国立武汉大学理科季刊/国立武汉大学理科季刊委员会·

V.1, no.1（民国19年 [1930] 9月）~（民国37年 [1948] 3月）·—武昌：该校，民国19年 [1930] ~民国37年 [1948].

9.V；插图；附表；26cm.

自1940年第七卷起迁至四川乐山出版。

※ ※ ※ ※ ※

本刊共摄制2卷，16毫米，缩率1：25，原件藏湖北省图书馆，湖北省图书馆摄制，母片藏全国图书馆文献缩微复制中心（北京）。

本刊片卷摄制目录：

第1卷 V.1, no.1~V.3, no.4 （1930.9~1933.6）

第2卷 V.4, no.1~V.8, no.2 （1933.9~1944.10）

（缺：V.7, no.1, no.2）

國立武漢大學

理科季刊

1

本片卷

自 1930 年 1 卷 1 期

至 1933 年 3 卷 4 期

1930年

第1卷

第1期

國立武漢大學

理科季刊

第一卷第一期

QUATERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. I. No. 1 September 1930

本 期 目 錄

中華民國十九年九月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵局特准掛號認爲新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第一卷第一期目錄

國立武漢大學理科季刊

第一卷第二期目錄預告

創刊弁言

學術期刊可以看作一國文化的質量測驗器. 從此類刊物的內容,我們可以窺見一國文化的質素;從此類刊物的種數或其銷行數額,我們可以窺見一國文化,在量的方面,已經到達的程度.

在文化先進諸國,此類刊物,在質量兩方面,自然俱甚可觀;而質素的優越尤爲顯著. 在後進的新興的國家,此類刊物,雖其質素往往不能與先進國家之刊物相伯仲,其種類之多,銷行數額之鉅,則亦往往驚人;近數十年間,日本等新進國家學術刊物的出版狀況,卽其顯例. 這種單純的數量的優越,雖往往不爲學術社會視重,但細察此種數量優越的由來,亦足使人興奮;因此種優越實卽求知慾望普及的表現,實卽科學知識的需要普及的表現,換句話說,就是新興國家的象徵.

在吾國出版物中,學術期刊的質素如何,姑置不論,卽僅就此類刊物的種類或銷行數量而言,亦貧乏不可名狀. 從知二三十年來,吾國的政治與教育,在表面上雖然經過了幾度的改革,國人的求知慾望與其科學知識的需要迄

今實無重大進展. 這實在使我們對於吾國學術前途的進展,不能不深致疑慮.

學術的進展,其條件誠不一而足;然衆多條件之中,鑑賞與批評可以說是基本的條件. 學術期刊就是鑑賞與批評的媒介. 學術期刊的存在可使從事於某種學問之人,以其創作或創見陳諸從事于同一學問者之前,而供其鑑賞或批評. 而凡從事于同一學問者,并得採取鑑賞者或批評者之見地,立爲新的研究基礎,以企圖新的結果. 由是,一切學術上的研究,乃必然的成爲一種『集合的研究』其進展之度自非單純的個人研究所能比擬. 因爲人類本無所謂超人,脫離羣力——即脫離外來的鼓舞與外來的糾正——任何個人,在科學上或藝術上,決難有偉大的成就. 這就是鑑賞與批評所以成爲學術進展的基本條件的原因.

國立武漢大學同人,鑒于國內學術期刊之缺乏,且因深信『集合的研究』爲學術進展的基本條件,乃一再集議決定刊行三種期刊,即社會科學季刊,文哲季刊,理科季刊. 同人之意,頗冀諸刊出版以後,不但本校同人能利用其篇幅以爲相互講學之資,即校外學者亦不惜以其學術文字,惠此諸刊,使成爲全學術界之公共刊物. 同人之意,并盼望諸刊出版以後,全國負有學術使命的機關,各就其特別致力之範圍,刊行類似的刊物,以補本校諸刊之所不逮.

這些期望,倘能于最短期間成爲事實,本校同人將引爲大慰. 學術的提倡本非任何機關所能獨力肩負的一種責任. 茲故于諸刊次第付印之際,鄭重的撰此數言述說本校同人對于全學術界的期待.

王世杰

代數方程式之葛洛華氏理論

(Théorie de Galois des équations algébriques)

曾 瑊 益

第一章 緒 言

設 n 次之一般代數方程式爲

$$f(x)\equiv x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

其中之係數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 爲常數,或爲獨立變數,或爲其他諸變數之有理函數;其根爲 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

對於任意一個方程式,若施以有限次數之加減乘除(除時之除數不爲零)及開方五種代數運算,則當 $n<5$ 時,能解一般之各個方程式,但當 $n>4$ 時,則不能解之.此種事實,在十八世紀以前,曾無人揭發其奧妙,雖大數學家如歐拉(Euler, 1707 – 1789) 之賢,猶疑一切方程式可以代數解法解之.迄至 1770 年蘭格倫 (Lagrange) 在"柏林大學學報"(Memoires de l'académie royale de Berlin) 發表一篇論文,題曰"方程式之代數解法之研究"(Reflexions sur la résolution algébrique des équations) 揭示一通法,謂解一個方程式,可由其所求得較低次之方程式決定之.但依法以解五次方程式,其所得者反爲一個高於五次之六次式.於是引起學者之注意.厥後1799年魯泥飛 (Ruffini) 在義國波倫亞 (Bologna) 出版之

"方程式理論" (Teoria generale delle equazioni) 書中,明白證明五次方程式爲不可解.是爲此種理論之鼻祖,惟首先嚴密證明之者,應推挪威少年數學家亞伯爾.(Abel, 1802–1829)亞氏於 1824 年刊印一小册證明其理,并專函請示於高斯,(Gauss) 不意高斯竟漠然置之,但亞氏定理嗣後二年復加修增,重爲刊行.其詳細證明,可於 1826 年在柏林開始發行之"克勒爾氏數學雜誌" (Crelle'sche Journal) 之第一卷,或"亞氏全集" (Œuvres Complètes) 中見之.此外對此有重要之貢獻者,則爲科厘 (Cauchy) 哈密爾敦 (Hamilton) 聞特策 (Wantzel) 葛洛華 (Galois) 諸數學家.

法人葛洛華 (Évariste Galois, 1811–1832) 之著作,以方程式之理論,移爲代換羣 (Substitution Group) 之理論.於此兩者之間,確立種種相當之關係,俾成不可搖動之基礎,卽證明各個方程式屬於某種代換羣,而由該羣之性質,卽能確定屬於其羣之方程式能否可以根數解法 (Solution by Radicals) 解之.葛氏著作,於其死後十五年方始刊行,卽於 1846 年在巴黎"數學雜誌" (Journal de Mathématiques) 公諸於世.但惜其年方少艾,卽與人決鬪而死,致遺留有重要理論,未予以充分之說明.此中缺點,再經柏提 (Betti) 補充之,於 1852 年發表於羅馬出版之"數學物理彙報," (Annali di Scienze Matematiche e Fisiche) 乃成無上之珍品.此外數學家如約但 (Jordan) 赫美 (Hermite) 克洛勒客 (Kronecker) 等,亦均爲對此學饒貢

有功績之名士也.

第二章　代換羣及有理函數

定理一: 對於 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之一切代換,不使有理函數 $\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 發生變化者,成爲一羣.

因一羣中,任意個數代換之乘積,亦屬於一羣故也.

此羣以 G 表之,名曰"函數 Φ 之羣."而函數 Φ 則名曰"屬於羣 G."

逆定理二: 已知對於 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之一個代換羣 G,則可作一個有理函數 $\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 屬於 G.

設　$G=(a\equiv 1, b, c, \cdots, l)$ 并攷察次之 n! 値之函數

$$V=m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n$$

式中之 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 均爲不相同者,今對於 V 施以 G 之一切代換,則得

$$V_a\equiv V,\quad V_b,\quad \cdots,\quad V_l$$

此式之各値均爲不相同者,又施以 G 之任意代換 c, 則得

$$V_{ac},\quad V_{bc},\quad \cdots,\quad V_{lc}$$

此等之値仍爲原函數之又一種排列而已.試適當選擇一個不變常數 (Parameter) t, 則次之對稱函數

$$\Phi\equiv(t-V)(t-V_b)\cdots\cdots(t-V_l)$$

施以不在 G 中之各個代換 s 必生變化,是以

對稱函數 $(V_a, V_b \cdots, V_l)=\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 施以 G 之一切代換均不生變化.但施以其他代換則否.

定理三: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之一切有理對稱函數,可以下列諸初等對稱函數作成各項而表示之爲有理式.

$$a_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$a_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = x_1 x_2 \cdots x_n$$

$$\text{對稱函數}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \text{有理函數}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

定理四: 若一個有理函數 $\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 取 ϱ 個不同之值 $\Phi_1 = \Phi, \Phi_2, \cdots, \Phi_\varrho$ 施以一切之 $n!$ 個代換,則 Φ 能滿足一個 ϱ 次之方程式,其係數爲 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之有理函數.

因 ϱ 個不同之值 $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_\varrho$ 同時施以一切之 $n!$ 個代換,必不生變化,故仍爲一個對稱函數,亦即爲 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之函數,因是可以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 作成各項而表示之爲有理式.

故次之方程式

$$(y - \Phi_1)(y - \Phi_2)\cdots(y - \Phi_\varrho) = 0$$

之諸係數,當其根爲 Φ 之 ϱ 個值時,可以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 作成各項而表示之爲有理式.

此方程式名曰"分解方程式,"(Resolvent Equation) 或簡稱爲"方程式 $f(x) = 0$ 之分解式."

定理五: 若一個有理函數 $\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 屬於一羣 G,他一個函數 ψ 屬於 G 之一附羣 (Subgroup) H,其指數(Index)爲 ν 以簡號表之爲

$$\begin{array}{l} G : \Phi \\ \nu \,| \\ H : \psi \end{array}$$

則　$\Phi=$有理函數$(\psi; a_1, a_2, \cdots, a_n)$於此$\psi$中之$\nu$個相配值,(Conjugate Values)能滿足一個ν次之分解式.其係數爲Φ及$a_1, a_2, \cdots, a_n$之有理函數.

此定理爲蘭格倫所示謂之"蘭格倫定理."其證明可分爲兩段如下:

A)　設作成乘積$\Phi\psi^m$此式中之m爲任意之整數.則此函數施以H之一切代換必不生變化.故以ϱ表示對稱羣$G_{n!}$中之羣H之指數.則函數$\Phi\psi^m$若施以一切之n!個代換,應得ϱ個不同之值.故設

$$\Phi_1\psi_1^m=\Phi\psi^m, \quad \Phi_2\psi_2^m, \quad \cdots, \quad \Phi_\varrho\psi_\varrho^m$$

則其總和

$$\Phi_1\psi_1^m+\Phi_2\psi_2^m+\cdots\Phi_\varrho\psi_\varrho^m=s_m$$

爲$x_1, x_2, \cdots, x_n$之對稱函數.故可以$a_1, a_2, \cdots, a_n$作成各項而表示之爲有理式.

令　$m=0, \ 1, \ 2, \ \cdots, \ \varrho-1$

代入上式,卽得

$$\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_\varrho=s_0$$

$$\psi_1\Phi_1+\psi_2\Phi_2+\cdots+\psi_\varrho\Phi_\varrho=s_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_1^{\varrho-1}\Phi_1+\psi_2^{\varrho-1}\Phi_2+\cdots+\psi_\varrho^{\varrho-1}\Phi_\varrho=s_{\varrho-1}$$

解此等方程式之Φ_1,則得Φ_1表示爲$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_\varrho; a_1, a_2, \cdots, a_n$之有理函數,而對於$\varrho-1$個量$\psi_2, \psi_3, \cdots, \psi_\varrho$爲對稱式.但此等量之任意對稱函數,可轉換(Transform)爲一個ψ之函數,且爲$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_\varrho$之對稱函數,故亦爲$\psi_1, a_1, a_2, \cdots, a_n$之對稱函數.

試將Φ表出,使其項中含有ψ,則得下式

$$\Phi = \frac{g(\psi, a_1, a_2, \cdots, a_n)}{\triangle_4}$$

此分母$\triangle_4$乃表示ϱ個值$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_\varrho$之一切差數之乘積之平方,即

$$\triangle_4 = (\psi_1-\psi_2)^2(\psi_1-\psi_3)^2\cdots(\psi_{\varrho-1}-\psi_\varrho)^2$$

若在兩個特別情形時,設$G=H$,而$H=1$,則得定理如下:

I. 屬於同一羣中之一切有理函數,可以其中任一式作成各項表示之爲有理式.

II. $x_1, x_2, \cdots, x_n$之各個有理函數,可以任意之$n!$值函數如

$$V = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n$$

作成各項表示之爲有理式.

B) 在G中之ν個ψ之相配諸值

$$\psi_1=\psi, \quad \psi_2, \cdots, \quad \psi_\nu$$

若施以G之任一代換,則所得者僅仍爲此等值之彼此互換.故下列方程式

$$(\psi-\psi_1)(\psi-\psi_2)\cdots(\psi-\psi_\nu)=0$$

之諸係數爲$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_\nu$之對稱函數.施以函數$\Phi$之羣G之一切代換,必不生變化.

第二章　葛洛華氏理論

一般方程式 $f(x)=o$ 之解.可由幾個較簡之其他方程式,名曰分解式如下所書出者決定之.

$$f_1(x)=o,\quad f_2(x)=o,\quad \cdots\cdots$$

此組分解式,各有特別之法求得.而各個新方程式之解,亦各有新法求之.

葛洛華氏理論,爲求此等分解式之一個普遍完美之法則.卽證明每一方程式含有無數組之如此分解式,而於各組間示以明瞭之互相關係,於是無論遇及若何問題,若方程式可以根數解法求之之時,則示以應如何施以有限次之運算,使事實與樣式均瞭如指掌,可易求得其解;若方程式不能用根數解法求之之時,則示以其中有如何之基本無理式發生,而其根所含之項將如何表示之.

蘭格倫曾證明各種分解式之諸根,可表示爲已知方程式之諸根之有理函數.因此得一基本定理.卽方程式之解答,關係乎其根之有理函數之性質.

此種奇妙之點.蘭格倫曾在其所著"方程式之代數解法之研究"論文中,對於有理函數之性質精密研究之.尤對於此等函數值之數目,如當 n 個元 (Elements) 就其一切可能之排列法任意排列時,應有若干個,特別注意焉.因此

遂導入於羣之理論.

嗣後葛洛華爲之長足進步,專一注意於方程式係數之性質.故特名曰“葛洛華氏理論.”

設　$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = o$

爲求解答之一方程式.假定其根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均爲不相同者如此可仍不失方程式之普遍性.其係數爲屬於有理範圍(Domain of Rationality) R 之中,則可作成諸根之 n! 値之有理函數,含有在 R 中之諸係數.設如此之一個函數爲

$$V_1 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n$$

其中 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 爲自 R 中適當選出者.對此函數施以對稱羣($S_n = \overline{s_1 = 1}, \ s_2 \ s_3 \ \cdots, \ s_n$)之 n! 個代換.且令 s_k 將 V_1 改變爲 $V_k = u_{k_1} x_1 + u_{k_2} x_2 + \cdots + u_{k_n} x_n$.於是作成下之方程式

$$F(V) \equiv (V - V_1)(V - V_2) \cdots (V - V_{n!}) = o$$

故在 V 中多項式之諸係數爲範圍 R 中之諸量.若 F(V) 爲在 R 中可約 (Reducible) 之式,令 $F(V) = F_1(V) F_2(V) \cdots,$ 則此式中任一個不可約之因子爲 $F_k(V) = o$. 若 F(V) 爲在 R 中不可約之式,則取 $F_k(V)$ 卽爲 F(V) 之自身,於是

$$F_k(V) = o$$

爲屬於根 V_1 在 R 中之一個不可約方程式.如此者謂之方程式 $f(x) = o$ 在範圍 R 中之一個葛洛華氏分解式.

同樣可作成 $f(x) = o$ 之諸根之一個有理函數,施以任一個已知代換羣($H = 1, \ a, \ b, \ \cdots, \ l.$)之在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中者,

均不生變化.

如此之一個函數爲

$$\psi=(V-V_1)(V-V_2)\cdots(V-V_i).$$

今設葛洛華分解式之諸根表示之爲

$$V_1,\quad V_2,\quad \cdots,\quad V_i;$$

此等値爲從 V_1 施以次列之諸代換而得者

$$G=\overline{s_1=1,\quad s_2,\quad \cdots,\quad s_i}$$

此等代換 G 作成一羣,名曰方程式 $f(x)=o$ 在範圍 R 中之葛洛華氏羣

故解一個已知方程式之法,可分爲三步: (1)決定葛洛華氏羣. (2)決定其各附羣. (3)作成屬於此等附羣之諸根之有理函數. 但決定葛洛華氏羣者,化簡之卽爲決定在一個所設範圍中葛洛華分解式之不可約之諸因子.又作成屬於已知羣之諸根之有理函數,化簡之卽爲決定諸根之兩個有理函數之相等與否.

惟是一般方程式之完全解答,不僅求得一根或數根卽爲已足,但須求其共有之 n 個根.故若視一根爲一個已知量,而此根爲從幾個已知量施以有理之運算所求得者,則他根均可求得.是以已知方程式之解答,等於決定一個 n! 値之函數

$$V=m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n.$$

蓋若 n 個根爲已知時,則 V 亦爲已知.反之依關格倫之定

理.其諸根 $x_1, x_2, \cdots, x_\alpha, \cdots, x_n$, 可以 V 爲諸項而表示之爲有理式如下:

$$x_\alpha = \text{有理函數}(V; a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

今設於諸係數之"對稱羣 $G_{n!}$"及 V 之"羣 1"之間插入一組之羣

$$H, \quad K, \quad \cdots, \quad M,$$

其各緊相依連之前後兩羣,後者均爲前者之附羣,設令 λ 爲 G 中 H 之指數,μ 爲 H 中 K 之指數.其餘準此.最後 ϱ 爲 M 中之 1 之指數,又設

$$\xi, \quad \eta, \quad \cdots, \quad \psi$$

爲各屬於羣 H, K, ⋯, M 等之諸有理函數,則

$$f(x) = 0$$

之解答,可以下列之簡單圖式表示之

$$\begin{array}{llll}
G_{n!} & : & a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n & \\
| & & & \\
H & : & \xi & \xi^\lambda + R_1(a_1, a_2, \cdots, a_n)\,\xi^{\lambda-1} + \cdots = 0 \\
\vdots & & & \\
K & : & \eta & \eta^\mu + R_2(\xi, a_1, a_2, \cdots, a_n)\,\eta^{\mu-1} + \cdots = 0 \\
\vdots & : & \vdots & \vdots \\
M & : & \psi & \vdots \\
\vdots & & & \\
1 & : & V & V^\varrho + R\psi(a_1, a_2, \cdots, a_n)V^{\varrho-1} + \cdots = 0
\end{array}$$

如此之諸分解方程式,名曰'分解方程式之連鎖.' (Chain of Resolvent Equations)

在下二特別情形時,已知方程式化簡爲分解方程式之

連鎖,尤爲簡單異常.

(I)若諸指數 $\lambda, \mu, \cdots, \varrho$ 均小於n.

(II)若連鎖中諸方程式可變爲二項式.

在(I)之情形,常可化簡爲(II)之情形.斯時也函數 V 可由已知量之諸根用開方法作成之.於是方程式可以根數解法解之.

第四章　根數解法

一個方程式可用根數解法解之之必要且充分之條件如下:

"方程式之諸羣含有一組合成式.(A series of Composition)其式中之諸因子必均爲素數."

茲先證明此條件爲必要者.假定諸指數均爲素數,仍可不失其普遍性.設 $\xi, \eta, \cdots, \psi$ 爲表示諸根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 時所用之一切根數.則其解答可書爲以諸素數爲次數之二項方程式之一個連鎖式如次:

$$\xi^\lambda = L(R,' R,'' \cdots)$$

$$\eta^\mu = M(\xi, R,' R,'' \cdots)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi^\varrho = P(\cdots, \eta, \xi, R,' R,'' \cdots)$$

$$x_\alpha = R(\psi, \cdots, \eta, \xi, R,' R,'' \cdots) \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, n)$$

於是此等二項方程式之各個,即連鎖式之全體,可以素數爲次數之亞伯爾方程式(Abelian Equations)之一個連鎖

式代替之如次:

$\Phi(y; R, R,''\cdots) = o$　　在 R 範圍中之亞伯爾方程式

$\psi(z; y, R, R,''\cdots) = o$　　在 (y, R) 範圍中之亞伯爾方程式

………………………………　　………………………………………………

$\Theta(w; \cdots, z, y, R, R,''\cdots) = o$ 在 $(\cdots, z, y, R)$ 範圍中之亞伯爾方程式

$x_\alpha = \mathfrak{f}_\alpha(w, \cdots, z, y, R, R,''\cdots)$　$(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$

試先解第一亞伯爾方程式 $\Phi(y) = o$, 增附諸根中之一根 y 於其範圍 R 內.則 $f(x) = o$, 之羣 G, 化簡爲附羣 H.再解第二亞伯爾方程式 $\psi(z) = o$, 增附以一根 z 於其擴大範圍 (y, R) 內.則羣 H 化簡爲附羣 K.如是進行,至於最後之方程式 $\Theta(w) = o$, 增附以一根 w. 得最末之範圍爲 $(w, \cdots, z, y, R)$ 對此卽得 $f(x) = o$ 之羣全等於 G_1。

若每次所增附之量,非爲有理函數,則得亞伯爾之結果如次:

一個可解之代數方程式之解答,常可表演爲以素數爲次數之二項方程式之連鎖式,其諸根爲以已知方程式之諸根及一之某種根作成各項而表示之爲有理式.

次再證明該條件爲充分者.

因若合成式之諸因子 $\lambda, \mu, \cdots, \varrho$ 均爲素數時,則諸分解方程式均爲以素數爲次數之規則循環方程式. (Regular Cyclic Equations) 而以素數爲次數之規則循環方程式,恆可以根數解法解之也.

用此條件以攷察 n 次之一般方程式.如當 $n>4$ 時,則得合成式之因子爲

$$2 \quad 與 \quad \frac{n!}{2}.$$

故高於四次之普通方程式,不能以根數解法解之也.

普通方程式可以根數解法解之者,其主要之性質,有下列各種:

(1)一個方程式,其係數含於範圍 R 內,而對於 R 可以根數解法解之者,必須其羣亦僅須其羣屬於 R 者爲可解之羣.

(2)其羣必含有一組代換

$$I, \quad t_1, \quad t_2, \quad t_3, \quad \cdots, \quad t_\nu, \quad t_{\nu+1}.$$

而此組代換有次之二種性質:

I. 其羣 $G_\lambda(=1, t_1, t_2, \cdots, t_\lambda)$ 之諸代換,可以彼此互易.(Commutative) 但屬於羣 $G_{\lambda-1}(=1, t_1, t_2, \cdots, t_{\lambda-1})$ 之諸代換則否.

II. t_λ 之最低冪之在 $G_{\lambda-1}$ 中者,其指數爲一素數.

(3)其主要組之合成式

$$G, \quad H, \quad K, \quad M, \quad \cdots, \quad 1$$

須具有特性,卽各羣中諸代換可以彼此互易.但屬於其次所依連之附羣者則否.

(4)若一羣 Γ 對於可解之羣 G,爲單同形,(Simply Isomorphic)則 Γ 亦爲可解之羣.

(5)若一羣 Γ 對於可根之羣 G 爲複同形, (Multiply Isomorphic)且若 G 中之代換 1 相當於 Γ 中之附羣 Σ,再若 Σ 爲可解之羣,則 Γ 亦爲可解之羣.

(6)單一非循環羣爲不可解.

(7)非完全羣(Perfect Group)爲可解.

(8)可解羣中之各個附羣爲可解.

(9)各個亞伯爾羣爲可解.

(10)設 p 與 q 均爲素數,則 p q 級 (Order) 之各羣爲可解.

(11)設 p 爲素數,則 q^m 級之羣爲可解.

(12)可解諸羣之直接乘積爲可解.

(13)一個可解羣中之各個因子羣 (Factor Group) 爲可解.

(14)各個循環羣爲可解.

(15)各個亞伯爾羣爲可解.

(16)各個葛洛華方程式,或變循環方程式 (Metacyclic Equation) 爲可解.

第五章 三次方程式

設普通之三次方程式爲

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = o$$

其根爲 x_1, x_2, x_3,

或令化簡之三次方程式爲

$$y^3 + py + q = o$$

其根爲 y_1, y_2, y_3,

三次方程式 $x^3+mx=n$ 之解法,於 1505 年義人費羅(Ferro 亦作 Ferri 或 Ferreo, 拉丁名作 Ferreus)曾傳授其徒菲俄,(Fior 亦作 Floridus 或 Floridas) 惟其法未經刊行以致失傳.嗣後義國布里西亞(Brescia)之結舌者塔大隆(Tartaglio 卽口訥者之謂,伊原名曰 Nicolo)復發見之,塔氏於 1535 年與菲氏相約,作數學之比賽,約期未至,聞對方已得傳遞,乃竭智力以求之,結果竟於比賽期前得 $x^3 \pm mx=n$ 形之解.其後於 1541 年更得 $x^3 \pm ax^2=\pm b$ 形之解.但塔氏對此嚴守祕密,不肯示人,孰意遇及一怪傑,其天資奇特,然行爲乖異,有時爲好學之士,有時成貪賭之徒,有時充教授醫士,有時作逆犯囚人,此人爲誰,卽米蘭 (Milan) 之卡丹 (Cardan) 是也.卡丹於 1539 年設計誘塔氏至米蘭,懇乞其示以解法,并矢言代爲保守祕密,但以後卡丹竟違背信約,將其解法宣布於 1545 年在努連堡 (Nürnberg) 出版之拉丁文代數所謂'大術' (Ars Magna,蓋在十五十六世紀義人常稱代數曰大術,算術曰小術)者之書中.惟仍不忘本,載明此法係得自塔氏.厥後解三次方程式於 1591 年則有維塔(Vieta)之解法.於 1650 年則有哈第 (Hudde) 之解法.至 1770 年又有蘭格倫依羣之理論,得一直接之解法.

用三個文字所作之諸羣如下:

對稱羣: $G_6^3=\{1,\ (1\,2\,3),(1\,3\,2),(2\,3),(1\,3),(1\,2)\}$

交代羣: $G_3^3=\{1,\ (1\,2\,3),(1\,3\,2)\}$

$$G_2^{3'} = \{1,\ (2\ 3)\}$$

$$G_2^{3''} = \{1,\ (1\ 3)\}$$

$$G_2^{3'''} = \{1,\ (1\ 2)\}$$

卡丹之解法可以下列圖式表出之.

$$\begin{array}{lll} G_6^3 & : p,q & y_1+y_2+y_3=0,\ y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=p,\ -y_1y_2y_3=q \\ 2\,| & & \\ G_3^3 & : \xi & \xi^2=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} \quad \text{式中}\ \xi\equiv\frac{\sqrt{-3}}{18}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1) \\ 3\,| & & \\ G_1^3 & : \eta & \eta^3=-\frac{q}{2}+\xi \quad \text{式中}\ \eta\equiv\frac{1}{3}(y_1+\omega y_2+\omega^2 y_3) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} G_2^{3'} & : y_1 & y_1=\eta-\frac{p}{3\eta} \\ | & & \\ G_1^3 & : \eta & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} G_2^{3''} & : y_2 & y_2=\omega\eta-\frac{\omega^2 p}{3\eta} \\ | & & \\ G_1^3 & : \eta & \left(\omega=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} G_2^{3'''} & : y_3 & y_3=\omega^2\eta-\frac{\omega p}{3\eta} \\ | & & \\ G_1^3 & : \eta & \end{array}$$

$$\therefore \begin{cases} y_1= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\ y_2=\omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\ y_3=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \end{cases}$$

維塔之解法或哈第之解法如下:

G_6^3 : p, q $\qquad y_1+y_2+y_3=0,\ y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=p,\ y_1y_2y_3=-q$

2

G_3^3 : $S=s^3$ $\qquad s^6+qs^3-\frac{p^3}{27}=0,\ \left(令\ y=s-\frac{p}{3s}\right)$

3

或 $S^2=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$ 式中 $\begin{cases} s_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q}{27}+\frac{q^2}{4}} \\ s_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}} \end{cases}$

G_1^3 : s_1 $\qquad s_1=\sqrt[3]{S}$

$$\therefore \begin{cases} y_1= s_1+s_2 \\ y_2=\omega s_1+\omega^2 s_2 \\ y_3=\omega^2 s_1+\omega s_2 \end{cases}$$

蘭格倫之解法如下:

G_6^3 : a_1, a_2, a_3, $(\psi-\psi_1)(\psi-\psi_2)\cdots(\psi-\psi_6)$ 之係數 $=0$ 式中

或 $\psi^6+(\psi_1^3+\psi_4^3)\psi^3+\psi_1^3\psi_4^3$ 之係數 $=0$ $\qquad \psi_1=x_1+\omega x_2+\omega^2x_3$

或 $\psi^6+(2a_1^3-9a_1a_2+27a_3)\psi^3$ $\qquad \psi_2=x_2+\omega x_3+\omega^2x_1=\omega^2\psi_1$

$+(a_2^2-3a_2)^3$ 之係數 $=0$ $\qquad \psi_3=x_3+\omega x_1+\omega^2x_2=\omega\psi_1$

2 $\qquad \psi_4=x_1+\omega x_3+\omega^2x_2$

$\psi_5=x_3+\omega x_2+\omega^2x_1=\omega^2\psi_4$

$\psi_6=x_2+\omega x_1+\omega^2x_3=\omega\psi_4$

G_3^3 : $\Theta\equiv\psi^3$ $\quad \Theta^2+(2a_1^3-9a_1a_2+27a_3)\Theta+(a_2^2-3a_2)^3=0$ 式中之兩根

$\Theta_1=\psi_1^3,\ \Theta_2=\psi_4^3$

3 $\qquad$ 或

$\psi_1=\sqrt[3]{\Theta_1},\ \psi_4=\sqrt[3]{\Theta_2}$

G_1^3 : ψ

$$\therefore\begin{cases} x_1=\frac{1}{3}(-a_1+\sqrt[3]{x_1+\omega x_2+\omega^2x_3}+\sqrt[3]{x_1+\omega x_2+\omega^2x_3} \\ x_2=\frac{1}{3}(-a_1+\omega^2\sqrt[3]{x_1+\omega x_2+\omega^2x_3}+\omega\sqrt[3]{x_1+\omega x_2+\omega^2x_3} \\ x_3=\frac{1}{3}(-a_1+\omega\sqrt[3]{x_1+\omega x_2+\omega^2x_3}+\omega^2\sqrt[3]{x_1+\omega x_2+\omega^2x_3} \end{cases}$$

或

G_6^3 : a_1, a_2, a_3

2 |

G_3^3 : $\sqrt{\Delta}$ $\quad \Delta=-27a_3^2+18a_3a_2a_1-4a_3a_1^3-4a_2^3+a_2^2a_1^2$

式中 $\Delta=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$

3 |

G_1^3 : ψ_1 $\quad \psi^3=\frac{1}{2}-2a_1^3+9a_1a_2-27a_3-3\sqrt{-3}\Delta$

式中 $\psi_1=x_1+\omega x_2+\omega^2x_3$

第六章 四次方程式

設普通之四次方程式為

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$$

其根為 x_1, x_2, x_3, x_4.

或令化簡之四次方程式為

$$y^4+py^2+qy+r=0$$

其根為 y_1, y_2, y_3, y_4.

四次方程式之解法,最初為卡丹之學生斐拉里(Ferrari)所發明.斐氏幼時家寒,僅作卡丹之侍童,嗣後充其祕書,且被收為學生,當卡丹得一四次方程式,未能得其解法乃以之與斐氏.斐氏竟告成功.其法卽分方程式為兩個平方之和,變為求一個三次方程式之解.卡丹以此解法,刊載於其1545年所著之"大術"書中.其後維塔於1590年略變其

解法.笛卡兒 (Descartes) 於 1637 年化之爲二個二次因子之乘積.凡斯庫騰 (Van Schooten) 於 1649 年又修改之.秦浩生 (Tschirnhausen) 於 1683 年消去其第二項及第四項.歐拉於 1732 年蘭格倫於 1767 年均先假定諸根之形式,亦得其解答.而辛普孫 (Simpson) 於 1745 年麥立萌 (Merriman) 於 1892 年,則由其一般之形式解之。

用四個文字所作之諸羣如下

對稱羣: $G_{24}^{4}=\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), (12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$

交代羣: $G_{12}^{4}=\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$

八級羣: $G_{8}^{4}=\{1, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423),\}$

(Octic Group)

$G_{8}^{4'}=\{1, (13), (24), (13)(24), (12)(34), (14)(32), (1234), (1432)\}$

$G_{8}^{4''}=\{1, (14), (32), (14)(32), (13)(42), (12)(43), (1342), (1243)\}$

軸羣: $G_{4}^{4}=\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

(Axial Group) $G_{4}^{4'}=\{1, (12), (34), (12)(34)\}$

....

半軸羣：　$G_2^4=\{\ 1,\quad (12)(34)\ \}$

(Semi-axial Group) $G_2^{4'}=\{\ 1,\quad (13)\ \}$

$G_2^{4''}=\{\ 1,\quad (12)\ \}$

....

