f=f', \cdots\cdots$

286 **恆等式之性質.** 於代數演算可常用下之定理:

定理 1. 設 $A\equiv B$, 則 $B\equiv A$.

因可遷 A 於 B, 爲可逆的, 此僅含 § 259 之連合法則. 然其逆處置即遷 B 於 A.

如, 玆可用逆算法施於 § 281 之例.

因 $x^2+2(x+2)\equiv x^2+(2x+4)$

$\equiv(x^2+2x)+4\equiv x(x+2)+4$. §§ 448, 252

定理 2. 設 $A\equiv C$ 及 $B\equiv C$, 則 $A\equiv B$.

因 $B\equiv C$, 而得 $C\equiv B$. 由定理 1

因 $A\equiv C$ 及 $C\equiv B$, 故 $A\equiv B$.

如，因　$x(x+2)+4\equiv x^2+2x+4$，　§§248，252

及　$x^2+2(x+2)\equiv x^2+2x+4$，　§§248，252

故得　$x(x+2)+4\equiv x^2+2(x+2)$.

定理3. 以同式加，減，乘，除一恆等式之兩邊仍得恆等式.

此定理自§§249，253，257，之相等法則得之.

如，設 $A\equiv B$，則 $A+C\equiv B+C$，餘類推.

證恆等式. 若證 A 及 B 二已知式成 $A\equiv B$，勿須實際變 A 成 B. 287

如§283，2所示，若能化 A 及 B 均成 C 式足矣.

下之定理具備其他有用證法.

設自一假定恆等式 $A\equiv B$. 能用可逆的演算而導出已知恆等式 $C\equiv D$，則假定恆等式 $A\equiv B$ 為眞. 288

因此演算為可逆的，故能自 $C\equiv D$ 導出 $A\equiv B$ 因 $C\equiv D$ 為眞，$A\equiv B$ 亦眞.

例. 求證 $a+b-b$ 恆等於 a.

假定　$a+b-b=a$.　(1)

則得　$[(a+b)-b]+b=a+b$.　(2) §249

然(2)已知為恆等式，§250 而 (1) 至 (2)之步驟為可逆的，故(1)為眞.

若自 $A\equiv B$ 算至 $C\equiv D$ 非為可逆，卽斷定 $A\equiv B$ 甚為不妥.

玆可解釋如下:

設假定　$x\equiv -x$.　(1)

因得　$x^2\equiv(-x)^2$.　(2)

其(2)為眞，但不能因此而證得(1)為眞，因(1)至(2)之步驟非可逆者也，§259.

實則(1)根本錯誤.

289　**恒等式與方程式.** 恆等式之要點在形狀關係，比其值之關係尤爲重要．同時

設 A 及 B 均爲有限式，且 $A\equiv B$，則於其式內諸文字之一切值 A 及 B 恆有等值．

因自假定可由法則 $a+b=b+a$ 之應用定數而變 A 形成 B 形，餘類推．但無論 a 及 b 之值若何，$a+b$ 及 $b+a$ 恆有等值，餘類推．

逆之，設 A 及 B 中之文字以任何數代入之，其值均等，則 $A\equiv B$，此理俟後證之．

於諸有限式常可以等值符號 $=$，以代恆等符號 $\equiv$，如 $A\equiv B$ 寫作 $A=B$，後面均如此通用．符號 $=$ 之用途愼與 § 325 所述者有別．

命題之轉換

290　假定命題如下

$$\text{設 A，則 } B, \tag{1}$$

若表全其意：即設某事 A 爲眞，則他事 B 亦眞．

如，設一圖爲正方形，則該圖亦爲矩形．

設 $x=1$，　則 $x-1=0$．

291　則若交換假定 A 及 (1) 之推斷 B，而得逆命題

$$\text{設 } B\text{，則 } A^*. \tag{2}$$

如上命題之逆爲：

設一圖爲矩形，則該圖爲正方形．

設 $x-1=0$，則 $x=1$．

292　如上第一例所述，一眞確命題之逆往往不眞．

* 若一命題設 A 及 B，則 C，含二假定，則有二逆．即，設 C 及 B，則 A，又設 A 及 C，則 B，同理；設有三假定，則有三逆；餘做此．

但於眞確命題之逆：自假定 A 以可逆的演算導出推斷 B 而設 A 則 B，常爲眞確；則反其演算即可自 B 而導出 A，換言之，可證設 B 則 A. 293

用可逆的演算，由其逆題以證該命題之方法，代數學中常用之．此法之說明已示於 §288.

若一命題：設 A 則 B 爲眞，則稱 A 爲 B 之**充分條件** (*sufficient condition*) 而 B 爲 A 之**必要條件** (*necessary condieion*)． 294

如，命題，設 $x=1$，則 $(x-1)(x-2)=0$ 爲眞．故 $x=1$ 爲 $(x-1)(x-2)=0$ 之充分條件及 $(x-1)(x-2)=0$ 爲 $x=1$ 之必要條件．

若命題，設 A 則 B，及其逆設 B 則 A 均爲眞確，即稱 A 爲 B 之充分及必要條件；餘類推． 295

如，(1) 設 $x=1$，則 $x-1=0$，及 (2) 設 $x-1=0$，則 $x=1$ 同時爲眞．則 $x=1$ 爲 $x-1=0$ 之充分及必要條件；餘倣此．

II. 基本演算

加與減

和及差． 令 A 及 B 表任意二代數項，其 A 及 B 之和及自 A 減 B 所得之差，即謂能由 §274 至 §258 之演算．方法而化 $A+B$ 及 $A-B$ 式成最簡式． 296

幾個有用公式． 下面公式於演算極爲有用，即： 297

1. $a+b-c=a-c+b$.　　*2.* $a-(b+c)=a-b-c$.

3. $a+(b-c)=a+b-c$.　　*4.* $a-(b-c)=a-b+c$.

5. $a(b-c)=ab-ac$.

上諸公式視爲交換,結合,及分配諸律對於減法之推廣.

用 §249 之法則可證 1 及 2.

設以同式加於某二式結果相等,則該二式相等.

1. $a+b-c=a-c+b.$

因加 c 於兩邊結果均爲 $a+b$.

卽 $[(a+b)-c]+c=a+b,$ §250

及 $(a-c)+b+c=(a-c)+c+b=a+b.$ §§248,250

2. $a-(b+c)=a-b-c.$

因兩邊各加 $b+c$ 結果爲 a.

卽 $[a-(b+c)]+(b+c)=a,$ §250

及 $a-b-c+(b+c)=a-b-c+c+b$

$=a-b+b=a.$ §§248,250

玆證 3, 4, 5,如下:

因 $b=(b-c)+c,$ §250

則得 *3.* $a+b-c=a+[(b-c)+c]-c$

$=a+(b-c)+c-c$ §248

$=a+(b-c).$ 由 1 及 §250

4. $a-b+c=a-[(b-c)+c]+c$

$=a-(b-c)-c+c$ 由 2

$=a-(b-c).$ §250

5. $ab-ac=a[(b-c)+c]-ac$

$=a(b-c)+ac-ac$ §252

$=a(b-c).$ 由 1 及 §250

由 §248 及公式 1–4 可知連續數項之加與減可以任何順序演之.

如，$a-b+c-d+e=a+c-b-d+e,$　　由 1

$=a+c-(b+d)+e=a+c+e-(b+d),$　　由 2 及 1

$=a+c+e-b-d$　　由 2

符號規則． 此符號規則為上述公式 3, 4, 5 之特類． **298**

1. $a+(-c)=a-c.$　　*2.* $a-(-c)=a+c.$

3. $a(-c)=-ac.$　　*4.* $(-a)(-c)=ac,$

於 §297 之 3, 4, 5 各令 $b=0$ 即得 1, 2, 3.

玆證如下:

$(-a)(-c)=(-a)(0-c)=(-a)0-(-a)c$　　§297, 5

$=0-(-ac)=ac.$ 由 2 及 3

括號法則． 由 §248 及 §297 之 2, 3, 4, 諸公式得下之 **299**
重要法則:

括號前面為＋號者可以撤去括弧，括弧前號為－號者亦可撤去，但其內之各項均須變號．

括弧能以可逆的演算導出相當法則．

如，$a+b-c-d+e=a+b-(c+d-e).$

欲化簡重複括號之式，應連用上法於多層括號．

如，$a-\{b-[c-(d-e)]\}=a-b+[c-(d-e)]$

$=a-b+c-(d-e)$

$=a-b+c-d+e.$

此諸括號當然可以任意順序撤去之；但自最外之項起始(如上例)可避免任一符號多於一次之變更．

300　**整式之加減法則.** 由§§ 248,252,297 之公式得次法則:

加(或減)二同類項,卽加(或減)其係數,且附書其公共文字於此結果之後.

二個或數個多項式相加,依次書其所有諸項不變其原來符號,然後合併其同類項而化簡之.

自一多項式減他式,則變其所減式內各項符號而加之.

例 1.　加 $4ab^2$ 及 $-5ab^2$、又自 $4ab^2$ 減 $-5ab^2$.

因得 $4ab^2+(-5ab^2)=(4-5)ab^2=-ab^2$,　　§ 248

及 $4ab^2-(-5ab^2)=[4-(-5)]ab^2=9ab^2$.　　§ 297,5

例 2.　加 $x^3+ax^2y+2ab^3$ 及 bx^2y-5ab^3.

因 $x^3+ax^2y+2ab^3+(bx^2y-5ab^3)$

$=x^3+ax^2y+2ab^3+bx^2y-5ab^3$　　§ 299

$=x^3+ax^2y+bx^2y+2ab^3-5ab^3$　　§ 248

$=x^3+(a+b)x^2y-3ab^3$.　　§§ 252,297,5

例 3.　自 $a^3+a^2b+b^3$ 減 $2a^2b-ab^2+b^3$.

因 $a^3+a^2b+b^3-(2a^2b-ab^2+b^3)$

$=a^3+a^2b+c^3-2a^2b+ab^2-b^3$　　§ 299

$=a^3-a^2b+ab^2$.　　§§ 252,297

設所加(或減)之多項式中有同類項,則列此諸項於同行,然後逐行而加(或減)之.

例 4.　加 $a^4+a^3b-2a^2b^2-b^4$ 及 $ab^3+3a^2b^2-a^3b$,且自其和減 $5a^2b^2-ab^3$.

茲演之如右

$$\begin{array}{rrrrr}
a^4 & +a^3b & -2a^2b^2 & & -b^4 \\
 & -a^3b & +3a^2b^2 & +ab^3 & \\
 & & -5a^2bd & +ab^3 & \\
\hline
a^4 & & -4a^2b^2 & +2ab^3 & -b^4
\end{array}$$

習　題　II

1. 加 $4ax^2y$, $-6ax^2y$, $5bx^2y$, 及 $-3bx^2y$.
2. 加 $7a^2+2a-b^2$, $3a+b^2-2a^2$, 及 $b^2-4a-4a^2$.
3. 加 $3x^2-5x+6$, x^2+2x-8, 及 $-4x^2+3x-7$.
4. 加 $4a^3+a^2b-5b^3$, $\frac{5}{3}a^3-6ab^2-a^2b$, $\frac{1}{3}a^3+10b^3$, 及 $6b^3-15ab^2-4a^2b-10a^3$.
5. 自 $3a+b-c$ 減 $4a-2b+6c$.
6. 自 x^3+6x^2+5 減 $2x^2-5x+7$.
7. 問以何式加於 a^3+5a^2b 而得 a^3+b^3x?
8. 自 $x^3+y^3-6x+5y$ 減 $-2x^3-6x+7y-8$ 及 x^3+2x^2-5y+9 之和.
9. 化簡 $-(a+b)+\{-a-(2a-b)\}-6(a-4b)$.
10. 化簡 $6x-\{4x+[2x-(3x+5x+7-1)+3]-8\}$.
11. 化簡 $2a-[4a-c+\{3a-(4b-c)-(b+3c)\}-6c]$.
12. 自 $x-[3x+(y+5z)]$ 減 $x-(3y+2z)$.
13. 問加 x^2+8x+5 於何式而得 x^3-7?
14. 問加 x^4-9x^2+3y 於何式而得 y^2+x-7?

乘　法

積. 二代數式 A 及 B 之積意爲以演算法則能化 AB 式爲最簡式.化法之重要原理爲: 301

1. 交換,結合,及分配諸定律.

2. 指數定律 $a^m.a^n=a^{m+n}$.

3. 符號規則:

$$a(-b)=(-a)b=-ab;(-a)(-b)=ab.$$

整式相乘之法則. *1.* 求二獨項式之積,即以其數字因子積乘其文字因子之積,加同文字之冪之指數以化簡之. 302

視其二獨項式爲同號或異號而予其結果以 + 號或 − 號.

2. 以獨項式或多項式乘多項式求積，即以乘數之各項乘被乘數數之各項．且加其所得之積.

第一法由交換及結合定律及指數定律而得，第二法由分配定律而得；如

$$(a+b+c)(m+n)=(a+b+c)m+(a+b+c)n$$
$$=am+bm+cm+an+bn+cn.$$

第一法亦可應用於二個以上獨項式之積．設均爲 − 號之獨項式之個數爲奇，其積之號爲 −，爲偶，其積爲 +.

二個以上之多項式之積可複用第二法即得.

例 1. 求 $-4a^2b^2x^3$，$2bx^4$，及 $-3a^3x$ 之積.

今 $-4a^2b^2x^3\cdot 2bx^4\cdot -3a^3x=24a^2b^2x^3bx^4a^3x$
$$=24a^5b^3x^8.$$

例 2. 求 $a-2b$ 及 $ab-b^2+a^2$ 之積.

爲簡便計，按 a 之降冪排列此二因數，且擇其最簡因子作乘數，則得

$$(a^2+ab-b^2)(a-2b)=a^3+a^2b-ab^2-2a^2b-2ab^2+2b^3$$
$$=a^3-a^2b-3ab^2+2b^3.$$

303 關於任何文字（或幾個文字之組）乘積之次數爲諸因子內關於此文字（或幾個文字之組）之次數之和.

此由 § 302, 1, 及實際上可得任何積內之最高次項，爲各因子內諸最高次項之積.

如，x^2+1 及 x^3-1 之次數各爲二及三，而其積 $(x^2+1)(x^3-1)$ 或 $x^5+x^3-x^2-1$ 之次數爲五.

設二因子各爲齊次式，§276，其積爲齊次式. 304

設各因子之諸項爲同次數,則以第一因子內一項乘他因子之各項之積均爲同次.故其和爲一齊次多項式.

演算之排列. 設二因子均爲 x 或其他單純文字之多項式,或二因子均爲二文字之齊次函數，則如下列之排列演算最爲便利. 305

例 **1.** 以 $x-3+x^2$ 乘 $2x^3-x^2+5$.

$$\begin{array}{rrrrrr}
2x^3 & -x^2 & & +5 & & \\
x^2 & +x & -3 & & & \\
\hline
2x^5 & -x^4 & & +5x^2 & & \\
 & 2x^4 & -x^3 & & +5x & \\
 & & -6x^3 & +3x^2 & & -15 \\
\hline
2x^5 & +x^4 & -7x^3 & +8x^2 & +5x & -15
\end{array}$$

玆按 x 降冪(或升冪)列二因子，且置乘數於被乘數之下.

然後書"部分乘積"於數列，相當於乘數之數項,其同類項,卽同次項置於同行,末後逐行加其同類項.

例 **2.** 以 $2y+x$ 乘 x^2-y^2+2xy.

$$\begin{array}{rrrr}
x^2 & +2xy & -y^2 & \\
x & +2y & & \\
\hline
x^3 & +2x^2y & -xy^2 & \\
 & 2x^2y & +4xy^2 & -2y^3 \\
\hline
x^3 & +4x^2y & +3xy^2 & -2y^3
\end{array}$$

此例二因子均爲 x 及 y 之齊次函數.

玆按 x 之降冪，亦卽 y 之升冪列二因數,然後演算如例 1.

分離係數法. 於§305 例之演算，所列諸項之位置定能表示 x 某次冪之所在. 爲實用而縮減計算可略去 x，而僅書其係數,於演算具有數字係數之已知多項式更爲便利. 306

設其多項式爲不完全的,必須以係數 0 表各闕項.

例．以x^3+3x^2-2乘x^3-3x^2+2．

$$\begin{array}{r}
1-3+0+2\\
\underline{1+3+0-2}\\
1-3+0+2\\
3-9+0+\ \ 6\\
\underline{-2+\ \ 6-0-4}\\
1+0-9+0+12-0-4
\end{array}$$

茲列其算式如§ 305．但僅書其列之係數，以 0 係數表其闕項，相當於乘數 0 項之部分乘積略去．

於末後結果嵌入x之適當方冪——由x^6始，因諸因數之次數之和爲六——即得所求之積$x^6-9x^4+12x^2-4$．

其積之次數六，亦可由結果$1+0-9+0+12-0-4$之項數七得之，§ 277．

上法稱爲分離係數法（*detached coefficients*）．此法不但應用於單獨文字之多項式，——均按該字之降冪或升冪排列者——且能應用於二文字之齊次式．因按其一字之降冪排列二多項式無異依其他一字之升冪排列，故任一係數之位置即可表其相當二文字合組之某次冪之所在．

307　**由分離係數法導出之公式．**　茲以下例說明．

例 1．證下之恆等式爲眞：

$$(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+a^4)(a-b)=a^5-b^5.$$

$$\begin{array}{r}
1+1+1+1+1\\
\underline{1-1}\\
1+1+1+1+1\\
\underline{-1-1-1-1-1}\\
1+0+0+0+0-1
\end{array}$$

茲以分離係數法乘其等號左邊式，則其所得之積之係數按a之降冪及b之升冪而排列者．

即知其積之次數爲五，亦可由其結果項數六而知之，故其積爲

$$a^5+0\cdot a^4b+0\cdot a^3b^2+0\cdot a^2b^3+0\cdot ab^4-b^5,\text{ 或 }a^5-b^5.$$

例 2．證下列恆等式爲眞：

$$(a^2-ab+b^2)(a+b)=a^3+b^3. \qquad (1)$$

$$(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)=a^4-b^4. \qquad (2)$$

準前法如例1，得

$$\begin{array}{ll} 1-1+1 \quad (1) & 1-1+1-1 \quad (2) \\ \underline{1-1\qquad\quad} & \underline{1+1\qquad\quad} \\ 1-1+1 & 1-1+1-1 \\ \underline{\quad 1-1+1} & \underline{\quad 1-1+1-1} \\ 1+0+0+1, \text{ 即 } a^3+b^3. & 1+0+0+0-1 \text{ 即 } a^4-b^4. \end{array}$$

由上例所釋之法可證下例恆等式爲眞，前述諸題不過爲其特例而已，即：

於 n 之任何正整數得 308

$$(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})(a-b)=a^n-b^n.$$

於 n 之任何正奇數，得 309

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}-b^{n-1})(a+b)=a^n-b^n.$$

且於n之任何正偶數；得 310

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})(a+b)=a^n-b^n.$$

二項式之諸羃.　用連乘法可計算 $a+b$ 之累次諸羃.因其乘數之係數恆爲 1+1，只須記其每次所乘之部分積及其和足矣．因得 311

(1) $1+1$ 　　即$a+b$.

(2) $\dfrac{1+1}{1+2+1}$ 　　即$a^2+2ab+b^2$ $=(a+b)^2$.

(3) $\dfrac{1+2+1}{1+3+3+1}$ 　　即$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$.

(4) $\dfrac{1+3+3+1}{1+4+6+4+1}$ 即$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$=(a+b^4)$.

注意，各次乘算，其第二部分積之係數即將其第一部分積之係數向右移一位.加此二部分積之係數而得其鄰方羃之

係數,故僅應用下法:

312 由已知之任一方羃之諸係數各加其前一係數;其和即鄰次方羃之相當係數.

鄰次方羃之一切係數,除首末均爲1外,皆可由此法得之.

如,(4)之係數相當於(3)之3,3,1者爲3+1或4,3+3或6,1+3或4.

應用此法於(4),即得4+1或5,6+4或10,4+6或10,1+4或5.

故

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

$a+b$ 之任意予數方羃之係數當然可複用此法而得之.

例.試連續求$(a+b)^6$,$(a+b)^7$,$(a+b)^8$.

313 **一次二項因子之積.** 此類乘積學者當熟習之可由觀察而得.

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$. (1)

$(a_0x+a_1)(b_0x+b_1)=a_0b_0x^2+(a_0b_1+a_1b_0)x+a_1b_1$. (2)

於乘積(1) x 之係數爲 a 及 b 之和,而末項爲其積.

於乘積(2)首項係數爲二因數首項係數之積,末項係數爲二因數末項係數之積,而中項係數爲"十字乘積" a_0b_1 及 a_1b_0 之和.

例*1*. 求 $(x+5)(x-8)$ 之積.

$(x+5)(x-8)=x^2+(5-8)x-40=x^2-3x-40$.

例*2*. 求$(x+3y)(x+10y)$之積.

$(x+3y)(x+10y)=x^2+(3+10)xy+30y^2$

$=x^2+13xy+30y^2$.

例 3. 求 $(2x+3)(4x+7)$ 之積.

$$(2x+3)(4x+7)=2\cdot4x^2+(2\cdot7+3\cdot4)x+3\cdot7$$
$$=8x^2+26x+21.$$

例 4. 用上諸法，求下面各積:

$(x-10)(x-15)$, $(3a+4b)(5a-6b)$, $(7x-y)(5x-3y)$.

x 之任兩多項式之積. 就下列乘積論之. 314

$$(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)(b_0x^2+b_1x+b_2)$$
$$=a_0b_0x^5+(a_0b_1+a_1b_0)x^4+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^3$$
$$+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^2+(a_2b_2+a_3b_1)x+a_3b_2.$$

此積亦爲 x 之多項式;其次數爲各因子之次數之和,而其各項係數可由下述法得之, a_h 表 a_0, a_1, a_2, a_3 中之一數及 b_k 表 b_0, b_1, b_2 中之一數, 求積之次數與所求項 x 之次數之差, 然後作出凡令 $h+k$ 等於此差之各積 $a_h b_k$ 以加之. 其和卽爲所求項之係數.

如求 x^2 之係數,先求 $5-2$ 之差得 3, 然後作 a_1b_2, a_2b_1, a_3b_0, 各積而加之卽 $h+k=3$ 時 a_hb_k 之各積.

此法應用於 x 之任二多項式 $a_0x^m+\cdots\cdots+a_m$ 及 $b_0x^n+\cdots\cdots+b_n$ 之積.

設諸因子有眞數係數, 且可求其積之任一特項之係數.

例 1. 於下列積中求 x^{100} 之係數:

$(a_0x^{75}+a_1x^{74}+\cdots\cdots+a_{74}x+a_{75})$ $(b_0x^{60}+b_1x^{59}+\cdots\cdots+b_{59}x+b_{60})$.

此積之次數爲 $75+60$ 或 135, 及 $135-100=35$.

故 x^{100} 之係數爲 $a_0b_{35}+a_1b_{34}+\cdots\cdots+a_{34}b_1+a_{35}b_0$.

同法得 x^{55} 之係數爲 $a_{40}b_{60}+a_{41}b_{59}+\cdots+a_{74}b_{26}+a_{75}b_{25}$.

例 2. 求次積中 x^3 之係數:

$(3x^4-2x^3+x^2-8x+7)(2x^3+5x^2+6x-3)$.

所求係數爲 $(-2)(-3)+1\cdot6+(-8)5+7\cdot2$ 或 -14.

例 3.　於例 1 之積求 x^{110} 及 x^{23} 之係數.

例 4.　於例 2 之積求 x^6, x^5, x^4, x^2, 及x之各係數.

315　**由已知恒等式求積.**　下面公式或恆等式極爲重要且須熟記:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \tag{1}$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \tag{2}$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \tag{3}$$

於上式外倘可增以 § § 308,309,310 之公式及下之公式, § 311:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \tag{4}$$

上列諸式中之 a 及 b 可以任何代數式代之,故此等公式,形雖簡而用至廣,觀下例可知.

例 1.　求積$(3x-5y)^2$.

$$(3x-5y)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 5y+(5y)^2$$
$$=9x^2-30xy+25y^2. \qquad \text{由 (2)}$$

例 2.　求積$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=[(x^2+y^2)+xy][(x^2+y^2)-xy]$$
$$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=x^4+x^2y^2+y^4.$$

由(3),(1).

例 3.　下之演算指示步驟:

$$(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)$$
$$=[x+(y+z)][x-(y+z)][x+(y-z)][x-(y-z)]$$
$$=[x^2-(y+z)^2].[x^2-(y-z)^2]$$
$$=[(x^2-y^2-z^2)-2yz].[(x^2-y^2-z^2)+2yz]$$
$$=[x^2-(y^2+z^2)]^2-4y^2z^2$$
$$=x^4-2x^2(y^2+z^2)+(y^2+z^2)^2-4y^2z^2$$
$$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2,$$

觀此特例可由 (1) 及 (4) 以導出求任何多項式之平方及立方之法:

如

$$(a+b+c)^3=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$
$$(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2a+3b^2c+3c^2b+3c^2a+3a^2c+6abc.$$

總前諸結果得定理:

任意多項式之平方等於其所有諸項之平方和加以各項 316
兩兩相乘積之二倍.

例 1. 求積 $(a-b+2c-3d)^2$.

例 2. 求積 $(1+2x+3x^2)^2$.

例 3. 求積 $(x^3-x^2y+xy^2-y^3)^2$.

獨項積之方冪. 由任意代數式 A 之 n 次冪可用演算 317
方法化 A^n 式爲最簡式.

由指數定律 $(a^m)^n=a^{mn}$ 及 $(ab)^n=a^nb^n$ 導出下法:

累乘獨項 A 至 n 次冪卽累乘其數值係數至 n 次方, 且 318
以 n 乘各文字因子之指數.

設 A 之符號爲 $-$, 則其結果視 n 之爲偶或奇而得 $+$ 號或 $-$ 號.

如, $(-2ax^2y^7)^4=(-2)^4a^4x^8y^{28}=16a^4x^8y^{28}$.

此卽複用定律 $(ab)^n=a^nb^n$ 得

$$(-2ax^2y^7)^4=(-2)^4a^4(x^2)^4(y^7)^4,$$

且複用定律 $(a^m)^n=a^{mn}$ 得

$$(-2)^4a^4(x^2)^4(y^7)^4=16a^4x^8y^{28}.$$

習　題　III

於此題諸，應以極捷算法乘之，於特別者，能由分離係數法更為便利；且能用 § 315 之恆等式則用之.

1. 以 $3x^5-2x^4-x^3+7x^2-6x+5$ 乘 $2x^2-3x+1$.
2. 以 $5x^3-3ax^2+2a^2x+a^3$ 乘 $3x^2-ax-2a^2$.
3. 以 $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$ 乘 $x+y$.
4. 以 $3x^3-2x^2+7$ 乘 $2x^2-3x+5$.
5. 由視察以 $7x-2y$ 乘 $4x-5y$.
6. 以 $a^2-ax+bx-x^2$ 乘 $b+x$.
7. 以 $x^4-2x+5x^2-x^3$ 乘 $3+x^2-x$.
8. 以 $2x^n-3x^{n-1}+5x^{n-3}$ 乘 $x^{n-2}-x^{n-3}$.
9. 以 $a^2-ab+3b^2$ 乘 $a^2+ab-3b^2$.
10. 以 $x+3y-2z$ 乘 $x-3y+2z$.
11. 以 $x^2+xy+y^2+x-y+1$ 乘 $x-y-1$.
12. 以 $a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab$ 乘 $a+b-c$.
13. 以 $3x-2y+5$ 乘 $x-4y+6$.
14. 以 $x+7y-3z$ 乘 $2x+y-8z$.
15. 求 $(b+x)(b-x)(b^2+x^2)$之積.
16. 求 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$之積.
17. 求 $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$之積.
18. 試作 x^2+x+1 之前四冪係數表.
19. 試作 $a+b$ 之 1 至 10 次連續方冪之係數表.
20. 求 $(4x-3y)^2$ 及 $(4x-3y)^3$.
21. 求 $(x+2y+3z-4u)^2$.
22. 求 $(x+2y+3z)^3$; 及 $(x+2y-3z)^3$.
23. 以 $(a+2b)^2$ 乘 $(a-2b)^2$.
24. 於次積內求 x^{29} 及 x^{15} 之係數:

$$(a_0x^{27}+a_1x^{26}+\cdots\cdots+a_{26}x+a_{27})(b_0x^{19}+b_1x^{18}+\cdots\cdots+b_{18}x+b_{19}).$$

25. 於 $(2x^6-3x^5+4x^4-7x^3+2x-5)(3x^5-x^3+x^2+3x-8)$ 之積中，求 x^5, x^3 及 x^4 之係數。

26. 證明下列之恆等式:

1. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(y+z)(z+x)(x+y)$.

2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.

3. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.

4. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc$.

27. 化簡下列各冪:

$(2a^2x^3y^7)^5$, $(-x^5y^8z^9)^7$, $(a^2b^mc^2)^{2n}$, $(a^mb^nc^{2n})^n$.

28. 化簡下列各乘積:

$(-ab^2c^3)(a^3b)^2(-ac^3)^5$, $(-2x^2y^4)^3(ax^5y^{11})^2$.

除　法

商. 令 A 及 B 表任意二代數式，但 B 不等於 0. 以 B 除 A 之商意即可用演算法化分數 A/B 爲最簡式. 319

公式. 欲作此種化法，下之公式特別有用. 320

1. $$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}.$$

2. $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, 設 $m>n$; $\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{1}{a^{n-m}}$, 設 $n>m$.

3. $\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$.

4. $$\frac{a+b}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}.$$

可用 § 253 之法證 1, 3 及 4.

設以任一式(非0)乘他二式之積相等，則此二式相等.

因以 bc 乘 1 之各邊之積爲 ac.

即 $\frac{ac}{bc}bc=ac$; 及 $\frac{a}{b}b\cdot c=\frac{a}{b}bc=ac$. §§254,252.

復次,以 b 乘 3 之第一方程各邊,所得之積均爲 $-a$, 且 $-b$乘第二及第三方程之各邊,則其積各爲 a 及 $-a$.

即 $\frac{-a}{b}b=-a$; $\left(-\frac{a}{b}\right)b=-\frac{a}{b}b=-a$. §§298,254.

末後以 d 乘 4 之兩邊,其積爲 $a+b$.

即 $\frac{a+b}{d}d=a+b$; $\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}\right)d=\frac{a}{d}d+\frac{d}{b}d=a+b$.

§§254,252.

公式 2 爲公式 1 之特例.

如設 $m>n$, $a^m=a^{m-n}\cdot a^n$. §256

故 $$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{m-n}a^n}{a^n}=a^{m-n}.$$ 由 1

321 **化簡 A/B 法.** 公式 1, 2 及 3 示以下面方法化簡 A/B.

1. 消去分子分母之公因子.

2. 設分子分母含有同文字(或同式)之不同冪之因子,可由其高方冪之指數減去低方冪之指數而消去其低方冪.

3. 依分子分母之爲同號或異號而予其商以 + 或 − 號.

如 $\frac{bca^5}{ca^2}=ba^{5-2}=ba^3$, 及 $\frac{a^2}{-a^7}=-\frac{1}{a^{7-2}}=-\frac{1}{a^5}$.

322 **獨項除法.** 由除法定義及 §320, 4, 導出次法.

1. 以一獨項式除他一獨項式, 即書被除數於除數之上所成之分數,且化簡之.

2. 以一獨項式除多項式，即以除數除被除數各項，且加其所得諸商.

如，　$-8a^3b^2c\div 6ab^6d=\dfrac{-8a^3b^2c}{6ab^6d}=-\dfrac{4a^2c}{3b^4d}$ 消其公因子 $2ab^2$ 且應用符號法則.

復次，$(ax^3-4a^2x^2)\div ax=\dfrac{ax^3}{ax}-\dfrac{4a^2x^2}{ax}=x^2-4ax$.

若 d 對於 a 及 b 無公因子，則商 $(a+b)/d$ 較簡於 $a/d+b/d$ 其形可不變.

以多項式除多項式之法.　設 A 及 B 爲有公因子之二 **323**
多項式，其商爲消去其公因子之 A/B 式.

如 $A=x^2-y^2$，$B=x^2+2xy+y^2$，其商爲 $(x-x)/(x+y)$.

因 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\dfrac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2}=\dfrac{x-y}{x+y}$.

第五章將示求二多項式公共因子法，該法稱爲長除法.

複式.　注意 $a\div b\times c$ 意即 $\dfrac{a}{b}c$，若 $a\div bc$ 同於 $a\div(b\times c)$ **324**
意爲 a/bc.

本章所謂複式即以陸續乘除所表之一數. 於特例求

$$a\times(b\times c\div d)=a\times b\times c\div d. \qquad (1)$$

$$a\div(b\times c\div d)=a\div b\div c\times d. \qquad (2)$$

設撤消(1)之括弧其括弧內之 × 及 ÷ 號不變；但內 (2) 各號 × 變爲 ÷ 而 ÷ 變爲 ×.

習　題　IV

1. 以 $10\,ab^2c^2$ 除 $15a^3bc^2$.

2. 以 $-100\ ax^2z^7$ 除 $75\ x^3y^4z^{10}$.

3. 以 $28\,x^my^{m+n}$ 除 $-35\,x^{2m}y^n$.

4. 以 $-18\{a(b^2c)^2\}^3$ 除 $-54\{(ab^2)^2c\}^5$.

5. 以 x^2-y^2 除 x^2y-xy^2.

6. 以 $(x-y)(x^2-xy+y^2)$除$(x^3-y^3)(x^3+y^3)$.

7. 化簡$\dfrac{(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}{(b-a)(c-b)^2(a-c)^3}$.

8. 化簡$\dfrac{30\ a^2b^3c^4-25\ a^3b^2c^5+20a^4b^4c^7}{-5\ ab^2c^2}$.

9. 化簡$\dfrac{3(x-y)^4-2(x-y)^3+5(x-y)^2}{(y-x)^2}$.

10. 化簡 $4a^7\times(3ab^3c^2)^2\div(abc)^2\div6bc$.

11. 化簡次式（1）由括號所表之順序演算，（2）先盡去其括弧而後算之.

$$a^7\div\{a^5\div(a^4\div a^2\times a)\times(a\times3a\div a^2)\}.$$

12. 以何式乘 $2a(x^2y^3)^2$ 得 $-4\,a^2(x^3y^7)^3$?

III.　一元一次方程式

條件方程式

325　　由 §281，$3x-4$ 及 $x+6$ 二式非恆等式，故於 x 之所有值均不相等．欲知"此二式於 x 之何值始相等?"則先假定二式相同，而寫作

$$3x-4=x+6.$$

由此構成之式稱爲條件方程式 (*conditional equation*)，因其表明未知數 x 所適合之條件也．此種目的即限用 x 能

適合此條件之值．當 $3x-4$ 及 $x+6$ 之值相同時此值爲眞，且僅此值爲眞耳．

同理 $x+y=0$ 爲二未知文字 x 及 y 之方程式，總之，

設 A 及 B 式非恆等式，則 $A=B$ 爲條件方程式．此方程式意爲："假定 A 及 B 有等值"且限制 A 及 B 內之未知文字僅有令此假定爲眞之值． 326

以方程式 $A=B$ 式而限定其值之文字，稱爲方程之未知字(*unknown letters*)．

以下凡方程式，即"條件方程式"．

設方程式內文字只有未知文字，如 x, y, z，稱之爲數字方程(*numerical equation*)；若尙有已知文字，如 a, b, c，者則稱爲文字方程式(*literal equation*)． 327

如，$2x-3y=5$ 爲數字方程，而 $ax+by=c$ 爲文字方程．文字方程不限制其已知文字之值．

設 A 及 B 關於其未知文字均爲有理整式，則 $A=B$ 稱爲有理整方程式．設 A 或 B 爲無理式或分式，其方程則稱爲無理方程或分數方程． 328

於此類中僅就其未知文字之爲無理式或分式而言，不計其眞數及已知文字之形．　如 $\sqrt{2}\,x+y/b=c$ 爲有理整方程式．

有理整方程式化爲最簡後，§ 340，其最高次項之次數稱爲該方程式之次數． 329

如 $ax^2+bx+c=0$ 之次數爲二；$x^3z^2+y^4=b$ 之次數爲五　凡次數均由諸未知文字而定，且只就此類文字而定之．

330 一次方程式常稱爲最簡方程式；其二次，三次，四次者各稱爲二次方程，三次方程，四次方程.

331 含一未知數 x 之方程式限 x 之值有一限個數，稱適合此方程式之 x 值爲方程之解答或根．故

332 含 x 之方程之根爲眞數或已知文字式，設以之代 x 則能令此方程成恆等式.

如，1 及 -2 爲方程 $x^2+x=2$ 之根；因 $1^2+1\equiv 2$ 及 $(-2)^2+(-2)\equiv 2$ 故也.

復次，$a-b$ 爲 $x+b=a$ 之根，因 $(a-b)+b\equiv a$.

333 註. *1.* 方程亦可無根；因其能述無一數可適合之條件.

如，無數可適合方程 $x+2=x+3$.

2. 凡 x 之有根方程，x 僅爲其一根或諸一根之符號而已；實則方程本身亦僅爲恆等之代替式．即以各根代入 x 而得幾個實在恆等式.

如 $x^2+x=2$ 僅爲二恆等式 $1^2+1\equiv 2$ 及 $(-2)^2+(-2)\equiv 2$ 之代替式.

解方程式法

334 解一未知文字之方程，即求其所有諸根，或證其無根.

上之理由及演算詳於下例.

例 *1* 解方程 $3x-4=x+6$.

先假定 x 必有一值令此方程爲眞，其理如次：

設 $3x-4=x+6$, (1)

則 $3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4)$, (2) § 249

或 $2x=10$, (3) § 300

故 $x=5$. (4) § 250

故設 $3x-4=x+6$，則 $x=5$. (*a*)

前證之命題(a)意謂若(1)常眞，須$x=5$，或能充(1)之根之唯一數爲5；然非謂5爲(1)之根，此後半句命題爲

設　$x=5$，則$3x-4=x+6$.　(b)

而(b)與(a)不同，蓋其逆語也.

以5代入(1)內x可證5爲(1)之根；因可得眞確恆等式$3.5-4\equiv5+6$故也.

但除非需要驗算外此層並不需要.因凡一眞確命題均能以可逆之演算證明之，故常可斷定其逆爲眞，§293. 而(a)式即可爲例，因若由(4)而導出(1)以補足此逆算層次則得其完全逆算. 如

設　$x=5$,　(4)

則　$2x=10$,　(3) §253

或　$3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4)$,　(2) §300

故　$3x-4=x+6$.　(1) §249

故以可逆演算證命題(a)同時已證明其逆命題(b)，即不但證明除5外無他數可爲(1)之根，且已證5本數爲(1)之根.

例2. 解方程$x^2=9$.

設　$x^2=9$,　(1)

則　$x=3$,　(2)　或　$x=-3$,　(3) §257

故(1)除3及-3外無他根.

但3及-3均爲(1)之根，因自(1)導出之方程(2)及(3)之每個所演之步驟爲可逆故也. 如，自(2)及自(3)可得(1)，§257.

上例釋明下之普通原則：

求含x之方程之根，應先假設此方程爲恆等，然後由演

算法則自該式以求形如 $x=c$ 之諸方程.

由上法導出之諸 x 諸方程 $x=c$ 之一當 x 有一 c 值其演算為可逆的，即可斷定 c 為一根；設補全其逆算層次，即知其演算為逆的.

336 用演算法自一方程導出之 x 某值並未證其為根，此點甚為重要，須記憶之，欲證實此推斷．必知其方法為可逆者.

如，自 $x-2=0$, (1)

因得 $(x-2)(x-3)=0$, (2) § 253

故 $x=2$, 或 $x=3$. (3) § 253

然不應書此矛盾推斷 3 為(1)之根，因若 $x=3$ 則不能逆其演算，即不能以 $x-3$ 除 (2)之兩邊，因此除數 $x-3$ 為 0 故也.

換言之，若 $x=2$ 則能逆算，因 $x-3$ 非 0 而為 -1；於是 2 為 (1) 之根.

變 形 定 理

337 由上述之理．凡演算法可於方程之任何正當應用，皆可視為合理之變形，且設此種變形為可逆的，可知其方程之根不變，故得下定理:

338 定理 1. 下面方程之變形法，其根恆保持不變，即

1. 分用 § 259 之結合法則於各邊.

2. 加有定値之任意式於兩邊，或自兩邊減之.

3. 以同一常數 (非 0) 乘或除其兩邊.

因含此變形法之諸算法為可逆故也，§ 259.

玆述 2 及 3 之證如下:

設 A 及 B 表含 x 之二代數式，則方程 $A=B$ 之根，爲以之代入 A 及 B 中 x 能令 $A\equiv B$ 之諸數．§ 332.

然 x 之某值可使 $A\equiv B$ 及使 C 式之値有限時，必能令 $A+C\equiv B+C$，逆之亦然，§ 249；故 $A=B$ 之根與 $A+C=B+C$ 之根相同．

復次，設 c 表非 0 之任意常數，可使 $A\equiv B$ 之 x 任一値必能令 $cA\equiv cB$，逆之亦然，§ 253．故 $A=B$ 之根與 $cA=cB$ 之根相同．

如 § 334 第一題，方程

$$3x-4=x+6, \tag{1}$$

$$3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4), \tag{2}$$

$$2x=10, \tag{3}$$

$$x=5. \tag{4}$$

均有此同根 5．

式(2)用變形法 2 自(1)導來，(3)式用變形法 1 自 (2)導來，及(4)式用變形法 3 自(3)得之．

系．下面方程之變形法，其根恆保持不變，即： 339

1. 遷某項自一邊至他邊而變其號．

2. 消去可以同見於兩邊之項．

3. 變兩邊所有諸項之號．

因 3 等於以 −1 乘兩邊，而 1 及 2 等於自方程兩邊減該欲變之項．

如，設自 $\quad x-a+b=\ c+b \qquad (1)$

之兩邊減去 $\quad \underline{-a+b=-a+b}$

得 $\quad x\ =\ c+a \qquad (2)$

此減算之結果爲消去(1)式兩邊之 b 並將 $-a$ 移項．

用 § § 338，239 諸變換法，於 x 之有理整方程，不變其根，可化爲標準式 340

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

方程凡能化爲此形者卽能規定其次數，§329. 多於一個未知文字之有理整方程，亦可以同法化之.

如，$x^2+3x+5=x^2-4x+7$ 可化爲 $7x-2=0$. 故其次數爲一，非二也.

341 定理. 設 $A,B,$ 及 C 爲整式，則方程

$$AC=BC.$$

與下二方程有同根：

$$A=B \text{ 及 } C=0.$$

因 x 能令 $AC\equiv BC$ 之任一値必能致 $A=B$ 或 $C\equiv0$；及其逆，x 之任一値能令 $A\equiv B$ 或 $C\equiv0$ 必能致 $AC\equiv BC$，§§251,253.

此證明中須假定所指 x 之値 A,B,C 均得有限値，如上設 A,B,C 爲整式時，則此代入假定常眞；若 A,B,C 爲分式時，則不常眞.

於特例，若 A 及 C 爲整式，則方程 $AC=0$ 之根同於二方程 $A=0$ 及 $C=0$ 之諸根.

如，方程 $x^2=3x$ 之根同於二方程 $x=3$ 及 $x=0$ 之根，卽 3 與 0.

同理 $(x-1)(x-2)=0$ 之根，同於二方程 $x-1=0$ 及 $x-2=0$ 之根，卽 1 與 2.

342 故同以整函數 C 乘定方程之兩邊所生之影響爲增入外根，卽方程 $C=0$ 之根. 反之，於整方程式 $AC=BC$ 之兩邊消去相同整因子 C，必失去一根或數根，卽 $C=0$ 之根.

他如於分數方程，若以其分母諸因子之最低公倍乘其兩邊常無外根增入.

如，設方程爲 $1/x=1/(2x-1)$，而以 $x(2x-1)$ 乘其兩邊得 $2x-1=x$. 其根爲 1. 因 1 非 $x(2x-1)=0$ 之根，則並未增入他根.

系 整方程 $A^2=B^2$ 之根等於二方程 $A=B$ 及 $A=-B$ 之諸根. 343

因 $A^2=B^2$ 與 $A^2-B^2=0$ 有同根,§339.且因 $A^2-B^2\equiv(A-A)(A+B)$, 故方程 $A^2-B^2=0$ 與二方程 $A-B=0$ 及 $A+B=0$ 有等根, §341,故與二方程 $A=B$ 及 $A=-B$ 有等根 §339.

如, 方程 $(2x-1)^2=(x-2)^2$ 之根與方程 $2x-1=x-2$ 及 $2x-1=-(x-2)$有等根,卽 -1 與 1.

故方程 $A=B$ 兩邊同時平B之影響爲增入外根, 卽方 344
程 $A=-B$ 之根. 反之, 自 $A^2=B^2$ 化成簡單方程 $A=B$之影響失去某根,卽方程 $A=-B$ 之根.

因 $A^n-B^n\equiv(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+B^{n-1})$, 345
§308. 由 §343 之理, 知 $A^n=B^n$ 之根爲 $A=B$ 並 $A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+B^{n-1}=0$ 之根.

如, 因 $x^3-1\equiv(x-1)(x^2+x+1)$, 方程 $x^3=1$ 與方程 $x=1$ 及 $x^2+x+1=0$ 有同根.

自 §§338 至 345. 所釋諸定理,適用於多於一個未知文 346
字之方程,設有文字根,則以文字解答代入之,視 §355.

如, 由 §339, 方程 $x+2y-3=0$ 與方程 $x=-2y+3$ 有等根,卽 x,y 能適合(1)之各組値亦必適合(2),逆之亦然.

等根方程. 設二個或多個方程有同根(或解答)稱之爲 347
等根方程.

如, §338 方程 $A=B$ 及$A+C=B+C$ 爲等根者. 復次 §341, 方程 $AC=BC$ 對於 $A=B$ 及 $C=0$ 爲等根者.

但 $x^2=9$(1) 及 $x=3$ (2) 雖均有根 3,非爲等根, 因(1)尙有一根 -3,而 (2) 則無之.

簡單方程之解法

243 由§§338, 339之變形定理卽能導出下面含一未知文字x之簡單方程之解法.

欲解含x之簡單方程,先化爲$ax=b$之形. 則

1. 設$a\neq 0$, 此方程有獨根b/a.

2. 設$a=0$,而$b\neq 0$則此方程無根.

3. 設$a=0$及$b=0$,此方程爲一恆等式.

設方程有分數係數,通常先以諸分數之最小公倍,乘其兩邊各項. 此計算稱爲去分母.

然後遷其未知項於左邊及已知項於右邊, 且合併其各邊之同類項而化此方程爲$ax=b$之形. 若擬驗其結果, 可以其代入原方程試之.

例*1.* 解 $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{x}{6}-(4-x)$.

以最小公倍6乘其兩邊,清理其分數、

則 $4x-3(x-2)=x-6(4-x)$,

或 $4x-3x+6=x-24+6x$.

遷項且合併, $-6x=-30$.

故 $x=5$.

驗算: $\dfrac{2\cdot 5}{3}-\dfrac{5-2}{2}=\dfrac{5}{6}-(4-5)$.

例*2.* 解 $mx+n=px+q$.

遷項且合併, $(m-p)x=q-n$.

設$m\neq p$, 此方程有獨根$(q-n)/(m-p)$.

設$m=p$, 而$q\neq n$,則無根.

設$m=p$, 及$q=n$,則爲恆等式, 於x之各值均能適合之.

例3.　解　$(x+a)(x+b)=(x-a)^2$.

展之　$x^2+(a+b)x+ab=x^2-2ax+a^2$.

消去x^2，移項且集項，

則　$(3a+b)x=a^2-ab$,

故　$$x=\frac{a^2-ab}{3a+b}.$$

有時能由觀察法求得方程式之一根，若此方程式爲一次 349
方程式，則可謂業已完全解出，因此外並無他根也.

例.　解$(x-a)^2-(x-b)^2=(a-b)^2$.

此當然爲一簡單方程，設$x=b$卽化之爲恆等式$(b-a)^2=(a-b)^2$，故其根爲b.

設A及B表x之一次整式，則方程爲$AB=0$形者之 350
根，可解二簡單方程$A=0$及$B=0$而得之，§ 341. 同理，設A, B, C均爲一次式，則$ABC=0, AC=BC$, 及$A^2=B^2$之根，可由解一次方程式求得之.(§§ 341, 343).

例1.　解$(x-2)(x+3)(2x-5)(3x+2)=0$.

此方程與下列四方程爲同根，§ 347.

$$x-2=0, x+3=0, 2x-5=0, 3x+2=0.$$

故其根爲$2, -3, 5/2, -2/3$.

例2.　解　$4x^2-5x=3x^2+7x$.

此方程與下列二方程爲同根：

$$x=0 \text{ 及 } 4x-5=3x+7.$$

故其根爲0及12.

習　題　V

解下列方程：

1. $15-(7-5x)=2x+(5-3x)$.
2. $x(x+3)-4x(x-5)=3x(5-x)-16$.
3. $(x+1)(x+2)-(x+3)(x+4)=0$

4. $x=1+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}$.

5. $x-2[x-3(x+4)-5]=3\{2x-[x-8(x-4)]\}-2$.

6. $2\{3[4(5x-1)-8]-20\}-7=1$.

7. $\frac{1}{2}\{\frac{1}{3}[\frac{1}{4}(\frac{1}{5}x-1)-6]+4\}=1$.

8. $3-\frac{5-2x}{5}=4-\frac{4-7x}{10}+\frac{x+2}{2}$.

9. $\frac{3x-1}{3}+3=-\frac{x-4}{6}+\frac{3x+5}{4}-2\frac{1}{2}$.

10. $\frac{5x-.4}{.3}+\frac{1.3x-.05}{2}=\frac{13.95-8x}{1.2}$.

11. $3cx-5a+b-2c=6b-(a+3bx+2c)$.

12. $(b-c)(a-x)+(c-a)(b-x)+(a-b)(c-x)=1-x$.

13. $\frac{x+1}{a+1}+\frac{x}{a}=2$,(用觀察法).

14. $\frac{x+1}{a+b}+\frac{x-1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}$.

15. $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)x=\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-2x$.

16. $(2x-1)(3x-1)(4x+1)(5x+2)=0$.

17. $(x^2-x)(2x-5)=(x^2-x)(x+9)$.

18. $(x+2)^3-(x-2)^3=32x+16$.

19. $[(a+b)x-c]^2=[(a-b)x+c]^2$.

20. $(x^2-2x+1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0$.

應用問題

351 **解應用題.** 下列問題爲由已知關係以求某未知數之值,此所求數,與已知數間相互關係稱爲問題之條件.

各式中常以文字 x 表未知數之一,其餘未知數可藉已知條件以合 x 諸式表之,且連結此諸式構成簡單方程,即以代

數符號作問題之記錄，因解之以求 x 設此問題必爲所求 x 之值，連同其所推得他未知數之相當值.

然有時所得 x 值並非問題之解答. 因此問題可於未知數 352
之性質上加以限制，如限爲整數，而譯此問題之記述於 x 之方程則未表此限制也.

故已求得之方程中 x，在承認爲此題之解答前，須注意其結果是否爲所求種類之一數，設非其類，則斷定此題爲不能解.

例 1. 有二位數其數字之和爲 12. 設逆其數字之順序則得一數爲原數之 4/7，其數爲何?

此題有四未知數卽十位數字，個位數字，該數之值，及其逆數字之數值；然此四數均可以其個位數或十位數表之.

如令 $$x=\text{十位數字},$$

則 $$12-x=\text{個位數字},$$

$$10x+(12-x)=\text{所求數之值},$$

$$10(12-x)+x=\text{逆其數字順序之數值}.$$

由此題之其餘條件，得

$$10(12-x)+x=\tfrac{4}{7}[10x+(12-x)]. \qquad (1)$$

解之，得 $x=8$，此根爲小於 10 之整數，可爲此題之答. 因此，$12-x$ 或 4 亦眞，故所求數爲 84.

須注意者，若此題略加更改卽不能解. 如設逆其數字之順序得兩倍該數之值，以代 (1)，得方程

$$10(12-x)+x=2[10x+(12-x)]. \qquad (2)$$

解(2),得$x=32/9$,爲一分數不能作此問題之答.

353 設用問題以計量,如時間等,注意用代數文字述題意時,並非表量之本體,僅爲已知單位之度數而已.尤須愼記以文字表已知或未知同類量之度數時須用同一單位.

例 1. 一池有進水管 A,三小時可以流滿 及一放水管B,3 小時又四十分可以放盡.設兩管齊開問幾時後可注滿此空池?

令 x 表所求時間之數.

則 $1/x$ 爲 A 及 B 同開一小時流入之水量.

但 A 獨開一小時注入量爲 $1/3$.

且B獨開一小時洩出量爲 $1/3\frac{2}{3}$ 或 $3/11$ (指池內全水量而言).

故 $$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{3}{11},\text{或}\frac{2}{33}.$$

故得 $x=33/2$ 小時,或 16 小時 30 分.

例 2. 一水手在河內以 15 分鐘逆流划行 2 哩,若於順流則 10 分足矣.問流速若何?又其在靜水中划行速度若何?

令 $x=$ 每分鐘水流之哩數.

水手逆流之划速爲每分鐘$2/15$哩,於靜水中爲$2/15+x$哩.

水手順流之划速爲每分鐘 $2/10$ 或 $1/5$ 哩,於靜水中爲 $1/5-x$.

故 $$\frac{2}{15}+x=\frac{1}{5}-x,$$

因得 $$x=\frac{1}{30}\text{(每分鐘哩數)}.$$

及 $$\frac{2}{15}+x=\frac{1}{6}\text{(每分鐘哩數)}.$$

例 3. 在二點三點之間,何時分針與時針指反對方向?

令 x = 二點後所求時間之分數.

因分針自 XII 起而行 x 分之距離。

時針在分針前 10 分之 II 處起程，但其速度僅爲分針 1/12。

故分針在 XII 後之距離爲 x 分，而時針在 XII 後之距離爲 $10+x/12$ 分。

然由此問題之條件，於所求時間，分針應在時針之前相距 30 分。

故 $$x=(10+\frac{x}{12})+30,$$

解之， $$x=43\tfrac{7}{11}\text{分}.$$

故在二點後 $43\frac{7}{11}$ 分，或三點前 $16\frac{4}{11}$ 分二針指反對方向。

於問題之記述中有時以文字 a,b,c 表已知數，所得 x 354
之值爲 a, b, c 所表之式，此式爲此諸字（非他種字）組成之定值，僅表此問題之許可解答者。下面問題之討論，如郵差問題，即說明此目的。

例． 二郵差 A 及 B 沿同路各以每時 m 及 n 哩之速度同向而行。起程時 B 在 A 前 d 哩，問二人何時相遇？

令 $x=$ 至二人相遇時所行之小時數。

則 A 行 mx 哩，及 B 行 nx 哩；且因 B 在 A 前 d 哩，

得 $$mx=nx+d, \tag{1}$$

$$(m-n)x=d, \tag{2}$$

故 $$x=\frac{d}{m-n}\text{小時}. \tag{3}$$

1. 設 A 追及 B，x 之值須爲正；且因假設 d, m, n 皆表正數，故必須 $m>n$。此適合於設 A 欲追及 B，其行必速於 B 之當然事實。

2. 若設 $m<n$，x 得一負值，玆可解釋其意爲 A 及 B 曾在 $d/(n-m)$ 小時以前相遇。

3. 設 $m=n$，則無適當解釋 因自 (1) 導至 (3)，含有以 $m-n$ 或 0 爲除數之演算．但可自(1)導至 (3) 設 m 及 n 有些微之差，此意關係非小．設於 (3) 內以 m 爲變數，雖常大於 n 但繼續漸近而等於 n，則分數 $d/(m=n)$ 亦成變數繼續增大而至無限，§ 510．此諸理論合於下述事實，A 之速度超過於 B 者漸小，則 A 追及 B 所需之時間漸長，設其速度等於 B 之速度，則 A 永不能追及 B 也．

4. 最後，設 $m=n$ 及 $d=0$，則 x 之各値常適合方程(1)，卽兩人同速度進行，現在一處且亦在一處也．

習　題　VI

1. 有二位數，其數字和爲 14．若易數字之序，則較原數增 18．問原數爲何?

2 何數除 156，其商爲 11，餘數爲 2?

3. 有二數，其差爲 298．若以小數除大數，商及餘數皆爲 12．二數爲何?

4. 有二位數，其十位數字爲個位數字之二倍．如十位數字加 1，個位數字加 5，則爲先倒其次序再自十位數字減 1，個位數字減 5，所得數之三倍．問該數爲何?

5. 某數減 2 所得餘數之四倍等某數之二倍加較某數小 1 之數之半．某數爲何?

6. 父現年爲子之四倍．20 年後，父年爲子年之二倍?問父子現年各若干?又若干年後，父年爲子年之三倍?

7. 一小池以第一管注水，3 小時可滿，以第二管洩水，2 小時可盡，以第三管洩水，4 小時可盡．設池中滿盛清水，而三管齊開，問須若干時後池水方能洩盡?

8. A與B同作一工程 10 日可成，但 7 日後，A 因病休工，B 於 5 日內單獨完成。問每人獨作，各須幾日?

9. 時鐘之二針，於八時至九時間，何時成同一方向?何時成相反方向?

10. 錶之二針，當四時後何時成直角?

11. 有一不正確之時鐘，於時針與分針連續相疊合時須間隔 66 分鐘。問時鐘錯誤幾何(每小時若干秒)?

12. A,B,C,D 四人分洋 1300 元，B 爲 A 之 $\frac{2}{3}$，C 爲 B 之 $\frac{2}{3}$，D 爲 C 之 $\frac{2}{3}$。問各得洋若干?

13. 某富翁將其財產 $\frac{1}{2}$ 及 1000 元給長子；餘數 $\frac{1}{2}$ 及 1000 元與次子；又以其餘之 $\frac{1}{2}$ 及 1000 元與三子，仍餘 3500 元，問全產總數若干?

14 若加二呎於正方形之各邊上，則面積加大 100 方呎。問原正方形之面積如何?

15. 某旗竿之高不知；但知升旗之繩結於竿頂者，較竿長 2 呎，且繩之末端可達距離竿足 18 呎之點。求竿高。

16. 袋中有各種銀幣若干，一元者之個數爲半元者之二倍，一角者之三倍，而銀之總數爲 11.50。問三種銀幣各若干枚?