斐拉里之解法如下:

G_{24}^4 ： $a_1,a_2,a_3,a_4,$

3

G_8^4 ： ξ_1　　$\xi^3-a_2\xi^2+(a_1a_3-4a_4)\xi$　　式中

$-a_1^2a_4+4a_2a_4-a_3=0$　　$\xi_1=x_1x_2+x_3x_4$

2　　$\xi_2=x_1x_3+x_2x_4$

$\xi_3=x_1x_4+x_2x_3$

G_4^4 ： η_1　　$\eta^2=a_1^2-4a_2+4\xi_1$　　式中

2　　$\eta=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-4(x_1+x_2)(x_3+x_4)$

G_2^4 ： ψ_1　　$\psi^2+\left(\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}\eta\right)\psi$　　式中

$+\frac{1}{2}\xi_1-\frac{1}{2}(a_1\xi_1-a_3)/\eta$　　$\psi_1=x_1+x_2$

2　　$\psi_2=x_3+x_4$

G_1^4 ： x_1

歐拉及蘭格倫之解法如下:

G_{24}^4 ： $y^4+6By^2+4Cy+D$ 之係數 $=0$

3

G_8^4 ： S　　$S^3+3BS^2+\frac{1}{4}(9B^2-D)S-\frac{1}{4}C^2=0$

2

G_4^4

2

G_2^4

2

G_1^4

$$\therefore\left\{\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\\ y_2 &= \sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}-\sqrt{S_3}\\ y_3 &= -\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}-\sqrt{S_3}\\ y_4 &= -\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\end{aligned}\right.$$

蘭格倫之解法如下:

$$\begin{array}{lll}
G_{24}^{4} & : & a_1, a_2, a_3, a_4\\
3\,| & & \\
G_{8}^{4} & : & \xi
\end{array}$$

$$\xi^3-(3a_1^2-8a_2)\xi^2+(3a_1^4-16a_1^2a_2+16a_2^2+16a_1a_3-64a_4)\xi-(a_1^3-4a_1a_2+8a_3)^2=0$$

$$式中\left\{\begin{aligned}\xi_1&=\{(x_1+x_2)-(x_3+x_4)\}^2\\ \xi_2&=\{(x_1+x_3)-(x_2+x_4)\}^2\\ \xi_3&=\{(x_1+x_4)-(x_3+x_2)\}^2\end{aligned}\right.$$

$$\begin{array}{llll}
 & : & \eta & \eta^2-\xi_1=0\\
G_{4}^{4} & & & \\
 & : & \psi & \psi^2-\xi_2=0\\
2\,| & & & \\
G_{2}^{4} & : & & \\
2\,| & & & \\
G_{1}^{4} & : & x_1 &
\end{array}$$

$$式中\quad\begin{aligned}\eta_1&=(x_1+x_2)-(x_3+x_4)\\ \psi_1&=(x_1+x_3)-(x_2+x_4)\end{aligned}$$

$$G_{24}^{4} : a_1, a_2, a_3, a_4$$

$$3 \,|$$

$$G_{8}^{4} : \xi \qquad \xi^3-a_2\xi^2+(a_1a_3-4a_4)\xi-a_1^2a_4+4a_2a_4-a_3=0$$

$$\eta_1^2=a_1^2-4a_2+4\xi_1$$

$$2 \qquad \eta \qquad (H^2-\eta_1^2)(H^2+-\eta_2^2)(H^2-\eta_3^2)=0 \qquad 式中\begin{cases}\eta_1=x_1+x_2-x_3-x_4\\ \eta_2=x_1+x_3-x_2-x_4\\ \eta_3=x_1+x_4-x_2-x_3\end{cases}$$

$$H^2=\eta$$

$$G_4^4 : \begin{cases}\eta\\ \sqrt{\psi_1}\end{cases}$$

$$\psi_1=\eta_1^2$$

$$2 \qquad \sqrt{\psi_1} \qquad \psi_2=\eta_2^2 \qquad 式中\begin{cases}\sqrt{\psi_1}=x_1+x_2-x_3-x_4\\ \sqrt{\psi_2}=x_1+x_3-x_2-x_4\\ \sqrt{\psi_3}=x_1+x_4-x_2-x_3\end{cases}$$

$$\psi_3=\eta_3^2$$

$$G_2^4$$

$$2 \,|$$

$$G_1^4 : x_1$$

$$\therefore \begin{cases}x_1=\frac{1}{4}-a_1+\sqrt{\psi_1}+\sqrt{\psi_2}+\sqrt{\psi_3}\\ x_2=\frac{1}{4}-a_1+\sqrt{\psi_1}-\sqrt{\psi_2}-\sqrt{\psi_3}\\ x_3=\frac{1}{4}-a_1+\sqrt{\psi_1}+\sqrt{\psi_2}-\sqrt{\psi_3}\\ x_4=\frac{1}{4}-a_1+\sqrt{\psi_1}-\sqrt{\psi_2}+\sqrt{\psi_3}\end{cases}$$

$$G_{24}^{4} : a_1, a_2, a_3, a_4$$

$$3 \,|$$

$$G_8^4 : \xi \qquad \xi^3-a_2\xi^2+(a_1a_3-4a_4)\xi$$

$$2 \qquad -(a_1^2a_4-4a_2a_4+a_3^2)=0 \qquad 式中 \begin{matrix}\xi_1=x_1x_2+x_3x_4\\ \xi_2=x_1x_3+x_2x_4\\ \xi_3=x_1x_4+x_2x_3\end{matrix}$$

$$\eta \qquad \eta^2-\xi_1\eta+a_4=0 \qquad 式中 \begin{matrix}\eta_1=x_1x_2\\ \eta_2=x_3x_4\end{matrix}$$

$$G_4^4 :$$

$$2 \qquad \psi \qquad \psi^2+\frac{a_1^2\eta_2^2+a_4^2}{(\eta_1-\eta_2)^2}=0 \qquad 式中 \begin{matrix}\psi_1=x_1+x_2\\ \psi_2=x_3+x_4\end{matrix}$$

$$G_2^4$$

$$2 \,|$$

$$G_1^4 : x_1$$

$G_{2\,4}^{\,4}: a_1, a_2, a_3, a_4$

2

$G_{1\,2}^{\,4}: \Phi$　　$\Phi^2-\Delta=0$　式中 $\Phi=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4)$

$\Delta=\frac{1}{27}(4I_2^3-I_3^2)$

$I_2=a_2^2-3a_1a_3+12a_4$

3

$I_3=27a_1^2a_4+27a_3^2-9a_1a_2a_3-72a_2a_4+2a_2^3$

$G_4^4: \psi$　　$\psi^3-a_2\psi^2+(a_1a_3-4a_4)\psi-\left\{a_4(a_1^2-4a_2)+a_3^2\right\}=0$

2

式中 $\psi=x_1x_2+x_3x_4$

$G_2^4: \varkappa$　　$\varkappa^2-(4\psi+a_1^2-4a_2)=0$　　式中 $\varkappa=(x_1+x_2)-(x_3+x_4)$

2

$G_1^4: x_1$　　$x^2+\frac{1}{2}(a_1-\varkappa)x+\frac{1}{2}\left(\psi+\frac{2a_3-a_1\psi}{\varkappa}\right)=0$

$G_{2\,4}^{\,4}: a_1, a_2, a_3, a_4$

2

$G_{1\,2}^{\,4}: \Phi$　　$\Phi^2-\Delta=0$

3

$\psi_1=(x_1-x_2)(x_3-x_4)$

$G_4^4: \psi$　　$\psi^3-I_2\psi+\sqrt{\Delta}=0$　　式中 $\psi_2=(x_1-x_3)(x_4-x_2)$

2

$\psi_3=(x_1-x_4)(x_2-x_3)$

$G_2^4: \varkappa$　　$\varkappa^2-\frac{1}{8}(3a_1^2-8a_2-4\psi_2-4\psi_3)=0$ 式中 $\varkappa=(x_1+x_2)-(x_3+x_4)$

2

$G_1^4: \xi$　　$\xi^2-\frac{1}{8}(a_1^2-8a_2-4\psi_2-4\psi_3)=0$ 式中 $\xi=(x_1+x_3)-(x_2+x_4)$

$G_{2\,4}^{\,4}: a_1, a_2, a_3, a_4$

2

$G_{1\,2}^{\,4}: \Phi$　　$\Phi^2-\Delta=0$ 式中 $\sqrt{\Delta}=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4)$

3

ψ　　$\psi=x_1x_2+x_3x_4+\omega(x_1x_3+x_2x_4)+\omega^2(x_1x_4+x_2x_3)$

$G_4^4:$

ψ'　　$\psi'=(x_1x_2-x_3x_4)^2(x_1x_3+x_2x_4)^2$

2

$G_2^4: \varkappa$　　$\varkappa^2=\left\{\alpha_1(x_1-x_3)+\alpha_2(x_2-x_4)\right\}^2$

2

$G_1^4: x_1$　　$\tau=\beta_1(x_1+x_2)+\beta_2(x_3+x_4)$

G_{24}^{4} : p, q, r

3

$\xi_1=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2$

G_3^4 : ξ $\quad \xi^3+8p\xi^2+(16p^2-64r)\xi-64q^2=0$ 式中 $\xi_2=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2$

$\xi_3=(x_1-x_2-x_3-x_4)^2$

2

η $\quad \eta^2-\xi=0$ 式中 $\eta_1=x_1+x_2-x_3-x_4$

G_4^4 : ψ $\quad \psi^2-\xi=0$ 式中 $\psi_1=x_1-x_2+x_3-x_4$

2

κ $\quad \kappa^2-\xi=0$ 式中 $\kappa_1=x_1-x_2-x_3+x_4$

G_2^4

2

G_1^4

G_{24}^{4} : a_1, a_2, a_3, a_4

2

G_{12}^{4} : Φ $\quad \Phi^2-\Delta=0$ 式中 $\Delta=(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_3-x_4)$

3

G_4^4 : ψ $\quad \psi^3-a_2\psi^2+(a_1a_3-4a_4)\psi-\left\{a_4(a_1^2-4a_2)+a_3^2\right\}=0$

2

G_2^4 : κ $\quad \kappa^2=a_1^2-4a_2+4\psi_1$

2

G_1^4 : x_1

G_{24}^{4} : a_1, a_2, a_3, a_4

3

G_8^4 : ξ $\quad \xi^3-a_2\xi^2+(a_1a_3-4a_4)\xi-a_1^2a_4+4a_2a_4-a_3^2=0$

2

式中 $\xi=x_1x_2+x_3x_4$

G_4^4 : η $\quad \eta^2=a_1^2-4a_2+4\xi_1$ 式中 $\eta=x_1+x_2-x_3-x_4$

2

G_2^4 : ψ $\quad \psi^2-\dfrac{2(4a_1a_2-8a_3-a_1^3)}{\eta}+\dfrac{(3a_1^2-8a_2-\eta^2)^2}{4}=0$

式中 $\psi=(x_1-x_2+ix_3-ix_4)^2$

2

G_1^4 : κ $\quad \kappa^2=\psi$ 式中 $\kappa_1=x_1-x_2+ix_3-ix_4$, $\kappa_2=x_1-x_2-ix_3+ix_4$

$$\therefore\begin{cases} x_1=\frac{1}{4}(-a_1+\eta+\varkappa_1+\varkappa_2) \\ x_2=\frac{1}{4}(-a_1+\eta-\varkappa_1-\varkappa_2) \\ x_3=\frac{1}{4}(-a_1-\eta-i\varkappa_1+i\varkappa_2) \\ x_4=\frac{1}{4}(-a_1-\eta+i\varkappa_1-i\varkappa_2) \end{cases}$$

麥立萌之解法如下:

G_{24}^4 : $x^4+4ax^3+6bx^2+4cx+d$ 之係數 $=o$

3

G_8^4 : ξ 　　$\xi=\frac{1}{2}(b+\sqrt{h^2+k^3})^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}(b-\sqrt{h^2+k^3})^{\frac{1}{3}}$ 　$\begin{pmatrix} h=b^3+c^2-2abc+dg \\ k=\frac{4}{3}ac-b^2-\frac{1}{3}d \\ g=a^2-b \end{pmatrix}$

2

$\sqrt{\eta}$ 　$\eta=g+\xi$

G_4^4 : $\sqrt{\psi}$ 　$\psi=2g-\xi$

2 　$\sqrt{\varkappa}$ 　$\varkappa=4\eta^2+3k+12g\xi$

G_2^4

1

G_1^4

$$\therefore\begin{cases} x_1=-a+\sqrt{\eta}+\sqrt{\psi+\sqrt{\varkappa}} \\ x_2=-a+\sqrt{\eta}-\sqrt{\psi+\sqrt{\varkappa}} \\ x_3=-a-\sqrt{\eta}+\sqrt{\psi+\sqrt{\varkappa}} \\ x_4=-a-\sqrt{\eta}-\sqrt{\psi+\sqrt{\varkappa}} \end{cases}$$

第七章　五次方程式

設普通之五方次程式為

$$x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0.$$

以 $y-a$ 代式中之 x,則方程式化簡為

$$y^5+py^3+qy^2+ry+t=0.$$

此式之五根為

$$y_1=s_1+s_2+s_3+s_4$$

$$y_2=\varepsilon s_1+\varepsilon^2s_2+\varepsilon^3s_3+\varepsilon^4s_4$$

$$y_3=\varepsilon^2s_1+\varepsilon^4s_2+\varepsilon s_3+\varepsilon^3s_4$$

$$y_4=\varepsilon^3s_1+\varepsilon s_2+\varepsilon^4s_3+\varepsilon^2s_4$$

$$y_5=\varepsilon^4s_1+\varepsilon^3s_2+\varepsilon^2s_3+\varepsilon s_4$$

此式中之 ε, ε^2, ε^3, ε^4 為一之五次方虛根.其諸元 s_1, s_2, s_3, s_4 當其可解時,為由一個四次方程式決定之,今若取幾個根之乘積,則得四個方程式,其中含有 s_1, s_2, s_3, s_4 之四元如下:

$$-\frac{p}{5}=s_1s_4+s_2s_3$$

$$-\frac{q}{5}=s_1^2s_3+s_2^2s_1+s_3^2s_4+s_4^2s_2$$

$$-\frac{r}{5}=s_1^3s_2+s_2^3s_4+s_3^3s_1+s_4^3s_3-s_1^3s_4^2-s_2^2s_3+s_1s_2s_3s_4$$

$$t=s_1^5+s_2^5+s_3^5+s_4^5+5(s_1^2s_2^2s_4+s_1^2s_3^2s_2+s_2^2s_4^2s_3+s_3^2s_4^2s_1)$$

$$-5(s^3_1s_3\,s_4+s_2^3s_1\,s_2+s_3^3s_2\,s_4+s_4^3s_1\,s_3)$$

但求此等方程式之解答,須求 s 之一百二十次之方程式,或求 s^5 之二十四次之方程式.若取 $s_1s_4-s_2s_3$ 或 $s_1^5+s_2^5+s_3^5+s_4^5$ 作為未知數,則得一個六次之分解式.吾人解四次方

程式時,已知可變爲解一個三次方程式;故解五次方程式時,疑或可變爲解一個四次方程式.歐拉及蘭格倫均曾於此着想,但竭盡心力,欲求一個四次之分解式終於不可得

以 y^2+py+q 代式中之 x,用一個二次方程式消去其第二項及第三項,則 p 與 q 之值可以求得.或用一個三次方程式,則可消去其第二項及第三項;又或用一個四次方程式,則可消去其第二項及第四項;此法已於 1683 年首先爲秦浩生所示.再若以 y^3+py^2+qy+r 代 x,則可消去三項;此法於 1786 年曾經布林 (Bring) 行之.至若以 $y^4+py^3+qy^2+ry+t$ 代 x,則於 1833 年機拉德 (Jerrard) 試用此法,以爲可消去四項,厥後經哈密爾敦證明,始知如用此法仍得一個高於四次之方程式.

五次方程式之完全解答,以其六次分解式諸根之一表示之,其解法於 1884 年爲馬克林托 (Mc Clintock) 所發明.依馬氏之解法,則 $s_1^5, s_2^5, s_3^5; s_4^5$ 表示爲一個四次方程式之諸根.其各項中含有一個六次式之一根,而此六次式之諸係數卽爲五次方程式之係數之有理函數.

五次方程式之解答視乎一個六次方程式.其理由最初爲蘭格倫及摩爾法提 (Malfatti) 所證明.而范得蒙德 (Vandermonde) 更研究其分解式之作法.又"蘭格倫之六次分解式,"復經科刻爾 (Cockle) 哈璧 (Harley, 1858 — 59) 及楔力 (Cayley, 1861) 諸人從事簡約之.但得確實之簡單分解式者,

應推克洛勒客(1858).

在 1824 年亞伯爾證明五次方程式以根數解法解之爲不可能之事實.嗣後葛洛華則更細爲研究之.其中理由,卽吾人雖可求得四個量之“三個值之有理函數”以解四次方程式.但於實際上,欲求五個量之“四個值之有理函數,”則幷不存在故也.

由上所述,已知普通之五次方程式不能以根數解法解之.然則將以何種函數表示之乎.對此問題,1858 年赫美證明此等之根可以橢圓模式函數(Elliptic Modular Functions)表之.同年克洛勒客用他法求之,亦得同樣之結果.而克氏之法,又經布里士奇(Brioschi)修改之.最近戈登(Gordan)及岐柏特,(Kierpert) 亦均對此具有貢獻之人也.

解五次方程式,用機拉德氏轉換 (Transformation) 變爲三項式 $x^5+a_4x+a_5=0$ 之形,於是五次方程式之解,不用根數解法,而改以超越函數代之.在橢圓函數理論中,歪士特氏(Weierstrass) 函數 $\wp\left(\frac{u}{n},\omega_1,\omega_2\right)$ 與 $\wp(u,\omega_1,\omega_2)$ 兩式間之代數關係,其次數爲 n^2-1.而解此方程式,須賴乎一個 $n+1$ 次之方程式,名曰轉換方程式.如 $n=5$ 時,則此方程式爲

$$\Delta^2y^6+10\Delta y^3-12g_2y+5=0$$

其根爲

$$y=\left(\wp\frac{2\omega_1}{5}-\wp\frac{4\omega_1}{5}\right)^{-1}$$

及

$$y=\left(\wp\frac{2\,\omega_2+48\,r\omega_1}{5}-\wp\frac{4\,\omega_2+96\,r\omega_1}{5}\right)^{-1}$$

$$r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

上式中之△卽判別式$g_2^3-27\,g_3^2$

此外尙有一解法,爲由一次微分方程式之理論得來者.今試攷次之超比函數(Hypergeometric Function)

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此爲一個二級簡單微分方程式$G=0$之一個解答.如當α, β, γ爲變數時,則爲表示一種超越函數.若使此等不變常數爲特別之値時,則可化簡爲代數函數.由多數學者探尋此値.最終士發次(Schwarz)果得一個新變數S,當α, β, γ爲特別値時,能滿足次之方程式

$$J(s)=1728\,x\,f^5(s)-H^3(s)=0$$

此式中$f(s)=s(s^{10}+11\,s^5-1)$

又　$H(s)=s^{20}-288\,s^{15}+494\,s^{10}+288\,s^5+1$

此方程式$J=0$與正二十面體,卽二十面體方程式,有極密切之關係.在實際上若用立體畫形法,(Stereography)作其二十面諸中點之射影,卽適爲f與H之諸根.

由是知$J=0$之羣,爲屬於二十面體之六十個旋轉之羣.1884年克來因(Klein)證明二十面體之方程式,當其諸根爲$F(\alpha,\beta,\gamma,x)$之極簡單函數時,與五次方程式,有不可脫離之關係,因之可視爲五次方程式之標準分解式.(Normal Resolvent)此分解式若含有有理根時,卽成爲雅科俾(Jacobi)

與擽力之分解式,則五次方程式可以根數解法解之.

再關於五次及更高次之普通方程式,可總括略附數語於下:

解一般之五次方程式,化簡之變爲求三個變數卽三元(Ternary)所作成之60個一次轉換 (Linear Transformations) 之羣.此羣與五個文字之交代羣爲單同形.解一般之六次方程式,化簡之變爲求三個變數卽求360 個之三元一次轉換之瓦稜廷 (Valentiner) 羣.此羣與六個文字之交代羣爲單同形.又六次方程式瑪遂鮍 (Maschke) 及布里士奇曾用超橢圓函數 (Hyperelliptic Functions) 以解之,克來因則就在空間之 140 直線以硏究之.解一般之七次方程式,經戈登用曲線方程式 $y^3z+z^3x+x^3y=0$ 證明其可化簡爲三個變數所作成之 168 個代換之葛洛華羣,然亦可變爲求四個變數所作成之25 20級之一次羣.再解普通之二十七次方程式,經克來因於 1887 年用在立方曲面27直線之理論,證明其可化簡爲四個變數之標準問題.嗣後 1893 年部克哈特 (Burkhardt) 再行其化簡之運算,而其中所含之四元羣. (Quaternary Group) 又經瑪遂鮍詳細討論之.至於解一般之 n 次方程式,若 $n>7$ 時,則因以 n 個文字所作成之對稱羣及交代羣均不能與 $n-2$ 個或更少個變數所作成之一次羣爲單同形.故解普通 n 次方程式,當 $n\geqq8$ 時,最多僅可化簡爲 $n-1$ 元,而不能再爲降低.

尤有進者,關於求 n 次之一般方程式之根,已經學者證明,可以一種超越函數名曰富克斯函數 (Fuchsian Functions) 者表示之.

本篇之主要參考書如下

Bolza: American Journal of Mathematics. Vol. 13, pp. 59-142.

Burnside: Theory of Groups.

Dickson: Theory of Algebraic Equations.

Modern Algebraic Theories.

Galois: Oeuvres Mathématiques, par Picard.

Jordan: Traité des substitutions.

Lagrange: Réflexions sur la résolution algébrique des équations.

Mathews: Algebraic Equations.

Merriman: Solution of Equations.

Miller: Report on Group Theory,

Miller-Blichfeldt-Dickson: Finite Groups.

Netto: Vorlesungen über Algebra

Netto-Cole: Theory of Substitutions.

Peteren: Theorie der Algebraischen Gleichungen.

Pierpont: Annals of Mathematics, Second Series,

Vol. 1, pp. 113-143; Vol. 2, pp. 22-56.

Serret: Cours d'Algebre Superieure.

Smith: History of Mathematics.

Vogt: Résolution Algébrique des Équations

Weber: Lehbuch der Algebra.

天體幾何學初步研究

湯璪眞

第一章　點及軌跡

1. 本文所述,意欲如普通各種幾何學同樣研究,惟不用簡單之點爲幾何元素,而用以下所述之天體爲元素耳.更有進者,卽附帶喚起世人凡素所視爲幻想而人目所不能見之幾何虛點,自今以後,皆可與以形狀位置大小等事,俾生直觀之效,不令其長受經驗派之訾議也.

2. 天體　凡有南北極可分之球名曰天體,其能占有或經過其他天體者名曰實有天體,其被占有或被經過之天體名曰虛設天體.故虛設天體恆爲實有天體所占有或經過者也.

3. 點及其形狀位置大小　天體作爲幾何元素時則名曰點,於是其球名曰點之球亦曰點之形狀,其北極及南極以次名曰點之正極及負極亦曰點之位置,其半徑名曰點之半徑,亦曰點之大小.

此外每一天體尙有所謂軸,中心,赤道等名稱,凡此均可一一借用.

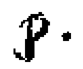
由定義可知一點之位置以其正極及負極決定.

4. **實點及虛點** 一點之正負兩極相合者名曰實點,其不相合者名曰虛點亦曰複點.

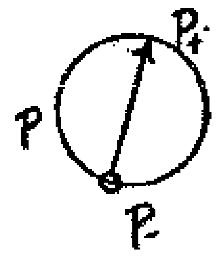
一點而謂之虛或複者,以其能用(然而不必用)複數坐標決定故也.此理另當說明.此際所應注意者,即實點之球已不存在,論其半徑則變為 o,但虛點則反是.故曰實點無形狀大小而虛點則有形狀大小者也.

5. **點之圖示** 點恆以大字母表之.實點 P 之圖示如常茲不具論.試設有虛點 P 則圖示時可附大字母 P 於其球之旁表之. P 點正極恆以 P_+ 表之,其負極恆以 P_- 表之,圖形上則在 P_+ 處另記以由 P_- 向 P_+ 之矢號在 P_- 處另圈以比實點略大之小圈以示分別.若欲求圖示之簡單則將點之球略去亦無不可.下圖所示為

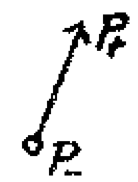
實點P



虛點P



虛點P



6. **相合點及不同點** 兩點之正極相合其負極亦相合者名曰相合點,不為相合點之兩點名曰不同點.

兩點 P, Q 相合者可以 $P=Q$ 表之.故若 $P=Q$ 則 $Q=P$ 又若 $P=Q, Q=R$ 則 $P=R$. 兩點 P, Q 不相合可以 $P \neq Q$ 表之,故若 $P \neq Q$ 則 $Q \neq P$ 又若 $P \neq Q, Q=R$ 則 $P \neq R$, 餘可類推.

7. **共軛點** 一點之正極與他點之負極相合而其負

極與他點之正極相合者則兩點謂之互爲共軛點.

任何點之共軛點,可附加(—)號於該點大字母之上表之,例如P點之共軛點爲$\bar{P}$又因任何點僅有一共軛點,故知P, Q二點互爲共軛點時則$Q=\bar{P}$.

通例$P\neq\bar{P}$,惟P爲實點時則$P=\bar{P}$;反之若$P=\bar{P}$則P亦爲實點.

8.　定點及變點　點之不能占有或經過其他點者名曰定點,點受一定之條件至少可占其他兩不同點之位置或經過其他無數點者名曰變點.凡虛設天體均爲定點,再設有定點A又設P爲實有天體,若P受$P=A$之條件則P爲定點,此外之實有天體通例爲變點.

變點所受之條件在天文或物理上謂之定律.凡條件可包括定律但定律不能包括條件,此天體幾何學與天文物理異趣之點也.又天體幾何之條件與普通所能想像者亦有相異之處,蓋普通每認天體之運動爲剛體運動如是則天體之大小不能變化,但天體幾何則認點占有或經過其他若干點時,其大小變與不變,完全依其所受之條件而定,不能預先無端附加大小不變之條件也.

9.　軌跡　軌跡之定義仍與普通所述者相同.惟普通先未分明定點與變點之界限則軌跡之意義終難明瞭,故特重述之如下:

設有一羣之定點及一受條件之變點若變點受其條件

而變則必占有或經過該羣之定點,反之若變點占有或經過該羣之定點則必受其條件,如是則曰該羣之定點爲該變點之軌跡

軌跡有僅爲一點者,例如設定點A及變點P受P=A之條件則P僅能占有A點故P之軌跡爲A.軌跡又有爲少數點者,例如設定點A, B, C及變點P受

P或=A或=B或=C

之條件則P僅能占有A, B, C三點故P之軌跡爲A, B, C三點.軌跡又有爲不可勝數之點者,例如地球運動時所經過之各處設天體爲地球之軌跡是.軌跡又有不存在者,例如設定點A, B且A≠B又設變點P受

P=A及P=B

之條件則P之軌跡不存在.

既知軌跡卽可進而研究直線及平面,一方作爲軌跡之例,一方又可作爲其他究研之預備.

第二章　直線及距離

10. 直線　實點所成之直線仍如尋常所示,是可名曰實直線.於實直線上再以虛點補充之卽得單軌虛直線,詳言之,卽

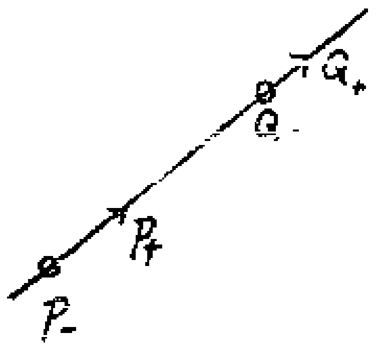
變點之兩極恆在一實直線上者其軌跡名曰單軌虛直線.

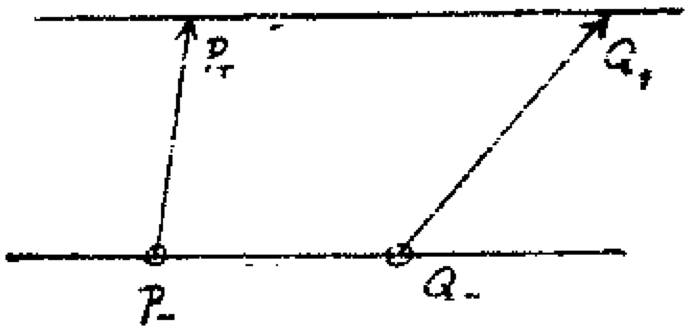
單軌虛直線之外更有一種,卽

雙點之正極在一實直線上其負極在其一平行實直線上者其軌跡名曰雙軌虛直線.

此兩種虛直線爲虛直線中之比較簡單者今總名之曰實方位虛直線,其圖示如次:

單軌虛直線 P Q　　雙軌虛直線 P Q





雙軌虛直線上各點正極所在之實直線名曰該虛線之正極線,如上圖 P_+Q_+ 實直線是.同理 P_-Q_- 實直線爲負極線.在單軌虛直線則可視爲正極線與負極線合而爲一者故名.

11. 直線之寬　由上圖觀之,讀者不難知:雙軌直線上必有一小羣之點其軸與正極線及負極線皆互相垂直,此時各點之球與該二極線必相切又各點之半徑皆相等若就全線言之則此種點爲最小者.由是可立一定義:

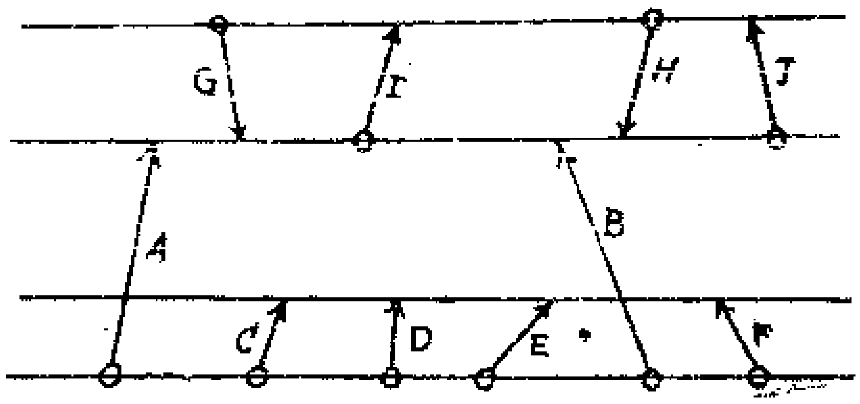
雙軌虛直線上最小點之直徑名曰該虛直線之寬:

因單軌虛直線可視爲雙軌虛直線之特例故知其寬爲0,故其相應之實直線普通遂認爲無寬.

12. 直線之方位　若兩虛直線之正極線相合又其負極線亦相合者則曰該兩虛直線相合.若兩虛直線之正極

線相合而其負極線平行或其負極線相合而其正極線平行,或其正極線與負極線皆互相平行而毫無相合者,則該兩虛直線統謂之平行.

如圖各虛直線 C D 與 E F 相合,而 AB, CD, GH, IJ



則彼此互相平行.

虛直線亦得以小字母表之如 a 線, b 線等是. a 線之正極線以 a_+ 表之其負極線以 a_- 表之,餘類推.

若 a 與 b 平行 b 與 c 平行則 a 與 c 或平行或相合.

此定理引起吾人立一定義:

諸線之平行或相合者則曰其方位相同.

兩線之方位相同者以(‖)置於其間表之,如 a ‖ b 表 a b 有相同方位, PQ ‖ RS 表 PQ, RS 有兩相同方位是.

若 a ‖ b, b ‖ c 則 a ‖ c.

13. 直線之長度 設有實方位虛直線 A B 則可與以長度其意義如次:

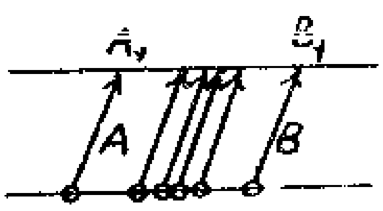
假想一變點自 A 點起循 A B 虛直線經過前進運動使其中心達於 B 點之中心.若此時變點所占有之點恰爲 B

點則曰長度 $AB = A_+B_+$ 且恆命爲正.

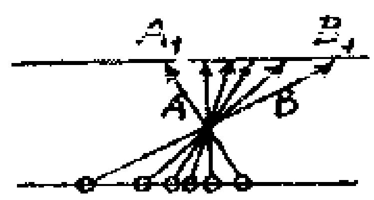
假設 A B 二點之中心早已相合則可假想一變點自 A 點起循 A B 虛直線經過放大或縮小運動使變點占有 B 點.此時則曰長度 $AB = iA_+B_+$ 其中之 $i=\sqrt{-1}$, 又 A_+B_+ 恆命爲正.

假想一變點從 A 點起循 A B 虛直線經過前進運動使其中心達於 B 點之中心.若此時變點所占有之點不與 B 點相合則可命爲 C 點,於是再自 C 點起循 A B 虛直線經過放大或縮小之運動可使變點占有 B 點.此時則曰長度 $AB = A_+C_+ + iC_+B_+$ 其中之 A_+C_+ 恆命爲正從而 C_+B_+ 之正負卽可依普通之法則決定.

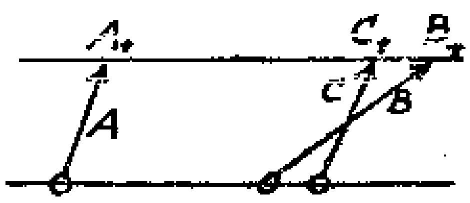
$AB=A_+B_+$



$AB=iA_+B_+$



$AB=A_+C_+ + iC_+B_+$



上三式更可括爲一式: $AB=\frac{A_+B_+ + A_-B_-}{2} + i\frac{A_+B_+ - A_-B_-}{2}$

14. **直線之交角** 設兩單軌或雙軌虛直線 a b. 若其方位相同則曰其交角爲 o 或平角,若其方位不同則 a_+ b_+ 之交角名曰 a b 之交角.

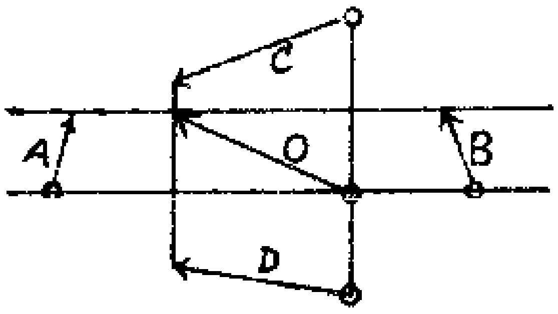
此定義中已包含垂直之定義,卽 a_+ b_+ 交角爲直角時則曰 a b 交角爲直角或曰 a b 互相垂直以 $a \perp b$ 表之.

又設有一點 O. 過 O 作二實方位虛直線 O A 及 O B.

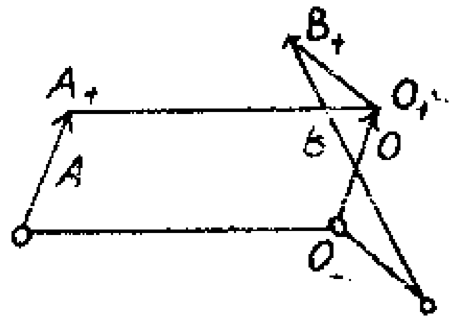
若 $A_+ O_+ B_+$ 夾角存在時則該角名曰 A O B 夾角或 O A 與 O B 之夾角.

下圖所示爲

$AB \perp CD$ 其垂足爲 O



夾角 A O B ＝ 夾角 $A_+ O_+ B_+$



15. **兩點之距離** 以上所述虛直線上長度 A B 亦名曰 A B 兩點之距離,惟此兩點受有在單軌或雙軌虛直線上之條件耳.設無此限制,換言之,即設 A B 爲任意兩點,則其距離可確定如下:

以 B 點之中心爲中心可作一點 O(參考以上夾角 A O B 圖)令 A O 與 B O 各決定一實方位虛直線.次命

長度　　$OA = a$　又　$OB = b(\therefore = i\,|b|)$

夾角　　$AOB = \theta$

則從此可依連續原理定出一量(參看三角餘弦定律)

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\Theta$$

名曰 A B 兩點距離之平方以 AB^2 表之.

因 $a = OA = O_+A_+$ 爲實數又 $b = OB = iO_+B_+$ 故知 $a^2 + b^2$ 爲 AB^2 之實部分而 $-2ab\cos\Theta$ 爲 AB^2 之虛部分.實部分與虛部分既已分明卽不難依代數之理求出 A B.此時應注

叢者即設 $AB=x+iy$ 則依上述長度之規定知 x 不為 0 時必大於 0, 若為 0 時則 y 大於 0 或等於 0, 因之 A B 僅有一值,而取此值之 A B 可命為

$$AB = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\Theta}$$

16. 舉例.

例一. 變點之與一實定點有實定距離且不為 0 者其軌跡名曰實心實徑虛球(不名曰實球者因其所含之虛點多於所含之實點也)實定點為其中心實定距離為其半徑. 問此種球上各點之分配狀況如何?

各點之分配狀況,論實點成一實球此為普通所已知者; 論虛點則其點之球必與該實球正交且其點之赤道平面必通過該實球之中心(亦即虛球之中心).

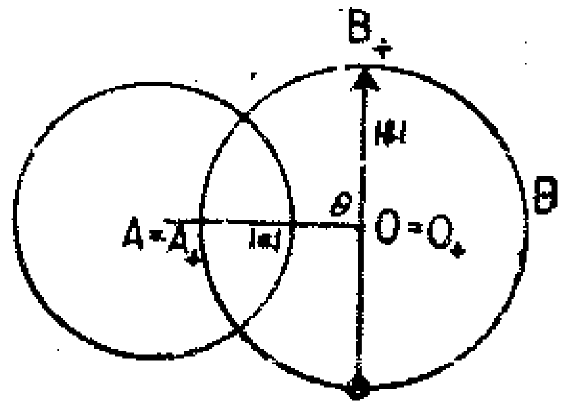
證. 茲僅證明第二部分.設 A 為中心 B 為球上虛點 r 為半徑則因此時 r 為實數故由

$$a^2+b^2-2ab\cos\Theta = r^2$$

令虛實二部各相等,即得

$$a^2+b^2=r^2, \qquad -2ab\cos\Theta=o;$$

即 $\quad |a|^2-|b|^2=r^2, \qquad |a|\,|b|\cos\Theta=o.$



因 B 為虛點則 $|b| \neq o$, 故由第一式 $|a| \neq o$, 於是由第二式 $\cos\Theta = o$, 故 $O_+A_+ \perp O_+B_+$, 故 B 點之赤道平面通過 A.

又由第一式則 $|b|^2+r^2=|a|^2$ 合乎勾

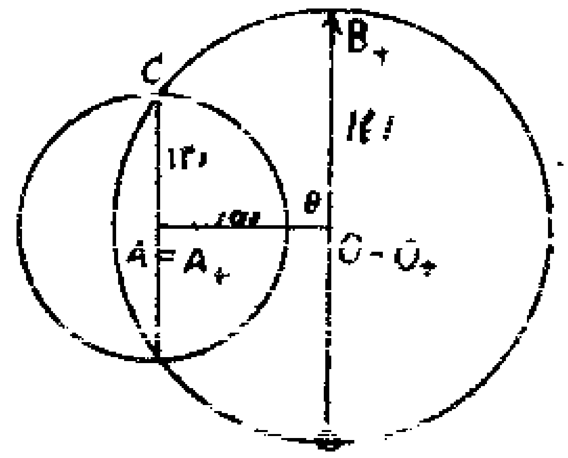
股定理,故 B 點之球與以 A 爲中心 r 爲半徑之實球正交.

例二. 變點之與一實定點有純虛定距離者其軌跡名曰實心虛徑虛球.實定點爲其中心,虛定距離爲其半徑.問此種球上各點之分配狀況如何?

此種球上論實點則不存在,論虛點則其點之球恆交某實球於一大圓或與該實球相合而其點之赤道平面則通過該實球之中心.

證. 在此種球上不能有實點者因兩實點之距離恆爲實故也.次設 A 爲中心 r 爲半徑 B 爲虛球上一點則

$$a^2+b^2-2ab\cos\Theta=r^2$$



變爲　$|a|^2-|b|^2-2i|a|\,|b|\cos\Theta=-|r|^2$;

故　$|a|^2-|b|^2=-|r|^2$,　$|a|\,|b|\cos\Theta=0$.

由第一式則 $|a|^2+|r|^2=|b|^2$ 故設 B 點之球若與中心爲 A 半徑爲 $|r|$ 之實球交於 C, 則 $OA\perp AC=|r|$. 但 A 爲定點又 O 因 B 而定,於是 C 之軌跡爲一因 B 而定之大圓.

由第二式考之則若 $|a|\neq 0$, 必得 $\cos\Theta=0$, 故夾角 $A_+O_+B_+$ 爲直角,故 B 之赤道平面必通過 A.

若 $|a|=0$ 則 $OA=0$, 故 O 與 A 相合,故 B 之赤道平面仍通過 A 此時第一式變爲 $|b|^2=|r|^2$, 故 $AC=|r|=|b|$, 故 C 之軌跡不爲大圓而爲一球.

第三章 平面

17. 平面 實點所成之平面仍如普通所示,是可名曰實平面.於實平面上以虛點補充之,卽得單軌虛平面,詳言之,卽

變點之兩極恆在一實平面上者其軌跡名曰單軌虛平面.

單軌虛平面之外更有一種,卽

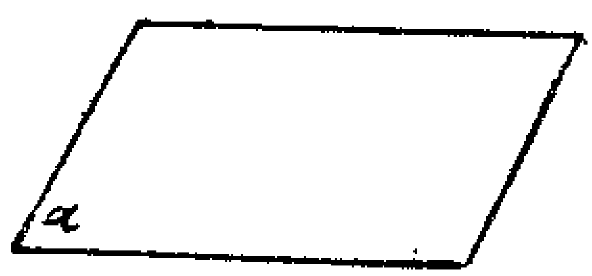
變點之正極在一實平面上其負極在其一平行實平面上者其軌跡名曰雙軌虛平面.

此兩種虛平面爲虛平面中之比較簡單者,今總名之曰實方位虛平面,亦可如尋常所示以希臘小字母 α, β, γ 等表之.實方位虛平面上各點正極所在之實平面名曰該虛平面之正極面,其各點負極所在之實平面名曰該虛平面之負極面. α 之正極面以 α_+ 表之,其負極面以 α_- 表之,餘關於 β, γ 等面可以類推.

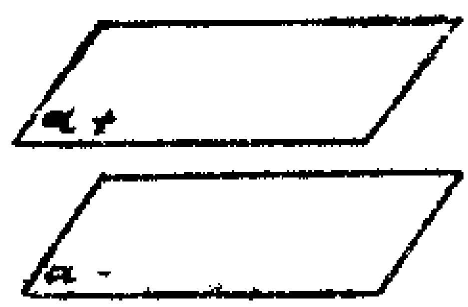
故單軌虛平面之正極面與負極面相合,而雙軌虛平面之正極面與負極面則互相平行.

因之圖形上單軌虛平面與實平面可以同一文字表之

單軌虛平面 α



雙軌虛平面 α



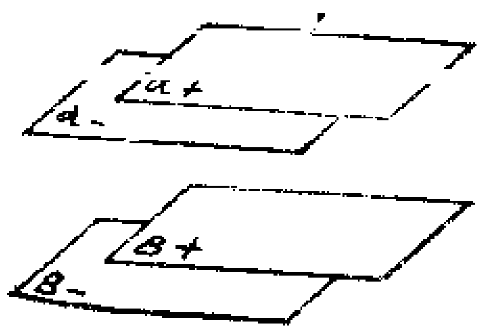
而雙軌虛平面則宜以其正極面與負極面連合表之.

18. 平面之厚 由上圖觀之讀者不難知.雙軌虛平面上必有一小羣之點其軸與正極面及負極面皆互相垂直,此時各點之球與該二極面必相切.又各點之半徑皆相等,若就全虛平面言之則此種點爲最小者.由是可立一定義:

雙軌虛平面上最小點之直徑名曰該虛平面之寬.

因單軌虛平面可視爲雙軌虛平面之特例,故知其寬爲0,因之其相應之實平面普通遂認爲無寬.

19. 平面之方位 若兩虛平面之正極面相合.又其負極面亦相合者則曰該兩虛平面相合.若兩虛平面之正極面相合而其負極面平行或其負極面相合而其正極面平行或其正極面與負極面皆互相平行而毫無相合者則該兩虛平面統謂之平行.



如圖虛平面 α 與虛平面 β 互相平行.

若 α 與 β 平行 β 與 γ 平行則 α 與 γ 平行或相合.

此定理引起吾人立一定義:

諸面之平行或相合者則曰其方位相同.

兩面之方位相同者以(⫲)置於其間表之.於是

若 α ⫲ β, β ⫲ γ 則 α ⫲ γ.

20. 平面之交角 設兩實方位虛平面 α β.若其方位

相同則曰其交角爲 O 或平角,若其方位不同則 α_+ β_+ 之交角名曰 α β 之交角

此定義中已包含垂直之定義,即 α_+ β_+ 交角爲直角時則曰 α β 交角爲直角或曰 α β 互相垂直,以 $\alpha \perp \beta$ 表之.

平面間亦有所謂夾角.試設二實方位平面,一以 A 點與 l 線決定又一以 B 點與 l 線決定,則 l 爲其交線.次自 A 作 l 之垂線其垂足命爲 A',又自 B 作 l 之垂線其垂足命爲 B',若 A' B' 恰重合於一點更命爲 O 則 A O B 夾角名曰平面 A l 與 B l 之夾角.若 A'B' 不相合則可過任意點 O (實點或虛點)作 OA'' 及 OB'' 二線令 OA'' $\underline{\text{Ш}}$ A' A, OB'' $\underline{\text{Ш}}$ B' B, OA' $\underline{\text{Ш}}$ A'' A, OB' $\underline{\text{Ш}}$ B'' B. 合此限制所得之 A'' O B'' 夾角即名曰平面 A l 與 B l 之夾角.

平面 A l 與 B l 之夾角以 A l B 表之.平面 A P Q 與 B P Q 之夾角以 A − PQ − B 表之.平面 α 與 β 若無其他說明則僅有交角(其值有二)而無夾角.

21. 共軛直線及共軛平面　與共軛點同理可得共軛線(或面)之定義,即一線(面)之正極線(面)與他線(面)之負極線(面)相合而其負極線(面)與他線(面)之正極線(面)相合者則該兩虛線(面)謂之互爲共軛線(面).

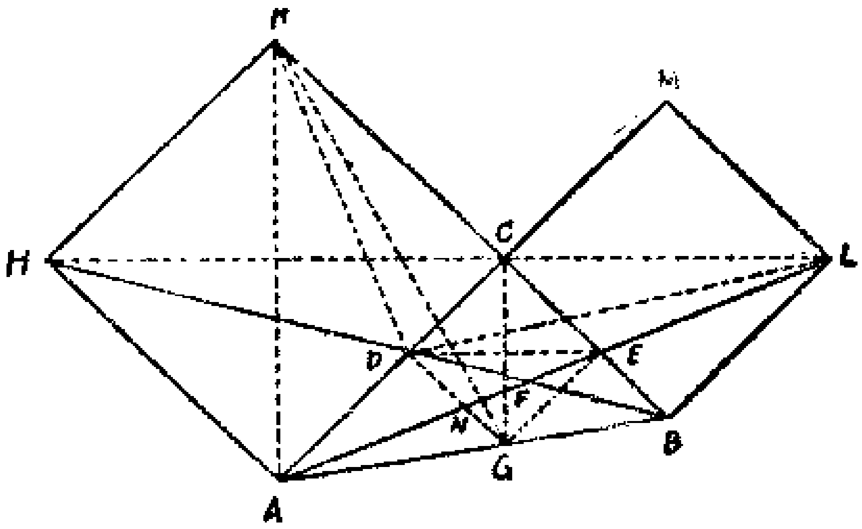
a 線(α 面)之共軛線(面)以 $\bar{a}$ ($\bar{\alpha}$)表之.通例 a 僅有一 $\bar{a}$ 且 a 與 $\bar{a}$ 不相合但 a 爲單軌虛線時則 a 與 $\bar{a}$ 相合.至 α 與 $\bar{\alpha}$ 可以類推.

初等幾何學一題之研究

管 公 度

試於下之 Pythagoras 圖中,證明四邊形CDFE與三角形ABF等積.

加△AFD於兩者之中,得△AEC,△ABD,證明此二三角形等積,則兩者亦等積,此證明本題一般之方針也.



爲證明本題,先設補題如下:

補題 CD,CE爲△ABC之內接正方形之二邊.

證明 1. 設於△ABC內,作內接正方形GC,令其二邊與C角之二邊一致,其第四角項G在斜邊AB上則

□ACKH∽□GC

且其各邊平行.即兩正方形在相似之位置,而其對應項點之聯線AG與KC之交點B,卽其相似中心.是以□GC中與□ACKH之項點H對應之項點,應在BH上.以同理□GC之第四項點應在AL上.故本補題云云.

證明II. 上之證明,乃應用在相似位置之相似形之理者也.若用比例證明,其理無非大同小異.茲用面積之理證明如下:

自D作直線與邊BC平行,與斜邊AB相交於G,聯CG,KD,CH.則因

$$\triangle KDC = \triangle HDC \qquad \text{(同底等高)}$$

$$\therefore \triangle KDC + \triangle BDC = \triangle HDC + \triangle BDC$$

即 $$\triangle DBK = \triangle HBC$$

$$\therefore \quad \triangle GBK = \triangle DBK \qquad \text{(同底等高)}$$

$$= \triangle HBC \qquad \text{(已證)}$$

$$= \triangle ABC \qquad \text{(同底等高)}$$

$$\therefore \triangle GBC + \triangle GCK = \triangle GBC + \triangle GCA$$

$$\therefore \quad \triangle GCK = \triangle GCA$$

而此二三角形同在其公底GC之一傍,故其頂點之聯線AK,必與其公底GC平行.

$$\therefore \quad D\hat{C}G = H\hat{K}A = \frac{\hat{R}}{2} \qquad \therefore \quad D\hat{G}C = \hat{R} - G\hat{C}D = \frac{\hat{R}}{2}$$

即△DGC為二等邊直角三角形

再自E作直線與AC邊平行,亦與底邊AB相交於G,且△EGC亦為二等邊直角三角形,可以同法證明.

是以CD,CE為△ABC之內接正方形之二邊.

於是由△AEC,△ABD等積,證明本問題如下:

證明一 因GE//AC(補題) ∴△AEC=△AGC(同底等高)

又 DG//BC (補題) $\therefore \triangle DGB=\triangle DGC$(同底等高)

$\therefore \triangle AGD+\triangle DGB=\triangle AGD+\triangle DGC$

$\therefore \qquad \triangle ABD=\triangle AGC$

$\therefore \qquad \triangle AEC=\triangle ABD$

$\therefore \qquad \square CDFE=\triangle ABF$

證明二 因 AC=AH (假設), EC=DC (補題)

$\therefore \qquad \triangle AEC=\triangle HDC$ (等底等高)

又因 $\qquad \triangle ABC=\triangle HBC$ (等底等高)

$\therefore \quad \triangle ABC-\triangle DBC=\triangle HBC-\triangle DBC$

$\therefore \qquad \triangle ABD=\triangle HDC$

$\therefore \qquad \triangle AEC=\triangle ABD$

$\therefore \qquad \square CDFE=\triangle ABF$

證明三 因$\triangle AEC$與$\triangle BDC$之底 EC, DC 相等,其高 AC,BC 不等,

故
$$\frac{\triangle ADB}{\triangle BDC}=\frac{AC}{BC}$$

又因$\triangle ABD$與$\triangle BDC$同以 BC 爲高,而其底 AD,CD 不等,故

$$\frac{\triangle ADB}{\triangle BDC}=\frac{AD}{CD}$$

然以 BC//AH (錯角相等),故$\triangle HDA$與$\triangle BDC$爲相似形,

$\therefore \quad \frac{AD}{CD}=\frac{HA}{BC}=\frac{AC}{BC} \qquad \therefore \quad \frac{\triangle ADB}{\triangle BDC}=\frac{AC}{BC}$

$\therefore \quad \frac{\triangle AEC}{\triangle BDC}=\frac{\triangle ADB}{\triangle BDC} \qquad \therefore \quad \triangle AEC=\triangle ADB$

$\therefore \qquad \square CDFE=\triangle ABF$

證明四　作DE, CL兩對角線,則DE//CL(補題). 聯DL

$\therefore \quad \triangle AEC = \triangle ALD = \triangle ABD \quad (\because BL // AC)$

$\therefore \quad \square CDFE = \triangle ABF.$

再將不用補題之證明記之如下:

證明五　因　$\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{BC}$　(見證明四)

$\therefore \frac{\triangle ADB}{\triangle ABC} = \frac{AD}{AC}$　(高同而底不等)

$= \frac{AD}{AD+CD}$

$= \frac{AC}{AC+BC}$　(比例之定理)

又　$\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{BC}$　可以同法證明

$\therefore \frac{\triangle AEC}{\triangle ABC} = \frac{CE}{BC}$　(高同而底不等)

$= \frac{CE}{CE+BE}$

$= \frac{AC}{AC+BC}$　(比例之定理)

$\therefore \triangle AEC = \triangle ADB$

$\therefore \square CDFE = \triangle ABF$

證明六　由(三)之證明則 $\frac{AD}{CD} = \frac{CE}{BE}$

由比例之定理　$\frac{AD}{AD+CD} = \frac{CE}{CE+BE}$　卽　$\frac{AD}{AC} = \frac{CE}{BC}$

$\therefore \quad AC \cdot CE = AD \cdot BC$

$\therefore \quad \frac{1}{2} AC \cdot CE = \frac{1}{2} AD \cdot BC$

$\therefore \quad \triangle AEC = \triangle ADB$

$\therefore \quad \square CDFE = \triangle ABF$

更將不由△AEC與△ADB等積之證明記之如下:

證明七　設AL與DG之交點爲N.因DG//BC　(補題)

∴ △DEF+△FDN+△ENG=△EDG=△BDG=△FDN+□FNGB

∴ △DEF+△ENG=□FNGB⋯⋯⋯⋯(1)

又因　EG//AC　(補題)

∴ △DNE+△DAN=△DAE=△DAG=△DAN+△AGN

∴ △DNE=△AGN⋯⋯⋯⋯(2)

將(1)與(2)兩邊加之得

△DEF+△DNE+△ENG=□FNGB+△AGN

即　△DEF+△DGE=△ABF

由補題DE爲□CDGE之對角線　∴△DGE=△DEC

∴ △DEF+△DEC=△ABF

∴ □CDFE=△ABF

(完)

張量之算法

(Tensor Calculus)

鄒 亞 余

Einstein(安斯坦)相對論之物理空間距離,以張量表示之,則爲 $G_{\alpha\beta}=B^{\lambda}_{\alpha\beta\lambda}=0$ 但由張量之初級運算以至上式之成立徹頭徹尾介紹於國內雜誌者尚未前睹因不揣譾陋編譯此草聊作拋磚引玉之舉讀者幸勿見哂.

(1) 設於 n 度空間其各軸之座標爲 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$, 則可決定一點之位置不移.

假有 n 個獨立變數 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots\cdots, \bar{x}_n$, 因座標變換系統之關系可得

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= \bar{x}_1(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \\
\bar{x}_2 &= \bar{x}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots\cdots, x_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\bar{x}_n &= \bar{x}_n(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

則有必要充分之條件 Jocobian 不能爲零.

$$
\left|\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_\beta}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_n} \cdots\cdots \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0
$$

但安斯坦所採取者爲四度空間.故 $n=4$

如於四度空間得兩點間距離爲 s, 則由一座標系統變換

各軸之位置及方向,其距離 s 仍不變.

令 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ 為在座標軸 $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4$ 上測得 s 兩端座標之

又在他組座標軸 $\bar{\mathrm{x}}_1, \bar{\mathrm{x}}_2, \bar{\mathrm{x}}_3, \bar{\mathrm{x}}_4$ 上測得 s 兩端座標之差為

$\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3,\ \bar{x}_4$

由 $$s=s\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\right)=s\left(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3,\ \bar{x}_4\right)$$

得 $$\frac{\partial s}{\partial \bar{x}_1}=\frac{\partial s}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_1}+\frac{\partial s}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_1}+\frac{\partial s}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial \bar{x}_1}+\frac{\partial s}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial \bar{x}_1}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \bar{x}_2}=\frac{\partial s}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2}+\frac{\partial s}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_2}+\frac{\partial s}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial \bar{x}_2}+\frac{\partial s}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial \bar{x}_2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \bar{x}_3}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial s}{\partial \bar{x}_4}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

若以 α 及 κ 代表 1, 2, 3, 4,則上列之四式可總為

$$\frac{\partial s}{\partial \bar{x}_\alpha}=\sum_{\kappa=1}^{4}\frac{\partial s}{\partial x_\kappa}\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}$$

上式中 α 可以 1, 2, 3, 4 輪換之.但 κ 於四式中表明展開,則成四項之和.

又座標軸系統變換時,已知

$$\bar{x}_1=\bar{x}_1\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\right)$$

$$\bar{x}_2=\bar{x}_2\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\right)$$

$$\bar{x}_3=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{x}_4=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此更得

$$d\bar{x}_1=\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial x_4}dx_4$$

$$d\bar{x}_2=\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial x_4}dx_4$$

$$d\bar{x}_3=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d\bar{x}_4=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

今以 β 及 λ 代表 1, 2, 3, 4 四數字,則上四式總爲

$$d\bar{x}_\beta=\sum_{\lambda=1}^{4}\frac{\partial\bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda}dx_\lambda$$

可知上式中 β 所代表之意義,與前 α 相同.卽在一展開式中,不能同時以 1, 2, 3, 4 中之二數字參入也.至若 λ 與 κ 皆可於一展開式中同時參入 1, 2, 3, 4 四數字者.

曲線之最短距離可祇作最短直線故於 $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$ 各軸上測得線之座標距離 $d\bar{x}_1$, $d\bar{x}_2$, $d\bar{x}_3$, $d\bar{x}_4$ 與他組座標軸 x_1, x_2, x_3, x_4 上測得之 dx_1, dx_2, dx_3 dx_4,因其變換系統之關係式

$$d\bar{x}_\beta=\sum_{\lambda=1}^{4}\frac{\partial\bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda}dx_\lambda$$

由左方得 $d\bar{x}_1^2$, $d\bar{x}_2^2$, $d\bar{x}_3^2$, $d\bar{x}_4^2$

並令 g_{11}, g_{12} ………… 等代表 $dx_1\,dx_1$, $dx_1\,dx_2$ ………… 等之系數

$ds=$最短距離

則由 Pythagoras 定理

$$ds^2=d\bar{x}_1^2+d\bar{x}_2^2+d\bar{x}_3^2+d\bar{x}_4^2$$

即 $$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + 2\,g_{12}\,dx_1\,dx_2 + 2\,g_{13}\,dx_1\,dx_3 + 2\,g_{14}\,dx_1\,dx_4$$
$$+ g_{22}\,dx_2^2 + 2\,g_{23}\,dx_2\,dx_3 + 2\,g_{24}\,dx_2\,dx_4$$
$$+ g_{33}\,dx_3^2 + 2\,g_{34}\,dx_3\,dx_4$$
$$+ g_{44}\,dx_4^2$$

又知 $$g_{12}\,dx_1\,dx_2 = g_{21}\,dx_2\,dx_1$$
$$g_{23}\,dx_2\,dx_3 = g_{32}\,dx_3\,dx_2$$

....

....

故 $$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{13}\,dx_1\,dx_3 + g_{14}\,dx_1\,dx_4$$
$$+ g_{21}\,dx_2\,dx_1 + g_{22}\,dx_2^2 + g_{23}\,dx_2\,dx_3 + g_{24}\,dx_2\,dx_4$$
$$+ g_{31}\,dx_3\,dx_1 + g_{32}\,dx_3\,dx_2 + g_{33}\,dx_3^2 + g_{34}\,dx_3\,dx_4$$
$$+ g_{41}\,dx_4\,dx_1 + g_{42}\,dx_4\,dx_2 + g_{43}\,dx_4\,dx_3 + g_{44}\,dx_4^2$$

今設 μ, ν 代表 1, 2, 3, 4 四字

則 $$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu$$

上代表式為就 μ, ν 二字展開而求其和者.μ 對於 ν 之一值可得不同之四項,但 ν 於展開式中可得四值故上式展開可得 $4\times4=16$ 項.

又 $$g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu = g_{\nu\mu}\,dx_\nu\,dx_\mu$$

即 $$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

此處 $g_{\mu\nu}$ 所代表者雖為 4^2 組各不相同者,實僅有十組.

$\because (4^2-4)\div2+4=10$ 其代表之各微分方程式如次

$$g_{11}=\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1}\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1}\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_1}\frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_1}\frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_1}$$

$$g_{12}=\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1}\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2}+\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1}\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_1}\frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_2}+\frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_1}\frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_2}$$

$$g_{13}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_{43}=\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_4}\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_3}+\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_4}\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_3}+\frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_4}\frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_3}+\frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_4}\frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_3}$$

$$g_{44}=\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_4}\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_4}+\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_4}\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_4}+\frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_4}\frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_4}+\frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_4}\frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_4}$$

若又以 ι 及 γ δ 代表 1, 2, 3, 4 四字則上列諸式可總爲

$$g_{\gamma\delta}=\sum_{\iota=1}^{4}\frac{\partial \bar{x}_\iota}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \bar{x}_\iota}{\partial x_\delta}$$

上式爲就 ι 展開者故每展開式有四項. γ 及 δ 於展開式,雖僅能各代表一數字.惟此代表式中 γ 對於 δ 之一值可得不同之四組,而 δ 亦有四值故上式所代表者爲十六組. ∵ $4\times4=16$ 由此十六組得 $g_{\mu\nu}$ 所代表之一羣如次:

$$g_{\mu\nu}=\left\{\begin{array}{cccc} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{array}\right\}$$

然距離不因座標軸變換而生增減

故由 $ds^2=\sum_{\mu,\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$

可令　$$ds^2=\sum_{\kappa,\lambda=1}^{4}\bar{g}_{\kappa\lambda}\,d\bar{x}_\kappa\,d\bar{x}_\lambda$$

(2)　距離僅有長短之差不必拘泥一定之方向.故又名長度,旣有長度又有一定之方向者謂之向量.向量者旣有方向而又有大小之可量也.

一向量可分析爲數多之小向量.如力學中之分力然此類之小向量卽名張量.張量者,向量之一種也.苟推廣張量之意義.則可謂向量亦爲張量之一種.

四度空間有四座標軸故有四張量以平行於其軸.

張量計算較繁,爲求簡便,常將$\sum$之符號省去.

如　$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_\alpha}=\sum_{\kappa=1}^{4}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\kappa}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\alpha}$$　省作　$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_\alpha}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\kappa}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\alpha}$$

$$d\bar{x}_\beta=\sum_{\lambda=1}^{4}\frac{\partial\bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda}dx_\lambda$$　爲　$$d\bar{x}_\beta=\frac{\partial\bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda}dx_\lambda$$

$$ds^2=\sum_{\mu,\nu=1}^{4}g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu$$　卽　$$ds^2=g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu$$

$$=\sum_{\kappa,\lambda=1}^{4}\bar{g}_{\kappa\lambda}\,d\bar{x}_\kappa\,d\bar{x}_\lambda$$　　$$=\bar{g}_{\kappa\lambda}\,d\bar{x}_\kappa\,d\bar{x}_\lambda$$

$$g_{\gamma\delta}=\sum_{\iota=1}^{4}\frac{\partial\bar{x}_\iota}{\partial x_\gamma}\frac{\partial\bar{x}_\iota}{\partial x_\delta}$$　　$$g_{\gamma\delta}=\frac{\partial\bar{x}_\iota}{\partial x_\gamma}\frac{\partial\bar{x}_\iota}{\partial x_\delta}$$

上列諸式中右足所記之希臘字母皆代表 1, 2, 3, 4 者.而其一代表項中,凡有二個同樣之希臘字母時,卽爲就此同樣之字母展開者,如 κ λ μ ν ι 之類是也.其餘者於等式之一方不重見,卽非就其字母展開者,如 α β γ δ 之類是

也.

一代表項中有一對同樣之希臘字母者,展開式有四項,有兩對各同樣者,展開式有十六項,有三對者展開式有六十四項.一代表項中僅有獨異之一希臘字母者,則得四組展開式,有二個不同之希臘字母時,可得十六組之展開式,有三個者得六十四組.根據此法省去$\sum$故無礙.

向量概別爲二類,可表之於兩種形式以別其性質.

其形式爲 $A_\alpha\ \bar{A}_\beta$ 或 $A^\alpha\ \bar{A}^\beta$

如於 $\frac{\partial s}{\partial \bar{x}_\alpha}=\frac{\partial s}{\partial x_\kappa}\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}$

$\frac{\partial s}{\partial \bar{x}_\alpha}$既爲距離 s 對於 x_α 軸之關係有方向有長度.故爲向量.
同理可知 $\frac{\partial s}{\partial x_\kappa}$ 亦應爲向量

令 $\bar{A}_\alpha=\frac{\partial s}{\partial \bar{x}_\alpha}$ $A_\kappa=\frac{\partial s}{\partial x_\kappa}$

則得 $\bar{A}_\alpha=\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}A_\kappa$ 同理 $A_\kappa=\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_\kappa}\bar{A}_\alpha$

又於 $d\bar{x}_\beta=\frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda}dx_\lambda$

$d\bar{x}_\beta$爲一點平行於$\bar{x}_\beta$軸移動之距離,亦爲有方向有長度之量,故是向量.同理dx_λ亦應爲向量.

故令 $\bar{A}^\beta=d\bar{x}_\beta$ 及 $A^\lambda=dx_\lambda$

然則 $\bar{A}^\beta=\frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda}A^\lambda$ $A^\lambda=\frac{\partial x_\lambda}{\partial \bar{x}_\beta}\bar{A}^\beta$

但較之 $\bar{A}_\alpha=\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}A_\kappa$ 或 $A_\kappa=\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_\kappa}\bar{A}_\alpha$

一有 $\frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda}$ 一則有 $\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}$ 爲其係數.可知其對於二組座標軸之關係各不相同.然則其性質亦必有異.是以區別爲二類

如 $\bar{A}_\alpha$, B_λ 之類名共變向量.

如 A^α, $\bar{B}^\gamma$ 之類名逆變向量.

前列之向量式分析則各成四張量.是爲一級張量.因其 $4^1=4$ 之故.若有 $4^2=16$ 張量.則謂之二級張量.如三級張量則因得 $4^3=64$ 張量也.n 級張量則因得 4^n 張量也.俱不難推.至若長度,雖非張量,爲圖便利,則稱爲零級張量.故知零級張量爲不變量.若夫向量既可視作張量,亦稱一級張量,以其性質同也.

凡由異種張量相乘得低級之張量者,謂之內乘.由異種張量相乘得高級之張量者,謂之外乘.

表示張量相乘之符號如下:

$$\bar{C}_{\alpha\beta}=\bar{A}_\alpha\bar{B}_\beta=\bar{A}_\beta\bar{A}_\alpha$$

$$C_{\kappa\lambda}=A_\kappa B_\lambda=A_\kappa A_\lambda$$

$$C_\gamma^\delta=A_\gamma B^\delta=A_\gamma A^\delta$$

$$\bar{C}_{\alpha\beta}^\nu=\bar{A}_\alpha\bar{B}_\beta\bar{C}^\nu=\bar{D}_\alpha\bar{D}_\beta\bar{D}^\nu$$

....

....

今有 $$\bar{B}_\beta=\frac{\partial x_\lambda}{\partial \bar{x}_\beta}B_\lambda$$

此理同於 $$\bar{A}_\alpha=\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}A_\kappa$$

上二式相乘　$\bar{B}_\beta \bar{A}_\alpha = \frac{\partial x_\lambda}{\partial \bar{x}_\beta} \frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha} B_\lambda A_\kappa$

卽是　$\bar{C}_{\beta\alpha} = \frac{\partial x_\lambda}{\partial \bar{x}_\beta} \frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha} C_{\lambda\kappa}$

此爲共變向量相乘者,謂之共變張量.外乘之例也.上代表式中有二 λ 二 κ 故須就 λ κ 展開,各展開式故有十六項.而代表式中有相異之 β α 各一,故得十六組,以其 $4^2=16$ 故爲二級張量,如上式則是二級共變張量.

又令　$\bar{B}^\gamma = \frac{\partial \bar{x}_\gamma}{\partial x_\mu} B^\mu$

此理同於　$\bar{A}^\beta = \frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda} A^\lambda$

上二式相乘　$\bar{B}^\gamma \bar{A}^\beta = \frac{\partial \bar{x}_\gamma}{\partial x_\mu} \frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda} B^\mu A^\lambda$

卽　$\bar{C}^{\gamma\beta} = \frac{\partial \bar{x}_\gamma}{\partial x_\mu} \frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda} C^{\mu\lambda}$

此亦爲張量之外乘.因其爲二逆變向量相乘者,謂之逆變張量.μ λ 有同樣者,γ β 爲各異者,故得十六組之展開式,各展開式有十六項.故上式謂之二級逆變張量.

設以　$\bar{A}_\alpha \bar{A}^\beta = \frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha} A_\kappa \frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda} A^\lambda$

則　$\bar{C}^\beta_\alpha = \frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha} \frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda} C^\lambda_\kappa$

此爲一級共變張量與一級逆變張量相乘者謂之二級混合張量,外乘之例也.

同理得　$\bar{D}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial x_\kappa \partial x_\lambda \partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta \partial \bar{x}_\gamma} D_{\kappa\lambda\mu}$　三級共變張量

$$\bar{D}^{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial\bar{x}_\alpha}{\partial x_\kappa}\frac{\partial\bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\bar{x}_\gamma}{\partial x_\mu}D^{\kappa\lambda\mu}$$ 三級逆變張量

$$\left.\begin{aligned}\bar{D}^{\gamma}_{\alpha\beta}&=\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\lambda}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial\bar{x}_\gamma}{\partial x_\mu}D^{\mu}_{\kappa\lambda}\\ \bar{D}^{\alpha\beta}_{\gamma}&=\frac{\partial\bar{x}_\alpha}{\partial x_\kappa}\frac{\partial\bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\gamma}D^{\kappa\lambda}_{\mu}\end{aligned}\right\}$$ 三級混合張量

由此可得更高級之張量,如四級混合張量則有

$$\bar{B}^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\lambda}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial\bar{x}_\delta}{\partial x_\nu}B^{\nu}_{\kappa\lambda\mu}$$

張量之內乘爲共變張量與逆變張量相乘所得者.內乘之結果.有時可得零級之張量.即不變量長度之類也.