17. 某人存款 500 元，利率一部爲 6%，一部爲 4%，其存款全部之平均利率爲 $5\frac{1}{2}$ %。問此人於二種利率之下，各銀存若干?

18 有每磅價洋 20 分及 30 分之咖啡二種，問以何種比例混合之，始得每磅價洋 26 分?

19. 有銀與銅之合金一磅，含銀二份，銅三份，問須再加銅若干，始得三成銀，九成銅之合金?

20　設於一磅之某液體內，加入某量之水，則此液體中含酒精 30%；如加二倍某量之水，則含酒精 20%，求每次加水若干，及原含純酒在原液體中所占之百分率。

21．火車一列速率每小時 45 哩，於晨 10 時自 P 城開向 J 城，另一列，速率每小時 50 哩，於晨 10 時 30 分自 J 城開向 P 城。設二城距離 90 哩，二車何時相遇，且相遇處距離 J 城若干哩？

22．設二車起始開行之時間仍如上題所述，且相遇於 J 城及 P 城間之中點如慢車之速率爲快車之 $\frac{3}{5}$，問二車之速率爲何，又於何時相遇？

23．有兔爲狐所逐，二者相距爲 50 兔步．設兔行 5 步時狐行 4 步，但狐行二步之距離適當兔之三步，問兔再行若干步，卽爲狐追及？

24．金十九兩，置於水中重十八兩，銀十兩置於水中重九兩，今有二者之合金，於空氣中重 387 兩，於水中重 351 兩，問含金銀各若干？

25．有旅客起程，每日用其囊中金之 $\frac{1}{2}$ 又 2 元，至第三日，其金告罄．問此人共帶洋若干？

26．設角錐體之底爲一正方形，其四面各三角形之高與其底相等．若底位與高各增 3 吋，則角錐體之面積增 117 方吋。問角錐體之面積爲何？

27．有二位數，其數字之和爲 a．如變換數字之次序，則該數增 b，問此數爲何？試證此答數僅適於 $9a \geqq b$ 及 $9a+b$ 與 $9a-b$ 適被 18 除盡者．

28．設 A，B 二人之現年爲 a 與 b，問前後有無 a 年 c 倍於 b 年之時；若有，必在何時？

按 § 345，以 a、b，c 之諸值，討論其結果。

IV. 聯立一次方程組

聯立方程

含二文字 x 及 y 之一條件方程，可有無限對 x,y 之值適 355
合之.茲稱其各對之值爲方程之解答. 多於二未知文字之一方程亦然.

如方程 $2x+y=3$ (1)，設予 x 以任意值，而 $3-2x$ 之值相當於 y，於(1)內以任一數 b 代 x，及以 $3-2b$ 代 y，則得一眞實恆等式 $2b+(3-2b)=3$.

如，$x=0, y=3; x=1, y=1; x=2, y=-1;$……均爲(1)之解答.

註. 於研究中設有二未知文字 x,y，則方程 $x=2$ 意謂 356
x 值恆爲 2，而 y 有任何之值；換言之，方程 $x=2$ 有無限多個解答.其他多未知數方程式中凡僅含未知數之一之方程式莫不如此.

故擬求能否有一對 x 及 y 之值同時適合於二已知方程 357
中之 x 及 y，此對之值通常可以存在.

如兩方程 $2x+y=3$ 及 $4x+3y=5$ 則 $x=2$ 及 $y=-1$ 均能適合；因 $2\cdot2+(-1)=3$，及 $4\cdot2+3(-1)=5$.

聯立方程. 設各未知文字於諸方程內代表同數，則此 358
含定數未知文字之兩個或多個方程稱爲聯立方程 (*simultaneous, equations*).

如，方程 $2x+y=3$ (1) 及 $4x+3y=5$ (2)，x 於 (1) 於 (2) 均表同數，且 y 亦然，則 (1) 及 (2) 爲聯立方程.

諸方程中之各式未必全含各未知文字. 如 $x=2$, $y=3$ 亦可組成一對聯立方程.

359 尋常聯立方程之個數只許等於或少於未知數之個數.

如兩方程 $x=2$ 及 $x=3$ 不得爲聯立方程，因 x 不能同時爲不同之兩數故也.

360 未知數一組解答能適合於聯立方程組者稱爲該組之解答.

如 $x=2$, $y=-1$ 爲 $2x+y=3$, $4x+3y=5$ 之解答.

361 解聯立方程組，即求其解答或證明其無解答.法

362 解之理由與 §§ 334,335 所述相似.

例如，x, y 之方程式，吾人先假定 x, y 確有值能同時適合兩方程式，在此假定內，方程式可視作恆等式用計算法則處理之. 用此法則能將方程變爲一對（或數對）形同 $x=a$, $y=b$ 之方程式.如此所得之 $x=a$, $y=b$ 設用逆算步驟仍導回原方程式，即可斷定 a, b 爲其解答之一，因此演算爲可逆故也.

上面所含之唯一新原則如下：

363 **代替原則.** 假定所有已知諸方程式確有值可以適合，若由此假定推得二式 A, B 之值相同，則在本組任何方程式中，一式均可以他式代之.

例．解
$$2x+y=12, \tag{1}$$
$$y=8. \tag{2}$$

由假定 x 及 y 均適合於兩方程，在 (2) 內，y 之值爲 8，故在 (1) 內 y 之值亦爲 8，以 8 代 y 於 (1)，則得
$$2x+8=12, \tag{3}$$
是以
$$x=2. \tag{4}$$

所以若(1)，(2)有解答，其解必爲 $x=2$，$y=8$．

反之 $x=2$，$y=8$ 爲(1)，(2)之解答，故自(1)，(2)至(4)，(2)之演算爲可逆者．

如由(4)得(3)，且由(3)，(2)而得(1)．

註 1．替代原則實爲由等式法則（§§249，253，257）及等式通則推得之結論，若 $a=b$，$b=c$ 則 $a=c$，§261．　364

玆證明前用替代法之正確如下：

若 $y=8$，則 $y+2x=8+2x$，或 $2x+8=2x+y$，§249．

又若 $2x+8=2x+y$ 及 $2x+y=12$，則 $2x+8=12$，§261

註 2．自然此原則只用於眞正聯立方程．　365

如自 $x=2$ 及 $x=3$，則不能書成悖謬結果 $2=3$，因 $x=2$，$x=3$ 非眞正聯立方程故也．

變 形 定 理

就前數節所論，將計算法則用於一對方程式，可視爲對於此對方程式之合理變形．又若此種變化爲可逆，則可斷定此對解答不變．　366

故下諸定理，能適用於任何多個未知文字之方程．

定理 1． 聯立方程設將§§338，339之變形法，分別應用於各方程則方程之一對解答不變．　367

因用此變形法每個方程之解答不變.

如一對方程 $3x-2y=1$ 及 $y-2x=5$ 與 $3x-2y=1$ 及 $y=5+2x$ 之解答相同.

368　**定理 2.**　一對方程

$$y=X,\ f(x,y)=0$$

之解答與 $y=X,\ f(x,X)=0$ 之解答相同.

此處 X 表 x 之任一式(或常數), $f(x,y)$ 表 x 及 y 之任一式, $f(x,X)$ 表以 X 代 y 代入 $f(x,y)$ 之結果, § 280.

此定理僅爲替代原則之特例.

如一對方程 $y=x+2$ 及 $3x-2y=1$ 之解答與 $y=x+2$ 及 $3x-2(x+2)=1$ 之解答相同.

369　**定理 3.**　一對方程

$$A=B,\ C=D$$

之解答與 $A+C=B+D,\ C=D$ 之解答相同.

因 $A=B,\ C=D$ 之解答與 $A+C=B+C,\ C=D$ 之解答相同, §338, 及 $A+C=B+C,\ C=D$ 之解答與 $A+C=B+D,\ C=D$ 之解答相同, § 363.

如 $x+y=5$ 及 $x-y=1$ 之解答與 $x+y+(x-y)=5+1$ 及 $x-y=1$ 之解答相同.

故亦與 $2x=6$ 及 $x-y=1$ 之解答相同.

370　**系.**　由 § 369 之定理可知以常數(非 0)乘各已知方程兩端其解答不變. 故

若 k 及 l 表任何常數(非0), 則一對方程 $A=B,\ C=D$ 之解答同於二方程 $kA\pm lC=kB\pm lD,\ C=D$ 之解答.

定理 4. 設 A, B 及 C 均爲整式，則二方程 $AB=0, C=0$ 之解答與 $A=0$, $C=0$ 及 $B=0$, $C=0$ 二對解答相同． 371

因 $AB=0$ 之解答同於 $A=0$ 及 $B=0$ 之解答，§341.

故 $AB=0$, $C=0$ 之解答同於 $A=0$, $C=0$ 及 $B=0$, $C=0$ 共有之解答．

如 $xy=0$ 及 $x+y=2$之解答，

卽 $x=0$ 及 $x+y=2$,

$y=0$ 及 $x+y=2$

共有之解答．

同解組． 兩組聯立方程之解答相同者謂之同解組． 372

如一對方程 $x+2y=5$, $2x+y=4$ 與一對方程 $3x+y=5$, $4x+3y=10$ 之解答同爲 1, 2；是爲同解組．

又一對 $xy=0$, $x+y=2$，與兩組 $x=0$, $x+y=2$ 及 $y=0$, $x+y=2$ 爲二同解組．

消去法．一對簡單方程之解法

消去法． 自一對方程消去一未知數 x，卽由此二方程導出一不含 x 之新方程． 373

玆進而說明含 x, y 之二方程消去 x 或 y 之最常用之法，且由此結果導出方程之解法．

代替法． (*method of substitution*)． 此法根據於 §368 定理． 374

例．解 $x+3y=3$, (1)

$3x+5y=1$. (2)

解 (1) 之 x 以 y 値表之， $x=3-3y$. (3)

於 (2) 以 $3-3/y$ 代 x, $3(3-3y)+5y=1$. (4)

解 (4)， $y=2$. (5)

在 (3) 內以 2 代 y， $x=-3$. (6)

故(1),(2)之解答只有一組，卽 $x=-3, y=2$,

因按§§367,368,各對方程(1),(2);(3),(2);(3),(4);(3),(5);(6),(5)之解答相同;而(5),(6)之解答爲 $x=-3$, $y=2$.

由§362直接可得同一結果．因(1),(2)演至(5),(6)爲可逆故也．

證實．$-3+3\cdot2=3$, (1)　$3(-3)+5\cdot2=1$. (2)

此處之(4)由代替法消去 x 而得．

由代替法自一對方程消去一未知數 x,須自一方程解 x 以他文字之式表之,然後在另一方程內以此式代 x．

375　下例釋此法之特式稱爲比較消去法(*elimination by comparison*)．

例．解

$$x+5y=7, \qquad (1)$$

$$x+6y=8. \qquad (2)$$

在(1),(2)內解 x 以 y 值表之,

$x=7-5y$, (3)　　$x=8-6y$. (4)

兩式皆爲 x 之值故相等,　$7-5y=8-6y$. (5)

解(5),　$y=1$. (6)

在(3)內，以1代 y,　$x=2$. (7)

故(1),(2)之解答爲 $x=2, y=1$.

376　**加減法**．此法根據§§369,370之定理．

例．解

$$2x-6y=7, \qquad (1)$$

$$3x+4y=4. \qquad (2)$$

以3乘(1),　$6x-18y=21$. (3)

以2乘(2),　$\underline{6x+8y=8}$. (4)

自(3)減(4),　$-26y=13$. (5)

故　$y=-\frac{1}{2}$. (6)

在(1)內以 $-\frac{1}{2}$ 代 y, $2x-6(-\frac{1}{2})=7$. (7)

$x=2$. (8)

故(1),(2)之解答，爲 $x=2, y=-\frac{1}{2}$.

因按§§367,368,370．各對方程(1),(2);(1),(5);(1),(6);(7),(6);(8),(6)之解答相同;而(8),(6)之解答爲$x=2$,$y=-\frac{1}{2}$.

證實．$2\cdot2-6(-\frac{1}{2})=7$,(1) $3\cdot2+4(-\frac{1}{2})=4$.　(2)

此處用減法消去x.

自(1),(2)亦可用加法直接消去y值如下:

以2乘(1),　$4x-12y=14$.　(9)

以3乘(2),　$9x+12y=12$.　(10)

加(9)與(10),　$13x\qquad=26$.　(11)

與以前相同,　$x\qquad=2$.　(12)

自一對一次方程用加減法消去一文字如x,須先用適宜數乘各方程使x之係數相等,然後按其符號相同與否而加減之.

特例． 設$A=0$,$B=0$爲表x,y之一對一次方程．前數節§§374.376已證明$A=0$,$B=0$有一對解答且只有一對解答,除非消去x時,亦將y消去．此僅能於下類中見之． 377

1. 若A與B之關係爲$A\equiv kB$,此處k爲常數,則方程$A=0$,$B=0$稱爲相依方程.

既然$A=kB$,顯然$B=0$之解答亦爲$A=0$之解答,反之亦然,故$A=0$,$B=0$有無限解答.

如$A=2x+6y-10=0$(1),$B=x+3y-5=0$(2).

此處$A\equiv2B$,故$A=0$,$B=0$爲相依方程．若以2乘(2)相減,則x,y同時消去.

2. 若$A\equiv kB+l$,此處k與l表常數,l非0則$A=0$與$B=0$爲不合理.

於此類中,$A=0$ 與 $B=0$ 無解答;因能令 $B\equiv0$ 之 x,y 各值可致 $A\equiv l$ 而非 $A\equiv0$。

設 $A=2x+6y-9=0$(3),$B=x+3y-5=0$ (4)。

此處 $A\equiv2B+1$, 故 $A=0$ 與 $B=0$ 爲不合理. 若自 (3),(4)消去 x 同時亦消去 y;

378　**解題公式**.　一對 x, y 之一次方程式均可化爲下式:

$$ax+by=c, \qquad (1) \qquad a'x+b'y=c', \qquad (2)$$

此處 a,b,c,a',b',c',表已知數或式。

按 § 377,(1),(2)有一對解答,只有一對解答,但 $a'=ka$ 及 $b'=kb$, 卽 $ab'-a'b=k(ab-ab)=0$ 時除外.

用 §376之代替法分別消去x,y則可得其解答.其結果爲

$(ab'-a'b)x=b'c-bc'$(3),　$(ab'-a'b)y=ac'-a'c$(4).

若 $ab'-a'b\neq0$,(1),(2)之解答爲

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}, \qquad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}. \qquad (5)$$

此公式若寫爲下式則更易記憶.

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{-1}{ab'-a'b}. \qquad (6)$$

上面(1), (2)方程, 設 $ab'-a'b\neq0$, 固不能預知其有 (1), (2) 一解答,其意僅證明 (1), (2) 若有解答必爲 (5) 也。

習題 VII

解以下各對方程之 x,y:—

1. $\begin{cases} x+y=62, \\ x-y=12. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} 6x-5y=25, \\ 4x-3y=19. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 45x-13y=161, \\ 18x+11y=32. \end{cases}$　　4. $\begin{cases} x-3=7-x, \\ 8x-3y-61=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 12x=9-10y, \\ 8y=7-9x. \end{cases}$　　6. $\begin{cases} 2y-3x=0, \\ 5x-3y-2=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x/.3+5y=3\frac{1}{2}, \\ 5x+3y=1.65. \end{cases}$　　8. $\begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-3y)+10, \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} (x+2)(y+1)=(x-5)(y-1), \\ x(4+y)=-y(8-x). \end{cases}$

10. $\begin{cases} ax+by=a^2+2a+b^2, \\ bx+ay=a^2+2b+b^2. \end{cases}$　　11. $\begin{cases} ax+by=c, \\ px=qy. \end{cases}$

12. $\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2), \\ (a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2). \end{cases}$　　13. $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+\frac{y-x}{2}=5, \\ \frac{x}{2}+\frac{x+y}{9}=7. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \frac{x-y}{4}-\frac{x+2y-5}{6}=\frac{y-3}{4}-\frac{y+2x-5}{6}, \\ 5x-2y+6=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{c}, \\ \frac{x}{a'}-\frac{y}{b'}=\frac{1}{c'}. \end{cases}$　　16. $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1+x, \\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1+y. \end{cases}$

17. 證明下方程爲不合理：

$$1\tfrac{1}{2}x-2\tfrac{1}{2}y=10,\quad 6x-10y=15.$$

18. 在習題 15 內試決定 a,b,c,a',b',c' 之值如何始致方程爲 (1) 不合理 (2) 相依。

非一次之一對方程其解答可按兩一次方程之解法而得者

關於 x 及 y 之非一次之二方程，可視爲關於 x,y 之某二 379
函數之一次方程。於是以此二函數作未知數而解之，自此結果常能導出 x 及 y 之值。

例 1. 解 $\quad \frac{2}{x}+\frac{5}{3y}=1,\ \frac{9}{x}+\frac{10}{y}=5.$

各方程爲 $1/x$，及 $1/y$ 之一次方程。

求解 $1/x, 1/y$ 得 $1/x=1/3, 1/y=1/5$。故 $x=3,\ y=5,$

例2. 解 $3x+\frac{y}{x}=6$, $7x-\frac{2y}{x}=1$.

解 x 及 y/x 得 $x=1$ 及 $y/x=3$. 故 $x=1, y=3$.

380 已知一對方程可化爲 $AB=0$, $A'B'=0$ 之形, A, B, A', B', 表 x, y 之一次整式. 則按 § 371 之定理其諸解答可由四對一次方程 $A=0, A'=0$; $A=0$, $B'=0$; $B=0 A'=0$; $B=0, B'=0$, 得之.

例. 解 $$x^2-2xy=0, \tag{1}$$
$$(x+y-1)(2x+y-3)=0. \tag{2}$$

此對方程與下四對等値:

$$x=0, \quad x+y-1=0, \tag{3}$$
$$x=0, \quad 2x+y-3=0, \tag{4}$$
$$x-2y=0, \quad x+y-1=0, \tag{5}$$
$$x-2y=0, \quad 2x+y-3=0. \tag{6}$$

解此四對(3), (4), (5), (6)得(1), (2)之解答爲 $x, y=0, 1; 0, 3; 2/3, 1/3; 6/5, 3/5$.

381 總之, 若 $ABC\cdots\cdots$ 及 $A'B'C'\cdots\cdots$ 表 x, y 之 m 個及 n 個一次整式因子之積. 則二方程 $ABC\cdots\cdots=0$, $A'B'C'\cdots\cdots=0$ 之所有解答, 可由第一積之各因子及第二積之各因子均使之等於 0, 每種各取一式而配合之共成 mn 對一次方程. 解之卽得其解答.

若諸對一次方程無相依及不合理者, 則可得 mn 個解答, 卽已知聯立方程之解答數目, 爲其次數之積.

習題 VIII

解以下各方程:

1. $\frac{7}{2x}+\frac{1}{3y}=0$, $\frac{8}{x}+\frac{14}{y}+3=0$.

2. $10x+\frac{6}{y}=5$, $15x+\frac{10}{y}=8$.

3. $\frac{y}{x}=\frac{2(3-y)}{x}+\frac{3}{2}$, $\frac{y+3}{x}=\frac{3y-5}{x}+1$.

4. $xy=0$, $(x+2y-1)(3x-y+2)=0$.

5. $xy-y=0$, $3x-8y+5=0$.

6. $x(x-y)(x+y)=0$, $x+2y-5=0$.

7. $(x-1)(y-2)=0$, $(x-2)(y-3)=0$.

8. $y^2=(x-1)^2$, $2x+3y-7=0$.

9. $(2x+y)^2=(x-3y+5)^2$, $(x+y)^2=1$.

10. $(x-5y+8)(x+y3+5)=0$, $(2x+y+5)(5x+2y-14)=0$.

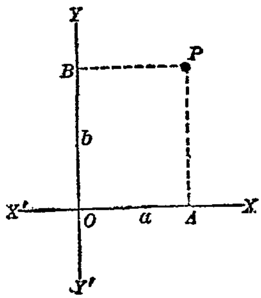
兩變數之一次方程之圖象

一對 x 及 y 值之圖象. 一對變數 x, y 之值最好用平面 352
上一點表之.

在平面選兩直交直線 $X'OX$, 及 $Y'OY$ 爲軸, 其交點 O 稱爲原點; 且選適宜單位以度線長.

若已知一對值爲 $x=a, y=b$ 則作圖如下:

在 $X'OX$ 上按 a 之正或負向右或左截一線段 OA, 其長爲 $|a|$ 即 a 之絕對值.



同樣在 $Y'OY$ 上按 b 之正或負向上或下截一線段 OB, 其長爲 $|b|$.

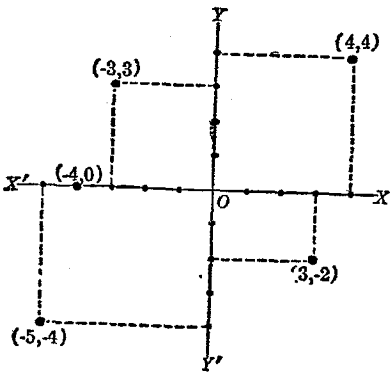
過 A 與 B 作線各平行於 $Y'OY$, 及 $X'OX$, 則其交點 P 爲二對值 $x=a$, $y=b$ 之點或圖

象．爲便利計以記號(a,b)表二對值$x=a,y=b$及其圖象P.

數a或一個等線段OA或BP稱爲P之橫坐標；而數b或一個等線段OB或AP稱爲P之縱坐標．合稱爲P之坐標．

且稱$X'OX$爲x軸或橫軸，$Y'OY$爲y軸或縱軸．

觀此法，可導x,y之各對值與平面上諸點成一一對應§2；卽有一對值(a,b)則有一點P，反之每一點P必能量P至各軸$Y'OY$，$X'OX$之距離予以適當符號而得一對數值(a,b)．於特數$(0,0)$之圖象爲原點，$(a,0)$爲x軸上一點，$(0,b)$爲y軸上一點．



例．描諸對值$(4,4)$，$(-3,3)$，$(-4,0)$，$(-5,-4)$，$(3,-2)$．

按上述之法繪出各對數值之圖象如左圖．

須特別注意圖象之位置與其坐標符號關係．

383 **含x，y之方程之圖象．** 含x及y之一已知方程有無限實數解答，通常含此一切解答之圖象爲一定曲線，且線內無此解答外之其他諸點．茲稱此曲線爲該方程之圖象．

然一方程之圖象可含多於一個之曲線. 注意直線亦含於曲線之中.

定理. 含一變數或兩變數 x, y 之各一次方程其圖象爲一直線. 384

因此凡一次方程常稱爲直線方程.

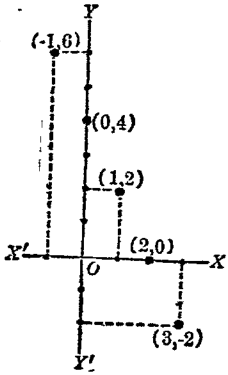
學者可任選特殊一次方程繪其若干解答,上定理自易證實.

如取方程 $y=-2x+4$.

設 $x=0,1,2,\ 3,\cdots\cdots$

得 $y=4,2,0,-2,\cdots\cdots$

描諸對值 (0, 4), (1, 2), (2, 0), (3, −2)……如右圖,知其圖象在同一直線上.

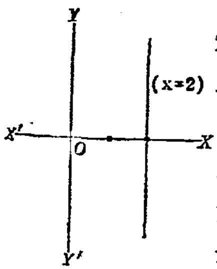


茲證明上定理如下:

1. 當方程爲 $x=a$ 或 $y=b$ 之形時.

例. 求 $x=2$ 之圖象.

在此方程內無論 y 爲何值而 x 之值永爲 2, § 356, 故其圖象平行於 y 軸, 在 y 軸右邊之距離爲 2, 此線含橫坐標爲 2 之一切點, 且只此諸點. 尋常 $x=a$ 之圖象爲平行於 y 軸距 y 軸 $|a|$ 之直線, 其在 y 軸之右或左按 a 之爲正或負而定; 又 $y=b$ 之圖象爲平行於 x 軸距 x 軸 $|b|$ 之直線, 其在 x 軸之上或下按 b 爲正或負而定.

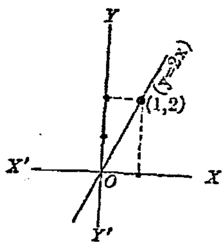


特例, $y=0$ 之圖象爲 x 軸, $x=0$ 之圖象爲 y 軸.

2. 設方程爲 $y=mx$ 之形者.

例. 求 $y=2x$ 之圖象.

其圖象爲經過原點(0,0)及(1,2)之直線. 因此線各點之縱坐標二倍其橫坐標, 且僅此類諸點. 總之, $y=mx$ 之圖象爲一直線, 此直線經過原點及點 $(1,m)$.

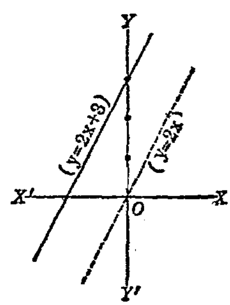


3. 設方程爲 $y=mx+c$ 之形者.

例. 求 $y=2x+3$ 之圖象.

顯然此方程之圖象之各點可由 $y=2x$ 圖象之各點之縱坐標, 各增 3 而得, 即直線. $y=2x$ 平行向上移至交 y 軸爲 3 之處.

總之, $y=mx+c$ 爲一直線, 平行於 $y=mx$ 之圖象過 y 軸之點與原點距離爲 $|c|$, 在原點之上或下按 c 爲正或負而定.



385 **求作直線.** 因任意兩點可定一直線, 故可求任意方程 $ax+by+c=0$ 之圖象, 如下例.

例. 描 $3x+y-6=0$ 之圖象.

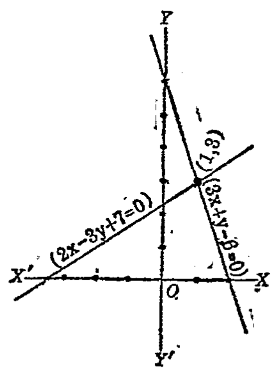
先設 $y=0$, 則 $x=2$. 再設 $x=0$, 則 $y=6$.

故只描此兩點(2,0)及(0,6), 且經過此兩點作一直線即得方程之圖象, 此兩點爲圖象與兩軸之交點(觀 §386之圖).

此法不適用於形如 $x=a, y=b, y=mx$ 之方程. 其繪法已詳 § 384 之 1 及 2.

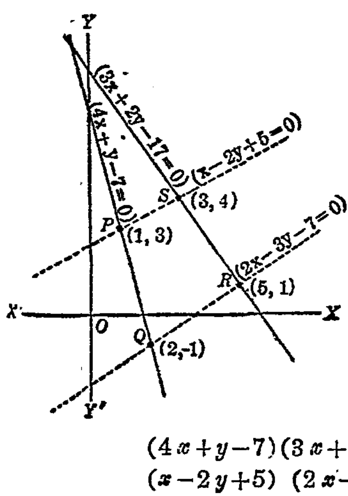
一對聯立一次方程之圖解.　表兩方程圖象之二直線, 386
有一交點;此點且只有此點為兩方程之解答之圖象.

如 $2x-3y+7=0$ (1), 及 $3x+y-6=0$ (2)之解答為 $x=1$, $y=3$. 如圖表明 (1) 及 (2) 之圖象交於點 (1,3).



若兩已知方程為不合理者, § 377, 2, 則其圖象無公共點, 即為兩平行線; 若已知方程為相依者, § 377, 1, 則其圖象之一切點完全密合, 即為兩重合線. 387

如, 方程, $y=2x$, 及 $y=2x+3$ 為不合理者, 其圖象為兩平行線, § 384, 3. 又 $y=2x$ 及 $3y=6x$ 為相依方程, 其圖象為同一直線.



因 $AB=0$ 之解答為 $A=0$, $B=0$ 之解答, 故方程 $AB=0$ 之圖象為 $A=0$, $B=0$ 共有之圖象, §§ 341, 346. 388

例. 求下列方程之圖象:

$$(4x+y-7)(3x+2y-17)=0, \qquad (1)$$
$$(x-2y+5)\ (2x-3y-7)=0, \qquad (2)$$

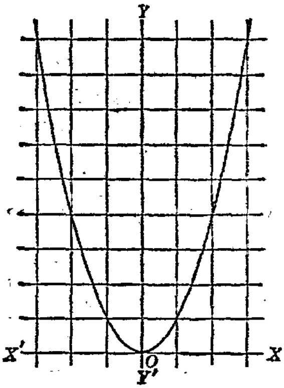
及其解答之圖象.

(1) 之圖象含 $4x+y-7=0$ 及 $3x+2y-17=0$ 之圖象，各以直線 PQ 及 RS 表之.

(2) 之圖象含 $x-2y+5=0$ 及 $2x-3y-7=0$ 之圖象，各以直線 PS 及 QR 表之.

PQ 及 RS 交 PS 及 QR 於 P,Q,R,S 諸點，即 (1) 及 (2) 之解答之圖象為 $(1,3),(2,-1),(5,1),(3,4)$.

389　**x 及 y 之高次方程之圖象.**　求方程之若干解答，而繪出之，然後過此諸點作一曲線，所用解答務使極相接近，則所得曲線與其眞確圖象相差甚微.



作此種曲線最好用方格紙，如左圖.

例. 求方程 $y=x^2$ 之圖象.

設 $x=0,1,2,3,4,\cdots\cdots$

得 $y=0,1,4,9,16,\cdots\cdots$

又設 $x=-1,-2,-3,-4,\cdots$

得 $y=1,4,9,16,\cdots\cdots$

取正方形之一邊作長之單位，描出諸相當當 $(0,0)\ (1,1)(2,4)\cdots,(-1,1)(-2,4)\cdots$ 過諸點作勻滑曲線，此圖象除 $x=1$，$x=-1$ 間之部分外其餘諸點足能表其大概性質.

此曲線全在 x 軸之上，向上伸展無限，且關於 y 軸為對稱，相當於 $x=a$ 及 $x=-a$ 而 y 有同値.

設　$x=\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\cdots\cdots$

得　$y=\frac{1}{4},\frac{1}{16},\cdots\cdots$.

繪出其一或二相當點，則得接近 x 軸部分之圖象.

習 題 IX

1. 描以下 x 及 y 之各對值:

$(0,0)$, $(5,0)$, $(0,-7)$, $(6,2)$, $(-7,-1)$, $(-4,3)$, $(5,-9)$.

2. 求以下各方程之圖象:

$x=0$, $y=0$, $2y+7=0$, $3y+x=0$, $x+y+5=0$,

$7x+3y-18=0$, $3x-4y=24$.

3. 求以下之圖象:

$xy=0$, $(x+y-3)(x-2y)=0$, $x^2-1=0$, $x^3=4y^2$, $x^2+y^2=0$.

4. 以圖解法求以下各對方程之解答,並以代數解法驗之.

(1) $\begin{cases} x+y-3=0, \\ x-2y=0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3y-2x+19=0. \\ 2y-3x+4=0. \end{cases}$

5. 同法解以下各對方程:

(1) $\begin{cases} (x-4y+6)(x+3y+6)=0, \\ (3x+2y-10)(2x-y+5)=0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (y-x-2)x=0, \\ (y-x+2)y=0. \end{cases}$

6. 求下兩方程之圖象:

$y=-(x-1)^2$, $y=x^2$.

含多未知數之聯立一次方程組

含 n 個未知數之 n 個方程之解法. 一對方程含三未知 390
數必有無限解答.

如,二方程 $x=2z$, $y=z+1$ 有無限解答;設予未知數 z 以任何值 b,而以 $2b$ 及 $b+1$ 二值予 x 及 y,則二方程均能適合.

但含三未知文字之三個一次方程組通常有一解答,且只 391
有一組解答.其解法詳於下例.

例. 解下方程式組:

$$3x-2y+4z=13, \qquad (1)$$

$$2x+5y-3z=-9, \qquad (2)$$

$$6x+3y+2z=7. \qquad (3)$$

在兩方程內消去 z，如：

以3乘(1)，	$9x-6y+12z=39$	(4)
以4乘(2)，	$8x+20y-12z=-36$	(5)
相加	$17x+14y\quad=3$	(6)
又(1)爲	$3x-2y+4z=13$	(7)
以2乘(3)，	$12x+6y+4z=14$	(8)
自(8)減(7)，	$9x+8y\quad=1$	(9)

在方程(6)，(9)內消去 y，如：

以4乘(6)，	$68x+56y\quad=12$	(10)
以7乘(9)，	$63x+56y\quad=7$	(11)
自(10)減(11)，	$5x\quad=5$	(12)
故	$x=1.$	
以 $x=1$ 代入(9)得	$y=-1.$	
以 $x=1, y=-1$ 代入 (1)，得	$z=2.$	

故(1)，(2)，(3)若有解答必爲 $x=1, y=-1, z=2$，§ 362.

但自(1)，(2)，(3)導出 $x=1, y=-1, z=2$ 時之演算爲可逆者，確可逐步逆算頗易返原，故 $x=1, y=-1, z=2$ 爲(1)，(2)，(3)之解答.

且可證 $x=1, y=-1\ z=2$ 爲(1)，(2)，(3)之解答如下：

按 § 368，顯然 $x=1, y=-1, z=2$ 爲(12)，(9)，(1)之解答. 故只證明 (12)，(9)，(1)與(1)，(2)，(3)之解答相同可矣.

將(1)，(2)，(3)之已知數移於左端，則爲

$$A=0, (1) \qquad B=0, (2) \qquad C=0, (3)$$

則由導出 (9)，(12)之法可表(1)，(9)，(12)方值如下：

$$A=0, (1) \quad -A+2C=z, (9)$$

$$19A+16B-14C=0, (12).$$

凡能致 $A=0, B=0, C=0$ 之 x, y, z 任一組之值必能致

$$A=0,\ -A+2C=0, 19A+16B-14C=0.$$

反之，若 $A=0$，$-A+2C=0$，則 $C=0$；又若 $19A+16B-14C=0$，則 $B=0$.

故(1)，(2)，(3) 與(1)，(9)，(12) 有同一之解答.

卽， $x=1, y=-1, z=2.$

由此觀之，自含三未知文字 x, y, z 之三方程組可得含二文字 x, y 之二方程，然後由此組得含一文字之一次方程。 392

總之，設自含 n 個未知文字之 n 個一次方程起始演算 $n-1$ 步，必達含一文字 x 形如 $ax-b=0$ 之一次方程.

除 $a=0$ 外，此組有一解答，且只一解答，其中 x 之值為 b/a 而其他未知文字之值可逐次以已知值代入諸方程而得之.此理常可證明如上例。

自另方面言之，若 $a=0$, $b=0$，則此組通常有無限解答. 若 $a=0$, $b\neq 0$ 則無解答.俟 § 394 內證明之.

在行列式章內將示解聯立一次方程式組之極簡便法，然於某種方程亦可以特別法則節省勞力。 393

例　解

$$x+y+z=8, \tag{1}$$

$$x+y+u=12, \tag{2}$$

$$x+z+u=14, \tag{3}$$

$$y+z+u=14, \tag{4}$$

加(1),(2),(3),(4), $3x+3y+3z+3u=48$.

故

$$x+y+z+u=16. \tag{5}$$

自(5)減各方程(1), (2), (3), (4) 得 $x=2, y=2, z=4, u=8$.

特類. 設 $A=0$, $B=0$, $C=0$ 表 x, y, z 之一次方程組，如 § 392，令 $ax-b=0$ 表已消去 y, z 之方程。 394

1. 若 $a=0, b=0$，則得函數 A, B, C 後之一，可由他二函數表之，如：$A=kB+lC$，此處 k 與 l 為常數.故稱方程 $A=0$, $B=0$, $C=0$ 為相依。

由恆等式 $A=kB+lC$ 可得 $B=0$, $C=0$ 之各解答亦爲 $A=0$ 之解答.故若 $B=0$ 及 $C=0$ 爲合理者, § 377, 2, 則三方程 $A=0$, $B=0$, $C=0$ 必有無限解答.

如方程組 $A=3x-2y+4z-13=0$, (1)

$B=2x+5y-3z+9=0$, (2)

$C=7x+8y-2z+5=0$. (3)

由 (1) 與 (2) 內消去 z,

$3A+4B=17x+14y-3=0$. (4)

在 (1) 與 (3) 內消消去 z,

$A+2C=17x+14y-3=0$. (5)

在 (4) 與 (5) 內消去 y,

$2A+4B-2C=0\cdot x-0=0$. (6)

此處之結果方程 $ax-b=0$ 爲 $0\cdot x-0=0$, 又於演算時 A, B, C 以恆等式 $2A+4B-2C=0$, 或 $C=A+2B$ 結合之.

觀察(1), (2), (3)以 2 乘 B 加 A 卽得 C.

故方程組 (1), (2), (3) 有無限解答.

2. 若 $a=0$, 而 $b=0$, 可求得函數 A, B, C 之一, 以他二函數表之, 如:

$$A=kB+lC+m,$$

此處 k l, m 爲常數, 而 m 非 0. 則方程 $A=0$, $B=0$, $C=0$ 爲不合理.

由恆等式 $A=kB+lC+m$ 可知 $A=0, B=0, C=0$ 無解答 因 x, y, z 之任何値凡能使 $B=0$, $C=0$ 者均使 $A=m$, 而不能令 $A=0$ 故也.

如方程組:

$A=3x-2y+4z-13=0$, (1)

$B=2x+5y-3z+9=0$, (2)

$C=7x+8y-2z+6=0$. (3)

如上消去 z 及 y，則得

$$2A+4B-2C=0\cdot x-2=0.$$

故結果方程 $ax-b=0$ 其形爲 $0\cdot x-2=0$，且 A, B, C 以恆等式 $C=A+2B+1$ 結合之．觀察(1)，(2)，(3)便知恰與上述之情形符合．

故方程組(1)，(2)，(3)，無解答．

普通一次方程組． 由上討論可得結論如下： 395

通常 m 個一次方程組含 n 個未知文字，若 $m=n$ 則有一組解答．若 $m<n$ 則有無限解答．若 $m>n$ 則無解答．

如其不然，則方程中必有二個或多個可以 §§ 377，394 所述之恆等式結合之．

於特例，含兩未知文字之三個一次方程組 $A=0, B=0, C=0$，設 A, B, C 以恆等式 A方$kB+lC$ 結合之，且 $B=0$，$C=0$ 爲合理者則有一組解答．

如方程組 $x-y=1$ (1)，$x+y=7$ (2)，$3x-y=10$ (3) 無解答，因 (1)，(2) 之解答 $x=4$，$y=3$ 不適合於 (3)．

又方程組 $x-y=1$ (1)，$x+y=7$ (2)，$3x-y=9$ (4) 有一解答，因 $x=4, y=3$ 爲 (1)，(2) 之解答且適合於 (4)．但詳察其 $3x-y-9=2(x-y-1)+(x+y-7)$．

設學者畫出(1)，(2)，(4)之圖象，則知其相交於一公點．

習　題　X

解以下方程組：

1. $\begin{cases} x+y=11, \\ y+z=13, \\ z+x=12 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+3z=4, \\ x+3y+7z=13. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y-3z=3, \\ 3x-5y+7z=19, \\ 5x-8y-11z=-13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x-2y=-33, \\ x+y-7z=13, \\ x+3y=-16. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y-4z=11, \\ 2x+3y=0, \\ y+4z=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-5=2(x-2), \\ (x+1)(y+1)=(x+2)(y-2)+5, \\ 2x+3y+z=6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{6}{z}=9, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}=5, \\ \dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{z}=4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y+z+u=4, \\ x+z+u=3, \\ x+y+u=1. \\ x+y+z=10. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x-3z+u=9, \\ 5y+z-4u=17, \\ 3y+u=12, \\ x+2y+3u=8. \end{cases}$

10. $\begin{cases} cx+by=l, \\ by+az=m, \\ vz+cx=n. \end{cases}$

11. $\begin{cases} lx=my=nz, \\ ax+by+cz=l \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x=3y=6z, \\ x+2y+z-16)(3x-2y+20)=0. \end{cases}$

證下方程組爲相依，幷求其結合各組方程之恆等式.

13. $\begin{cases} x-y=3, \\ y-z=-5, \\ z-x=2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x-8y+7z=10, \\ 2x+5y-3z=12, \\ 16x+9y-z=80. \end{cases}$

應用問題

396 次諸問題可用兩個或多個未知文字 x, y, z……之聯立一次方程之法解之．應用文字若干，當視問題之情形而定．選題中之幾個未知數(非全部)以文字 $x, y,$……代之．其餘未知數則以此文字組成之式表之，將知由問題之條件結合 $x, y,$……所得之獨立且合理之方程之個數適與 $x, y,$……之字數相等．設文字少於方程之個數，則此問題無解答；設多於方程，則有無限解答，§ 395.

注意於 § 352 內問題性質之限制亦可適用於此處未知數.

例 *1.* 三數字組成之數，第二數字等於第一第三之和，第二第三之和爲 8, 設第一第三互換，則此數增加 99, 求此數.

設 $x=$ 百位數，$y=$ 十位數，$z=$ 個位數，則此數爲

$$100x+10y+z.$$

但依問題之條件，得

$$x+z=y, \tag{1}$$

$$y+z=8, \tag{2}$$

$$100z+10y+x=100x+10y+z+99. \tag{3}$$

解(1)，(2)，(3)，得 $x=2$, $y=5$, $z=3$.

故所求數爲 253.

例 2. 一旅客行路一段，休息 30 分，以後按原速之 $\frac{7}{8}$ 繼續進行，共計 6 時，行全距離 20 哩而達目的地. 若以原速多行四哩再休息如前，則行程只須 $5\frac{6}{7}$ 時. 問原速如何？起身處至休息多遠？

設 $x=$ 每時原速之哩數，$y=$ 起身處至休息處之哩數.

以 x, y 之植表(1)實在行程所需時數，及(2)假定行程所用之時數，即得

$$\frac{y}{x}+\frac{1}{2}+\frac{20-y}{\frac{7x}{8}}=6, \tag{1}$$

$$\frac{y+4}{x}+\frac{1}{2}+\frac{16-y}{\frac{7x}{8}}=5\frac{6}{7}. \tag{2}$$

解 (1) 及 (2) 之 $\frac{y}{x}$，及 $\frac{1}{x}$，得 $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$，$\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$

故 $x=4$, $y=6$.

例 *3.* 兩瓶 A 與 B 各盛酒與水之混合液，若自 A 內取

3份自 B 內取2份另成一合混液含酒 40%；若自 A 內取1份，自 B 內取 2 份則所成之混合液含酒 32%．問 A 與 B 各含酒之百分率如何？

設 x 及 y 表 A 及 B 所含酒之百分率．

依題意得

$$\frac{3x}{5}+\frac{2y}{5}=\frac{40}{100},(1)\quad \frac{x}{3}+\frac{2y}{3}=\frac{32}{100},\quad (2)$$

解 (1)，(2) 得 $x=\dfrac{52}{100}$ 或 52 %，$y=\dfrac{22}{100}$ 或22%．

習　題　XI

1．3 數之和爲 20,(1)，若第一數加第二數之 2 倍再加第三數之 3 倍等於 44,(2),若 2 第倍一數與第二數之和再減第三數之 4 倍等於 −14，求各數．

2．三數之和爲 51．若第一數除以第二數得商 2 餘 5；若第二數除以第三數得商 3 餘 2，求各數．

3．兩數字組成一數，(1) 2 倍第一數字加 3 倍第二數字等於 37；(2) 若兩數字換位則此數減 9，求此數．

4．A 負債 \$ 5000，B 負債 \$ 3000．A 之銀除還債外尚有 B 之 $\frac{2}{3}$；B 除 100 圓未還餘債還清外尚有 A 之 $\frac{1}{2}$．問原各有銀若干？

5．A,B,C 三人之財產如下：A 與 B 共有 p 元，B 與 C 共有 q 元，C 與 A 共有 r 元．問 p,q,r 必須具何條件，方能得適合題意之解．

6．本金若干單利行息 2 年得本利和 \$ 2556.05.4 年得本利和 \$ 2767.10 問本金利率各若干？

7．一人放款若干，一部分利率照借券面值之 4%，一部分爲借券上 110 之5%，其投資收入爲 \$ 650．若一部分爲借券上 80 之 4%，及一部分爲借券上 110 之 5%，則其收入多 100 元．問此人投資若干？

8．就下列已知條件，求矩形之面積：若長寬各增 6 吋，則長爲寬之 $\frac{3}{2}$；而面積增加 84 方吋．

9. A 贈 B 銀使 B 銀增一倍.然後 B 贈 A 銀使 A 之餘銀增一倍.最後 A 又贈 B 銀使 B 之餘銀增一倍. 則 A 有銀 \$ 16, B 有銀 \$ 24 問 A,B 原各有銀若干?

10. 一工程 A 與 B 作之,需 $5\frac{1}{7}$ 日完成; A 與 C 作之,需 $4\frac{4}{5}$ 日完成 三人作 2 日後 A 他往, B,C 以 $1\frac{9}{17}$ 日完成之.問 A, B, C 各獨作若干日方能完成此工作?

11. 兩點沿 150 呎長圓周,依定速度移動.若反向移動 5 秒相遇; 若同時移動 25 秒相遇.兩點速度若干?

12. 兩列貨車各長爲 240 碼及 200 碼, 若自初遇反向而行歷 20 秒而彼此錯開,若同向而行則快者於 $3\frac{3}{4}$ 分追過慢者.問各車速度爲何?

13. 兩輪船 A 與 B 往來於兩城 C 與 D 之間,此兩城相距 200 哩. A 輪自 C 城較程起 B 晚 1 時,而 2 時後卽追及 B, 及至 D 城停 4 時返回,遇 B 於 距 D 城 10 哩之處.問 A 與 B 之速度爲何?

14. 半哩賽跑 A 勝 B 20 碼,勝 C 30 碼.問 B 能勝 C 若干碼?

15. A 與 B 兩次作 440 碼之賽跑. 第一次 A 讓 B 先行 20 碼尙勝 B 二秒.第二次 A 讓 B 先行四秒,尙勝 B 6 碼.問 A 與 B 之速度爲何?

16. 兩旅客共有行李 500 磅,超過應帶之重量.一客付 \$ 1.25, 一客付 \$ 1.75. 若此行李歸一客,則付 \$ 4. 問每人准帶行李若干?

17. 三種混合金屬 A,B,C 按重量計, A 含 5 份金, 2 份銀, 1 份鉛; B 含 2 份金, 5 份銀, 1 份鉛, C 含 3 份金, 1 份銀, 4 份鉛,欲得 9 盎斯混合金屬,而含金銀鉛之量相等,問在 A,B C 內各取若干盎斯?

18. 兩混合金屬 A 與 B 各含銀與銅 一種混合金屬含 A 5 份, B 3 份,則有 52% 之銀;一種含 A 5 份, B 11 份,則有 42% 之銀 求 A 與 B 各含銀之百分率.

19. 一射者距目標 500 碼，射出後 $2\frac{2}{5}$ 秒聞子彈擊標之聲.一觀者離目標 600 碼，距射者 120 碼，聞槍聲後 $2\frac{1}{10}$ 秒方聞子彈擊目標之聲. 設聲速與彈速均始終不變，求聲與彈之速度.

20. 一池由兩管 A 及 B 注水，由第三管 C 洩水. 若滿池時，三管齊開，則 3 時水盡；只開 A 及 C 則 1 時流盡；只 B 及 C 則 45 分流盡.設每分鐘 A 較 B 多流入 100 加崙；求池之容量及每分鐘各管流過若干.

說明不定係數法之問題

397 茲討論關於代數本身之一二簡單問題.

試問某變數之特別函數能否化成爲另一數(或式)之函數；設能之，其係數爲何?

下列釋明研究此數問題之法.

例. 一式 x^2+4x+6 可否化爲 $(x+1)$ 之二次式，如能，其係數爲何?

問題內之式可寫爲 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$，此處 a,b,c 皆表常數.

擬設定之化法爲可能，則得

$$x^2+4x+6=a(x+1)^2+b(x+1)+c, \tag{1}$$

或 $$x^2+4x+6=ax^2+(2a+b)x+(a+b+c). \tag{2}$$

按 § 284，(1) 既爲恆等式，x 之同次項之係數必等，

卽 $a=1, 2a+b=4, a+b+c=6$；解 a,b,c 得 $a=1, b=2, c=3$.

故 $x^2+4x+6=(x+1)^2+2(x+1)+3$.

注意令已知式等於所求式，但具不定係數，於是知此假設恆等爲眞，則其係數必適合於若干條件方程，解此方程則可得各係數之值.

下面爲上述之普通問題. 398

玆先說明條件，再發問題如下：合於此諸條件之式是否存在，如能存在，其係數爲何？

爲解此問題玆作成含不定係數之式．此等係數卽爲問題中之未知數，由已知條件可得一方程組．若方程組有一解答，則得一函數適合於已知條件；若無解答，則所求函數不能存在；若有無限解答，則問題爲不定式，卽有無限個函數，適合於已知條件．玆所論者限於有限式函數，§ 264.

例．求 x 之二次式，設 $x=1$ 及 $x=3$ 時此式爲 0，$x=4$ 時則此式爲 6.

問題內之式當爲 ax^2+bx+c，按問題之條件應爲

$$a+b+c=0,\ 9a+3b+c=0,\ 16a+4b+c=6.$$

解 a, b, c 得 $a=2,\ b=-8,\ c=6$.

故所求之式爲 $2x^2-8x+6$.

若此題求合於所與條件之一次式則無解答，若求一三次式，適合於上之條件，則有無限解答.

上節所述之法稱不定係數法，爲研究代數學之主要方法，俟後常用之. 399

習題 XII

1. 以 $x-2$ 之多項式表 $3x^3-x^2+2x-5$。

2. 以 $2x+3$ 之多項式表 $4x^2+8x+7$。

3. 在 $f(x)=ax^2+bx+c$ 內 $f(-1)=11$，$f(1)=-5$，$f(5)=6$，求此式。

4. 在 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 內，$f(0)=5$，$f(-1)=1$，$f(1)=9$，$f(2)=31$，求此式。

5. 在 $f(x,y)=ax+by+c$ 內，$f(0,0)=4$，$f(4,4)=0$，$f(1,0)=6$，求此式。

6 一次方程 $ax+by+1=0$ 之兩解答爲 $x=3, y=1$ 及 $x=4, y=-1$，求此方程

7. 一次方程 $ax+by+c=0$ 之三解答爲 $x=3, y=1$；$x=4, y=-1$，$x=1, y=1$；此方程能否求得?

8. 求某一次方程，其圖象爲經過點 $(2,3)$，$(-4,5)$ 之直線。

9. $3x+y+c=0$ 之圖象經過點 $(-2,3)$，求 c 之値.

10 求兩一次方程 $ax+by+1=0$ (1)，$a'x+b'y+1=0$ (2)，設 $x=2, y=3$ 均適合 (1)，(2)；$x=7, y=5$ 能適合 (1)，又 $x=3, y=7$ 能適合 (2)。

11 求方程 $x^3+bx^2+cx+d=0$，其根爲 $-2, 1$ 及 3。

12. 求方程 $x^2+bxy+cx+dy=0$ 其解答爲 $x=1$，$y=0$；$x=2$，$y=1$；$x=-2$，$y=1$。

13. 化 $3x+2y-3$ 式爲 $a(x+y-1)+b(2x-y+2)+c(x+2y-3)$ 之形，式中 a, b, c 爲常數。

V. 長除法

通　法

初步討論. 在§319內規定以B除A之商爲分式A/B 400
可以計算法則化爲最簡式.

茲示按上規定求商之通法,設A及B爲同文字x之多項式,且A之次數不小於B者.

1. B爲A之因子,必能化A爲下式

$$A=QB, \tag{1}$$

此處Q爲x之整函數.

則得
$$\frac{A}{B}=Q,$$

卽,以B除A之商爲整函數Q;則稱A能被B除盡

如,$A=x^3+4x^2-2x-5$及$B=x^2+3x-5$,則得$x^3+4x^2-2x-5=(x+1)(x^2+3x-5)$爲與(1)同形之恆等式,其$Q$爲$x+1$.

故
$$\frac{A}{B}=\frac{x^3+4x^2-2x-5}{x^2+3x-5}=x+1.$$

2. 然B常非A之因子,故不能化A爲QB之形,但按§401可化爲下式:

$$A=QB+R, \tag{2}$$

此處Q及R均爲x之整函數,且R之次數小於B者.

故得
$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B},$$

即以 B 除 A 之商爲一整函數 Q 及一分式 $\frac{R}{B}$ 之和.而分式之分子之次數小於分母之次數.

Q 稱爲商之整式部分,R 稱爲餘式.

如,$A=x^3+2x^2+3x+3$ 及 $B=x^2+2x+2$,即能化 A 爲式(2),書作

$$x^3+2x^2+3x+3=x(x^2+2x+2)+(x+3),$$

此處 Q 爲 x 及 R 爲 $x+3$,R 方次低於 B.

故 $$\frac{A}{B}=\frac{x^3+2x^2+3x+3}{x^2+2x+2}=x+\frac{x+3}{x^2+2x+2}.$$

401 **長除法.** 茲示如何化 A 爲 $QB+R$ 之形,此處 R 之次數小於 B,亦可爲 0,普通用以演算者稱爲"長除法".茲以下例解明之.

設 $A=2x^4+3x^3+4x^2+x-2$ 及 $B=x^2-x+1$.

此處 B 之次數爲二,且此題即求一整函數 Q,致令自 A 減去 QB 而得之 R 爲一次式或 0;若函數 Q 已求得,則有

$$A-QB=R,\quad 故\ A=QB+R.$$

因 A 之次數爲四,且 R 之次數不能大於一,且當 A 減 QB 時而 A 之前三項必消去.茲擬定下法以求 Q.

$$\begin{array}{rll}
A= & 2x^4+3x^3+4x^2+x-2 & \big|\ x^2-x+1=B \\
2x^2B= & 2x^4-2x^3+2x^2 & \big|\ 2x^2+5x+7=Q \\
\hline
A-2x^2B= & 5x^3+2x^2+x-2 & \qquad (1) \\
5xB= & 5x^3-5x^2+5x & \\
\hline
A-(2x^2+5x)B= & 7x^2-4x-2 & \qquad (2) \\
7B= & 7x^2-7x+7 & \\
\hline
A-(2x^2+5x+7)B= & 3x-9=R & \qquad (3)
\end{array}$$

顯然欲消去 A 之首項，須以一式乘 B 使其積之首項與 A 之首項相同，自 A 內減之，此題最簡之積爲 $2x^2B$，此處乘數 $2x^2$ 係用 B 之首項 x^2 除 A 之首項 $2x^4$ 得來.

如上自 A 減去 $2x^2B$ 得

$$A-2x^2B=5x^3+2x^2+x-2. \qquad (1)$$

欲消去餘式(1)之首項，即消去 A 之第二項，仍用上法. 以 x^2 除 $5x^3$ 之商爲 $5x$；再以 $5x$ 乘 B 而減之則得

$$A-(2x^2+5x)B=7x^2-4x-2. \qquad (2)$$

最後欲消去餘式(2)之首項，即消去 A 之第三項，以 x^2 除 $7x^2$ 之商數 7，乘 B，再減之. 其結果爲

$$A-(2x^2+5x+7)B=3x-9. \qquad (3)$$

餘式 (3) 爲一次式，係由 A 減 $(2x^2+5x+7)B$ 得來.

故求得之多項式 Q 及 R 爲

$$Q=2x^2+5x+7 \text{ 及 } R=3x-9.$$

寫爲恆等式(3)即

$$A=(2x^2+5x+7)B+(3x-9).$$

茲得 A 成爲 $QB+R$ 式，此處 R 之次數小於 B 之次數.

故設 A 與 B 爲已知則得求 Q 及 R 之法如下:

按 x 之降冪排列 A 與 B.

以 B 之首項除 A 之首項，其商爲 Q 之第一項.

以 Q 之第一項乘 B，自 A 減其積.

對於所得之餘式，仍以同法進行，即以 B 之首項除餘式首項，等等.

繼續進行以至餘式之次數小於 B 之方次爲止，於是得 Q 之一切項，而最末餘式必爲 $A-QB$ 或 R.

尋常按上法列其演算，以後可用分離係數法演算，如乘法然.

例. 已知 $A=2x^5-6x^4+7x^3+8x^2-19x+20$ 及 $B=x^2-3x+4$；求 Q 與 R.

$$
\begin{array}{l|l}
2-6+7+8-19+20 & 1-3+4 \\
\underline{2-6+8\qquad\quad} & \overline{2+0-1+5} \\
\qquad -1+8-19 & \\
\qquad \underline{-1+3-\ 4\qquad} & \qquad 故\ Q=2x^3-x+5 \\
\qquad\qquad 5-15+20 & \quad 及\ R=0. \\
\qquad\qquad \underline{5-15+20} &
\end{array}
$$

注意，$-1+8-19+20$ 代替第一餘式；上邊僅寫其一部分 $-1+8-19$. 餘部下次減時再用之. Q 之第二項爲 0，因 A 之首二項第一次減去.

例 2. 已知 $A=x^4+2x^3+3x^2+2x+4$，$B=a^2+2x$ 求 Q 及 R.

402 **此法之注意點.** *1.* 於此長除法各中間餘數認爲新被除數；且設 R_1 表任一餘數 Q_1 爲前所得之 Q 之一部，及 Q_2 爲 Q 之其餘一部，則得

$$A\equiv Q_1B+R_1 \text{ 及 } R_1\equiv Q_2B+R.$$

2. 求 R 及 Q 之本身之方法並非實行以 B 除 A，僅係初步之乘法減法而其目的在變 A 爲 $A\equiv QB+R$ 之形式. 只由恆等式 $A\equiv QB+R$ 化至恆等式 $A/B\equiv Q+R/B$，不能謂實行以 B 除 A.

通常求 Q 及 R 之演算稱爲"除法"，若 R 雖不爲 0 亦稱 Q 爲"商"，以代"商之整式部分"，但"以 B 除 A"非如 § 254 之意義，求一式乘 B 而得 A 者，係先求一式乘 B，自 A 減之得一餘式，則方次低於 B，再求次餘式爲何．比較 § 87.

3. 整式 A 化爲整式 $QB+R$ 之演算中，無論 x 爲何值均可，即 x 之一切値均使 A 與 $QB+R$ 値相等，即 x 之値使 B 等於 0 時而 A 與 $QB+R$ 之値仍相等，惟 $B=0$ 時，則 $\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$ 無意義.

如　$A=x^2+x+1$ 及 $B=x-1$，

按 § 401，得 $x^2+x+1=(x+2)(x-1)+3$，　(1)

故　$$\frac{x^2+x+1}{x-1}=x+2+\frac{3}{x-1}.\qquad (2)$$

此處 $x=1$ 時，$B=0$．在(1)及(2)內以 1 代 x 得 $3=3$，當然無誤，但 $\frac{3}{0}=3+\frac{3}{0}$，便無意義.

4. 將 A 化爲 $QB+R$ 只有一法，即只有一對整式 Q 及 R 可以存在（R 之方次小於 B）致令 $A\equiv QB+R$.

因若有另一對 Q' 及 R'，則得

$$QB+R\equiv Q'B+R',\text{ 故}(Q-Q')B\equiv R'-R.$$

但此不可能，因 $R'-R$ 之方次低於 B，而 $(Q-Q')B$ 則大於 B.

被除數或除數乘以常數之影響．玆用下定理說明之．**403**

1. 若以任一常數 c 乘被除數，則商及餘數亦增 c 倍．

因 $A\equiv QB+R$ 故 $cA=cQ\cdot B+cR$.

2.　若以 c 乘除數，且以 c 除其商，而餘數不變.

因　$A\equiv QB+R$，則 $A\equiv\dfrac{Q}{c}\cdot cB+R$.

3.　若以 c 乘被除數及除數，且以 c 乘其餘數，而商不變.

因　$A\equiv QB+R$，則 $cA\equiv Q\cdot cB+cR$.

4.　設於長除法之任一步中而以 c 乘其中間餘數或除數，設有變動，則其最後餘數，必被 c 乘.

此理自 1 與 2，及 § 402，1 得來.

學者應用諸特例驗證以上諸定理.

如，先以 $B=2x-1$，再以 $2B=4x-2$ 除 $A=4x^2+6x+1$ 可驗證第二定理.

$$\begin{array}{l|l} 4+6+1 & 2-1 \\ \underline{4-2} & \overline{2+4} \\ \quad 8+1 & \\ \quad \underline{8-4} & \therefore Q=2x+4, \\ \qquad 5 & \quad R=5. \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 4+6+1 & 4-2 \\ \underline{4-2} & \overline{1+2} \\ \quad 8+1 & \\ \quad \underline{8-4} & \therefore Q=x+2, \\ \qquad 5 & \quad R=5. \end{array}$$

404　**用不定係數法演除法.**　設 A 及 B 爲已知，亦可求 Q 及 R 如次:

例 1.　以 $B=x^2-x+1$ 除 $A=2x^4+3x^3+4x^2+x-2$.

因 A 之方次爲四，而 B 之方次爲 2，可知 Q 之方次爲二，R 之方次最高爲一.

故設　$Q=c_0x^2+c_1x+c_2$ 及 $R=d_0x+d_1$.

茲求係數 c_0, c_1, c_2, d_0, d_1，之值，必令其

$$2x^4+3x^3+4x_2+x-2\equiv(c_0x^2+c_1x+c_2)(x^2-x+1)+d_0x+d_1$$

$$\equiv c_0x^4+\left.\begin{array}{r}-c_0\\+c_1\\ \end{array}\right|x^3+\left.\begin{array}{r}c_0\\-c_1\\+c_2\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{r}c_1\\-c_2\\+d_0\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{r}c_2\\+d_1\\ \end{array}\right| \quad (1)$$

但使(1)爲恆等式,故由 §284,得

$$\begin{aligned}
c_0&=2,\\
-c_0+c_1&=3,\therefore c_1=3+c_0=3+2=5.\\
c_0-c_1+c_2&=4,\therefore c_2=4-c_0+c_1=4-2+5=7.\\
c_1-c_2+d_0&=1,\therefore d_0=1-c_1+c_2=1-5+7=3.\\
c_2+d_1&=-2,\therefore d_1=-2-c_2=-2-7=-9.
\end{aligned}$$

故 $Q=2x^2+5x+7$ 及 $R=3x-9$ 與 § 401 相同.

例 2. 以 $2x^2+x-2$ 除 $6x^5+13x^4-12x^3-11x^2+11x-2$.

整除法. 設 A 與 B 表係數爲文字之 x 之多項式,又設 **405**
B 之方次爲 m, 因 B 能整除 A, 其餘式 R 必恆爲 0.所求 R 之諸係數,必皆爲 0. 因 R 之方次爲 $m-1$, 故有 m 個係數, §277,此諸係數當然爲 A 與 B 之係數之函數. 故

欲以 m 次多項式 B 整除一多項式 A,則 A 與 B 之係數,必適合於 m 個條件.

茲以下例解明之:

例 1. x^2+ax+1 能整除 x^3+3x^2+bx+2 問 a 與 b 之值如何?

解

$$\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2+bx\qquad+2 & x^2+ax+1\\
\underline{x^3+ax^2+x\qquad\qquad} & \overline{x+(3-a)}\\
(3-a)x^2+(b-1)x+2 & \\
\underline{(3-a)x^2+(3a-a^2)x+(3-a)} & \\
\quad(b-1-3a+a^2)x+(a-1) &
\end{array}$$

故 a 與 b 必適合兩條件

$b-1-3a+a^2=0,\quad a-1=0$;因得 $a=1$ 及 $b=3$.

例 2. 設 x^2+x-6 能整除 $2x^3+3x^2+lx+m$, 定 l 及 m 之值.

被除數及除數按 x 之升冪排列者. 設 A 與 B 表被除 **406**
數及除數,按 x 之升冪排列之,又設 A 之首項,其方次不小於

B 之首項，按 § 401 之法，消去首數項，可得以 B 所表之整式 A，若 B 能整除 A 則與降羃排列者結果相同；但若 B 不能整除 A，則其結果全異．觀下例自明．

$$\begin{array}{l|l}
1+3x+3x^2+x^3 & 1+x \\ \cline{2-2}
\underline{1+\ \ x} & 1+2x+x^2 \\
\quad 2x+3x^2 & \\
\quad \underline{2x+2x^2} & \qquad (1) \\
\qquad\quad x^2+x^3 & \\
\qquad\quad \underline{x^2+x^3} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
1-2x+\ \ x^2 & 1+x \\ \cline{2-2}
\underline{1+\ \ x} & 1-3x+4x^2 \\
\quad -3x+\ \ x^2 & \\
\quad \underline{-3x-3x^2} & \qquad (2) \\
\qquad\qquad 4x^2 & \\
\qquad\qquad \underline{4x^2+4x^3} & \\
\qquad\qquad\quad -4x^3 &
\end{array}$$

自 § 401 之理由，可得

$$1+3x+3x^2+x^3=(1+2x+x^2)(1+x) \tag{1}$$

$$1-2x+x^2 \qquad =(1-3x+4x^2)(1+x)-4x^3. \tag{2}$$

結果(1)與按 x 之降羃排列相除所得者相同 由 § 402，4，可知整除必有同形如上例．

但結果(2)與按 x 之降羃排列相除所得者完全不同．於是得

$$x^2-2x+1=(x-3)(x+1)+4. \tag{3}$$

(2)與(3) 爲恆等式，然化 x^2-2x+1 爲 $x+1$ 之兩不同式，以 $x+1$ 除 x^2-2x+1 之商亦不同，即：

$$\frac{1-2x+x^2}{1+x}=1-3x+4x^2-\frac{4x^3}{1+x},$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x+1}= \qquad x-3 \quad +\frac{4}{x+1}.$$

407　觀此可知按升羃排列，除整除法外，各餘式之首項方次，逐漸增加無止境，以需要步驟可得一若干項之多項式作商之整式部分，而其方次可爲任意之高．故

若 A 與 B 表 x 之升冪多項式，而 B 不能整除 A，且 A 之首項方次不小於 B，則以 B 除 A 之商可化爲下式

$$\frac{A}{B}=Q'+\frac{R}{B},$$

此處 Q 及 R 爲 x 之升冪多項式，Q 之末項之方次爲任意之高．而 R 之首項之方次亦然．

若 Q' 之項數爲 n，稱爲以 B 除 A 之商至 n 項，R' 爲其相當餘式．

若 x 之值甚小（詳後），則取 n 爲足用之大可使 $\frac{R'}{B}$ 之值爲任意之小；即可求得多項式 Q 其值與 $\frac{A}{B}$ 相差爲任何小．在此計算中，多項式 Q' 有時稱爲分式 $\frac{A}{B}$ 之近似整式．

如 $1-x$ 除 1 至 n 項，則得

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}.$$

設 x 爲小於 1 之任何值，可選得 n，使

$1+x+\cdots\cdots+x^{n-1}$ 與 $\frac{1}{1-x}$ 之差爲任意之小．如 $x=\frac{1}{3}$，則 $\frac{x^3}{1-x}=\frac{1}{18}$，故 $1+x+x^2$ 與 $\frac{1}{1-x}$ 相差 $\frac{1}{18}$．同理 $1+x+x^2+x^3$ 與 $\frac{1}{1-x}$ 只差 $\frac{1}{54}$；餘類推．

用不定係數法求商至 n 項．　茲以下例解明之．　408

例 *1*．求商　$\frac{3-x}{1-x+2x^2}$ 至 4 項．

設　$$\frac{3-x}{1-x+2x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\quad(1)$$

以 $1-x+2x^2$ 乘兩端，並集項，

$$
\begin{array}{rl|l|l|l}
3-x\equiv & a_0 + a_1 & x + \ a_2 & x^2 + \ a^2 & x^3 + \cdots\cdots \\
& -a_0 & -\ a_1 & -\ a^2 & \\
& & +2a_0 & +2\,a_1 &
\end{array}
\qquad (2)
$$

但(2)為恆等式，準§284，得

$$a_0=3,$$

$$a_1-a_0=-1, \qquad \therefore\ a_1=-1+a_0=2.$$

$$a_2-a_1+2a_0=0, \qquad \therefore\ a_2=a_1-2a_0=-4.$$

$$a_3-a_2+2a_1=0, \qquad \therefore\ a_3=a_2-2a_1=-8.$$

故 $(3-x)/(1-x+2x^2)=3+2\,x-4\,x^2-8\,x_3+\cdots\cdots$

例 2.　求 $\dfrac{2+x+3x^2}{1+x-x^2}$ 至五項．

403　**含數變值之多項式．** 設 A 與 B 為兩多項式各含數個變值．除對於某變數 A 之次數低於 B 外，A 可以 B 整除，換言之，即容或有一整函數 Q 存在，其關係為 $A/B\equiv Q$．欲知其是否如此，及果如此而欲求 Q，均可先按某一變數之方次排列 A,B，然後用§401之方法除之．

例 1.　以 $x+y+z$ 除 $x^3+y^3+z^3-3\,xyz$．

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-3\,yz\cdot x+(y^3+z^3) & x+(y+z) \\
\cline{2-2}
\underline{x^3+(y+z)x^2} & x^2-(y+z)x+(y^2-yz+z^2) \\
\quad -(y+z)x^2-3\,yz\cdot x & \\
\quad \underline{-(y+z)x^2-(y+z)^2x} & \\
\qquad\qquad (y^2-yz+z^2)x+(y^3+z^3) & \\
\qquad\qquad \underline{(y^2-yz+z^2)x+(y^3+z^3)} &
\end{array}
$$

故 $(x^3+y^3+z^3-3\,xyz)/(x+y+z)=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$．

例 2.　以 $x+y+4$ 除 $2\,x^3+5\,xy+3\,y^2+7\,x+11y-4$．

若 B 不能整除 A，則得 $\dfrac{A}{B}\equiv Q+\dfrac{R}{B}$ 之式，此處 Q 及 R 為關於排列文字之整式，而文字 R 之方次小於 B．但文

字排列之選擇不同則所得式之形狀亦異.

例. 以 $2x+y$ 除 $4x^2+6xy+y^2$.

(1)以 x 爲所排文字, 得

$$\begin{array}{r|l} 4x^2+6xy+\ y^2 & 2x+y \\ \cline{2-2} \underline{4x^2+2xy} & 2x+2y \\ 4xy+\ y^2 & \\ \underline{4xy+2y^2} & \\ -\ y^2 & \end{array}$$

故

$$\frac{4x^2+6xy+y^2}{2x+y}=2x+2y-\frac{y^2}{2x+y}.$$

(2)選 y 爲所排之文字, 得

$$\begin{array}{r|l} y^2+6yx+4x^2 & y+2x \\ \cline{2-2} \underline{y^2+2yx} & y+4x \\ 4yx+4x^2 & \\ \underline{4yx+8x^2} & \\ -4x^2 & \end{array}$$

故

$$\frac{y^2+6yx+4x^2}{y+2x}=y+4x-\frac{4x^2}{y+2x}.$$

習　　題　　XIII

1. 以 § 401 之方法與分離係數法, 求 $6x^4-7x^3-3x^2+24x-20$ 除以 $3x^2+x-6$ 之商.

2. 以 x^2+2x-7 除 $3x^4-2x^3-32x^2+66x-35$.

3. 以 x^2-2x+4 除 $2x^5-5x^4+13x^3-15x^2+22x$.

4. 以 x^3-x+5 除 $4x^7-3x^5+19x^4+2x^3+4x^2-4x+7$.

5. 以 § 404 之不定係數法, 求 x^2-3x+2 除 $2x^3-3x^2+x-5$ 之商.

6. 以 x^3-3x+2 除 $2x^5-2x^4+x^2-5$.

7. 設 $A=3x^3-5x^2-7x+12$ 及 $B=3x^2+x-5$,化 A 爲 $A\equiv QB+R$ 式;式中 R 之次數低於 B.且將 A/B 之相當式書出.

8. 設 $x^4+ax^3+x^2+bx+1$ 可被 x^2-2x+1 除盡,試定 a 與 b 之值.

9. a 與 b 爲何值, 則 $\dfrac{x^4+2x^3+3x^2+ax+b}{x^2+3x+5}$ 可化爲整式?

10. $x^6+x^5+x^3+x+1+2(x^4+x^2$ 除以 x^2+x+1.

11. $2x^2+5xy-3y^2-5x+13y-12$ 除以 $x+3y-4$.

12. $2a^2-b^2-6c^2-ab+ac+5bc$ 除以 $2a+b-3c$.

13. $a^2(b+c)+b^2(c+a)-c^2(a+b)+abc$ 除以 $ab+bc+ca$.

14. $x^4+(a-3)x^3+(4-a)x^2-2ax+8a$ 除以 x^2-3x+4.

15. 用分離係數法，以 $2x-3y$ 除 $8x^3-27y^3$.

16. 同上，以 $x-y$ 除 $x^4-4xy^3+3y^4$.

17. 同上，以 $2a^2-ab-b^2$ 除 $6a^5+a^4b-a^3b^2+11a^2b^3-5ab^4+4b^5$.

18. 被除數爲 $2x^3+xy^2+y^3$,除數爲 $2x+y$，求 Q 及 R,先依 x 排列時;次依 y 排列時.

19. 設被除數爲 $1-3x+5x^2$,除數爲 $1+x+3x^2$，均按 x 之升冪排列，求商至第三項及餘數.

20. 設被除數爲 $1+x+3x^2$,除數爲 $1-3x+5x^2$,同上題法求 Q 及 R.

21. 以不定係數法，§ 408,求$\frac{1}{1-2x}$之商至四位.

22. 且求$(2+3x+4x^2)/(1-x+2x^2)$之商至四位.

簡除法及餘式定理

410　**簡除法.** 若除式爲 $x-b$，即一次二項式，其首項係數爲 1,茲示一作長除法(§ 401)之捷便法則.

茲試觀以 $x-b$ 除 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 之結果.

$$
\begin{array}{l|l}
a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 & x-b \\
\underline{a_0x^3-a_0bx^2} & \overline{a_0x^2+(a_0b+a_1)x+(a_0b^2+a_1b+a_2).} \\
(a_0b+a_1)x^2+a_2x & \\
\underline{(a_0b+a_1)x^2-(a_0b^2+a_1b)x} & \\
\qquad (a_0b^2+a_1b+a_2)x-a_3 & \\
\qquad \underline{(a_0b^3+a_1b+a_2)x-(a_0b^3+a_1b^2+a^2b)} & \\
\qquad\qquad a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=R &
\end{array}
$$

a 前除法

其 Q 及 R 之係數爲

a_0，a_0b+a_1，$a_0b^2+a_1b+a_2$，$a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3$.

注意，首項係數爲被除式之首項係數，其餘係數可按下法得之：

已得之係數乘以 b，再加被除式之次一係數.

如　　$a_0b^2+a_1b+a_2=(a_0b+a_1)b+a_2$，

及　$a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=(a_0b^2+a_1b+a_2)b+a_3$.

無論被除數爲任何方次，此法皆能適用，因除數之首項係數爲 1；故 Q 之新係數，必與已得餘式之首項係數相同，是以 Q 之前係數乘以 b，再加被除式之新係數即得 Q 之後一係數．同理 Q 之末項係數乘以 b，再加被除式之末項係數即得 R.

故除式爲 $x-b$，被除式爲 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ 之形 411
者，可求 Q 及 R 如下，此處之 $c_0, c_1, \cdots\cdot c_{n-1}$ 表 Q 之係數.

$$\begin{array}{cccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \;\underline{|\,b} \\
\underline{} & \underline{c_0b} & \underline{c_1b} & - & \underline{c_{r-2}b} & \underline{c_{n-1}b} \\
c_0 & c_1 & c_2 & & c_{n-1}, & R.
\end{array}$$

先按其固有次序書被除式之係數，而寫 b 於其右.

在 a_0 下書 c_0，可知 c_0 與 a_0 相等.

以 b 乘 c_0 寫其積 c_0b 於 a_1 下，相加得 c_1.

同法，以 b 乘 c_1 寫其積 c_1b 於 a_2 下，相加得 c_2.

依此進行，即迭次乘而加之，以至 $a_0, a_1, \cdots\cdots a_n$ 用盡爲止。

例。 $3x^4-5x^3-4x^2+3x-2$ 除以 $x-2$.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -5 & -4 & +3 & -2 & 2 \\ & 6 & 2 & -4 & -2 & \\ \hline 3 & 1 & -2 & -1, & -4 & \end{array}$$

故 $Q=3x^3+x^2-2x-1$ 及 $R=-4$.

此法名曰簡除法（*ynthetic division*）。每遇除式爲 $x-b$ 之形者，學者須用此法以資熟練。

412 **此法之注意點.** *1.* 施簡除法時，若被除數爲不完全多項式必須以 0 係數表其 x 之缺羃.

2. 因 $x+b=x-(-b)$，故以 $x+b$ 演簡除法時，只以 $-b$ 代 b 足矣.

例 *1.* 以 $x+1$ 除 x^4-1.

題中 $x+1=x-(-1)$，以 $x-(-1)$ 除之，得

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & +0 & +0 & +0 & -1 & -1 \\ & -1 & +1 & -1 & +1 & \\ \hline 1 & -1 & +1 & -1 & 0 & \end{array}$$

故 $Q=x^3-x^2+x-1$ 及 $R=0$.

3. 若以二項式 $\alpha x-\beta$ 除之，則可書爲 $\alpha\left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

以$\left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)$施簡除法，并以 Q 及 R 表其所得之商及除數，則相當於 $\alpha x-\beta$ 之商及餘式必爲 $\frac{Q}{\beta}$ 及 R, § 403,2.

例 *2.* $3x^3-11x^2+18x-3$ 除以 $3x-2$.

題中 $3x-2=3(x-\frac{2}{3})$，以 $x-\frac{2}{3}$ 除之，得

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -11 & +18 & -3 & 2/3 \\ & 2 & -6 & 8 & \\ \hline 3 & -9 & 12, & 5 & \end{array}$$

故所求之商爲$\frac{3x^2-9x+12}{3}$,或x^2-3x+4而餘式爲5.

例3.　$5x^5-x^3+x+2$除以$x-3$.

例4.　$x^3+6x^2+11x+6$除以$x+3$.

例5.　$2x^3-3x^2+8x-12$除以$2x-3$.

餘式定理.　設以$x-b$除一含x之多項式,則其餘數等於以b代入被除數中之所得結果;如設$f(x)$表被除數,則$f(b)$表其餘數. 413

此定理之說明已詳於§410;因$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$除以$x-b$其餘式爲$a_3b^3+a_1b^2+a_2b+a_3$　總之$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$除以$x-b$,其餘式必爲$a_0b^n+a_1b^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$,或$f(b)$.

此定理亦可用下法證明之:

設$f(x)$爲被除式,$x-b$爲除式,Q爲商,R爲餘式,則,§401

$$f(x)=\phi(x)(x-b)+R,$$

式中R之方次小於$x-b$,卽不含x,卽對於x之一切値均有同値.

無論x爲何値,此恆等式之兩端之値相同.於特數,設$x=b$時,兩端仍常相等.故

$$f(b)=\phi(b)(b-b)+R.$$

但$b-b=0$;且$\phi(x)$爲整式,$\phi(b)$爲有定値之式.

故$\phi(b)(b-b)=0$,是以

$$f(b)=R.$$

適用下例於兩事,一表明餘數定理爲眞確,一表明設b及$f(x)$之係數爲已知眞數,普通求$f(b)$之値之最簡法爲以$x-b$除$f(x)$,用簡除法所得餘式卽$f(b)$. 414

例*1*.　若 $x=4$ 問 $f(x)=5x^4-12x^3-20x^2-43x+6$ 之值爲何?

1.　用直接代入法得

$$f(4)=5\cdot4^4-12\cdot4^3-20\cdot4^2-43\cdot4+6$$
$$=1280-768-320-172+6=26.$$

2.　用簡除法得

$$\begin{array}{rrrrr|l} 5 & -12 & -20 & -43 & +6 & \underline{4} \\ & 20 & 32 & 48 & 20 & \\ \hline 5 & 8 & 12 & 5, & 26=f(4) & \end{array}$$

例*2*.　設 $f(x)=3x^4-x^3+5x^2-8x+4$. 用簡除法求 $f(2)$, $f(-2)$, $f(4)$, $f(-2/3)$.

415　系1.　若 $x=b$ 時 $f(x)$ 爲0; 則 $x-b$ 必能除盡 $f(x)$; 其逆定理亦眞.

按 § 413, 因 $f(b)$ 爲 $x-b$ 除 $f(x)$ 之餘式, 故餘式爲0時, 即可除盡.

如 $x=1$ 時, $f(x)=x^3-3x^2+2$, 即 $f(1)=1-3+2=0$, 故 $x-1$ 能除盡 $f(x)$, 可用除法驗證之.

又 $f(x)=x^n-b^n$ 可被 $x-b$ 除盡, 因 $f(b)=b^n-b^n=0$ 故也.

例*1*.　若 $x-2$ 能除盡 x^3+3x^2-m, 問 m 之值爲何?

解　　$2^3+3\cdot2^2-m=0$, 或 $m=20$.

例*2*.　若 n 爲奇數, 則 $x+b$ 能除盡 x^n+b^n, 但 n 爲偶數則不能除盡, 試證之.

416　系2.　含兩個或多個變數之整函數, 設其中兩變數 x 及 y 相等時爲零, 則兩變數之差 $x-y$, 能除盡此函數.

因此函數可化爲係數含他變數之 x 之多項式. 由題設 $x=y$ 時, 函數爲零, 故 $x-y$ 可以除盡之, § 415.

如 $x=y$ 時, $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ 爲零; 因以 y 代 x, 得 $y^2(y-z)+y^2(z-y)+z^2(y-y)\equiv0$.

故 $x-y$ 能除盡 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$．茲用除法驗證如下：

$$\begin{array}{l|l}
(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+(y^2z-z^2y) & x-y \\
\underline{(y-z)x^2-(y^2-yz)x} & \overline{(y-z)x-(yz-z^2)} \\
\qquad -(yz-z^2)x+(y^2z-z^2y) & \\
\qquad \underline{-(yz-z^2)x+(y^2z-z^2y)} &
\end{array}$$

例．證明 $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ 可被 $x-y,y-z$ 及 $z-x$ 除盡．

定理． 若 $x=a$ 及 $x=b$ 時，多項式 $f(x)$ 爲零，則 $f(x)$ 可被 $(x-a)(x-b)$ 除盡． 417
依題意 $f(a)=0$，故 $f(x)$ 可被 $x-a$ 除盡，§415 設其商爲 $\phi_1(x)$，得

$$f(x)\equiv(x-a)\phi_1(x)，此處\phi_1(x)爲整式. \qquad (1)$$

在(1)內設 $x=b$，得

$$f(b)=(b-a)\phi_1(b). \qquad (2)$$

但依題意 $f(b)=0$，而 $b-a\neq0$．

又因兩因子之積爲零至少必有一因子爲零，§ 253，故由(2)，$\phi_1(b)=0$．

但 $\phi_1(b)=0$，則 $\phi_1(x)$ 可被 $x-b$ 除盡，§ 415，設其商爲 $\phi_2(x)$，則得

$$\phi_1(x)\equiv(x-b)\phi_2(x)，此處\phi_2(x)爲整式. \qquad (3)$$

代入(1)得

$$f(x)\equiv(x-a)(x-b)\cdot\phi_2(x), \qquad (4)$$

即已證明 $f(x)$ 可被 $(x-a)(x-b)$ 除盡．

繼此，可證明下之普通定理：

若 $x=a$，b，c，……致 $f(x)$ 爲零，則 $f(x)$ 可被 $(x-a)$ 418
$(x-b)(x-c)$……除盡．

如 $x=1$ 及 $x=-1$ 時 $2x^3+3x^2-2x-3$ 爲零，即 $2+3-2-3=0$ 及 $-2+3+2-3=0$．

故 $2x^3+3x^2-2x-3$ 可被 $(x-1)(x+1)$ 或 x^2-1 除盡，可用除法驗證之．

例 *1*. 一二次式 $f(x)$, $x=2$ 及 $x=3$ 時 $f(x)=0$, $x=4$ 時 $f(x)=6$, 求 $f(x)$.

因 $f(x)$ 爲二次式且可被 $(x-2)(x-3)$ 除盡 § 417, 故 $f(x)=a_0(x-2)(x-3)$, 此處 a_0 爲常數.

又因 $f(4)=6$ 故 $6=a_0(4-2)(4-3)$ 即 $a_0=3$.

故 $f(x)=3(x-2)(x-3)=3x^2-15x+18$.

例 *2*. 一三次式 $f(x)$, $x=2$ 及 $x=3$ 時 $f(x)=0$; $x=1$ 時 $f(x)=6$; $x=4$ 時, $f(x)=18$; 求 $f(x)$.

理由如前, $f(x)=(a_0x+a_1)(x-2)(x-3)$, 此處 a_0, a_1 爲常數.

又因 $f(1)=6$ 及 $f(4)=18$, 故得

$$6=(a_0+a_1)(1-2)(1-3), \text{ 或 } a_0+a_1=3, \qquad (1)$$

$$18=(4a_0+a_1)(4-2)(4-3), \text{ 或 } 4a_0+a_1=9. \qquad (2)$$

解 (1) 及 (2), 得 $a_0=2, a_1=1$.

故 $f(x)=(2x+1)(x-2)(x-3)=2x^3-9x^2+7x+6$.

419 定理. 多項式 $f(x)$ 之方次爲 n, x 之値能使 $f(x)$ 爲零者, 不能多於 n 個.

假如使 $f(x)$ 爲零之 x 之値多於 n 個, 則有形如 $(x-a)$ 多於 n 個之因子之積可以除盡 $f(x)$, § 418, 當然爲不可能, 因其積之方次超過 n 也.

420 定理. 若多項式 $f(x)$ 之方次不多於 n, 而能使 $f(x)$ 爲零之 x 之値多於 n 個, 則 $f(x)$ 之係數必皆爲 0.

因設其係數不皆爲 0, 則 x 之値, 能致 $f(x)$ 爲零者, 不能多於 n 個, § 419,

此多項式稱爲恆等於 0.

421 定理. 設二 n 次多項式 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 有 n 個以上之 x 値, 使其所得之値相等則其相當係數必等.

設$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$,

及　$\phi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n$,

又　設$\psi(x)=f(x)-\phi(x)$

$$=(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\cdots\cdots+(a_n-b_n).$$

$\psi(x)$爲0，則$f(x)$及$\phi(x)$相同，依題意，有多於n個之x值能使其相同。

故多項式$\psi(x)=(a_0-b_0)x^n+\cdots\cdots+(a_n-b^n)$之方次不多於$n$，而多於$n$個之$x$值能使之爲零，故其所有係數皆爲0。

故　$a_0-b_0=0, a_1-b_1=0, \cdots\cdots, a_n-b_n=0,$

卽　$a_0=b_0,\quad a_1=b_1\cdots\cdots,\quad a_n=b_n,$

亦卽　$f(x)$及$\phi(x)$之相當係數相等。

如$x=2, 4, 6$時$f(x)=2x^2+bx+5$及$\phi(x)=ax^2+3x+c$之值相等，則得$a=2, b=3$及$c=5$。

習　題　XIV

1. 以簡法求$x^4-3x^3-x^2-11x-4$除以$x-4$之商。
2. $5x^5-6x^4-8x^3+7x^2+6x+3$被$x-3$除。
3. $3x^4+x^2-1$被$x+2$除。
4. $3x^3+16x^2-13x-6$被$3x+1$除。
5. x^3-6x^2+x+2被$3x-1$除。
6. $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$被$x-a$除。
7. $2x^4-x^3y-7x^2y^2+7xy^3-10y^4$被$x-2y$除。
8. 設$f(x)=2x^3-5x+3$，以§414之法求$f(1)$，$f(2)$，$f(5)$，$f(-1)$，$f(-3)$，$f(-6)$。
9. 設$x^3+mx^2-10x+6$可被$x-3$除盡，試用餘式定理定m之值。
10. 設$2x^3-x^2+lx+m$可被$(x+2)(x-4)$除盡，試用上題方法定l及m之值。

11. 以§416之法，指示 $3bm+am-2an-6bn$ 能被 $m-2n$ 除盡，亦能被 $a+3b$ 除盡。

12. 以§§416,417之法，指示 $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ 能被 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 除盡。

13. 求 x 之三次整函數，當 $x=1, 4, -2$ 時，則函數爲零，$x=2$ 時，函數爲 -16。

14. 求 x 之三次整函數，當 $x=2,3$ 時，函數爲零，$x=0$ 時，函數爲 6，$x=1$ 時，函數爲 12。

15. 試證 $2x^3-ax+1$ 與 x^3+5x+2，於 x 之四値不能有相同值。

以一多項式表他多項式

422　設 A 及 B 表 x 之兩多項式，A 之方次高於 B。

以 B 除 A 設其商爲 Q，餘式爲 R，則

$$A \equiv QB+R, \tag{1}$$

若 Q 之方次不小於 B，則 Q 再以 B 除之，設其商爲 Q_1，餘式爲 R_1，則

$$Q \equiv Q_1B+R_1. \tag{2}$$

同樣若 Q_1 之方次不小於 B，則 Q_1 再以 B 除之，設其商爲 Q_2 餘式爲 R_2，則

$$Q_1 \equiv Q_2B+R_2. \tag{3}$$

設 Q_2 之方次小於 B。則得

$$\begin{aligned} A &\equiv QB+R & (1)\\ &\equiv \{Q_1B+R_1\}B+R & (2)\\ &\equiv \{(Q_2B+R_2)B+R_1\}B+R & (3)\\ &\equiv Q_2B^3+R_2B^2+R_1B+R, \end{aligned}$$

此處所有係數 Q_2, R_2, R_1, R 之方次均小於 B。

總之，任一多項式 A，其方次高於 B，按上述之法進行，以至得一商，其方次小於 B 爲止，則得

$$A\equiv Q_{r-1}B^r+R_{r-1}B^{r-1}+\cdots\cdots+R_1B+R$$

此處 $R,R_1,\cdots\cdots,R_{r-1}Q_{r-1}$ 表各累次餘式，及最末之商，其方次均小於 B。

例． 化 $x^5-4x^4+3x^3-x^2+x+4$ 爲 x^2+x+1 之多項，其係數之方次均小於 2.

用係數除法，排列計算如下：

$$\begin{array}{l|l|l}
1-4+3-1+1+4 & 1+1+\ 1 & \\
\underline{1+1+1} & 1-5+\ 7-3 & 1+1+1 \\
\quad -5+2-1 & \underline{1+1+\ 1} & 1-6 \qquad \therefore Q_1=x-6 \\
\quad \underline{-5-5-5} & \quad -6+\ 6-3 & \\
\qquad\quad 7+4+1 & \quad \underline{-6-\ 6-6} & \\
\qquad\quad \underline{7+7+7} & \qquad\quad 12+3 & \qquad \therefore R_1=12x+3 \\
\qquad\qquad -3-6+4 & & \\
\qquad\qquad \underline{-3-3-3} & & \\
\qquad\qquad\quad -3+7 & \therefore R=-3x+7. &
\end{array}$$

故 $x^5-4x^4+3x^3-x^2+x+4$

$-6)(x^2+x+1)^2+(12x+3)(x^2+x+1)-(3x-7)$.

於特例，此法能使 x 之任一多項式，變爲具常數係數之 423

$x-b$ 之多項式，其方次與原式相同.

例．變 $2x^3-x^2+4x-5$ 爲 $x-2$ 之多項式.

茲用簡除法逐次計算如下：

$$\begin{array}{lllll}
2 & -\ 1 & +\ 4 & -\ 5 & \underline{|2} \\
 & \quad 4 & \quad 6 & \quad 20 & \\
\overline{2} & \overline{+\ 3} & \overline{+10,} & \overline{\ 15} & \therefore R=15 \\
 & \quad 4 & \quad 14 & & \\
\overline{2} & \overline{+\ 7,} & \overline{\ 24} & & \therefore R_1=24 \\
 & \quad 4 & & & \\
\overline{2,} & \overline{\ 11} & & & \therefore R_2=11 \text{ 及 } Q_2=2.
\end{array}$$

$\therefore 2x^3-x^2+4x-5\equiv 2(x-2)^3+11(x-2)^2+24(x-2)+15.$

習 題 XV

1. 用 § 422 之法,以 x^2+1 表 x^4+x^3-1;
2. 用 $2x^2+1$ 表 $4x^4+2x^3+4x^2+x+6$.
3. 以 x^3-x^2+x+3 表 $2x^7-3x^6+2x^5+5x^4-x^3+a$.
4. 以 x^2+xy+y^2 表 $x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5$.
5. 用 § 423 之方法,以 $x-3$ 表 $2x^3-8x^2+x+6$.
6. 以 $x+2$ 表 $x^5+3x^4-6x^3+2x^2-3x+7$.
7. 以 $x+3$ 表 x^3+9x^2+27x.
8. 以 $x+1$ 表 x^3+3x^2+x-1.

VI. 有理整式之因子

導 言

424 **因子.** 設 A 表含一變數或數變數之有理整函數. 凡可整除 A 之任一有理數函數皆稱爲 A 之因子.

故一函數 F 爲 A 之因子,其充分及必要之條件爲

1. F 關於 A 中之變數爲有理整函數.

2. A 可化爲 $A\equiv GF$ 之形,此處 G 亦爲整式.

例 *1.* 因 $2x^2-2xy=2x(x-y)$, 故 x 及 $x-y$ 均爲 $2x^2-2xy$ 之因子,

例 *2.* 因 $3x^2-2y^2=(\sqrt{3}x+\sqrt{2}y)(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y)$, 故 $\sqrt{3}x+\sqrt{2}y$ 及 $\sqrt{3}x-\sqrt{2}y$ 均爲 $3x^2-2y^2$ 之因子.

例 *3.* 雖 $x-y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, 但 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 及 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 不得稱爲 $x-y$ 之因子, 因其俱非 x 及 y 之有理函數也.

註 *1*. 因子之係數不必爲整數（或式），或有理數（或式）．換言之，可爲任何種類之數或式．如例 2 內因子之係數爲無理數． 425

因 $x^2-y=(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})$，故 x^2-y 於 x 及 y 爲不可分解；但獨於 x 爲可分解，其因子爲 $x+\sqrt{y}$ 及 $x-\sqrt{y}$．含多個文字之多項式亦然．

註 *2*. 除特論整數係數之函數時外，已知整函數 A 之因子普通不計其"數字因子"如例 1 中之 2；因無須求整函數係數之爲整數者，蓋任一獨數（或常數）因子均可謂其能除盡 A 云． 426

同理，F 爲 A 之因子，而 c 爲任一常數（非0），則 cF 亦爲 A 之因子；但應視 F 與 cF 爲 A 之同性因子，而 A 之因子範圍中只含其一個．

如例 1 之因子，可稱爲 $2x$ 及 $x-y$ 爲其因子或 $-2x$ 及 $y-x$ 爲其因子二語均可．

定理. 若 F 爲 B 之因子，而 B 爲 A 之因子．則 F 亦爲 A 之因子． 427

按 § 424，A 與 B 可分解爲下式：

$$A\equiv GB,\quad B=HF.$$

此處 G 與 H 爲整式．

故 $$A\equiv G\cdot HF\equiv GH\cdot F,$$

卽 F 爲 A 之因子，§ 424．

素式，複式. 一整數除自身（或常數）外無他因子，此式稱曰素式，含他因子者謂之複式． 428

如 $x+y^2$ 及 $x-2y$ 爲素式，但 x^2-y^2 爲複式．

一 n 次之複函數 A，爲不少於二不多於 n 個之素函數 B，C，……之積．此諸素函數稱爲 A 之素因子． 429

430 玆假定：

1 任一已知函數 A 只有一組素因子.

2. A 之一切他因子，爲此等素因子之積.

3. 此等素因子之二個或多個可相等，但 A 只能以其不同素因子之冪之積的唯一方法表之.

此定理中，2 及 3 爲 1 之系，其證明詳 §§ 484, 485 於 A 之一變值函數，且可證明其一般情形.

如，$x^3y^3-2x^2y^4=xxyyy\,(x-2y)$，而 $x^3y^3-2x^2y^4$ 之素因子爲 $x, x, y, y, y, x-2y$.其他因子如 x^2, xy 等等爲各素因子之積. 其不同之素因子爲 $x, y, x-2y$, 且只有一法表各因子之冪之積，即 $x^2y^3(x-2y)$.

431 因子分解法. 分解已知函數 A, 完全析之爲素因子，即化 A 爲 $A\equiv B\cdot C\cdot D$ ……之形，此處 B, C, D……表素函數.

但於起始不必察知其素因子，可先析 A 爲其兩因子 F 與 G 之積，再分解 F 及 G，依此進行以至盡成素因子爲止.上法第一步稱爲"析 A 之因子".

因子分解法爲乘法之逆. 乘法含兩重要步驟： (1)分配律之幾種應用，即以 $ac+bc$ 代 $(a+b)\,c$ 等；(2) 於所得結果內，合併同類項. 逆此步驟，即 (1) 將所集各項分開，——此即分解因子之難關——及(2) 用分配律以 $(a+b)\,c$ 代 $ac+bc$ 等.

各種複式必全能分解，如 $x^5+ax^3+bx^2+cx+d$ 可證明爲複式，且可證明此式之因子不能以代數方法求之，即在可能範圍方適用於各種代數演算.

各項有一公因子之式

一式之各項均含獨項式或多項式之公共因子者，則可以 432
分配律分解之，即

$$ab+ac+ad+\cdots\cdots=a(b+c+d+\cdots\cdots).$$

例 *1.* 分解 $2a^2c+2abc+4ac^2-6acd$.

各項皆有因子 $2ac$. 劈出之，得

$$2a^2c+2abc+4ac^2-6acd=2ac(a+b+2c-3d).$$

例 *2.* 分解 $a(c-d)+b(d-c)$.

各項皆有因子 $c-d$ 劈出之，得

$$a(c-d)+b(d-c)=a(c-d)-b(c-d)$$
$$=(a-b)(c-d).$$

即將此種因子劈出而置於外方.

有若干式非如上述之形，必須結合各項而化之方有公共 433
因子.

例 *1.* 分解 $ac+bd+ad+bc$.

結合 ac 及 ad，又結合 bc 及 bd，得 $a(c+d)+b(c+d)$ 爲一含公共因子之二項式.

故 $ac+bd+ad+bc=(a+b)(c+d)$.

由此觀之，結合各部之項數，必須相等.

例 *2.* 分解 $a^2+ab-bd-ad+ac+cd$.

此式或爲含三項之兩組，及爲含兩項之三組. 其中四項含 a，如 a^2, ab, $-ad$, ac，餘兩項含 d，如 $-bd$ 及 $-cd$. 欲得各組之項數相同，須 $-ad$ 與含 d 諸項結合之，得

$$a^2+ab+ac-ad-bd-cd=a(a+b+c)-d(a+b+c)$$
$$=(a-d)(a+b+c).$$

習 題 XVI

分解以下各式之因子:

1. $6x^4y^3z^3-12x^3y^4z+8x^2y^3$.
2. $2n^2+(n-3)n$.
3. $ab-a+b-1$.
4. $mx-nx-mn+n^2$.
5. $3xy-2x-12y+8$.
6. $10xy+5y^2+6x+3y$
7. $x^3y^2-x^2y^3+2x^2y-2xy^2$.
8. $x^4+x^3+x^2+x$.
9. $ac+bd-(bc+ad)$.
10. $a^2c-abd-abc+a^2d$.
11. $ad+ce+bd+ae+cd+be$.
12. $a^2+cd-ab-bd+ac+ad$.

用已知恒等式求因子

434 於第二章內曾導出幾種特式乘積, 如 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. 設已知函數 A, 能化爲此積之形, 則能卽刻書出因子. 下節說明此類因子分解法.

435 **完全三項平方式.** 凡呈 $a^2\pm 2ab+b^2$ 之形者爲完全三項平方式. 此等式可用下列公式解其因子:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2.$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)=(a-b)^2.$$

注意完全三項平方式內 (正當排列), 中項爲兩外項平方根之積之2倍, 則其相同之二因子, 爲以其中項符號連結兩外項之主要平方根而得之.

開完全平方之方根, 卽求此兩等因子之一.

例 1. 分解 $9x^2-12xy+4y^2$ 之因子.

此爲完全平方, 因 $12xy=2\sqrt{9x^2}\cdot\sqrt{4y^2}$.

又因 $\sqrt{9x^2}=3x$, $\sqrt{4y^2}=2y$, 其中項之符號爲一, 故得 $9x^2-12xy+4y^2=(3x-2y)(3x-2y)=(3x-2y)^2$.

例2. 分解$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$之因子.

用集項法化此式爲三項平方式:

$$a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=(a+b+c)^2.$$

例3. 分解以下諸式之因子:

1. $x^2+14x+49$.　　2. $9-6a+a^2$.

3. $9x^2y^2+30xy+25$.　　4. $x^2-4xy+4y^2+6x-12y+9$.

5. $64a^8-48a^4+9$.　　6. $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$

平方差. 凡屬此形,或可化爲此形之代數式,皆可用下列公式分解之: 436

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

如
$$x^2-y^2-z^2+2yz=x^2-(y^2-2yz+z^2)$$
$$=x^2-(y-z)^2$$
$$=(x+y-z)(x-y+z).$$

次法於化三項式成平方差時,甚爲有用;即先加一適宜之量於其中之一項使成一完全平方,然後再減此量.

如
$$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy).$$

例. 分解以下諸式之因子.

1. x^4-y^6.　　2. $6a^3-6ab^2$.

3. $12a^3x^3-75axy^2$.　　4. $25x^{2n}-49x^{2m}$.

5. $36x^4-1$.　　6. $x^4-3x^2y^2+y^4$.

平方和. 若用虛數單位$i=\sqrt{-1}$, §§218,220, 則平方和a^2+b^2可化爲平方差,然後用§436之法分解之,其因子爲虛數. 437

因　$i^2=-1$, 故 $b^2=-(-b^2)=-(ib)^2$.

故　$a^2+b^2=a^2-(ib)^2=(a+ib)(a-ib)$.

由§§219, 220, 已知 i 仍依普通演算法則，於應用時只須記憶 $i^2=-1$.

438 **任兩同冪之和及差.** 在§§308, 309, 310內已證明

第一. n 爲奇或爲偶,

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}). \quad (1)$$

第二. n 爲偶數,

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1}). \quad (2)$$

第三. n 爲奇數,

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}). \quad (3)$$

故得下定理:

1. $a-b$ 永可除盡 a^n-b^n.
2. 若 n 爲偶數, $a+b$ 可除盡 a^n-b^n.
3. 若 n 爲奇數, $a+b$ 可除盡 a^n+b^n.
4. 各商皆含下列諸項

$$a^{n-1} \quad a^{n-2}b \cdots\cdots ab^{n-2} \quad b^{n-1}$$

設 $a-b$ 爲除數則均以+號連結之，設 $a+b$ 爲除數則−,+相間.

如, 1. $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

2. $x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$.

3. $8a^3+27b^3c^3=(2a)^3+(3bc)^3$

$$=(2a+3bc)[(2a)^2-(2a)(3bc)+(3bc)^2]$$

$$=(2a+3bc)(4a^2-6abc+9b^2c^2).$$

例. 分解以下諸式之因子:

1. $64x^3-125y^3$. 2. $27x^3+1$. 3. $16x^4-81y^4$.

439 **n非素數時.** 下定理可爲§438(1), (2), (3)及§436之直接推斷.

1. 若 n 爲任一整數之倍數，則 a^p-b^p 可除盡 a^n-b^n.

如，$x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3$

$$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4).$$

2. 若 n 爲任意整數 p 之偶倍數則 a^p+b^p 除盡 a^n-b^n.

如，$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$

$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3).$$

3. 若 n 爲任意整數 p 之奇倍數，則 a^p+b^p 可除盡 a^n+b^n, n 或奇或偶.

如，$x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3$

$$=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$$

4. 若 n 爲 2 之冪，運用 § 436 之法則可解 a^n+b^n 爲二次之諸因子.

如，$x^8+y^8=x^8+2x^4y^4+y^8-2x^4y^4$

$$=(x^4+y^4)^2-2x^4y^4$$

$$=(x^4+y^4+\sqrt{2}x^2y^2)(x^4+y^4-\sqrt{2}x^2y^2),$$

$$x^4+y^4+\sqrt{2}x^2y^2=x^4+2x^2y^2+y^4-(2-\sqrt{2})x^2y^2$$

$$=(x^2+y^2)^2-(2-\sqrt{2})x^2y^2$$

$$=(x^2+y^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy)(x^2+y^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy),$$

餘類推.

用 § 444 之法，上面各二次因子，均可化爲一次因子，(虛數)，若 n 爲 2 之冪，則 a^n+b^n 恆可全部分解之.

若 n 非素數，最好先將 a^n+b^n 或 a^n-b^n 分爲兩因子，使其方次愈相近愈妙. 則由此所得因子中至少有一個恆可再行分解.

如 x^6-y^6 先分解爲兩因子，再繼續分解之，得

$$x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

例．分解以下諸式之因子：

1．x^4+y^4．　　*2*．x^8-y^8．　　*3*．x^9+y^9．

440　§§438，439之定理亦適用$a^m\pm b^n$之式，而m及n同爲整數p之倍數時．

如　$x^6-y^{15}=(x^2)^3-(y^5)^3$

$$=(x^2-y^5)(x^4+x^2y^5+y^{10}).$$

習　題　XVII

試分解下列各式之因子，至不能分解時爲止，但不得導入無理數或虛數之係數．

1．$4x^3y-20x^2y^2+25xy^3$．　　2．$28tx^2-63ty^2$．

3．$x^2+y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx$．

4．$(7a^2+2b^2)^2-(2a^2+7b^2)^2$

5．$(7x^2+4x-3)-(x^2+4x+3)^2$．

6．$4(1-b^2-ab)-a^2$．

7．x^4+x^2+1．　　8．$a^4-6a^2b^2+b^4$．

9．a^4+4a^2+16．　　10．$9x^4+15x^2y^2+16y^4$．

11．$4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$．

12．$576x^6y^3-9y^{15}$．　13．x^9-y^9　14．$x^{12}-y^{12}$．

15．$x^{10}+y^{10}$　16．x^5-32　17．x^7+y^{14}

集項分解法

441　x之多項式，常可集爲若干組，每組含一公共因子F．則此公共因子F爲全式之因子．與§433比較之．

例 *1*．分解x^3+3x^2-2x-6之因子．

末兩係數爲首二係數之等倍數，故得

$x^3+3x^2-2x-6=x^2(x+3)-2(x+3)$

$$=(x^2-2)(x+3)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3)$$

例 2. 分解 x^3+2x^2+2x+1.

集同係數之項，得

$$
\begin{aligned}
x^3+2x^2+2x+1 &= x^3+1+2x(x+1) \\
&= (x^2-x+1)(x+1)+2x(x+1) \\
&= (x^2-x+1+2x)(x+1) \\
&= (x^2+x+1)(x+1).
\end{aligned}
$$

有時先分其已知諸項中之一項爲兩項然後始能分解.

例 3. 分解 x^3+4x^2+5x+6 之因子.

$$
\begin{aligned}
x^3+4x^2+5x+6 &= x^3+3x^2+x^2+3x+2x+6 \\
&= x^2(x+3)+x(x+3)+2(x+3) \\
&= (x^2+x+2)(x+3).
\end{aligned}
$$

玆再設一例.

例 4. 分解 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ 之因子.

$$
\begin{aligned}
x^4+2x^3+3x^2+2x+1 &= x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1 \\
&= (x^2+x)^2+2(x^2+x)+1 \\
&= (x^2+x+1)^2.
\end{aligned}
$$

習 題 XVIII

分解下列各式之因子.

1. x^4-x^3+x-1.
2. $x^5-x^3-8x^2+8$.
3. x^4-2x^3+2x-1.
4. $x^3-7x^2-4x+28$.
5. $x^6-x^4y^2-x^2y^4+y^6$.
6. x^3+2x^2+3x+2.
7. $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1$.
8. $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$.

二次式之分因法

二次式 x^2+px+q，觀察分解法. 著 p 及 q 爲整數觀 442
察分解有時可能.

因 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$,

設能求兩數 a 與 b，使 $a+b=p$ 及 $ab=q$ 則得 x^2+px+q 之因子.

此兩數恆可存在，但未必爲有理數，§ 444，若爲有理整數 § 454，則可由觀察求得之，如下例．

例． 分解 $x^2+13x+42$ 之因子．

求兩整數 a 及 b，其積爲 42，其和爲 13．因 ab 及 $a+b$ 均爲正，故 a 及 b 必皆爲正，兩整數其積爲 42 者爲 1 與 42；2 與 21；14 與 3；7 及 6，其中求一對之和爲 13 者即 7 與 6．

故 $x^2+13x+42=(x+7)(x+6)$．

例 分解 $x^2-13x+22$ 之因子．

此式 a 與 b 均負；因其積爲正，及其和爲負．故仍用前法，試算一對負數其積爲 22 者，即 -11 與 -2，因 $-11-2=-13$．

故 $x^2-13x+22=(x-11)(x-2)$．

例 *3*． 分解 $x^2-9x-22$ 之因子．

此處 ab 爲負，故 a 與 b 之符號相反；且因 $a+b$ 爲負，故負數之值較大，因 $-22=-22\times1=-11\times2$；試算如前，得 $a=-11$，及 $b=2$，因 $-11+2=-9$．

故 $x^2-9x-22=(x-11)(x+2)$．

例 *4*． 分解以下諸式：

1． x^2+3x+2． *2*． $x^2-16x+15$． *3*． $x^2-4x-12$．

4． x^2+x-30． *5*． $x^2+20x+96$． *6*． $x^2-21x+80$．

443 **二次式 ax^2+bx+c 之觀察分解法**． 若 a，b 及 c 爲整數時有時可以觀察分解之．

用 a 乘除之，可化 ax^2+bx+c 爲 $[(ax)^2+b(ax)+ac]/a$，則括號內之式，可用上法解其因子，即求兩整數，其積爲 ac，其和爲 b 者．

例 *1*． 分解 $2x^2+7x+3$ 之因子．

$$2x^2+7x+3=\frac{(2x)^2+7(2x)+6}{2}$$

$$=\frac{(2x+6)(2x+1)}{2}=(x+3)(2x+1).$$

例 2. 分解 $abx^2+(a^2+b^2)x+ab$ 之因子.

令 $abx^2+(a^2+b^2)x+ab=\dfrac{(abx)^2+(a^2+b^2)\cdot abx+a^2b^2}{ab}$

$$=\frac{(abx+a^2)(abx+b^2)}{ab}$$

$$=(bx+a)(ax+b).$$

例 3. 分解 $16x^2+72x-63$ 之因子.

在此種題內,不必再以 16 乘除之, 因

$$16x^2+72x-63=(4x)^2+18(4x)-63$$

$$=(4x+21)(4x-3).$$

例 4. 分解以下諸式之因子.

1. $6x^2-13x+6$.　　2. $5x^2+14x-3$.

3. $14x^2+x-3$.　　4. $18x^2+21x+5$.

5. $49x^2+105x+44$.　　6. $abx^2-(ac-b^2)x-bc$.

用配方法分解二次式 x^2+px+q 或 ax^2+bx+c 之因子. 444

上法僅用於特別二次式,此法可解一般二次式.

因
$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

故加 $\frac{p^2}{4}$ (即 x 之半係數之平方)於 x^2+px, 可使之爲一完全平方. 此法謂之 x^2+px 之配方.

1. 因加減 $\frac{p^2}{4}$ 於 x^2+px+q,其值不變. 但此法能變此式爲兩平方差, 再用 § 436 之法解之. 如,

$$x^2+px+q=x^2px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}.$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right).(1)$$

2. 因 $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.

故其因子，可在(1)内以$\frac{b}{a}$代 p，以$\frac{a}{a}$代 q 得之．化簡其結果得　ax^2+bx+c

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right). \quad (2)$$

例 *1.*　分解 x^2-6x+2 之因子．

$$\begin{aligned} x^2-6x+2&=x^2-6x+3^2-3^2+2\\ &=(x-3)^2-7\\ &=(x-3+\sqrt{7})(x-3-\sqrt{7}). \end{aligned}$$

例 *2.*　分解 $x^2+8x+20$ 之因子．

$$\begin{aligned} x^2+8x+20&=x^2+8x+4^2-4^2+20\\ &=(x+4)^2+4\\ &=(x+4)^2-4i^2\\ &=(x+4+2i)(x+4-2i). \end{aligned}$$

上式先得兩平方和，$(x+4)^2+4$，然後以 $-4i^2$ 代 4 後將其和化爲差，§ 437．此兩因子爲虛數．

例 3.　分解 $3x^2-5x+1$ 之因子．

$$\begin{aligned} 3x^2-5x+1&=3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}\right]\\ &=3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\right]\\ &=3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right]\\ &=3\left(x-\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right) \end{aligned}$$

例 *4.*　分解以下諸式之因子．

1. $x^2+10x+23$.　　*2.* $x^2-10x+24$.

3. $x^2-12x+45$.　　*4.* x^2+x+1.

5. $2x^2+3x+2$.　　*6.* $x^2-4ax-4b^2+8ab$.

兩變數之齊次二次函數. §§442−444之法適用於下 445
之二次式

$$ax^2+bxy+cy^2.$$

例 1. 分解 $x^2-8xy+14y^2$.

$$\begin{aligned}x^2-8xy+14y^2&=x^2-8xy+16y^2-2y^2\\&=(x-4y)^2-2y^2\\&=[x-(4+\sqrt{2})y][x-(4-\sqrt{2})y].\end{aligned}$$

例 2. 分解以下諸式:

1. $x^2+5xy+4y^2$.　　2. x^2-xy+y^2.

兩變數之非齊次二次函數. 此種函數普通多爲素式. 446
但下例爲複式,可分解之.

例 1. 分解 $A=x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$ 之因子.

若 A 爲複式, 必爲兩一次多項式之積. 且其二次項 $x^2+2xy-8y^2$,必爲該多項式中諸一次項之積.

用觀察求得 $x^2+2xy-8y^2=(x+4y)(x-2y)$.

故若 A 爲複式必有兩數 l 及 m 適合下式:

$$\begin{aligned}&x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3\\&=(x+4y+l)(x-2y+m)\\&=x^2+2xy-8y^2+(l+m)x+(4m-2l)y+lm.\qquad(1)\end{aligned}$$

但(1)爲恆等式,故由§285,得

$l+m=2$ (2), $-2l+4m=14$ (3), $lm=-3$ (4).

由(2)及(3)得 $l=-1$, $m=3$. 此等值適合於(4), 因 $-1\cdot3=-3$.

故 $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=(x+4y-1)(x-2y+3)$.

註. 此例示諸複式有何特殊結構,若僅變 A 之末項 -3 爲任何他數,則 A 變爲素式; 因 $l=-1, m=3$ 必不適合(4)也.

此法亦適用於含三個變數之齊次二次函數.

如，分解 $x^2+2xy-8y^2+2xz+14yz-3z^2$ 之因子，

設 $x^2+2xy-8y^2+2xz+14yz-3z^2$

$$=(x+4y+lx)(x-2y+mz).$$

按上法解之，得 $l=-1, m=3$.

例 2. 分解 $2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2$ 之因子.

例 3. 證明 $x^2-y^2+2x+y-1$ 爲素數.

447 **n 次多項式.** 前已證明各二次多項式 $a_0x^2+a_1x+a_2$ 爲兩一次因子之積. 實則 x 之任何次多項式，亦爲諸一次因子之積，但無求因子之通法存在而已；換言之

定理. 各 x 之 n 次多項式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

爲 n 個一次因子之積；卽 n 個二項式，$x-\beta_1, x-\beta_2, \cdots\cdots, x-\beta_n$，能致

$$f(x)=a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n)\text{者}.$$

此定理之證明詳後.

448 **系.** 兩變數 x 及 y 之 n 次齊次式，爲 n 個 x 及 y 之一次同次式之積.

如齊次式 $a_0x^3+a_1x_2y+a_2xy^2+a_3y^3$ 可以 x/y 代 x 而導之爲 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 之形，然後以 y^3 乘其結果.

但由 §447，$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3\equiv a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)$，設以 $\frac{x}{y}$ 代 x 於此恆等式內，再以 y^3 分乘兩端各因子，得

$$a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy_2+a_3y^3\equiv a_0(x-\beta_1y)(x-\beta^2y)(x-\beta_3y).$$

習 題 XIX

分解以下諸式之因子：

1. $x^2-14x+48$.
2. $x^2-21x-120$.
3. $5x^2-53x-22$.
4. $16x^2+64x+63$.
5. $54x^2-21x+2$.
6. $12x^2+20xy-8y^2$.