設以 $$\bar{A}_\alpha=\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\alpha}A_\kappa$$

乘 $$\bar{B}^{\alpha}_{\beta}=\frac{\partial\bar{x}_\alpha}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\beta}B^{\lambda}_{\mu}$$

則 $$\bar{A}_\alpha\bar{B}^{\alpha}_{\beta}=\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\alpha}\frac{\partial\bar{x}_\alpha}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\beta}A_\kappa B^{\lambda}_{\mu}$$

即 $$\bar{C}^{\alpha}_{\alpha\beta}=\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\alpha}\frac{\partial\bar{x}_\alpha}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\beta}C^{\lambda}_{\kappa\mu}$$

$$=\frac{\partial x_\kappa}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\beta}C^{\lambda}_{\kappa\mu}$$

上式因 $$\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\alpha}\frac{\partial\bar{x}_\alpha}{\partial x_\lambda}=\frac{\partial x_\kappa}{\partial x_\lambda}$$

蓋 α 於一項中同時不能代表 1, 2, 3, 4 中之二數字或以上者.故書作上式無礙.

然座標 x_1, x_2, x_3, x_4 各爲獨立變數而不相聯屬者.

是以 $\frac{\partial x_\kappa}{\partial x_\lambda}$ 中若 $\kappa\neq\lambda$

則 $\frac{\partial x_\kappa}{\partial x_\lambda}=0$ 蓋 $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}=\frac{\partial x_2}{\partial x_3}=\cdots\cdots\cdots\cdots=0$

設 $k=\lambda$ 則 $\frac{\partial x_\kappa}{\partial x_\lambda}=\frac{\partial x_\kappa}{\partial x_\kappa}=1$

故 $$\bar{C}^{\alpha}_{\alpha\beta}=\frac{\partial x_\kappa}{\partial x_\kappa}\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\beta}C^{\kappa}_{\kappa\mu}\quad+0$$
$$=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\beta}C^{\kappa}_{\kappa\mu}$$

此式為一級共變張量之關係.故按共變向量之記法得

$$\bar{C}_\beta=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\beta}C_\mu$$

同理得 $$\bar{A}^{\alpha}_{\alpha}=\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_\kappa}A^{\kappa}_{\kappa}$$

$\bar{A}=A$ 此即表示不變量之意.

凡 $\bar{B}^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}=\bar{B}=B$

又 $$\bar{C}^{\alpha\beta}_{\alpha}=\bar{C}^{\beta}=\frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda}C^{\lambda}$$

$$\bar{A}^{\alpha}_{\alpha\beta\gamma}=\bar{A}_{\beta\gamma}=\frac{\partial x_\lambda}{\partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\gamma}A_{\lambda\mu}$$

....

....

由是觀之,不變量必為同級之共變張量逆變張量相乘之結果.

張量有可以同級同類張量之和或差表示者.然則可知同級同類之張量相加減仍得同級同類之張量無疑.

例如 $\bar{C}_\delta=\bar{A}_\delta\pm\bar{B}_\delta$

即 $$\bar{C}_\delta=\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\delta}A_\nu\pm\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\delta}B_\nu$$

$$=\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\delta}(A_\nu\pm B_\nu)$$

即 $$\bar{C}_\delta=\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\delta}C_\nu$$

因既令 $\bar{C}_\delta=\bar{A}_\delta\pm\bar{B}_\delta$ 故亦可令 $C_\nu=A_\nu\pm B_\nu$

(3) 根據 $ds^2=g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu=\bar{g}_{\kappa\lambda}\,d\bar{x}_\kappa\,d\bar{x}_\lambda$

並做 $$d\bar{x}_\beta=\frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_\lambda}dx_\lambda$$

得 $$dx_\alpha=\frac{\partial x_\alpha}{\partial \bar{x}_\kappa}d\bar{x}_\kappa$$

推知 $$g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu=g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\kappa}d\bar{x}_\kappa\right)\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\lambda}d\bar{x}_\lambda\right)$$

$$\therefore\quad \bar{g}_{\kappa\lambda}\,d\bar{x}_\kappa\,d\bar{x}_\lambda=g_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\kappa}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\lambda}d\bar{x}_\kappa\,d\bar{x}_\lambda$$

即 $$\left(\bar{g}_{\kappa\lambda}-g_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\kappa}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\lambda}\right)d\bar{x}_\kappa\,d\bar{x}_\lambda=0$$

但 $$d\bar{x}_\kappa\,d\bar{x}_\lambda\neq 0$$

故得 $$\bar{g}_{\kappa\lambda}=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\kappa}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\lambda}g_{\mu\nu}$$

由上式知 $\bar{g}_{\kappa\lambda}$ 與 $g_{\mu\nu}$ 爲二級共變張量之關係.故以 α 換 κ 以 β 換 λ 其性質仍舊.

是以 $$\bar{g}_{\alpha\beta}=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}g_{\mu\nu}$$

設將 $g_{\mu\nu}$ 羣所代表之各值組成一行列式如次.

$$|g_{\mu\nu}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} = g$$

又令

$$gg^{11} = \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \qquad gg^{12} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix}$$

$$gg^{13} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{44} \end{vmatrix} \qquad gg^{14} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} \end{vmatrix}$$

....

....

若前列 $g_{\mu\nu}$ 各值之副行列式以 $|g_{(\mu\nu)}|$ 表之.

則　$gg^{\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu} \times |g_{(\mu\nu)}|$

但原式　$|g_{\mu\nu}| = g_{11}|g_{(11)}| - g_{21}|g_{(21)}| + g_{31}|g_{(31)}| - g_{41}|g_{(41)}|$

卽　$g = g_{11}\,g\,g^{11} + g_{21}\,g\,g^{21} + g_{31}\,g\,g^{31} + g_{41}\,g\,g^{41}$

$\therefore$　$1 = g_{11}\,g^{11} + g_{21}\,g^{21} + g_{31}\,g^{31} + g_{41}\,g^{41}$

$$= \sum_{\mu=1}^{4} g_{\mu\alpha}\,g^{\mu\alpha}$$

上式中 α 同時僅能代表 1, 2, 3, 4 中之一數字.故於一代表項中不可令有二 α.是以其中之一 α 另以 β 代之亦可省去Σ.

然則 $g_{\mu\alpha}g^{\mu\beta}=1$ 但須 $\alpha=\beta$

若 $\alpha\neq\beta$ 則得 $g_{\mu\alpha}g^{\mu\beta}=0$

例如 $g_{11}g^{21}+g_{12}g^{22}+g_{13}g^{23}+g_{14}g^{24}=0$

可於行列式之法則知之

但既知 $g_{\mu\nu}$ 爲二級共變張量而 $g_{\mu\alpha}$ 所代表者亦同於 $g_{\mu\nu}$ 之意義.故 $g_{\mu\alpha}$ 亦爲二級共變張量無疑.

然而 $g_{\mu\alpha}g^{\mu\beta}=1$ $\alpha=\beta$

$g_{\mu\alpha}g^{\mu\beta}=0$ $\alpha\neq\beta$

今知 1 及 0 皆爲不變量又爲二級共變張量之 $g_{\mu\alpha}$ 乘以 $g^{\mu\beta}$ 所得之結果.故 $g^{\mu\beta}$ 非爲二級逆變張量不可.否則二者相乘不能成爲不變量矣.

又知 $g_{\mu\alpha}g^{\mu\beta}=g_{\alpha}^{\beta}$

而 $\alpha=\beta$ 可得 $g_{\alpha}^{\beta}=1$

$\alpha\neq\beta$ $g_{\alpha}^{\beta}=0$

是 g_{α}^{β} 爲二級混合張量也因其爲不變量故也.

(4) 前述之量可代入 Christoffel 之三字符號中以行演算

其第一種爲 $\begin{bmatrix}\alpha\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_{\alpha}}+\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x_{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\gamma}}\right)=\begin{bmatrix}\beta\alpha\\\gamma\end{bmatrix}$

其第二種爲 $\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\\gamma\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}g^{\gamma\iota}\left(\frac{\partial g_{\beta\iota}}{\partial x_{\alpha}}+\frac{\partial g_{\iota\alpha}}{\partial x_{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\iota}}\right)=\begin{Bmatrix}\beta\alpha\\\gamma\end{Bmatrix}$

$$=g^{\gamma\iota}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\\iota\end{bmatrix}=g^{\gamma\iota}\begin{bmatrix}\beta\alpha\\\iota\end{bmatrix}$$

同理 $$\left[\overline{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{matrix}}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial\bar{x}_\alpha}+\frac{\partial\bar{g}_{\gamma\alpha}}{\partial\bar{x}_\beta}-\frac{\partial\bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial\bar{x}_\gamma}\right)=\left[\overline{\begin{matrix}\beta\alpha\\ \gamma\end{matrix}}\right]$$

$$\left\{\overline{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{matrix}}\right\}=\left\{\overline{\begin{matrix}\beta\alpha\\ \gamma\end{matrix}}\right\}=\bar{g}^{\gamma\iota}\left[\overline{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \iota\end{matrix}}\right]=\bar{g}^{\gamma\iota}\left[\overline{\begin{matrix}\beta\alpha\\ \iota\end{matrix}}\right]$$

倣照 $$\bar{g}_{\alpha\beta}=\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\gamma}{\partial\bar{x}_\beta}g_{\mu\gamma}$$

可得 $$\bar{g}_{\gamma\alpha}=\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\alpha}g_{\kappa\mu}$$

$$\bar{g}_{\beta\gamma}=\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}g_{\nu\kappa}$$

由是知 $$\frac{\partial\bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial\bar{x}_\alpha}=g_{\nu\kappa}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_\alpha}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}\right)+\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial\bar{x}_\alpha}$$

$$g_{\nu\kappa}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_\alpha}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}\right)=g_{\nu\kappa}\left(\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial\bar{x}_\alpha\partial\bar{x}_\beta}+\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial^2 x_\kappa}{\partial\bar{x}_\alpha\partial\bar{x}_\gamma}\right)$$

$$=g_{\nu\kappa}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial\bar{x}_\alpha\partial\bar{x}_\beta}+g_{\kappa\nu}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial\bar{x}_\alpha\partial\bar{x}_\gamma}$$

上式最後之代表項中.因原有二 ν 二 k 雖 k 與 ν 之位置轉換其展開式各項之和應無變異.故得前式

又 $g_{\nu\kappa}$ 同於 $g_{\kappa\nu}$ 之意所代表之值自必相同.

故 $$g_{\nu\kappa}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_\alpha}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial x_\gamma}\right)=2g_{\nu\kappa}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\alpha}$$

又 $$\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial\bar{x}_\alpha}=\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}\left(\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\bar{x}_\alpha}+\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial\bar{x}_\alpha}+\cdots\cdots+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\alpha}$$

$$=\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\alpha}\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x_\mu}$$

∴ $$\frac{\partial\bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial\bar{x}_\alpha}=2g_{\nu\kappa}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\alpha}+\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\alpha}\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x_\mu}$$

同理 $$\frac{\partial \bar{g}_{\gamma\alpha}}{\partial \bar{x}_\beta}=2g_{\nu\kappa}\frac{\partial^2 x_\kappa}{\partial \bar{x}_\gamma \partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\beta}+\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x_\nu}$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}_\gamma}=2g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\gamma}+\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\gamma}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\kappa}$$

∴ $$\frac{\partial \bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial \bar{x}_\alpha}+\frac{\partial \bar{g}_{\gamma\alpha}}{\partial \bar{x}_\beta}-\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}_\gamma}$$

$$=2\left(g_{\nu\kappa}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta \partial \bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}+g_{\kappa\mu}\frac{\partial^2 x_\kappa}{\partial \bar{x}_\gamma \partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\beta}-g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\gamma}\right)$$

$$+\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\left(\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x_\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\kappa}\right)$$

但 $$g_{\nu\kappa}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta \partial \bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}+g_{\kappa\mu}\frac{\partial^2 x_\kappa}{\partial \bar{x}_\gamma \partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\beta}-g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\gamma}$$

$$=g_{\nu\kappa}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta \partial \bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}+g_{\kappa\mu}\frac{\partial^2 x_\kappa}{\partial \bar{x}_\gamma \partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\beta}+g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\gamma}$$

$$-g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\gamma}-g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\gamma}$$

而 $$g_{\nu\kappa}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta \partial \bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}-g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\gamma}=0$$

因前後兩代表項各有一 α,β,γ.故總其差可得 4^3 組.又各有二 ν 故每組皆須就 ν 展開.惟所異者前代表項有二 κ 後代表項有二 μ.然 κ 及 μ 於各組中亦皆爲代表迭換之 1, 2, 3, 4 四數字者.是以前後兩代表項常於展開式中;凡 $\kappa=\mu$ 時得各項之差爲零.總之每組中;前代表項展開之 4^2 項(因有二 ν 二 κ)減去後代表項展開之 4^2 項(因有二 ν 二 μ)亦必爲零.蓋在一展開式中共得 4^2 項之零故也.

同理 $$g_{\kappa\mu}\frac{\partial^2 x_\kappa}{\partial \bar{x}_\gamma \partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\beta}-g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\gamma}=0$$

因各代表項亦各有一 α,β,γ 故其差亦得 4^3 組.又各有二 μ 所異者前代表項有二 k 後代表項有二 ν.故知前後兩代表項於每組展開時.凡 $k=\nu$ 得各項之差爲零.總之得 4^2 項之差皆爲零.

故前式可成

$$g_{\nu\kappa}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta\,\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\alpha}+g_{\kappa\mu}\frac{\partial^2 x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma\,\partial\bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\beta}-g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial\bar{x}_\alpha\,\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\gamma}$$

$$=g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial\bar{x}_\beta\,\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\alpha}$$

故

$$\frac{\partial\bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial\bar{x}_\alpha}+\frac{\partial\bar{g}_{\gamma\alpha}}{\partial\bar{x}_\beta}-\frac{\partial\bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial\bar{x}_\gamma}$$

$$=2g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial\bar{x}_\beta\,\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\alpha}+\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\alpha}\left(\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x_\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\kappa}\right)$$

即

$$\overline{\begin{bmatrix}\alpha\beta\\\gamma\end{bmatrix}}=g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial\bar{x}_\beta\,\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\alpha}+\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\gamma}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu\\k\end{bmatrix}$$

上式中以 ι 代 γ.且兩方乘以 $\frac{\partial x_\delta}{\partial\bar{x}_\lambda}\bar{g}^{\lambda\iota}$

則

$$\frac{\partial x_\delta}{\partial\bar{x}_\lambda}\bar{g}^{\lambda\iota}\overline{\begin{bmatrix}\alpha\beta\\\iota\end{bmatrix}}$$

$$=\frac{\partial x_\delta}{\partial\bar{x}_\lambda}\bar{g}^{\lambda\iota}g_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial\bar{x}_\beta\,\partial\bar{x}_\iota}\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\alpha}+\frac{\partial x_\delta}{\partial\bar{x}_\lambda}\bar{g}^{\lambda\iota}\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\iota}\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu\\k\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial\bar{x}_\alpha\,\partial\bar{x}_\beta}g_{\mu\nu}\frac{\partial x_\delta}{\partial\bar{x}_\lambda}\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\iota}\bar{g}^{\lambda\iota}+\frac{\partial x_\mu}{\partial\bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\beta}\frac{\partial x_\delta}{\partial\bar{x}_\lambda}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\iota}\bar{g}^{\lambda\iota}\begin{bmatrix}\mu\nu\\k\end{bmatrix}$$

但可令

$$\frac{\partial x_\delta}{\partial\bar{x}_\lambda}\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\iota}\bar{g}^{\lambda\iota}=g^{\delta\nu}$$

$$\frac{\partial x_\delta}{\partial\bar{x}_\lambda}\frac{\partial x_\kappa}{\partial\bar{x}_\iota}\bar{g}^{\lambda\iota}=g^{\delta\kappa}$$

而

$$\bar{g}^{\lambda\iota}\overline{\begin{bmatrix}\alpha\beta\\\iota\end{bmatrix}}=\overline{\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\\lambda\end{Bmatrix}}$$

故 $$\frac{\partial x_\delta}{\partial \bar{x}_\lambda}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{matrix}\right\}=\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}g_{\mu\nu}g^{\delta\nu}+\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}g^{\delta\kappa}\left[\begin{matrix}\mu\nu\\ k\end{matrix}\right]$$

惟 $\delta \neq \mu$ 則 $$\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}g_{\mu\nu}g^{\delta\nu}=0$$

若 $\delta=\mu$ 得 $$\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}g_{\mu\nu}g^{\delta\nu}=\frac{\partial^2 x_\delta}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}$$

於$g_{\mu\nu}$及$g^{\mu\nu}$內乘之性質卽可知之

且 $$\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}g^{\delta\kappa}\left[\begin{matrix}\mu\nu\\ k\end{matrix}\right]=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \delta\end{matrix}\right\}$$

∴ $$\frac{\partial x_\delta}{\partial \bar{x}_\lambda}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{matrix}\right\}=\frac{\partial^2 x_\delta}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}+\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \delta\end{matrix}\right\}$$

故 $$\frac{\partial^2 x_\delta}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}=\frac{\partial x_\delta}{\partial \bar{x}_\lambda}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{matrix}\right\}-\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \delta\end{matrix}\right\}$$

今於 $$\bar{A}_\alpha=\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}A_\kappa$$

就$\bar{x}_\beta$偏微分 $$\frac{\partial \bar{A}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta}=A_\kappa\frac{\partial^2 x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}+\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial A_\kappa}{\partial \bar{x}_\beta}$$

但在 $$A_\kappa\frac{\partial^2 x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}=A_\kappa\left(\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\lambda}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{matrix}\right\}-\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ k\end{matrix}\right\}\right)$$

式中k與前式中δ位置相當

又令 $$\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial A_\kappa}{\partial \bar{x}_\beta}=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial A_\mu}{\partial \bar{x}_\beta}$$

因μ與k同爲代表 1, 2, 3, 4 四數字者.如上式之左方.就k依次展開可得四項.右方若就μ依次展開亦得四項.其值應無不相同.其和應亦相等也.

因此

$$\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial A_\kappa}{\partial \bar{x}_\beta}=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial A_\mu}{\partial \bar{x}_\beta}$$

$$=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_\beta}+\frac{\partial A_\mu}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_\beta}+\cdots\cdots+\cdots\right)$$

$$=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

故 $$\frac{\partial \bar{A}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta}=A_\kappa\left(\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\lambda}\overline{\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}}-\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\k\end{matrix}\right\}\right)+\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

卽 $$\frac{\partial \bar{A}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta}-A_\kappa\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\lambda}\overline{\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}}=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-A_\kappa\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\k\end{matrix}\right\}\right)$$

但 $$\bar{A}_\lambda\overline{\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}}=A_\kappa\frac{\partial x_\kappa}{\partial \bar{x}_\lambda}\overline{\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}}$$

∴ $$\frac{\partial \bar{A}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta}-\bar{A}_\lambda\overline{\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}}=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-A_\kappa\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\k\end{matrix}\right\}\right)$$

(5) 前者距離 s 就其座標之關係微分則得一級共變張量,然在一級或一級以上之張量,再微分則不得復爲張量,實爲通例.倘或假定特別之條件而令其微分之後仍爲張量亦無不可.

例如令 $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}B_{\mu\nu}$ 須先令 $\frac{\partial \bar{A}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta}=\bar{B}_{\alpha\beta}$

倘令 $\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\k\end{matrix}\right\}=C^\kappa_{\mu\nu}$ 則已是 $\overline{\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}}=\bar{C}^\lambda_{\alpha\beta}$

然則可得 $$(\bar{B}_{\alpha\beta}-\bar{A}_\lambda\bar{C}^\lambda_{\alpha\beta})=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}(B_{\mu\nu}-A_\kappa C^\kappa_{\mu\nu})$$

卽如 $$(\bar{B}_{\alpha\beta}-\bar{D}_{\alpha\beta})=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}(B_{\mu\nu}-D_{\mu\nu})$$

由張量相加減仍爲同級同類張量之理.

可得 $$\bar{E}_{\alpha\beta}=\frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\beta}E_{\mu\nu}$$

是卽 $$\frac{\partial \bar{A}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta}-\bar{A}_\lambda\overline{\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}}=\bar{E}_{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - A_\kappa\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ k\end{Bmatrix} = E_{\mu\nu}$$

上式中$E_{\alpha\beta}$稱爲$\bar{A}_\alpha$之共變微分係數.$E_{\mu\nu}$稱爲A_μ之共變微分係數.因$\bar{A}_\alpha$僅就x_β爲一階偏微分,A_μ亦僅就x_ν爲一階偏微分.故稱爲一階共變微分係數.

今有$E_{\alpha\gamma}$爲A_α之一階共變微分係數.又有$E_{\beta\gamma}$爲A_β之一階共變微分係數時

則
$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma} - A_\iota\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \tau\end{Bmatrix} = E_{\alpha\gamma}$$

$$\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma} - A_\iota\begin{Bmatrix}\beta\gamma\\ \tau\end{Bmatrix} = E_{\beta\gamma}$$

設以A_β乘$E_{\alpha\gamma}$並加$A_\alpha E_{\beta\gamma}$

則
$$A_\beta E_{\alpha\gamma} + A_\alpha E_{\beta\gamma} = A_\beta\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma} - A_\iota\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \tau\end{Bmatrix}\right) + A_\alpha\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma} - A_\iota\begin{Bmatrix}\beta\gamma\\ \tau\end{Bmatrix}\right)$$

$$= A_\beta\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma} + A_\alpha\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma} - A_\beta A_\iota\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \tau\end{Bmatrix} - A_\alpha A_\iota\begin{Bmatrix}\beta\gamma\\ \tau\end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\partial A_\alpha A_\beta}{\partial x_\gamma} - A_\alpha A_\iota\begin{Bmatrix}\beta\gamma\\ \tau\end{Bmatrix} - A_\beta A_\iota\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \tau\end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} - B_{\iota\alpha}\begin{Bmatrix}\beta\gamma\\ \tau\end{Bmatrix} - B_{\iota\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \tau\end{Bmatrix}$$

但
$$A_\beta E_{\alpha\gamma} + A_\alpha E_{\beta\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma} \qquad \text{(同級同類)}$$

故
$$C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} - B_{\iota\alpha}\begin{Bmatrix}\beta\gamma\\ \tau\end{Bmatrix} - B_{\iota\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \tau\end{Bmatrix}$$

而
$$B_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - A_\kappa\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ k\end{Bmatrix}$$

$$B_{\iota\alpha} = \frac{\partial A_\iota}{\partial x_\alpha} - A_\kappa\begin{Bmatrix}\alpha\tau\\ k\end{Bmatrix}$$

$$B_{\iota\beta}=\frac{\partial A_\iota}{\partial x_\beta}-A_\kappa\left\{{\beta\tau \atop k}\right\}$$

卽

$$C_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}-A_\kappa\left\{{\alpha\beta \atop k}\right\}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial A_\iota}{\partial x_\alpha}-A_\kappa\left\{{\alpha\iota \atop k}\right\}\right)\left\{{\beta\gamma \atop \tau}\right\}$$
$$-\left(\frac{\partial A_\iota}{\partial x_\beta}-A_\kappa\left\{{\beta\tau \atop k}\right\}\right)\left\{{\alpha\gamma \atop \tau}\right\}$$
$$=\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x_\beta\partial x_\gamma}-\left\{{\alpha\beta \atop k}\right\}\frac{\partial A_\kappa}{\partial x_\gamma}-A_\kappa\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left\{{\alpha\beta \atop k}\right\}$$
$$-\left\{{\beta\gamma \atop \tau}\right\}\frac{\partial A_\iota}{\partial x_\alpha}+A_\kappa\left\{{\alpha\tau \atop k}\right\}\left\{{\beta\gamma \atop \tau}\right\}$$
$$-\left\{{\alpha\gamma \atop \tau}\right\}\frac{\partial A_\iota}{\partial x_\beta}+A_\kappa\left\{{\beta\tau \atop k}\right\}\left\{{\alpha\gamma \atop \tau}\right\}$$

同理

$$C_{\alpha\gamma\beta}=\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x_\gamma\partial x_\beta}-\left\{{\alpha\gamma \atop k}\right\}\frac{\partial A_\kappa}{\partial x_\beta}-A_\kappa\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{{\alpha\gamma \atop k}\right\}$$
$$-\left\{{\gamma\beta \atop \tau}\right\}\frac{\partial A_\iota}{\partial x_\alpha}+A_\tau\left\{{\alpha\tau \atop k}\right\}\left\{{\gamma\beta \atop \tau}\right\}$$
$$-\left\{{\alpha\beta \atop \tau}\right\}\frac{\partial A_\iota}{\partial x_\beta}+A_\kappa\left\{{\gamma\tau \atop k}\right\}\left\{{\alpha\beta \atop \iota}\right\}$$

上二式 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 及 $C_{\alpha\gamma\beta}$ 各爲 A_α 之二階共變微分係數可於各式右方第一項知之.蓋 A_α 皆各就 x_β 或 x_γ 爲二階之偏微分也.

若令　$C_{\alpha\beta\gamma}-C_{\alpha\gamma\beta}=D_{\alpha\beta\gamma}$

則

$$D_{\alpha\beta\gamma}=-\left\{{\alpha\beta \atop k}\right\}\frac{\partial A_\kappa}{\partial x_\gamma}-A_\kappa\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left\{{\alpha\beta \atop k}\right\}-\left\{{\alpha\gamma \atop \tau}\right\}\frac{\partial A_\iota}{\partial x_\beta}+A_\kappa\left\{{\beta\tau \atop k}\right\}\left\{{\alpha\gamma \atop \iota}\right\}$$
$$+\left\{{\alpha\gamma \atop k}\right\}\frac{\partial A_\kappa}{\partial x_\beta}+A_\kappa\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{{\alpha\gamma \atop k}\right\}+\left\{{\alpha\beta \atop \tau}\right\}\frac{\partial A_\iota}{\partial x_\gamma}-A_\kappa\left\{{\gamma\tau \atop k}\right\}\left\{{\alpha\beta \atop \tau}\right\}$$

但

$$-\left\{{\alpha\beta \atop k}\right\}\frac{\partial A_\kappa}{\partial x_\gamma}+\left\{{\alpha\beta \atop \tau}\right\}\frac{\partial A_\iota}{\partial x_\gamma}=0$$

$$-\left\{{\alpha\gamma \atop \tau}\right\}\frac{\partial A_\iota}{\partial x_\beta}+\left\{{\alpha\beta \atop k}\right\}\frac{\partial A_\kappa}{\partial x_\beta}=0$$

上二式各代表項有一 α,β,γ 所異者或有二 τ 或有二 k 然每組展開時;凡 $\tau=k$ 之各項相較爲零.故總差亦爲零.

是以 $$D_{\alpha\beta\gamma}=-A_\kappa\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left\{{\alpha\beta \atop k}\right\}+A_\kappa\left\{{\beta\tau \atop k}\right\}\left\{{\alpha\gamma \atop \tau}\right\}+A_\kappa\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{{\alpha\gamma \atop k}\right\}-A_\kappa\left\{{\gamma\tau \atop k}\right\}\left\{{\alpha\beta \atop \tau}\right\}$$

$$=A_\kappa\left(\left\{{\beta\tau \atop k}\right\}\left\{{\alpha\gamma \atop \tau}\right\}-\left\{{\gamma\tau \atop k}\right\}\left\{{\alpha\beta \atop \tau}\right\}+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{{\alpha\gamma \atop k}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left\{{\alpha\beta \atop k}\right\}\right)$$

然則 $$C^\delta D_{\alpha\beta\gamma}=C^\delta A_\kappa\left(\left\{{\beta\tau \atop k}\right\}\left\{{\alpha\gamma \atop \tau}\right\}-\left\{{\gamma\tau \atop k}\right\}\left\{{\alpha\beta \atop \tau}\right\}+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{{\alpha\gamma \atop k}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left\{{\alpha\beta \atop k}\right\}\right)$$

但可令 $C^\delta D_{\alpha\beta\gamma}=B^\delta_{\alpha\beta\gamma}$

又於 $C^\delta A_\kappa=B^\delta_\kappa=0$ 時須先令 $k\neq\delta$

若 $C^\delta A_\kappa=1$ 故須先得 $k=\delta$

故 $$B^\delta_{\alpha\beta\gamma}=\left\{{\beta\tau \atop \delta}\right\}\left\{{\alpha\gamma \atop \tau}\right\}-\left\{{\gamma\tau \atop \delta}\right\}\left\{{\alpha\beta \atop \tau}\right\}+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{{\alpha\gamma \atop \delta}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left\{{\alpha\beta \atop \delta}\right\}$$

若 $g_{\mu\gamma}$ 羣之各值皆爲定數.則 $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\iota}$ 羣之各值必皆爲零.然則 $\left\{{\mu\nu \atop \lambda}\right\}$ 羣之各值亦爲零.

由是必得

$$B^\delta_{\alpha\beta\gamma}=\left\{{\beta\tau \atop \delta}\right\}\left\{{\alpha\gamma \atop \tau}\right\}-\left\{{\gamma\tau \atop \delta}\right\}\left\{{\alpha\beta \atop \tau}\right\}+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{{\alpha\gamma \atop \delta}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left\{{\alpha\beta \atop \delta}\right\}=0$$

然則四度空間座標轉變時決定 $g_{\mu\nu}$ 羣之各值必可使之合於上式.卽上式之關係,在四度空間無論座標如何變換系統,皆可成立也.至若距離等類之不變量,亦未嘗因座標變換而生變化,自不待言.

故由 x_1, x_2, x_3, x_4 之系統變換爲 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ 之系統時.

亦得 $$\overline{B}^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial x_{\kappa}\,\partial x_{\lambda}\,\partial x_{\mu}\,\partial \overline{x}_{\delta}}{\partial \overline{x}_{\alpha}\,\partial \overline{x}_{\beta}\,\partial \overline{x}_{\gamma}\,\partial x_{\nu}}B^{\nu}_{\kappa\lambda\mu}=0$$

前式皆僅就幾何學之抽象空間而論者.與力學中質量等項無關係.故亦未有勢力引力之關係存於其中.

然則因質量而發生勢力時其四度空間非仍如前述之純整同樣之組織,於此可知.

四度空間之組織如系純整同樣者則與非純整非同樣組織之四度空間相比較,有如直線之於曲線,正方體之於普通立體形.故四度空間非純整同樣組織者,猶純整同樣組織之四度空間中生有紆迴者然.

前述之關係爲純整無紆迴之空間中所有者,因其未參入他種物質勢力之影響故也.

但於 $$B^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}=0$$

安斯坦欲其適用於舊力學中之

Laplace 定理 $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

及 Poisson 定理 $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=4\pi\underline{\gamma}d$$

($\underline{\gamma}=6.7\times10^{-8}$dyne　　d 代表密度)

乃令 $$\gamma=\delta=\lambda$$

是卽令 $$B^{\lambda}_{\alpha\beta\lambda}=G_{\alpha\beta}\ g^{\delta}_{\gamma}$$

$$=\begin{Bmatrix}\beta\tau\\ \lambda\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\lambda\\ \tau\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau\lambda\\ \lambda\end{Bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x_{\beta}}\begin{Bmatrix}\alpha\lambda\\ \lambda\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix}$$

$$=0$$

但於 $G_{\alpha\beta} g^{\delta}_{\gamma} =$ 已知 $\delta \neq \gamma$ 則 $g^{\gamma}_{\delta} = 0$

若令 $\delta = \gamma = \lambda$ 則 $g^{\lambda}_{\lambda} = 1$

故得 $G_{\alpha\beta}\, g^{\lambda}_{\lambda} = G_{\alpha\beta} = 0$

故物質空間中之關係得 $G_{\alpha\beta} = B^{\lambda}_{\alpha\beta\lambda} = 0$

此式之成立過程以上只就數學方面譯述爲止.他日有機會當將關於物理方面之理論重行獻拙.此篇就此擱筆.

由相對論導出之氣體壓力式

吳 南 薰

1. 概 說

氣體爲不連續之分子所構成,而分子以頗大速度,自由運動,準理論與實驗,誠足令人深信不疑.茲欲準相對性原理,論氣體之性質,可以微粒運動說爲依歸.執是說也,氣體作用於器壁之力,生於諸分子之繼續衝突,而壓力之大小,等於單位面積上,單位時間內,各分子所與運動量之和.然就氣體之極小體積言之,某時刻或無一分子者有之,他時刻或突嫌擁擠者亦有之,其分子之數,將與空間及時間有關係;卽令同體積內,分子之數相等,而因分子出入無忌,其狀態亦不無變化.吾人須就多數分子之空間,與多種變化之時間,總統計算.乃可達所求之結果.茲仍準從來氣體運動論之所假定者,分述於次.

(1)氣體之狀態,可視爲平衡.

(2)分子之數,異常衆多,而其速度頗大,可於極短時間,生多數之衝突.

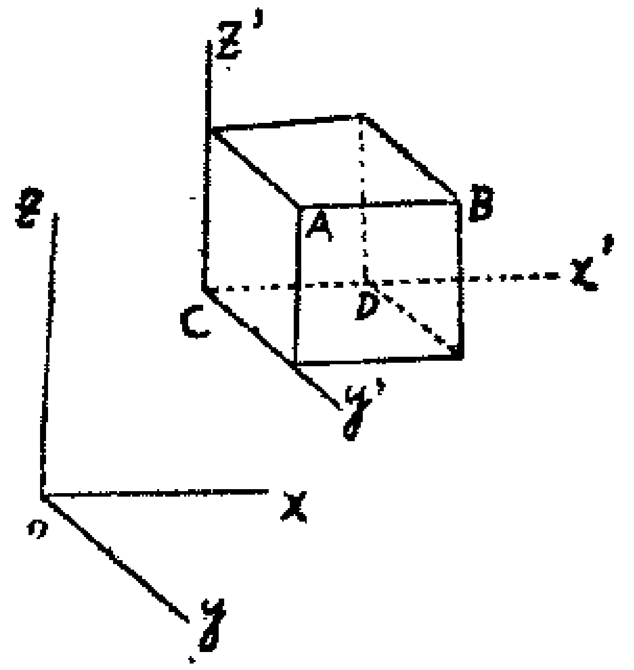
(3)分子之大,可以蔑視,而相距之距離頗遠,彼此殆無引力作用,各分子以一定速度,常爲直線運動;且分子之

相互衝突,事屬稀有,而運動之方向,僅衝突於器壁時,始有變化.

(4)分子爲完全彈性體,器壁之面,亦異常平滑.當分子與器壁衝突時,自靜止系觀之,其速度僅反其方向,而不變其大小.