7. $x^4-13x^2+36.$ 8. $x^3y-3x^2y^2-18xy^3.$

9. $x^2-3x+3.$ 10. $3x^2+2x-3.$

11. $x^2-4xy-2y^2.$ 12. $x^2-6ax-9b^2-18ab.$

13. $abx^2-(a^2+b^2)x-(a^2-b^2).$

14. $x^2+bd+dx+bx+cx^2+cdx.$

15. $x^2-8xy+15y^2+x-4y-3.$

16. $x^2+3xy+2y^2+3zx+5yz+2z^2.$

餘式定理及簡除法之應用

用餘式定理求因子. 設$f(x)$表x之多項式.按餘式定理,§415,設b表能致$f(b)=0$之一數,則$x-b$爲$f(x)$之一因子.有時用觀察法卽可求得此數b. 449

例. 分解$f(x)=x^3-5x+4$之因子.

$$\begin{array}{l|l} 1+0-5+4 & \underline{1} \\ \underline{\quad 1\quad 1-4} & \\ 1\quad 1-4,\ 0 & \end{array}$$

因$f(1)=1-5+4=0$,故$x-1$爲$f(x)$之因子.以$x-1$除$f(x)$得商x^2+x-4.

故 $f(x)=(x-1)(x^2+x-4).$

註. 如上例,察知$f(x)$之係數之代數和爲0,則$x-1$爲$f(x)$之因子.

整係數多項式. 設欲求具整數係數之多項式$f(x)$之因子,通常先求具整數係數之若干一次因子,此等因子常可用下之原則求得,§§451,452. 450

一多項式$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,具整數係數,可有一因子如$x-b$之形,而$b$爲整數,則$b$必爲$f(x)$之常數項$a_n$之因子. 451

如令$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$,若$x-b$爲$f(x)$之因子,則得,§415,

$$f(b)=a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=0,$$

故 $$(a_0b^2+a_1b+a_2)b=-a_3.$$

因 $a_0b^2+a_1b+a_2$爲整數,故b爲a_3之因子.

故所有諸因子 $x-b$ 可用下例求之.

例. 分解 $f(x)=3x^5-3x^4-14x^3-11x^2-10x-6$.

常數項 -6 之因子爲 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$,若 $x-b$ 爲 $f(x)$ 之因子，則 b 必爲此等値之一. 玆用綜合除法試之如下:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
3 & -3 & -13 & -11 & -10 & -6 & \underline{\mid -1} \\
 & -3 & +6 & +7 & +4 & +6 & \\ \hline
3 & -6 & -7 & -4 & -6, & 0 & \underline{\mid -1} \\
 & -3 & +9 & -2 & +6 & & \\ \hline
3 & -9 & +2 & -6, & 0 & & \underline{\mid 3} \\
 & 9 & 0 & +6 & & & \\ \hline
3 & 0 & 2, & 0 & & &
\end{array}$$

因 $f(1)\neq0$，則 $x-1$ 非其一因子，故以 $x-(-1)$ 試除之，因恰除盡，得商 $Q_1=3x^4-6x^3-7x^2-4x-6$,而餘式爲 0. 故 $x+1$ 爲 $f(x)$ 之因子,而 Q_1 爲其餘因子之積.

次分解 Q_1 之因子，仍可證明能以 $x+1$ 除盡，得商 $Q_2=3x^3-9x^2+2x-6$.

Q_2 之常數項仍爲 -6，繼續以 $x+1, x-2$，$x+2$ 試除之,但各餘式皆非 0,故此等數無一爲其因子. 但以 $x-3$ 試除之,恰好除盡,得商 $Q_3=3x^2+2$. 故

$$f(x)=(x+1)^2(x-3)(3x^2+2).$$

452 具整數係數之多項式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,可有一形如 $\alpha x-\beta$ 之因子,此處 α 及 β 表無公因數之二整數,且 α 須爲 a_0 之因子,而 β 須爲 a_n 之因子.此定理含於 §451 之內.

設 $$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3.$$

若 $\alpha x-\beta$ 或 $\alpha(x-\beta/\alpha)$ 爲 $f(x)$ 之一因子，由 § 415，則得

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=a_0\frac{\beta^3}{\alpha^3}+a_1\frac{\beta^2}{\alpha^2}+a_2\frac{\beta}{\alpha}+a_3=0,$$

故 $$a_0\beta^3+a_1\beta^2\alpha+a_2\beta\alpha^2+a_3\alpha^3=0. \qquad (1)$$

由(1)得 $$a_0\beta^3=-(a_1\beta^2+a_2\beta\alpha+a_3\alpha^2)\alpha. \qquad (2)$$

因 $a_1\beta^3+a_2\beta\alpha+a_3\alpha^2$ 爲整數，故 α 爲 $a_0\beta^3$ 之因子. 但 α 與 β^3 無公共因子，§ 492,2，故 α 爲 a_0 之因子，§ 492,1.

又自(1)，$(a_0\beta^2+a_1\beta\alpha+a_2\alpha^2)\beta=-a_3\alpha^3 \qquad (3)$

理由同前. 故得 β 爲 a_3 之因子.

故此等因子 $\alpha x-\beta$ 可如下例求得之.

例. 分解 $f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$.

若 $\alpha x-\beta$ 爲 $f(x)$ 之因子,則 α 之值必爲 $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6$ 之一,而 β 之值必爲 $\pm1,\ \pm2$ 之一,故 β/α 之値,必爲 $\pm1,\ \pm2,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{1}{6}$ 之一.

以 β/α 之各值試求 $\alpha x-\beta$ 須用簡除法, 以 $x-\beta/\alpha$ 試除 $f(x)$, 若恰好除盡, 以 Q 表其商,則 $\alpha x-\beta$ 爲 $f(x)$ 之因子, Q/α 爲其餘因子之積, § 412,3.

$$\begin{array}{l|l}
6+5+3-3-2 & -1/2 \\
\quad -3-1-1\quad 2 & \\
\hline
6+2+2-4,\quad 0 & \\
3+1+1-2 & 2/3 \\
\quad\ 2+2+2 & \\
\hline
3+3+3,\quad 0 & \\
1+1+1 &
\end{array}$$

以 $x-1,x+1,x-2,x+2$, 試除之,無一能除盡 $f(x)$者.但以 $x+\frac{1}{2}$ 除之得商 $Q_1=6x^3+2x^2+2x-4$, 故 $2x+1$ 爲 $f(x)$ 之一因子, 其餘因子之積爲 $Q_1/2=3x^3+x^2+x-2$.

次再分解 $Q_1/2$ 之因子. 若 $\alpha x-\beta$ 爲一因子, β/α 之値必爲 $\pm1,\ \pm2,\ \pm\frac{1}{3}.\ \pm\frac{2}{3}$, 但已知 $x-1,\ x+1,\ x-2,\ x+2$ 非其因子,因非 $f(x)$之因子也.以 $x-\frac{1}{3},\ x+\frac{1}{3}$ 試之, 皆不能除盡 $Q_1/2$, 但以 $x-\frac{2}{3}$ 除之, 得商故爲 $Q_2=3x^2+3x+3$.故 $3x-2$ 爲 $Q_1/2$ 之因子,其餘因子之積爲 $Q_2/3=x^2+x+1$.故

$$f(x)=(2x+1)(3x-2)(x^2+x+1).$$

註. 以 $x-b$ 或 $x-\beta/\alpha$ 試除之前, 不能除盡者常顯而易知. 453

如, 以 $x-2$ 試除 $5x^3-4x^2+x+8$,顯然不能除盡;因

$$\begin{array}{l|l}
5-4+1+8 & 2 \\
\quad\ 10 & \\
\hline
5\quad 6 &
\end{array}$$

除數2致 Q 之次一係數爲 6, 未用之係數爲 1 及 8, 皆正, 故 Q 及 R 之其餘係數,必皆爲正,卽 R 不爲 0,

同樣以 $x-\frac{1}{3}$ 試除 $3x^3+x^2+x-2$ 亦顯然不能除盡.因續行演算均得分數,

$$\begin{array}{l|l}
3+1+1-2 & 1/3 \\
\quad\ 1 & \\
\hline
3\quad 2 &
\end{array}$$

卽 $2\cdot\frac{1}{3}$, 或 $\frac{2}{3}$, 故致令 Q 及 R 之其餘係數, 均爲分數,而 R 不爲 0.

454 由 § 452 可知多項式$f(x)=x^n+\cdots\cdots+a_n$其首係數爲1,其他係數皆爲整數,設以有理分數代 x 則$f(x)$,不爲 0.

因 $f(\beta/\alpha)=0$, 則 $ax-\beta$ 可除盡$f(x)$, 故 α 必爲 1 之因子卽 $\alpha=\pm1$.

455 **多項式因子分解及解方程.** 由 § 350 可知分解多項式成諸一次因子之問題與解方程$f(x)=0$之性質相同.

例 *1.* 解$f(x)=2x^4+x^3-17x^2-16x+12=0$.

按 § 452, 得$f(x)=(2x-1)(x+2)^2(x-3)$.

故方程$f(x)=0$ 與下四方程爲等値.

$$2x-1=0,\ x+2=0,\ x+2=0,\ x-3=0.$$

故$f(x)=0$之根爲 $1/2, -2, -2$, 及 3.

例 *2.* 解 $x^3+3x^2=10x+24$.

移項, $x^3+3x^2-10x-24=0$.

分爲因子, $(x+2)(x-3)(x+4)=0$.

故所求之根爲 $-2, 3$ 及 -4.

習 題 XX

分解下列各式:

1. x^3-7x+6.
2. $x^3+6x^2+11x+6$.
3. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.
4. x^4-2x^3+3x-2.
5. $6x^3-13x^2-14x-3$.
6. $2x^3-5x^2y-2xy^2+2y^3$.
7. $2x^4-x^3-9x^2+13x-5$.
8. $4x^6-41x^4+46x^2-9$.
9. $6x^5+19x^4+22x^3+23x^2+16x+4$.
10. $5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4$.

解下列各方程式:

11. $x^2-4x-12=0$.
12. $6x^2-7x+2=0$.
13. $x^2-5x=14$.
14. $x^2+6x=2$.
15. $x^3-9x^2+26x=24$.
16. $x^4+2x^3-4x^2-2x+3=0$
17. $x^3-1=0$.
18. $10x^3-9x^2-3x+2=0$.

習題 XXI

用前章所述之法，分解以下諸式之因子，分解工作至可能限度爲止．不許引入無理數或虛數係數．

1. $6xy+15x-4y-10$.
2. $a^2bc-ac^2d-ab^2d+bcd^2$.
3. $a^3(a-b)+b^3(b-a)$.
4. a^5-81ab^4.
5. $a^4b-a^2b^3+a^3b^2-ab^4$.
6. $3abx^2-6axy+bxy-2y^2$.
7. $3x^6-192y^6$.
8. $(x^2+x)^3-8$.
9. $64x^6y^3-y^{15}$.
10. $x^2-(a-b)x-ab$.
11. $x^{2n}-3x^n-18$.
12. $x-x^2+42$.
13. $3x^4+3x^3-24x-24$.
14. $x^5-9x^3+8x^2-72$.
15. $2xc-a^2+x^2-2ab+c^2-b^2$.
16. $x^2(x^2-20)+64$.
17. $a^2-2ab+b^2-5a+5b+6$.
18. $x^4-10x^2y^2+9y^4$.
19. $6x^2-7xy-5y^2-4x-2y$.
20. $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2$.
21. $4(xz+uy)^2-(x^2-y^2+z^2-u^2)^2$.
22. $14x^2+19x-3$.
23. $1+19y-66y^2$.
24. $xy^3+55x^2y^2+204x^3y$.
25. $a^4-18a^2b^2c^2+81b^4c^4$.
26. $(x^2-7x)^2+6x^2-42x$.
27. $8(x+y)^3-27(x-y)^3$.
28. $(x-2y)x^3-(y-2x)y^3$.
29. $x^2+a^2-bx-ab+2ax$.
30. $x^5-y^5-(x-y)^5$.
31. $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$.
32. b^4+b^2+1.
33. $2x^2+7xy+3y^2+9x+2y-5$.
34. a^4+4.
35. $x^2-xy-2y^2+4xz-5yz+3z^2$.
36. $4a^4+3a^2b^2+9b^4$.
37. $x^2-8ax-40ab-25b^2$.
38. x^8+x^4+1.
39. $(x^2+2x+1)^2-(x^2-2x+1)^2$.
40. $(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.
41. $x^3-ax^2-b^2x+ab^2$.
42. $x^4+bx^3-a^3x-a^3b$.
43. $a^2-9b^2+12bc-4c^2$.
44. $8a^3+12a^2+6a+1$.
45. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.
46. $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.
47. $4x^5+4x^4-37x^3-37x^2+9x+9$
48. x^4-4x+3.
49. $x^2+5ax+6a^2-ab-b^2$.
50. $15x^3+29x^2-8x-12$.
51. $abcx^2+(a^2b^2+c^2)x+abc$.
52. $2x^3-ax^2-5a^2x-2a^3$.

53. $(a-b)x^2+2ax+(a+b)$.　　54. $x^{15}-y^{15}$.

55. $x^4-6x^3+7x^2+6x-8$　　56. $4x^3-3x-1$.

57. $3x^5-10x^4-8x^3-3x^2+10x+8$.

58. $5x^4+24x^3-15x^2-118x+24$.

59. $a^2bc+ac^2+acd-abd-cd-d^2$.

60. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$.

VII. 最高公因子及最低公倍

最高公因子

456 **最高公因子.** 設 $A, B, \cdots\cdots$ 表一變數或多變數如 x 或 x 及 y 之有理整函數.

若 $A, B\cdots\cdots$ 無公因子,則稱爲互素數,若有若干公因子,必有一次數最高者;謂之爲最高公因子 ($H.C.F.$).

如, x^2+y^2 及 $x+y$, 爲互素數.

但, $4xyz^5, 8xz^4$, 及 $4x^2yz^3$ 有公因子 $x, z, z^2, z^3, xz, xz, xz^3$, 而其最高公因子爲 xz^3.

457 註 *1*. 此處不計數值之公因子.

2. 諸函數之最高公因子爲 1 者,謂之互素式.

3. A 及 B 之最高公因子之值,與 A 及 B 之整數值之最大公約數無關. 如 $(2x+1)x$ 及 $(x-1)x$ 之最高公因子爲 x. 但當 $x=4$, $(2x+1)x$ 及 $(x-1)x$ 之值爲 36 及 12, 則最大公約數不爲 4 而爲 12 矣.

458 **定理 1.** $A, B, \cdots\cdots$ 之最高公因子爲 $A, B, \cdots\cdots$ 各函數中不同之公共素因子,各取其最低次冪之乘積.

設各函數 $A, B, \cdots\cdots$ 均以其不同素因子之冪之積表之,且如 § 430 假定於各函數間僅有此種一式存在,則此定理之真確頗爲明顯.

如　xyz^5, xz^4 及 x^2yz^3 之不同公素因子爲 x 及 z，此各函數中 x 及 z 之最低冪爲 x 及 z^3. 故其最高公因子爲 xz^3.

若一已知函數可用多種方法以其諸素因子表之者，則上定理所述演算，可表函數 A, B, ………爲數種相當形式，而最高公因子，亦可多於一個.

定理之應用.　一已知函數，如能完全分爲因子可用 § 458 之定理，其最高公因子可立卽求得. 459

例 *1.*　求 $x^5y^2-6x^4y^3+9x^3y^4$ 及 $x^4y-9x^2y^3$ 之 $H.C.F.$

$$x^5y^2-6x^4y^3+9x^3y^4=x^3y^2(x-3y)^2.$$

及　$x^4y-9x^2y^3=x^2y(x-3y)(x+3y)$.

故　$H.C.F.$ 爲 $x^2y(x-3y)$.

例 *2.*　求下列諸式之 $H.C.F.$

1.　$2x^4y^2z^5$, $2x^5y^3z$, $4x^3y^4$.

2.　x^2-y^2, $x^2+2xy+y^2$, 及 x^3+y^3.

3.　x^2-x-6, x^2+6x+8, 及 x^2+5x+6.

4.　$x^3-6x^2+11x-6$ 及 $2x^3-9x^2+7x+6$.

設已知函數 A, B, ……中之一之素因子，則用除法或餘式定理可判定何函數(設其有)爲所有其他函數之因子.於是 $H.C.F.$ 可借助 § 458 求得之. 460

例 *1.*　求 $f(x)=x^2-3x+2$ 及 $\phi(x)=x^4-3x^3+5x^2-8x+5$ 之 $H.C.F.$

由觀察得 $f(x)=(x-1)(x-2)$. 以 $x=1$ 及 $x=2$ 代入 $\phi(x)$ 試驗之，得 $\phi(1)=0$, 但 $\phi(2)\neq0$, 故所求之 $H.C.F.$ 爲 $x-1$.

例 *2.*　求 $f(x)=x^2+4x+4$ 及 $\phi(x)=x^4+5x^3+9x^2+8x+4$ 之 $H.C.F.$

因　$f(x)=(x+2)^2$, 故必須觀察 $x+2$ 是否爲 $\phi(x)$ 之

一因子，抑 $(x+2)^2$ 爲其一因子，以 $x+2$ 除 $\phi(x)$ (簡除法)得 $Q_1=x^3+3x^2+3x+2$ 及 $R_1=0$；再以 $(x+2)$ 除 Q_1 得 $Q_2=x^2+x+1$ 及 $R_2=0$. 故 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之 $H.C.F$ 爲 $(x+2)^2$.

例 3. 求下列諸式之 $H.C.F.$

1. x^2+x-6 及 $2x^3+7x^2+4x+3$.
2. x^2+5x+6 及 $x^4+6x^3+13x^2+16x+12$.
3. $(x-1)^2(x-3)^3(3x+1)^2$ 及 $x^4-5x^3+x^2+21x-18$.

461 **定理 2.** 令 A, B 表二已知整函數. M 及 N 表他二整函數，或常數，則 A 與 B 各公因子爲 $MA+NB$ 之一因子.

設 F 爲 A 與 B 之公因子.

則 $A\equiv GF$ 及 $B\equiv HF$,

式中 G 與 H 爲整式.

故 $MA+NB\equiv M\cdot GF+N\cdot HF\equiv(MG+NH)F$,

式中 $MG+NH$ 必爲整式.

故 F 爲 $MA+NB$ 之一因子，§ 424.

462 **此定理之應用.** 若 x 之兩多項式，方次相同，用此定理求其 $H.C.F.$ 甚爲簡捷，因可化爲低次簡單多項式而分解之.

例 1. 求 $A=x^2+2x-4$ 及 $B=x^2+x-3$ 之 $H.C.F.$

由 A 減 B，得 $A-B=x-1$.

按 § 461，A 與 B 之唯一公因子爲 $x-1$. 但當 $x=1$ 時 A 不爲零，知 $x-1$ 非 A 之因子，故 A 與 B 爲互素式.

例 2. 求 $A=2x^3-3x^2-3x+2$ 及 $B=3x^3-2x^2-7x-2$ 之 $H.C.F.$

1. 先以數乘 A 與 B 使其首項相同，即以 3 乘 A 以 2 乘 B，由 $3A$ 減 $2B$，得

$$3A-2B=-5x^2+5x+10=-5(x^2-x-2)$$
$$=-5(x+1)(x-2).$$

故 A 與 B 之公因子，只能爲 $x+1$ 及 $x-2$.

按餘式定理知皆爲 A 與 B 之因子，故 A 與 B 之 $H.C.F.$ 爲 $(x+1)(x-2)$.

2. 或 A 與 B 相加，得

$$A+B=5x^3-5x^2-10x=5x(x^2-x-2)$$
$$=5x(x+1)(x-2).$$

x 不爲 A 或 B 之因式十分顯明，故只試驗 $x+1$ 與 $x-2$ 即可.

例 3. 求下列諸式之 $H.C.F.$

1. $x^4-x^3+3x^2-4x-12$ 及 $x^4-x^3+2x^2+3x-22$.

2. $6x^3+25x^2+5x+4$ 及 $4x^3+15x^2-2x+8$

定理 3. 設四個整函數 A,B,Q,R 有 $A\equiv QB+R$ 之關係，則 A 與 B 之公因子，即爲 B 與 R 之公因子. 463

今 $$A\equiv QB+R, \tag{1}$$

故 $$A-QB\equiv R. \tag{2}$$

由 §461 定理(2)，A 與 B 之任一公因子，必爲 R 之一因子，故爲 B 與 R 之公因子.

~~反言之~~，按 §461 之定理(1)，B 及 R 之任一公因子，必爲 A 之一因子，故爲 A 及 B 之公因子.

故 A 與 B 之公因子，即爲 B 及 R 之公因子.

求 x 之二多項式之 $H.C.F.$ 之通法. 若以 x 之多項式，除他一多項式，而其被除式，商式，及餘式可以恆等式 $A\equiv QB+R$ 連結之. 故自 §463 得 464

被除式及除式之公因子恆爲除式及餘式之公因子.

任二 x 之多項式之 $H.C.F.$ 用此方法皆能求得. 此法與算術上求兩整數之最大公約法相似，此法詳述於下. 設 A 與 B 表已知多項式，設其次數不同則 A 設其高次式.

465 法則．以 B 除 A 其商爲 q 其餘式爲 R_1.

再以 R_1 除 B，q_1 爲其商，R_2 爲其餘式．

更以 R_2 除 R_1，依此繼續演算，以新餘式除前餘式，至餘數變常數爲止．

若最後所得除式不爲零，則 A 與 B 無公因子，若爲零，則最後之除式，卽爲 A 與 B 之 $H.C.F.$

爲確定意義計，設最後餘式爲 R_3，則依 (1) $R_3=c$，此 c 表一常數而非零，或依 (2) $R_3=0$，可得

$$\begin{array}{llcll}
(1) & A\equiv qB+R_1 & 或 & (2) & A\equiv qB+R_1 \\
 & B\equiv q_1R_1+R_2 & & & B\equiv q_1R_1+R_2 \\
 & R_1\equiv q_2R_2+c & & & R_1\equiv q_2R_2.
\end{array}$$

(1) A 與 B_1 無公因子．

由 § 463 恆等式 (1) 而知 A 與 B 及 B 與 R_1 之公因子相同，B 與 R_1 及 R_1 與 R_2 相同，R_1 與 R_2 及 R_2 與 c 相同．

故各對函數 A 與 B，B 與 R_1，R_1 與 R_2，R_2 及 c 之公因子皆同．

但因 c 爲常數（不爲零），R_2 與 c 無公因子．故 A 與 B 無公因子．

(2) R_2 爲 A 與 B 之公因子．

因 $R_1\equiv q_2R_2$：而 R_2 之任一因子，卽 R_1 與 R_2 之公因子，R_2 卽爲公因子之最高次者．

但因 R_1 與 R_2 及 A 與 B 之公因子相同，R_1 與 R_2 之最高因公子，卽 A 與 B 之最高公因子．故 R_2 爲 A 與 B 之最高公因子．

例 1. 求 x^2+x+1 及 x^3+x^2+2x+3 之最高公因子.

書除式於被除式之左，則得

$$
\begin{array}{rrrl}
B=x^2+x+1 & x^3+x^2+2x+3 & \underline{x}=q & \\
 & \underline{x^3+x^2+\ \ x} & & \\
R_1= & x+3 & x^2+\ \ x+1 & \underline{x-2}=q_1 \\
 & & \underline{x^2+3x} & \\
 & & -2x+1 & \\
 & & \underline{-2x-6} & \\
 & R_2= & 7 &
\end{array}
$$

因最後餘式 R_2 不爲零，故 x^2+x+1 及 x^3+x^2+2x+3 無公共因子.

例 2. 求 x^3+x^2+2x+2 及 x^3+2x^2+3x+2 之 $H.C.F.$

照例 1 之算草排列，得

$$
\begin{array}{rrrl}
B=x^3+x^2+2x+2 & x^3+2x^2+3x+2 & \underline{1} & \\
 & \underline{x^3+\ \ x^2+2x+2} & & \\
R_1= & x^2+\ \ x & x^3+x^2+2x+2 & \underline{x} \\
 & & \underline{x^3+x^2} & \\
 & R_2= & 2x+2 & x^2+x \quad \underline{x/2} \\
 & & & \underline{x^2+x} \\
 & & R^3= & 0
\end{array}
$$

此例能以 R_2 除盡，而 R_3 爲 0. 故棄去 R_2 之因子 2，得 $H.C.F.=x+1$.

此處爲首次之實際證明 ——對於一變值之函數 ——若兩整函數有若干公因子必有其最高公因子；因在 § 463, 465 非如 § 458 須先假定整函數以其素因子表之僅有一法也.

觀 § 465 之證明可知　　467

1. 在 $A, B, R_1, R_2 \cdots\cdots$ 諸式內，每兩連續函數之 $H.C.F.$ 與 A 及 B 者相同.

2. A 與 B 之每一公因子卽爲 A 與 B 之 $H.C.F.$ 之一除數. [illegible]

此法之要略. A 與 B 之某一素因子若能直接看出，可先抽出此素因子，然後再求其餘式之 $H.C.F$ 以所得之結果　　468

~~與第一步分解~~之各素因子相，乘卽爲 A 與 B 之 $H.C.F.$ §458.

照此法可求 $A, B, R_1, R_2, \cdots\cdots$ 內之任二連續函數之 $H.C.F.$ 因每兩函數之 $H.C.F.$ 與 A 與 B 之 $H.C.F.$ 相同，§467.

如 $A=x^4+x^3+2x^2+2x$ 及 $B=x^4+2x^3+3x^2+2x$，顯然 x 爲其公因子抽出之，得 x^3+x^2+2x+2 及 x^3+2x^2+3x+2，此二式之 $H.C.F.$ 爲 $x+1$（閱 §465 例 2）$\therefore$ A 與 B 之 $H.C.F.$ 爲 $x(x+1)$.

又因 x 在例 2 中爲 R_1 之因子，而非 B 之因子．故 x 非 R_1 及 B 之最高公因子，且非 A 及 B 之最高公因子，故取 $x+1$ 之因子而棄 x，因之而減省施除步驟.

2. 在任何除法中可以數目因子乘或除其除數或被除數或任一中間餘數；所受影響僅及於鄰次餘數之數目因子，如 §403 所述當然與其 $H.C.F.$ 無關．若已知係數爲有理數，此法可避免分數係數.

3. 用分離係數法更爲便利.

例 *1.*　求 $A=x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 及 $B=2x^3+5x^2-x-1$ 之 $H.C.F.$

以 2 乘 A 且用分離係數法，得

$$
\begin{array}{r|l}
2+5-1-1 & 2+6+4+6+2 \;\underline{|1}\\
 & \underline{2+5-1-1}\\
 & \quad 1+5+7+2\\
 & \quad \underline{2}\\
 & \quad 2+10+14+4 \;\underline{|1}\\
 & \quad \underline{2+5-1-1}\\
 & \quad 5)\underline{5+15+5}\\
 & \quad\quad 1+3+1 \,|\, 2+5-1-1 \,|\, 2-1\\
 & \quad\quad\quad \underline{2+6+2}\\
 & \quad\quad\quad -1-3-1\\
 & \quad\quad\quad \underline{-1-3-1}
\end{array}
$$

故 A 與 B 之 $H.C.F.$ 爲

x^2+3x+1.

此種演算可簡排列如下:

$$
\begin{array}{r|r|l}
2+5-1-1 & 2+6+\ 4+\ 6+2 & 1+1 \\
2+6+2 & 2+5-\ 1-\ 1 & \\
\hline
-1-3-1 & 1+\ 5+\ 7+2 & \\
-1-3-1 & 2+10+14+4 & \\
\cline{1-1}
 & 2+\ 5-\ 1-1 & \\
\cline{2-2}
 & 5+15+5 & \\
 & 1+\ 3+1 & 2-1
\end{array}
$$

例 2 求下題之 $H.C.F.$

$2x^4+3x^3+4x^2+2x+1$ 與 $2x^4-x^3+2x^2+1$。

定理. 設 A 與 B 之係數爲有理數,其 $H.C.F.$ 之係數亦爲有理數,若 A 與 B 之係數爲實數,其 $H.C.F.$ 亦爲實數. 469

因 A 與 B 之 $H.C.F.$ 可由 §465 之法求得. 故其係數卽爲 A 與 B 係數之有理結合數,若 A 與 B 之係數爲有理數,其 $H.C.F.$ 之係數亦爲有理數, 若爲實數其係數亦爲實數.

此定理有若干重要推斷,後面述其一二,用之以求 $H.C.F.$ 常能節省勞力.

例. 求 x^2-2 及 x^3+x^2-5x+6 之 $H.C.F.$

此二多項式或爲互素式, 或其 $H.C.F.$ 爲 x^2-2; 因 x^2-2 之因子 $x+\sqrt{2}$ 與 $x-\sqrt{2}$,均有無理係數,故均不能爲 $H.C.F.$ 也.

然由除法試驗而知 x^2-2 不能整除 x^3+x^2-5x+6, 故爲互素式.

多於兩個 x 之多項式之 $H.C.F.$ 可按下法求之. 470

先求兩多項式之 $H.C.F.$ 再求此 $H.C.F.$ 與第三多項式之 $H.C.F.$ 餘類推.最後所得之 $H.C.F.$ 卽爲所求之結果.

如, 設 D_1 爲 A 與 B 之 $H.C.F.$, D_2 爲 D_1 與 C 之 $H.C.F.$ 則 D_2 卽爲 $A, B,$ 與 C 之 $H.C.F.$

因 (1). D_2 爲 D_1 與 C 之因子, D_1 爲 A 與 B 之因子. 由 § 427, 故 D_2 爲 A, B, 與 C 處之因子.

(2) A, B 與 C 之任一公因子, 卽爲 D_1 與 C 之一公因子, 按 § 467, 亦爲 D_2 之一因子. 故 D_2 爲 A, B, 與 C 之最高公因子.

由 § 458 可得同樣之推斷.

例. 求 $A=x^4+x^3-x^2+x-2$, $B=2x^4+5x^3-2x^2-7x+2$, 及 $C=3x^4-x^3-x^2-1$ 之 $H.C.F.$

由 § 465 得 A 與 B 之 $H.C.F.$ 爲 $D_1=x^2+x-2$; 及 D_1 與 C 之 $H.C.F.$ 爲 $x-1$.

故 A, B 與 C 之 $H.F.$ 爲 $x-1$.

471 **含多變數之多項式之 $H.C.F.$** 求含多變數之二多項式之 $H.C.F.$ 其一般問題較爲複雜, 此處未能討論, 然由 § 465 之法, 則兩變數 x 及 y 之齊次函數之兩個多項式之 $H.C.F.$ 卽可求得.

習 題 XXII

求下列諸式之 $H.C.F.$

1. $10x^3y^2z^5$, $4x^5yz^3$, $6x^4y^3z^5$, 與 $8x^4y^4z^4u$.
2. $(a+b)^2(a-b)$, $(a+b)(a-b)^2$, 與 a^3b-ab^3.
3. y^4+y^2+1 與 y^2-y+1.
4. a^2-1, a^2+2a+1, 與 a^3+1.
5. x^3-1 與 x^3+ax^2-ax-1.
6. $x^4-y^4x^6+y^6$, 與 $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.
7. x^2+5x+6, x^2+x-2, 與 $x^2-14x-32$.
8. $(x-1)(x-2)$ 與 $5x^4-15x^3+8x^2+6x-4$.
9. x^3-1 與 x^3-4x^2-4x-5.
10. $(x^2-1)^2(x+1)^2$ 與 $(x^3+5x^2+7x+3)(x^2-6x-7)$.
11. $(x-1)^2(x-2)^2$ 與 $(x^2-3x+2)(2x^3-5x^2+5x-6)$.
12. $x^3-3x^2-11x+6$ 與 $4x^3+3x^2-9x+2$.
13. x^3-2x^2-2x-3 與 $2x^3+x^2+x-1$.

14. $3x^3+2x^2-19x+6$ 與 $2x^3+x^2-13x+6$.

15. $x^4-x^3-3x^2+x+2$ 與 $2x^4+3x^3-x^2-3x-1$.

16. $3x^3-13x^2+23x-21$ 與 $6x^3+x^2-44x+21$.

17. $3x^3+8x^2-4x-15$ 與 $6x^4+10x^3-3x^2-2x+5$.

18. $6x^5+7x^4-9x^3-7x^2+3x$ 與 $6x^5+7x^4+3x^3+7x^2-3x$.

19. $6x^4-3x^3+7x^2+x-3$ 與 $2x^4+3x^3+7x^2+3x+9$.

20. $6x^5-4x^4-11x^3-3x^2-3x-1$ 與 $4x^4+2x^3-18x^2+3x-5$.

21. $x^5-x^3-4x^2-3x-2$ 與 $5x^4-3x^2-8x-3$.

22. $3x^3-x^2-12x+4$, x^3-2x^2-5x+6, 與 $7x^3+19x^2+8x-4$.

23. $x^3+ax^2-3x-3a$, x^3-x^2-3x+3, 與 x^3+x^2-3x-3.

24. $7x^4y-6x^3y^2-18x^2y^3+4xy^4$ 與 $14x^3y-19x^2y^2-32xy^3+28y^4$.

25. $x(x-1)(x^3+4x^2+4x+3)$ 與 $(x-1)(x+3)(x^3+x^2+x-1)$.

26. $4x^3-8x^2-3x+9$ 與 $(2x^2-x-3)(2x^2-7x+6)$.

最低公倍式

最低公倍式 兩個以上之整函數 $A, B, \ldots\ldots$ 之公倍式即為 $A, B, \ldots\ldots$ 各函數能除盡之一整函數. 472

在各公倍式中必有次數最低之一式，茲稱之為 $A, B, \ldots\ldots$ 之最低公倍($L. C. M$).

定理1. 兩個以上之整函數 $A, B, \ldots\ldots$ 之 $L. C. M.$ 為 $A, B, \ldots\ldots$ 之一切不同素因子各取其原具最高冪者之積. 473

此定理由下述事實得之：$A, B, \ldots\ldots$ 之公倍式必含各函數 $A, B, \ldots\ldots$ 之每個素因子，至少亦須其函數內所有者；故本定理內述及其一切此種因子，而其最低公倍，即 $L. C. M.$ 為除此種因子外不含其他因子者.

本章如前略去數目因子，且設整函數僅能用一種方法以各不同之素因子各方冪冪之積表之.

474 **用觀察法求 $L.C.M.$** 設能分解 A,B，……成諸素因子，即可應用上述定理得其 $L.C.M.$

例1. 求 $3x^5y^2z, xy^4z^3$ 與 $2x^2yz^6$ 之 $L.C.M.$

在此例中各函數之不同素因子之最高冪者為 x^5, y^4, z^6.

故其 $L.C.M.$ 為 $x^5y^4z^6$.

例2. 求 $x^2y^2-4xy^2+4y^2$ 及 x^2y-4y 之 $L.C.M.$

今 $x^2y^2-4xy^2+4y^2=y^2(x-2)^2$

及 $x^2y-4y=y(x-2)(x+2)$.

故所求之 $L.C.M.$ 為 $y^2(x-2)^2(x+2)$.

475 **定理2.** 兩整函數 A 與 B 之 $L.C.M.$ 等於兩函數之積，以其 $H.C.F.$ 除之.

設 D 為 A 與 B 之 $H.C.F.$ 且令 A_1 及 B_1 表以 D 除 A 及 B 所得之商，

$$A\equiv A_1D \text{ 及 } B\equiv B_1D.$$

再設 M 表 A 與 B 之 $L.C.M.$，得

$$M\equiv A_1B_1D\equiv AB/D.$$

A 與 B 之公倍式，顯然必含有 (1) A 與 B 之所有公素因子之積如 D；(2) A 之不屬於 B 之一切素因子之積，即 A_1；(3) B 之不屬於 A 之一切素因子之積，即 B_1；而其最低公倍式除此三項因子外，並無其他因子.

476 **系.** 整函數 A 與 B 之積等於其 $L.C.M.$ 與 $H.C.F.$ 之積.

477 **求 X 之兩多項式之 $L.C.M.$ 之通法.** 由 §§ 465, 475 兩 x 之多項式 A 與 B 之 $L.C.M.$ 恆可由下法得之.

以 A 與 B 之 $H.C.F.$ 除 A，且以 B 乘其商即得 A 與 B 之 $L.C.M.$

可知此法則等於以 A 內所有 B 內所無之質因子乘 B.

例. 求 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 $2x^3+5x^2-x-1$ 之 $L.C.M.$

由 § 465,得 $H.C.F.=x^2+3x+1$.

又 $(2x^3+5x^2-x-1)/(x^2+3x+1)=2x-1$.

故其 $L.C.M.$ 爲 $(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1)$.

兩個以上 X 之多項式之 $L.C.M.$ 此類問題可由下法得之. 478

先求兩多項式之 $L.C.M.$ 次求所得結果與第三多項式之 $L.C.M.$ 依此進行,最後求得之結果爲所求之 $L.C.M.$

此法由下述事實得之:於演算之各步,等於以最後 $L.C.M.$ 中尙未計及之鄰次函數之素因子乘前次所得之 $L.C.M.$

例. 求 $A=x^4+3x^3+2x^2+3x+1$, $B=2x^3+5x^2-x-1$, 及 $C=2x^3-3x^2+2x-3$ 之 $L.C.M.$

因在 § 477 例中已得 A 及 B 之 $L.C.M.$

$$M_1=(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1).$$

再求 M_1 與 C 之 $L.C.M.$

由除法可知 $2x-1$ 與 C 爲互素式,由 § 465, 得 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 C 之 $H.C.F.$ 爲 x^2+1.

又 $$C/(x^2+1)=2x-3.$$

故 M_1 與 C 之 $L.C.M.$ 亦卽 A, B C 之 $L.C.M.$ 爲

$$M=(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1)(2x-3).$$

注意在求得 M_1 與 C 之 $H.C.F.$ 前,不可將 M_1 之因子實際乘爲一式.

習 題 XXIII

求下列諸式之 $L.C.M.$

1. $3x-1$, $9x^2-1$ 與 $9x^2+1$.
2. $(a+b)(a^5-b^5)$ 與 $(a-b)(a^5+b^5)$.

3. a^3+a^2+a, a^5-a^3, 與 a^6-a^3.

4. $(x^3-y^3)(x-y)^3$, $(x^4-y^4)(x-y)^2$, 與 $(x^2-y^2)^2$.

5. x^2-3x+2, x^2-5x+6, 與 x^2-4x+3.

6. $x^2-(y+z)^2$, $y^2-(z+x)^2$, 與 $z^2-(x+y)^2$.

7. $2x^2+3xy-9y^2$, $3x^2+8xy-3y^2$, 與 $6x^2-11xy+3y^2$.

8. x^3+x^2+x+1 與 x^3-x^2+x-1.

9. $2a^2x+2x^2y+3y^2x+3a^2y$ 與 $(2x^2-3a^2)y+(2a^2-3y^2)x$.

10. $8x^3-18xy^2$, $8x^3+8x^2y-6xy^2$ 與 $8x^2-2xy-15y^2$.

11. x^3+y^3, x^3-y^3, 與 $x^4+x^2y^2+y^4$.

12. x^6-1, $3x^3-5x^2-3x+5$, 與 x^4-1.

13. $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$, 與 $6x^2+5x-6$.

14. x^2-4a^2, $x^3+2ax^2+4a^2x+8a^3$ 與 $x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3$.

15. x^2+2x, $x^2+bx+2x+2b$, 與 $x^3+ax^2-y^2x-ab^2$.

16. $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)$ 與 $(x^2+5x+6)(2x^2-3x-5)$.

17. $(x^3-8)(27x^3+1)$ 與 $(2x^3+5x^2+10x+4)(x^3-x^2-x-2)$.

18. $x^3-6x^2+11x-6$, $2x^3-7x^2+7x-2$, 與 $2x^3+x^2-13x+6$.

19. x^4+5x^2+4x+5, $2x^4-x^3+10x^2+4x+5$,

與 $2x^4+x^3+7x^2+3x+3$.

20. $2x^4-x^3+2x^2+8x-2$, $2x^4+3x^3-4x^2+13x-6$

與 $x^4+3x^3+x^2+5x+6$.

一變值函數之素因子,及不可約之因子。

下之定理 A 與 B 表 x 之多項式.

479 **基本定理.** 若 A 與 B 互爲素式,則可求得二整函數 M 及 N,令

$$MA+NB\equiv 1.$$

用 § 465 法於 A 及 B (展轉相除)得最後餘式一常數 c, 不爲零.

如 § 465，設 c 爲第三餘式，且用該節所釋之記法，得

1. $A\equiv qB+R_1$，故 4. $R_1\equiv A-qB$，

2. $B\equiv q_1R_1+R_2$， 5. $R_2\equiv B-q_1R_1$，

3. $R_1\equiv q_2R_2+c$， 6. $c\equiv R_1-q_2R_2$.

以 (5) 內 R_2 之值代入 (6)，合併 R_1 與 B 諸項，再以 (4) 內 R_1 之值代入結果式內，集 A 與 B 諸項．得

$$\begin{aligned} c&\equiv R_1-q_2R_2\\ &\equiv(1+q_1q_2)R_1-q_2B\\ &\equiv(1+q_1q_2)A-(q+q_2+qq_1q_2)B. \end{aligned}$$

以 c 除上之恆等式兩端，因 c 爲常數，故 $(1+q_1q_2)/c$ 及 $(q+q_2+qq_1q_2)/c$ 爲整函數而書作 M 及 N．得

$$1\equiv MA+NB,$$

式中 M 及 N 爲整函數恰如定理所云．

設其常數餘數 c，較第三次施除早得或晚得，而此定理亦可以同法證明之。

逆定理． 設 $MA+NB\equiv1$ 則 A 與 B 互爲素式． 480

因 A 與 B 之因子必爲 $MA+NB$ 之因子，§ 461，故亦爲 1 之因子，此爲不可能．

下列諸定理爲已證明之基本定理之主要推論．

定理1． 若 A 於 B 爲素式，而 B 可除盡 AC 之積，則 B 可除盡 C． 481

因 A 與 B 爲互素式，由 § 479 可求得 M 與 N，令

$$MA+NB\equiv1,$$

故 $$M\cdot AC+NC\cdot B\equiv C.$$

但 B 爲 AC 與 B 之一因子．故亦爲 C 之因子，如 § 461

定理2． 若 A 對於 B, C 之每因子爲素式，則對於 BC 之積亦爲素式． 482

因 A 與 B 爲互素式，按 § 479 可得 M 與 N 如下：

$$MA+NB\equiv 1,$$

故 $$MC\cdot A+N\cdot BC\equiv C.$$

若 A 與 BC 有一公因子，按 §461，其公因子必含 C 內．但此不可能，因 A 與 C 爲互素．

483 系． 若 A 與 B, C, D 均爲互素式，則 A 與 $B\cdot C\cdot D$ ……之積亦爲互素式．

如前所證 A 與 BC 爲互素式之方法證之．

因 A 與 BC 爲素式，且亦與 D 爲素式，故與 BCD 等之積爲互素式．

484 定理3． 非素函數必有一組質因子，且僅有一組．

設 P 表已知函數而 n 表其次數．

若 P 爲複函數必有因子 A．如 A 亦爲複式必有因子 B 繼續分解最後遇一素函數；此諸函數 $P, A, B,$ ……之次數由定數 n 起逐次降低，但不能低於 1 次．

設 F 表此素函數，此爲 P 之素因子之一，由 § 427 可知 $P\equiv FM$，而 M 爲整式．

同理，如 M 非素函數，則有一素函數，F 存在，其關係爲 $M\equiv F'M'$．故 $P=FF'M'$，而 M' 爲一整式．繼續進行，則可斷定必有若干素函數存在，而其數不能過 n．

$$P\equiv F\cdot F'\cdot F''\ldots\ldots$$

故 P 至少有一組素因子．

進而言之則 P 僅有此組之因子．設

$$P\equiv FF'F' \cdots\cdots\equiv G\cdot G'\cdot G' \cdots\cdots.$$

此處 G, G', G'' 亦表素因子．

故 G 不能與 $F, F', F'',$ …… 等函數均爲互素式，蓋若然則必與其積 P 爲互素式，但由 § 483，彼固爲 P 之因子也．

若 G 與 F 不爲互素式，則 G 與 F 有一公因子、然 G 與 F 皆爲素函數，兩素函數除其自身外無含 x 之公因子．故 G 與 F 至多只有數値因子之別，c 如而得 $G\equiv cF$.

以 G 之值代入恆等式，$FF'F\cdots\cdots\equiv GG'G''\cdots\cdots$，以$F$除其兩端，得

$$F'F''\cdots\cdots\equiv G'G''\cdots\cdots,$$

仍據前理卽知 G 與 $F', F'\cdots\cdots$ 等函數中每因子之差，至多亦不過有一數值倍數而已.

依此進行，則可斷定函數組 $G, G', G'', \cdots\cdots$ 與函數組 $F, F, F', \cdots\cdots$ 至多僅有一數值因子之異或僅其排列之次序不同.

系. 一複函數以其諸不同素因子之冪之積表之只有一法. 485

在恆等式 $P\equiv F\cdot F'\cdot F''\cdots\cdots$ 內之一切等因子，當然可以其適當方冪表之.

不可約之因子. 具有理係數之整函數之不可約因子，通常指其具有理係數之最低次因子而言. 486

如，$(x-1)(x^2-2)$ 之素因子爲 $x-1$，$x-\sqrt{2}$，$x+\sqrt{2}$，其不可約之因子爲 $x-1$ 與 x^2-2.

由上已證明之定理及 § 469 之定理而得 487

凡有理係數之可約整函數，僅有一法用其諸相異之不可約之因子之方冪之積表之.

關於數論

與上節已證者類似之定理，可適用於整數. 488

以字母 a, b, 等表正或負之整數(非零)，凡能除盡 a 之任意整數卽稱爲 a 之因數.

整數除其本身與1外，無其他因數者謂之素數. 489

490 兩整數 a, b, 除 1 外無公因數者謂之 a 與 b 爲互素數.

491 定理. 若 a 與 b 爲互素數, 常可求具下列關係之二整數 m 與 n:

$$ma+nb=1.$$

因 a 與 b 爲互素數, 若用普通方法求其最大公約, 最後餘數必爲 1. 由 § 479 可得此定理.

設 $a=325,\quad b=116$. 應用此法求其 $G.C.D.$, 得

$$\begin{array}{lllll}
 & 116 & |\,325\,| & 2 & \\
 & & 232 & & \\
r_1 = & 93 & |\,116\,| & 1 & \text{即} 325=2\cdot116+93, \text{或} 93=325-2\cdot116 \quad (1)\\
 & & 93 & & \\
r_2 = & 23 & |\,93\,| & 4 & 116=1\cdot93+23, \text{或} 23=116-1\cdot93 \quad (2)\\
 & & 92 & & \\
r_3 = & 1 & & & 93=4\cdot23+1, \text{或} 1=93-4\cdot23 \quad (3)
\end{array}$$

先以(2)內 23 之值代入 (3) 式, 次以 (1) 內 93 之值代入(3)式, 得

$$\begin{aligned}1&=93-4\cdot23\\&=5\cdot93-4\cdot116\\&=5\cdot325-14\cdot116.\end{aligned}$$

故 $5\cdot325+(-14)\cdot116=1.$

上式所得之兩整數 $m=5$ 及 $n=-14$, 故

$$m\cdot325+n\cdot116=1.$$

其餘各互素數同此.

例. 若 $223m+125n=1$, 求整數 m 與 n.

492 系. 由此基本定理可推出關於正整數之定理, 與 §§ 481－485 關係整函數所推得者類似, 其所據之理由亦同.

1. 若 a 與 b 爲互素數, ac 可以 b 除盡, 則 c 定可以 b 除盡.

2. 若 a 與 b 及 c 爲互素數, 則 a 與 bc 之積亦爲互素數.

3. 複數僅能以其諸不同素因數之羃之積之一種結合情形表之.

VIII. 有理分式

分式之化簡

分式． 設 A 與 B 表任意二代數式，而 B 不爲 0 以 B 除 A 其商以 A/B 式表之，稱爲分式，A 謂之分子，B 謂之分母，A 與 B 爲分式之項． 493

若 A 與 B 爲有理式，A/B 謂之**有理分式**． 494

若 A 與 B 爲整式，A/B 謂之簡分式，若 A 或 B 爲分式，則 A/B 謂之**繁分式**． 495

一純分式可爲**眞分式**或**假分式**，依其分子之次數小於或不小於分母之次數而定． 496

如，$\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ 及 $\dfrac{2x^2-3}{x^3+1}$ 爲眞分式，$\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ 及 $\dfrac{x^3-3}{x^2+1}$ 爲假分式．

凡各項爲一變數函數之假分式，均可化爲一整式，與一眞分式之和，§ 400. 此和名之爲**帶分式**． 497

如，$\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}=2-\dfrac{1}{x^2+1}$，$\dfrac{x^3-3}{x^2+1}=x-\dfrac{x+3}{x^2+1}$．

分式之變形． 此法根據下定理而得，§ 320, 1. 498

以同式（非 0）乘除一分式之分母與分子其值不變．

特例，可同時變其分子及分母之符號，此等於以 -1 乘其分母及分子．若只變分子或分母之符號，則變分式本身之符號，§ 320,3.

若分子或分母爲多項式，則變其符號卽變其所含一切項之符號．

如，$$\frac{a+b-c}{a-b+c}=\frac{c-a-b}{b-c-a}=-\frac{c-a-b}{a-b+c}=-\frac{a+b-c}{b-c-a}.$$

一分式之分母，分子，或同以因子之積表者；則變其偶數因子之符號而分式不變．若變其奇數因子之符號等於變其分式之符號．

如，$$\frac{(a-b)(c-d)}{(e-f)(g-h)}=\frac{(b-a)(c-d)}{(e-f)(h-g)}=-\frac{(b-a)(d-c)}{(f-e)(g-h)}.$$

498　**約分．** 化簡一分式，卽消去其分母分子之所有公因子．此僅變分式之形式之形而不影響其値，§ 498.

化簡後所得之分式，謂之最簡式或不可約式．

因 VII 章之方法可知其有無公因子，先求獨項因子，與其他易爲求得之公因子，或用餘式定理可得之公因子；若用此法失敗，可由 § 465 之通法求之．

下例釋明此法：

例1.　化簡$(aec-ade)/(bde-ebc)$.

得 $$\frac{aec-ade}{bde-ebc}=\frac{ae(c-d)}{be(d-c)}=-\frac{a(c-d)}{b(c-d)}=-\frac{a}{b}.$$

例2.　化簡$(x^3+x^2+x+6)/(x^2+3x+2)$.

由試驗得分母之因子爲 $x+1$, 與 $x+2$. 故分母分子若有公因子，必爲其中之一．用簡除法試之，如 $x+1$ 不能除盡分子，而 $x+2$ 可以除盡，其商爲 x^2-x+3.

故 $$\frac{x^3+x^2+x+6}{x^2+3x+2}=\frac{x^2-x+3}{x+1}.$$

例3.　化簡　$(x^3+7x+10)/(x^3+5x+6)$.

以分子減分母得

$$x^3+7x+10-(x^3+5x+6)=2(x+2).$$

若分子與分母有公因子卽爲 $x+2$, § 461. 但 $x=-2$ 時分子不爲零,故由 § 415,知原分式卽爲最簡.

例4.　化簡 $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

上式之可能公因子僅爲 $(a-b)$, $(b-c)$ 及 $(c-a)$. 以 $a=b$ 代入分子,得 $b^2(b-c)+b^2(c-a)$或 0. 按 § 417, 知分子可以 $a-b$ 除盡.同法求得 $b-c$ 及 $c-a$ 可除盡分子.

故分子恰爲分母除盡,此兩式具 a, b, c 之同次數,卽三次,故其商必爲一常數,若視爲 a 之多項式排列之,則在兩式中有 a^2 項爲 $a^2(b-c)$及 $-a^2(b-c)$, 此常數當爲 -1, 故知分式等於 -1.

例5.　化簡　$(2x^3+13x^2-6x+7)/(2x^4+5x^3+8x^2-2x+5)$.

按 § 465 法,得分母子之 $H.C.F.$ 爲 $2x^2-x+1$. 以$2x^2-x+1$ 同除分母分子,得

$$\frac{2x^3+13x^2-6x+7}{2x^4+5x^3+8x^2-2x+5}=\frac{x+7}{x^2+3x+5}.$$

習　題　XXIV

化下列諸分式爲最簡式:

1. $\dfrac{x^5y^3-4x^3y^5}{x^3y^2-2x^2y^3}$.　　2. $\dfrac{(x^6-y^6)(x+y)}{(x^3+y^3)(x^4-y^4)}$.

3. $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+2x-63}$.　　4. $\dfrac{3x^2-8x-3}{3x^2+7x+2}$.

5. $\dfrac{3x^2-18bx+27b^2}{2x^2-18b^2}$　　6. $\dfrac{5x^2+6ax+a^2}{5x^2+2ax-3a^2}$.

7. $\dfrac{(x^2-25)(x^2-8x+15)}{(x^2-9)(x^2-7x+10)}$.　　8. $\dfrac{15x^2-46x+35}{10x^2-29x+21}$.

9. $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}$.　　10. $\dfrac{x^2-y^2+z^2+2xz}{x^2+y^2-z^2+2xy}$.

11. $\dfrac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{1-x^2}$.　　12. $\dfrac{2mx-my-12nx+6ny}{6mx-3my-2nx+ny}$.

13. $\dfrac{2x^3+7x^2-7x-12}{2x^3+3x^2-14x-15}$.　　14. $\dfrac{x^3-8x^2+19x-12}{2x^3-13x^2+17x+12}$.

15. $\dfrac{x^4+x^3+5x^2+4x+4}{2x^4+2x^3+14x^2+12x+12}$.

16. $\dfrac{x^3-2x^2-x-6}{x^4+3x^3+8x^2+8x+8}$.

17. $\dfrac{(x^2+c^2)^2-4b^2x^2}{x^4+4bx^3+4b^2x^2-c^4}$.

18. $\dfrac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

分式之演算

500 **最低公分母.** 加減分式,須先化諸分式爲有公分母之等值分式.

已知諸分母之最低公倍式,即爲其最低公分母 (*L. C. M.*).

例. 求 $\dfrac{a}{bc}$, $\dfrac{b}{ca}$, $\dfrac{c}{ab}$ 之最低公分母.

諸分母之 $L. C. M.$ 爲 abc.

欲變 $\dfrac{a}{bc}$ 之分母爲 abc 且與原分式等值須以 a 乘 $\dfrac{a}{bc}$ 之兩項.

同法須以 b 乘 $\dfrac{b}{ca}$ 之兩項及以 c 乘 $\dfrac{c}{ab}$ 之兩項.

如, $\dfrac{a}{bc}=\dfrac{a^2}{abc}$, $\dfrac{b}{ca}=\dfrac{b^2}{abc}$, $\dfrac{c}{ab}=\dfrac{c^2}{abc}$.

501 化兩個或多於二個之分式爲有最低公分母式等值分式,先求已知分母之最低公倍式.

次以最低公分母代各分式之分母,再以分母所增之新因子乘其分子即得.

加法與減法. 有公分母之分式之加減法已述於§320,4 502
之公式,

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a+b-c}{d}.$$

故求兩個或兩個以上分數之代數和,

必要時化諸分母成最低公分母.

以原符號連接通分後之分式之新分子,求諸分子之代數和書於公分母上,最後化簡所得之結果.

用此法則演算整式及分式加減時,可視整式如分母爲1之分式.

除一分式之分母正含他分母之因子外,化已知分式成最簡式爲最善.

選擇一式爲最低公分母時,應特別愼重,普通誤認 $a-b$ 與 $b-a$ 不同,實則僅差一符號,但均可認爲最低公分母.

通常合併此類二已知分式較爲便利.

例 *1*. 化簡 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}$.

最低公分母爲 a^2-b^2, 得

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a^2-b^2}+\frac{a+b}{a^2-b^3}-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a-b+a+b-2b}{a^2-b^2}=\frac{2a-2b}{a^2-b^2}=\frac{2}{a+b}.$$

注意諸分式和之分母,若化爲最簡式時,可爲其最低公分母之因子.

例 2. 化簡 $x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$.

因第一分母為 1，第二分母為 $-(x-1)$，故其最低公分母為 x^2-1，得

$$x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}=\frac{x^3-x}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^3-x+x+1-x^3+3x-1}{x^2-1}=\frac{3x}{x^2-1}.$$

例 3. 化簡 $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}$.

此例選擇每兩個分別加減較為方便．

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-(x-2)}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4}.$$

$$\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}=2\frac{x-1-(x+1)}{x^2-1}=-\frac{4}{x^2-1}.$$

$$\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-1}=4\frac{x^2-1-(x^2-4)}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{12}{x^4-5x^2+4}.$$

例 4. 化簡 $\frac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}+\frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}$.

由 § 415 之餘式定理，得知 $x-1$ 為第一分式兩項式公因子，但不為第二分式分母之因子．在第一分式兩項內消去 $x-1$ 得 $(x+1)/(x^3+x^2+2x)$．

由 § 465，得 x^3+x^2+2x 及 $2x^3+x^2+3x-2$ 之 $H.C.F.$ 為 x^2+x+2；且 $x^3+x^2+2x=(x^2+x+2)x$，$2x^3+x^2+3x-2=(2x-1)(x^2+x+2)$．

未化簡公分母之前，應審察 $2x-1$，是否亦為分子 $2x^2+3x-2$ 之一因子．若知確為其因子，消去之，化第二分式為 $(x+2)/(x^2+x+2)$．

故 $$\frac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}+\frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}$$

$$=\frac{x+1}{x(x^2+x+2)}+\frac{x+2}{x^2+x+2}$$

$$=\frac{x+1+x^2+2}{x^3+x^2+2x}=\frac{x^2+3x+1}{x^3+x^2+2x}.$$

503 **乘法．** 用下定理可求兩個，或兩個以上分式之積．

兩個或兩個以上分式之積，爲以已知分式分子之積爲分子，及以已知分式分母之積爲分母之一分式.

如，
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

因各端以 bd 乘之爲 ac (閱§253).

如，$\frac{ac}{bd}bd=ac$；及 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot bd=\frac{a}{b}b\cdot\frac{c}{d}d=ac$.

§§252,254.

以一整式乘一分式卽以此整式乘其分子.

於實際演算時其諸分子及諸分母相乘之前應將 ac/bd 化爲最簡式.

例 *1*. 求 $(x^3-1)/(x^3+1)$ 乘以 $(x+1)/(x-1)$ 之積.

$$\frac{x^3-1}{x^3+1}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x^3-1)(x+1)}{(x^3+1)(x-1)}=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

例 *2*. 求 $1-(x-2)/(x^2+x-2)$ 乘以 $(x+2)/x$ 之積.

$$\left(1-\frac{x-2}{x^2+x-2}\right)\cdot\frac{x+2}{x}=\frac{x^2}{x^2+x-2}\cdot\frac{x+2}{x}=\frac{x}{x-1}.$$

乘方.　由 §503 得法則：　**504**

分式自乘至已知方冪，卽分子及分母均自乘至該冪.