2. 氣體壓力之計算

試準上述假定,就氣體全體爲等速運動時,計算器壁所受之壓力.設有一立方箱,中盛氣體,而坐標系 K (x, y, z) 之軸,適與此箱之稜平行;且立方箱之對於 K,常以一定速度 v,順 x 正方向運動.又設分子之靜止質量爲 m_0,此分子與箱前壁 BD 衝突前後之速度,由 K 系測之爲 q_1 與 q_2,則準相對論衝突前後,此分子之質量,由 K 系測之,可作爲



$$\frac{m_{10}}{\sqrt{1-q_1^2/c^2}} \qquad \frac{m_{10}}{\sqrt{1-q_2^2/c^2}}$$

但 c 爲真空中光之速度.故分子衝突一次,器壁所受之運動量,爲

$$\frac{m_{10}\,q_{1x}}{\sqrt{1-q_1^2/c^2}}-\frac{m_{10}\,q_{2x}}{\sqrt{1-q_2^2/c^2}}$$

但 q_{1x} 與 q_{2x} 爲 q_1 與 q_2 順 x 方向之分速度.或以第二項之 m_{10} 書爲 m_{20},則上式可變爲

$$\frac{m_{10}q_{1x}}{\sqrt{1-q_1^2/c^2}}-\frac{m_{20}q_{2x}}{\sqrt{1-q_2^2/c_2}}$$

又以此立方箱之邊長,自K系測之爲 l 而以靜止質量 m_{10} 速度 q_1 之分子數爲 N_1,靜止質量 m_{20} 速度 q_2 之分子數爲 N_2,則由某時刻 t 至 t+dt,分子與箱壁衝突之次數 n_1,爲

$$n_1=dtN_1\frac{q_{1x}-v}{l}$$

t−dt 至 t 衝突之次數 n_2,爲

$$n_2=dtN_2\frac{v-q_{2x}}{l}$$

然氣體在平衡狀態時,此二次數不得不相等,故

$$dtN_1\frac{q_{1x}-v}{l}=dtN_2\frac{v-q_{2x}}{l} \qquad (1)$$

由是而知單位時間內,箱壁由此種分子所受之運動量,爲

$$\frac{1}{l}\left\{\frac{N_1m_{10}q_{1x}(q_{1x}-v)}{\sqrt{1-q_1^2/c^2}}+\frac{N_2m_{20}(q_{2x}-v)}{\sqrt{1-q_2^2/c^2}}\right\}$$

若以 $\sum$ 表各種分子所生運動量之總和,則單位面積上所受之壓力 p_x,宜爲

$$p_x=\frac{1}{l^3}\Sigma\frac{N_1m_{10}q_{1x}(q_{1x}-v)}{\sqrt{1-q_1^2/c^2}} \qquad (2)$$

但 l^3 爲K系所測立方箱之體積,可表之以V.若以 n 爲單位體積內分子之數,q_x^2 爲分子之自乘平均速度.(Mean Square Velocity)則

$$n=\frac{\Sigma N_1}{V} \qquad q_x^2=\frac{\Sigma N_1q_1^2}{\Sigma N_1}$$

又以 m_0 爲分子之平均靜止質量,q 爲其平均速度,則合上二式,可得

$$p_x=\frac{I}{V}\left\{\Sigma\frac{N_1m_{10}q_{1x}^2}{\sqrt{1-q_1^2/c^2}}-\Sigma\frac{N_1m_{10}q_{1x}}{\sqrt{1-q_1^2/c^2}}v\right\}$$

$$=n\left\{\frac{\overline{m_0 q_x^2}}{\sqrt{1-q^2/c^2}}-\frac{\overline{m_0 q_x}}{\sqrt{1-q^2/c^2}}v\right\} \tag{3}$$

至垂直於 y，z 二軸之箱壁，所受之壓力，p_y 與 p_z，可注意此二面與速度 v 之方向平行，自 K 系視之，其所受壓力，與速度 v 無關係，如法導出之，即

$$\left.\begin{aligned} p_y&=\frac{1}{V}\Sigma\frac{N_i m_{i0} q_y^2}{\sqrt{1-q_i^2/c^2}}=n\frac{\overline{m_0 q_y^2}}{\sqrt{1-q^2/c^2}} \\ p_z&=\frac{1}{V}\Sigma\frac{N_i m_{i0} q_z^2}{\sqrt{1-q_i^2/c^2}}=n\frac{\overline{m_0 q_z^2}}{\sqrt{1-q^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

抑以固定於箱之坐標系K'.(x' y' z')所測分子之速度爲 q'，準速度之轉換式.

$$\left.\begin{aligned} &q_x=\frac{q'_x+v}{1+vq'/c^2},\quad q_y=\frac{q'_y+v}{1+vq'_x/c^2}\qquad q_z=\frac{q'_z+v}{1+vq'_x/c^2} \\ 及\quad &\frac{\sqrt{1-q^2/c^2}}{\sqrt{1-q'^2/c^2}}=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+vq'_x/c^2} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

可將(3)式右邊之第二項，變爲

$$\frac{nv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left\{\frac{\overline{m_0(q'_x+v)}}{\sqrt{1-q'^2/c^2}}\right\}=\frac{nv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left\{\frac{\overline{m_0 q'_x}}{\sqrt{1-q'^2/c^2}}+\frac{\overline{m_0 v}}{\sqrt{1-q'^2/c^2}}\right\}$$

然K系所測分子之全數，與 K 所測者，不得不相等；即

$$\Sigma N_i=\Sigma N_i'$$

故 $$n\left\{\frac{\overline{m_0 q'_x}}{\sqrt{1-q'^2/c^2}}\right\}=\frac{1}{V}\Sigma N_i\frac{m_{10}q'_{1x}}{\sqrt{1-q_1^2/c^2}}=\frac{1}{V}\Sigma N_i'\frac{m_{10}q'_{1x}}{\sqrt{1-q_1'^2/c^2}}$$

然K'系視氣體全體爲靜止，故

$$\Sigma N_i'\frac{m_{10}q_{1x}}{\sqrt{1-q_1'/c^2}}=o,$$

由是而得

$$p_x=n\left\{\frac{\overline{m_0 q_x^2}}{\sqrt{1-q'^2/c^2}}-\frac{\overline{m_0}}{\sqrt{1-q'^2/c^2}}\times\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} \tag{6}$$

若氣體分子及於各箱壁之壓力皆相等時，可置

$$p=\frac{1}{3}(p_x+p_y+p_z)$$

由(4)與(6),而得

$$p=\frac{2n}{3}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{m_0 q^2}{\sqrt{1-q^2/c^2}}-\frac{1}{2}\times\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-q'^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} \tag{7}$$

此爲所求之氣體壓力式.

若氣體全體不爲直進運動,卽 $v=o$, 則(7)式變爲

$$p=\frac{2n}{3}\times\overline{\frac{m_0 q^2}{2\sqrt{1-q^2/c^2}}} \tag{8}$$

此與杜耳曼(R. Tolman)就靜止氣體,準統計力學方法所得者相合.

3. 討　論

準從來氣體運動論,所求得之壓力式,爲

$$p=\frac{2n}{3}\left\{\overline{\frac{m_0 q^2}{2}}-\overline{\frac{m_0 v^2}{2}}\right\} \tag{9}$$

其右邊括弧內之第一項,爲一分子之運動能力;第二項爲氣體全體之運動能力,而除之以 n 者.試將(7)式與(9)式相比較,而知

$$\frac{1}{2}\times\frac{m_0 q^2}{\sqrt{1-q^2/c^2}} \quad 及 \quad \frac{1}{2}\times\frac{m_0}{\sqrt{1-q'^2/c^2}}\times\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{10}$$

適與 $\frac{m_0 q^2}{2}$ 及 $\frac{m_0 v^2}{2}$ 相當.準相對論,舊力學法則,既不能嚴密成立,則能力須表之以(10)式,始爲正確之壓力式,惟含速度 V 之項,與質量相當者,爲 $\frac{m_0}{\sqrt{1-q'^2/c^2}}$ 或 $\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 歟,抑爲 $\frac{m_0}{\sqrt{1-q'^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 歟,去取之間,須費斟酌.然靜止質量 m_0 之物體,以速度 q 運動時,由 K 系測之,其質量宜爲 $\frac{m_0}{\sqrt{1-q'^2/c^2}}$ 而相對論中所有運動能力之公式,其與質量相當之部分,爲 K' 系所測之 $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 倍,故含 V 項之與質量相當者,可取

$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \times \frac{m_0}{\sqrt{1-q'^2/c^2}}$ 也。

4. 壓力式之應用

準相對論,氣體之狀態方程式,可表之以

$$PV=kNT.$$

但 V 爲氣體之體積, N 爲 V 內分子之數, T 爲絕對溫度 k 爲對一分子之氣體常數,試以(7)式代入後,命 $N=nV$, 則得

$$T=\frac{2}{3k}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\overline{m_0q^2}}{\sqrt{-q^2/c^2}}=\frac{1}{2}\times\frac{m_0}{\sqrt{1-q'^2/c^2}}\times\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} \qquad (11)$$

若代以(8)式所表之 p, 則

$$T=\frac{2}{3k}\times\frac{\overline{m_0q^2}}{\sqrt{1-q^2/c^2}} \qquad (12)$$

抑 q^2 之 N 倍,爲各分子速度自乘之和,卽

$$Nq^2=q_1^2+q_2^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+q_n^2.$$

由(12)式觀之, $T=o$ 時, $q^2=o$ 卽 $q_1, q_2, \cdots\cdots, q_n$ 不得不等於零可知氣體在絕對溫度之零度時,由 K′ 系觀之,諸分子皆爲靜止.然由(11)觀之, $T=o$ 時, q^2 不能等於零,可知自 K 系視之,氣體縱在溫度之零度,其分子仍有不能視爲靜止者也。

原子說和敍說自然之原理

(Die Atomtheorie und die Prinzipien Der Naturbeschreibung.)[1]

N. Bohr 著 潘祖武譯

呈現於我們感官的諸現象恆有很大的變化和無常.爲得要說明它,自古以來人們就假設了這些現象是多數小原素,所謂原子的,互相作用的結果,它們自身是不變的,常在的,但因其甚小,不能直接觀察.於此範圍內或許我們得以要求些想像的形相的主要問題,如略去不論,則原子說根本必有假說的特性,而人們也傾向於假設它有這種特性,因爲依其性質,原子世界裏的直接洞察之獲得是以爲不可能的.可是同許多旁的範圍裏一樣,因輔助方法的發展而可能觀察的界限恆加推廣.我們只要想想,以望遠鏡和分光器之助可得宇宙結構的知識,或藉顯微鏡而可洞察有機體的微細結構.一樣地,因物理試驗術的非常發展得以熟知許多的現象,使能直接說出關於原子的運動和其數目.我們甚至知道了些現象,絕端可以假設是各個原子,甚至它的一部的作用所發生的.雖然要避去了每個關

[1] 8月26日1929 Kopenhagen 斯堪的納維亞自然研究者集會第18次會開幕時演講的譯文

於原子的實在之懷疑和甚至得到了關於原子內部結構深入的知識,可是同時要多方地記着我們想像形式之自然的制限.這就是我試要說明的特有的地方.

時間很少,不能詳細地敍述關於本題因陰極線,欒琴線和放射線之發現而非常拓充的經驗範圍,我只限於敍述由此獲得的原子相之基本性質.構成所有原質的原子共通的東西是所謂電子 (Elektron), 一種帶陰電的輕微小體,以較它甚重而帶陽電的原子核(atomkern)之吸引而固定於原子內.核的質量決定原質的原子量,此外對於原質的屬性影響甚小,它首先是由核的電荷而定的,如不論號之正負,這些電荷恆爲電子電荷之整倍數.這個整數,定中和原子所有的電子數,等於原子數,卽該原素在所謂自然系統內的序數,在這系統裏,各原素關於物理的和化學的屬性之特有的關係狀態可以中肯地表出.原子數的這種意義表明解决一個問題之重要的進步,這問題久已爲自然科學之一個最勇敢的夢,卽要以純數的觀點建立一自然具有定則之理解.

於所述的發展中原子說曾受過一定的變化,現在以原子部分之有恆性的假設來代替原子自身的不變性的假設.原素的大有恆性,首先根據於普通物理的和化學的作用不涉及原子核而只涉及原子內電子連結的方法.所有的經驗都增强了不變的電子之假設,可是我們知道原子

核的有恆性具較有限制的特性,放射質之特有的放射給我們以原子核分裂的證據;放射時電子或核之帶陽電的部分具着大的能力射出,這些分裂表面上沒有發生外作用.設有一定數目的鐳原子,我們只能說有個一定的確率,在這一秒鐘內有一定部分的原子分化了.下邊再囘述這裏所遇與現在說明原子現象的基本性質有密切關係的因果說明法之特殊的否認,這裏只把 Rutherford 之重要的發現再說一說.在一定情境之下由外界的作用可使原子核分裂.大家都知道的,他可以證明,如果把有放射能的原子核所射出的小部去射擊平常不變的原素之原子核時,這原子可以分裂.這以人工支配的原質變化的第一個例子,於自然科學史裏,引入了一個新時代.這裏表現一個物理的新場地,卽原子核內部之探討.我可是不想接近由此所開的遠景而只以述說一般的教訓爲滿足,它使我們竭力根據所說的原子之想像來說明原素之普通物理的和化學的現象.

開始看去好像解答上邊的問題很簡單.所處理的原子相表一機械的小系統,甚至有些主要的性質與恆星系統相類,於此類的行星系統之說明,力學曾有很好的效果,而給我們以滿足普通物理學中因果之要求的主要例子.由關於行星的瞬間位置和運動的知識,表面上可以無限地精密計算以後每一時間的位置和運動.於這樣力學的說

明要能夠任意選出一開始的狀態.可是在原子結構說中非常困難.譬如要計及原子所有無限連續變化的運動狀態時就明白地同關於原子一定性質的經驗矛盾.我們大概可以相信原素的屬性不是表單個原子的狀態而是關於許多原子之平均狀態的統計的法則.在力學的熱論裏不但熱學的各定律允許成立,還得以理解原素許多的一般屬性,這正是原子說中統計的力學觀之一例.原素還有旁的屬性得以直接同單獨的原子之運動狀態關連的,第一,我們要假設原素在一定情境之下放出其特有的光,它的性質實在是由各個原子內的狀態而定的.一如無線電波之表發送站儀器中的電振動,我們要據電磁光論來期待原素的表性分光景中各線的振動數能傳送原子內部電子運動的消息.關於這消息的意義,力學可沒有立過充足的根基.因上述力學的運動狀態之變化可能性我們實毫不能了解顯明的分光線之出現.

這爲普通說明自然所缺的,明白地爲原子的狀態所要求的理想,是由 Planck 的所謂作用量子之發現所發生的.熱輻射現象是發現這個的出發點,它一般的同原質之特殊性質無關的特徵是力學的熱論和電磁放射論有效範圍之終決的試驗.在說明熱輻射現象時這些學說的否認,Planck 引到自然定律之至此沒有注意的一般的理想,它於普通物理現象,直接不能適用,但是却改革了這些與各

個原子相關的關係之說明.與普通敍說自然所特有的連續之要求相反,作用量子之不可分性對於原子現象之說明結果引入了一不連續之重要的原素.使這些新知識與習慣的物理的想像範圍調和之困難,特別出現於 Einstein 在說明光電效應所引入關於光之性質的問題之新討輪裏,它由以前所有經驗的觀點來評判,在電磁論的範圍內得到一非常滿意的解答.我們這裏所處的地位好像是被強迫著在光傳播之兩個矛盾的像裏去選擇.一方面是光波的想相,旁一方面光之量子說的粒狀觀,兩者對於經驗都表精要的可是不同的方面.下邊可以看見這表面上的兩可是表關於我們想像形式之一特有的,與作用量子關連的界限,這個是由關於說明原子現象的物理基本概念之可應用性的精密分析而出現.

只拒絕普通想像 (Anschaulichkeit) 和因果的要求就使 Planck 的發現關於根據構成原子之單位的知識來說明原素的屬性非常有效.把作用量子的不可分性的假設做出發點,我自已曾提出原子之每一狀態變遷要看作一個個性的,不能精密說明的歷程.原子由一所謂定常狀態變遷到旁的一個去.依這個理想,原素的分光景不是直接就表原子各部分的運動,但每一分光線是屬於兩定常狀態的遷移歷程的而振動數和作用量子的乘積表在這歷程中原子的能力變化.由此可見 Balmer, Rudberg 和 Ritz 由實

驗的材料導出的一般分光法則可以得到一簡單的意義.上述關於分光景的原始之理想,由 Franck 和 Herty 關於原子和自由電子的衝撞的著名試驗也可得一直接的贊助.這種衝撞所能轉變的能力量恰與由分光景算出原子在衝撞前後可能的定常狀態間的能力差一致.上述的理想確可得一經驗材料之無矛盾的意義,但這無矛盾性只由棄去各個轉移歷程之精密說明才能達到.我們是這樣離開了因果的說明,而原子在一定常狀態中,一般地必能於各種可能的轉變中自由擇選其所變成的定常狀態.關於各個歷程的出現,按其性質,可以只成立一確率性的觀點,如 Einstein 所舉出的,與自然放射能的分裂之狀況有一深相類似的地方.

關於上述攻入原子結構上所特有的理想,是整數之重要的應用,它恰於分光之經驗的法則中佔重要的位置.所以定常狀態的分類,除根據原子數外,還根據所謂量子數,關於它的統系論, Sommerfeld 特別有所貢獻.由上述的觀點出發,原素的屬性與根據我們關於原子結構的想像的關係之意義已多方可以得出.這個大概會使人驚奇的,這樣的一個說明,雖然如這裏所論的與普通物理的理想有大不同的地方,却已是可能的,因爲關於構成原子的單位所有的知識都根據於這些理想.各概念,如質量和電荷之每一應用,顯然是等於引用了力學的和電力學的法則.關

於使這樣的概念在傳統學說適用的範圍外可用的一個支點,我們於量子說的說明法與普通的說明法直接連絡的要求中在分界處尋得,在此分界處可以略去作用量子而不論.在量子說內的一種努力,要使傳統的概念以變更過的意義應用,沒有與作用量子不可分性的假設矛盾,而適合以上的要求,在所謂對應原理(Korrespondenzprinzip)中可以尋得它的代表.一個嚴密的合於對應的說明之實演,可是要得戰勝許多的困難,而於最近幾年才達到發展一科自身完備的量子力學(Quantenmechanik),可看作傳統力學之自然的推廣,其中以原則上是統計的說明法來代替傳統力學中之連結的因果說明法.

達到這目的之終決的一步,德國少年物理學家 Werner Heisenburg 已經做到,他說明普通的運動想像怎樣可以有效地由傳統力學之運動定律的形式應用來代替的,在那裏,作用量子只於代替力學量的記號之計算法則裏出現.這富有意義的量子說的問題之攻入,可是要求我們很大的抽象力和新補助法的求得,它雖然有形式的特徵,却非常合我們想到的要求,所以對於量子力學澄清之發展,有難於估計的意義.我想到 Louis de Broglie 引入的物質波之理想, Schrödinger 把它弄到有非常大的效果,知道首先與定常狀態之理想連絡,該狀態的量子數看作定常波的節(Knoten)數,這些波是這些狀態的象徵. De Broglie 的出

發點是已爲對於傳統力學發展的光之傳導與物體運動定律間的重要比類.事實上,波動力學 (Wellenmechanik) 建立了與上述 Eintein 的光量子說 (Lichtquantentheorie) 的對立物,與光量子說裏一樣,這裏所處理的,也不是自已完備的思想範圍,可是如 Born 所申明的,所處理的,是管理原子現象的統計的定律組成之補助方法.總之物質波的理想,由金屬結晶上電子反射的精美的試驗所得的證實,仍與光傳播之波動性之實驗的證明一樣,都是終決的證據.可是我們要想到,物質波的應用只限於那種現象,於其說明裏,作用量子的確佔有地位,並且在那種範圍以外,那裏,由因果說明之實演,可以與普通想像形式一致,和在那裏,物質和光之性質這些名詞,可以加上普通的意義.

以量子力學之助,我們可處理一拓充的經驗範圍;首先我們可以詳細說明原素之許多物理的和化學的屬性,最近甚至可以得到放射能的分裂之意義,於此,管理這歷程的經驗的確率定律作爲關於量子說特有的統計處理法之直接結果而出現.這個意義是對於波動理想之功能和對於形式的特徵的一個特別地富有意義的例子.一方面,我們在這裏所處理的是一普通運動思想上的直接連絡因由原子核擲出的小部之軌道,因其能力之大,可以直接觀察.旁一方面,於分裂歷程之說明,普通力學的理想完全棄去,因圍繞原子核的力場,依該理想,會阻止那小部由核

中飛去,依量子力學這事情就另爲不同,這力場却也會隨礙大部分的波之離開,但小部分可以透過如此在一定時間內所傳出的波之一部分給我們一個測原子核在這時間內分裂的確率之標準.沒有上述的限制而論物質的性質的困難,是沒有出路的.

在光量子的理想,於我們想像的補助方法和關於觀察的光作用的確率之計算間,有一相似的關係.與傳統電磁的理想一致,對於光可不加上物質固有的性質,因光作用的觀察常根據於能力和衝動在物質小部上的轉移.光量子理想之可理解的內容,多方限於幫助我們計及能力和衝動之不生不滅.雖有傳統力學和電磁學的界限而量子力學有保持能力和衝動不生不滅定理之可能,這是量子力學特有的面目之一.這些定理,在某種方面,是原子說所根據的物質小部有恆的假說之對待物,這個,不管運動理想的棄去,是在量子說中嚴密地維持着的.

同傳統力學一樣,量子力學也要求對於所有在其範圍內的現象都能說明.事實上關於原子現象一個原則上統計的說明法之必然性,是發生於直接測量這些現象所能得的消息在這些聯繫中所能加於物理的基本概念上的意義之精密研究的.一方面,我們要想到,這些概念的意義完全是同普通物理的理想連絡的.例如每一空時關係的引證都豫設了原始的小體之有恆性的,同樣地,能力和衝

動之不生不滅定理爲能力和衝動之每一應用之根據.旁一方面,作用量子不可分性之假設,對於傳統的理想,是一個完全生奇的原素,它在測量時不但要求對象與測量器間的一個有限的相互作用,而還要求在這相互關係的計算中的一定的演出地.根據這事情,使原始的小體在時間和空間裏的排列之每一測量,都要求關於小體和用爲關係系的尺和鐘間的能力和衝動交換的知識之棄去.同樣地小體的能力和衝動之測定,要用棄去它在時間和空間裏的精密的連續.在這兩種情形中,這由測量的本性所要求的傳統概念之應用,始終等於嚴密的因果說明之棄去.這類的觀點直接引入 Heisenberg 所立的不定性關係 (Unbestimmtheitrelation), 這些是他深究量子力學的無矛盾性之基礎.這裏所遇的主要的無定性,如我自己所指出的,是關乎光和物質之性質的問題所遇的表面上的兩可中出現的原子現象之說明時,我們想相的理想之可用性之絕對界限的一個直接的代表.

在說明原子現象時被强迫的想相和因果性之棄去,大概可以看作解去成立原子理想的出發點的希望之疑迷的.同樣地要由原子論之現在的立場,把這個棄去的事情,看做我們的知識之眞的進步,但所處理的,並不是在能以希望其有所幫助的範圍內,自然科學之一般基本原理的否認.作用量子之發現,不但指示我們以傳統物理學之自

然的制限,還使自然科學到一全新的地位,在那裏,關於現象之與我們的觀察無關的客觀的存在之哲學的舊問題,被置於新的光照之下.如我們所知道的,每一觀察都要求侵入於現象之經過,這些經過,按其性質,是依據因果說明法的.要論獨立的現象,它是自然對於我們這樣設置的,其可能性的界限,表面上於量子力學之組織中,可得其代表.這不能看作往前進步的障礙;我們只要準備慣求的自然說明之直接的想像常進一步的抽象之需要.新的驚異,可以豫料其首先得自量子說和相對論相遇的範圍內,和關於致成這些理論的自然現相之說明我們的知識和補助方法拓展的完全融會之不可解的困難尙在阻礙的範圍內.

雖在演講的結束,可是我很喜歡有機會說 Einstein 的相對論關於脫了想相性之要求的羈絆的物理學的新發展之絕大意義.由相對論知道我們感覺所要求的空間和時間之明白的分離的合法,只根據於平常出現的速度,較光之速度甚小.同理可以說,由 Planck 的發現,知道因果性要求所特表的排列之合法,是以作用量子較關於普通現象的作用甚小爲條件的.當我們在相對論裏說及主觀的,主要地與觀察者的立場有關的一切物理現象的特徵時,量子說所說明的原子現象之連繫和其觀察,使我們於表法之應用時,要有與在心理問題中同樣的小心,那裏我們常

常遇到客觀的內容之分界的困難.沒有誤會我要引入與科學精神不合的神祕之危險,我在這裏大概可以引證關於因果律之適用否的新討論和自古以來繼續着的關於意志自由的討論間特有的平行性.意志自由的感覺統治精神生活,而感覺觀察之排列根據於因果性之要求.同時在兩種範圍裏所處理的,都是理想化,其自然的界限是可以精密研究的,且都以在成爲認識論之核心的主觀和客觀間之關係裏,意志感覺和因果性要求同不可免爲條件的.

在結束之前要在這樣的自然研究者的公衆集會中,涉及上述由原子現象的知識之新發展,關於活的有機體可以知道什麽的問題.雖然尙不能把這問題深入地解答,但可以認識這些問題和量子說的理想範圍間之一定的關係.向這方向之第一證明,是有機體與其四圍間的根據於感覺的相互作用無論如何,在一定情境之下,可以小到使我們與作用量子的大小次數相近.如平常所知道的,幾個光量子就足使視覺印像發生.我們知道,有機體獨立和有感覺性之需求,由此以至與自然定律適合的極外界限,都已滿足,而我們還要準備會遇着與此相似的,關於生物學問題之終決點的旁的問題.如果所遇的生理現象顯出發展到上述的界限的精練,那就是我們以普通想像的理想之助,同時接近一唯一的說明之界限.這當然同事實沒有

矛盾,活的有機體成立許多在我們想相形式所能到的範圍之內的問題,而成爲物理的和化學的一個非常有效的應用範圍.我們也沒看見關於這個觀點的可用性的直接界限.與在原理上不必分別水管中的水流和血管中的血流一樣我們不能始終豫料在神經內的感覺印象和金屬線裏的電傳導有深切的原理上的區別.總之對於所有的這類問題,都適於引入詳細的說明於原子說的範圍裏去;至於關於電傳導,則恰於近年認識,對於我們想相的運動理想之關於量子說的特有制限,始得理解電子怎樣能夠在金屬原子裏運動.這樣深入的說明法,可是于這樣的現象不是必要的,如果所論的只是計及最近要觀察的作用.於更深的生理學問題,論有機體在其對外作用之反應的自由和適應性的問題可一定要計及,進一步的關係的知識是一定要顧到原子現象之因果的說明之分界所作爲條件的關係.此外,爲着知覺,如我們所知的,與活的有機體之不可分離的連繫之事實,我們必須主張,活的和非活的之區別問題可由這些名詞之普通的意義得其理解.可以請爲原諒的,大約是一個物理學家,談及如此的問題,使我們在現在的物理學裏之新的地位上,深入地憶及舊的真理,我們是這大戲劇中的觀衆,同時也是演員.

波呢還是質點？

(Waves or Particles)

G. P. Thomson 著，衷至純譯.

物理界的學說的歷史,大部分係連續和不連續兩對敵觀點擁護者中間爭論的歷史.有些思想家曾研究世界最後的分析,爲許多佈滿空虛的空間互相作用的分離的點所組成.這些東西,就是 Democritus 的原子 (atoms) 與今日的陰電子 (electrons) 和陽電子 (protons). 在他方面,至少是在近世,有一學派曾研究過現象之原因,分離質點只是次要的.第一要緊的還是介在中間的媒質之條件.此觀點已得到偉大的證明和所謂假設的媒質以太 (ether) 的理論連結.大部分因爲 Fresnel 的光之波動說的成功,及 Faraday 和 Maxwell 在發現無線電達到最高度的功作使牠成爲十九世紀最優勢的學說.然而在 1926 前三十年發生一有力的反動,因爲物體的普遍組織的陰電子和相當的帶正電的質點陽電子之發現.此反動與原子物理學的各種現象之發現相伴而生.因牠只能用分離的質點才可以說得通的.此外相對論的發生,趨於不相信以太,并使牠比平常更爲假設的,迷糊的.

在最近三年,潮流又復轉過來了.但有些不同卽我們好像把連續和不連續(在此卽波和質點)當一個實體的兩方面看,牠神妙地有時表出這面有時表出那面來.此等進展的原始要歸於 L. de Broglie. 要說明牠,我們必須先知道些事實.這些事實對於某短時間是很難與流行的觀點調和的.

在十九世紀末,都知道光之波動說解說所有事實是勝利地成功,其勢力幷由發現無線電波和X光線而漸漸地增强.無線電波和X光線是的確同類的,所不同的地方,只是第一個的波長比通常光的大得多,第二個的要比通常光的小得多罷了.然而約在1900年的時候,得到些實驗的結果,如大家都知道的光電效果(Photoelectric effect),牠是很難與光爲波所組成的觀點相調和的.特別是發現紫外光(ultra-violet)或其極端形式的Y光線,能說明由金屬放射陰電子的理由,幷且每個陰電子的能力是不關於光之强度(intensity),雖則其數目是同牠有關係的.這最弱的光能使有力的陰電子發生如最强的光一樣,不過不若牠那麼多罷了.如果光在所有關係裏與一連續波相當,那末這個好像不能說明的;但如果牠是質點之串所組成,每個的能力僅關於光之種類而强度則比例於牠的數目,那末這個却恰是我們所豫期的結果.這種異點,相當於討論光之根源是像鼓般的震動體抑或像發射子彈般的機關槍.在第

一種情形,則以太之波與由鼓在空氣中發出音波之原因相似.在第二觀點,則光必有原子的行爲.但是那使波動說發明的原因的現象,不用波動解釋,似乎十分地不可能.這些現象基本地建築于這觀念之上,卽在一定環境中,兩個光波,在一定位置能夠取消而成黑暗,而在別的位置互相加强幷發生强光.當風變化的結果,在與海之原來方向成一角度的第二列波之產生時,我們於海水波有時可以看到相當的效果,成功平靜和不平靜區域的混亂,這些對於小船是很不適宜的.光在這些方向的實驗是非常多的和觸目的,一切都精密地和波動說之預言相合.應用實驗的結果已經很精密地測出光之各種波長.

其牠的困難,是在連絡 Bohr 的原子論,這是大家所知道的.牠假設原子如一小型太陽系的形式;其核像太陽,包含最多的質量,而陰電子像行星般在牠的軌道上運動.當初假設此可能的或"允許的"(Permitted)軌道,是由某任意條件而定的,當這學說發展時,這些條件的任意性曾未少變,雖則習慣使牠們好像減少驚奇.下面還有更重大的困難.Bohr 的陰電子以一定週期在牠們的軌道上運動,這週期在簡單情形裏是可以計算的;那末可以豫期,當包含着這些陰電子的原子爲這些週期之一的光所照時,則特殊的和觸目的結果將發生,恰如無綫電組特別響應於與牠諧和的週波一樣.事實上原子不特別注意於這些週期之

光,并且更壞的是牠們響應却如我們所預期,但是個完全不同週期之光.此種困難雖比上述的"光電的paradox[1]"少人知道,却使理論物理學家費了許多心力去研究.

現在我們可估量 de Broglie 的觀念了.下面的話,就是由他當初的數學的形式翻譯出來的.每一質點應看作主要振動的處所和源泉,牠的振動數 (Frequency), 是等於質點之能 (Energy) 以一量除之,該量即 Planck 的常數 h, 此常數已發現在各種物理的現象中,顯出一重要部分.一個根據相對性觀念的理論表示出:如果質點繼續運動,我們應期待着,在圍着牠的空間振動對於不動的觀察者看去一定好像是波.這波的運動,比質點更快而且從牠那裏經過,但質點以光的速度運動時,該波亦以該速度運動. L. de Broglie 於是假設這些波支配着質點的運動.以牠們來引導牠和帶着牠.若以機關槍同牠類比,則子彈由音波的引導,使生嘯聲透入空氣中.

如果承認了這個觀點,我們立刻可以看出牠怎樣解決這光電的困難.光是由質點所組成但質點又由波支配.如果一質點打中一原子,他能傳送牠所有的能力給原子裏的一個陰電子,而這事情自然不關於在光線中其牠質點的數目;即光之強度.在他方面,質點的分配是由波決定的.由是我們有黑暗之境界,在那裏波互相毀滅,如在有波浪的海中的平靜的區域一樣,在別的地方,牠們却加強而且

發生異常地大的强度.

現在研究其它關於原子裏陰電子運動的困難.普通力學中質點之運動和光線之路的中間,有很稀奇的類比.這類比遠超過平常所謂:當兩者不受擾亂時均爲直線的事實之外.果然,William Hamilton 由光學問題的研究,在一世紀前引導到他的基本的力學方程式.這方程式在近世原子物理學裏佔重要的部分.現在光線僅是逼近於真,當有關的光之波長越小時,這近似値越真確.在大多數實用的情形,其真確的程度已經足用,因通常光之波長僅約 $\frac{1}{2000}$ 粍,對於 X 光線僅及一千萬分之一粍;但在以光爲線所組成時,常有輕微的誤差,此誤差在特別情形之下可以變成很嚴重.現在這 de Broglie 的質點,由牠們的波所支配的,如果波長甚短時,在大多數情形中,其行爲一定逼近地相似牛頓的質點,但當這質點,爲在原子內部運動的陰電子,雖則波長較普通標準是短但比原子的大小却長時,于是牠就失掉了牛頓質點或光線的性質. de Broglie 首先應用此觀念去解釋:在 Bohr 的原子裏對于陰電子何故僅容許有一定的軌道.如果陰電子沿着閉鎖路遊行時這波必作同樣的事情,并且成功一連續的波環.假設我們由一點出發,隨着波繞着環走;當我們回到出發點時,在波系裏一定是不連續的,除了此環的圓周精確地等於波長之整倍數之外.裱牆的紙,是一個恰好的類比,如果房間的大小是取裱

牆紙大小之整倍數時,牠一定適合此房間沒有可看見的接縫.由是有與有 1, 2, 3 等等波在圓周上相當的"允許的"軌道.幷詳細計算,證明這些條件與 Bohr 所假設的恰是一樣. Schrödinger 教授更進一步應用 de Broglie 的觀念,把波看作實際地相當於陰電子;軌道於是變成一波系繞核心而傳播,並舍棄了陰電子運動的觀念.此勝過了如上所述的原子之光的行爲的困難,幷且在事實上,完全的計算,證明與實驗相符.此外 Schrödinger 的原子,已經證明不止在分光結果的解釋,與 Bohr 的原子之一切成功一樣,但也可解決在近幾年積下的許多小困難.

但在對任何新學說的一切嚴酷的試驗之後,關於已知事實的解釋,是沒有如意外的新結果所豫言的那麼多的,但在此處新學說已經恰恰得到他的偉大的勝利.如果一切質點是由引導牠們的波伴着而生,那末不關於任何原子的陰電子運動,應當服從像剛才所說的光質點那樣的定律.但我們已經看見牠們因波動的特異性質而表出特別現象.結果,陰電子所做的應該相同.當我們去做可能的實驗以證明此效果時,最通常的困難,是在平常的條件之下,關於陰電子的波長太小.由是對於由 150 volts 的加速而得到其能力的陰電子,其波長爲一千萬分之一糎或者約與 X 光線的相同,關於 15000 volts 的能力的,則其波長爲這個的十分之一.研究這個非常短波的問題,於 X 光線

的情形,已用結晶體裏原子之自然地整齊的排列來解決,該結晶體的原子的距離與那波長的大小相仿.在現在的情形這個暗示着可用相似的方法.結晶體的原子,是在許多等排列著的一定平面內并且這種有規律性的效果是:一定波長的光在使各平面的效果是加强的的一定角度,較使其抵消的其他角度有更强的反射.X光線的波長,已由測量反射角和知道平面間的距離而決定.與這些類比的關於陰電子的實驗,近世已經由在美國的 Davisson 和 Germer 及在 Aberdeen 的 Reid[1] 和我自己做成.在我的實驗,陰電子以陰極線的光線之形式打擊一金屬薄膜,這金屬中極微的結晶體作爲反射平面.當陰電子以小射光角打擊原子的一個平面時則牠們反射甚强,如果這角是由陰電子波長和平面間的距離而決定的一列中的一個,這些反射線同透過薄膜而無角差的許多陰電子,都被收在照像板上,在上面的模型表出其反射時的角.如此所得的模型,因膜裏極微結晶體之大小而變,有時作同心環的形狀,有時作對稱的排列.在所有的情形,模型中的大小和形式,是與由 De Broglie 的理論和所用的各種金屬如鋁,金,白金,銀,銅,錫等的結晶形式所豫算的恰好一樣.這環之直徑和各斑點間的距離如理論所要求的一樣,因光線的速度而變.這種的互相一致,看去是沒有再需要旁的什麼似的.

雖然這學說在證明和解釋上的成功,使其內在的真實

毫無疑義,但尙有很多根本問題的意義,仍保留着不能答覆.最通常的問題:是負載這波的媒質是什麼東西呢?在伴着陰陰電子的波和引導光之質點的波的中間有玄妙的差異.首先牠們以不同速度進行;第二,這陰電子自然也可假設牠的波是可由電磁力影響的.而光波則不然;第三,透過力是非常差異的.我們可以 30000 volts 能力的陰電子和同波長的"光"(X光線)比較,卽在結晶體裏給與同樣的模型.這陰電子的透過力非常微弱,牠在我的實驗裏,必須用厚約僅百萬分之一糎的薄膜讓牠們穿過.這可以說,這些金屬薄膜對於通常的光是透明的,幷且物體能夠隔着牠明白地看見.在它方面,相當的X光線,當可穿過一糎厚的鋼.

這些行為上的差異好像是證明:波是在不同的媒質中,或如果媒質相同,牠是玄妙地由質點的性質限制着. J.J. Thomson 已提出一個觀念,謂陰電子波的媒質是光波的媒質,是以太,由陰電子的存在而改變牠對於這些極微波的行爲,正如高層的空氣對於長波無線電報的行爲一樣.無線電之長距離的傳達,僅由存在空氣上層的特別性質始能做到,這是大家都知道的.好像是如果每一陰電子周圍的空間同樣地加以限制,這特奇的陰電子波當可解釋.它一觀點,趨向於把波當做僅有數學的存在,是一種波的魂魄,僅作爲一個敍述複雜定律的名字而存在,此定律我們

必須假設質點是由牠所領導的.再第三個觀點,欲給與各波以主要的實在.并且看這質點,更像是使人覺出波的中間物在某點上.這些觀點間的差異大概是字眼上的意義.但可以發生疑問的,是這連續和不連續的極根本的對立物,有其新奇的波與質點間的二元性的解決.這問題變成一個極大的玄妙,要用現在的語言適當地表出所包的觀念,好像是太想像了.如果是這樣,真理的達到,首先當在抽象的數學的形式中,這形式當我們對於他所包含的觀念變成更熟識時,將漸漸地得到實體.

(1)譯者註: Paradox 是似非而實是的意思.

1. A. Reid 君於去年六月以汽車的出事死了,時只二十二歲,實是物理學界的一個大損失.

論一種新的光電池

(Über eine neue Art von Photozellen.)

B. Lange 著　衷至純譯

據我們關於自然的知識,由光變爲有用的電能力,雖顯爲可能,而至今所有的試驗却很少有所獲得.這種光效應至今只在有聲影片和電氣照相中把光衝動變爲電流震動時,有很重要的意義.

光效應大家都知道是由吸入一光量子$h\nu$而於金屬中放出一個電子所成功的.這些電子無一有與$h\nu$相當的運動能力的,但據Einstein的光電基本定律,至少是要減去一定的值的,即有以下的關係:

$$\frac{m}{2}v^2 = h\nu - x = h\nu - h\nu_0 .$$

如$h\nu < x$則絕無射出物.這個x值由經驗知道等於電子出射功作.

平常所知的光電池(阿爾加里電池)之所以作用度甚小的,是因爲光電底地放出的電子要很大的出射功作.

如避去電子退出至於一真空或氣體空間內去,新光電池的作用度由此可非常增加.於這新的光電池,其光電子直接到一中間層去,這中間層是由一單極半導體成功的,直接與一蓄電器式的金屬極接觸.新電池與有金屬真空

界面的普通光電池比較,有低界面位勢的金屬半導體,故作用度增高.圖 1 就是這樣裝置的圖.

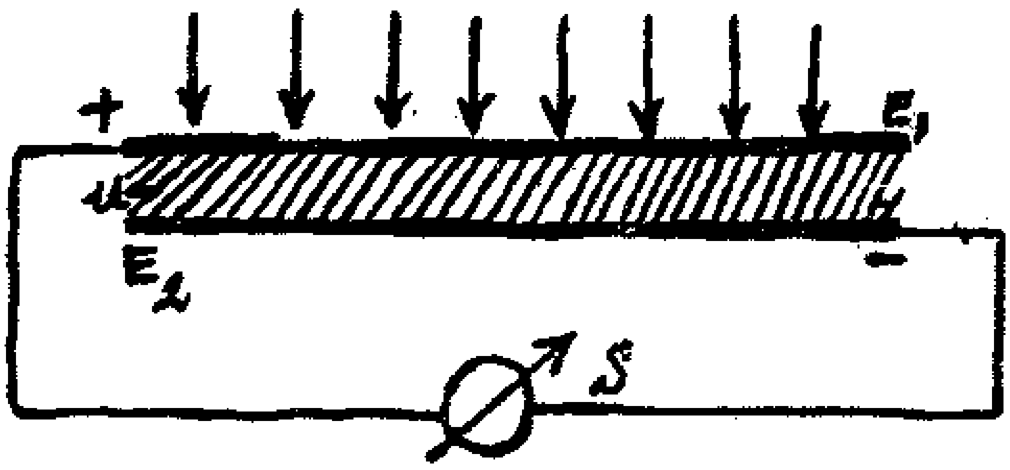


圖 1. 光電池.

E_1 是金屬面式的受極,它是在一光線作用之下而定的.由此放出的光電子經單極傳導層 u 到對極 E_2,則這些電子在一外電路 S 上流動.最好是中間層 u 盡可能地薄,例如只有幾個分子的位置.由此可得到電池實用上無惰性的功作法,例如光衝動於音調振動數的範圍內變爲相當的電流震動而於放話器上可以聽見.用絃電流計來試驗可得同樣的結果.在圖 2 中的振動圖之微小歪曲是由電流計線的惰性所引出的.在高振動數,還可看出電池的固有容能.

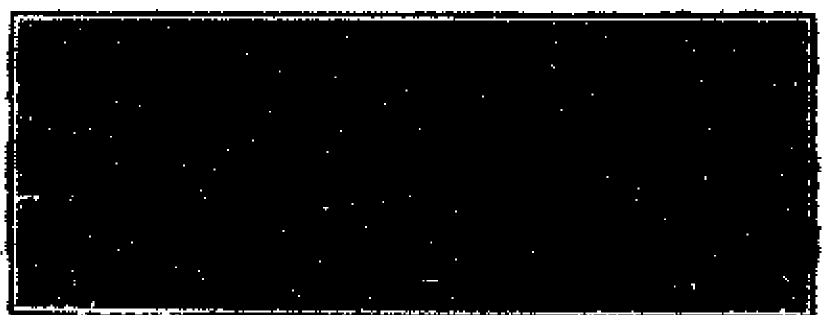


圖 2. 間歇照射電池時光電流的振動圖.

由這中間薄層,還把電池的內抵抗減小而增高電流的獲得.由此可得到,於新的光電池不必設置特殊的補助電壓.因所有光電底地放出的電子一個高的百分律,由這樣的中間層可以不要補助位勢而達到.因較低界面位勢的金屬半導體可得較平常有界面金屬真空的光電池的能力量子甚小的光電流,而這電池於紅外分光域內發生作用.由應用相當半導體於中間層,可以有關於特殊分光域的選擇的作用性,可能地根據於一定速度的光電子和半導體分子的原子振動間的一個共鳴作用.由銅電極和亞氧化銅中間層所成的電池有對於波長約 0.8 m. 10^{-4} cm,如圖 3 所表的的選擇感應性.銅對於同位置的連合有一極明晰的紅外固有振動數.

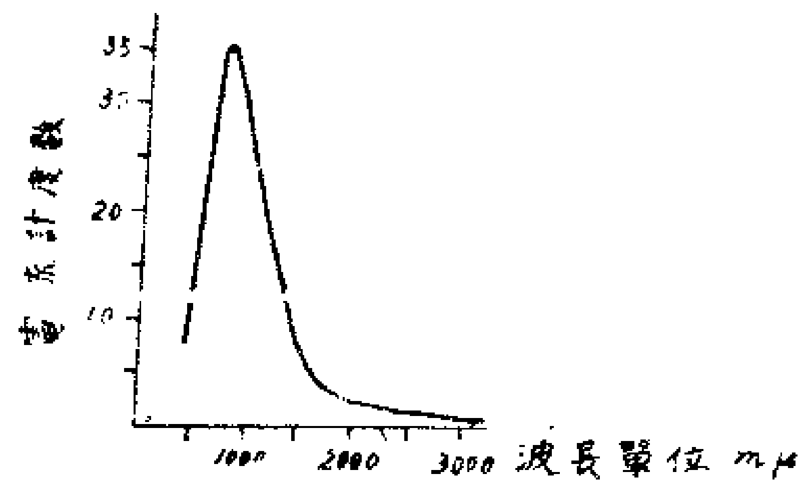


圖 3.　關於等能分光景的分光感應性

這電池與平常光電池相當的一個應用,可作爲光繼電器,用於遠處照相,有聲影片,光電話等.新的光電池較平常所知的光電池好的地方是他的紅外感應性,沒有疲倦現象的不變的作用,不要補助電壓.因光強度和光電流間之

有完全的比例,這電池還可用以測光線,例如當作光度表和光線高溫計.

新光電池的極限波長約在 6.6μ. 竭力向分光景的紅端推移.應用 Einstein 的量子關係 $N = \frac{Q}{h\nu}$ 可由極限波長算出量子獲得和可以與平常所知的阿爾加里電池比較(如表)

新舊電池比較表

電池式樣	極限波長 mμ	出射功作 Volt	量子獲得 Coul / cal
阿爾加里	600	2,00	2,04
新電池	6600	0,19	12,5

由此,作用度約增加了一十位指數.因應用相當的單極層,作用度尚可希望有更大的增加,於是可以得到些作用度,其中光之直接變化爲有用的電能力看去是可能的.

(1)據一私人的報告 W. Schottky, 與此文無關,根據純理論的理想得到相類的裝置.

潛　行　艇

郭霖

1. 潛行艇的構造；
2. 潛行艇的優點與缺點；
3. 潛行艇的種類；
4. 潛行艇的戰略；
5. 潛行艇對於中國之關係；

引　言

現在國際間最惹人注目的一點,大略要算「倫敦五强海軍軍縮會議;」而此會議中暗爭最烈的一點,又大略要算「潛行艇存廢的問題.」本來英國傳統的政策,是仇視潛行艇;法國傳統的政策,却又與此針對.所以在華盛頓會議時,英國極力主張廢除潛行艇,法國便極力反對.迨後英國的M_1號潛艇在英吉利海峽於潛沒水中時被商船撞沉,全艇五十九人都被淹沒,於是倫敦路易船社(Lloyd's Classification Society)的主席,又發出宣言,主張爲「人道」計,大家應廢除此「不祥」之物云云.那時著者正在格拉斯哥研究潛行艇設計,於是席耳好斯教授笑謂著者云:"如果廢除,足下豈不枉費心血了嗎?"著者也笑答道:"如果廢除,與我研究之目的更佳:因爲他們對於潛艇必不再守祕密了."這不過是笑話,他們那有甚麼大不了的祕密呢?著

者當時不過暗示潛行艇必不至於廢除罷了.果然不久法國報紙對於廢除之議大加批評,說"何不兼廢「無畏艦」(Dreadnaughts)咧?"這句話可把英國真問乾了!到底英國人不肯死心,所以這次又提出來.偏是法國仍反對最力,意日等國亦不贊成廢除.現在會議雖未告終,却是潛行艇不致廢除,可以斷言.但是英國爲甚麼始終要廢除潛艇?法國又爲甚麼始終反對此議呢?欲了解這個緣故,最妙是先把潛行艇的本身研究一下.所以本文特將潛行艇的構造及其功用,編述如次:

第一編

潛行艇的構造

何爲潛行艇呢?潛行艇在原理上比普通船只多一潛水的裝置,假使我們取一隻尋常船來,把牠的上部封緊,使水不能入;然後放入適量之水於船內,使船的重量與同容積之水的重量相等,那末船身也就變爲水的一部了.雖潛入水中,却不沉不浮;此時若再轉動牠的車葉(Propeller),牠就在水中行動起來;這便是潛行艇.最初的潛行艇,也便是本此原理造的.但是現在的潛行艇却又不然:現在的潛行艇潛入水中之後,與同容積之水並不是一樣重(輕些),必須再用機械方法才能把牠壓入水中,(機械方法詳後).這是就原理說.若就構造說,現在的潛行艇比普通船也有

下面三種不同之點:—

1.艇殼的上部也作圓穹狀,宛如魚背(普通僅下部爲然);

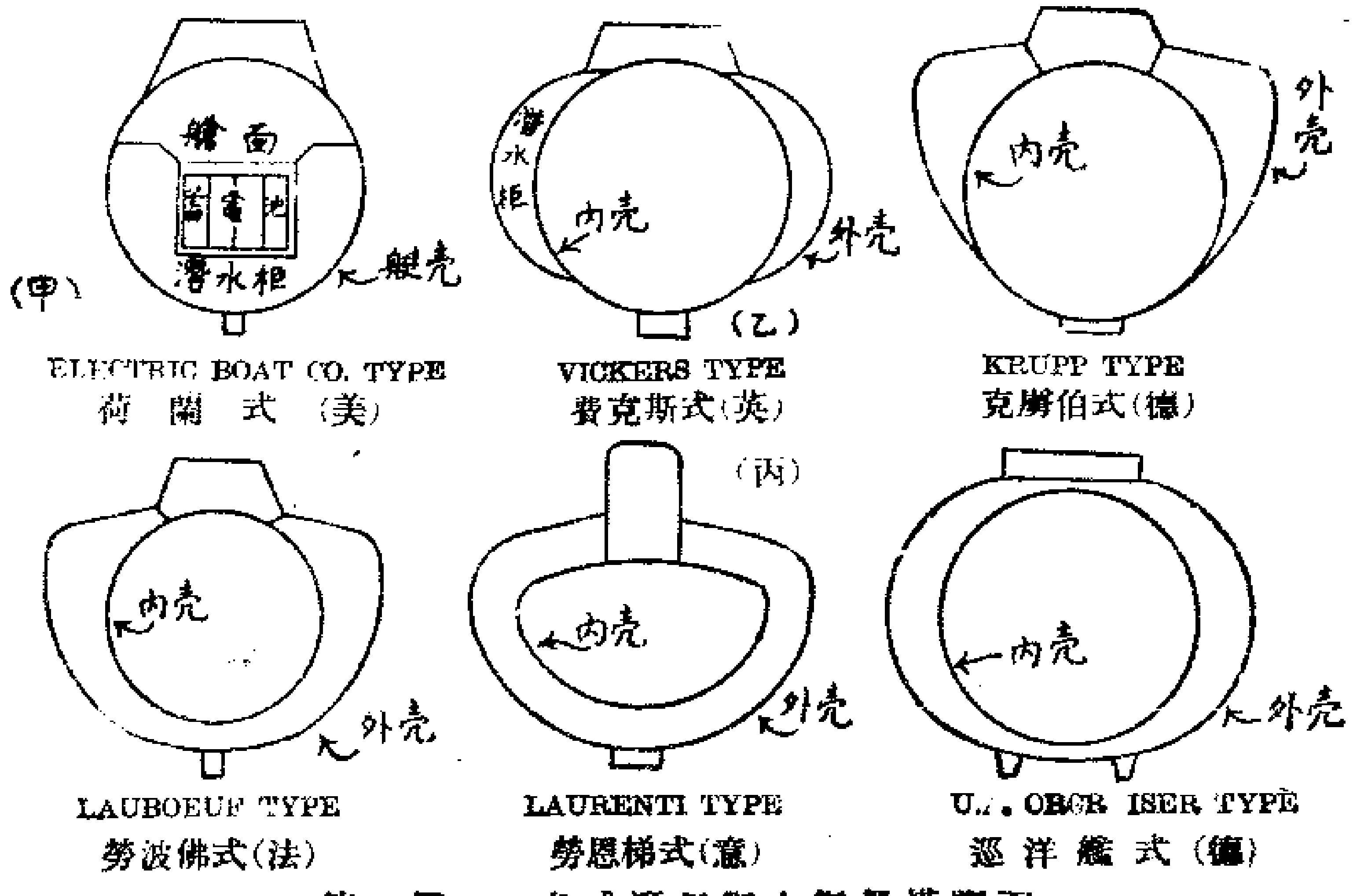
2.原動機(Propelling Machinery)有兩種,一主水上,一主水下,(普通船只有水上原動機);

3.潛行的設備(普通船完全沒有這回事).

(註:本文因欲使非專門研究潛艇的人看了也感興趣,故對於設計方面的學理～看了可以叫人頭痛的～概不列入).

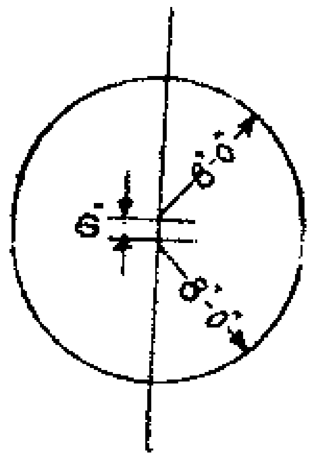
第一節　艇殼(Hull)

艇殼可分爲兩種:(一)單殼式(Single Hull)如第一圖甲;(二)雙殼式(Double Hull)第一圖中除甲以外皆是.



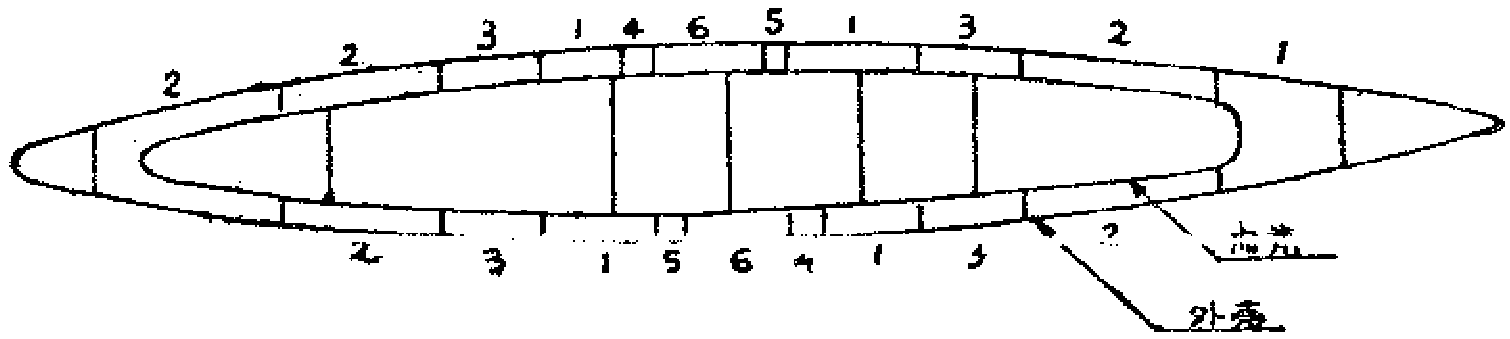
第一圖　各式潛行艇之艇殼横斷面

雙殼式的潛行艇具內外二殼,內殼爲「抗壓殼」(Strength Hull, 又名 Pressure Hull),專爲抵抗海水壓力用的,所以都用厚鋼板造成.並且都作圓形;即有時不十分圓,却也相差不遠,例如前年澳洲政府新成之頭等潛行艇二隻,其抗壓殼皆如第二圖所示,長徑爲16′−6″,短徑爲16′−0″,相差只 6 英寸;但是也間有例外的.如第一圖(丙),不過這是絕少數罷了.



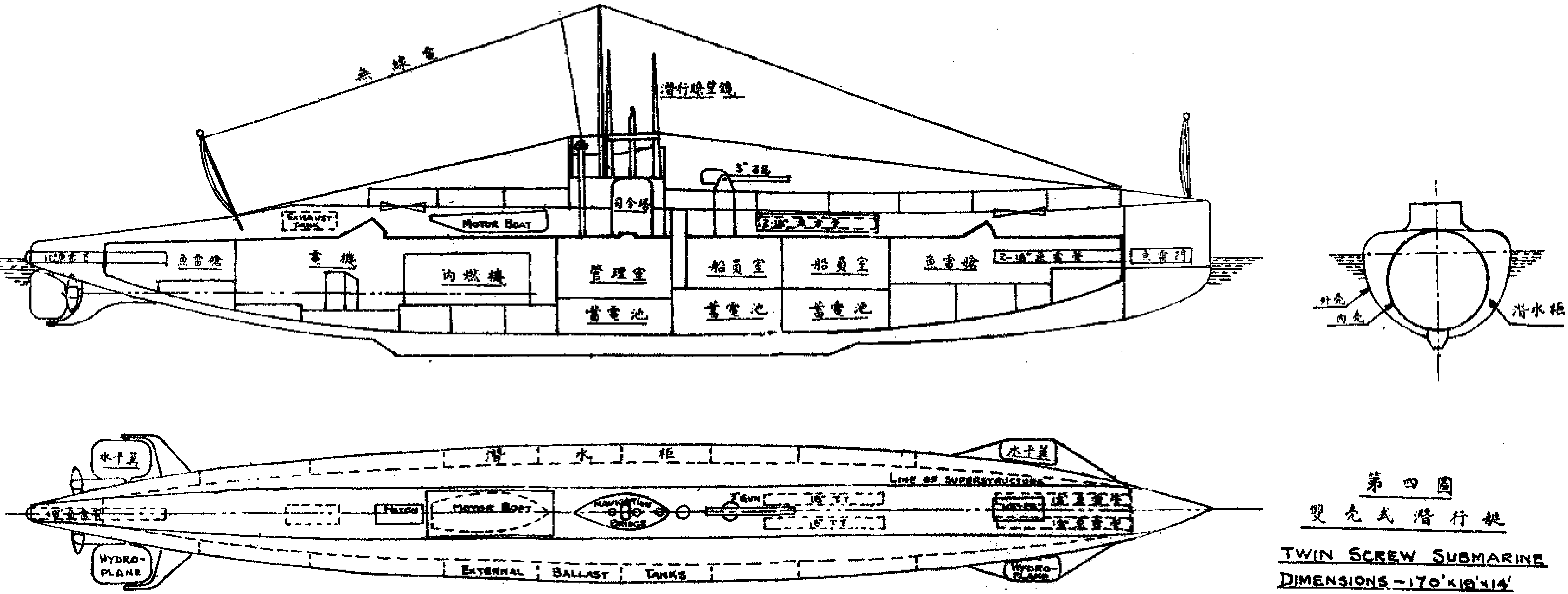
第二圖

至於外殼,都是用很薄的鋼板造成的.潛入水中時,內外兩殼之間,都用水灌滿.外殼的內外兩面都是水,壓力自然抵銷了,故雖潛下數千尺亦不礙事.內外兩殼間之位置,既是要裝水才好,自然最妙是利用他來作潛水櫃(Ballast Tanks)或油櫃(Oil Tanks)等等,如第三圖(參看第四圖)



1. 潛水櫃(Ballast Tank)
2. 潛水櫃(有時裝燃料油)
3. 燃料油櫃(Oil luel Tank)
4. 滑潤油櫃(Lubricating Oil Tank)
5. 急潛水櫃(QuickDiving Tank)
6. 調節水櫃(Regulating Tank)

第三圖 德國潛行艇慣用之各櫃佈置法



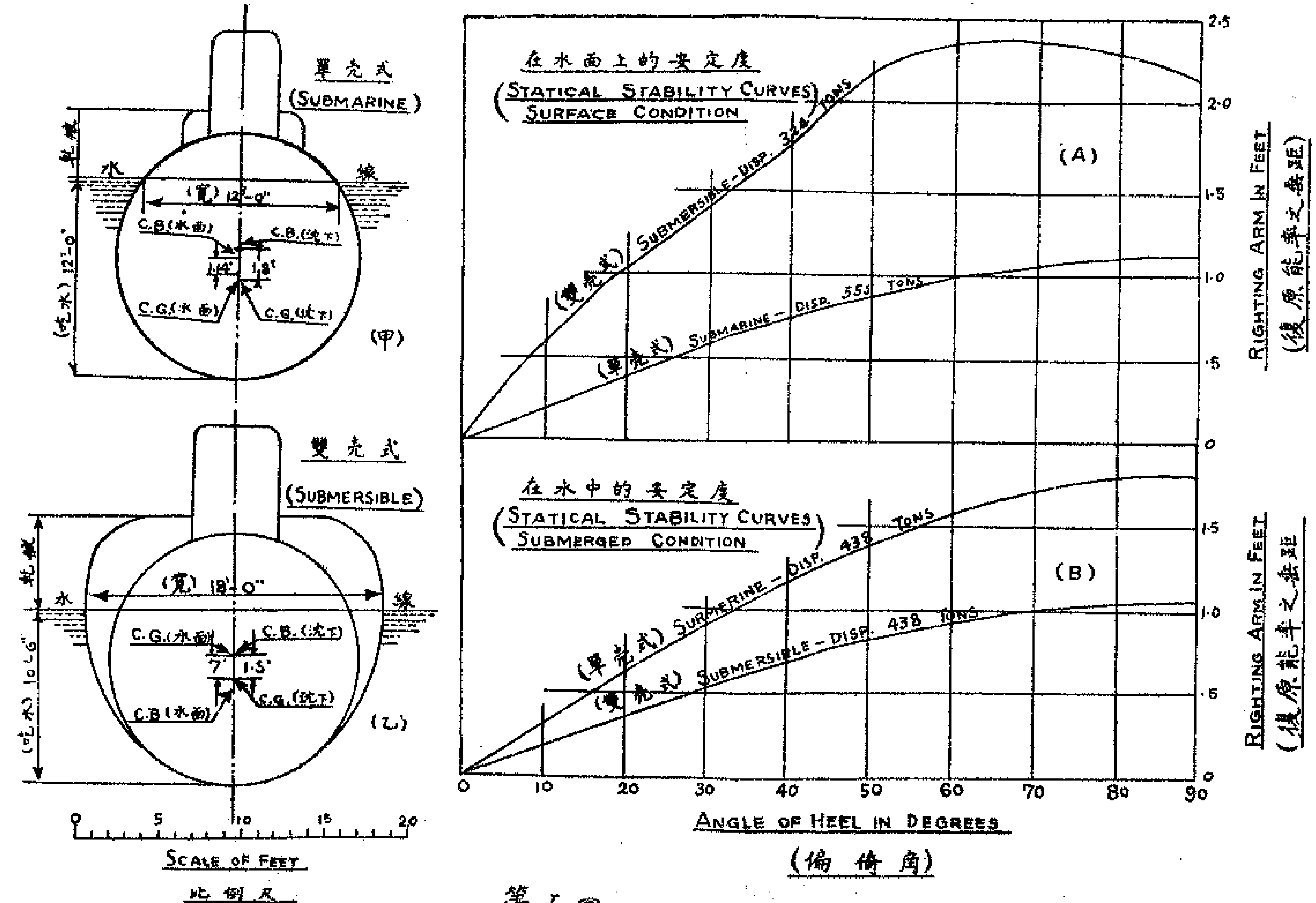
第四圖

雙殼式潛行艇

TWIN SCREW SUBMARINE

DIMENSIONS - 170'x18'x14'

SCALE 1/16" = 1 FOOT



單殼式
(SUBMARINE)
乾舷
水
線
(寬) 12'-9"
C.B.(水面)
C.B.(沈下)
1.4'
1.8'
C.G.(水面)
C.G.(沈下)
(吃水) 12'-0"
(甲)
雙殼式
(SUBMERSIBLE)
(寬) 18'-0"
C.G.(水面)
C.B.(沈下)
.7'
1.5'
C.B.(水面)
C.G.(沈下)
(吃水) 10'-6"
(乙)
SCALE OF FEET
比例尺
在水面上的安定度
(STATICAL STABILITY CURVES)
(SURFACE CONDITION)
(A)
(雙殼式) SUBMERSIBLE - DISP. 374 TONS
(單殼式) SUBMARINE - DISP. 555 TONS
在水中的安定度
(STATICAL STABILITY CURVES)
(SUBMERGED CONDITION)
(B)
(單殼式) SUBMARINE - DISP. 438 TONS
(雙殼式) SUBMERSIBLE - DISP. 438 TONS
RIGHTING ARM IN FEET
(復原能率之垂距)
ANGLE OF HEEL IN DEGREES
(傾倚角)

第五圖

單殼潛水艇的「抗壓殼」,也多作圓形,與雙殼式同.不過因爲牠的潛水櫃與油櫃等都在艙內(參看第一圖甲),所以各櫃的容量不能太大,在戰略上有種種不及雙殼式的地方.今且略討論一下.

最初的潛行艇,本來都是單殼式的;後來才漸漸改爲雙殼式的.原因是:潛行艇的特點雖在潛行水中,但是牠在水面上航行的時間比較反多;可是在水面上航行,單殼式又有三種缺點:(一)潛水櫃之容量不大,故水線上之「乾舷」(Freeboard)不如雙殼式之高,難以當風濤之險;(二)油櫃之容量不大,故活動半徑(Radius of Action)亦較雙殼式小;(三)水面上之穩定度(Surface Stability)不如雙殼式之大～這是很明顯的,因爲

$$船之穩定度 \propto \frac{(水線上之寬)^2}{(吃\quad 水)}$$

故水線愈寬,穩定度愈大;吃水愈小,穩定度亦愈大.

就第五圖(甲)(乙)兩式比較便知(乙)之水線比(甲)寬些,設若兩船的噸數相同,長也是一樣,那末水線寬吃水自然小了,所以雙殼式的水上穩定度比單殼式的大得多,參看第五圖(A)所引之實例,更覺顯然,(由圖看來,雙殼式的水上穩定度,比單殼式的大一倍還不止咧).

可是,一鑽入水裏去,便兩樣了;那時單殼式的穩定度,比雙殼式的反大,看第五圖(B)便知這單殼式的水下穩定度,比那雙殼式的平均要大百分之七十還不止.可見就

水下航行言,單殼式又比雙殼式爲優啦.但是還是水上航行要緊,所以近世各國的潛行艇,除美國尙多單殼式外,餘則大都偏重雙殼式;單殼式雖間有一兩隻,却都是專爲守海口用的,活動範圍究竟很窄.

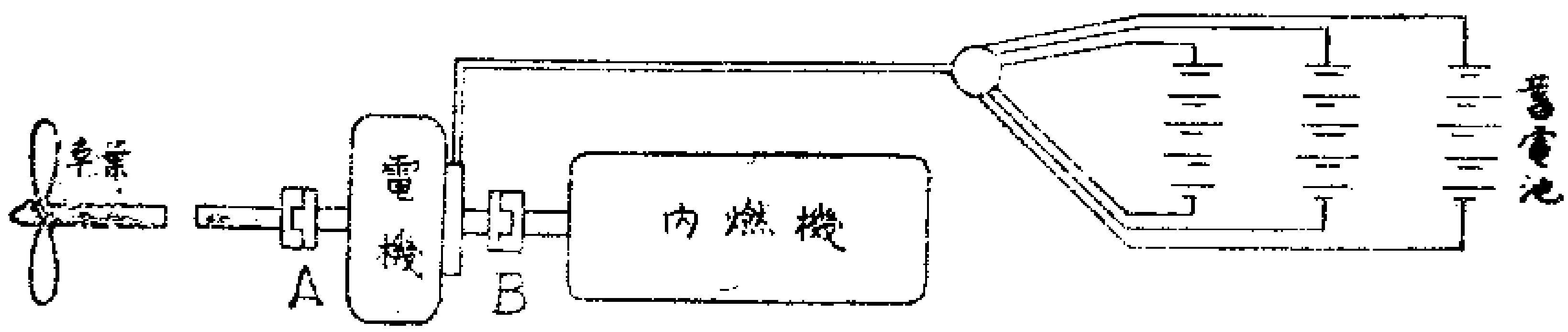
第二節 機器 (Power System)

近世所有的潛行艇,皆具有水面與水下兩種原動機,水面原動機,除一兩隻用蒸汽機 (Steam Engine) 外,其餘的都是用狄色耳油機 (Diesel Engine);至於在水面下則一律用電動機,並無例外.

水面原動機,本來自內燃機發明以後,就沒有人再高興用蒸汽機了.但是當歐戰時,英國海軍部覺得潛水艇在水面上的速度最關重要,乃從1916年起,趕造世界最大之潛行艇多艘,總名曰K-class, 卽 K2, 6, 12, 13, 14, 22, 26, …… 等,此類潛行艇,在水面上都是用汽渦輪 (Parsons 與 Brown-Curtis Turbines) 並用水管式的鍋爐 (Water Tube Boilers) 以生蒸汽.牠們的排水量,在水上約爲 2000 噸,在水中約爲 2700 噸.在水面上的速度,約爲每小時 24 海哩.在當時所有的潛行艇中,的確是首屈一指了;但是他們時常出毛病,所以到前年春英國海軍部下令:除 K26 外,一律都撤毀了,到現在,這一隻「碩果僅存」的 K26 便要算全球唯一的蒸汽潛行艇了.

潛入水中時所用之電動機,就是通普的電氣「摩

托」,同時用大蓄電池(Accumulator)多架,以貯藏電力,這水上與水下兩種原動機的配置法,可用第六圖來說.