如
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

因 $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots$ 至 n 個因子 $=\frac{a\cdot a\cdot \text{至}n\text{個因子}}{b\cdot b\cdot \text{至}n\text{個因子}}=\frac{a^n}{b^n}$.

例. 求　$-ab^2c^3/efg^4$ 之立方.

$$\left(-\frac{ab^2c^3}{efg^4}\right)^3=-\frac{a^3b^6c^9}{e^3f^3g^{12}}.$$

除法.　顛倒一分式 a/b，卽互換其分子與分母. 所得分數 b/a 謂之 a/b 之倒式(或反商).　**505**

以一分式除他分式,卽以除式之倒式乘被除式.

如 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

因兩端以 c/d 乘之均爲 a/b (閱 § 253).

如$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$;及$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}$.

§ § 252,254,503.

於特例,以一整式除一分,式卽等於以該整式乘其分母.

例 *1.* 以$(x^4+x^2y^2+y^4)/(x^4-y^4)$除

$(x^2-xy+y^2)/(x^2-y^2)$.

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\div\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^4-y^4}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^4-y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}.$$

例 *2.* 以 x^2+6x+8 除 $(x^2+5x+6)/(x+1)$.

$$\frac{x^2+5x+6}{x+1}\div(x^2+6x+8)=\frac{x^2+5x+6}{(x+1)(x^2+6x+8)}$$

$$=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+4)}=\frac{x+3}{x^2+5x+4}.$$

506 **普通有理式.繁分式及連分式.** 前面已證二分式之和,差,積及商仍爲分式.故由 § 267, 而知凡有理式均能化爲有理簡分式之形式.

將有理式化爲最簡式,此時尙無一般之法則.惟須注意避免一切不必要之步驟.特須注意化分式爲最簡之機會.且於非如此不能再進行前,可將多項式乘出.

507 如前所稱, § 495,設 A 或 B 有一或均爲分式, 則分式 A/B,稱爲繁分式 (*complex*).

化簡一繁分式 A/B，有時用 § 505 之法，先以 B 除 A，有時先以 A 與 B 之諸分母之 L. C. M. 乘 A 與 B. 但在用上兩法之前，最好先分別化簡 A 與 B.

例 1.　化簡 $\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right)\Big/\left(\frac{a-b}{a+b}+1\right)$

$$\frac{\frac{a+b}{a-b}+1}{\frac{a-b}{a+b}+1}=\frac{\frac{a+b+a-b}{a-b}}{\frac{a-b+a+b}{a+b}}=\frac{\frac{2a}{a-b}}{\frac{2a}{a+b}}$$

$$=\frac{2a}{a-b}\cdot\frac{a+b}{2a}=\frac{a+b}{a-b}.$$

由上例可知若一繁分數之兩項爲簡單分數時，可消去其兩項之分子或分母之公因子. 如上式第三步可消去 $2a$.

例 2.　化簡 $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)\Big/\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)$.

此題可照例 1 化簡；但以 $(a+b)(a-b)$ 先乘其兩項較爲簡便，得

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{a(a-b)+b(a+b)}=\frac{a^2+ab-ba+b^2}{a^2-ab+ba+b^2}=1.$$

例 3.　化簡 $\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f}}}$

由下而上演算，得

$$\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f}}}=\cfrac{a}{b+\cfrac{cf}{df+e}}=\frac{a(df+e)}{b(df+e)+cf}=\frac{adf+ae}{bdf+be+cf}.$$

如例 3 之繁分式謂之連分式 (*continued fraction*).

習 題 XXV

化簡下列諸式:

1. $\dfrac{1}{2a-3b}+\dfrac{1}{2a+3b}-\dfrac{6b}{4a^2-9b^2}$.

2. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^3+1}$.

3. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}$.

4. $\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{x+2}{(2-x)(x-3)}+\dfrac{x-3}{(3-x)(1-x)}$.

5. $\dfrac{1}{x+b}-\dfrac{1}{x+c}+\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-c}$.

6. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

7. $\dfrac{yz(x+a)}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{zx(y+a)}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{xy(z+a)}{(z-x)(z-y)}$.

8. $x+\dfrac{1}{3-2x}-\dfrac{8x^4-33x}{8x^3-27}-\dfrac{2x+6}{4x^2+6x+9}$.

9. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)^2-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)$
$\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)$.

10. $\dfrac{(a+b)^3-c^3}{a+b-c}+\dfrac{(b+c)^3-a^3}{b+c-a}+\dfrac{(c+a)^3-b^3}{c+a-b}$.

11. $\dfrac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+6}-\dfrac{3x^2-14x-5}{3x^3-2x^2-10x-3}$.

12. $\dfrac{1}{x^4-4x^2-x+2}+\dfrac{1}{2x^4-3x^3-5x^2+7x-2}+\dfrac{1}{2x^4+3x^3-2x^2-2x+1}$.

13. $\left(a^4-\dfrac{1}{a^4}\right)\div\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$. 14. $\left(\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}\right)(a^4+a^3)$.

15. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}\times\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\div\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}$.

16. $\dfrac{1}{x}-\left\{1-\left[\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)}\right)\right]\right\}$.

17　$\dfrac{ax+x^2}{2b-cx}\cdot\dfrac{2bx^2-cx^3}{(a+x)^2}$.

18.　$(x^2-y^2-z^2+2yz)\div\dfrac{x-y+z}{x-y-z}$.

19.　$\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\right)\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$.

20.　$\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}}\div\dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+z}}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}}$

21　$\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}\div\dfrac{\dfrac{1}{a^4}+\dfrac{1}{b^4}}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2}$.

22.　$\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}$.

23.　$x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}$.

不　定　式

極限.　設變數 x 逐次取 1/2, 3/4, 7/8, 15/16… 等值而無止境,顯然 x 之值漸近於 1, 而 $1-x$ 之差必最後變爲永遠小於任何可名言之小正數,此數爲任何小均可. 此等事實吾人謂當 x 歷整數串 1/2, 3/4, 7/8, 15/16,…時, x 漸近於 1 以之爲極限.　503

總之,設 x 表歷經已知但爲無窮之一串數值之變數, 又設有一常數 a, 差數 $a-x$ 最後變爲永遠絕對值小於任何可名言之正值,則謂 x 漸近於數 a 以之爲極限.

表 x 漸近於其極限 a, 書爲 $x\doteq a$, 或 $a=\lim x$.

須注意此處「變數」一字;較 § 242 之內更加以限制之意義.

變數有無極限全視其經過之數串如何, 如歷經數串 1, 2, 1, 2,……則變數不漸近於限.

變值及極限之討論已見於 §§187－205，學者可覆讀參考，至少亦須讀一部分．

509 **極限定理．** 在§203內已證明設變數x及y漸近於極限，則其和，差，積、商，亦漸近於極限．

$$\lim(x+y)=\lim x+\lim y.$$
$$\lim(x-y)=\lim x-\lim y.$$
$$\lim xy \quad =\lim x\cdot\lim y.$$
$$\lim\frac{x}{y} \quad =\frac{\lim x}{\lim y}, \text{但} \lim y=0 \text{除外}.$$

由此等定理，可知若$F(x)$表x之任意已知有理函數，設$x=a$時，以$F(a)$表其值，則x漸近於a為極限時，則$F(x)$漸近於$F(a)$為極限，即

$$\lim_{x\doteq a} F(x)=F(a),$$

此處$\lim\limits_{x\doteq a}F(x)$讀為$x$漸近於$a$時$F(x)$之極限．

如 $\lim\limits_{x\doteq a}(2x^2-3x+1)=2a^2-3a+1.$

510 **無限大．** 若x經歷無窮之數串 1, 2, 3, 4, …，顯然最後變為大於任何指定之大數．

一變數x最後絕對值變為大於任何指定之大數，則稱為漸近於無限大．

於"無限大"一字以∞表之，而表x漸近於無限以$x\doteq\infty$或$\lim=\infty$表之．

511 **註．** 須注意無限大符號∞非表定數，關於各數間計算之法則不適用，下文將示此解釋．

「x漸近於無限大」一語，即「一變值最後變爲大於任何可指定之各大數」之簡稱.

有時爲簡便計寫作 $\lim x=\infty$，此 lim 一字當然不含 §508 節所示之定值意義.

定理. 已知分子爲常數而分母爲變數之任意分式．若分母漸近於0爲極限，則分式漸近於無限大；若分母漸近於無限大，則分式漸近於 0 爲極限. 512

茲討論分式 $1/x$.

若x漸近於 0 而歷經數串 1, ·1, ·01, ·001, …，則 $1/x$ 必歷經數串 1, 10, 100, 1000, …，而漸近於 ∞.

若x歷經數串1, 10, 100, 1000, …，而漸於近∞，則 $1/x$ 必歷經數串 1, ·1, ·01, ·001, …，而漸近於 0 爲極限.

餘可類推.

不定式. 有理分式 $f(x)/\phi(x)$ 除 $\phi(x)=0$外，於 x 之任意予值必有一定值．但若 $\phi(x)=0$ 時，則分式變爲 0/0 或 $a/0$，便無算術意義，§103．然爲便利計使 0/0 及 $a/0$ 各表一種意義. 513

分式 0/0. 設 $x=1$ 時，則分式 $(x^2-1)/(x-1)$ 成 0/0 之形. 514

除 $x=1$ 時，則能以 $x-1$ 除 x^2-1，得

$(x^2-1)/(x-1)=x+1$.

無論 x 與 1 之差爲任何小，此式均爲眞確；若不即予 x 以 1 之實值，而令其漸近於 1 爲極限，則得

$$\lim(x^2-1)/(x-1)=\lim(x+1)=2.$$

若按計算法則，$x=1$ 時，則 $(x^2-1)/(x-1)$ 便無意義，此處證明，當 x 漸近於 1 爲極限時，此分式漸近於定極限 2.

由§509已知$F(a)=\lim\limits_{x\doteq a}F(x)$而$(Fx)$表一有理函數則$F(a)$有一意義，在演算法上爲便利計以$\lim\limits_{x\doteq a}F(x)$代$F(a)$換言之，公式$F(a)=\lim\limits_{x\doteq a}F(x)$爲$F(a)$之定義.

故$x=1$時$(x^2-1)/(x-1)$之值爲2，卽無論x爲何值，1亦在其內$(x^2-1)/(x-1)=x+1$.

同理，各分式如$(x-a)f(x)/(x-a)\phi(x)$者，此處$f(x)$及$\phi(x)$爲整式而$\phi(x)$不能以$x-a$除盡，玆當$x=a$時，定$f(x)/\phi(x)$之值，得

$$\frac{(x-a)f(x)}{(x-a)\phi(x)}=\frac{f(x)}{\phi(x)}$$

於x之一切值（a亦在其內），上式均爲眞確。

515 **分式$a/0$.** 設$x=0$時，則分式$1/x$成$1/0$之形.

因不能以0除1，然能以與0相差極微之x值除1. 從§512所示. 設令x漸近於0爲極限，則$1/x$漸近於∞.

故定$1/0$或$a/0(a\neq 0)$之值爲∞，寫爲

$$\frac{a}{0}=\infty.$$

同理於各分式之形如

$f(x)/(x-a)\phi(x)$者，

此處$f(x)$及$\phi(x)$均爲整式，且$x-a$不能除盡$f(x)$，當$x=a$時，則定此分式之值爲∞；卽x漸近於a爲極限時，此分式常漸近於∞.

分式之值之判定. 由§§514,515可得形如$f(x)/\phi(x)$之簡單分式之下述判定. 516

1. 設$f(x)/\phi(x)$爲最簡式，若於x之諸值分子$f(x)$爲0，則分式之値爲0；若於x之諸值分母$\phi(x)$之値爲0，則分式之値成∞，於x之他諸値，則此分式有一不同於0及∞之値.

2. 設$f(x)$及$\phi(x)$有一公因子$x-a$，$f(x)$含此因子m次及$\phi(x)$含此因子n次，設$x=a$時，若$m>n$，則$f(x)/\phi(x)$爲0；若$m<n$則成∞，若$m=n$則有一不同於0及∞之値.

如$x=2$時，則得

$$\frac{x-2}{x+1}=0,\ \frac{x+1}{x-2}=\infty,\ \frac{(x-2)^3}{x(x-2)}=0,\ \frac{(x-2)}{x(x-2)^2}=\infty,$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)^2}=\frac{1}{2}.$$

分式 ∞/∞. 設x無限增加卽當$x\doteq\infty$時，則$f(x)/\phi(x)$之値漸近於何類極限，此頗重要極應知之. 517

玆討論下例.

由§512，已知當$x\doteq\infty$時，$1/x$，$1/x^2$，……$\doteq 0$.

故$x\doteq\infty$時，$$\frac{x^2-x+3}{2x^2+x-4}=\frac{1-1/x+3/x^2}{2+1/x-4/x^2}\doteq 1/2, \quad (1)$$

$$\frac{x+2}{x^2+x+5}=\frac{1+2/x}{x+1+5/x}\doteq 0, \quad (2)$$

$$\frac{x^2+x-7}{2x+3}=\frac{x+1-7/x}{2+3/x}\doteq\infty. \quad (3)$$

總之，$x\doteq\infty$時，分式

$(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m)/(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n)$漸近於極限$a_0/b_0$，如(1)設分子分母之次數相同；如(2)漸近於極限0，設分母之次數較大，如(3)；漸近於極限∞，設分子之次數較大.

當分式本身設由變數假定則成不定式 ∞/∞ 之形時，無論其極限若何，均稱此極限為"當 $x=\infty$ 時此分式可有之值"。

518　**$0\cdot\infty$ 及 $\infty-\infty$ 式.**　於 x 之特別值能使 x 之有理函數為不定式 $0\cdot\infty$ 或 $\infty-\infty$，但此等式可化為 $0/0$, $a/0$, ∞/∞ 之一。

1.　如 $x=1$ 時，則 $(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}$ 為 $0\cdot\infty$。但 $x\neq1$ 時，則得 $(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，故

$$\lim_{x\doteq1}\left[(x^2-1)\cdot\frac{1}{x-1}\right]=\lim_{x\doteq1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\doteq1}(x+1)=2.$$

故 $x=1$ 時，定此式之值為 2.

2.　又 $x=0$ 時，則 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x(x+2)}$ 為 $\infty-\infty$ 之形.

但 $x\neq0$ 時，則得 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x(x+2)}=\dfrac{x}{x(x+2)}$，故

$$\lim_{x\doteq0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(x+2)}\right]=\lim_{x\doteq0}\frac{x}{x(x+)2}=\lim_{x\doteq0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}.$$

故 $x=0$ 時定此式之值為 $\frac{1}{2}$.

519　**總結論.**　設一變值之已知函數 $F(x)$，若 $x=a$ 時此函數有不定式，應處置如下：

先化此式為最簡式，當 x 漸近於 a 為限時，求其值漸近於何種極限，稱此極限為此函數當 $x=a$ 時之值.

520　**註.**　此法限用於含單變數之函數，如 $F(x)$。因此方法所得定數之結果為：$\lim\limits_{x\doteq a}F(x)$ 之值獨依 a 之值，而不依 x 漸近於 a 之值；用於多於一變數之函數便不真確.

如 x 及 y 爲不相關之兩變值,當 $x=0$ 及 $y=0$ 時試討論 x/y.

$x \doteq 0$, $y \doteq 0$ 時 x/y 所漸近之極限視 x 及 y 所歷之數串而定.

例如各變值經過下之數串,漸近於 0 爲極限:

$1/2, 1/3, 1/4, \cdots\cdots(1)$; $1/2^2, 1/3^2, 1/4^2, \cdots\cdots(2)$.

若 x 經過(1), y 經過(2),則 x/y 必經過數串 $2, 3, 4, \cdots\cdots$ 而漸近於 ∞。然設 x 經過(2), y 經過(1), 則 x/y 必經過數串 $1/2, 1/3, 1/4, \cdots\cdots$ 而漸近於 0.

故設 x 及 y 爲不相關之兩變數, 當 $x=0$, $y=0$ 時, 稱 x/y 爲絕對不定式. 餘可類推.

關於算法中之無限. 若取字母之無限值加入計算內, 521
必須說明 §§ 249, 251, 253 之法則如下:

1. $a \cdot 0=0$, 而 $a=\infty$ 除外.

2. 若 $ac=bc$, 則 $a=b$, 而 $c=0$ 或 ∞ 除外.

3. 若 $a+c=b+c$, 則 $a=b$, 而 $c=\infty$ 除外.

用此法則解方程時須注意例外,如討論乘積 $\frac{1}{x^2-1} \cdot x-1$, 當 $x=1$ 時,第二因子 $x-1$ 爲 0;但第一因子 $1/(x^2-1)$ 爲 ∞, 其積不得爲 0,實則此積爲 $\frac{1}{2}$, § 518.

方程之無限根. 茲以實際工作以代討論, 如方程 $x+2=x+3$ 及他一次方程可化爲 $0 \cdot x=b$ 者,前謂之無根, 今可稱其根爲 ∞. 522

設 a 可爲任何小之數,但非 0, 則 $ax=b$ 之根爲 b/a. 若 b 爲常數而非 0, 取 a 漸近於 0 爲極限, 則 b/a 必漸近於 ∞, § 512. 換言之, 當 $ax=b$ 漸近於 $0x=b$ 時, 其根 b/v 漸近於值 ∞, 按 § 515 之實際解釋, 可稱 $ax=b$ 設有 $0x=b$ 之形時, 則有根 ∞.

注意若以 $x+2=x+3$ 爲根是 ∞ 之眞正方程，則生出悖謬之推斷 $2=3$. 若 $x=\infty$ 則不能謂自其兩邊同減 x 而得眞正方程，因 ∞ 非數，不能依演算規則故也，§ 521,3.

523　**聯立方程之無關解答.** 同理，§ 377,2，§ 394,2，所述之不合理方程，以前謂之無解答，茲有時稱其有無限大解答；因此等方程用消去法可得一個一次方程如 $0x=b$ 之形，由 § 522 知其根爲 ∞.

如，一對不合理方程 $y-x=0(1)$，$y-x=1(2)$，其解答爲無限大.

注意(1)，(2)當 $m\doteq 1$ 時，可爲下列二式之極限式.

$$y-mx=0(3),\ y-x=1(2).$$

(3)，(2)之解答爲

$$x=1/(m-1),\ y=m/(m-1),$$

當 $m\doteq 1$ 時，$1/(m-1)$ 及 $m/(m-1)$ 均漸近於無限大.

用圖解法，§§ 386，387，亦可示同一事實. 因 $m\doteq 1$ 時(3)之圖象漸平行於(1)之圖象，此二圖象在此平面內無限遠處相交.

習　題　XXVI

求定下諸式之適當值：

1. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$，當 $x=2$ 時.　　2. $\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-2x+1}$，當 $x=1$ 時

3. $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$，當 $x=1$ 時.　　4. $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-(a+b)x+ab}$，當 $x=a$ 時.

5. $\dfrac{(3x+1)(x+2)^2}{(x^2-4)(x^2+3x+2)}$，當 $x=-2$ 時.

6. $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$　$x\doteq 1$ 時.

7. $\frac{3x^2-x+5}{2x^2+6x-7}$, $\frac{x^2+1}{x}$, $\frac{3x}{x^2-1}$, $\frac{(2x^2+1)(x^3-5)}{(x^4+1)(x-6)}$,

當 $x=\infty$ 時.

8. $\frac{x-1}{x^2-9}-\frac{x-2}{x(x-3)}$, 當 $x=3$ 時.

9. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x(x-1)}$, 當 $x=1$ 時.

10. $\dfrac{x^2+\frac{x+1}{x-2}}{x^2+\frac{x-1}{x-2}}$, 當 $x=2$ 時.　11. $\dfrac{\frac{x}{x-1}-\frac{x}{x+1}}{\frac{3x+1}{x^2+1}}$, 當 $x=\infty$ 時.

分式方程

分式方程之解法. 任意已知分式方程，可以其諸分式分母之最低公倍 D 乘其兩邊，而變分式爲整式，此法謂之去分母. 521

由§§341, 342，可知自此整式方程可導出已知方程之根，且如有任何另外之根，必爲方程 $D=0$ 之根，可迅速察出而棄捨之.

例 1. 解 $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+13}{x(x-1)}=0.$ (1)

去分母，以 $D=x(x-1)$ 乘之.

得 $3(x-1)+6x-(x+13)=0.$ (2)

解(2)， $x=2.$ (3)

因 2 非 $D=x(x-1)=0$ 之根，故爲(1)之根，且只有(1)此根.

例 2. 解 $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+5}{x(x-1)}=0.$ (1)

去分母，$3(x-1)+6x-(x+5)=0.$ (2)

解(2)， $x=1.$ (3)

因 1 爲 $D=x(x-1)=0$ 之根，故非 (1) 之根．實則 $x=1$ 時則 (1) 之左端爲 $3+\frac{6}{0}-\frac{6}{0}$ 之形；按 § 518 可得其值爲 ∞ 而非 0．

故(1)無根．

茲總結上法爲下法則：

525　欲解分式方程，以分式之最低公分母 D 乘之以去其分母．

解所得之整式方程．

此方程之根——能使 D 爲 0 者除外——即爲已知方程之根．

526　註．茲再立此法則如下：

移已知方程之各項於一端而集合之，其結果以 $N/D=0$ 表之；去分母後則得一整式方程 $N=0$．

1. 設 N/D 爲最簡式，則 $N/D=0$ 及 $N=0$ 之根相同；因最簡之式爲 0 只其分子爲 0 故也，§ 516．

如在 § 524 例 1 內；

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+13}{x(x-1)}=\frac{8(x-2)}{x(x-1)}=\frac{N}{D}.$$

此處 N/D 爲最簡式，$N/D=0$ 之根與 $N=0$ 之根相同，即 2．

2. 若 N/D 非最簡式，$N=0$ 之根未必爲 $N/D=0$ 之根，而爲 N 與 D 之公因子之根．

如在 § 524 例 2 內，

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+5}{x(x-1)}=\frac{8(x-1)}{x(x-1)}=\frac{N}{D}.$$

若 N/D 非最簡分式，而 $N=0$ 之根 1，非 $N/D=0$ 之根；因 $x=1$ 時 $N/D=\infty$，§ 514．

顯然 1 爲普通式而 2 爲例外．

茲討論方程 $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+a}{x(x-1)}=0$．

此處 $N/D=[8x-(a+3)]/x(x-1)$，除 $a=5$ 或 -3 外此爲最簡式．

3. 切勿因以上所述，認爲 $N=0$ 之根中亦爲 $D=0$ 之根者絕對不能適合原方程式也。

茲討論方程 $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x(x-1)}=0$。

此處 $N/D=(x-1)^2/x(x-1)$；按 §516，$x=1$ 時，則分式爲 0. 但察知 $N=(x-1)^2=0$ 及 $D=x(x-1)=0$ 雖均有根爲 1. 而其次數則前者大於後者.

用 § 525 法則，須注意選取最低公分母時，不可引入另外因子。 527

若方程內有非最簡式之分式，則須先化簡之，但消去之因子若亦爲他分母所有者，則此因子不必消去.

有時未去分母之前，先集分式之各項，或化爲帶分式.

例 1. 解 $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}-\dfrac{x^2}{6x-2x^2}=\dfrac{11}{5}$.

此處第一分式之各項有公因子 $x-5$，第二有公因子 x。消去此等公因子，得

$$\frac{x-1}{x-3}-\frac{x}{6-2x}=\frac{11}{5}，或\frac{x-1}{x-3}+\frac{x}{2(x-3)}=\frac{11}{5}.$$

去分母，　$10x-10+5x=22x-66$.

解之，　$x=8$.

例 2. 解 $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+6}{x+7}=\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+5}{x+6}$.

化各分式爲帶分式且簡之.

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+6}.$$

移項，使各端之二項連以減號，

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}.$$

各端分別集項，

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x^2+13x+42}.$$

去分母，　$x^2+13x+42=x^2+5x+6.$

解之，　　　　　$x=-9/2.$

此已知方程，可先去分母而解之，但費力多矣.

528　**聯立分式方程.**　解聯立分式方程之通法，須先去各方程之分母，再解所得之整方程組．如次所得之解答——但使分母爲零者除外——即爲原方程之解答，§ 371.

但方程爲 § 379 所述之式，或能化成此式者，應用彼節所述之法解之.

例 *1.*　解下對方程之 x,y.

$$\frac{x-1}{y-2}-\frac{x-3}{y-4}=0,\ \frac{1}{xy-2x}+\frac{1}{y-2y^2}-\frac{2}{xy}=0.$$

去分母並化簡之，得

$$x+y+1=0,\ x+2y-8=0.$$

解之，　　　$x=2,\ y=3.$

因 $x=2,y=3$ 時各分母皆非 0，故 $x=2,y=3$ 爲已知方程之解答.

例 *2.*　解下方程組之 x,y,z.

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6},\ \frac{yz}{y+z}=-\frac{3}{2},\ 2(z+x)+xz=0.$$

此諸方程可化爲下式，§ 379，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{2}{3},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}.$$

解．求$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$，得$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{z}=-1$.

故所求之解答爲 $x=2,y=3,z=-1$.

習　題　XXVII

解下列方程之 x:

1. $\frac{6x-1}{3x+2}-\frac{4x-7}{2x-5}=0$.

2. $\frac{6x}{5x-1}+\frac{8}{3-15x}=\frac{1}{6}$.

3. $\frac{4}{x-2}-\frac{1}{x-4}=\frac{4}{x^2-6x+8}$.

4. $\frac{3}{2x+3}+\frac{1}{x-5}-\frac{8}{2x^2-7x-15}=0$.

5. $\frac{1}{(x+1)(x-3)}+\frac{2}{(x-3)(x+2)}+\frac{3}{(x+2)(x+1)}=0$.

6. $\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+4x-5}+\frac{3}{x^2+6x+5}=0$.

7. $\frac{x+1}{3x+1}+\frac{2x}{5-6x}=\frac{5}{5+9x-18x^2}$.

8. $\frac{x+a}{b(x+b)}+\frac{x+b}{a(x+a)}=\frac{a+b}{ab}$.

9. $\frac{x^3+1}{x+1}-\frac{x^3-1}{x-1}=20$.

10. $\frac{x^2+2x-1}{x^2+5x+4}+\frac{x-1}{x^2+3x-4}=0$.

11. $\frac{x-8}{x-3}-\frac{x-9}{x-4}=\frac{x+7}{x+8}-\frac{x+2}{x+3}$.

12. $\frac{x+7}{x+6}+\frac{x+9}{x+8}=\frac{x+10}{x+9}+\frac{x+6}{x+5}$.

13. $\frac{x^3+2}{x-2}-\frac{x^3-2}{x+2}-\frac{15}{x^2-4}=4x$.

14. $\frac{1}{x-1}-\frac{x-2}{x^2-1}+\frac{3x^2+x}{1-x^4}=0$.

15. $\frac{3}{x^3-8}+\frac{2x+5}{2x^2+4x+8}-\frac{1}{x-2}=0$.

16. $\frac{ax+c}{x-p}+\frac{bx+d}{x-q}=a+b$.

17. $\dfrac{x^2+7x-8}{x-1}+\dfrac{x^2+x+3}{x+2}+\dfrac{2x^2-x+7}{x+3}=4x.$

18. $\dfrac{x^2-ax+2bx-2ab}{x-a}+\dfrac{b^2-x^2}{x-2b}+\dfrac{3c^2}{x-2c}=0.$

19. $\dfrac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)}+\dfrac{(x-b)^2}{(x-c)(x-a)}+\dfrac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)}=3.$

20. $\dfrac{3x+2}{x^2+2}-\dfrac{x-5}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x^2-x}=0.$

21. $\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x+6}{x^2-4}=0.$

解下列方程之 x,y 或 x,y,z.

22. $\begin{cases}\dfrac{3x+y-1}{x-y+2}=\dfrac{6}{7}, \\[2ex] \dfrac{x+9}{y+4}=\dfrac{x+5}{y+3}.\end{cases}$

23. $\begin{cases}\dfrac{y-2}{x-3}+\dfrac{x-y}{x^2-9}=\dfrac{y-4}{x+3}, \\[2ex] \dfrac{2}{x^2-2x}+\dfrac{3}{xy-2y}+\dfrac{9}{xy}=0.\end{cases}$

24. $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=a, \\[2ex] \dfrac{yz}{y+z}=b, \\[2ex] \dfrac{zx}{z+x}=c.\end{cases}$

25. $\begin{cases}\dfrac{2}{x+2y}+2y+2z=3, \\[2ex] \dfrac{y+z}{2}-\dfrac{5}{z-3x}=\dfrac{7}{2}, \\[2ex] \dfrac{4}{z-3x}-\dfrac{2}{x+2y}=-1.\end{cases}$

部 份 分 式

529 由§506可知一變値 x 之各有理函數，可化爲整函數，或眞分式，或整函數與眞分數之和.

爲某種應用目的，乃施更進一步之化法，設眞分式 A/B 爲已知，玆求數個極簡分式而以 A/B 爲其和者. 此法詳於次諸定理，其字母 A, B, P, Q 等，表 x 之有理整函數.

定理 1. 二眞分式 A/B 與 C/D 之和及差仍爲眞分式. 530

因 $$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD\pm BC}{BD}$$

因 A 之方次低於 B,故 AD 之方次低於 BD.

且 C 之方次低於 D,故 BC 之方次低於 BD.

故 $AD\pm BC$ 之方次低於 BD.

定理 2. 令 I 及 I' 表整函數,A/B 及 A'/B' 表眞分式. 531
若 $I+A/B\equiv I'+A'/B$,則 $I\equiv I'$ 及 $A/B\equiv A'/B'$.

因按題意, $I-I'\equiv A'/B'-A/B$.

但 $I-I'$ 表整式(或 0) 又按 § 530 $A'/B'-A/B$ 表眞分式(或 0).

又因一整函數不能恆等於一眞分式, 故得

$$I-I'\equiv 0 \text{ 及 } A'/B'-A/B\equiv 0,$$

或 $$I\equiv I' \text{ 及 } A/B\equiv A'/B'.$$

定理 3. 設 A/PQ 表眞分式,其分母已分爲兩互素因子 P 及 Q 者. 532

此分式可化爲兩眞分式 B/P 及 C/Q 之和.

因 Q 與 P 爲互素式,按 § 479 可求得兩整式 M 及 N,致令

$$1\equiv MQ+NP, \text{故 } A\equiv AMQ+ANP.$$

故 $$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{AMQ+ANP}{PQ}\equiv\frac{AM}{P}+\frac{AN}{Q}. \qquad (1)$$

若 AM/P 及 AN/Q 爲眞分式,則此定理已證明矣.

若 AM/P 及 AN/Q 非眞分式，則各化爲整式及眞分式之和，表其結果如下：

$$\frac{AM}{P}\equiv I+\frac{B}{P}\text{及}\frac{AN}{Q}\equiv K+\frac{C}{Q}. \tag{2}$$

以此諸式代入於(1)內之 AM/P 及 AN/Q，得

$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}+I+K. \tag{3}$$

但 $A/PQ, B/P$, 及 C/Q 爲眞分式，由(3)準§§530，531，可知 $I+K\equiv 0$，故

$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q},$$

卽上定理已證明矣。

533　　註．分式 A/PQ 只能化爲此一和式 $B/P+C/Q$．

設　$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}\equiv\frac{B'}{P}+\frac{C'}{Q}, \tag{1}$$

此處 B'/P 及 C'/Q 亦表眞分式．

則　$$\frac{B-B'}{P}\equiv\frac{C'-C}{Q}, \text{故}\frac{(B-B')Q}{P}\equiv C'-C. \tag{2}$$

但除 $B-B'\equiv 0$ 及 $C'-C\equiv 0$ 外，則(2)爲不可能；否則(2)內可以 P 除盡 $(B-B')Q$，但此爲不可能，因 Q 與 P 爲互素式且 $B-B'$ 之方次小於 P，§481．

534　　**部份分式**．上得之分式 B/P 及 C/Q 稱爲 A/PQ 之部份分式．

化已知分式 A/PQ 爲部份分式 B/P 及 C/Q，勿須如§532所示逐步推證之；可應用§397之不定係數法，如下例．

例 1.　化 $(2x^2+1)/(x^3-1)$ 爲兩部份分式之和．

此爲眞分式，其分母爲兩互素因子 $x-1$ 及 x^2+x+1 之積．

故$(2x^2+1)/(x^3-1)$等於分母各爲$x-1$及x^2+x+1之二眞分式之和，§ 532. 其第一分式之分子爲常數，第二分式之分子之方次最高爲1. 故得

$$\frac{2x^2+1}{x^3-1}\equiv\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}. \qquad (1)$$

此處$a, b,$及c表常數.

欲求a, b, c先去其分母.

得　$2x^2+1\equiv a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1),$

或　$$2x^2+1\equiv(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c). \qquad (2)$$

因(2)爲恆等式，x之同冪之係數必等，§ 284.

故　$$a+b=2, a-b+c=0, a-c=1, \qquad (3)$$

解(3)，　$a=1, b=1, c=1.$

故　$$\frac{2x^2+1}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2+x+1}.$$

例 2.　化$(5x+4)/(x^4+x^3+x^2+x)$爲兩部份分式之和.

關於部份分式之普通定理.　由 § 532 之定理可得下之結論. 535

1.　設A/PQR爲眞分式，其分母之三個因子P, Q, R爲互素式. 此分式可化爲下式之和.

$$\frac{A}{PQR}\equiv\frac{B}{P}+\frac{D}{Q}+\frac{E}{R},$$

此處$B/P, D/Q$及E/R表眞分式.

因P與QR爲互素式，§ 482，故A/PQR爲兩值分式$B/P+C/QR$之和，§ 532；又Q與R爲互素式，故C/QR爲兩眞分式$D/Q+E/R$之和，§ 532.

同理設分母爲任意個數之互素因子，上法仍爲眞確.

2.　設眞分式A/PQ^3其P與Q爲互素式. 按 § 532 可化爲和式

$$\frac{A}{PQ^3}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q^3}.$$

因 Q,Q,Q 非互素式，故 § 532 之定理不適用於 C/Q^3.

但 C 之方次低於 Q^3，故由 § 422，可化 C 爲 Q 之多項式成下列之形:

$$C\equiv C_1Q^2+C_2Q+C_3,$$

此處 C_1,C_2, 及 C_3 之方次低於 Q.

以 Q^3 除此恆等式兩端 得

$$\frac{C}{Q^3}\equiv\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q^2}+\frac{C_3}{Q^3}.$$

故已知分式可化爲下和:

$$\frac{A}{PQ^3}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q^2}+\frac{C_3}{Q^3},$$

此處 B 之方次低於 P，及 C_1,C_2,C_3 之方次低於 Q.

凡分母內之因子(如 Q)次數多於一者均同此理.

故得下定理:

設已知眞分式之分母巳劈成因子——有一次者有多次者——各因子皆爲互素式.

此分式可化爲一組，且只有一組眞分式之和，其中(1)對於各含一次方冪之因子 P 均有一 B/P 形式之分式，(2)對於各含 r 次方冪之因子 Q 均有一組 $C_1/Q+C_2/Q^2+\cdots\cdots+C_r/Q^r$ 形式之分式，此處 $C_1,C_2,\cdots,C_r$.之次數均低於 Q.

536 **最簡部份分式.** 具實數係數之 x 各多項式可化爲範式因式 $x-a$ 及二次因子 x^2+px+q 之積，此處 a,p,q 均爲實數，但 x^2+px+q 之因子有虛數係數.

進而言之，由 §§ 469, 532 可知設眞分式之分子及所劈分母之因子，均有實數係數，則求得之部份分式之分子，亦必有實數係數. 故由 § 534得,

凡分子及分母有實數係數之各眞分式等於一定個數部份分式之和,關於分母之因子爲 $x-b$ 及 x^2+px+q 者如下.

1. 各因子 $x-a$ 爲一次者,必有一分式 $A/(x-a)$,此處 A 爲一實數常數.

2. 各因子 $x-a$ 有 r 次者,必有下述 r 個分式.

$$A_1/(x-a)+A_2/(x-a)^2+\cdots\cdots+A/(x-a)^r,$$

此處 $A_1A_2\cdots\cdots A_r$ 均爲實數常數.

3. 各因子 x^2+px+q 爲一次者必有一分式 $(Dx+E)/(x^2+px+q)$,此處 D 及 E 均爲實數常數.

4. 各因子 x^2+px+q 爲 r 次者,必有下述 r 個分式.

$$(D_1x+E_1)/(x^2+px+q)+\cdots\cdots+(D_rx+E_r)/(x^2+px+q)^r,$$

此處 $D_1, E_1, D_2, E_2, \cdots\cdots D_r, E_r$, 均爲實數常數.

此處所述之分式通常稱爲已知分式之最簡部份分式.最好以不定係數法求之. 537

例*1*. 化 $\dfrac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 爲最簡部份分式.

由 § 536, 得

$$\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}(1),$$

此處 A, B, C 爲常數.

去(1)之諸分母,得

$$x^2+x-3\equiv A(x-2)(x-3)+B(x-3)(x-1)$$
$$+C(x-1)(x-2).\quad(2)$$

按 x 之方冪集(2)之右端諸項且令兩端之 x 之同次冪之係數相等,卽可求得 A, B, C; 但 A, B, C 爲常數,用下法求之較簡且得同一結果.

在(2)內令 $x=1$,則得 $-1=A(-1)(-2)$, $\therefore A=-1/2$;
次令 $x=2$, 則得　　$3=B(-1)\cdot 1$,　$\therefore B=-3$;
又令 $x=3$. 則得　　$9=C\cdot 2\cdot 1$,　　$\therefore C=9/2$.

故 $\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x-2}+\frac{9}{2(x-3)}$.

例2.　化 $\frac{x+1}{x(x-1)^3}$ 爲最簡部份分式.

由§536, 得 $\frac{x+1}{x(x-1)^3}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$,

故　$x+1\equiv A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$.　(1)

在(1)內令 $x=0$, 則得 $1=A(-1)^3$,　$\therefore A=-1$;
次令 $x=1$, 則得 $2=D$,　　$\therefore D=2$.

以 A, 及 D 之值代入(1), 以所得 $-(x-1)^3$ 及 $2x$ 移於左端而化簡之.得

$$x^3-3x^2+2x=Bx(x-1)^2+Cx(x-1).\qquad(2)$$

以 $x(x-1)$ 除兩端,得

$$x-2=B(x-1)+C.\qquad(3)$$

在(3)內,命 x 之同冪之係數相等,則得
$1=B$ 及 $-2=-B+C$,　$\therefore B=1$ 及 $C=-1$.

故　$\frac{x+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$.

或按 x 之冪排列(1), 則得
$x+1=(A+B)x^3-(3A+2B-C)x^2+(3A+B-C+D)x-A$.
命 x 之同冪相等,則得
$A+B=0$, $3A+2B-C=0$, $3A+B-C+D=1$, $-A=1$.
由此諸方程,得數如前,

$$A=-1, B=1, C=-1, D=2.$$

例3.　化 $\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}$ 爲最簡部份分式.

x^2-x+1 之因子爲虛數, 故由§536, 得

$$\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}=\frac{Ax+B}{(x^2-x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}+\frac{E}{x-3},$$

此處 A, B, C, D, E 均爲常數.

去分母,

$$5x^2-4x+61\equiv(Ax+B)(x-3)$$
$$+(Cx+D)(x^2-x+1)(x-3)+E(x^2-x+1)^2. \quad (1)$$

按 x 之冪排列(1),命同冪之係數爲相等則可步得 A, B, C, D, E; 但接下法求之較簡.

於(1)令 $x=3$,則得 $49=49\,E$, $\therefore E=1$.

以 E 之値代入(1),將所得之項 $(x^2-x+1)^2$ 移於左端而化簡之,並以 $x-3$ 除兩端.則得

$$-(x^3+x^2+x+5)\equiv Ax+B+(Cx+D)(x^2-x+1). \quad (2)$$

次以 x^2-x+1 除兩端,則得

$$-x-2-\frac{2x+3}{x^3-x+1}\equiv\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+Cx+D. \quad (3)$$

按 § 531, (3) 內兩邊之整式部分相等分式部分亦相等.

即　$-x-2\equiv Cx+D$,　　故 $C=-1, D=-2$,

又　　$-2x-3\equiv Ax+B$,　　故 $A=-2, B=-3$.

故　$$\frac{5x^2-4x+16}{(x^2+x+1)^2(x-3)}=-\frac{2x+3}{(x^2-x+1)^2}-\frac{x+2}{x^2-x+1}+\frac{1}{x-3}.$$

設已知分式之分母爲 $(x-a)^r$ 者,最好先表分子爲 $x-a$ 之冪之多項式, § 423. 同理設分母爲 $(x^2+px+q)^r$之形,而 x^2+px+q 之因子爲虛數者,亦可表分子爲 x^2+px+q 之冪之多項式. 538

例. 化 $\dfrac{x^4+x^3-8x^2+6x-32}{(x-2)^5}$爲最簡部份分式.

由 § 423, 則得

$$x^4+x^3-8x^2+6x-32=(x-2)^4+9(x-2)^3+22(x-2)^2$$
$$+18(x-2)-28.$$

以$(x-2)^5$除兩端,則得

$$\frac{x^4+x^3-8x^2+6x-32}{(x-2)^5}=\frac{1}{x-2}+\frac{9}{(x-2)^2}+\frac{22}{(x-2)^3}+\frac{18}{(x-2)^4}$$
$$-\frac{28}{(x-2)^5}.$$

設已知非眞分式,可先化爲整式與眞分式之和然後再化爲部份分式. 539

例．用此法將 $\dfrac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5}$ 化爲部份分式．

令 $$\frac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5}=x+2+\frac{7x-11}{x^2-4x-5}$$

$$=x+2+\frac{7x-11}{(x+1)(x-5)};$$

用前法得

$$\frac{7x-11}{(x+1)(x-5)}=\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x-5}.$$

習　題　XXVIII

化以下諸式爲部份分式，其分母須有實數係數．

1. $\dfrac{2x+11}{(x-2)(x-3)}$.　　2. $\dfrac{6x-1}{(2x+1)(3x-1)}$.

3. $\dfrac{4x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.　　4. $\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$.

5. $\dfrac{x^2+2}{1+x^3}$.　　6. $\dfrac{8x+2}{x-x^3}$.

7. $\dfrac{x^3-x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$.　　8. $\dfrac{2x^3-x^2+1}{(x-2)^4}$.

9. $\dfrac{x-1}{2x^3-5x^2-12x}$.　　10. $\dfrac{6}{2x^4-x^2-1}$.

11. $\dfrac{2x^3-3x^2+4x-5}{(x+3)^5}$.　　12. $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

13. $\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}$.　　14. $\dfrac{3x-1}{(x-2)(x^2+1)}$.

15. $\dfrac{2x^5-x+1}{(x^2+x+1)^3}$.　　16. $\dfrac{2x^2-x+1}{(x^2-x)^2}$.

17. $\dfrac{3x^2-x+2}{(x^2-2)(x^2-x-2)}$.　　18. $\dfrac{x^2+px+q}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

19. $\dfrac{2x^2-3x-2}{x(x-1)^2(x+3)^2}$.　　20. $\dfrac{x^3+x+3}{x^4+x^2+1}$.

IX. 對稱函數

絕對對稱及輪換對稱

絕對對稱 在 $x^2+y^2+z^2$ 式中，將 x, y, z 任二字互換後，其結果與原式恆等，如 $y^2+x^2+z^2$，或 $z^2+y^2+x^2$ 恆等於 $x^2+y^2+z^2$. 爲表明此種性質特稱 $x^2+y^2+z^2$ 爲 x, y, z 之對稱式. 540

總之，設某組文字之函數，經互換任二文字後化爲與原函數恆等之函數，則稱此函數爲此組文字之對稱函數.

對稱式之他例，如

$(xy+xz+yz)/(x+y)(x+z)(y+z)$ 關於 x, y, z 爲對稱.

$a+b+c$ 及 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 關於 a, b, c 爲對稱.

換言之，$x+y-z$ 不爲對稱，因 y 與 z 互換則原式不等故也.

$2x^2y$ 及 $3y^2z$ 關於 x, y, z 稱爲同形式，因其任二變數互換，則此式變爲彼式，例如 x^2y 及 y^2z 中兩兩 x, y, z 互換則彼此互變，如 x^2y 變爲 y^2z，餘類推. 541

含文字如 x, y, z 之整函數，且關於 x，名之爲對稱式，其充分及必要條件，爲凡同形式之諸項均同係數. 542

設含某種形式之一項之對稱函數，亦必含此形之一切諸項，即能以諸文字各種可能的互換自問題內之一項而導出之諸項.

如，設 $ax^2+by^2+cz^2$ 如爲對稱式，必須 $a=b=c$.

又，設 x, y, z 之對稱式中含有 x^2y 項，則必含有 $x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y$ 諸項.

543 此定理可示以已知定組文字及已知方次之對稱函數之總形.

如，a,b 表常數，則關於 x,y,z,u 之一次對稱式爲 $a(x+y+z+u)+b$.

又關於 x,y,z 之最普通之一次，二次及三次齊次對稱函數爲:

1. $a(x+y+z)$. 2. $a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+xz+yz)$.

3. $a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+cxyz$.

544 **對稱函數之表示法.** 符號 Σx^2 意即與 x^2 之同形之諸項之和；設 x,y,z 爲所用字母，則 $\Sigma x^2=x^2+y^2+z^2$，同理 $\Sigma x^2y=x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y$；餘類推.

任一對稱函數，可由其各形諸項擇取一項，且書符號 Σ 於其和之前以表示之.

如，

$$\Sigma(2x-x^3y^2)=2x+2y+2z-x^3y^2-y^3x^2-x^3z^2-z^3x^2-y^3z^2-z^3y^2.$$

545 設欲書出對稱函數之全部，最好依定法而排列之，下例示排列整式對稱函數之簡便法.

假定式中字母爲 a,b,c,d，且以 a,b,c,d 爲原定次序.

於是書 Σab 如 Σabc 如下:

$$\Sigma ab=ab+ac+ad+bc+bd+cd,$$

$$\Sigma abc=abc+abd+acd+bcd.$$

須注意各項內之字母亦按照原定次序寫成.

擬寫全 Σab 應輪流取 a,b,c，每一字母而書其各鄰次字母於其後. Σabc 之諸項可由 Σba 之同法導出之.

設 $m\neq n$，茲列 Σa^mb^n 之各項如下:

$$\Sigma a^2b^3=a^2b^3+b^2a^3+a^2c^3+c^2a^3+\cdots\cdots+c^2d^3+d^2c^3.$$

注意其指數之次序常爲一定，故在指數次序之中可書 Σab 之第一項之 ab 爲 ab 及 ba 兩種次序，餘類推.

同法可寫

$\Sigma a^2b^3c^4=a^2b^3c^4+a^2c^3b^4+b^2c^3a^4+b^2a^3c^4+c^2a^3b^4+c^2b^3a^4$
+(同法推得 Σabc 之其餘各項).

對稱之一般定理. 自對稱之定義, § 540, 可知對稱函數, 以計算法則變更其形後仍爲對稱函數. 於特例, **546**

二對稱函數之和, 差, 積, 及商仍爲對稱.

由此定理可直接用代數處理而不必實際計算卽可得已知對稱函數結合之結果, 只須計算結果各種範式之項.

例1. 求 $(\Sigma a)^2=(a+b+c+\cdots\cdots)^2$.

所求結果當然爲二次齊次對稱函數。含二範式 a^2 及 $2ab$.

故 $(\Sigma a)^2=\Sigma a^2+2\Sigma ab$.

例2. 求 $\Sigma x^2\cdot\Sigma x=(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$.

此積顯然爲 x^3 及 x^2y 兩範式之和,

故 $\Sigma x^2\cdot\Sigma x=\Sigma x^3+\Sigma x^2y=x^3+y^3+z^3$
$+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y$.

例3. 求 $(\Sigma x)^3=(x+y+z)^3$.

所求結果爲關於 x, y, z 之三次齊次對稱式. 故得, (§543),

$$(x+y+z)^3=a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+cxyz.$$

擬求常數 a, b, c 之值故予 x, y, z 以三組之任意值而生含 a, b, c 之方程, 且解之.

如, 設 $x=1, y=0, z=0$, 得 $1=a$. (1)

又, 設 $x=1, y=1, z=0$, 得 $8=2a+2b$. (2)

終, 設 $x=1, y=1, z=1$, 得 $27=3a+6b+c$ (3)

解(1), (2), (3), 得 $a=1, b=3, c=6$.

$$\therefore\quad (\Sigma x)^3=\Sigma x^3+3\Sigma x^2y+6\Sigma xyz.$$

547 **輪換對稱式.** 在$x^2y+y^2z+z^2x$式中設以x換y，y換z，z換x得$y^2z+z^2x+x^2y$與原式恆等．爲表明此種性質特稱$x^2y+y^2z+z^2x$爲x, y, z按x, y, z順序之輪換對稱式.

總之，凡有定數文字按已知次序排列之式，設以第二字代第一字，第三代第二，等等，以第一代第末字，仍與原式恆等，則原式稱爲輪換對稱式，或輪換式.

548 如$x^2y+y^2z+z^2x$以上法輪換之，則變第一項爲第二項，第二項爲第三項，第三項爲第一項，而與原式相同，此謂之輪換排列．常見之輪換對稱式以輪換排列法計算有極大便利.

549 凡對稱函數，顯然皆爲輪換式，但各輪換式，不全爲對稱式.

如$x^2y+y^2z+z^2x$雖爲輪換式而非對稱式．設將x及y互換其値遂變，若欲令其成對稱式須加$y^2x+z^2y+x^2z$數項.

550 如上例所示，一輪換函數通常不含已知範式之所有諸項；但其所含之數項必有同係數.

551 **定理.** 任二輪換函數之和，差，積，商仍爲輪換函數.

此理可由輪換式定義得之.

例. 求$(x^2y+y^2z+z^2x)(x+y+z)$之積.

顯然此積爲輪換式而非對稱式．因其含x^3y, x^2y^2, x^2yz項各一次，且只含此種範式之諸項.

故其積爲

$$x^3y+y^3z+z^3x+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2yz+y^2zx+z^2xy.$$

習　題 XXIX

1. 在 $x^4-2y^4+z^4+4(x^3-y^3)(y^3-z^3)(x^2+z^2)$ 中關於何字母爲對稱?

2. 寫出下列之 a,b,c 之對稱函數。

Σa^2b^3, Σa^3b^4, $\Sigma a^2/b$, $\Sigma a^2b^3c^5$, $\Sigma a^2b^2c^4$,

$\Sigma(a+b)c$,　$\Sigma(a+b^2)c^3$,　$\Sigma(a+2b+3c)$.

3. 試證 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 關於 a,b,c 爲輪換而非對稱;且證 $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ 爲其對稱式.

4. $(a-b)^2(b-c)^2(c-d)^2(d-a)^2$ 關於 a,b,c,d 爲對稱乎?

5. 排下列各組爲換輪式:

$y^2-x^2, z^2-y^2, x^2-z^2$; $a^2bc, abd^2, ac^2d, b^2cd$;

$(a-c)(b-a)$, $(a-c)(c-b)$, $(a-b)(b-c)$.

6. 寫出下列各輪換式,其第一項爲:

$ab^3c^2, a(b-c), (b+2c)(a+d), a^2/(a-b)(a-c)$.

7. 證明下列恆等式爲眞.

$\Sigma a^3\cdot\Sigma a=\Sigma a^4+\Sigma a^3b$; $\Sigma ab\cdot\Sigma a=\Sigma a^2b+3\Sigma abc$.

對稱及輪換函數之分解因式法

用餘式定理及上述之原則,可用簡捷之法以分解複雜之 552
對稱或輪換式之因子.

例1.　分解 $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$ 之因子.

令 $y=z$, 則原式 $=x^3(z-z)+z^3(z-x)+z^3(x-z)\equiv 0$.

故可以 $y-z$, 除盡原式, § 416; 同理, $z-x, x-y$ 亦可除盡原式,故可以 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 除盡原式.

因原式及 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 各爲四次及三次之輪換齊次函數.故商必爲一次齊次且輪換式如 $k(x+y+z)$ 之形,而 k 表一常數.故

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$$
$$\equiv k(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z) \quad (1)$$

擬求 k，可予 x, y, z 以任一組値但勿使 k 之係數爲 0.

如設 $x=2, y=1, z=0$，得 $6=-6k$，或 $k=-1$.

或按 x 之多項式排列(1)使兩端 x 之同冪係數相等，即可得k.如x^3在左端爲$x^3(y-z)$，而在右端則爲$-kx^3(y-z)$，因得 $k=-1$ 如前.故

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$$
$$=-(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z).$$

例2.　分解$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ 之因子.

設 $x=-y$，則此函數爲零，

$$(-y+y+z)^5+y^5-y^5-z^5\equiv 0.$$

故原式可以 $x+y$ 除盡；同理可以 $(y+z)$ 及 $(z+x)$ 除盡，亦可被$(x+y)(y+z)(z+x)$除盡.

因此除式及被除式，各爲五次及三次之齊次對稱式，故其商必爲 $k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)$之形，§543.

故　　$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

$$\equiv(x+y)(y+z)(z+x)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)].$$

設　$x=1, y=1, z=0$，　得　$15=2k+l$.

設　$x=2, y=1, z=0$，　得　$35=5k+2l$.

解 k 及 l，求得 $k=5, l=5$，故

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$$
$$=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx).$$

例3.　分解次式之因子：

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3.$$

設 $x=0$，則

$$(y+z)^3-(y+z)^3-(z-y)^3-(y-z)^3\equiv 0.$$

故 x 可除盡原式；同理 y 及 z 可除盡原式；故 xyz 亦可除盡原式.

因除式及被除式俱爲三次，故商爲常數 k 故

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3\equiv kxyz.$$

設　$x=1, y=1, z=1$，求得 $k=24$.故

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3=24xyz.$$

上述法則有時對於化簡輪換分式頗爲有用. 553

例. 化簡

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

此式關於a, b, c爲輪換式.

最低公分母爲$(b-c)(c-a)(a-b)$.

以此$(b-c)\ (c-a)\ (a-b)$公分母通其各分式得第一分子爲 $-a^3(b-c)$, 輪換之, 得第二及第三之分子爲 $-b^3(c-a)$ 及 $-c^3(a-b)$. 加此三分子且分解其結果, § 552, 例*1*, 得 $(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$.

故已知式化爲 $a+b+c$.

習 題 XXX

分解下列之諸式之因子.

1. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.
2. $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)$.
3. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$.
4. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$.
5. $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$.
6. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.
7. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.
8. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$.
9. $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$.
10. $(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$.
11. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$.
12. $x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)$.

化簡下列諸分式.

13. $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$.
14. $\dfrac{x+a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x+b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{x+c}{(c-a)(c-b)}$.

15. $\dfrac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

16. $\dfrac{(b+c)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(c+a)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(a+b)^2}{(c-a)(c-b)}$.

17. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)(x-b)}$

$$+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}.$$

X. 二項式定理

554　**連乘積之構成**　求

$$(a+b+c+d)(e+f+g)(h+k)$$

之積，可以 $e+f+g$ 之各項乘 $a+b+c+d$ 之各項；再以 $h+k$ 之各項乘其所得各乘積，最後加其乘得之諸結果，即得。

故從三因子中各選一項相乘卽得積之一項。且設用一切可能方法，從已知三因子內各取一項相乘，卽可得乘積之所有項。

如，從首因子取 b，次因子取 g，第三因子取 k，則得乘積之 bgk，餘類推。

因從 $a+b+c+d$ 內選取一項可有四法。$e+f+g$ 內選取一項，可有三法，$h+k$ 內選取一項可有二法，故完全乘積之項數爲 $4\cdot3\cdot2$ 或 24. 總之，

任何若干多項式之積，爲盡可能方法於每壹因子內各取一項相乘，所得諸積之和。

又設第一因子有 m 項，第二因子有 n 項，第三因子有 p 項等等，則其完全乘積之項數——在同類項合併之前，（設能合併）爲——$mnp\cdots\cdots$

此定理予乘積正確性以有用之核驗，可用於已合併同類項之乘積．設其諸項具同號且無數字係數者諸項之和，則某項係數卽示其有若干未合併之項數． 555

故由本定理，$(a+b+c)$ $(a+b+c)$之積必有 $3\cdot3$ 或 9 項，此 9 項皆同號．但前已知 $(a+b+c)$ $(a+b+c)$ $=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$，此表 $1+1+1+2+2+2$ 或 9 項未合併之乘積．

同理，$(a+b)(a+b)(a+b)$之積有 $2\cdot2\cdot2$ 或 8 項．但化簡後爲 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，此表 $1+3+3+1$ 或 8 項未合併項之乘積．

用上章方法計算對稱函數時，此定理須牢記於心． 556

例如，249 頁習題 7，已知 $\Sigma ab\cdot\Sigma a=\Sigma a^2b+3\ \Sigma abc$．設其僅含 a, b, c 三字試核驗此公式．

於是，Σab 有三項，Σa 有三項，Σa^2b 有 6 項，Σabc 有 1 項；而 $3\cdot3=6+3\cdot1$．恰相符合．

一次二項之因子積． §554 之定理能以觀察法求得任何多個形如 $x+b$ 之因子之積．如 557

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$$
$$=x^3+(b_1+b_2+b_3)x^2+(b_1b_2+b_1a_3+b_2b_3)x+b_1b_2b_3.$$

因從各因子內均選 x，得 x^3．

盡可能方法，從二因子選 x，他一因子選 b 得 b_1x^2，b_2x^2，b_3x^2 諸項．

盡可能方法從一因子選 x，他二因子選 b，得 b_1b_2x，b_1b_3x，b_2b_3x 諸項．

於所有三因子內選 b，得 $b_1b_2b_3$ 項．

注意如公式所示乘積併項後，x^2 之係數爲 $b_1b_2b_3$ 三字母之和，x 之係數爲三字母中每兩個之積之和，最後項爲所

有三字母之積.

因 $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$ 自身關於 b_1, b_2, b_3 對稱故諸係數爲對稱函數.

又因 $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$ 關於 b_1, b_2, b_3 對稱,故先由每範式求出一項,如 $x_3, b_1x^2, b_1b_2x, b_1b_2b_3$, 再寫出每種範式之所有項,即可求得此連乘積.

558 由同理可證明其一般之公式.