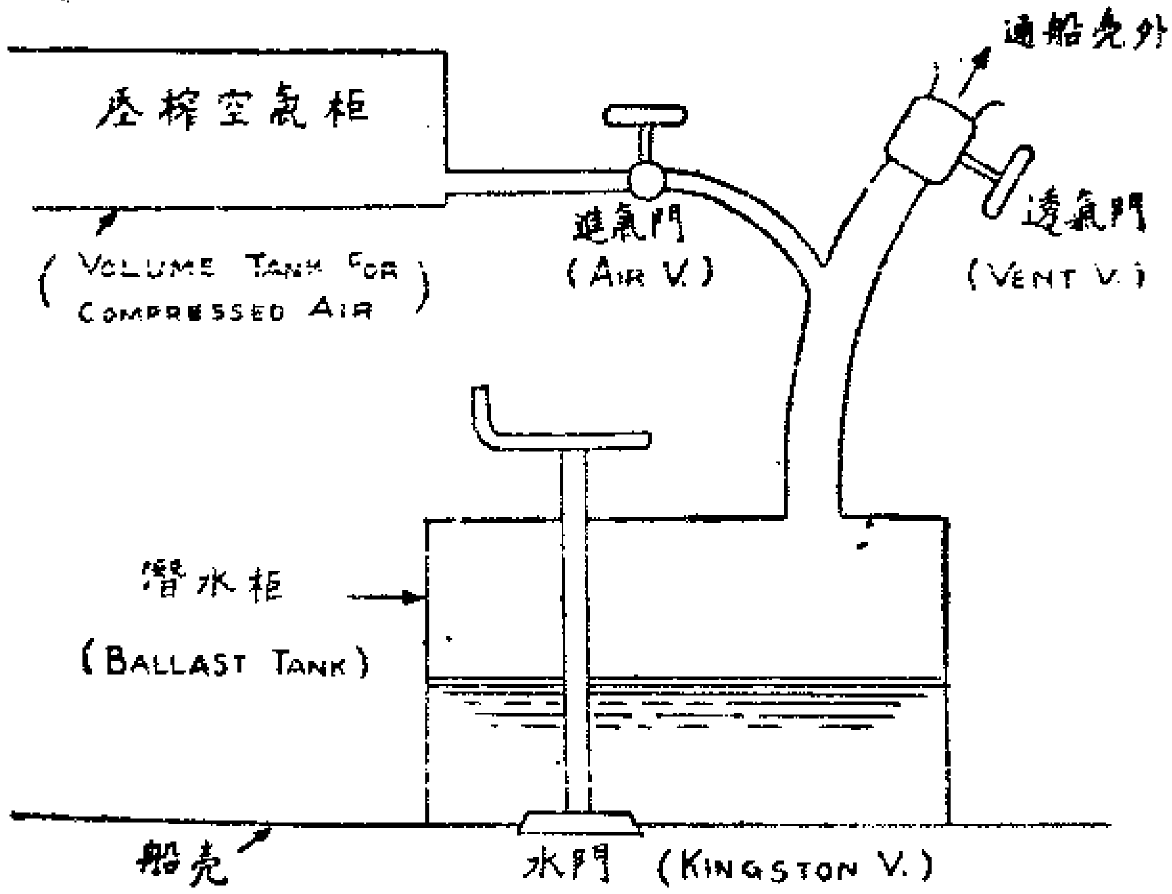
第六圖

電機之前後,各有一「齧合器」(Clutch)如A. B.,可以任意關合.當潛行艇尚在水面時,先卸開A.於是內燃機與電機連爲一氣,借內燃機之力以轉動電機,此時之電機卽作爲發電機(Generator)用.所發之電,卽貯於蓄電池中.當潛行艇入水中時,卽卸開B,套上A.於是內燃機停止,電機與車葉連爲一氣,卽用蓄電池所蓄之電以轉動電機.此時之電機卽作爲摩托(Motor)用.電機轉動車葉,自然潛行艇就在水中行駛了.在水面上航行,是用內燃機直接轉動車葉,所以A,B,都不卸開.電機本亦隨之而轉,但若將其「化磁通流」(Field Exciting Current)除去,則電機之「化電輪」(Armature)雖經轉動,並不生電.此時之電機卽作爲飛輪(Fly Wheel)用,若不除去化磁電流,則潛行艇卽一面前進,一面蓄電.當敵人來追而蓄電池又無餘電可以潛行時,卽用此法.

第三節　潛行的設備

此中所含甚多,暫且分段來說:

第一段　潛水裝置



第七圖

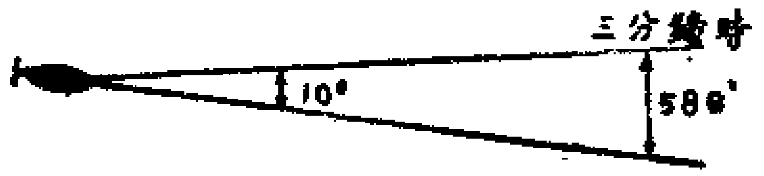
此種裝置用寫意法代表如第七圖.「水門」一開,海水卽自己流入「潛水櫃」中;同時將「透氣門」打開,使櫃中原有的空氣,得以逃出艇外,於是海水卽充滿於潛水櫃中.潛水櫃不止一個,若是大多數的潛水櫃都已灌滿,潛行艇必可下沉,這就是潛水的手續.旣經潛入之後,若再要上來,卽關「透氣門」,開「水門」與「進氣門」,於是「壓搾空氣」湧入潛水櫃中,壓水下行,使由水門流出壳外,潛行艇便再浮到面上來.

排水的方法,除用壓搾空氣外,尙可用抽水機.此機之力量,大略須在150–300英呎深時每小時可抽去60–160

噸的水.德國的潛行艇,多用 2-Stage 的 9 英吋旋水機 (Centrifugal Pump),在 200 英尺深的時候,每小時可抽水 120 噸之譜.

第二段　平衡裝置 (Balancing Arrangement)

潛行艇潛入水中之後,最大的困難就是牠的「縱性穩定度」(Longitudinal Stability) 大小.何謂縱性穩定度呢?就是沿船頭船尾這個方向的穩定度.水面上的船,牠這種穩定度非常之大,所以從來沒有船向船頭翻去了的;要翻總是橫着身子翻.可是潛行艇不然,牠一到水底下去,竟會像「打觔斗」似的順着頭尾方向翻去的!為甚麼呢?就是因為牠在水下的穩定度,是以「浮力中心」(Center of Buoyancy)與「全艇重心」(Center of Gravity) 間之距離為標準,(與尋常船算 Metacentric Height 者不同).此距離只有一種,所以潛行艇的「水下穩定度」也只一種,在前後左右各方向都是一樣.那末,牠向前後翻與向左右翻應該是一樣容易了?可又不然.因為牠前行時,海水的阻力極容易將牠的頭掀起或按下,所以牠的「縱性穩定度」反小,將他的頭掀起固不好,但是按下更壞.試假定牠的頭傾下 10°,如第八圖,再假定牠的速度為每小時10海里,那末,只須三分鐘牠就直下海底五百八十六呎,此時船殼上每方吋平添三萬七千五百磅的壓力,縱然

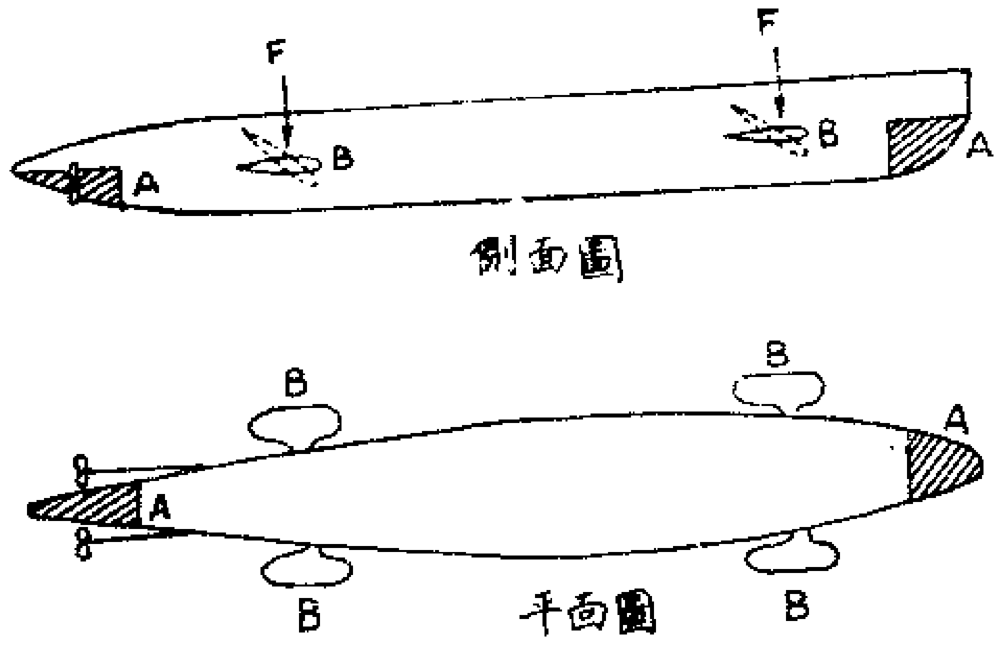


第八圖

他的船殼還不破裂,泡釘 (Rivets) 縫也必漏水如長江大河不可制止了!所以他的首尾,務須同在一水平線上,欲達此目的,通常用下列三法:-

(甲)靜力平衡法 (Statical Balance)

潛行艇每有一龐大之底骨 (Keel), 此底骨之頭尾兩段,先以木塊合成,下水後若不平衡,卽將若干木塊換成鐵塊,(或先將底骨作成鐵箱形,然後以鐵沙灌滿亦可).此外再有「調平水櫃」(Trim Tanks) 兩個(與尋常船同).如第九圖AA,此種水櫃,空之滿之,可以任意,故不難使船身平衡.



第九圖

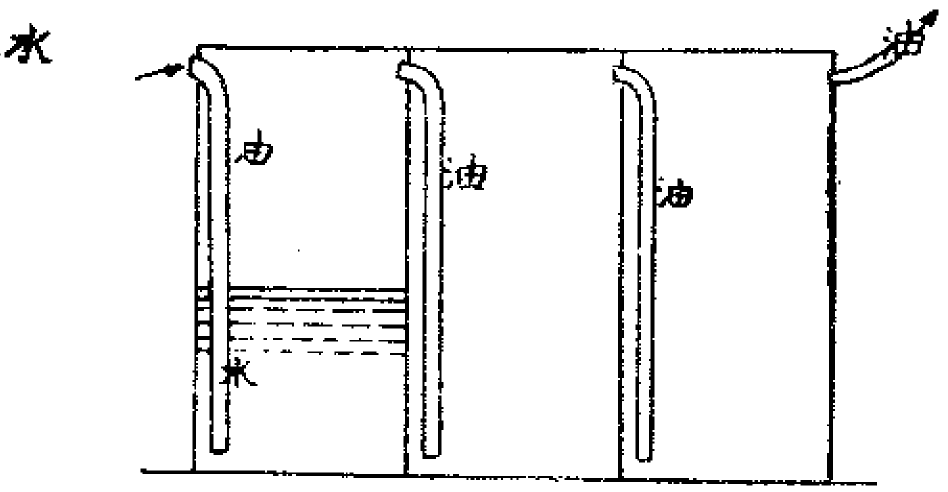
(乙)動力平衡法(Dynamical Balance)

近世所有的潛行艇，都有四個(或三個)水平翼 (Hydroplanes) 如第九圖 B B。此翼能上下轉動，船向前行時，翼上卽生出提力或墜力(與飛機的升降舵同理)。故可用以調節俯仰角，使船身平衡。

(丙)補償法 (Compensation)

若船頭的魚雷放去,頭部便輕於尾部;尾部魚雷放去亦然.所以不得不用補償水櫃 (Compensating Tanks) 數個,

魚雷放去後,便灌以水藉以賠償此種損失.但除此種損失外,還有油的損失(如燃料油等等),也要補償才好.德國潛行艇中,用第十圖方法,將各油櫃以曲管連通如圖所示;於是用多少油去,便有多少水來,不須我們操一點心,他自已便會補償的,是曰自動補償法 (Automatic Compensation). 本來水比油略重一點,但亦相差不多.



第十圖

第二段 保險裝置(Safety Arrangement)

駕小艇於煙波之下,人皆病其危!其實他的危險,何曾比別種戰鬭艦大得許多咧?因爲潛水艇在水面上的危險,比別種任何戰鬥艦都小(理由詳後);在水面下,却又有下列四種保險法:—

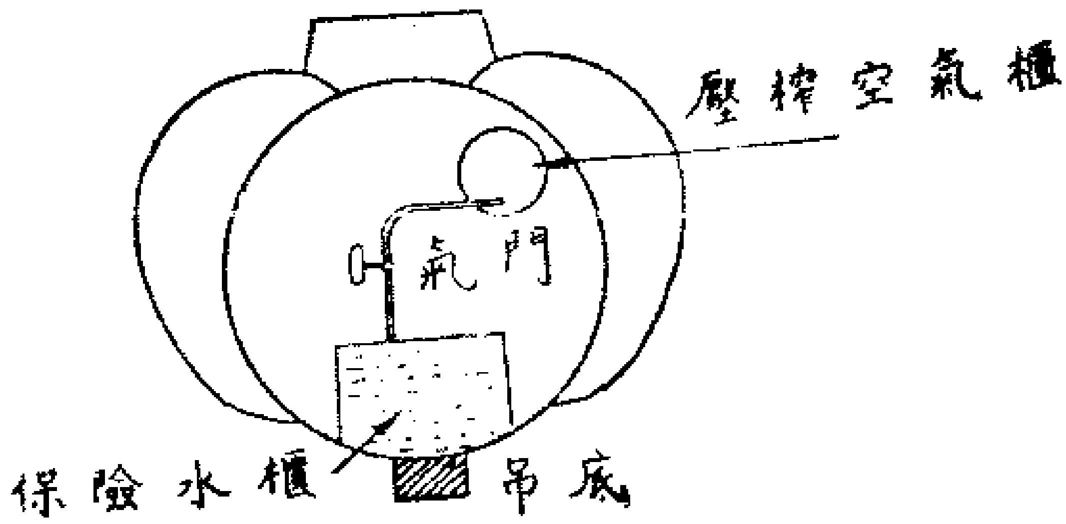
(甲)"剩餘浮力"法 (Reserve Buoyancy)

設有一潛行艇,全沒入水時其重量爲 1000 噸,浮在水面時其重量爲 800 噸,那末這剩餘的 200 噸,便是他在水面上的剩餘浮力.此時若放進 200 噸的水,自然剩餘浮力爲〇,他便潛入水中;但若不放進 200 噸的水,只放進 198 噸,同時用機械方法壓他入水,那末此時所剩餘的 2 噸,便是他在水面下的剩餘浮力.有此 2 噸的浮力,於是機械作

用一停,他就立刻浮到水面上來.這就是剩餘浮力保險法.所用的機械方法,就是當潛行艇向前進行時,將水平翼挪向下方,如第九圖虛線所示,於是由水生出的"F"力便可抵銷這2噸浮力了.

(乙)水櫃保險法(Safety Tank)

保險水櫃之裝置如第十一圖,此櫃常設在「抗壓殼」內,用厚鋼板造成.在未潛入水中時,即用水灌滿,若潛入後遇有危險,便馬上開「氣門」,用壓搾空氣,把水排出艇外,艇的重量減輕,自然就浮到水面上來了.此法於(甲)法無效時用之.



第十一圖

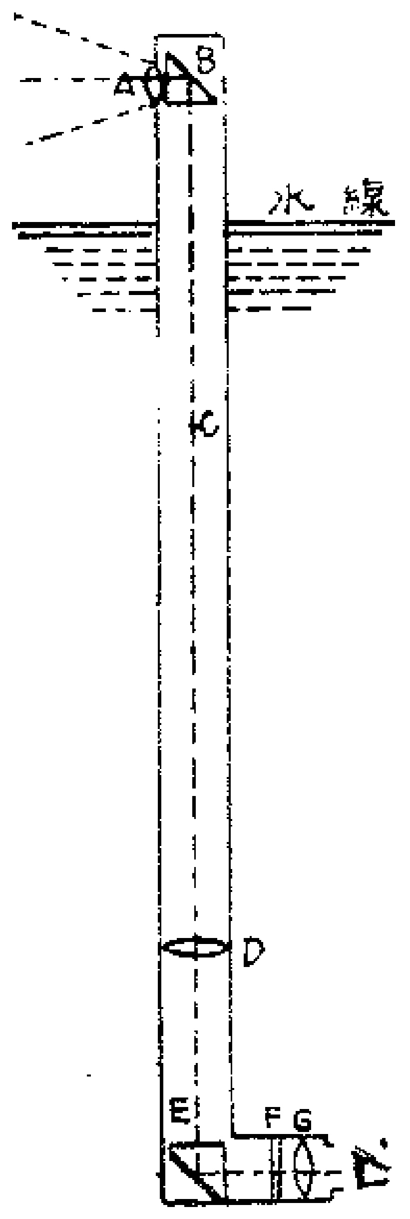
(丙)吊底保險法(Drop Keel)

吊底就是潛行艇下面一段活動的底骨,通常用生鐵塊作成.此底可由船內鬆去,只須將槓杆一挑,牠便馬上落向海底去,潛水艇便立刻浮起如瓶塞浮水一般.此法於(乙)法無效時用之.

(丁)逃生門保險法(Escape Door)

假定(丙)法又無效呢?那就只好『逃之夭夭』了.所以

常安幾個「逃生門」,以備萬一無法時可由此門逃出艇外,然後借海水的浮力泅到面上來.不過這種「門」,也只能寬船員之心壯船員之膽罷了,其實無大用處.因為潛水艇既在海底,那逃生門外的壓力必大,門一開海水便如千軍萬馬一齊奔來,船員如何當得住?只有候海水灌進來把艙內的空氣壓擠至於可由逃生門洩出海外時,艙中人方有隨空氣噴出的希望.你瞧,這種希望可不太小了嗎?可是在潛艇歷史上,用此法得救的,也大有人在.



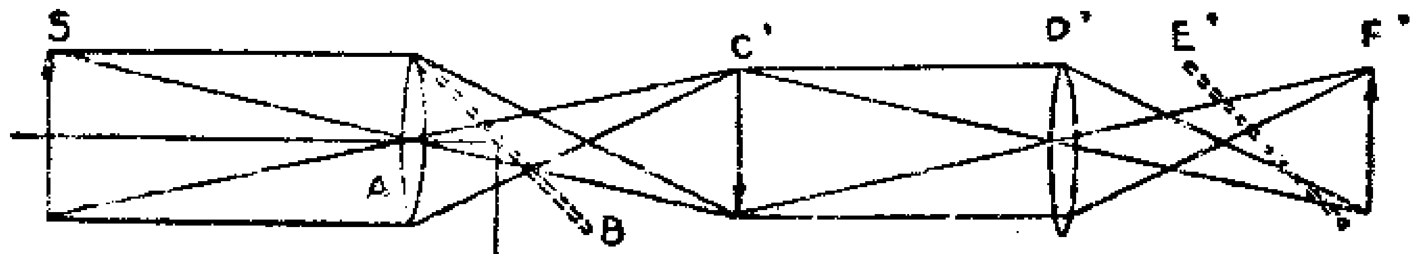
第十二圖　潛行瞭望鏡

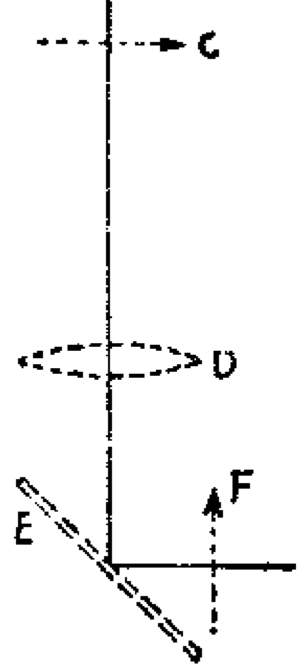
第四段　潛行艇之耳目

(甲)潛行艇之目

潛艇潛入水中後,欲看水面上的物體,所用的器具就是「潛行瞭望鏡」(Periscope).此鏡之構造如第十二圖.光線由「對物靈視」(Object Lens) A 來,通過三稜鏡(Prism) B, 結像於 C 點;此像再經過D 靈視及三稜鏡E, 卽顯正像於毛玻璃 F 上.此時看去,與照相鏡後所見相同(惟係正像,非倒像).再用 G 靈視將此像放大,使看去彷彿與原物之大小無異.此中光線結像之原理,看第十三圖,更覺明瞭.若非有 B, E, 兩個三稜鏡.當先結倒像於 C' 點,再

結正像於F'點.今用B將光線向左轉90°,再用E將光線向





第十三圖

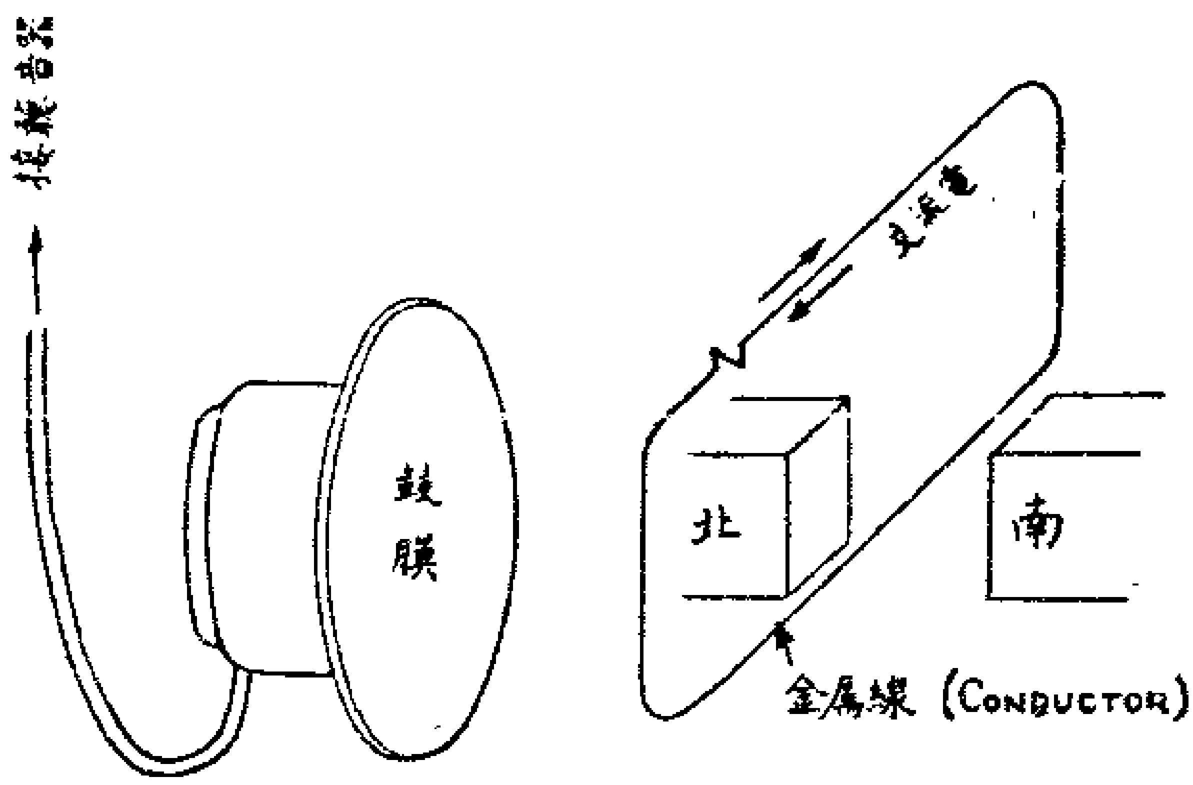
右轉 90°, 故仍與不轉同.

以上所論,係就看前面的物體而言.倘若要看後面的物體,那「對物靈視」自然須轉向後方;但若「對眼靈視」不隨之而轉,便生倒影於F上.所以那看的人也非隨着轉不可,因此有人稱之爲『推磨式的瞭望鏡』(Walk-Around Type). 此外種類尚多;如意大利有一種,在B與D之間,再加一個「折光三稜柱」,於是對物靈視向後方時,對眼靈視不轉亦生正像;美國勒克氏的 Omniscope, 用多數靈視組成一瞭望鏡,同時可見四圍,無須轉動.要其根本原理,皆大同小異.

通常每一潛行艇中,常裝瞭望鏡三具:兩具爲日間用(長約24-30英尺,直徑約 3-4 英寸); 餘一具爲夜間用(長約11-20英尺). 但也有只裝兩具的.

(乙)潛行艇之耳

在潛行艇中,欲與外界人互通消息,專藉「水下傳聲器」.現在且說最近的一種,名爲「咈盛頓通話機」(Fessenden Oscillator).此機在水上通話,本祇能達數百碼;但在水下傳聲却可達20英里(約六十餘華里).此機外形略如第十四圖(A),具一大鼓膜;此鼓膜釘於船殼上,水中聲浪傳到鼓膜時;鼓膜卽隨聲浪振動;鼓膜內附有一金屬線,此金屬線夾於兩磁極之間,如第十四圖(B).鼓膜來復振動,金屬線在磁場內也來復振動.當金屬線走過磁場時,線上卽生一種電流(此電流之方向,可依Fleming氏三指定律定之).金屬線既是來復運動,於是生出一種交流電來.此交流電通過「聽音器」(Telephone Receiver),自可聞聲.



(A)　(B)

第十四圖

第五段　潛行艇的空氣問題

潛行艇潛入水中之後,外面空氣之來源既絕;裏面

船員之呼吸,又是一刻不許停的一件東西;那末,這空氣問題便難解決了.其實這種困難,在實際上並不若在想像上之大.請看下文:

空氣中含養氣(Oxygen)百分之20,若此養氣減少至百分之16,人卽不能生存,所以人在空氣中,至多只可用去百分之4的養氣.人當休息時,每小時約需$\frac{2}{3}$立方呎的養氣(卽16.7立方呎的空氣);在苦重工作時,每小時却需6立方呎的養氣(卽150立方呎的空氣),那末,人在潛行艇中,每小時究需空氣若干呢?美國的勒克(S. Lake)君(潛行艇製造家兼發明家)曾實驗過數次,他的結論是『每人每時只需15至20立方呎的空氣,便毫不感覺痛苦.』但是我看勒克君的實驗,都是在他們略近休息時行的;我恐在潛行艇中工作的人,每小時當需30立方呎左右的空氣.照30立方呎計算,普通潛行艇中的空氣平均已可供船員十小時左右之用(船愈大,時間愈長).除此空氣外,普通尚有以下二法以補充之:—

(甲) 壓榨空氣法 (Compressed Air)

此種壓榨空氣,都裝入圓罐式鋼瓶中.其壓力通常爲每方吋2500磅.以此空氣變爲壓力15磅之空氣時,一立方呎卽變爲167立方呎.換言之,就是一立方呎的壓榨空氣,可供一船員五小時半之用.此法簡而易行,故普通多用之.

「註:潛水久後,艇中的空氣本比「大氣」的壓力(14.7磅)略高一點,溫度也略低一點,但相差均有限.」

(乙)化學方法

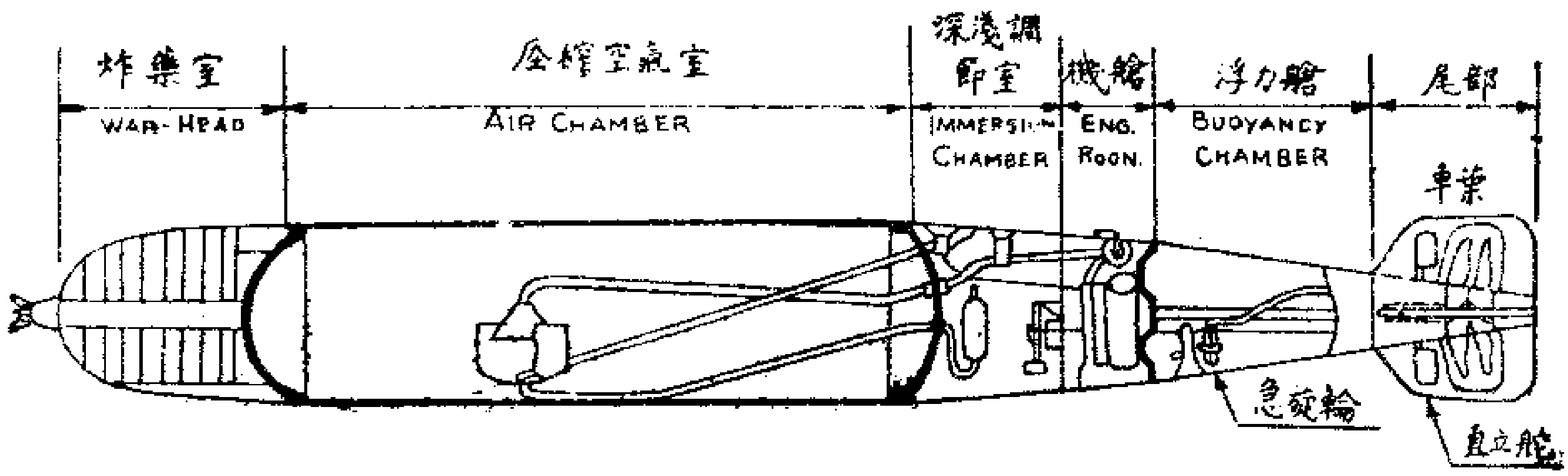
就是用化學方法以洗潔空氣,使已經用過的空氣再變爲清潔空氣,以供船員的呼吸.法用「風箱機」(Fan Engines)兩架,一架與總進氣管相連,一架與總出氣管相連.進氣管的用處,是供給空氣於艇中各部,常置養氣於此管上,以補養氣之缺乏.出氣管的用處,是抽去艇中各部無用的空氣;但在潛入水中時,此出氣管亦用以流通空氣.常置「鈉衜」與「鉀衜」(Sodium & Potassium Hydrate)於此出氣管上,以洗清空氣,使再可供人呼吸.此法德國潛行艇中多用之.別國潛行艇中所用的化學方法,各有特點,此處不必細述.

第六段 潛行艇的「鄉導」

她的「鄉導」是「潛行羅盤針」(Gyro-Compass).普通羅盤針,不適用於潛行艇中,因爲牠上下四圍都是鋼鐵,易於感磁,且艇中常有極强的電流,均可影響普通羅盤針的磁力,使牠所指的方向不準,所以潛行艇中,近來都用「潛行羅盤針」.此種羅盤針是本「急旋輪」(Gyroscope)之原理造成的.「急旋輪」的特性,是當牠以高速旋轉時,常能保持一定的方向:任憑四圍的物體如何動搖,牠總保持牠原來的方向,故可用作潛行艇的「鄉導」

以上所說的,都是潛行艇的特點.此外尚有與普通戰艦公同之點甚多,不必具論;只擇「武器」一項略說一說:

潛行艇的武器,首推「魚雷」(Torpedo). 在歐戰前數年,魚雷幾乎是她惟一的武器;但歐戰發生後,所有海軍上的武器,又幾乎被牠用偏了.卽如海戰砲 (Naval Guns) 連 12 吋的大砲她也用過的.至於機關槍 (Machine Guns), 排斥飛機砲 (Anti-Aircraft Guns), 以及水雷 (Mines) 等等,更不必說了.不過她的命脈仍在魚雷,故雖明知魚雷是人所共曉的,也覺得非提出來說說不可.

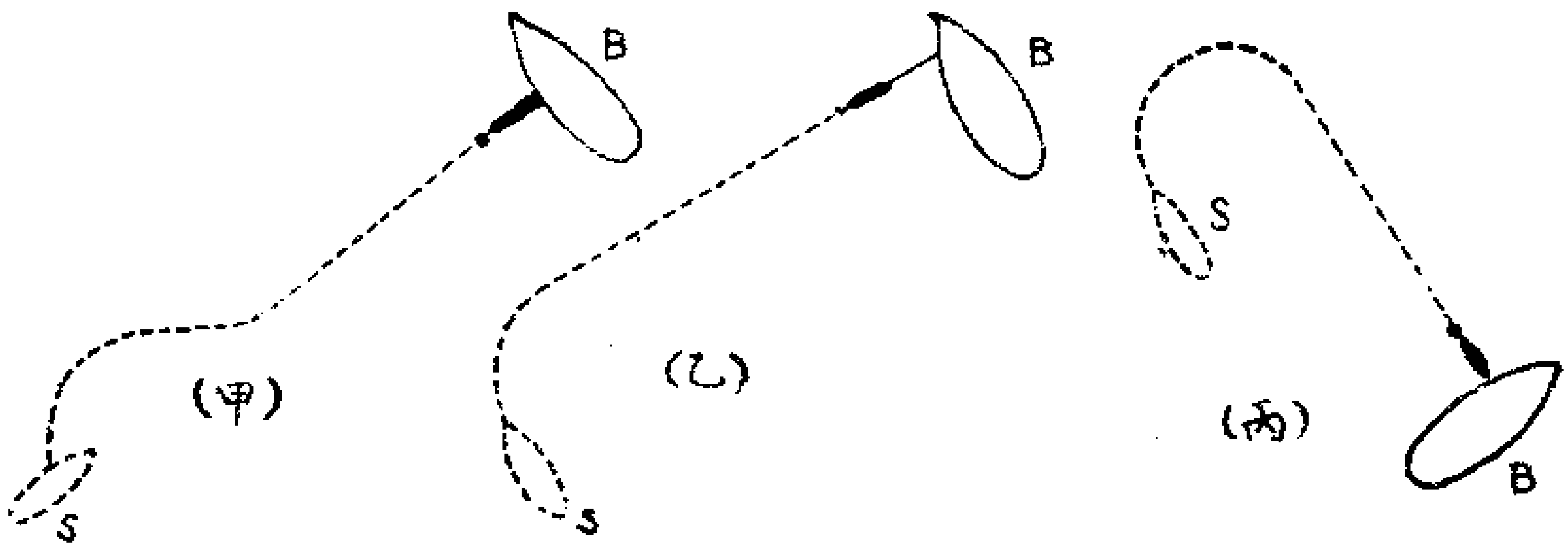


第十五圖　懷特赫式魚雷

第十五圖所示,為魚雷中最通行之一種.牠是破壞敵船的無上利器!但牠破壞的工具,也只頭部小小一「炸藥室」, 約占全部八分之一.其餘八分之七,都是為駕駛用的.駕駛的作用,可分三項: (一) 用壓榨空氣(Compressed Air) 以轉動機器,機器轉動車葉,魚雷便向前進; (二) 用「急旋

輪」(Gyroscope)以維持魚雷的方向;(三)用「擺錘」(Pendulum Weight)及「水力門」(Hydrostatic Valve)以保持魚雷的深度.