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)\cdots\cdots(x+b_n)$$
$$=x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\cdots\cdots+B_n,$$

式
$$\begin{aligned} B_1&=\Sigma b_1 &&=b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n,\\ B_2&=\Sigma b_1b_2 &&=b_1b_2+b_1b_3+\cdots\cdots+b_2b_3+\cdots\quad+b_{n-1}b_n,\\ B_3&=\Sigma b_1b_2b_3 &&=b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+\cdots\cdots+b_{n-2}b_{n-1}b_n,\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ B_n&= &&b_1b_2b_3\cdots\cdots b_n; \end{aligned}$$

即, B_1, B_n 爲所有字母 $b_1, b_2, \cdots\cdots b_n$ 之和及積,其間之係數爲: B_2 爲字母中每兩個之積之和; B_3 爲每三個之積之和,餘類推.

例如,盡可能方法,每次從三因子內選 b,餘因子內選 x,則得 $b_1b_2b_3x^{n-3}$, $b_1b_2b_4x^{n-3}$,……諸項,且其和爲 B_3x^{n-3}.

由上知係數

$$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$$

爲字母之 $b_1, b_2, \cdots\cdots b_n$ 之對稱函數.

559 同法得

$$(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\cdots\cdots(x-b_n)$$
$$=x^n-B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^nB_n,$$ 此處

$B_1, B_2, \cdots\cdots B_n$ 之意義與 § 558 同,且連各項之符號一十相

間末項$(-1)^n B_n$之符號，設 n 爲偶時爲正，爲奇時爲負．

此公式之得來，僅由於變 § 558 公式內所有字母 $b_1, b_2 \cdots \cdots b_n$之符號．因凡偶數個 b 乘積之諸項構成之各種 B 式不變，而於奇數個 b 乘積之各種 B 式則僅變其符號．

例．　用 § § 557－559 方法，求以下各積．

1.　$(x+1)(x+2)(x+3)$．　*2.*　$(x+2)(x-3)(x+4)$．

3.　$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$．

4.　$(x-y)(x+2y)(x-3y)(x+4y)$．

$\Sigma b_1, \Sigma b_1 b_2, \cdots\cdots$**諸和之項數**．令 $n_1, n_2, \cdots\cdots$表 $\Sigma b_1, \Sigma b_1 b_2, \cdots\cdots$內各和之項數． **560**

1.　因 $\Sigma b_1 = b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n$，顯然 $n_1 = n$．

2.　設 n 字母 $b_1, b_2, \cdots\cdots b_n$ 中之每個，文字順次以其他 $n-1$ 個字母輪乘之，則得 $n(n-1)$個乘積．但此 $n(n-1)$ 各乘積項等於 $\Sigma b_1 b_2$ 諸項中每項複計一次，故 $\Sigma b_1 b_2$ 之項數 n_2 爲 $n(n-1)/2$，或

$$n_2 = n_1 \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

由是得

$b_1 b_2, b_1 b_3, \cdots\cdots, b_1 b_n$；$b_2 b_1, b_2 b_3, \cdots\cdots, b_2 b_n$；$\cdots\cdots$；$b_n b_1, b_n b_2, \cdots\cdots, b_n b_{n-1}$.

此乘積每組 $n-1$ 個共有 n 組，故全數爲 $n(n-1)$．

但乘積 $b_1 b_2$ 發見兩次，即一爲 $b_1 b_2$；一爲 $b_2 b_1$；餘類推．

3.　又設以 $n-2$ 字母中之每個乘 $\Sigma b_1 b_2$ 之 n_2 項不含該字母之各項則共得 $n_2(n-2)$個乘積．但此 $n_2(n-2)$個乘積爲 $\Sigma b_1 b_2 b_3$ 中諸項每項發現三次．故 $\Sigma b_1 b_2 b_3$ 內之項數 n_3 爲 $n_2(n-2)/3$，或

$$n_3 = n_2 \cdot \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

故得

$b_1b_2b_3,\ b_1b_2b_4,\cdots\cdots,b_1b_2b_n;\ b_1b_3b_2,\ b_1b_3b_4,\cdots\cdots,b_1b_3b_n;$

$\cdots\cdots;b_{n-1}b_nb_1,\ b_{n-1}b_nb_2,\cdots\cdots,\ b_{n-1}b_nb_{n-2}.$

此乘積共有 n_2 組,每組有 $n-2$ 個積,故共有 $n_2\ (n-2)$ 個乘積.

但乘積 $b_1b_2b_3$ 發現三次,即由三種形式 $b_1b_2\cdot b_3,\ b_1b_3\cdot b_2,\ b_2b_3\cdot b_1$. 同樣 $\Sigma b_1b_2b_3$ 內之每項亦皆發現三次,於三種方法中每法均得一此三字母之乘積, 即以餘一字母乘二字母之積是也.

4. 由同理可證

$$n_4=n_3\,\frac{n-3}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4},$$

總之,

$$n_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\text{至 } r \text{ 因子}}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}.$$

如,四字母 b_1, b_2, b_3, b_4, 每次取一,二,三, 四相乘之積之個數爲

$$n_1=4,\ n_2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6,\ n_3=\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4,\ n_4=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1.$$

561 **二項式定理.** 設於 § 558 之公式,即

$(x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_n)=x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\cdots+B_n$ 內以同字母 b 易其 n 不同字母 $b_1, b_2,\cdots\cdots b_n$, 且以 a 易 x 則左方變爲 $(a+b)^n$.

又因 B_1 內之 n 項式皆變爲 b, B_2 內之 n_2 項皆變爲 b^2, 餘類推,故由 § 560, 得

$$B_1=nb,\ B_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot2}b^2,\ B_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}b^3,\cdots\cdots.$$

故此公式變化如下:

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots,$$

式內

1. 右方之項數為 $n+1$.

2. a 之指數逐項減一,而 b 之指數逐項增一,各項內指數之和皆為 n.

3. 首項係數為 1,第二項係數為 n,以外各項係數,可用下法求得:

以任一項內 a 之指數,乘該項之係數,再以 b 之指數加 1 除之結果即為次一項之係數.

此公式即所謂二項式定理,右式稱為 $(a+b)^n$ 由此定理所得之展開式.

例如,

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}ab^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}b^3$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

因 $a+b$ 關於 a, b 對稱,故由 §542 可知,展開式內同形之諸項——即含 a^n 及 b^n, $a^{n-1}b$ 及 ab^{n-1}, 等等——必有相同係數,但此為首項及末項,第二項及倒數第二項;總之即距展開式兩端等距之各二項. 562

故末項為 b^n, 倒數第二項為 nab^{n-1}, 餘類推.因項數為 $n+1$, 故 n 為偶數時有一中項, n 為奇數時有二中項.如有二中項,則二項為同形且有同係數. 由上可知中項前後項之係數必同,但次序相反.

亦可知係數漸大,至中項後漸小,故中項之係數為最大. 563

此亦合 §561, 3 之法則,因中項前各項內 a 指數較 b 之指數逐項增一,而於中項後之各項內則少一也.

564 變前公式內 b 之符號且化簡，得

$$(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots,$$

其中含 b 奇次冪之項爲負，偶次冪之項爲正。

例. 求 $(2x-y^3)^6$ 之展開式.

以 $2x$ 代 a, y^3 代 b，代入公式，又知末三係數依相反順序同於首三係數，故得

$$(2x-y^3)^6=(2x)^6-6(2x)^5y^3+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}(2x)^4(y^3)^2-\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}(2x)^3(y^3)^3$$
$$+\cdots\cdots=(2x)^6-6(2x)^5y^3+15(2x)^4(y^3)^2-20(2x)^3(y^3)^3$$
$$+15(2x)^2(y^3)^4-6(2xy^3)^5+(y^3)^6$$
$$=64x^6-192x^5y^3+240x^4y^6-160x^3y^9+60x^2y^{12}$$
$$-12xy^{15}+y^{18}.$$

565 **普通項** 由 §561 知 $(a+b)^n$ 之展開式內之第 $(r+1)$ 項爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\text{至 } r \text{ 因子}}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r.$$

如 r 爲奇數時冠以負號卽爲 $(a-b)^n$ 之展開式內之第 $(r+1)$ 項.

例1. 求 $(x-y)^{16}$ 之展開式內第八項.

於此 $n=16$ 及 $r+1=8$, $r=7$. 故所求項爲

$$-\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}x^9y^7=-11440x^9y^7.$$

例2. $(x^3+1/x)^{12}$ 之展開式內有無含 x^{20} 之項? 如有，求此項.

使 $r+1$ 表項數. 於是因 $n=12$, $a=x^3$, 及 $b=1/x$, 故必得

$$a^{n-r}b^r=(x^3)^{12-r}/x^r=x^{36-4r}=x^{20}.$$

設 $36-4r=20$，或 $r=4$，則能滿足此條件。

故第五項含 x^{20} 代入公式得此項爲

$$\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{20}=495x^{20}.$$

習 題 XXXI

用二項式定理展開下列諸式：

1. $(3x+2y)^3$.　2. $(a+b)^8$.　3. $(1+2x^2)^7$.

4. $(2+1/x)^4$.　5. $(x-3/x)^6$.　6. $(x/y-y/x)^5$.

7. $(1-x+2x^2)^4$.　8. $(a^2+ax-x^2)^3$.

9. 求 $(1+x/2)^{11}$ 內之第六項。

10. 求 $(3a-4b)^{12}$ 內之第八項。

11. 求 $(a^2-2bc)^{10}$ 內之中項。

12. 求 $(1-x)^9$ 內之二中項。

13. 求 $(1+x)^8$ 內 x^5 之係數。

14. 求 $(3-2x)^7$ 內 x^4 之係數。

15. 求 $(1-x^2)^6$ 內 x^8 之係數。

16. 求 $(1+2x)^9+(1-2x)^{11}$ 內 x^3 之係數。

17. 求 $(x+1/x)^{12}$ 內之常數項。

18. 求 $(2x-1/x)^{15}$ 內 x^7 之係數，

19. 用觀察法求 $(x+2y)(x-3y)(x-5y)$。

20. 用觀察法求 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)$。

21. 乘積 $(a+b+c+d)(f+g+h)(k+l)(m+n+p+q)$。內之項數如何？

22. 設展開下列四字 a,b,c,d 之對稱函數其係數之和若何

1. $(1+x^2+x^3+x^4)^3$.

2. $(1+2x+x^2)^2(1+x+2x^3)^2$

23. 求下各之積係數和：

1. $\Sigma a^2\ \Sigma a$.　2. $\Sigma a^3\cdot\Sigma abc$.　3 $\Sigma ab\cdot\Sigma abc$.

24. 試證 $(a+b)^n$ 之展開式中其係數之和爲 2^n.

25. 試證 $(a-b)^n$ 之展開式中其正係數之和之數值等於其負係數之和。

XI. 開方

566 **完全方冪.** 已知一有理函數 P. 此函數 P 能爲完全 n 次方;換言之,有第二函數 Q 存在,能致 $P=Q^n$. 設其如此,則有理式 Q 爲 P 之 n 次根.

茲本章討論之問題: 已知環有理函數 P, 求定 P 是否爲完全 n 次方,設其然,求其 n 次根 Q. 假定 n 表已知正整數.

567 **獨項式之根.** 使 P 表已化爲最簡形之有理獨項式. 設 P 爲完全 n 次方,則 P 之一 n 次根可用下法求得:

以 n 遍除 P 內各字母因式之指數,再乘以 P 之數字係數之 n 次主根.

此可由 § 318 之乘方法則推知.

例如,$(a^kb^l/c^m)^n=a^{kn}b^{ln}/c^{mn}$. 故 a^kb^l/c^m 爲 $a^{kn}b^{ln}/c^{mn}$ 之 n 次根, § 566, 且由以 n 除 $a^{kn}b^{ln}/c^{mn}$ 之指數得來.

568 如是求得之根,稱爲 P 之 n 次主根(參照 § 258). 當述及 P 之 n 次根或用符號 $\sqrt[n]{P}$時,皆指此根.

例1. 求 $-8a^3b^6/27x^3y^9$ 之立方根.

今
$$\sqrt[3]{\frac{-8a^3b^6}{27x^3y^9}}=-\frac{2ab^2}{3xy^3}.$$

例2. 求以下各根.

1. $\sqrt{\dfrac{64a^4b^6}{100c^8d^{12}}}$. 2. $\sqrt[4]{81x^4y^8z^{12}}$. 3. $\sqrt[5]{\dfrac{32x^{10}y^{30}}{a^5z^{25}}}$.

569 **多項式之根** 注意下列.

例1. 求 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 是否完全平方,設是,求其平方根.

設其爲完全平方，顯然必有一平方根形如 $2x^2+px+q$ 者，其 p 及 q 爲常數．由是必得

$$4x^4-4x^3+13x^2-6x+9\equiv(2x^2+px+q)^2$$
$$\equiv 4x^4+4px^3+(p^2+4q)x^2+2pqx+q^2,$$

依 § 284, p 及 q 須適合諸方程式:

$4p=-4(1)$, $p^2+4q=13(2)$, $2pq=-6(3)$, $q^2=9(4)$

從(1)及(2)得 $p=-1$, $q=3$, 且因 $2(-1)3=-6$, 及 $3^2=9$, 此 p 及 q 之値適合(3)及(4).

故 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 爲完全平方，其平方根爲 $2x^2-x+3$.

例2. 求 $x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$ 之立根.

設其爲完全立方，則必有形如 x^2+px+q 之立方根.

由是得

$$x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27\equiv(x^2+px+q)^3$$
$$\equiv x^6+3px^5+3(p^2+q)x^4+(p^3+6pq)x^3$$
$$+3(p^2q+q^2)x^2+3pq^2x+q^3,$$

由 § 284 知 p 及 q 項適合六方程式:

$3p=6(1)$, $3(p^2+q)=21$ (2),……$q^3=27$ (6).

從(1)及(2)得 $p=2$, $q=3$. 且可試出此二値適合其餘(3)……(6)各方程式.

故 $x^6+6x^5+\cdots\cdots+54x+27$ 爲完全立方，而其立方根爲 x^2+2x+3.

用上例所示方法，永能決定一已知 x 之多項式是否爲完全 n 次方，設其是，且能求出其 n 次根.

令此多項式爲 $a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m$. 設此爲完全 n 次方，則次數 m 必爲 n 之倍數，如是 $m=kn$, k 爲整數，且必有一 n 次根如 $\alpha x^k+A_1x^{k-1}+\cdots\cdots+A_k$ 之形，其 α 表 a_0 之 n 次主根，及 $A_1,\cdots\cdots,A_k$ 爲未知常數．玆稱此根爲 n 次主根.

求定 $a_0x^m+\cdots\cdots+a_m$ 是否含有此根；設其存在，求此根.

使 $a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m\equiv(\alpha x^k+A_1x^{k-1}+\cdots+A_k)^n$,

變右方爲 x 之多項式，於是令其與左方同次冪之係數相等，由是得 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_k$ 之 nk 個方程式．首 k 方程式得 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_k$ 之一組值．且設 $a^0x^m+\cdots\cdots+a_m$ 爲完全 n 次方，則該組諸值必適合其餘方程式．

例3．　求 $8x^6-12x^5+18x^4-13x^3+9x^2-3x+1$ 之立方根．

570　**多項式之平方根．**　設一多項式 P 爲完全平方，則其平方根亦可用下法求得．

如前節，使 P 表依降冪排列 x 之偶次多項式．

假定 P 爲完全平方，$a, b, c, \cdots\cdots$ 表其平方根內依 x 降冪排列之諸項，於是 $P\equiv(a+b+c+\cdots\cdots)^2$．

問題爲已知 P 求 $a, b, c, \cdots\cdots$

無論 $a, b, c, \cdots\cdots$ 之值爲何，必有次之關係：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b,$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\&=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2=a^2+(2a+b)b&+[2(a+b)+c]c\\&+[2(a+b+c)+d]d,\end{aligned}$$

餘類推，左方每加一新字母，右邊卽增一新項組，卽加新字母於二倍原字母之和，再以新字母乘其結果而構成之一組．

故由假設 $P\equiv(a+b+c+\cdots\cdots)^2$，得

$$\begin{aligned}P\equiv a^2+(2a+b)b&+[2(a+b)+c]c\\&+[2(a+b+c)+d]d+\cdots\cdots,\end{aligned}$$

右方各組首項,即 a^2, $2ab$, $2ac$, $2ad$,……,其含 x 之次數皆高於其後之任一項.

從此恆等式可求 a, b, c……如下法:

1. 顯然 a 爲 P 首項之平方根.
2. 從 P 減 a^2, 則餘式 R_1 之首項必爲 $2ab$, 以 $2a$ 除之可得 b.
3. 已得 b, 從 R_1 減去 $(2a+b)b$, 則餘式 R_2 之首項必爲 $2ac$, 以 $2a$ 除之可得 c.
4. 繼續進行至餘式之次數低於 a 而止.

如假定 P 爲完全平方,最後餘式必爲零,而其平方根爲 $a+b+c+$……

設最後餘式不爲零,則 P 非完全平方,但可變 P 爲下列之形:

$$P\equiv(a+b+c+\cdots\cdots)^2+R,$$

即爲一完全平方與一整函數之和,此函數之次數低於 a.

排列上述演算如下例較爲簡便.

例. 求 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 之平方根.

$$\begin{array}{rl|l}
 & P=4x^4-4x^3+13x^2-6x+9 & \underline{2x^2-x+3=a+b+c} \\
 & a^2=4x^4 & \\
2a+b=4x^2-x & -4x^3+13x^2-6x+9=R_1=P-a^2 & \\
 & \underline{-4x^3+\quad x^2 \qquad\qquad =(2a+b)b} & \\
2(a+b)+c=4x^2-2x+3 & 12x^2-6x+9=R_2=P-(a+b)^2 & \\
 & \underline{12x^2-6x+9}=[2(a+b)+c]c & \\
 & 0 \qquad =R=P-(a+b+c)^2 &
\end{array}$$

因最後餘式爲零,故 P 爲完全平方,其平方根爲 $2x^2-x+3$. 比較 § 569, 例 1.

由上可知已得各新餘式 $R_1, R_2,$……則以 $2a$ 除其首項,即得根之次項 於餘式之左寫已得根之二倍加根之新項,以

根之新項乘此和，且從餘式減之，於是得次新餘式。

例． 求 $25x^4-40x^3+46^2-24x,+9$ 之平方根．

571 此法亦可用於含多於一字母之多項式 P，P 須爲完全平方，先依一字母之降冪排列 P 式，於是如 §570 方法進行，當然 x 表所排列之字母．

572 **近似平方根．** 此法亦可用於依 x 升冪排列之多項式．惟 $a, b, c,$………亦須依升冪排列，且其次數亦必連續遞增．故如 §570, 4, 設 P 非完全平方而有一常數項，則可變其形爲

$$P\equiv(a+b+c+\cdots\cdots)^2+R',$$

即一完全平方與 R' 多項式之和，R' 之最低次項可爲任意之高次．

設 x 表極小之值，若充分施行此種演算，可令 R' 之值小至任意之小．故於此情形下稱 $a+b$, $a+b+c,\cdots\cdots$ 爲 P 之二項近似平方根，三項近似平方根 ……．

求此種近似根，用 §569 之方法更爲敏捷．

例1． 求 $1+x$ 之平方根至四項．

由 §569，寫 $\sqrt{1+x}\equiv1+px+qx^2+rx^3+\cdots\cdots$．

平方之，$1+x\equiv1+2px+(p^2+2q)x^2+2(pq+r)x^3+\cdots$

由 §284， $2p=1$， $p^2+2q=0$， $pq+r=0$，

解之 $p=1/2$， $b=-1/8$， $r=1/16$．

因之所求結果爲 $1+x/2-x^2/8+x^3/16$．

學者試用 §§570, 571 之法核驗之．

例2． 求 $4-x+x^2$ 之平方根至三項．

數目之平方根．從 §570 之公式，亦可導出求數目平 573
方根之常用法．

例．求 53361 之平方根．

令 a 表一有效數字之最大整數，其平方小於 53361 者．此有效數字爲根之首一數字，其餘數字暫均爲 0．茲求 a 如次：

注意 a 末若有一零，則 a^2 末有二零，於是從右向左將 53361 分段，每兩位分爲一段，得 $5'33'61$．

由 61 及 33 二段每有一節 a 後卽有一零，餘一節 5 得根之首數字 2．因 2 爲平方小於 5 之最大整數．故 $a=200$．

已得 a 後，進行方法與求多項式之平方根時完全相同．其方法如左下方所示，b 表根之第二數字乘10，而 c 爲個位數字，右方所示爲普通實用之縮簡演算法．

$$\begin{array}{r|r|l}
 & & a+\ b\ +c \\
 & 5'33'61 & \underline{200+30+1} \\
 & 4\,00\,00 & =a^2 \\
2a=400 & 1\,33\,61 & =R_1 \\
2a+b=430 & 1\,29\,00 & =(2a+b)b \\
2(a+b)=460 & 4\,61 & =R_2 \\
2(a+b)+c=461 & 4\,61 & =[2(a+b)+c]c \\
 & 0 & =R
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|r|l}
 & 5'33'61 & \underline{231} \\
 & 4 & \\
43 & 1\,33 & \\
 & 1\,29 & \\
461 & 4\,61 & \\
 & 4\,61 & \\
 & 0 &
\end{array}$$

先減去 a^2，再以 $2a$ 除餘式 R_1，得有效數字 b，復從 R_1，減 $(2a+b)b$ 得 R_2，最後以 $2(a+b)$ 除 R_2 得 c．

完成全部之最簡方法，如右方所示，爲取消數尾之零，而每次只寫下一段．既得新餘式後，於其左方寫已得部分根之二倍爲試除數，以試除數除餘式得根之次一數字，且以此數字附書試除數後成完全除數，再以根之新數字，乘完全除數，減之得新餘數．如在演算之任何階段所得之數過大，卽適遞之積大於被減之餘數，則再試以較小之數字．

574　**數目之近似平方根.**　適述方法亦能求得非完全平方數之近似根.

例.　求 7.342 之平方根至小數三位.

```
     7.34'20'00|2.709
     4
47 | 3 34
   | 3 29
5409| 5 20 00
    | 4 86 81
        33 19
```

故 $\sqrt{7.342}=2.709\cdots$

顯然根之每一小數位，此數內即相當有二小數位，故從小數點起向右分數之小數部分每兩位爲一段，其整數部分依 §573，即從小數點起向左分段.

注意若小數之位數爲奇數，則不能爲完全平方.

575　**多項式之立方根.**　設多項式 P 爲一完全立方，則求多項式 P 之立方根之特殊方法，亦類似於前述之求平方根者.

令 P 表 x 之多項式，其次數爲 3 之倍數，且依 x 之降冪排列.

假定 P 爲完全立方，$a, b, c, \cdots$ 爲其立方根依 x 降冪排列之諸項，由是 $P\equiv(a+b+c\cdots)^3$.

此問題爲已知 P，求 $a, b, c, \cdots$.

茲不論 $a, b, c, \cdots$ 之值爲何，必得

$$(a+b)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b,$$

$$(a+b+{}^3c)=a^3+(3a^3+3ab+b^2)b$$
$$+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c,$$

餘類推，左方每加一新字母，右方加一新項組，此新項組爲 3 倍原有字母和之平方，加 3 倍原字母之和乘新字母，加新字母之平方，再以新字母乘此結果而得.

故由假設，$P\equiv(a+b+c+\cdots)^3$，得

$$P\equiv a^3+(3a^2+3ab+b^2)b+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c+\cdots,$$

右方每組之首項卽 a^3，$3a^2b$，$3a^2c$，其 x 之次數皆高於其後之諸項。

由此恆等式可求得 a，b，c，……如下：

1. 顯然 a 爲 P 首項之立方根.

2. 從 P 減去 a^3，其餘式 R_1 之首項必爲 $3a^2b$，故可以 $3a^2$ 除此項得 b.

3. 已得 b，構成 $(3a^2+3ab+b^2)b$ 且自 R_1 減之.其餘式 R_2 之首項必等於 $3a^2c$，可以 $3a^2$ 除此項而得 c.

4. 繼續此演算至餘式之次數低於 a^2 而止.

設最後餘式爲零，則如所假定 P 爲完全立方，且其根爲 $a+b+c+\cdots\cdots$.

設最後餘式不爲零，則 P 非完全立方，但可變形爲

$$P\equiv(a+b+c+\cdots\cdots)^3+R,$$

R 之次數低於 a^2.

排列此演算如下較爲便利：

例.　求 $x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$ 之立方根.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+3 \\
3a^2=3x^4 & x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27 \\
 & x^6 \\
\hline
(3x^2)^2=3x^4 & 6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27=R_1 \\
3x^2\cdot 2x+(2x)^2=6x^3+4x^2 & \\
3x^4+6x^3+4x^2 & 6x^5+12x^4+\ \ 8x^3 \\
\hline
3(x^2+2x)^2=3x^4+12x^3+12x^2 & 9x^4+36x^3+63x^2+54x+27=R_2 \\
3(x^2+2x)3+3^2=\qquad 9x^2+18x+9 & \\
3x^4+12x^3+21x^2+18x+9 & 9x^4+36x^3+63x^2+54x+27 \\
\hline
 & \qquad 0 \qquad\qquad =R
\end{array}$$

因最後餘式爲零，故$x^6+6x^5+\cdots\cdots+54x+27$爲完全立方，其立方根爲 x^2+2x+3．參考 § 569 例2．

察知當每新餘數 R_1, R_2, …… 被求得時，以 $3a^2$ 除其首項則得根之次一項．於是在餘式之左方寫 3 倍已得部分根之平方，3 倍已得部分根乘根之新項及新項平方之和，以新項乘此和從餘式減之而得次一餘式．

476　　此法亦可用於含多於一字母之完全立方之多項式（參照 § 571）．

此法亦可用於依 x 升冪排列，且不缺常數項之多項式．設此多項式非完全立方，可由是求得其近似立方根（比較 § 572）．

477　　**數目之立方根．** 可用§575之公式以求數目之立方根．

例． 求 12487168 之立方根．

$$\begin{array}{rr|l}
 & & \quad a \;+\; b+c \\
 & N=12'487'168 & \underline{200+30+2}=232 \\
 & 8\,000\,000 & \\
3a^2= & 120000 \quad 4\,487\,168 & =R_1=N-a^3 \\
3ab= & 18000 & \\
b^2= & 900 & \\
 & \overline{138900} \quad 4\,167\,000 & =(3a^2+3ab+b^2)b \\
3(a+b)^2= & 158700 \quad 320\,168 & =R_2=N-(a+b)^3 \\
3(a+b)c= & 1380 & \\
c^2= & 4 & \\
 & \overline{160084} \quad 320\,168 & =[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c \\
 & 0 & =R=N-(a+b+c)^3.
\end{array}$$

欲求立方小於 N 之一位有效數字之最大數 a_0，先自右向左每三數字一段將 N 分段（設 N 內含有小數則從小數點向右分段），如12'487'168．其 168 及 487 兩段各相當 a 後之一零，

由餘一段 12 得根之首位數字 2，因 2 爲立方小於 12 之最大整數也．故 $a=200$。

其餘演算方法，上式已完全指出．

察知根之每新數字之求得，爲以 3 倍已得根之平方．除適得餘數；如，以 $3a^2$ 除 R_1 得有效數字 b，以 $3(a+b)^2$ 除 R_2 得 c．設由是求得之數字過大，則試以較小之數字．

此法亦可如求平方根之方法化簡之．

非完全立方數之近似立方根，亦可用此法求得．（參照 § 574）．

多項式之高次根． 完全四次方之多項式之四次根可由求其平方根之平方根而得．同理，完全六次方之多項式之六次根，可由求其平方根之立方根而得之． 578

求任何次根，亦可如 §§ 570，575 創立特殊方法．

但 § 569 之一般方法反不必需，實則所以指示求平方根及立方根之特殊方法，如 §§ 570，575 所釋者，僅由於歷史之興趣及其與求數目之平方根及立方根問題之關係而已．

習　題　XXXII

化簡下式：

1. $\sqrt[3]{-\dfrac{27x^6y^{15}}{125a^9z^{12}}}$　　2. $\sqrt{\dfrac{529a^4b^6}{625c^8d^8}}$.

3. $\sqrt[6]{(x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4)^3}$.

用 § 569 或 § 570 求法求下諸式之平方根：

4. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.

5. $x^2-2x^4+6x^3-6x+x^6+9$.

6. $4x^6+12x^5y+9x^4y^2-4x^3y^3-6x^2y^4+y^6$.

7. $4x^2-20x+13+30/x+9/x^2$.

8. $49-84x-34x^2+60x^3+25x^4$.

9. $x^8+2x^7-x^6-x^4-6x^3+5x^2+4x+4$.

10. $(x^2+1)^2-4x(x^2-1)$.

11. $4x^4+9x^2y^2-12x^3y+16x^2-24xy+16$.

12. $x^2/y^2+y^2/x^2+2+2x^2+2y^2+x^2y^2$.

求下列各平方根之近似值至第四項。

13. $1-2x$.　　14. $4-x+3x^2$.

以 § 569 或 § 575 之法，求下列各式之立方根。

15. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$.

16. $27x^{12}+27x^{10}-18x^8-17x^6+6x^4+3x^2-1$.

17. $8x^6-36ax^5+90a^2x^4-135a^3x^3+135a^4x^2-81a^5x+27a^6$.

18. $x^3/y^3+y^3/x^3+3x^2/y^2+3y^2/x^2+6x/y+6y/x+7$.

19. 求 $1-x+x^2$ 式之立方根之近似值第三項。

20. 以 § 569 或 § 578 之法，求 $x^8-4x^7+10x^6-16x^5+19x^4-16x^3+10x^2-4x+1$ 式之四次根。

21. 以 § 569 之法，求 $x^{10}-5x^9+15x^8+30x^7+45x^6+51x^5+45x^4+30x^3+15x^2+5x+1$ 之五次根。

22. 若使 $x^4+6x^3+11x^2+ax+b$ 爲一完全平方，則 a，b，當爲何值?

求下列各數之平方根:

23. 27889.　　24. 2313.61　　25. 583.2225.

26 4149369.　　27. .00320356.　　28. 9.024016.

求下列各數之近似平方根至第三位小數。

29 2.　　30. 55.5.　　31 234.561.

求下列各數之立方根。

32. 1860867.　　33. 167284.151.　　34. 1036 433728.

XII. 無理函數根式與分數指數

根式之化簡

根. 此後字母 $a, b, \cdots\cdots$ 表正數或假定具有正數值之 579
文字式.

又 $\sqrt[n]{a}$ 表 a 之 n 次主根, 卽其 n 次方爲 a 之正數; 換言之, 由公式 $(\sqrt[n]{a})^n = a$ 所定之正數.

再, n 爲奇數時, $\sqrt[n]{-a}$ 表 $-a$ 之 n 次主根, 卽 $-\sqrt[n]{a}$. 後之"根"字皆指主根而言.

註. 此爲根字用法之限制也; 因凡 n 次冪等於 a 之任 580
何數皆爲 a 之一 n 次根, 且此種根通常有 n 個, 嗣後證明之.

如, 因 $2^2=4$ 及 $(-2)^2=4$, 故 2 及 -2 皆爲 4 之平方根. 吾人表主根 2 以 $\sqrt{4}$, 他一根 -2 以 $-\sqrt{4}$.

當 n 爲奇數, a 爲實數時, a 之 n 次根中, 一爲與 a 同號之實數, 其餘則爲虛數.

當 n 爲偶數 a 爲正數時, a 之 n 次根中之二根爲絕對值相同而符號相反之實數, 餘爲虛數.

當 n 爲偶數, 而 n 爲負數時, a 之所有 n 次根皆爲虛數.

於高等數學中 $\sqrt[n]{a}$ 通常表 a 之任何 n 次根, 非如此處之僅表主根也.

根式. 形如 $\sqrt[n]{a}$ 或 $b\sqrt[n]{a}$ 之任何式稱爲根式; n 稱爲根 581
指數, a 爲根底數, b 爲根式之係數.

當 a, b 皆爲有理數或有理式時, $b\sqrt[n]{a}$ 稱爲簡根式.

如 $5\sqrt[3]{4}$ 爲簡根式, 因其根指數 3, 根底數 4, 及係數 5 皆爲實數也.

582　**根式演算之公式**．根式計算法則，基於下列公式，式內 m，n，p，表正整數．

$$1.\quad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

$$2.\quad \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.\qquad 3.\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$4.\quad (\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}.\qquad 5.\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

注意，由公式 1，設根式之根指數與根低指數同乘正整數，或消去其中之任何公因子，根式之値不變；如 $\sqrt[9]{a^6}=\sqrt[3]{a^2}$．此法則與分數化簡法相似甚爲顯然．

以上公式之證明可用定義 $(\sqrt[n]{a})^n=a$，指數定理 $(a^m)^n=(a^m)$，$(ab)^n=a^nb^n$ 及 § 261，3 之等式法則．

設二正數之任何同次冪相等，則該二數亦相等．

由是，

1. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$，因其 n 次方相等．

因 $(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp}$；及 $(\sqrt[n]{a^m})^{n\cdot p}=(a^m)^p=a^{mp}$．

2. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$，因其 n 次方相等．

因 $(\sqrt[n]{ab})^n=ab$；及 $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab$．

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$，因其 n 次方相等．

因 $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n=\frac{a}{b}$；及 $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}$．

4. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$，因其 n 次方相等．

因 $(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$，及 $[(\sqrt[n]{a})^m]^n=[(\sqrt[n]{a})^n]^m=a^m$．

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, 因其 mn 次方相等.

因　$(\sqrt[mn]{a})^{mn}=a$; 及 $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{m\cdot n}=(\sqrt[n]{a})^{n}=a$.

下列示諸公式之應用.

1. $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$.

2. $\sqrt{8ab^3}=\sqrt{4b^2}\cdot\sqrt{2ab}=2b\sqrt{2ab}$.

3. $\sqrt[3]{\dfrac{3c}{d^3e^6}}=\dfrac{\sqrt[3]{3c}}{\sqrt[3]{d^3e^6}}=\dfrac{\sqrt[3]{3c}}{de^2}$.

4. $\sqrt[5]{\sqrt{32x^{15}y^5}}=\sqrt[10]{32x^{15}y^5}=\sqrt{2x^3y}$.

5. $(\sqrt[3]{2xy^2})^2=\sqrt[3]{(2xy^2)^2}=\sqrt[3]{4x^2y^4}=y\sqrt[3]{4x^2y}$.

根式之化簡.　設根式之根底能化爲最簡整式，則此根　583
式之形稱爲最簡. 故得下之化簡根式法，亦卽上述公式之直接推論.

1. 設根底之指數與根指數有公因子，消去其公因子.

如，　$\sqrt[9]{27x^3y^6}=\sqrt[9]{(3xy^2)^3}=\sqrt[3]{3xy^2}$.

2. 設根底任一因子之指數能被根指數除盡，除該指數以根指數而移此因子於根號之外.

如，　$\sqrt[4]{16x^7y^9}=\sqrt[4]{2^4x^4x^3y^8y}=2xy^2\sqrt[4]{x^3y}$.

3. 設根底數爲分式，以適當之最簡式乘其分子分母，使能移分母於根號之外.

如，　$\sqrt[3]{\dfrac{xy}{2z^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{4xyz}{8z^3}}=\dfrac{1}{2z}\sqrt[3]{4xyz}$.

相似根式.　諸根式化爲最簡後，設僅有係數不同則稱　584
爲相似根式.

如，　$\sqrt{4x^3y}$ 及 $\sqrt{81x^5y^3}$ 相似；因其最簡形 $2x\sqrt{xy}$ 及 $9x^2y\sqrt{xy}$，僅有係數之異也.

585　**移根式係數入根號內.** 因 $b\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b^n a}$, 故根式係數可乘其指數以根指數而移入根號之內。

習　題　XXXIII

化次各根式爲最簡之形:

1. $\sqrt{18}$.　2. $\sqrt{588}$.　3. $\sqrt[3]{-27^3}$.　4. $\sqrt[3]{-1000}$.

5. $\sqrt{3/2}$.　6. $\sqrt[3]{3/2}$.　7. $\sqrt[3]{3/4}$.　8. $\sqrt[5]{3/16}$.

9. $\sqrt[5]{25a^5b^{10}c^{15}d^6}$.　10. $\sqrt[6]{128a^2b^4c^8}$.

11. $\sqrt[6]{8x^6y^9z^{15}}$.　12. $\sqrt[3n]{25a^3b^4c^6}$.

13. $\sqrt[3n]{a^nb^{2n}c^{3n}}$.　14. $\sqrt[3]{a^{2n+1}b^{3n+2}c^{4n}}$.

15. $\sqrt{x^2y^2-x^2z2}$.　16. $\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}$.

17. $\sqrt[3]{x^6-x^3y^3}$.　18. $\sqrt[4]{a^4b^4-2a^3b^5+a^2b^6}$.

19. $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{32\,ab^2}}$.　20. $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$.

21. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{9(x+1)^2}}$.　22. $\sqrt[3]{1-\dfrac{a^3}{b^3}}$.

23. $\sqrt[3]{\dfrac{c^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+2}}}$.　24. $\sqrt{\dfrac{a^2x^2}{b^3}-\dfrac{2ax}{b^2}+\dfrac{1}{b}}$.

移次各係數於根號內.

25. $3a\sqrt{3a}$.　26. $\dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$.　27 $3ax\sqrt[4]{1/27a^3x^3}$.

試證次之各組根式爲相似.

28. $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$ 與 $\sqrt{1/8}$.　29. $\sqrt[3]{24}$. $\sqrt[3]{192}$, 與 $\sqrt[3]{8/9}$.

30. $\sqrt{(x^3-y^3)(x-y)}$ 與 $\sqrt{x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4}$.

根式之運算

586　**加法及減法.** 得下法則:

欲將二或二以上根式之代數和化爲最簡式, 須先化簡各根式, 然後將相似者之係數相加以合併(集項)之.

例．加$\sqrt{16a^2b}$, $-\sqrt{9a^2b}$, $3\sqrt{2}$, 及$-2\sqrt{1/2}$.

今　$\sqrt{16a^2b}-\sqrt{9a^2b}+3\sqrt{2}-2\sqrt{1/2}$.

$$=4a\sqrt{b}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{2}-\sqrt{2}=a\sqrt{b}+2\sqrt{2}.$$

注意二不相似根式之和，不能化爲一根式．

如，$\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 不能 $=\sqrt{x+y}$，x 或 y 爲零者除外；因平方之，得 $x+y+2\sqrt{xy}=x+y$,

$\therefore\ 2\sqrt{xy}=0$,　$\therefore\ xy=0$,　$\therefore$ 必 $x=0$ 或 $y=0$.

變諸根式爲同根指數．　由公式 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$ 永能變二或二以上之根式，爲同根指數之同值根式 其最低公指數，即已知諸根指數之最小公倍數． 587

例．　變 $\sqrt[6]{a^5}$ 及 $\sqrt[8]{b^3}$ 爲最低同指根數．

根指數 6 與 8 之最小公倍數爲 24，故 $\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[24]{a^{20}}$ 及 $\sqrt[8]{b^3}=\sqrt[24]{b^9}$.

根式之比較．　欲比較諸已知根式之大小，須先變之爲同根指數． 588

例 *1*.　比較 $\sqrt[15]{16}$, $\sqrt[10]{6}$, 及 $\sqrt[6]{3}$.

根指數之最小公倍數爲 30；又

$\sqrt[15]{16}=\sqrt[30]{16^2}=\sqrt[30]{256}$; $\sqrt[10]{6}=\sqrt[30]{6^3}=\sqrt[30]{216}$;

$\sqrt[6]{3}=\sqrt[30]{3^5}\sqrt[30]{243}$.

由是，因$256>243>216$，故 $\sqrt[15]{16}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[10]{6}$.

例 *2*.　比較 $2\sqrt{3}$ 及 $\sqrt[3]{41}$.

移第一根式之係數於根號內，§ 585，然後變二根式爲同根指數 6，得

$2\sqrt{3}=\sqrt{12}=\sqrt[6]{12^3}=\sqrt[6]{1728}$; $\sqrt[3]{41}=\sqrt[6]{41^2}=\sqrt[6]{1681}$.

由是，因 $1728>1681$，故 $2\sqrt{3}>\sqrt[3]{41}$.

乘法及除法．　從公式 589

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ 及\ \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}$$

推出以下法則：

以他一根式乘或除一根式，必需時，先變之爲最小同根指數之根式，然後分別求係數及根底數之積或商.

例 1. 以 $2\sqrt[3]{x^2y^2}$ 乘 $4\sqrt{xy}$.

$4\sqrt{xy}\cdot2\sqrt[3]{x^2y^2}=8\sqrt[6]{x^3y^3}\cdot\sqrt[6]{x^4y^4}=8\sqrt[6]{x^7y^7}=8xy\sqrt[6]{xy}.$

例 2. 除 $6\sqrt{xy}$ 以 $2\sqrt[4]{xy}$.

$6\sqrt{xy}/2\sqrt[4]{xy}=3\sqrt[4]{x^2y^2}/\sqrt[4]{xy}=3\sqrt[4]{xy}.$

590 **乘方.** 從公式

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m} \text{ 及 } \sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$$

導出下法:

求形如 $\sqrt[n]{a^q}$ 之根式之 m 次方，先消去 m 及其根指數之公因子，再以 m 之其餘因子乘根底指數.

例. 求 $2\sqrt[6]{xy^2}$ 之 9 次方.

$(2\sqrt[6]{xy^2})^9=2^9(\sqrt[6]{xy^2})^9=128(\sqrt{xy^2})^3=128\sqrt{x^3y^6}$

$=128xy^3\sqrt{x}.$

591 **開方.** 從公式

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a} \text{ 及 } \sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$$

導出下法:

求形如 $\sqrt[n]{a^q}$ 之根式之 m 次根，先消去 m 及根底指數所有的公因子，再以 n 之其餘因數乘數式之根指數.

例 1. 求 $\sqrt[5]{x^2y^4}$ 之六次根.

$$\sqrt[6]{\sqrt[5]{x^2y^4}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{xy^2}}=\sqrt[15]{xy^2}.$$

例 2. 求 $54a\sqrt{b}$ 之立方根.

$\sqrt[3]{54a\sqrt{b}}=\sqrt[3]{3^3\cdot2a\sqrt{b}}=3\sqrt[3]{\sqrt{4a^2b}}=3\sqrt[6]{4a^2b}.$

簡根代數式． 僅含簡根式之代數式名曰簡根代數式． 592
如$\sqrt{a}+\sqrt{b}$卽簡根代數式．若式內不含分母有根式之分數，則名之曰整簡根代數式．

由適述法則，整簡根代數式之和，差，積，乘方能變爲簡根式之代數和．由 § 607 可知於商亦然．但簡根代數式之根，如$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$，通常不能化爲簡根代數式．

例 *1*． 以$2\sqrt{3}-\sqrt{10}$乘$3\sqrt{6}+2\sqrt{5}$．

$$(3\sqrt{6}+2\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{10})=6\sqrt{18}+4\sqrt{15}-3\sqrt{60}$$
$$-2\sqrt{50}=8\sqrt{2}-2\sqrt{15}.$$

例 *2*． 平方$\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$．

$$(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2=2+2\sqrt{2}\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}=2+4\sqrt[6]{2}+2\sqrt[3]{2}.$$

習　題　XXXIV

將下列諸式化成最低公根指數．

1． $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[9]{3}$, 及 $\sqrt[12]{3}$．　　2． $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{2a^3b^2}$, 及 $\sqrt[6]{7b^5}$．

比較下式．

3． $3\sqrt{2}$ 及 $2\sqrt[3]{3}$．　　4． $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, 及 $\sqrt[4]{5}$．

將下列各式化成最簡之簡根式．

5． $\sqrt{35}\div\sqrt{7/5}$．　　6． $10\div\sqrt{5}$．　　7． $4\div\sqrt[3]{2}$．

8． $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$．　　9． $\sqrt[3]{60}\cdot\sqrt[3]{90}\cdot\sqrt[3]{15}$．

10． $2\sqrt{3}\div3\sqrt{2}$．　　11． $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$．

12． $\sqrt[6]{3}\div\sqrt[4]{5}$．　　13． $2\sqrt{35}\cdot\sqrt{65}\div\sqrt{91}$．

14 $\sqrt{a^3b^5c^7}\cdot\sqrt[3]{a^2b^4c^3}$．　　15． $\sqrt[12]{a}\,\sqrt[18]{a}$．

16． $\sqrt{a^3b^3}\div\sqrt[6]{a^5b^5}$．　　17． $\sqrt[3]{a^2bc^2}\cdot\sqrt[3]{ab^2c^4}$．

18. $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$.　　19. $\sqrt[3]{a/b}\div\sqrt[2]{a/b}$.

20. $\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{ab^5}\div(\sqrt[12]{a^7b^9}\cdot\sqrt[15]{a^{12}b^{14}})$.

21. $(\sqrt{12})^3$.　　22. $(\sqrt[3]{a^2})^6$.　　23. $(2\sqrt[4]{xy^2z^3})^6$.

24. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}$.　　25. $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$.　　26. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^3b^6/c^9}}$

27. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}$.　　28 $\sqrt{2\sqrt{2}}$　　29. $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$.

30. $\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}$.　　31. $\sqrt[2n]{\sqrt[n]{a^m}}$.　　32. $(\sqrt[np]{\sqrt[m]{a}})^{mnp}$.

化簡次各根式至可能步驟.

33. $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{147}$.

34. $\sqrt{125}+\sqrt{175}-\sqrt{28}+\sqrt{1/20}$.

35. $\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{1/2}$.

36. $\sqrt{a/bc}+\sqrt{b/ca}+\sqrt{c/ab}$.

37. $\sqrt{50}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{7\frac{1}{9}}$.

38. $\sqrt{(a+b)^2c}-\sqrt{a^2c}-\sqrt{b^2c}$.

39. $\sqrt{ax^3+6ax^2+9ax}-\sqrt{ax^3-4a^2x^2+4a^3x}$.

40. $(x+y)\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}-(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2-y^2}}$.

41. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\cdot\sqrt{6}$.

42. $(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{14})\div\sqrt{2}$.

43. $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{15})$.

44. $\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.

45. $(1+\sqrt{3})^3$.　　46. $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1)$.

分指數及負指數

593　於若干演算中,利用分指數計算根式,甚爲省力.

以前附於 a^n 之意義,爲僅設 n 表正整數,演算此種式之法則,即

1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$,　*2.* $(a^m)^n=a^{mn}$,　*3.* $(ab)^n=a^nb^n$,

於代數中爲最簡,於是問題生焉;設 n 非爲正整數,能否尋得 a^n 之適用意義,依然適於此等法則?

定義 $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$．取 $a^{\frac{1}{2}}$為例，設其可能，茲求此符號 **594**
適合於法則 1,2,3 之意義．

若能適合於法則 1，必得

$$(a^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a,$$

卽 $a^{\frac{1}{2}}$意必爲$\sqrt{a}$或$-\sqrt{a}$．

取二意義中之較便者，而定$a^{\frac{1}{2}}$之定義爲$\sqrt{a}$．

由是求得充分滿足設適合$a^{\frac{1}{2}}$之意義之條件之一．

同理定$a^{\frac{1}{3}}$之意義同於$\sqrt[3]{a}$，$a^{\frac{2}{3}}$同於$\sqrt[3]{a^2}$，總之．
$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$卽同於$a^p$之$q$次主根．

注意，因 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[qm]{a^{pm}}=a^{\frac{pm}{qm}}$，故當 p/q 易以同值分數時，$a^{\frac{p}{q}}$之值不變．

如　$a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{6}{9}}$；又 $a^2=a^{\frac{4}{2}}=a^{\frac{6}{3}}$．

定義 $a^0=1$．如，適合於法則 1，必 **595**

$$a^0a^m=a^{0+m}=a^m,$$

故
$$a^0=a^m/a^m=1.$$

因是界說 a^0 定義 a^{-s} 爲 1．

定義 $a^{-s}=1/a^s$．最後，令合於法則 1，必得，§ 595， **596**

$$a^{-s}\cdot a^s=a^{-s+s}=a^0=1,$$

故
$$a^{-s}=1/a^s.$$

如，由定義，$a^{-3}=1/a^3$，$a^{-\frac{5}{6}}=1/a^{\frac{5}{6}}=1/\sqrt[6]{a^5}$．

因之界說 a^{-s} 爲 $1/a^s$．

餘待證者爲如此求得之 $a^{\frac{p}{q}}$，a^0 及 a^{-s} 之意義完全適合於指數諸法則．

定理 1．指數律 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 於 m，n 之一切有理值均能適用． **597**

使 p,q,r,s 表任何正整數．於是

1. 設 $m=p/q$ 及 $n=r/s$，由 § 582 得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^{n}}\cdot\sqrt[s]{a^{r}}=\sqrt[qs]{a^{ns}}\cdot\sqrt[qs]{a^{qr}}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}}=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

2. 設 $m=-p/q$, $n=-r/s$，由 *1* 式得

$$a^{-\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}}=a^{-\frac{p}{q}+(-\frac{r}{s})}.$$

3. 設 $m=p/q,n=-r/s$，及 $p/q>r/s$ 時，得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^{p}}/\sqrt[s]{a^{r}}=\sqrt[qs]{a^{ps}}/\sqrt[qs]{a^{qr}}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps-qr}}=a^{\frac{ps-qr}{ps}}=a^{\frac{p}{q}+(-\frac{r}{s})}.$$

4. 設 $m=p/q$, $n=-r/s$ 及 $p/q<r/s$ 時，由 *3* 式得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}}=a^{\frac{p}{q}+(-\frac{r}{s})}.$$

598 **定理 2.** 定律 $(a^{m})^{n}=a^{mn}$ 適用於 m 及 n 之任何有理值．

因使 m 表任何有理數，於是

1. 設 n 爲正整數時，由 § 597 得

$$(a^{m})^{n}=a^{m}\cdot a^{m}\cdots\text{至 } n \text{ 因子}=a^{m+m+\cdots\text{至}n\text{項}}=a^{mn}.$$

2. 設 $n=p/q,p$ 及 q 爲正整數時，由 *1* 式，得

$$(a^{m})^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(a^{m})^{p}}=\sqrt[q]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{q}}=a^{m\cdot\frac{p}{q}}.$$

3. 設 $n=-s$, s 爲任何正有理數時，由式 1,2 得

$$(a^{m})^{-s}=\frac{1}{(a^{m})^{s}}=\frac{1}{a^{ms}}=a^{-ms}=a^{m(-s)}.$$

定理 3. 定律$(ab)^n=a^nb^n$適用於n之一切有理值. **599**

1. 使$n=p/q$, p及q表正數.於是

$$(ab)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{a^pb^p}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[q]{b^p}=a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}.$$

2. 使$n=-s$, s表任何正有理數，整數或分數. 於是由式*1*，

$$(ab)^{-s}=\frac{1}{(ab)^s}=\frac{1}{a^sb^s}=a^{-s}b^{-s}.$$

應用. 下列解釋分指數及負指數之用途，設用此符號，常能減少根式演算之繁雜. **600**

例 *1.* 化簡$\sqrt{a/\sqrt[3]{a}}$.

$$\sqrt{a/\sqrt[3]{a}}=(aa^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}.$$

例 *2.* 化簡　$\sqrt[4]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt[3]{a^2b^2}$.

$$\sqrt[4]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt[3]{a^2b^2}=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}$$
$$=a^{\frac{1}{4}+\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{3}{12}}=\sqrt[12]{a^5b^3}.$$

例 *3.* 展開$(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}})^3$.

今

$$(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}})^3=(x^{\frac{2}{3}})^3+3(x^{\frac{2}{3}})^2y^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}(y^{-\frac{2}{3}})^2+(y^{-\frac{2}{3}})^3$$
$$=x^2+3x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{3}}+y^{-2}.$$

例 *4.* 以$x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$除$x-y$.

如 § 401 排列此算法，得

$$\begin{array}{l|l}
x-y & x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \\ \hline
\underline{x+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}} & x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}} \\
-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y & \\
\underline{-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y} &
\end{array}$$

故其商為$x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$.

習 題 XXXV

試不用根式符號表下式至可能之簡。

1. $\sqrt[12]{a^8}$.　　2. $\sqrt{c^{\frac{1}{7}}}$.　　3. $a^{\frac{3}{5}}/\sqrt[3]{a^{\frac{9}{5}}}$.

4. $b\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[6]{b^5}$.

不以負指數或分指數表之。

5. $a^{\frac{14}{21}}$.　　6. $c^{-1.5}$.　　7. $(d^{\frac{2}{3}})^{-6}$.

8. $(e^{-3\frac{1}{2}})^{-\frac{4}{7}}$.

試用正指數且不用根號表之。

9. $a^{-1}/b^{-3}c^{-2}$.　　10. $x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{y^{-3}}$.

11. $(1/\sqrt{x^{-5}})^{-4}$.　　12. $x^{-2}\sqrt{y^{-3}}/y^{-2}\sqrt{x^{-3}}$.

試不用分母而以最簡式表之。

13. $\frac{a}{bc}-\frac{b^{-1}}{c^{-2}}-\frac{a^{-1}(b^{-1}+c^{-1})}{a^{-2}(b+c)}+\frac{b+c}{b^{-1}+c^{-1}}$.

化次各式成最簡指數之形。

14. $(3\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}}$.　　15. $81^{\frac{3}{4}}$.　　16. $(-27)^{\frac{2}{3}}$.

17. $8^{-\frac{5}{3}}$.　　18. $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{5}{6}}$.　　19. $a^{\frac{2}{5}}a^{-\frac{1}{3}}a^{-\frac{2}{15}}$.

20. $(a^{\frac{3}{2}}b)^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$.　　21. $ab^{-2}/a^{-3}b$.　　22. $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{9}}$.

23. $(a^{-1}b^{-2}c^{3})^{-2}$.　　24. $(-32a^{10})^{\frac{2}{5}}$.　　25. $(-a^{6}b^{-9})^{-\frac{2}{3}}$.

26. $b^{-\frac{4}{3}}\sqrt[12]{b^{-5}}\div b^{-1}\sqrt{b^{-1}}$.　　27. $(a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{bc^{5}})^{\frac{2}{3}}$.

28. $(8a^{-15}/\sqrt{125a^{3}})^{-\frac{2}{3}}$.　　29. $\sqrt{a^{\frac{2}{3}}(bc^{-1})^{-2}}$.

30. $\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt[4]{a^{3}}}$.　　31. $\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{a^{-3}}}\Big/\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\cdot\sqrt[3]{a}}$.

32. $[(x^{x})^{x}]^{x}$.　　33. $(x^{x^2+xy}y^{y^2+xy})^{\frac{xy}{x+y}}$.

34. $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})/(x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})$.

35. 以 $x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{4}}$ 乘 $x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{4}}$.

36. 以 $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{2}}$ 除 a^2-b^3.

37. 展開 $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}})^4$.　　38. 化簡 $[(e^x+e^{-x})^2-4]^{\frac{1}{2}}$.

39. 求 $x^2+4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+4xy+6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+12y^2+9x^{-1}y^3$ 之平方根.

40. 求 $x^3+3x^2+6x+7+6x^{-1}+3x^{-2}+x^{-3}$ 之立方根.

負指數及分指數之二項式定理

設於 §561 二項展開式內

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$

假定 n 爲分數或負值則右方必爲一無終或無窮級數；因係數 $n, n(n-1)/2, \cdots\cdots$ 無一能爲零者. 601

後當證明若 $b<a$，則當 m 無限增大時，此級數首 m 項之和漸近 $(a+b)^n$ 之值以之爲極限；換言之，若所加之項數充分增多，則所得總和之接近於 $(a+b)^n$ 可隨吾人之意願.

意卽當 n 爲分數或負數且 $b<a$ 時，二項式定理仍能適用於 $(a+b)^n$.

例 1.　展開 $(8+x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$ 至四項.

於公式內使 $n=1/3$，$a=8, b=x^{-\frac{1}{2}}$，得

$$(8+x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}+\tfrac{1}{3}\cdot 8^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2}8^{-\frac{5}{3}}(x^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{2\cdot 3}8^{-\frac{8}{3}}(x^{-\frac{1}{2}})^3+\cdots\cdots$$

$$=2+\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{12}-\frac{x^{-1}}{288}+\frac{5x^{-\frac{3}{2}}}{20736}\cdots\cdots$$

例 2.　求 $1/(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}})^2$ 或 $(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}})^{-2}$ 之展開式內之第六

項. 於 § 565, 第 $r+1$ 項之公式內, 使 $n=-2$, $a=a^{\frac{1}{2}}$, $b=x^{\frac{2}{3}}$, $r=5$, 得

$$\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}(a^{\frac{1}{2}})^{-2-5}(x^{\frac{2}{3}})^5=-6a^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{10}{3}}.$$

例 *3*. 展開 $\sqrt{1+x}$ 至四項.

因 $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$, 得 $n=\frac{1}{2}, a=1, b=x$.

故 $$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot3}x^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\cdots\cdots$$

此結果與 § 572, 例 *1* 所得者相同.

例 *4*. 求 $\sqrt{10}$ 之近似值.

$$\sqrt{10}=(3^2+1)^{\frac{1}{2}}=3(1+\tfrac{1}{9})^{\frac{1}{2}},$$

$$3(1+\tfrac{1}{9})^{\frac{1}{2}}=3\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\cdots\cdots\right]$$

$$=3+\frac{1}{6}-\frac{1}{216}+\frac{1}{3888}+\cdots\cdots$$

$$=3+.16666-.00462+.00025+\cdots\cdots$$

$$=3.1623,$$

習　題　XXXVI

展開下式至四項.

1. $(1+x)^{\frac{1}{3}}$.　　2. $(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$.　　3. $\sqrt[3]{(27-2x)^2}$.

4. $(a^m+x)^{\frac{1}{n}}$.　　5. $(a^{-1}-b^{-\frac{1}{2}})^{-4}$.

6. $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})^{-5}$.　　7. $\dfrac{1}{2+3x}$.

8. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{(1+x)^2}}$.　　9 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+3\sqrt{x}}}\right)^3$.

10. 求 $(1+x)^{-3}$ 內之第十項.

11. 求 $(x^{-2}-2y)^{\frac{3}{4}}$ 內之第七項.

12. 求 $(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ 內所含 $x^{\frac{3}{2}}$ 之項.

13. 求 $x^{-\frac{3}{2}}(2+x^{-\frac{1}{6}})^{-8}$ 內所含 x^{-2} 之項.

14. 用 § 601 例 4 內所釋之法，求次式之近似值.

1. $\sqrt{99}$.　　2. $\sqrt[3]{62}$.　　3. $\sqrt[5]{31}$.

有理化因子

有理化因子. 設二已知根式之積爲有理式，則一式稱爲他式之有理化因子. 602

例如，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$, 故 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 爲 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 之有理化因子，反之亦然.

任何含簡根式之一有限式，可證明其僅有一有理化因子. 下節卽從事說明此一般之定理.

二次根函數之有理化因子. 關於 $\sqrt{x}$ 之各有理整式能 603
變爲 $A+B\sqrt{x}$ 之形，A, B 爲關於 x 之有理整式；且 $A+B\sqrt{x}$ 之有一有理化因子 $A-B\sqrt{x}$, 必卽只易 $\sqrt{x}$ 之符號得來之式.

例如，$2(\sqrt{x})^4+3x(\sqrt{x})^3$ 可寫爲 $2x^2+3x^2\sqrt{x}$. 故此式有有理化因子爲 $2x^2-3x^2\sqrt{x}$.

複述上法可得關於任何若干個平方根 $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$, …… 之有理整式之有理化因子. 因設以關於 $\sqrt{x}$ 之有理化因子，乘已知式，再以關於 $\sqrt{y}$ 之有理化因子乘其積，餘類推，可得一完全有理之結果.

例. 求 $1+\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt{xy}$ 之有理化因子.

$$1+\sqrt{y}+\sqrt{x}(1+2\sqrt{y}). \qquad (1)$$

乘(1)以

$$1+\sqrt{y}-\sqrt{x}(1+2\sqrt{y}). \qquad (2)$$

得

$$(1+\sqrt{y})^2-x(1+2\sqrt{y})^2,$$

或

$$1-x+y-4xy+2\sqrt{y}(1-2x). \qquad (3)$$

乘(3)以

$$1-x+y-4xy-2\sqrt{y}(1-2x). \qquad (4)$$

得

$$(1-x+y-4xy)^2-4y(1-2x)^2. \qquad (5)$$

由是因(5)爲完全有理，故(2)及(4)之積爲(1)之有理化因子.

604 **二項根式之有理化因子.** 形爲$\sqrt[p]{a}\pm\sqrt[q]{b}$之式之有理化因子可由下例得之.

例. 求$\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}$之有理化因子.

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}}=(a^2)^{\frac{1}{6}}+(b^3)^{\frac{1}{6}}. \tag{1}$$

但由 § 438, $(a^2)^{\frac{1}{6}}+(b^3)^{\frac{1}{6}}$適可除盡有理式$a^2-b^3$,其商爲 $(a^2)^{\frac{5}{6}}-(a^2)^{\frac{4}{6}}(b^3)^{\frac{1}{6}}+\cdots\cdots-(b^3)^{\frac{5}{6}}$. (2)

故(2)爲(1)之有理化因子.

605 **化分數之分母爲有理.** 形爲A/B之無理式,設B僅含簡根式者,可由以B之有理化因子同乘A及B使之變爲具有理化分母之同值分式.

例 *1*. 有理化 $1/\sqrt[4]{a^3}$之分母.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}=\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{4}}}=\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a}=\sqrt[4]{a}/a.$$

例 *2*. 有理化 $\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}$ 之分母.

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2})^2}{(\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2})(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a})^2}=\frac{x^2+\sqrt{x^4-a^4}}{a^2}.$$

606 計算含根式數字分式之近似値,須先有理化其分母.由是可避免甚多不必需之計算.

例. 求$(1+\sqrt{8})/3-\sqrt{2})$之近似値,至第三位正確小數.

$$\frac{1+\sqrt{8}}{3-\sqrt{2}}=\frac{(1+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=1+\sqrt{2}=2.414\cdots\cdots.$$

根式之除法． 以一根式除他一根式，可先寫其商爲分式之形，再有理化此分式之分母． **607**

例．以 $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 除 $4+2\sqrt{5}$．

$$\frac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{(4+2\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{-3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{(-3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{10})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$=1-\sqrt{2}+\sqrt{5}.$$

一般結果　從 §592 及 §607 可知任一含簡根式之式均能變爲簡根式之代數和． **608**

習　題　XXXVII

求次式之有理化因子．

1. $\sqrt[7]{a^5}$.　　2. $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b^3}$.　　3. $x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}}$.

4. $\sqrt{a}+\sqrt{bc}$　　5. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

6. $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$.　　7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}-\sqrt{u}$.

8. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1$.　　9. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}$.

10. $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b^2}$.　　11. $x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}$.　　12. $x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{2}{3}}$.

13. $1+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$.　　14. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1$.　　15. $3-\sqrt{5}$.

16. $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.　　17. $1+\sqrt[3]{2}$.

18. $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$.　　19. $\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3}$.

化次各式爲具有理數或有理式分母之分數．

20. $\dfrac{1}{\sqrt{a}\ \sqrt[5]{b^2}}$.　　21. $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$.　　22. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{3}}$.

23. $\dfrac{1}{b+\sqrt{b^2-a^2}}$.　　24. $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$.

25. $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.　　26. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

27. $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}}$.　　28. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$.

求次式之近似值至第三位正確小數.

29. $\dfrac{5}{\sqrt{125}}$.　　30. $\dfrac{2+\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$.　　30. $\dfrac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

無理方程式

609 **解無理方程式.** 解無理方程式之通法如下述之法則:

一. 先化此方程式爲有理方程式.

二. 解所得之有理方程式,

三. 於已知方程式內檢驗所得諸解答,棄去不適合者.

因,使 $P=0$ 表已知方程,且 $PR=0$ 表以 P 之有理化因子 R 乘已知方程 P 兩邊而得之有理方程式.由 §341, $PR=0$ 之根爲 $P=0$ 及 $R=0$ 連合之根.試檢驗之於已知方程式,可發現其中何者爲 $P=0$ 之根.

例. 解 $x-7-\sqrt{x-5}=0$.

以有理化因子 $x-7+\sqrt{x-5}$ 乘兩邊.

得 $(x-7)^2-(x-5)=0$,

或化簡之, $x^2-15x+54=0$.

由 §455,解之, $x=9$ 或 6.

以 9 代 x 入 $x-7-\sqrt{x-5}=0$, 得 $9-7-\sqrt{9-5}=0$, 果屬眞確.故 9 爲一根.

但代入 6 得 $6-7-\sqrt{6-5}=0$, 則謬誤矣.故 6 非其根.

但察知 6 爲使有理因子等於 0 得來之方程式 $x-7+\sqrt{x-5}=0$ 之一根;因 $6-7+\sqrt{6-5}=0$ 爲眞故也.

含根式$\sqrt[n]{A}$之方程式，可由集合含$\sqrt[n]{A}$之項於一方，餘項於他方，再兩方自乘至 n 次冪，則關於此根式化爲有理，複施此種演算可將僅含二次根之方程式完全有理化．由 §345 知此方法同於 §609 內所述者，但較爲簡單． 610

例1. 解$\sqrt[3]{\sqrt{x}+a}=\sqrt{b}$.

立方兩邊， $\sqrt{x}+a=b^{\frac{3}{2}}$.

移項且平方， $x=(b^{\frac{3}{2}}-a)^2$

代入已知方程式知其確爲一根．

例2. 解$\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}=9$.

移項， $\sqrt{x-4}=9-\sqrt{x+5}$.

平方， $x-4=81-18\sqrt{x+5}+x+5$.

化簡， $\sqrt{x+5}=5$.

平方， $x+5=25$.

解之， $x=20$.

以 20 代 x 於已知式，得$\sqrt{25}+\sqrt{16}=9$，爲眞．故20爲一根．

註. 1. 由例1內，察知有理化一方程式，僅須有理化其含未知數之項無須去其他根式之根號． 611

2. 亦可知無理方程式可以無根．

例如，方程式 $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}=9$ 卽無根．因試解之不過僅重複例2計算而仍得 $x=20$；而$\sqrt{25}-\sqrt{16}=9$爲不合理也．

3. 有理化形如$\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}=0$（或$\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+E=0$）之方程式之簡單方法可寫爲

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=-\sqrt{C}-\sqrt{D}\text{（或}\sqrt{A}+\sqrt{B}=-\sqrt{C}-E\text{）}$$

再平方兩邊，結果方程式僅含二根式．此可如例2之法而有理化之．

612　**聯立無理方程式．** 欲解此種方程式組，須先將各方程式化爲有理，再將所得有理方程式組解出，最後將所得結果代入已知方程式核驗之．

諸方程式若爲 § 379 內所述之形式，則可用是處所述之解法解之．

例*1*．　解 $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+5}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$，　(1)

$x+2y=17$．　(2)

平方(1)，$x-5+y+5+2\sqrt{xy+5x-5y-25}$

$=x+y+2\sqrt{xy}$，

或　$\sqrt{xy+5x-5y-25}=\sqrt{xy}$．　(3)

平方(3)，且化簡，$x-y=5$．　(4)

解(4)，(2)，　$x=9, y=4$．　(5)

代 $x=9, y=4$ 於(1)，得 $\sqrt{4}+\sqrt{9}=\sqrt{9}+\sqrt{4}$，果爲眞．故 $x=9, y=4$ 爲(1)，(2)之解答．

例*2*．　解 $\sqrt{x+6}+2/\sqrt{y}=4$，　(1)

$2\sqrt{x+6}+6/\sqrt{y}=9$．　(2)

解，求 $\sqrt{x+6}$ 及 $1/\sqrt{y}$，得 $\sqrt{x+6}=3, 1/\sqrt{y}=1/2$．　(3)

從(3)得 $x=3, y=4$，此爲(1)，(2)之解答．

習　題　XXXVIII

解下列方程之 x．

1．$x^{\frac{1}{4}}=4$．　2．$x^{-\frac{1}{2}}=3$．　3．$x^{\frac{2}{3}}=8$．

4．$(\sqrt{2x-1})^{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$．　5．$\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=2$．

6．$\sqrt{ax}+\sqrt{bx}+\sqrt{cx}=d$．　7．$\sqrt{4x^2+x+10}=2x+1$．

8．$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=7$．

9．$\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+1}-\sqrt{9x+10}=0$．

10．$\sqrt{x+1}+\dfrac{x-6}{\sqrt{x+2}}=0$．

11．$\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x-1}=2$．

12．$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}$．

13．$\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}}=2$．

14. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0.$

解下列中之 x, y.

15. $\begin{cases}\sqrt{x+17}+\sqrt{y-2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{y+6}.\\ \sqrt{y-x}=\sqrt{3-x}+\sqrt{y-3}.\end{cases}$

16. $\begin{cases}3\sqrt{x-2y}-\sqrt{x+y-4}=3,\\ \sqrt{x-2y}+2\sqrt{x+y-4}=8.\end{cases}$

17. 試證 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}+\sqrt{x+d}=0$ 可化爲一次有理方程

18. 試證 $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}-\sqrt{ex+f}=0$, 設 $\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{e}=0$ 可化爲一次有理方程.

二次不盡根

不盡根. 數字根式如 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt[3]{5}$, 其根底爲有理而根式之本身爲無理者稱爲不盡.根依根指數之爲 2, 3, ……, 稱之爲二次不盡根.三次不盡根,等等. 613

定理1. 二不相似二次不盡根之積仍爲二次不盡根. 614

設不盡根能變爲最簡形時，其根式因子爲 $\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$. $\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$ 之積爲 $\sqrt{ab}$,除 ab 爲完全平方外, $\sqrt{ab}$ 仍爲不盡根.

但 ab 絕不能爲完全平方,因由假設 a 及 b 表整數各析爲素因數後, a 之每素因數皆不能成雙, b 亦然且至少 a 之因子中之一不同於 b 內之任一因子.

例如, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$, $\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$.

定理2. 兩不等二次不盡根之和或差仍爲無理數. 615

若爲相似不盡根,則此甚爲顯然.

茲令 $\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$ 表兩不相似不盡根.

設其可能，$\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$, (1)

c 爲有理數.

平方(1)之兩方且移項，

則 $$2\sqrt{ab}=c^2-a-b,\quad(2)$$

此爲不可能，因由 § 614 知 $2\sqrt{ab}$ 爲無理，同時 c^2-a-b 爲有理數也.

616 **定理3.** 設 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$, $\sqrt{b}$ 及 $\sqrt{d}$ 爲不盡根，

則 $$a=c,\ b=d.$$

因由假設 $\sqrt{b}-\sqrt{d}=c-a$.

但除 $\sqrt{b}-\sqrt{d}=0$ 及 $c-a=0$ 外此爲不可能，因由 § 615 知 $\sqrt{b}-\sqrt{d}$ 爲無理式不能等於有理式 $c-a$ 也.

故 $$b=d,\ a=c.$$

617 **二項不盡根之平方根.** 已知

$$(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2=x+y\pm2\sqrt{xy}.$$

故設 $a+2\sqrt{b}$ 表已知二項不盡根，且能求出二正有理數 x 及 y，致令

$$x+y=a,\ xy=b\ 者,$$

則 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 爲 $a+2\sqrt{b}$ 之平方根，$\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 爲 $a-2\sqrt{b}$ 之平方根，且此二根均爲二項不盡根.

設此數 x,y 存在，則可由觀察求得之.

例1. 求 $37-20\sqrt{3}$ 之平方根.

變之爲 $a-2\sqrt{b}$ 之形式，$37-20\sqrt{3}=37-2\sqrt{300}$.

但 $$300=25\cdot12;\ 37=25+12.$$

故 $$\sqrt{37-2\sqrt{300}}=\sqrt{25}-\sqrt{12}=5-2\sqrt{3}.$$

例2. 求 $13/12+\sqrt{5/6}$ 之平方根.

$$\frac{13}{12}+\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{13}{12}+\frac{\sqrt{30}}{6}=\frac{13+2\sqrt{30}}{12}.$$

因 $30=10\cdot3$ 及 $13=10+3$，得 $\sqrt{13+2\sqrt{30}}=\sqrt{10}+\sqrt{3}$.

故 $$\sqrt{\frac{13+2\sqrt{30}}{12}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{120}+\sqrt{36}}{12}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

註. 茲得求 x 及 y 之公式如下: 618

由假設 $$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a+2\sqrt{b}}, \qquad (1)$$

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{a-2\sqrt{b}}, \qquad (2)$$

以 (2) 乘 (1)，$x-y=\sqrt{a^2-4b}$. (3)

然 $$x+y=a. \qquad (4)$$

解 (3)，(4)， $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$，$y=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

可知此值僅當 a^2-4b 爲完全平方時爲有理，故於此情形下僅 $a+2\sqrt{b}$ 之平方根爲二項不盡根.

習 題 XXXIX

求次之平方根.

1. $9+\sqrt{56}$
2. $20+2\sqrt{96}$.
3. $32-2\sqrt{175}$.
4. $1+\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.
5. $7-3\sqrt{5}$.
6. $8\sqrt{2}+2\sqrt{30}$.
7. $2(a+\sqrt{a^2-b^2})$.
8. $b-2\sqrt{ab-a^2}$.

化簡次式.

9. $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$.
10. $\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$.

虛數與複數

複數. 因負數之偶次方皆爲正數，故無負數之偶次根之爲實數者，此種根稱爲虛數. 619

虛數之定義及其結合所用之算法，已見於 §§ 217—228，

學者可與此合併讀之.

依定義,

1. 符號 $i=\sqrt{-1}$ 稱爲虛數之單位.

2. 形如 ai 之符號其 a 爲實數者,稱爲純虛數.

3. 形如 $a+bi$ 之符號其 a 及 b 爲實數者,稱爲複數.

4. 二複數僅當其實數部分及其虛數部分各相等時而相等,由是

設 $a+bi=c+di$, 則 $a=c$, $b=d$.

5. 二複數之和,差,積,或商,仍爲複數,(特殊情形爲實數或純虛數)可用通常演算法則及關係式 $i^2=-1$ 而得之.此於任何正整次冪之複數皆眞,因由定義 $(a+bi)^n=(a+bi)(a+bi)\cdots\cdots$至 n 因子而知之.

例*1.* 試求 $5+3i$ 與 $2-4i$ 之和.

$$5+3i+(2-4i)=(5+2)+(3-4)i=7-i.$$

例*2.* 試求 $3+2i$ 與 $6+2i$ 之差.

$$3+2i-(6+2i)=(3-6)+(2-2)i=-3.$$

例*3.* 試求 $1+4i$ 與 $2+3i$ 之積.

$$\begin{aligned}(2+3i)(1+4i)&=2+3i+8i+12i^2\\&=2+3i+8i-12=-10+11i.\end{aligned}$$

例*4.* 試展開 $(1+i)^2$.

$$(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i.$$

例*5.* 試求 x, y 能適合下方程式之實數值.

$$(x+yi)i-2+4i=(x-yi)(1+i).$$

乘出整理之,得

$$-(y+2)+(x+4)i=(x+y)+(x-y)i.$$

令實數及虛數部分相等, § 619, 4,

$$-(y+2)=x+y \text{ 及 } x+4=x-y,$$

解之 $x=6, y=-4.$

於 § § 238－241 內曾示以點表複數之法.稱爲其圖象,及由二次複數之圖象求得二數之和與積之圖象之法則, 學

者試用此於例 *1,3,4*.

共軛虛數. 二複數如 $a+bi$ 及 $a-bi$, 僅實虛二部連結之符號不同者,稱為共軛虛數. 620

二共軛虛數之積為正實數. 621

例如，　$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$.

故分數 $(a+bi)/(c+di)$ 可以分母之共軛數乘分子分母,變之為複數之形. 622

例.以 $2-4i$ 除 $5+7i$.

$$\frac{5+7i}{2-4i}=\frac{(5+7i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}$$

$$=\frac{-18+34i}{20}=-\frac{9}{10}+\frac{17}{10}i.$$

i 之冪. 從方程式 $i^2=-1$ 知 i 之偶次冪為 -1 或 1, i 之奇次冪為 i 或 $-i$. 623

如, $i^3=i^2.\,i=-i$; $i^4=i^3.\,i=-i.\,i=-i^2=1$; 餘類推.

設 n 為任何已知數,求 i^n 之值,先以 4 除 n, 然後依照餘數之為 0, 1, 2, 3, 得 i^n 之值為 $1, i, -1, -i$.

由是 $i^{24}=(i^4)^6=1$; $i^{25}=i^{24}.\,i=i$; 餘類推.

負數之偶次根. -4 有 $2i$ 及 $-2i$ 二平方根;因 $(2i)^2=2^2i^2=-4$, 及 $(-2i)^2=(-2)^2i^2=-4$. 吾人選 $2i$ 為主平方根，且書作 $\sqrt{-4}=2i, -\sqrt{-4}=-2i$. 624

同理任何已知負數 $-a$ 之主平方根為 $\sqrt{a}i$, 卽 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$

由主平方根定義,可知若 $-a$ 及 $-b$ 為任兩負數,則 625

$$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}.$$

因 $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\sqrt{a}i\cdot\sqrt{b}i=i^2\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

故也.

由是，二負數 $-a$, $-b$ 之主平方根之積亦爲其積 ab 之平方根之一，如於實數，則非此積之主平方根．

設以虛數演算須切記法則 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 之增訂．計算前先易符號 $\sqrt{-a}$ 爲 $\sqrt{a}i$ 可避免混亂與錯誤．

例1．　化簡 $\sqrt{-2}\ (\sqrt{-3})^5\cdot(\sqrt{-5})^7$.

$$\begin{aligned}\sqrt{-2}\cdot(\sqrt{-3})^5\cdot(\sqrt{-5})^7&=\sqrt{2}i\cdot(\sqrt{3}i)^5\ (\sqrt{5}i)^7\\&=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3})^5\cdot(\sqrt{5})^7i^{13}\\&=1125\sqrt{30}\,i.\end{aligned}$$

例2．　以 $1+\sqrt{-1}$ 乘 $2+\sqrt{-9}$.

$$(2+\sqrt{-9})\ (1+\sqrt{-1})=(2+3i)(1+i)=-1+5i.$$

626　負數之高級偶次根爲複數，此將於以後證明之．

因　$(1+i)^4=1+4i+6i^2+4i^3+i^4$

$$=1+4i-6-4i+1=-4.$$

故 -4 之四次根之一爲 $1+i$.

627　**複數之平方根．** 此後將更證明複數之一切根爲複數茲求其平方根如下：

因　$(\sqrt{x}\pm i\sqrt{y})^2=x-y\pm 2i\sqrt{xy}$.

故若 $a+bi$ 表已知複數，其 b 爲正數，且能求得兩正數 x 及 y，令

$$x-y=a,\ (1)\ 及\ 2\sqrt{xy}=b,\ (2)$$

則 $\sqrt{x}+i\sqrt{y}$ 必爲 $a+bi$ 之平方根，而 $\sqrt{x}-i\sqrt{y}$ 爲 $a-bi$ 之平方根．

此兩數 x 及 y 可求之如下：

由假設，　$\sqrt{x}+i\sqrt{y}=\sqrt{a+bi}$,　　(3)

$\sqrt{x}-i\sqrt{y}=\sqrt{a-bi}$.　　(4)

以(4)乘(3)，　$x+y=\sqrt{a^2+b^2}$.　　(5)

但由(1)，　$x-y=a.$　(6)

故解(5)及(6)，　$x=\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2},$

$$y=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

因 $\sqrt{a^2+b^2}>a$，故上二值皆爲正數．

例．求 $-1+4\sqrt{5}\,i$ 之平方根．

於此 $a=-1$ 及 $\sqrt{a^2+b^3}=\sqrt{(-1)^2+(4\sqrt{5})^2}=9.$

故 $x=(-1+9)/2=4$ 及 $y=(1+9)/2=5.$

由是 $\sqrt{-1+4\sqrt{5}\,i}=2+\sqrt{5}\,i.$

習　題　XL

化簡下式．

1. $\sqrt{-49}.$　　2. $\sqrt{-18}.$　　3. $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-12}.$

4. $\sqrt{-2^2}.$　　5. $(\sqrt{-2})^2.$　　8. $i^{12}.$

7. $i^{-7}.$　　8. $i^{15}.$

9. $\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{y-x}.$　　10. $(2+\sqrt{-3})(1+\sqrt{-2}).$

11. $(\sqrt{-2})^7(\sqrt{-3})^9.$　　12. $(1+2i)^3+(1-2i)^3.$

13. $\dfrac{a}{\sqrt{-a^2}}-\dfrac{b}{i\sqrt{b^2}}.$　　14. $\dfrac{4+6i}{1+i}+\dfrac{4-6i}{1-i}.$

15. $(\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i})^2.$　　16. $(1+i^3)/(1+i).$

17 $\dfrac{a+bi}{a-bi}.$　　18. $\dfrac{9+3\sqrt{2}\,i}{(3+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}\,i)}.$

19. 以 $1+\sqrt{-3}$ 除 4．

20. 求 -16 之四次根．

21. 求證 $(-1\sqrt{3}\,i)/2$ 爲 1 之立方根．

22. 求證 $(1+i)/\sqrt{2}$ 爲 -1 之四次根．

23. 求適合下列方程 x 及 y 之實値．

$$8+2i+x(i-1)+2yi=(3i+4)(x+y).$$

求次之平方根．

24. $5+12i.$　　25. $2i.$　　26. $4ab+2(a^2-b^2)i.$

XIII. 二次方程式

628 **二次方程式之通式.** 含一未知數 x 之各二次方程式可變形爲.

$$ax^2+bx+c=0,$$

a, b, c 表已知數.

設遇 $b=0$, 此方程式稱爲純二次方程; 設 $b\neq 0$, 則稱爲完全二次方程式.

629 **觀察求根法.** 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲 x 之特值, 由此值能使多項式 ax^2+bx+c 爲零, § 332. 此根之個數有二.

設已知 ax^2+bx+c 之因子, 則亦知 $ax^2+bx+c=0$ 之根. 因此根爲致 ax^2+bx+c 之因子爲零之 x 之值, §§ 253, 341. 設二因子爲 $x-\alpha$ 及 $x-\beta$, 則其二根爲 α 及 β.

例1. 解方程式 $x^2+x-6=0$.

$$x^2+x-6=(x-3)(x-2).$$

因子 $x+3$ 於 $x=-3$ 時爲零, $x-2$ 於 $x=2$ 時爲零. 故二根爲 -3 及 2.

例2. 解 $abx^2-(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)=0$.

用 § 443 法析因式, $[ax-(a+b)][bx-(a-b)]=0$.

故二根爲 $(a+b)/a$ 及 $(a-b)/b$.

於特例, 因 $x^2-q=(x-\sqrt{q})(x+\sqrt{q})$, 故純二次方程式 $x^2-q=0$ 之根爲 $\sqrt{q}$ 及 $-\sqrt{q}$.

又因 $ax^2+bx=(ax+b)x$, 故形爲 $ax^2+bx=0$ 之二次方程式之根爲 $-b/a$ 及 0.

如, $4x^2=9$ 之根爲 $3/2$ 及 $-3/2$; $2x^2-x=0$ 之根爲 0 答 $1/2$; $5x^2=0$ 之根爲 0 及 0.

630 反之, 設根爲已知數如 α 及 β, 求此方程式, 可求 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 之積, 再令此積等於 0.

如, 根爲 -2 及 $1/3$ 之二次方程式爲 $(5+2)(x-1/3)=0$ 或 $3x^2+5x-2=0$.

例1.　解以下二次方程式.

1.　$x^2+2x-8=0$.　　2.　$2x^2-7x+3=0$.

3.　$(2x-1)(x-2)=x^2+2$.

4.　$(x-1)(x-2)=(2x-1)^2$.

例2.　求二次方程式設其根爲

1.　$-2/3,-3/2$.　　2.　$a,-a$　　3.　$1/4,0$.

根之一般公式.　ax^2+bx+c 恆可分解因子;因如 § 444 內所示, 631

$$ax^2+bx+c$$
$$=a\left[x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right].$$

由是,因 $ax^2+bx+c=0$,　(1)

之根,即致 ax^2+bx+c 之因子爲零之 x 之值,故二根爲

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{ 及 }x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

或通常寫爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2}$$

公式(2)必須切記,因可由此僅用代入法,以求得任何二次方程式之根 設此二次方程已變爲(1)式之形.

例.　解　$4x^2+105x=81$.

變之如式(1)　$4x^2+105x-81=0$.

於此　$a=4,b=105,c=-81$.

故　$x=\dfrac{-105\pm\sqrt{105^2+4\cdot4\cdot81}}{8}$, 卽 $\frac{3}{4}$ 或 -27.

設 b 爲偶整數,a 及 c 亦爲整數時,則以用 632

公式　$$x=\frac{-b/2\pm\sqrt{(b/2)^2-ac}}{a}, \tag{3}$$

更爲便利,此由以2除(2)之分子分母得來.

例. 解 $3x^2+56x-220=0.$

於此 $b/2=28$, 代入 (3), 得

$$x=\frac{-28\pm\sqrt{28^2+3.220}}{3}, \text{ 卽 } \frac{10}{3} \text{ 或 } -22.$$

633 任何已知二次式，亦可如下例直接用配方法解之．但此法含不必要之計算，故除非忘記 § 631 之公式時，不用此法．

例. 解 $3x^2-6x+2=0.$

移已知項且以 x^2 之係數除之，

$$x^2-2x=-2/3.$$

配左邊爲完全平方，

$$x^2-2x+1=1/3.$$

開兩邊之平方根，

$$x-1=\pm\sqrt{3}/3,\quad x=(3\pm\sqrt{3})/3.$$

634 上法能以之求當消去分母後爲一二次方程式之任何分數方程式．參考 § § 524－527.

例1. 解 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}.$

消分母且化簡， $2x^2+10x+11=0.$

解之， $$x=\frac{-5\pm\sqrt{3}}{2}.$$

因二値皆不致方程內之任一分母爲零，故二値皆爲已知方程式之根．

例2. 解 $\dfrac{x+3}{x^2-1}+\dfrac{x-3}{x^2-x}+\dfrac{x+2}{x^2+x}=0.$

乘以最低公分母，消去分母且化簡之，得

$$3x^2+2x-5=0, \text{ 由是 } x=1 \text{ 或 } -5/3$$

但 $x=1$ 時首二分母爲零，故 1 不能爲已知方程式之根．$-5/3$ 而爲此方程僅有之根．

習 題 XLI

解下列方程式:

1. $x^2+2x=35$.

2. $4x^2-4x=3$.

3. $x^2=10x-18$.

4. $9x^2+6x+5=0$.

5. $2x^2+3x-4=0$

6. $(2x-3)^2=8x$.

7. $x^2+9x-252=0$.

8. $12x^2-56x-255=0$.

9. $8x^2-82x+207=0$.

10. $15x^2-86x-64=0$.

11. $x^2-3x-1+\sqrt{3}=0$.

12. $x^2-(6+i)x+8+2i=0$.

13. $(x-2)^2(x-7)=(x+2)(x-3)(x-6)$.

14. $\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{x+2}{2x}=2$.

15. $\dfrac{x+1}{x}+1=\dfrac{x}{x-1}$.

16. $\dfrac{3}{2(x^2-1)}+\dfrac{x}{4x+4}=\dfrac{3}{8}$.

17. $\dfrac{3}{2x+1}+\dfrac{1}{4x-2}-\dfrac{2x}{1-4x^2}=\dfrac{7}{8}$.

18. $\dfrac{2x-1}{x-2}+\dfrac{3x+1}{x-3}=\dfrac{5x-14}{x-4}$.

19. $\dfrac{x+1}{x(x-2)}-\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{1}{2x}=0$.

20. $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{4-x}=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{3-x}$.

21. $\dfrac{x+3}{4(x+2)(3x-1)}+\dfrac{2x+1}{3(3x-1)(x+4)}-\dfrac{17x+7}{6(x+4)(x+2)}=0$.

22. $\dfrac{x+7}{2x^2-7x+3}+\dfrac{x}{x^2-2x-3}+\dfrac{x+3}{2x^2+x-1}=0$.

23. $3x^2+(9a-1)x-3a=0$

24. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

25. $c^2x^2+c(a-b)x-ab=0$.

26. $x^2-4ax+4a^2-b^2=0$

27. $x^2-6acx+a^2(9c^2-4b^2)=0$.

28. $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0$.

29. $1/(x-a)+1/(x-b)+1/(x-c)=0$.

30. $\dfrac{(x+a)^2-(x-b)^2}{(x+a)(x-b)}+\dfrac{4ab}{a^2-b^2}=0$.

習題 XLII

1. 求二連續數，其積爲 506.

2. 求二連續數，其平方之和爲 481.

3. 求二連續數，其立方之差爲 91.

4. 求三連續數，其兩兩相乘之積之和爲 587.

5. 由下列條件求一二位數：其二數字之積爲 48，又設此二數易位，則此數少 18.

6. 某分數之分子較分母多 3，又此分數較其倒數多 24/35；求此分數.

7. 某牛販以 1260 元購牛若干頭.途間失其四，其餘以每頭超過買價 10 圓售出，共獲利 260 元.問此人原購牛若干頭?

8. 某人販貨得銀 48 元，而其所得之百分率恰爲該貨原值(以銀元計)之半.問該物原值若干?

9. 若有銀 4000 元以複利儲蓄二年，本利共得 4410 元，其利息爲年複利，問利率爲何?

10. 一人承繼遺產銀 25,000 元，以百分之幾以爲遺產稅，又以較遺產稅率多百分之一之百分率爲世襲地產稅率，如是此人承繼所得僅 22,800 元；其遺產稅率如何?

11. 某人於某種折扣下，以銀 4500 元購價 50 元股票若干張，於溢價三倍其折扣時，除 10 張外，售銀 5850 元.問此人共購股票若干張?

12 一貨車之後輪圓周較前輪圓周長 8 吋，當行路一哩時，後輪較前輪少轉 88 週.求各輪圓周之長度.

13 一正方形周圍鑲以邊，邊之寬度較正方形一邊長度之四分之一少1吋；其面積(以平方吋計)較正方形四邊之長度(以吋計)多 64.求正方形面積及所鑲四邊之面積.

14. 由切去邊長為 2 之正方形之各角成一正八邊形，問此正八邊形之邊長若干？

15 某酒商自一滿裝 63 器之酒桶中取酒若干，復以水注滿，後又取與前次同量之酒，而桶中僅餘 28 器之純酒，問此人每次取若干器？

16 某人乘 A 火車旅行 50 哩，休息 5 分鐘後，乘 B 火車而回，其速率較 A 車每小時快 5 哩，全程共用 $2\frac{1}{9}$ 時；二車之速率為何？

17. 某步行者於一定時間內行 6 哩，若其速率每小時增 2 哩則所須時間少 1/2 小時，求時間及速率。

18. 某步行者在某速率下行 12 哩，後又以每小時較前多行 1/2 哩之速度行 6 哩，若此人以後者之速率行全程，則所須時間少 20 分，問此人行 18 哩共須時若干？

19. 從成直角二路之交點 A，B 二人同時起程，A 以每時 3 哩之速率向一路前進，B 以每小時 4 哩之速率向另一路前進，經過若干時候，二人始相距為 30 哩？

20 A 與 B 所行之路如上述，其速度為每小時 2 及 3 哩。且 A 先 B 2 小時起行，問 B 行若干時後，二人始相距 10 哩？

21. 設自高 a 呎之處以每秒 b 呎之初速上擲一物體，在 t 秒鐘後，其高之公式為 $h=a+bt-16t^2$；當物體垂直擲下時，其對應公式為 $h=a-bt-16t^2$。

(1) 若自地面以每秒 32 呎之初速上擲一物體，試求此物體何時高 7 呎？何時高 16 呎？又此物能否達 17 呎之高度？

(2) 設自高 64 呎之處擲下一物體，其初速為每秒 48 呎，何時能達高 36 呎之處？

(3) 若一物體自高 36 呎之處擲下，何時能達地面？

XIV. 二次方程式之討論

極大值與極小值

635　**根之性質．判別式．** 使 α 及 β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，則由 § 631，

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

根號下 b^2-4ac 稱爲 $ax^2+bx+c=0$ 之判別式．

設係數 a, b, c 爲實數，則二根 α 及 β 之性質可由判別式之符號指出．即

1. 設 b^2-4ac 爲正，二根爲實且相異．

2. 設 b^2-4ac 爲 0，二根爲實且相等．

3. 設 b^2-4ac 爲負，二根爲共軛虛數．

亦可看出

1. 於 $b^2-4ac=0$ 時，ax^2+bx+c 爲完全平方．

2. 設 a 爲正，c 爲負，則二根永爲實根，因由是 b^2-4ac 爲正數也．

3. 設 a, b, c 爲有理，則當且僅當 b^2-4ac 爲完全平方時，二根皆爲有理．

例 *1.* 指明 $x^2-6x+10=0$ 之二根爲虛根．

因 $b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot1\cdot10=-4$，故知其二根爲虛根．

例 *2.* m 爲何值，$mx^2+3x+2=0$ 之根始相等．

必 $3^2-4\cdot m.2=0$，即 $m=9/8$．

例 *3.* 設爲可能，試分析 $y^2+xy-2x^2+11x+y-12$ 之因子．

依 y 之方冪排列多項式，且使之等於 0，得

$$y^2+(x+1)y-(2x^2-11x+12)=0.$$

解之，$$y=\frac{-(x+1)\pm\sqrt{9x^2-42x+49}}{2},$$

即　$y=x-4$，或 $y=-2x+3$．

故由 § 631，

$y^2+xy-2x^2+11x+y-12=(y-x+4)(y+2x-3)$。

注意，僅於 $9x^2-42x+49$ 之判別式為完全平方時始能分解因子.

根及係數之關係. 設 α 及 β 表 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，由 § 631， **636**

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-\alpha)(x-\beta).$$

以 a 除方程式之兩方，並算出右方之積，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta.$$

因此為恆等式，故兩邊 x 同次冪之係數必等，§ 264，即

$$\alpha+\beta=-b/a \text{ 及 } \alpha\beta=c/a.$$

此式亦可以 § 631 內 α 及 β 值之相加及相乘證明之. 由是因 α β 為 $x^2+bx/a+c/a=0$ 之根，得定理如下:

在任何形同 $x^2+px+q=0$ 之二次方程式內，x 之係數變號後等於二根之和，常數項等於二根之積.

如二次方程式 $6x^2+x=2$，即 $x^2+x/6-1/3=0$，其二根之和為 $-1/6$，二根之積為 $-1/3$.

例 *1.* 解 $9x^2-10x+1=0$.

因 $9-10+1=0$，故其一根顯然為 1. 又因二根之積為 $1/9$，則知他一根為 $1/9\div 1$ 或 $1/9$.

例 *2.* 求其根為三倍 $3x^2+8x+5=0$ 之根之方程式.

以 α 及 β 表 $3x^2+8x+5=0$ 之根.

於是 $\alpha+\beta=-8/3$ 及 $\alpha\beta=5/3$.

故所求之方程式為

$$x^2-(3\alpha+3\beta)x+3\alpha\cdot 3\beta$$
$$\equiv x^2-3(\alpha+\beta)x+9\alpha\beta=x^2+8x+15=0.$$

根之對稱函數. $\alpha+\beta$ 及 $\alpha\beta$ 二式為 α 及 β 二根之對稱函數，§ 540. 所有其他 α 及 β 之有理對稱函數，皆可以此二函數有理式表之。 **637**

因之亦可以此方程式之係數之有理式表之.

因任何此種函數皆可變爲整式對稱函數或二此種函數之商之形式.設整式對稱函數含形如 $k\alpha^p\beta^{p+q}$ 之項,則必含 $k\alpha^{p+q}\beta^p$ 之項, § 542, 故必含 $k\alpha^p\beta^p(\alpha^q+\beta^q)$.

但 $\alpha^p\beta^p=(\alpha\beta)^p$,且由連用二項式定理可指出 $\alpha^q+\beta^q$ 能以 $\alpha+\beta$ 及 $\alpha\beta$ 之方冪表之.

如,因 $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$,得 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$.

同法得 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

例. $x^2+px+q=0$ 之根爲 α 及 β; 試以 p 及 q 表 $1/\alpha+1/\beta$ 及 $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$.

$1/\alpha+1/\beta=(\alpha+\beta)/\alpha\beta=-p/q$,

$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]=q(p^2-2q)$.

638 **無限大根.** 設 $ax^2+bx+c=0$ 之係數不爲常數而爲變數,於是設 a 漸近於 0 爲極限,則二根之一必漸近於∞;又設 a, b (除 c 外)皆漸近於 0, 則二根皆漸近於 ∞.

因根之公式爲

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

以 $-b-\sqrt{b^2-4ac}$ 乘 α 之分子分母, $-b+\sqrt{b^2-4ac}$ 乘 β 之分子分母. 得

$$\alpha=-\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4a}},\ \beta=-\frac{2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

由 §§ 203, 205, 設 $a \doteq 0$, 則 $\sqrt{b^2-4ac}\doteq b$.

故 設 $a\doteq 0$, 則 $\alpha\doteq -c/b$ 及 $\beta\doteq\infty$,

又 設 $a\doteq 0$, 及 $b\doteq 0$, 則 $\alpha\doteq\infty$, $\beta\doteq\infty$.

此結論通常述之如次, § 519:

設 $ax^2+bx+c=0$ 之係數 a 等於 0, 則其一根漸成無限大,設 a 及 b (但非 c)同時等於 0, 則二根均漸成無限大.

極大值與極小值. 設 y 爲 x 之函數, § 278. 當 x 之值 639
連續增加時, y 之值有時遞增至某定值 m 後開始減小; 或遞減至某定值 m' 後又開始增加. 於是稱 m 爲 y 之極大值, 稱 m' 爲其極小值.

如. 當 $x=1$ 時, $y=(x-1)^2-4$, 有一極小值 -4. 因設 x 從小於 1 之值漸增時, $(x-1)^2$ 漸次減小至 0, 然後又漸次增大.

同理 $y=4-(x-1)^2$ 於 $x=1$ 時有一極大值 4.

任一實數係數之二次三項式 ax^2+bx+c 有一極大值或 640
極小值, 可如下例求得之.

例 *1.* 求 $y=x^2+6x-7$ 極大值或極小值.

由配方法, $x^2+6x-7=(x+3)^2-16$.

故於 $x=-3$ 時, y 有一極小值 -16.

例 *2.* 分已知線爲兩設, 使其所成矩形之面積爲最大.

使已知線之長爲 $2a$, x 及 $2a-x$ 爲所分兩線段之長, y 爲其所成矩形之面積.

於是 $y=x(2a-x)=2ax-x^2=a^2-(a-x)^2$.

故於 $x=a$ 時 y 有一極大值, 卽當平分已知線時, 此矩形變爲面積爲 a^2 之正方形.

二次三項式或較複雜之函數, 其極大及極小值亦可用下 641
法求得之.

例. 求 $y=(4x^2-2)/(4x-3)$ 之極大值與極小值.

去分母, 求 x, 得

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-3y+2}}{2}=\frac{y\pm\sqrt{(y-1)(y-2)}}{2}.$$

由假設, x 限於實數值, 故 y 僅能取根底 $(y-1)(y-2)$ 爲正數(或 0)時之值, 卽 1 及小於 1, 與 2 及大於 2 之值.

由此知 1 爲 y 之極大值, 2 爲 y 之極小值.

因當 y 增至1時，x 之兩值 $(y-\sqrt{y^2-3y+2})/2$ 及 $(y+\sqrt{y^2-3y+2})/2$ 一漸增而至於 $1/2$，一漸減而至於 $1/2$. 反之故當 x 漸增經過 $1/2$ 時，y 先增至 1，然後漸減.

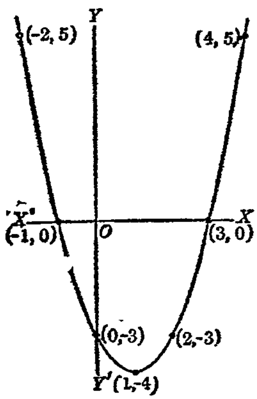
642 **二次三項式之變法.** 已知 $y=ax^2+bx+c$，a 爲正數. 由配方，得

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

故於 $x=-b/2a$ 時，y 有一極小值 $(4ac-b^2)/4a$.

當 x 從 $-\infty$ 增大至 $+\infty$ 時，y 先從 $+\infty$ 減小至 $(4ac-b^2)/4a$，於是復漸增大至 $+\infty$.

例如，使 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$.



當 x 從 $-\infty$ 增至 $+\infty$ 時，y 先由 ∞ 減至 -4，於是復由 -4 增至 ∞.

又於 $x^2-2x-3=0$，卽 $x=-1$ 或 3 時，$y=0$.

又 x 之値在 -1 以前 y 爲正數，以後 y 爲負數，直至 $x=3$ 後始復爲正數.

當

$x=\cdots -3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\cdots$ 時，得

$y=\cdots 12,5,0,-3,-4,-3,0,5,12,\cdots\cdots$

如 §389，畫此諸對值，且過諸點作一曲線可得 $y=x^2-2x-3$ 之圖象.

注意 y 之零值相當曲線及 x 軸之交點，及 y 之極小值相當於曲線最低之一點，此亦爲曲線之轉向點.

習　題　XLIII

1. 問 m 之値若何始令 $(m+2)x^2-2mx+1=0$ 之二根相等?
2. 當 $m=-1$ 時 $(m^2+m)x^2+3mx-2=0$ 之根若何? 又當 $m=0$ 時若何?

3. 設可能，試分解 $3x^2+5xy-2y^2-5x+4y-2$ 之因子.

4. 問 m 之值若何 $x^2-y^2+mx+5y-6$ 之因子始爲可析?

5. $x^2+px+q=0$ 之根爲 α 及 β，求以 p 及 q 表 $(\alpha-\beta)^2$，$\alpha^4+\beta^4$，及 $\alpha/\beta+\beta/\alpha$.

6. $2x^2-3x+4=0$ 之根爲 α 及 β，求 $\alpha/\beta^2+\beta/\alpha^2$ 及 $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ 之值.

7. $x^2+x+2=0$ 之根爲 α 及 β，求根爲 $-\alpha$，$-\beta$；$1/\alpha$，$1/\beta$；2α，2β；$\alpha+1$，$\beta+1$，之方程式.

8. 求次式之極大值與極小值.

1. x^2-8x+3.	2. $2x^2-x+4$.
3. $1+4x-x^2$.	4. $x/(x^2+1)$.
5. $1/x+1/(1-x)$.	6. $(x+1)/(2x^2-1)$.

9. 求已知圓之最大面積內接矩形及最大周界內接矩形.

10. 在船內之一人與岸上極近點相距 2 哩，欲以最小時間至岸上距該極近點 6 哩之處.設其每時能划 4 哩及每時能步行 5 哩，彼當向何點划行?

11. 設以每秒 48 呎之始速自地面向上直擲一物能達高若何?又何時方能達到此高點?參看 303 頁，例 21.

XV. 可用二次方程式解出之高次方程式

可分解因式之方程式. 已知一整數方程式 $A=0$. 設能分解 A 爲諸一次或二次之因子，則使每因子等於零而解之，即可求 $A=0$ 之所有根.因設 $A=BC\cdots$，於是 $A=0$ 同於 $B=0, C=0$，之結合式，見 § 341. 643

例. 解 $x^4+x^2+1=0$.

由§436，$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

故 $x^4+x^2+1=0$ 同値於二方程

$$x^2+x+1=0 \text{ 及 } x^2-x+1=0.$$

解二式，得 $x=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ 或 $\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

例. 解 $x^4-x^3-5x^2-7x+12=0$,

用 § 451 法分解因式．得

$$x^4-x^3-5x^2-7x+12=(x-1)(x-3)(x^2+3x+4).$$

故 $x^4-x^3-5x^2-7x+12=0$, 同値於三方程

$$x-1=0, x-3=0, \text{ 及 } x^2+3x+4=0,$$

其根爲 $1, 3$, 及 $(-3\pm i\sqrt{7})/2$.

例 *3*. 解下列方程式．

1. $6x^3-11x^2+8x-2=0$.

2. $x^4-5x^3+x^2+11x+4=0$.

644 以 $au^2+bu+c=0$ 爲範式之方程式，u 表 x 之某函數．設已知 $u^2+bu+c=0$ 解之求 u 之二根爲 α 及 β 則此方程與二方程式 $u=\alpha$ 及 $u=\beta$ 等値，因由 § 631,

$$au^2+bu+c\equiv a(u-\alpha)(u-\beta).$$

故解 $au^2+bu+c=0$ 求 x，只解方程 $u=\alpha$ 及 $u=\beta$，求 x 可矣．

例 *1*. 解 $3x^4+10x^2-8=0$.

解之求 x^2, $\qquad x^2-2/3$ 或 -4.

故 $\qquad x=\pm\sqrt{6}/3$ 或 $\pm 2i$.

例 *2*. 解 $x^{\frac{2}{3}}+3-10x^{\frac{2}{3}}=0$.

以 $x^{\frac{2}{3}}$ 乘之，$x^{\frac{4}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-10=0$.

解之求 $x^{\frac{2}{3}}$, $\qquad x^{\frac{2}{3}}=2$ 或 -5.

故 $\qquad x=\pm 2\sqrt{2}$ 或 $\pm 5i\sqrt{5}$.

例 *3*. 解 $(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=6$.

此方程式可變爲

$$(x^2+3x)^2+9(x^2+3x)+14=0.$$

解之求 x^2+3x，得二方程式

$$x^2+3x=-2, \text{ 及 } x^2+3x=-7,$$

其根爲 $-1, -2$, 及 $(-3\pm i\sqrt{19})/2$.

例 *4*.　解$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

由其第一項與第四項相乘，及第二項與第三項相乘此方程式之形式變爲

$$(x^3+5x+4)(x^2+5x+6)=120,$$

此可以例 3 之方法解之.

例 *5*.　解$x^4+10x^3+31x^2+30x+5=0$.

完全首二項之平方，得

$$(x^2+5x)^2+6(x^2+5x)+5=0.$$

解之求 x^2+5x，得二方程式

$$x^2+5x=-5 \text{ 及 } x^2+5x=-1,$$

其根爲$(-5\pm\sqrt{5})/2$及$(-5\pm\sqrt{21})/2$.

例 *6*.　解 $8\frac{x^2+2x}{x^2-1}+3\frac{x^2-1}{x^2+2x}-11=0$.

第二分式爲第一分式之倒數，以第一分式方程式兩邊，得

$$8\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)^2-11\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)+3=0.$$

解之求$(x^2+2x)/(x^2-1)$，得二方程式

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1}=-1 \text{ 及 } \frac{x^2+2x}{x^2-1}=\frac{3}{8},$$

其根爲　　　$-1/2$ 及 -3, $-1/5$.

因未消去任一分母，故所得x之值，皆爲已知方程式之根.

例 *7*.　解下列方程式:

1.　$3x^4-29x^2+18=0$.　　　*2*.　$x^4-6x^3+8x^2+3x=2$.

3.　$(x-a)(x+2a)(x-3a)(x+4a)=24a^4$.

4.　$(4x^2+2x)/(x^2+6)+(x^2+6)/(2x^2+x)-3=0$.

倒數方程式.　當以 $1/x$ 代 x 並消去分母而不變之方程 645
式.此種方程謂之倒數方程，設按 x 之降冪排列此種方程之各項，則其第一及第末項之係數相等，第二項及倒數第二項之係數亦等，餘類推；或此種每對之係數絕對值相同而符號相反.

例如，　　$2x^4+3x^3+4x^2+3x+2=0$

及　　　$x^5-2x^4+4x^3-4x^2+2x-1=0$

即爲倒數方程式.

四次倒數方程式可變爲二次方程之形式並可解之如下：

例 *1.* 解 $2x^4-3x^3+4x^2-3x+2=0$.

合併同係數項並以 x^2 除之，則原方程式變爲

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

因 $x^2+1/x^2=(x+1/x^2)-2$，故此方程式又可變爲

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

解之求 $x+1/x$，得二方程式

$$x+\frac{1}{x}=0 \text{ 及 } x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2},$$

其根爲 $i, -i$; $(3\pm i\sqrt{7})/4$.

任一奇次倒數方程式皆有 1 或 -1 之根；又設提出 $x+1$ 及 $x-1$ 之因子，則降低之方程式，亦必爲倒數方程式，故三次及五次倒數方程亦可用二次方程式解之.

例 *2.* 解 $2x^3-3x^2-3x+2=0$.

遷項合併，$2(x^3+1)-3(x^2+x)=0$.

因二項皆可以 $x+1$ 除盡，故上方程式同於二方程式

$$x+1=0 \text{ 及 } 2x^3-5x+2=0,$$

其根爲　-1，及 2，$1/2$.

例 *3.* 解 $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$.

集項，　$(x^5-1)-5x(x^3-1)+9x^2(x-1)=0$.

除以 $x-1$，知此方程式同於

$x-1=0$ 及 $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$,

其根爲 1，及 $(1\pm i\sqrt{3})/2$，$(3\pm\sqrt{5})/2$.

例 *4*. 解以下方程式.

1. $x^3-2x^2+2x-1=0$. *2*. $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$.

3. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

二項方程式. 此爲形似 $x^n+a=0$ 之方程式.當 x^n+a 能析爲一次或二次之因子時,則可照已述方法解之. 646

例 *1*. 解 $x^3-1=0$.

因 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, 故方程式 $x^3-1=0$ 同値於二方程式

$$x-1=0 \text{ 及 } x^2+x+1=0.$$

其根爲 $x=1$或$(-1\pm i\sqrt{3})/2$.

例 *2*. 解 $x^5-32=0$.

由使 $x=\sqrt[5]{32}y=2y$, 從 $x^5-32=0$ 得 $y^5-1=0$.

由 §§ 438,643, 知 $y^5-1=0$ 同値於方程式

$$y-1=0 \text{ 及 } y^4+y^3+y^2+y+1=0.$$

解之, $y=1, (-1\pm\sqrt{5}+i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/4$,

或 $(-1\pm\sqrt{5}-i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/4$.

故 $x=2y=2, (-1\pm\sqrt{5}+i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/2$,

或 $(-1\pm\sqrt{5}i-\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/2$.

用此法可變任何二項方程式 $x^n\pm a=0$ 爲倒數方程式之形式 $y^n\pm1=0$.

例 *3*. 解以下方程式.

1. $x^3+8=0$. *2*. $x^4+1=0$. *3*. $x^6+1=0$.

以上諸例說明定理: 任何數皆有 n 個 n 次根, 如 1 之立方根爲適合方程式 $x^3=1$ 之任何數; 並由例 *1*, 得此三數爲 $1, (-1+i\sqrt{3})/2$ 及 $(-1-i\sqrt{3})/2$. 647

無理方程式. 通常解無理方程式, 均先使其有理化, § 6 9. 但以下將指出某種方程式可以較簡方法解之,無論用何法解之皆須注意於求得未知數之値爲已知方程式之根以前,必須加以驗算. 648

例 *1*. 解$\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0$.

遷項, $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{5x-6}$.

自乘並化簡, $\sqrt{(2x-3)(3x-5)}=1$.

自乘並化簡, $6x^2-19x+14=0$.

解之, $x=2$ 或 $7/6$.

於已知方程式內驗算此 x 之值, 知 2 爲其一根而 7/6 則否.

亦可用 § 603 方法使已知有理化, 由是發現

$-4(6x^2-19x+14)$恆等於

$$(\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5})(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5x-6}-\sqrt{3x-5}).$$
$$(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5})(\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}-\sqrt{3x-5}).$$

x僅有二値能使 $6x^2-19x+14$ 等於零, 而 2 可令右邊之第一因子,等於 0, 第二因子因他一値 7/6 而化零. 故 x 無値可使第三第四因子化零.

例 *2*. 解$\sqrt{4x+3}+\sqrt{12x+1}=\sqrt{24x+10}$.

僅含一根式之方程式可以此根式爲未知數, 依二次方程式解之,然後再解此根式.

例 *3*. 解 $2x^2-6x-5\sqrt{x^2-3x-1}-5=0$.

須注意根號外 x 之諸項二倍根號下 x 之項, 玆寫原方程式爲

$$2(x^2-3x-1)-5\sqrt{x^2-3x-1}-3=0.$$

解之求 $\sqrt{x^2-3x-1}$,得二方程式

$\sqrt{x^2-3x-1}=3$, 及 $\sqrt{x^2+3x-1}=-1/2$.

第二方程式必須摒棄,因由 § 579 之規定知形似 $\sqrt{a}$ 之根式不能有負値也.

平方第一方程式, 得

$$x^2-3x-1=9,$$

其根爲 5 或 -2.

於已知方程式內驗算 5 及 -2, 知二者皆爲其根.

例 *4*. 解 $2x^2-14x-3\sqrt{x^2-7x+10}+18=0$.

有時可化方程式之兩邊爲完全平方，或一邊爲完全平方，他一邊爲常數.

例 5. 解 $4x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}=9$.

此方程式可寫爲

$$3x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}+x^2=9.$$

左邊爲一完全平方，兩邊開方，得二方程式：

$$\sqrt{3x^2+x}+x=3, \text{ 及 } \sqrt{3x^2+x}+x=-3.$$

解之 $x=1,\ -9/25$ 或 $(\pm\sqrt{97})/4$.

核算結果知僅 1 及 $-9/2$ 爲已知方程式之根.

有時各項經適當之集合後，可由一無理公因子.

例 6. 解 $\sqrt{x^2-7ax+10a^2}-\sqrt{x^2+ax-6a^2}=x-2a$.

式內首兩項及 $x-2a$ 皆含 $\sqrt{x-2a}$ 之因子.

提出此因子，知此方程式同於

$$\sqrt{x-2a}=0 \text{ 及 } \sqrt{x-5a}-\sqrt{x+3a}=\sqrt{x-2a}.$$

解二方程式得 $x=2a,\ -10a/3$, 或 $6a$.

由核算而知僅 $2a$ 及 $-10a/3$ 爲已知方程式之根.

例 7. 解 $\sqrt{3x^2-5x-12}-\sqrt{2x^2-11x+15}=x-3$.

設方程式之一項或多項爲具無理分母之分數，常以先有理化其分母爲佳.

例 8. 解 $(\sqrt{x}+\sqrt{x-3})/(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})=2x-5$.

有理化左邊之分母並化簡之，得

$$\sqrt{x^2-3x}=2x-6$$

解之 $x=3$ 或 4.

由核算知 3 及 4 皆爲已知方程式之根.

例 9. 解 $(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})/(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1})=x-3$.

習　題　XLIV

解下列方程：

1. $4x^4-17x^2+18=0$.　　2. $3x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{3}{4}}=7$.

3. $(x^2-4)(x^2-9)=7x^2$.　　4. $(2x^2-x-3)(3x^2+x-2)^2=0$.

5. $x^4+x^3+x^2+3x-6=0$.　　6. $x^4-2x^3+x^2+2x-2=0$.

7. $(3x^2-2x+1)(3x^2-2x-7)+12=0$.

8. $x^4-12x^3+33x^2+18x-28=0$.　　9. $4x^4+4x^3-x^2-x-2=0$.

10. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$.　　11. $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$.

12. $x^5-11x^4+36x^3-36x^2+11x-1=0$.

13. $x^5-243=0$.　　14. $(2x-1)^3=1$.

15. $(1+x)^3=(1-x)^3$.　　16. $(x-2)^4-81=0$.

17. $(a+x)^3+(b+x)^3=(a+b+2x)^3$.

18. $(a-x)^4-(b-x)^4=(a-b)(a+b-2x)$.

19. $\dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}-3\dfrac{4x^2+6x-1}{x^2+3x+1}-2=0$.

20. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}$.

21. $3x^2-2x+5\sqrt{3x^2-2x+3}+9=0$.

22. $4x^2-2x-1=\sqrt{2x^2-x}$.　　23. $\sqrt{3-x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{5-2x}$.

24. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=0$.

25. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}-x=\sqrt{\dfrac{6}{x}}$　　26. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.

27. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2+3x}=0$.　　28. $\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt{x}+6\sqrt[4]{x}=0$.

29. $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}-3\sqrt{\dfrac{x-2}{2x-5}}+2=0$.　　30. $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=x-3$.

31. $\sqrt{5x^2-6x+1}-\sqrt{5x^2+9x-2}=5x-1$.

32 $\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x}}+3=0$. 33. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}=2$.

34. $(x+a)^{\frac{1}{3}}+(x+b)^{\frac{1}{3}}+(x+c)^{\frac{1}{3}}=0$.

35. $x(x-1)(x-2)(x-3)=6\cdot5\cdot4\cdot3$.

36. $(x+a)^2+4(x+a)\sqrt{x}=a^2-4a\sqrt{x}$.

37. $\sqrt[3]{1+\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x^2-1}}=6$.

XVI. 可用二次方程式解出之聯立方程式

含 x 及 y 之一對方程式，一爲一次，一爲二次.

一對聯立方程之形如 649

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$
$$\phi(x,y)=a'x+b'y+c'=0$$

者可如下例解之.

例. 解 $y^2-x^2+2x+2y+4=0$. (1)

$2x-y-7=0$. (2)

從 (2)， $y=2x-7$. (3)

以 (3) 代入 (1)，$3x^2-22x+39=0$. (4)

解 (4)， $x=13/3$ 及 3. (5)

代入 (3)， $y=5/3$ 或 -1. (6)

(1)，(2) 之解答爲下各對之值

$x=13/3, y=5/3; x=3, y=-1$. (7)

因由 §§ 368, 371 以下各對方程式同値：

(1)，(2) 與 (4)，(2)；(4)，(2) 與 (5)，(2)；(5)，(2) 與 (7).

(7) 之解答可表示爲 $13/3, 5/3; 3, -1$. 注意必須取 x 及 y 之相當値爲一對.

通常此二聯立方程式有兩個有限解答.然設 $\phi(x,y)$ 內一次項 $a'x+b'y$ 爲 $f(x,y)$ 內二次項 $ax^2+bx+ycy^2$ 之因子，而 $\phi(xy)$ 本身不爲 $f(x,y)$ 之因子，則僅有一個定解答，或無 650

定解答.設 $\phi(x,y)$ 爲 $f(x,y)$ 之因式,則有無窮個解答.

例 1. 解 $y^2-x^2+2x+2y+4=0$, (1)

$$y-mx=0. \quad (2)$$

消去 y, $(m^2-1)x^2+2(m+1)x+4=0$. (3)

設 (3) $m^2-1\neq 0$, 則 (3) 有二有限根, 故 (1) 及 (2) 有二有限解答.

但設 $y-mx$ 爲 y^2-x^2 之因式, 卽 $m=\pm 1$, 於是 $m^2-1=0$ 而(3)不能有二有限根.

如, 設 $m=1$, 則(3)化爲 $x+1=0$, 僅有一有限根, 他一根爲無限大, § 638. 設 $m=-1$, 則 (3) 化爲 $4=0$, 二根皆爲無限大, § 638.

故設(2)爲 $y-x=0$ 之形式,則(1),(2)聯立,僅有一個有限根,他一根爲無限大.設(2)爲 $y+x=0$ 之形式,則(1),(2)聯立,無一定解答,二解答皆爲無限大.

例 2. 解 $y^2-x^2+2x+2y=0$, (1)

$$y+x=0. \quad (2)$$

消去 y, $x^2-x^2+2x-2x=0$. (3)

但 (3) 爲恆等式,能適合於 x 之任何值.

故 $x=a$, $y=-a$ 之每對值皆爲(1)及(2)之解答.

此結果之理由,因 $y+x$ 爲 $y^2-x^2+2x+2y$ 之因子故也.

651 當 A, B, C 爲整函數時,則二方程式 $AB=0, C=0$, 與兩對方程式 $A=0, C=0$ 及 $B=0, C=0$ 爲同値, § 371.用此原則及 § 649 能使吾人解二整方程式 $f(x,y)=0, \phi(x,y)=0$, 設 $f(x,y)$ 可析爲一次或二次因子, $\phi(x,y)$ 可析爲一次因子.

例. 解 $x^3+xy^2-5x=0$, (1)

$$(2x-y)(x+y-1)=0. \quad (2)$$

此對方程式與以下四對方程式同値.

$$x=0, 2x-y=0, \quad (3)$$

$$x=0, x+y-1=0, \quad (4)$$

$$x^2+y^2-5=0, 2x-y=0, \quad (5)$$

$$x^2+y^2-5=0, x+y-1=0. \quad (6)$$

解(3),(4),(5),(6)諸對,得(1),(2)之解答,0,0;0,1;1,2;−1,−2;2,−1,−1,2.

652 x,y 之二整方程式,僅當其或其同値二方程式可變爲§§649,651所示形式之一時,始可用二次方程式解出.

故一對二次方程式 $y^2-x+1=0$ 及 $y=x^2$ 不能用二次方程式解出.因解此對方程式無較消去 y 再簡之方法,而消 y 後所得四次方程式 $x^4-x+1=0$ 又不能以二次方程式解之也.

653 上節釋明下面重要定理之眞實性:

一爲 m 次,一爲 n 次之二整方程式 $f(x,y)=0$,$\phi(x,y)=0$ 共有 mn 個解答.

例如,$x^3+xy^2-5x=0$ 及 $(2x+y)(x+y-1)=0$ 二方程式共有3·2或3個解答,§651,及§381.

654 但尙須補述者,卽如 $f(x,y)$ 及 $\phi(x,y)$ 之最高次項,非 $f(x,y)$ 及 $\phi(x,y)$ 之全體,有公因子則其有限數解答少於 mn 個,因 $f(x,y)$ 及 $\phi(x,y)$ 之最高次項之每一公因子至少使解答中之一爲無限數.如此公因式又爲次高次項所公有 則至少又有二無限解答;餘類推.設 $\phi(x,y)$ 及 $f(x,y)$ 之本身有一公因子.則有無限個解答.

例如,$x^3-xy^2+xy-y^2-y=0$ (1) 及 $x^2-y^2-1=0$ (2) 不能有三個以上之有限解答,因其共有3·2或6組解答,而 $x+y$ 爲(1),(2)內最高次項,卽 x^3-xy^2 及 x^2-y^2 之公因子,故其中至少有一爲無限數; 又 $x-y$ 爲最高次項及次高次項,卽 x^3-xy^2,x^2-y^2 及 $xy=y^2$,$0(x-y)$ 之公因子,故至少尙有他二解答爲無限數.

習　題　XLV

解以下各組方程:

1. $\begin{cases} 7x^2-6xy=8, \\ 2x-3y=5. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} xy=1, \\ 3x-5y=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+x=4y^2, \\ 3x+6y=1. \end{cases}$　　4. $\begin{cases} 3x^2-3xy-y^2-4x-8y+3=0, \\ 3x-y-8=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+5y^2-8x-7y=0, \\ x+3y=0. \end{cases}$　　6. $\begin{cases} 2x^2-xy-3y=0, \\ 7x-6y-4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2-1=0, \\ x+y=0. \end{cases}$　　8. $\begin{cases} 2x+3y=37, \\ 1/x+1/y=14/45. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 1/y-3/x=1, \\ 7/xy-1/y^2=12. \end{cases}$　　10. $\begin{cases} x^2+xy+2=0, \\ (3x+y)(2x+y-1)=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+y^2-8=0, \\ (x+1)^2=(y-1)^2. \end{cases}$　　12. $\begin{cases} x^2-xy-2y^2+y=0, \\ (x-2y)(x+y-3)=0. \end{cases}$

13. 求定使 $y^2+4x+4=0$, $y=mx$ 二方程之解答相等之定 m 之值.

14. 試定 m 及 c 能致下列方程之根爲無限大之値.

$$x^2+xy-2y^2+x=0,\ y=mx+c.$$

15. 用 § 650, 例 2 之法,試證 $2x-y+4$ 爲 $2x^2+xy-y^2+10x+y+12$ 之因子.

16. 試證二方程 $xy=1, xy+x+y=0$ 無兩個以上之有限解答,及二方程 $x^2y+xy=1, x^2y+y^2=2$ 無四個以上之有限解答.

能用因子分解法,加,法或減法解出之聯立方程式

655　當兩方程式對於 x, y 之某函數爲一次時.　可先用 §§ 374—376 之方法解之求二函數之値.

例 1. 解　$2x^2-3y^2=-58,$　(1)

$3x^2+y^2=111.$　(2)

求 x^2,y^2，得　　$x^2=25, y^2=36$;

$$\therefore\ x=\pm 5, y=\pm 6.$$

由§§367－372，(1)，(2)二方程與 $x=5, y=6$; $x=-5, y=6$; $x=5, y=-6$; $x=-5, y=-6$，四對方程式同值。

故(1)，(2)之解答爲5，6；－5，6；5，－6；－5，－6。

例 2. 解以下各對方程式.

1. $\begin{cases} ax^2+by^2=a, \\ bx^2-ay^2=b. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} 3x^2-1/y^2=2, \\ 5x^2+3/y^2=120. \end{cases}$

當一方程式可分解因式時. 當已知方程之形式爲　　656

$$ax^2+bxy+cy^2=0$$

時，~~此常化之~~爲

$$au^2+bu+c=0$$

之形式時，式中 u 表 x, y 之函數.

例 1. 解　$x^2+y^2+x-11y-2=0,$　　(1)

$$x^2-5xy+6y^2=0. \qquad (2)$$

分解(2)之因子，得

$$x=2y, \qquad (3)$$

或

$$x=3y. \qquad (4)$$

解　(1)，(3)及(1)，(4)，得所有(1)，(2)之解答，卽4，2；－2/5，－1/5；3，1；－3/5，－1/5.

例 2. 解 $2x^2+4xy+2y^2+3x+3y-2=0,$　　(1)

$$3x^2-32y^2+5=0. \qquad (2)$$

(1)可寫爲　　$2(x+y)^2+3(x+y)-2=0.$

解之，

$$x+y=1/2, \qquad (3)$$

或

$$x+y=-2, \qquad (4)$$

解　(2)，(3)及(2)，(4)，得所有(1)，(2)之解答，卽 1，－1/2；3/29，23/58；－3，1；－41/29，－17/29.

例 3. 解以下各對方程式.

1. $\begin{cases} x^2+xy-6=0, \\ x^2-5x+6=0. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{26}{5}, \\ y^2-2x^2=1. \end{cases}$

657 **當由已知方程式之相加或相減能得一可分解因式之方程式時.** 設二已知方程均呈 $ax^2+bxy+cy^2=d$ 之形式則恆可用此法.

例 *1.* 解 $6x^2-xy-2y^2=56,$ (1)

$5x^2-xy-y^2=49.$ (2)

結合(1),(2)以消去常數項.

以 7 乘(1), $42x^2-7xy-14y^2=392.$ (3)

以 8 乘(2), $40x^2-8xy-8y^2=392.$ (4)

從(3)減(4), $2x^2+xy-6y^2=0.$ (5)

解(5)求 x, $x=3y/2,$ (6)

或 $x=-2y.$ (7)

解 (2),(6) 及 (2),(7) 得 (1),(2) 之所有解答,即 $\pm3\sqrt{35}/10$, $\pm\sqrt{35}/5$; $\pm2\sqrt{21}/3$, $\mp\sqrt{21}/3$.

一般言之當已知方程式爲二次且由相加或相減能消去 (1) 所有二次項;(2)二次項以外之諸項;(3)所有含 x (或y)之項;或(4)所有不含 x (或y)之項時,蓋常能得一可分解因子之方程式.

例 *2.* 解 $2x^2+4xy-2x-y+2=0,$ (1)

$3x^2+6xy-x+3y=0.$ (2)

於此以 3 乘(1),2乘(2)且相減,可消去所有二次之項;

得 $4x+9y-6=0.$ (3)

解(2),(3),得 $-3,2;-2,14/9$,此爲(1),(2)所有之解答.參看 § 654.

例 *3.* 解 $x^2-3xy+2y^2+4x+3y-1=0,$ (1)

$2x^2-6xy+y^2+8x+2y-3=0.$ (2)

於此以 2 乘(1)減(2)可消去所有含 x 之項,得

$3y^2+4y+1=0.$ (3)

解 (1) 及 (3) 得所有 (1),(2) 之四解答 $1/3, -1/3;$ $-16/3, -1/3; (-7\pm\sqrt{57})/2, -1.$

茲再解察下例.

例 4. 解 $x^2+2xy+2y^2+3x=0,$ (1)

$xy+y^2+3y+1=0.$ (2)

(2)乘以 2 加(1),得

$$(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0. \quad (3)$$

解(3), $x+2y=-1,$ (4)

或 $x+2y=-2.$ (5)

解(2),(4) 及 (2),(5),得 (1),(2) 之所有解答,即

$-3\pm2\sqrt{2}, 1\mp\sqrt{2}; -3\pm\sqrt{5}, (1\mp\sqrt{5})/2.$

例 5. 解下各對方程式.

1. $\begin{cases} 2x^2+xy+5y=0, \\ x^2+y^2+10y=0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2+y^2-13=0, \\ xy+y-x=-1. \end{cases}$

當由消去 x 或 y 後所得之方程能分解因式時. 任何一對二次方程可用下法消去 x 或 y. 由是所得,通常爲四次方程式,不能以二次方程式解之. 但設能分解爲一次及二次之因子,則能解其因子以求已知二方程之解答.

例 1. 解 $10x^2+5y^2-27x-4y+5=0,$ (1)

$x^2+y^2-3x-y=0.$ (2)

5 乘 (2),自(1)減之,消去 y^2. 得

$5x^2-12x+y+5=0$, 或 $y=-5x^2+12x-5.$ (3)

(3) 代入 (2),

$$5x^4-24x^3+40x^2-27x+6=0. \quad (4)$$

由 § 451, 分解因式,

$$(x-1)(x-2)(5x^2-9x+3)=0. \quad (5)$$

解(5), § 643, $x=1, 2, (9\pm\sqrt{21})/10.$ (6)

(6),代入(3), $y=2, -1, (7\pm3\sqrt{21})/10.$ (7)

(6),(7)之各對相當值卽(1),(2)之解答.

例 2. 解 $x^2-3xy+2y^2+3x-3y=0,$

$2x^2+xy-y^2+x-2y+3=0.$

習題 XLVI

解下列各對方程:

1. $\begin{cases} x^2+3y^2=31, \\ 7x^2-2y^2=10. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 36/x^2+1/y^2=18, \\ 1/y^2-4/x^2=8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y^2+xy+6=0, \\ y^2-y-2=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2-3x+2y-39=0. \\ 3x^2-17xy+10y^2=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y^2-x^2-5=0, \\ 4x^2+4xy+y^2+4x+2y=3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+5xy-2x+3y+1=0, \\ 3x^2+15xy-7x+8y+4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2-15xy-3y^2+2x+9y=98, \\ 5xy+y^2-3y=-21. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x^2+3xy-4y^2=25, \\ 15x^2+24xy-31y^2=200. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x(x+3y)=18, \\ x^2-5y^2=4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2-3xy+3y^2=x^2y^2, \\ 7x^2-10xy+4y^2=12x^2y^2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=38, \\ x^2-xy+y^2=14. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21(x-y), \\ xy=20. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2+y-8=0, \\ y^2+15x-46=0. \end{cases}$

能用除法解之兩聯立方程式

659 解兩聯立方程式時,有時以用乘法或除法結合之爲便.但須注意不可引入另外解答,或失去原有解答(參看§§362,342).

660 設已知二方程式形爲 $AB=CD$ (1), $B=D$(2). 其 A, B, C, D 爲 x, y 之整函數者, 則可於(1)內以 D 易 B, 得二方程式 $AD=CD$, $B=D$, 此顯然與兩對方程式 $A=C$, $B=D$ 及 $D=0$, $B=0$ 同値. 以 (2) 之兩邊除 (1) 相當邊得二方程 $A=C$, $B=D$, 但僅解方程式 $A=C$, $B=D$, 必失去(1 ,

(2)中幾個解答，當然 B 或 D 爲常數時除外，因如是則 $B=0$ 及 $D=0$ 並無解答也.

例1. 解 $$x^4+x^2y^2+y^4=21, \qquad (1)$$
$$x^2+xy+y^2=7. \qquad (2)$$

(1)除以(2), $$x^2-xy+y^2=3. \qquad (3)$$

解(2),(3),得所有(1),(2)之有限解答，卽: 2, 1; −2, −1; 1, 2; −1, −2. § 654.

例2. 解 $$x^3-y^3=-3(x+1)y, \qquad (1)$$
$$x^2+xy+y^2=x+1. \qquad (2)$$

以(2)除(1), $$x-y=-3y \qquad (3)$$

(1),(2)二方程與(2),(3)及 $x^2+xy+y^2=0$ (4) $x+1=0$(5)二對有相同解答.而 (2), (3) 及 (4), (5)之解答爲 2, −1; −2/3, 1/3; −1, $(1\pm i\sqrt{3})/2$.

例3. 解 $$(x+y)^2=x, \qquad (1)$$
$$x^2-y^2=-6y. \qquad (2)$$

(1)除以 (2), $$(x+y)/(x-y)=-x/6y. \qquad (3)$$

消去分母, $$x^2+5xy+6y^2=0. \qquad (4)$$

(2), (4)一對有四解答 0,0;0,0;4, −2;9/4;−3/4.

由(1),(2)導至(4)之程序，當 x,y 之値爲 4, −2 或 9/4, −3/4 時爲可逆的，但爲 0, 0 則非可逆.此計算僅證明 4, −2, 及 9/4, −3/4 爲(1),(2)之解答, § 362.

由觀察知 0, 0, 顯然爲 (1), (2) 之解答，但僅爲一個；蓋在此 (2), (4)類中無兩個也.由此事實知(1), (2)僅有三個有限解答, § 654. 亦可知: 以 $y=tx$(5)代入(1), (2)得 $(1+t)^2x^2=x(1')$, $(1-t^2)x^2=-6tx(2')$. 由(5),(1'),(2')得 $x=0, y=0$ 一次，且僅只一次.

習 題 XLVII

1. $\begin{cases} x^3-y^3=63, \\ x-y=3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=98, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=931, \\ x^2+xy+y^2=49. \end{cases}$

4. $\begin{cases} (x+y)(x^2-2y^2)=-70, \\ (x-y)(x^2-2y^2)=14. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x+y)^2(x-y)=3xy+6y, \\ x^2-y^2=x+2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=6x, \\ x^2-y^2=-5y. \end{cases}$

對稱聯立方程式

661 x,y 之一對方程式設 x,y 互易而仍保持不變則稱爲對稱方程式對.如以下$(a),(b)$,卽爲對稱方程式對.

$$(a)\ \begin{cases}2x^2+2y^2+3x+3y=0,\\ x^2y^2+xy+1=0.\end{cases}\qquad (b)\ \begin{cases}x^2=2x+3y,\\ y^2=2y+3x.\end{cases}$$

對稱方程式有二範式,類似(a)者 x,y 互易後各方程式不變,類似(b)者 x,y 互易後二方程式易位.

662 **屬於第一範式之對稱聯立方程式.** 其最簡單者爲 $x+y=a$, 及 $xy=b$ 此可如 §649 解之,但次例爲較與對稱性有關之方法.

例. 解 $$x+y=5, \tag{1}$$
$$xy=6. \tag{2}$$

平方(1), $$x^2+2xy+y^2=25. \tag{3}$$

以4乘(2), $$4xy=24. \tag{4}$$

從(3)減(4), $$x^2-2xy+y^2=1. \tag{5}$$

故 $$x-y=1, \tag{6}$$

或 $$x-y=-1. \tag{7}$$

從(1),(6), $x=3,y=2$; 從(1),(7), $x=2,y=3$.

663 設已知爲更繁複之對稱方程式對, 可變各方程式含 $x+y$ 及 xy 之方程式, §637, 再解之以求此二函數之值;或於已知方程式內,使 $x=u+v$, $y=u-v$, 再解之以求 u 及 v. 因從 $x=u+v, y=u-v$, 得 $u=(x+y)/2$ $v=(x-y)/2$. 第二法與求 $x+y$ 及 $x-y$ 相同.

例1. 解 $$2x^2+5xy+2y^2+x+y+1=0, \tag{1}$$
$$x^2+4xy+y^2+12x+12y+10=0. \tag{2}$$

於(1)及(2)內以$(x+y)^2-2xy$ 代 x^2+y^2.

集項，　$2(x+y)^2+xy+(x+y)+1=0,$　(3)

$(x+y)^2+2xy+12(x+y)+10=0.$　(4)

消去 xy，　$3(x+y)^2-10(x+y)-8=0.$　(5)

解之，　$x+y=4,$　(6)

或　$x+y=-2/3$　(7)

由是，從(3)，　$xy=-37,$　(8)

或　$xy=-11/9.$　(9)

解(6)，(8)及(7)，(9)兩對求 x,y，得

$$x,y=2\pm\sqrt{41},2\mp\sqrt{41};(-1\pm2\sqrt{3})/3,(-1\mp2\sqrt{3})/3.$$

例2.　解　$x^4+y^4=97,$　(1)

$x+y=5.$　(2)

於(1)及(2)內使 $x=u+v,\ y=u-v.$

得　$(u+v)^4+(u-v)^4=97,$　(3)

及　$2u=5.$　(4)

消去 u，　$16v^4+600v^2-151=0.$　(5)

解之，　$v=\pm1/2$ 或 $\pm i\sqrt{151}/2.$　(6)

以 $u=5/2$ (4)及 v 之四值(6)代入公式 $x=u+v$，$y=u-v$，得

$$x,y=2,3;3,2;\ (5\pm i\sqrt{151})/2,\quad(5\mp i\sqrt{151})/2.$$

設 $x=\alpha,y=\beta$ 爲對稱方程對之一解答，則 $x=\beta,y=\alpha$ 顯然爲其另一解答．除 $\alpha=\beta$ 外，此二解答不同，但 $x+y$ 及 xy 由 $y=\beta,x=\alpha$ 及 $x=\beta,y=\alpha$ 所得之値相同，其與 $x-y$ 之相當値即 $\alpha-\beta$ 及 $\beta-\alpha$，則僅爲符號不同．

故從由兩聯立對稱方程所得 xy 或 $x+y$ 之値，其個數必較 x 或 y 之値數爲少，即用消去法所得 xy 或 $x+y$ 之方程式之次數低於用導來法之 x 或 y 之方程式，如例 *1*．在 $x-y$ 之方程式中，若 c 爲一根，則 $-c$ 必爲其另一根．故此方程式應僅含 $x-y$ 之偶次冪，如例 *2*，或僅奇次冪而無常數項．

664 注意：上法用於 x 及 $-y$ 或其他某對 x, y 函數之對稱方程式對，如 $x^4+y^4=a,\ x-y=b$ 可寫爲 $x^4+(-y)^4=a,\ x+(-y)=b$.

665 **屬於第二種範式之對稱聯立方程式.** 此種方程式對有時可如下法解之.

例. 解

$$x^3=7x+3y, \qquad (1)$$
$$y^3=7y+3x. \qquad (2)$$

(1), (2)相加，$x^3+y^3=10(x+y)$. (3)

從(1)減(2)，$x^3-y^3=4(x-y)$. (4)

由 § 341, (3)同值於二方程式

$$x+y=0, \qquad (5)$$

及

$$x^2-xy+y^2=10. \qquad (6)$$

同理(4)同值於二方程式

$$x-y=0, \qquad (7)$$

及

$$x^2+xy+y^2=4. \qquad (8)$$

解(5), (7)；(5), (8)；(6), (7)；(6), (8)，得 0, 0；2, -2；-2, 2；$\pm\sqrt{10}$, $\pm\sqrt{10}$；$(1\pm\sqrt{13})/2, (1\mp\sqrt{13})/2$；$(-1\pm\sqrt{13})/2, (-1\mp\sqrt{13})/2$.

習題 XLVIII

解以下各方程式對.

1. $\begin{cases} x+y=5, \\ xy+36=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2=200, \\ x+y=12. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2=293, \\ xy=34. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2=85, \\ x-y=7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^3+y^3=513, \\ x+y=9. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^3+y^3=468, \\ x^2y+xy^2=420. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 27x^3+64y^3=65, \\ 3x+4y=5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ x-y=2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^5+y^5=32, \\ x+y=2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=1/2, \\ 56\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)+113=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} xy+x+y+19=0, \\ x^2y+xy^2+20=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^4+y^4-(x^2+y^2)=72, \\ x^2+x^2y^2+y^2=19. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2y+xy^2=30, \\ 1/x+1/y=3/10. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2+3xy+y^2+2x+2y=8, \\ 2x^2+2y^2+3x+3y=14. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^3=5y, \\ y^3=5x. \end{cases}$

多元聯立方程式

在三個三元聯立方程式中，若一爲二次方程式，餘爲一次方程式，則可用解二次方程式之方法解之；又若可化爲同解之一組或多組，如上述情形者亦可用解二次方程式之法解之．四個四元聯立方程式同此． 666

若 A,B,C 爲 x,y,z 之 m,n,p 次整函數，且任兩者均無公因子，則聯立方程式 $A=0,B=0,C=0$ 有 mnp 個解答．但其中之幾可爲無限大．

例1. 解
$$z^2-xy-7=0, \tag{1}$$
$$x+y+z=0, \tag{2}$$
$$3x-2y+2z+2=0. \tag{3}$$

解(2)，(3)求 x,y，以 z 表之，
$$x=-(4z+2)/5, \tag{4}$$
$$y=(-z+2)/5. \tag{5}$$

代入(1)，並化簡之，
$$7z^2+2z-57=0 \tag{6}$$

解(6) $z=-3$ 或 $19/7$.

由是，從 (4)，(5)，$x,\ y,\ z=2,\ 1,-3;\ -\frac{18}{7},-\frac{1}{7},\ \frac{19}{7}$.

例2. 解
$$xy=6, \tag{1}$$
$$yz=12 \tag{2}$$
$$zx=8. \tag{3}$$

以(1)除(2)， $z/x=2$ 或 $z=2x$. (4)

以(4)代入(3)， $x^2=4$，故 $x=\pm2$. (5)

從 (5)，(4)，(1)得 $x,y,z=2,3,4;-2,-3,-4$

習 題 XLIX

解下列各組方程式．

1. $\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=2, \\ x^2-yz=19. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x(y+z)=12, \\ y(z+x)=6, \\ z(x+y)=10, \end{cases}$ 3. $\begin{cases} (y+b)(z+c)=a^2, \\ (z+c)(x+a)=b^2, \\ (x+a)(y+b)=c^2 \end{cases}$

習 題 L

用本章之任何方法解以下各方程式組。

1. $\begin{cases} 7x^2-6xy=8, \\ 2x-3y=5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y=1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y=a, \\ xy=(b^2-a^2)/4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{y^2}=a^2+b^2, \\ x^2+y^2=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{x}=1, \\ \dfrac{7}{xy}-\dfrac{1}{y^2}=12. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+y=a+b, \\ \dfrac{a}{x+b}+\dfrac{b}{y+a}=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=\dfrac{1001}{125}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{5}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=5, \\ \dfrac{ab}{xy}=2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{17}{4}xy, \\ x-y=\dfrac{3}{4}xy. \end{cases}$

10. $a(x+y)=b(x-y)=xy.$

11. $40xy=21(x^2-y^2)=210(x+y).$

12. $\begin{cases} 4x^2-25y^2=0, \\ 2x^2-10y^2-3y=4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2+3xy-9y^2=9, \\ x^2-13xy+21y^2=-9. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2-7y^2-29=0, \\ x^2-6xy+9y^2-2x+6y=3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x/y+y/x=65/28, \\ 2(x^2+y^2)+(x-y)=34. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2y=a, \\ xy^2=b. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2y+xy^2=a, \\ x^2y-xy^2=b. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x=a(x^2+y^2), \\ y=b(x^2+y^2). \end{cases}$

19. $\begin{cases} (x+y)/(x-y)=5/3, \\ (2x+3y)(3x-2y)=110a^2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3(x^3-y^3)=13xy, \\ x-y=1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^4+y^4=a^4, \\ x+y=a. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 21(x+y)=10xy, \\ x+y+x^2+y^2=68. \end{cases}$

23. $x^2+y^2=xy=x+y.$

24. $x^2-xy+y^2=3a^2=x^2-y^2.$

25. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=21, \\ x+\sqrt{xy}+y=7. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 4x^2-3y^2=12(x-y), \\ xy=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2+y^2=x+y+20, \\ xy+10=2(x+y). \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2+4x-3y=0, \\ y^2+10x-9y=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 28(x^5+y^5)=61(x^3+y^3), \\ x+y=2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} xy-x/y=a, \\ xy-y/x=1/a. \end{cases}$

31. $\begin{cases}(x+1)^3+(y-2)^3=19,\\ x+y=2.\end{cases}$

32. $\begin{cases}x^2+y=8/3,\\ x+y^2=34/9.\end{cases}$

33. $\begin{cases}y^2-xy-yz=3,\\ x+4y+z=14,\\ x-y+2z=0.\end{cases}$

34. $\begin{cases}x+y+z+u=0,\\ 3x+z+u=0,\\ 3y+2z=0,\\ x^2+y^2+z^2=5.\end{cases}$

35. $\begin{cases}(y+z)(x+y+z)=10,\\ (z+x)(x+y+z)=20,\\ (x+y)(x+y+z)=20.\end{cases}$

36. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ xy+yz+zx=-1,\\ 2x+y-2z=-3.\end{cases}$

習 題 LI

1. 兩數之立方之差爲 218,其差之立方爲 8;求各數.
2. 二數和之平方較其乘積多 63,又其立方之差爲 189; 問二數爲何?
3. 一分數,分母分子之和爲 11,又此分數以另一分數其分子與分母較原分數多 3 與 4 者乘之,其積爲 2/3; 求此分數.
4. 分 37 爲三部其乘積爲 1440,又其中前二者之乘積較第三部之三倍多 12;求此三部.
5. 長方形之對角線長 13 呎;若每邊較原長度增 2 呎, 則其面積較原來增 38 方呎;各邊之長度爲何?
6. 直角三角形之周邊長 36 吋, 又其面積爲 54 方吋; 求各邊之長.
7. 直角三角形之弦較其垂直之二邊一長 3 吋,一長 24 吋,求各邊之長度.
8. 由下列已知條件,求一室之長寬高:此室地板之面積爲一 224 方呎之長方形,又其二面牆之面積爲 126 及 144 方呎.
9. 一長方形周圍鑲以寬 5 吋之邊,長方形之面積爲 168 方吋,周圍所鑲邊之面積共 360 方吋;求長方形之長及寬.

10. A 以 135 元購煤較 B 多得 3 噸,又 A 購 4 噸較 B 購 5 噸少 7 元.求每人每噸購價若干?

11. 本金若干在某種利率下以單利儲蓄一年,本利之和共 1248 元,若本金增 100 元,利率增 $1\frac{1}{2}$ 倍,則二年後之本利和爲 1456 元.問本金若干?利率若干?

12. 某人遺洋 60,000 元分與子孫七人,其子共得全部之 $\frac{1}{3}$;每人較孫所得多 2000 元.問子若干人,孫若干人,各得洋若干?

13. 某舟子於其平常速率下,順流划行 15 哩,較其回程少 5 小時。若此人加倍其速率,順流划行之時間較逆流僅少一小時,問於靜水中其平常速率如何,又水流速率如何?

14. A,B,C 三人能於 1 小時 20 分作一工程.若獨立爲之,則 C 所須時間 2 倍於 A,而較 B 多 2 小時.問每人單獨工作此工程各須時若干?

15. A 與 B 二物沿周長 20 呎之圓周於同一方向作等速運動;A 轉一周較 B 少 2 秒,又 A 於 B 每分鐘相遇一次;問二物之速率爲何?

16. 二直線相遇一直角,O 點;A,B 二點向 O 溦等速運動;A 現距 28 吋,B 距 9 吋;2 秒後,A 與 B 相距 13 吋,又 3 秒相距 5 吋.問 A 與 B 運動時之速率如何?

17. A,B,C 三人同時出發行某路程,A 每時行 $4\frac{1}{2}$ 哩,且較 B 先二時行完,B 每時較 C 多行 1 哩,且較 C 少用三時行完此路程.問此路程爲何?

18. 二信差 A,B 於同時從 P 及 Q 相向出發.當相遇時 A 較 B 多行 12 哩,相遇後 A 仍用前速度向 Q 進行,用 $4\frac{1}{2}$ 時然後到達,同時 B 於 $7\frac{1}{9}$ 時後至 P. 問 P,Q 間之距離爲何?

X,Y 之二次方程式之圖象

舉例. 任何 x, y 之二次方程式之圖象,均可用下例所示方法求得之, 667

例1.　求 $y^2=4x$ 之圖象.　　(1)

解出 y, $y=\pm 2\sqrt{x}$. (2)

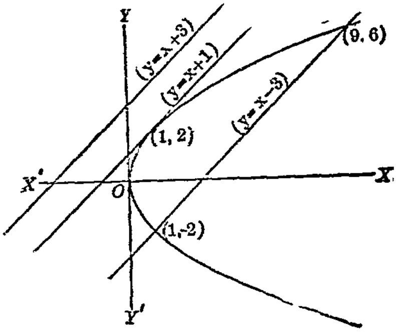
由(2)知 x 爲負數時 y 爲虛數; x 爲 0 時, y 亦爲 0; x 爲正數時 y 有同値異號之兩實數値. 故 (1) 之圖象全部在 y 軸之右方, 經過原點且對於 x 軸對稱.

當 $x=0, 1/4, 1/2, 1, 2, 3, 4, \cdots\cdots$

得 $y=0, \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm 2, \pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{3}, \pm 4, \cdots\cdots$

先繪出 $(0,0)$, $(\frac{1}{4},1)$, $(\frac{1}{4},-1)$……諸點, 再過諸點作一曲線即得下圖所示圖象之一部. 參看 § 389. 此曲線與 y 軸相切.

此曲線名曰抛物線, 含一"無限支線"向右伸展至無限遠.



例2. 試求下列四曲線之交點.

$y^2=4x$ (1),

$y=x-3$ (2),

$y=x+1$ (3),

$y=x+3$ (4).

1. (1),(2)之解爲 $1,-2; 9,6$. 故 (§ 386) 如上圖所示 (1),(2)之圖象交於 $(1,-2)$, $(9,6)$ 兩點.

2. (1),(3)之兩解相等, 即 $1,2; 1,2$. 故(3) 之圖象遇 (1) 之圖象於二重合點 $(1,2)$. 即(3)之圖象切(1)之圖象於 $(1,2)$, 如圖示.

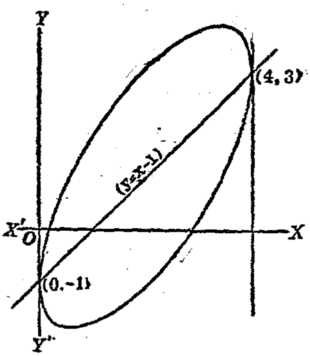
3. (1),(4)之解爲虛數, $-1\pm 2\sqrt{2}\,i, 2\pm 2\sqrt{2}\,i$. 故 (1),(4)之圖形不相交, 如圖示.

例3.　求 $y^2-2xy+2x^2-6x+2y+1=0$ 之圖象．　(1)

解求 y，　$y=x-1\pm\sqrt{4x-x^2}$　(2)

當根底 $4x-x^2$ 或 $x(4-x)$ 為正（或 0），即當 x 之值在 0 與 4 之間(或為 0 或 4)時，(2)內 y 之值為實數．故 (1) 之圖象在 $x=0$ 及 $x=4$ 二直線之間．

$x=0$ 及 $x=4$ 時，(2)內 y 之二值相等，即 $x=0$時為 -1，-1，$x=4$ 時為 3，3．意謂(1)之圖象切直線 $x=0$ 於$(0,-1)$，切直線 $x=4$ 於$(4,3)$．參看例 2，2．因當 $4x-x^2$ 為零時 (2) 內 y 之二值相同，故直線 $y=x-1$ 過二切點．



因 x 在 0 與 4 間之任一值代入(2)式，皆與 y 以不同之二實數值，即 $x-1$ 加或減$\sqrt{4x-x^2}$．故 x 之值中之任一值在 (1) 之圖象內皆有兩點．各點可由先畫 $y=x-1$ 之直線，再由 x 之值增減$\sqrt{4x-x^2}$ 以增減其縱坐標極易得其各點．

例如，當	$x=$	0,	1,	2,	3,	4,
於直線得	$y=$	-1,	0,	1,	2,	3,

於(1)之圖象得 $y=-1,\ \pm\sqrt{3},\ 1\pm2,\ 2\pm\sqrt{3},\ 3.$

由此諸點所成之圖象為橢圓形之曲線，此即名為橢圓．

解(1)求 x，且應用 § 641 之方法，可知此曲線之最高點及最低為$(2+\sqrt{2},1+2\sqrt{2})$及$(2-\sqrt{2},1-2\sqrt{2})$．

例4.　求 $y^2-x^2+2x+2y+4=0$ 之圖象．　(1)

解之求 y，且析其結果內之根底為因子，

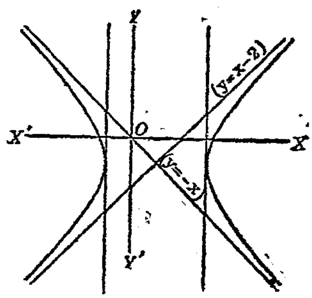
$$y=-1\pm\sqrt{(x+1)(x-3)}. \qquad (2)$$

當 $x=-1$，或 3 時，根底 $(x+1)(x-3)$ 為零，且 (2) 內 y 之值皆相等，即：-1，-1．意即 (1) 之圖象切 $x=-1$

之直線於$(-1,-1)$點，$x=3$之直線於$(3,-1)$點．$y=-1$之直線爲遇兩切點之直線．

當$x<-1$或$x>3$時，根底$(x+1)(x-3)$爲正數．x於此值中之任一值，皆與y以不同之二實數，亦法(1)圖象內之兩點．求此諸點，可先畫$y=-1$之直線，再於其常數縱坐標-1，加或減$\sqrt{(x+1)(x-3)}$之值．

故如圖所示，(1)之圖象含二無限支，一切於直線$x=-1$，向左伸展無限，一切於直線$x=3$，向右伸展無限．



此曲線名爲雙曲線．

二直線名爲漸近線，雙曲線之無限支有與之相切之趨向，且謂之於無限遠處相切．二直線爲$y=x-2$及$y=-x$之圖象，可如下法求得．參看§650，例*1*．

由(1)及方程$y=mx+c$消去y，　(3)

得　$(m^2-1)x^2+2(mc+m+1)x+(c^2+2c+4)=0$．　(4)

設　$m^2-1=0$及$mc+m+1=0$，

即設　$m=1, c=-2$，或$m=-1, c=0$，

則(4)之二根皆爲無限大，§638．

故設(3)爲$y=x-2$ $(3')$或$y=-x$ $(3'')$之形式，則(1)，(3)之解答皆爲無限大．

由是$(3')$及$(3'')$之圖象皆遇(1)之圖象於二無限遠之重合點．

例*5*．　求$y^2-4xy+3x^2+6x-2y=0$之圖象　(1)

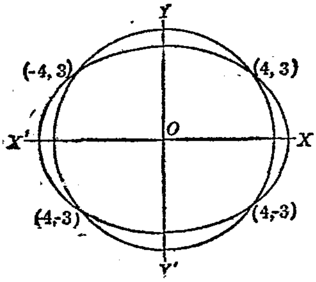
解y,得　$y=2x+1\pm\sqrt{x^2-2x+1}$　(2)

即　$y=3x$，或$y=x+2$．

故(1)之圖象含二直線$y=3x$及$y=x+2$．

除根底爲零即$x-1=0$外，(2)內y有不同之二實值．

但當 $x-1=0$ 時,y 爲二等值卽 3,3. 故 $x-1=0$ 之直線遇(1)之圖象於二重合點 (1,3). 當然不能謂爲直線 $x-1=0$ 切(1)之圖象於(1,3). 此可解爲直線 $x-1=0$ 與構成(1)圖之二直線 $y=3x$ 及 $y=x+2$ 之交點相重合.



例6. 求下二方程之圖象及其交點.

$$x^2+y^2=25, \qquad (1)$$

$$x^2/16+y^2/9=2. \qquad (2)$$

(1)之圖象爲以原點 0 爲心,以 5 爲半徑之圓. (2)之圖象爲橢圓.

二曲線相交於 (4,3),(−4,3),(−4,−3),(4,−3) 四點,此四點卽(1),(2)解答之圖象.

例7. 求下二方程之圖象及其交點.

$$xy-3y-2=0, \qquad (1)$$

$$xy+2y+3=0. \qquad (2)$$

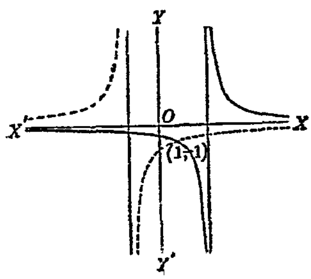
從(1)得 $$y=2/(x-3). \qquad (3)$$

於此 x 之每實値, y 有一相當實値卽得圖象之一點.

當 $x=-\infty,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2\frac{3}{4},\ 3,\ 3\frac{1}{4},\ 4, \infty,$

得 $y=0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ -1,\ -2,\ -8,\ \pm\infty,\ 8,\ 2,\ 0.$

畫諸解答,得以實線表兩無窮支之雙曲線,其漸近線爲 $y=0$ (如例 4 求得),及 $x-3=0$(因當 $x=3$ 時, $y=\infty$).



同法求得 (2) 之圖象爲虛線所示之雙曲線, 其漸近線爲 $y=0$ 及 $x+2=0$.

(1),(2) 二方程之解答,僅 $x=1, y=-1$,之一解答爲有限數, 餘三解答爲無窮大, § 654.

二雙曲線卽 (1), (2) 之圖象遇於一定點 (1,−1). 但

因其有一公共漸近線 $y=0$，故認其在$(\infty,0)$有二無限遠之重合交點；又因其有二平行漸近線 $x-3=0$ 及 $x+2=0$，故認其在$(0,\infty)$有一無限遠之交點.

此種圖象通論. 總論前例所得結果，得以下結論. 668

假定具實數係數，含 x,y 之任何二次方程，如

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0. \tag{1}$$

設 b 不爲 0，解之求 y，得

$$by=-(hx+f)\pm\sqrt{R}, \tag{2}$$

式內 $R=(h^2-ab)x^2+2(hf-bg)x+(f^2-bc)$.

從(2)由 x 每一能令 R 爲正之值，可得 y 之二實值，相當於 y 之每二值，可自下列直線而得此圖象之二點

$$by=-(hx+f).$$

再由 x 之值計算 $\sqrt{R}/b$ 以增減其縱坐標. 參看 § 667，例 *1*, *3*, *4*.

此圖象之形按 R 之因式之性質而定.

1. 當 $(hf-bg)^2-(h^2-ab)(f^2-bc)=0$ 時.

於此 R 爲完全平方，§ 635，(1)之左邊可析爲一次因式，§ 635，例 *3*. 設因式之係數爲實數，則 (1) 之圖象爲二直線. § 667，例 *5*.

2. 當 $(hf-bg)^2-(h^2-ab)(f^2-bc)>0$ 時.

此類除 $h^2-ab=0$ 外，根底 R 可化爲 $R=(h^2-ab)(x-\alpha)(x-\beta)$(3)，$\alpha$ 及 β 爲實數，且 $\alpha<\beta$ § 635.

設 $h^2-ab<0$，則當且僅當 x 之値在 α 及 β 之間，(3) 之積爲正.故(1)之圖象爲介於所切二直線 $x-\alpha=0$ 及 $x-\beta=0$ 間之閉曲線．因知其必爲橢圓或圓．參看 § 667，例 *3*.

設 $h^2-ab>0$，則(3)之積僅當 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$ 爲正．此圖象含兩無窮支，一切於直線 $x-\alpha=0$，向左伸展，一切於直線 $x-\beta=0$ 向右伸展．因知此爲一雙曲線．§ 667，例 *4*.

設 $h^2-ab=0$，則 $R=2(hf-bg)x+(f^2-bc)$，式內 $hf-bg\neq0$，且僅當 $x>-(f^2-bc)/2(hf-bg)$ 時此式爲正．故此圖象有一無窮支，完全位於其所切直線 $2(hf-bg)x+(f^2-bc)=0$ 之一邊.因知此爲一拋物線．§ 667，例 *1*.

3. 當 $(hf-bg)^2-(h^2-ab)(f^2-bc)<0$ 時.

此類 $R=0$ 之二根爲共軛虛數，§ 635，且設其爲 $\lambda+\mu i$ 及 $\lambda-\mu i$，則 R 可化爲 $R=(h^2-ab)[(x-\lambda)^2+\mu^2]$，(4).

設 $h^2-ab>0$，則(4)之積於 x 之所有値皆爲正．故(1)之圖象合二無窮支，位於直線 $by=-(hx+f)$ 之兩旁．因知此爲雙曲線．卽 $y^2-x^2=1$.

設 $h^2-ab<0$，則(4)之積於 x 之所有値皆爲負，故(1)之圖象完全爲虛．卽 $x^2+y^2+1=0$.

以上所論皆假定 $b\neq0$．但設 $b=0$ 而 $a\neq0$，且解(1)求以代 y，則得相似之結論．設 $a=0$，及 $b=0$，則(1)之圖象爲一雙曲線，如 § 667，例 *7*，或爲二直線，一平行於 x 軸，一平行於 y 軸.

習 題 LII

求下列方程之圖象.

1. $y^2=-8x$.　　2. $x^2+y^2=9$.　　3. $(y-x)^2=x$.

4. $x^2+2xy+2y^2=$[illegible].　　5. $y^2-4xy+3x^2+4x=0$.

6. $y^2-2xy+1=0$.　　7. $y^2-2xy-1=0$.

8. $2x^2+3y^2-4x+6y=0$.　　9. $y^2-x^2-3x+y-2=0$.

10. $2x^2+4xy+4y^2+x+4y-5=0$.

11. $4x^2-12xy+9y^2+3x-6y=0$.

求下列各對方程及其交點之圖象.

12. $\begin{cases} xy=1, \\ 3x-5y=2. \end{cases}$　　13. $\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ x^2-xy+x=0. \end{cases}$　　14. $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ y^2=2x. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y^2-xy-2x^2-2x-\text{[illegible]}y-2=0, \\ y^2-xy-2x^2+2=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} (x-2y)(x+y)+x-3y=0, \\ (x-2y)(x-y)+2x-6y=0. \end{cases}$

17. 求 $x^2+y^2-6x-2y+1=0$ 及與 x 及 y 軸交點之圖象.

18. 試證$(x-y)^2-2(x+y)+1=0$ 切於 x 及 y 軸.

19. 試證直線 $y=3x+5$ 切 $16x^2+y^2-16=0$ 之圖象於$(-3/5, 16/5)$點.

20. 問 m 為何值方令直線 $y=mx+3$ 切於 $x^2+2y^2=6$ 之圖象?

21. 問 c 為何值方令直線 $7x-4y+c=0$ 切於 $3x^2-y^2+x=0$ 之圖象?

22. 求證直線 $y=0$ 及 $x-2y+1=0$ 為 $xy-2y^2+y+6=0$ 之圖象之漸近線.

23. 求 $2x^2+3xy-2y^2+x+2y+2=0$ 之圖象之漸近線.

24. 問 λ 為何值, $x^2+\lambda xy+y^2=x$ 之圖象為橢圓? 拋物線? 雙曲線?

XVII. 不 等 式

669 **簡單不等式.** 絕對不等式為類似 $x^2+y^2+1>0$ 之不等式,此於其所含字母之一切值皆能成立;條件不等式為類似 $x-1>0$ 之不等式,此不能於其所含字母之一切值皆能成立,反之須加以某種限制.

670 不等式計算之原則已見於 §261.由此原則知將某項由一邊移至他邊而變其符號,或以相同之正數乘不等式之兩邊,不等式之符號>或<依然不變,但設兩邊同乘以負數,則符號>變為<,<變為>.

例 1. 求證 $a^2+b^2>2ab$.

已知 $(a-b)^2>0$.

即 $a^2-2ab+b^2>0$,

故 $a^2+b^2>2ab$.

例 2. 求證 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

已知 $a^2+b^2>2ab, b^2+c^2>2bc, c^2+a^2>2ca$.

加三不等式之相當項,且除以 2,得 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

例 3. 解不等式 $3x+5>x+11$,即求 x 值之限制.

移項 $2x>6$,

$x>3$.

例 4. 解 $x^2-2x-3<0$.

析因式,$(x+1)(x-3)<0$.

欲滿足此式,二因子必一正一負.故必 $x>-1$ 而 <3,即 $-1<x<3$.

671 **聯立不等式.** 一個或多個形如

$$ax+by+c>0$$

之不等式組，由於以下考量，可用簡單之圖解法解求變數 x 及 y.

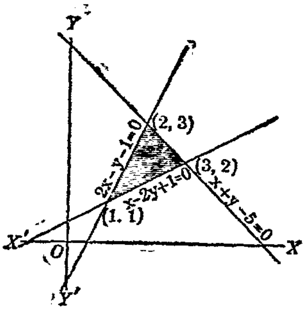
先繪 $ax+by+c=0$ 圖象之直線，§385．則在此直線之一側所有圖象中諸對 x,y 之值必致 $ax+by+c>0$，且在此直線之他側所有圖象中諸對之值必致 $ax+by+c<0$.

例如，使 (x_1,y_1) 爲 $y-(mx+c)=0$ 圖象上之一點，則 $y_1-(mx_1+c)\equiv 0$．又設 $y_2<y_1$，則 (x_1,y_2) 點在直線下，得 $y_2-(mx_1+c)<0$；又設 $y_3>y_1$，則 (x_1,y_3) 在線上，得 $y_3-(mx_1+c)>0$.

例．解聯立不等式

$k_1=x-2y+1<0, k_2=x+y-5<0, k_3=2x-y-1>0.$

先求 $k_1=0, k_2=0, k_3=0$ 諸圖象，如下圖．



不等式 $k_2<0$ 適合於位在直線 $k_2=0$ 與原點同側之圖象內 x,y 之數對值；因設 $x=0, y=0$，得 $k_2=-5$，即 <0．同法可知不等式 $k_1<0$ 及 $k_3>0$ 均適合於圖象位在直線 $k_1=0, k_3=0$，與原點異側諸對 x,y 之值.

因知已知不等式

$k_1<0, k_2<0, k_3>0$，適合於圖象在此三線構成之三角形內諸對 x,y 之值.

習　題　LIII

設下列 a,b,c 諸字母表不等之正數.

1. 證 $a/b+b/a>2$.
2. 證 $(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2$.
3. 證 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.
4. 證 $a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c>6abc$.

5. 證 $a^3+b^3+c^3>3abc$.

6. 解 $x+7>3x/2-8$.

7. 解 $2x^2+4x>x^2+6x+8$.

8. 解 $(x+1)(x-3)(x-6)>0$.

* 9. 解 $y-x-2<0, x-3<0, y+1>0$ 用圖象法.

10. 再以上法解 $y-x>0, y-2x<0$.

11. 再解 $x+y+3>0, y-2x-4<0, y+2x+4>0$.

12. 求證 $x^2+2x+5>0$ 於 x 之一切值皆眞.

13. 用圖象法解 $x^2+y^2-1<0, y^2-4x<0$.

XVIII. 一次不定方程式

672 **兩元獨立方程式.** 設有形同

$$ax+by=c$$

之任一方程式,其中 a,b,c 爲整數,且 a,b 無公因數.今求一式以表 x,y 能適合此方程式之一切整數值,亦有時求另一式以表所有之正整數值.

673 **定理 1.** 凡上述種類之方程式 $ax+by+c=0$ 皆有整數解答.

因 a,b 互爲素數,故用 § 491 所述方法,可求正或負之二整數 p 及 q,令 $ap+bq=1$,且由是 $a(pc)+b(qc)=c$,由是證明 $x=pc, y=qc$,爲 $ax+by=c$ 之解答.

674 **定理 2.** 設 $x=x_0, y=y_0$ 爲方程式 $ax+by=c$ 之整數解答之一,則其所有整數解答可用公式

$$x=x_0+bt, y=y_0-at$$

求得之,其中 t 須予以所有可能之正整數值.

第一，$x=x_0+bt, y=y_0-at$ 永爲 $ax+by=c$ 之一解．(1)

因代入(1)，$a(x_0+bt)+b(y_0-at)=c$,

或，化簡，$$ax_0+by_0=c,$$

由假設 $x=x_0, y=y_0$ 確爲(1)之一解答．

第二，(1)之每個整數解答，皆由 $x=x_0+bt$, $y=y_0-at$ 得之．

因設 $x=x_1, y=y_1$，表任一第二解答．

於是 $$ax_1+by_1=c \text{ 及 } ax_0+by_0=c,$$

相減 $$b(y_1-y_0)=-a(x_1-x_0). \quad (2)$$

從(2)知 b 爲整數 a 及 x_1-x_0 相乘積之因數．由是，因 b 與 a 互爲素數，故 b 必含於 x_1-x_0 內，即爲 x_1-x_0 之因數，§ 492，設稱其商爲 t'，於是得

$$x_1-x_0=bt' \text{ 或 } x_1=x_0+bt'. \quad (3)$$

(3)代入(2)且化簡，又得

$$y_1=y_0-at'. \quad (4)$$

從 §§ 673, 674，知上述種類之任何方程 $ax+by=c$ 有無窮個整數解答．設 a, b 之符號相反亦有無窮個正整數解答．但若 a, b 同號，則僅有有限正數解答或無正數解答． 675

例如，$2x+3y=18$ 之一解答爲 $x=3, y=4$.

故一般解答爲 $x=3+3t, y=4-2t$.

正數解答相當於 $t=-1,0,1,2$ 者即 x, $y=0,6;3,4;6,2;9,0$.

§ 674 之定理令人由一特別解答即可寫出此方程之一般解答，一特別解答常可由心算求得，如 $10x+3y=12$，其解答之一爲 $x=0, y=4$．一特殊解答永可照 § 673 方法求得，亦可由下列所示方法求之． 676

例．求 $7x+19y=213$ 之整數解答．(1)

解出係數較小之變數，此處爲 x，而化簡之得

$$x=\frac{213-19y}{7}=30-2y+\frac{3-5y}{7}. \quad (2)$$

因設 x 爲整數、同時 y 亦爲整數，必 $(3-5y)/7$ 爲整數。稱此整數爲 u，則 $(3-5y)/7=u$。

於是 $$5y+7u=3. \tag{3}$$

如(1)處理(3)，得

$$y=\frac{3-7u}{5}=-u+\frac{3-2u}{5}. \tag{4}$$

$(3-2u)/5$ 必爲整數，今使之等於 v。

於是 $$2u+5v=3, \tag{5}$$

如以處理(1)及(3)者處理(5)，得

$$u=\frac{3-5v}{2}=1-2v+\frac{1-v}{2}. \tag{6}$$

當 $v=1$ 時，分數項 $(1-v)/2$ 爲零而 u 得整數 $=1$.

代 $u=-1$ 入(4)，得 $y=2$.

代 $y=2$ 入(2)，得 $x=25$.

故(1)之一般解答爲

$$x=25+19t, y=2-7t.$$

相當 $t=-1$，及 $t=0$，有二正數解答，卽：$x,y=6,9;25,2$.

(2)，(4)，(6)分數項內 y, u, v 之係數適爲求已知係數 7 及 19 之最大公約數時逐次所得之餘數．但因 7 及 19 無公因數 故最後之餘數(或係數)爲 1．將此法用於 a,b 無公因數之任何方程式 $ax+by=c$，其理同然．故用此法永能得此種方程式之一解．

但實用時甚少需要上示演算之全部．如已得 (4) 卽可看出 $u=-1$，能使 $(3-2u)/5$ 爲整數，由是得 $y=2$，且由(2)得 $x=25$.

677 注意具等係數之方程 $ax+by=c$，設 a，b 有公因數 d，則除 d 亦爲 c 之因數外，不能有整數解答．因設 x，y 爲整數，d 爲 $ax+by$ 之因數亦必爲 c 之因數．如 $4x+6y=7$ 卽無整數解答．

聯立方程. 含三變數之二整係數聯立方程，其整數解 678
答可用下列所示方法求得.

例．求下二方程之整數解答

$$3x+6y-2z=22, \qquad (1)$$

$$5x+8y-6z=28. \qquad (2)$$

先消去 z，且化簡之，

得 $$2x+5y=19. \qquad (3)$$

再如 § 676，求(3)之一般解答.

得 $$x=7+5t, y=1-2t. \qquad (4)$$

再代(4)於(1)，且化簡之.

得 $$2z-3t=5, \qquad (5)$$

再求(5)之一般解答.

得 $$z=1-3u, t=-1-2u, \qquad (6)$$

u 表任何整數.

最後以 $t=-1-2u$ 代入(4)且化簡.

得 $$x=2-10u, y=3+4u, z=1-3u, \qquad (7)$$

爲所求之一般解答，有相當 $u=0$ 之解答爲正，卽 $x=2, y=3, z=1$.

注意設含二變數之導來方程之一無整數解，則已知式亦無整數解答，§ 677.

可以同法解含四變數之三已知方程，餘類推.

含兩個以上變數之單方程. 下例釋明求含兩個以上變 679
數之整係數單方程之整數解答之公式之法.

例．求下方程之整數解.

$$5x+8y+19z=50. \qquad (1)$$

解之求 x，$$x=10-y-3z-\frac{3y+4z}{5}. \qquad (2)$$

$(3y+4z)/5$ 必爲整數，使之等於 u.

於是　　$3y+4z=5u.$　　(3)

解之求 y,　　$y=u-z+\dfrac{2u-z}{3}.$　　(4)

$(2u-z)/3$ 必爲整數，使之等於 v.

於是　　$z=2u-3v.$　　(5)

代(5)於(4),　　$y=-u+4v.$　　(6)

代(5)及(6)入(2),

$$x=10-6u+5v.\qquad(7)$$

公式(5),(6),(7)構成所求之一般解答,其中 u,v 可爲任何整數.

以 $u=2,v=1$ 代入式(5),(6),(7),得(1)之一正解答,卽 $x=3,y=2,z=1$.

習　題　LIV

求下列之一般整數解答;且求其正整數解答.

1. $6x-17y=18$.　　2. $13x-12y=158$.

3. $16x+39y=1$.　　4. $72x+23y=845$.

5. $49x-27y=28$.　　6. $47x-97y=501$.

7. $\begin{cases}2x+5y-8z=27,\\3x+2y+z=11.\end{cases}$　　8. $\begin{cases}5x+2y=42,\\3y-7z=2.\end{cases}$

9. $4x+3y=2z+3$.　　10. $2x+3y+4z=17$.

11. 求方程 $3x+7y=1043$ 之正整數解答之個數.

12. 化分數 41/35 爲分母成 5 及 7 之二正分數之和.

13. 一人購牛犢每頭 $7, 又購羊羔每隻 $5,共用 $110, 問每種各購若干?

14. 分 23 爲三部令其第一部分之三倍,第二部分之二倍,及第三部分之五倍之和爲 79.

15. 求以 5,7,9 除之而得餘數 4,6,8 者之最小數.

16. 分等長之二竿各爲 250 及 253 等分,設置二竿令其兩端取齊,則某二分劃極近?