對於第一項,近來新式的魚雷已大加改良.以前用冷的壓榨空氣,現在却用「煤油」(Petroleum)或「酒精」(Alcohol)先燒熱空氣然後用之,(此種煤油,裝於小瓶中.瓶之上部,仍留許多空氣.機器發動後,壓榨空氣室中的壓力漸漸減小,於是瓶中空氣漸漸澎漲,送油出來,以繼續燃燒).從前的機器,多為三氣缸式的(3-Cylinder-type),現在却用空氣旋渦輪(Turbine Engine).有此種種改良,所以近來魚雷的速度,可達每小時43-45海里;射出距離可達14,000碼(約合26華里).

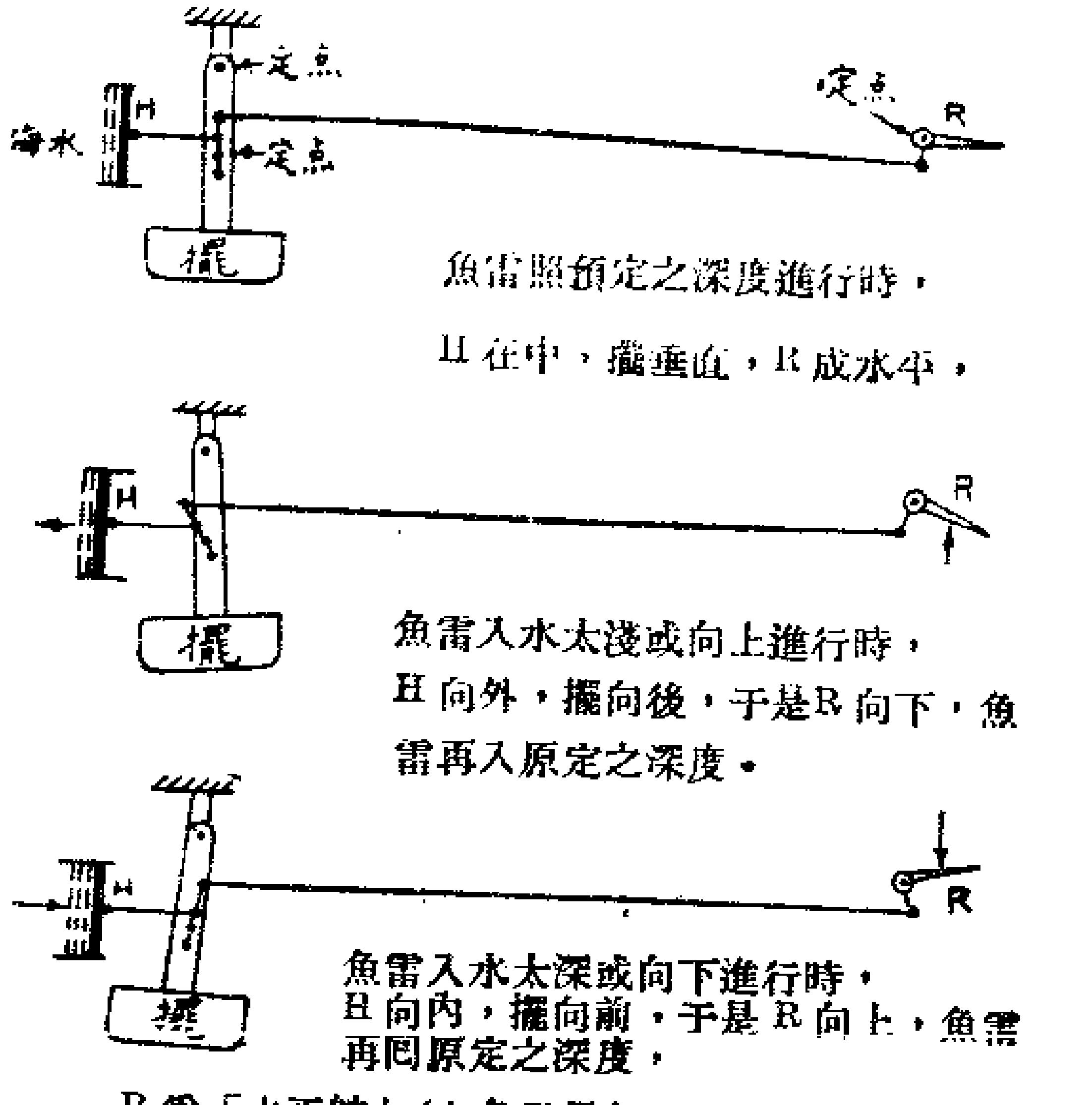


S為潛行艇, B為戰艦, ……為魚雷經過之線.

第十六圖

對於第二項～用急旋輪以定方向～在原理上自然是很明顯的.因為急旋輪當旋動時,永不變更方向;若魚

雷變更方向,急旋輪便作用於直立舵,使魚雷再照原方向進行.所以有此作用者,因急旋輪與直立舵之間有一「空氣活塞機」(Compressed Air Engine, Piston type),此機之「氣門」(Air Valve) 由急旋輪操縱之,故能如此.(其作用與尋常船的轉舵機相似).近來在此「氣門」與「直立舵」上,有許多改良,所以魚雷不但照直線放出後,可以沿直線進行;並可循一角度放出,走過若干距離後,再照直線進行(如第十六圖甲,乙).據英國急旋輪專家 Prof, J Gray 說,德國的魚雷,簡直可以轉 180° 的彎呢!(如第十六圖丙)



R 為「水平舵」(在魚雷尾部)
H 為「水力門」用彈簧(Spring)抵向外面彈簧之彈力,可以調節,使與預定深度之水之壓力相等

第十七圖 深淺調節室之裝置

對於第三項～用擺及水力門以保持一定之深度～其作用與原理,觀第十七圖自明,不必贅述.惟尙有一點圖中未曾畫出,卽擺與水平舵之間,尙有一空氣機(Air Engine)名爲"Servo-Motor".此機能變小力爲大力,以三十二分之一磅的壓力加於牠的滑杆上,牠的活塞便能舉起一百八十磅的重量!故擺一動,水平舵卽隨之而動.

至於炸藥室中所用的炸藥,以前常用棉花火藥(GunCotton),近來多用特造之T-N-T.據專家言,此種T-N-T只要250磅便可炸毀任何大的戰艦.但是現在Bliss-Leavitt公司所造的21吋魚雷(21" Hot Air Torpedo),其中已裝有500磅的T-N-T呢!那末這樣一個魚雷,便有炸毀兩隻大戰艦的可能性;而一隻潛行艇中通常又帶有半打以上的魚雷,難怪有戰艦的人,都怕潛行艇的!!

第二編

潛行艇的優點與缺點

世上無「完璧」;有優點者常有缺點.人且如是,潛行艇何獨不然?今且論列於下:

(甲)潛水艇的優點:—

1.隱身的能力(Invisibility To Enemy)～潛行艇能隱身水內,故敵人不易察知.她的潛行瞭望鏡(Periscope)不過

3 至 4 英寸的直徑,即令放在水外,也不易爲敵人看出,何況連此小鏡也不時常挺出水外(只偶一出水,便又縮下去的)那末,敵人談何容易瞧得見牠咧?但是敵不見牠,牠却可見敵人『我知敵,敵不知我.』故常能『出其不意,攻其不備.』這是潛行艇最大的價值!

2.天然的保護～大戰艦的保護器是鋼;驅逐艦的保護器是速度;潛行艇的保護器却是水,水是到處有的,不須帶在身上.英國的戰艦"Hood"號,須帶一萬三千八百噸重的保護鋼,潛行艇連一磅也不必帶!且而水可以不花錢得來,不像驅逐艦要燒多少煤才能得高速度;所以用水作保護器是再方便沒有的了.但是水有「保護鋼」與「保護速度」同樣的效力否?這是「有過之無不及的」!因爲砲彈打到水裏去,入水尺餘,即折而向上,斜着飄去了!所以砲彈是不能打水下的潛行艇的.能打牠的,只有「潛水炸彈」(Depth Charge)却又非丟準不可.但是她在水中,人家看不見他,『無的放矢』,何能十分準確呢?

3.「靶子」甚小不易受人攻擊(Small Target for Attack)～潛行艇的本身,本來就不大;但是牠又潛在水中.在深水部分的船殼,難以打傷,便算不得「靶子」了;可算靶子的,至多只有近水面的一小部分,和那直徑三四英寸的瞭望鏡.你若瞄準稍差,便把牠錯過了.那末,你儘管有大砲千百尊,也是英雄無用武之地!

4. 造價既低完工亦速.～英國"Hood"號戰艦的造價爲£6,025,000(約合華幣六千三百萬元);三年前,希臘政府在法國造了兩隻710噸的潛行艇,每隻的造價,只£115,000(約合華幣一百一十五萬元);即是用造"Hood"一隻的造價,可以造710噸的潛行艇52隻.不過"Hood"是世界上最大的戰艦,710噸的潛行艇又還夠不上中等,此比例難以作爲標準.大略平均說來,造一隻戰艦之費,至少可造中等潛行艇20隻至30隻.

"Hood"造了四年才造成.德國在歐戰發生時,並沒有許多潛行艇;但是到歐戰告終時,她公然有潛行艇568隻.除183隻未完工外,已造成者共爲385隻.在這四年歐戰之中,德國約略造了四百隻!可見易造.

5. 恐怖力最大～潛行艇對於敵艦未必真能『聚族而殲』;不過敵人因爲她破壞的可能性太大,又不知那浩浩碧波之下,已有她的蹤跡與否,所以鬧得人人提心吊膽,大有朝不保暮之勢!兼之他們被攻時又不易還手,雖有武備,與無備同!所以往往全軍氣餒,一若「鬼門關」即在眼前者.再若碰巧把敵船打沉一兩隻,那剩下的敵人更驚慌得可觀了!請看歐戰時英國海軍部的一道命令:—

"Steer away from the vicinity of Submarines at full speed, even if it is necessary to abandon a torpedoed sister ship and its drowning crew to their own fate".

漢譯爲:「附近有敵人潛行艇發現時,速開滿車逃去;縱眼見本隊有船已被魚雷炸傷,全船人員行將葬身煙波之下,亦不必回身往救,聽之可也!」

觀此命令,可知這位「海上霸王」怕潛行艇的程度了!

(乙)潛行艇的缺點:—

1. 瞭望不佳(Poor Vision)～不錯!潛行艇不容易被別人看見,但是她也不容易看見別人呢!當「瞭望鏡」(Periscope)出水三尺時,也只能看四千碼遠.再若潛到深處,瞭望鏡不能用,那就連甚麼也看不見了,「冥行索途」,其困難可想而知!

2. 速度太低～由歐戰經驗,證明潛行艇的速率着實太低,不能作攻人的利器;只能靠她能隱身的特長去乘人之不備罷了.却又不能窮追敵人的戰船,彷彿癱子趕老虎「可望而不可卽」,手中雖有打虎的獵槍,其奈虎已去遠何?不得已,只好去「狙擊」敵人的商船,這便是德國潛行艇痛打商船的緣故.

3. 船員太苦～船員如處囊中,身體上旣不舒服,精神上自然也受影響.尤其是遠出攻人的時候,常須轉戰數晝夜,這種苦頗不易吃得.(不過爲自坊計,不致太苦!未可一概而論.)

4. 活動半徑(Radius of Action)太小～蓄電池中所蓄

之電有限,不能行遠,自然活動之範圍較小.若欲遠出攻人,非另外有供給艦(Tender)隨往不可.

5. 易爲天氣所限(Less Sea-worthy)～乘風破浪,遠不如尋常戰艦,因爲她水線上之乾舷(Freeboard)較低,難以隨波上下.當白浪如山鑽進水裏去自然可以,但若欲遠出攻人,仍非在水面上往來不可.英人喜歡造大潛行艇就是這個道理.

總合上面的優點與缺點看來,可見法國人說潛行艇「萬能」是不對的;英國人說潛行艇「無大用處」也是不對的.潛行艇自有她相當的價值.用她來攻人,她果是「無大用處」的;用她來自衛呢,她便幾乎「萬能」了!何以故呢?因爲潛行艇的優點,在攻人的一方面看來,並算不得真正的優點;牠的缺點,在自衛的一方面看來又算不得甚麼缺點:她的優點全是自衛的優點,她的缺點又單是攻人的缺點.那末,一國之海軍政策若祇宜於攻不宜於守,自然不歡迎潛行艇囉!(關於潛行艇自衛的價值,觀後「戰略」篇當更顯明,此處暫不具論.)

(待　續)

Porf. Dr. von Antropoff 的新式週期表

吳 屏

自德人 Lothar Meyer 俄人 Dimitri Mendelejeff 製定原子週期表後,世人皆認之爲自然科學研究界最大之成功.世界著名物理化學家德人 Walter Nernst 稱他爲"教授時無上之助品,"

十餘年來,無機化學物理化學原子論之著述,多借重於該表,誠以無機化學之範圍日加擴大,對於講解研究方便起見,不得不求一系統的貫徹,物理化學家欲完成其思想智識,勢非詳察各原質及其化合物對於其他的一切原質及其化合物間連接之關係不可,週期表解決上述兩難題,最洽且盡,且表現原子構造的理論,尤深而明也,

門麥二氏製定之週期表,在科學上雖有這大之貢獻,但尚不能滿足一般人之慾望,以此學者常作改良該表之試驗,務期適合最新之學術而後已,

該表應改良之處,是

(1) Periode 有時過長,

(2) 生長 Periode 內往往有兩個 Periodicity,

因此改良的重點,是要找出一種相當的表樣,避去(1)(2)

之弊病,使閱者一目了然,

第一圖　門麥二氏規定之週期表（新式）

	I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV a	IV b	V a	V b	VI a	VI b	VII a	VII b	VIII a	VIII b
I	H 1															He 2
II	Li 3		Be 4			B 5		C 6		N 7		O 8		F 9		Ne 10
III	Na 11		Mg 12			Al 13		Si 14		P 15		S 16		Cl 17		Ar 18
IV	K 19	Cu 29	Ca 20	Zn 30	Sc 21	Ga 31	Ti 22	Ge 32	V 23	As 33	Cr 24	Se 34	Mn 25	Br 35	Fe 26 Co 27 Ni 28	Kr 36
V	Rb 37	Ag 47	Sr 38	Cd 48	Y 39	Jn 49	Zr 40	Sn 50	Nb 41	Sb 51	Mo 42	Te 52	Ma 43	J 53	Ru 44 Rh 45 Pd 46	X 54
VI	Cs 55	Au 79	Ba 56	Hg 80	La-Cp 57-71	Tl 81	Hf 72	Pb 82	Ta 73	Bi 83	W 74	Po 84	Re 75	— 85	Os 76 Jr 77 Pt 78	Em 86
VII	— 87		Ra 88		Ac 89		Th 90		Pa 91		U 92					

VI 57-71	La 57	Ce 58	Pr 59	Nd 60	— 61	Sm 62	Eu 63	Gd 64	Tb 65	Dy 66	Ho 67	Er 68	Tu 69	Yb 70	Cp 71

門麥二氏將長的Periode分爲

（1）大Periode,

（2）小Periode,

（3）特別Periode.

以此成爲一種"短式表",這種短式表之弊,是

I. 强迫的把一 Piriode 分開,既反乎自然;又不合於原子容積曲綫 (Curve of atomic Volume,)

II. 將不相類之原質如 Gold 與 Cesium, Manganese 與 Bromine列於一族內,致將一個很好的表變成不合用.

爲除却此弊,所以有許多學者如 H. Staigmueller 在 1902

年, A. Werner 在 1905 年, E. von Stackelberg 在 1911 年,主張用一種"長式表", 見第二圖,

第二圖

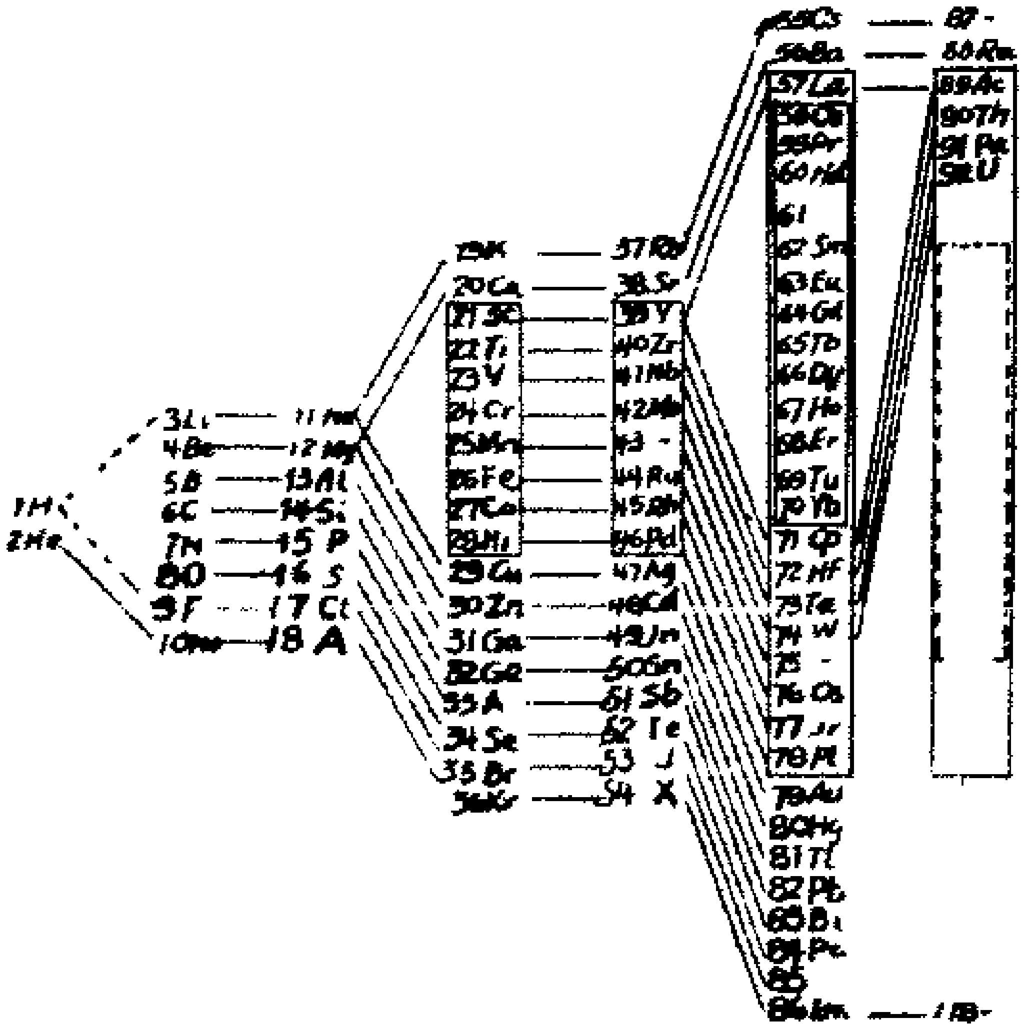
1 H 1,008																	2 He 4,00
3 Li 6,94											4 Be 9,02	5 B 10,82	6 C 12,00	7 N 14,008	8 O 16,000	9 F 19,00	10 Ne 20,2
11 Na 23,00											12 Mg 24,32	13 Al 26,97	14 Si 28,06	15 P 31,04	16 S 32,07	17 Cl 35,46	18 Ar 39,88
19 K 39,10	20 Ca 40,07	21 Sc 45,10	22 Ti 48,1	23 V 51,0	24 Cr 52,01	25 Mn 54,93	26 Fe 55,84	27 Co 58,97	28 Ni 58,68	29 Cu 63,57	30 Zn 65,37	31 Ga 69,72	32 Ge 72,60	33 As 74,96	34 Se 79,2	35 Br 79,92	36 Kr 82,9
37 Rb 85,5	38 Sr 87,6	39 Y 89,0	40 Zr 91,2	41 Nb 93,5	42 Mo 96,0	43 Ma	44 Ru 101,7	45 Rh 102,9	46 Pd 106,7	47 Ag 107,88	48 Cd 112,4	49 In 114,8	50 Sn 118,7	51 Sb 121,8	52 Te 127,5	53 I 126,92	54 Xe 130,2
55 Cs 132,8	56 Ba 137,4	57 La 138,9	72 Hf 178,6	73 Ta 181,5	74 W 184,0	75 Re	76 Os 190,9	77 Ir 193,1	78 Pt 195,2	79 Au 197,2	80 Hg 200,6	81 Tl 204,0	82 Pb 207,2	83 Bi 209,0	84 Po 210,0	85 -	86 Em 222
87 —	88 Ra 226,0	89 Ac 227	90 Th 232,1	91 Pa	92 U 238,2												

58 Ce 140,2	59 Pr 140,9	60 Nd 144,3	61 —	62 Sm 150,4	63 Eu 152,0	64 Gd 157,3	65 Tb 159,2	66 Dy 162,5	67 Ho 163,5	68 Er 167,7	69 Tu 169,4	70 Yb 173,5	71 Cp 175,0

此表爲 P. Pfeffer 於 1920 年所規定,將第一圖之弊病剷除,但在短週前却又剩下很長的空隙,既不美觀,亦不合理,且第一圖的毛病,是將許多不相類的原質强置一處,第二圖則正犯一個相反的毛病,將許多相類的原質如"Mg, Ca, Zn"及"Si, Ti, Ge"弄到漠不相連,再者橫行位數過多,看時亦甚覺不便.

1885 年 J. Thomson 製一表式,將第二圖之弊除去,僅就原質數之多寡定橫行之長短,該表於 1922 年經 N. Bohr 訂定,

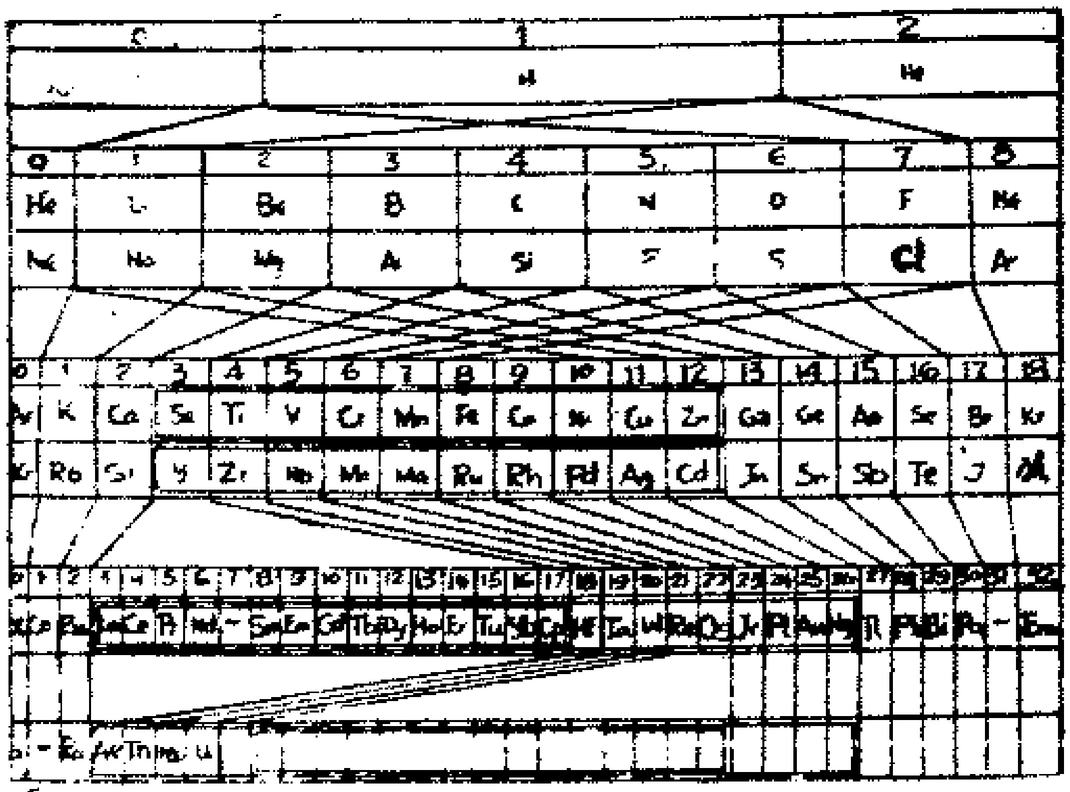
是爲第三圖.



第三圖

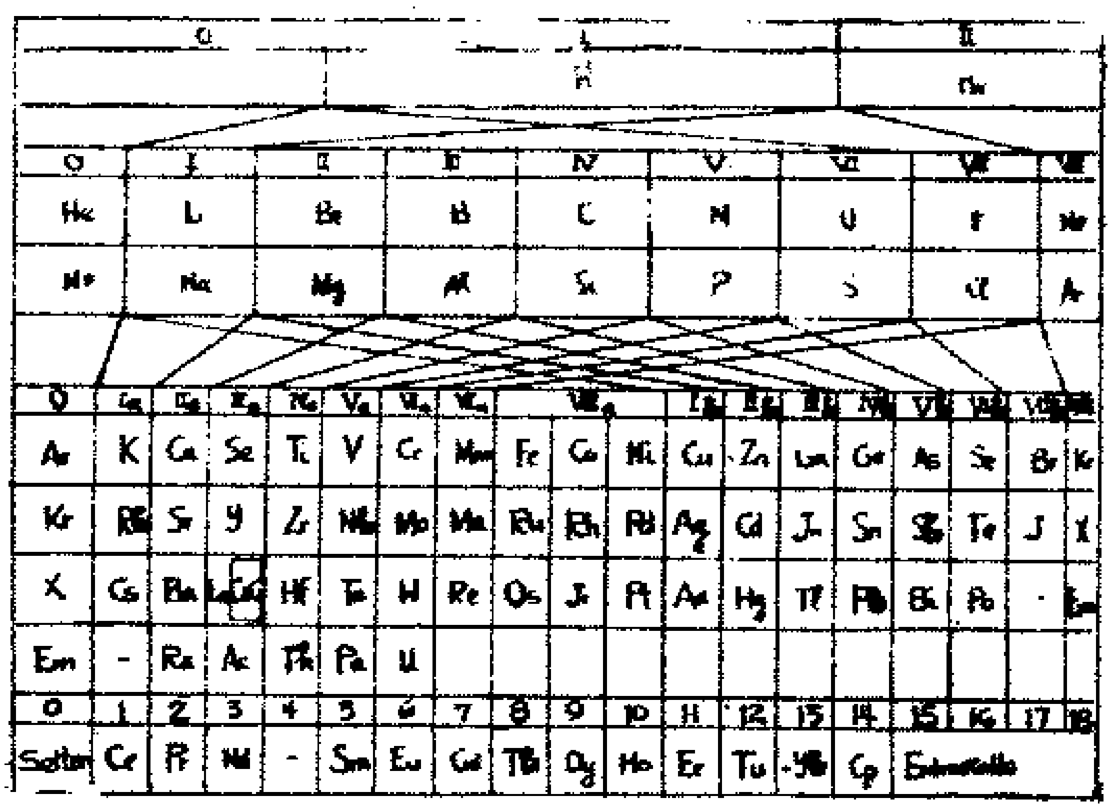
此圖爲自週期成立後理想方面之最完備者,但在教授時頗不清晰,再此圖因爲兩小週下繼之以兩大週,製者本欲使之平均等一,實際則現牽强不自然,如 Na, K, Cu 三原質好像有同性之關係,既非化學的,又反原子論之規則,是亦美中不足也.

1926 年, A. von Antropoff 將各種 Periode 的原質數目疊列之,原質數目較少之 Periode, 其距離使之稍大,原質數目較多之 Periode, 其距離使之減少,因此而得第四圖.



第四圖

此圖與第三圖極相似, Antropoff 因 H. Lux 之建議,乃將輕氣置於圖之中間,圖之構造,我們頂好想像他是畫在一個圓柱上,如將柱之後面直剖之,使稀貴汽體原質(Noblegas)一族中斷分作兩半,然後把圖展開,則稀貴汽體原質族立於圖之兩側,若將稀少土質金屬另置一行,並除去稀少汽體原質間之連接綫而以直行替代之,則得第五圖.



第五圖

如將同類之原質用色分別之,(第六圖),則閱時尤覺明瞭,

圖中所用的顏色,皆含有意義,如輕氣與養氣化合成水,故用青色,有海水色彩之意,鹼性金屬能使 Litmus 變藍,乃以藍色代表之,綠氣等成酸基,使 Litmus 變紅,乃以紅色表示之,炭質卽用黑色代表之, Boron 族中 Boron 及 Thallium 生綠色火焰,用該色代表之,淡氣族之硫化銻 Pervanadic acid 爲紅黑色,卽用該色代表之,養氣族中之硫鉻化物多黃色,卽以黃色代表之,鎂族中之鎂及汞爲 Ultraviolett 光線之源,卽以 Violett 代表之,稀少汽體及鐵族金屬,以灰色代表之,

第五圖之特別優美點,是原質的位置之地點極均一相當,稀少汽體立於兩側,如左右承焉,輕氣爲各原質之源質,位於各原質之上,坐據中央,適合最新研究結果之規定,較之以前學者不知把他位置於何處,(以其在化合物中,有時帶鹼性,有時帶酸性故也,)及 W. Nernst 將他置諸週期表外者,高出萬萬也,(1920 Z. Elektroch. 26, 323)炭質位於輕氣下,旣佔全表之中心,又與輕氣爲緊鄰,尤有趣者,炭輕二原質佔有同量之陰陽原子價,故能互相結合,有此數因無怪乎有機物之數無限,而尤以炭輕化物爲最繁且多也,

矽位於炭質下,因此球之成分,養氣而外,以矽爲最多,矽之下層,鐵與鎳又分列於其左右,鐵鎳之能佔得此種重要位置之原因,是地球內部的主要成分爲該二原質故也,

Antropoff 的週期表除佔有門麥 Thomson Bohr 諸氏之優點外,還能補救 Werner 表式之缺點,他表現各原質間之主要及副屬的關係,可分作三部,第一是用放射格式連接各相關之族類,第二是各相關之族類用同樣顏色區別之,第三是用同樣的羅馬數字加上指示數字 a, b,這種指示數字在新式的"短週表"中,亦沿用之,

Antropoff 週期表,表現各原質的主要與副屬關係之地方,較門麥 Thomson Bohr 等表更進一層,因為他用族類的直式疊法,可以把各族間關係之深淺亦能表出也,如稀貴汽體原質互相直式的上下疊成,自成一親密之族,而與鐵族諸原質則毫無關係,正適合實事,(門麥表則不然), Li 及 Na 直接位於 K, Rb, Cs 之上,而與 Cu, Ag, Au,僅表有一極遠之親係,亦極合理,再者八原質週期內的愈位於中央的原質,對於其緊旁的兩小族之關係,愈無甚大之區別,準是則炭族中的炭鈐原質,對於他們的兩小族(見第五圖中之(4)(14)兩族),應得同樣之態度,實際上許多簡單及複雜的鈐化物,既可歸於 Titanium 族,亦可屬於 Germanium 族,可概知也,愈向右邊,則八原質週期內的原質與其 b 族原質之性質亦愈相近,例如 F, Cl 幾直列於 Br, J, 之上,而與 Mn 僅有很遠的親誼,最右邊則又終以稀貴汽體原質,

就原子構造的理論及原子容積曲線上講起來,則鎂鋁兩原質應居於 a 族上,但就他們的化學關係,(尤以鋁為

最,）講起來,則又多向Zn及Ga,少向Ca及Sc,爲解決這種困難,所以Antropoff就F. Weigert之建議,作連接格式以表白之.

Antropoff表之另一優點,是洽合Kossel之學說,學說爲何,即原質的正負價視他與他左右稀貴汽體原質的距離而定之,

Antropoff 表於輕氣之左,留一空位與一尙未發現之新原質,該原質之存在(Existence.,)並非不可能,其秩數應爲〇,其假設之原子名爲Neutron,,該原質卽可以Neutronium名之,（Z. anorg. Ch. 37.872. 1924 年.）

總之此新式週期表既包含以前各表之優點,又合乎今日理化上最新研究之結果,宜乎其受世界多數學者之歡迎也,

燕窩之本體及其榮養之價值

宋 文 政

燕窩非特一般視爲榮養珍品,中醫界並推爲滋補聖藥,即否定中藥效力之西醫界,對燕窩之榮養價值,亦無一語之批評,因此問題非經生理化學與有機化學者之研鑽,或無從解決也,取燕窩一小片付之有機定性分析即可知其含有炭氫,氧,硫黃,(少量)各元素,另取若干付之蛋白檢驗,並可證明其爲一種蛋白質,但蛋白之種類甚多,營養價值互異,燕窩究屬何種蛋白,吾人若能明確鑑定,則其營養價值,自易決定矣,若干醫化學者因燕窩外觀與膠質蛋白

近似,因揣想其或即爲 Gelatin 之一種,若然則無營養價值可言,但問題決不如是之簡單,試取膠質蛋白浸於冷水,內,即見其吸水而膨脹,熱至攝氏三十五度,即行溶解,溶液具有粘性,冷則凝爲膠,若取燕窩如法處理,即可發現其膨脹程度,不及 Gelatin 之甚,且不溶,縱煮沸至百度,亦不爲顯著之溶解,予曾取燕窩若干,於加壓之下沸騰二小時(140°c)結果,除可細碎爲粒狀外,亦不增進其溶度,溶液無粘性,冷後亦不凝爲膠,由此數種物理性質之比較,即可知燕窩決非 Gelatin, 又有人主張燕窩或爲 Collagen (亦擬似蛋白之一

種)但 Collagen 若經數小之煮沸,卽放失安莫尼亞, Ammonia 變為 Gelatin 而溶於水.燕窩並無此種現象.故亦可知其非 Collagen 若取燕窩付之蛋白檢驗,更可知其非 Collogen 而或為 elastin (亦擬似蛋白之一種) 茲將 Gelatin 燕窩 (Agar-agar Nest) 及 elastin 之各種蛋白反應列擧於下便於比較

	Gelatin	Agaragar Nest	elastin
1. Biuret Reaction	positive	positive	positive
2. Millon Reaction	faint	positive	positive
3. Xanthoproteic Reaction	faint	positive	positive
4. Adamkiewicz Reaction	Negative	Questionable	Negative
5. Sulphur	Negative	positive	positive

1. Biuretreaction 為滴加一滴之硫酸銅液與二,三滴之苛性曹達液於受檢液,若有蛋白存在,微熱後卽呈紫色或紅色, Gelatin, agar-agar nest 及 elastin 液,俱有此反應,

2. Millon reaction 滴加 Millon 氏試藥 (硝酸汞與亞硝酸汞之硝酸溶液,於受檢液,若有蛋白存在,加熱後卽生紅色並沈澱,惟 gelatin 僅呈淡紅色 Agar--agar nest 呈顯明之紅色 ,elastin 亦然.

3. Xanthoproteic reaction 加濃硝酸於蛋白,熱後卽呈黃色, gelatin 僅微呈黃色 agar-agar nest 則呈鮮明之黃色 elastin 亦然.

4. Adamkiewicz reaction 溶蛋白於水醋酸,加入濃硫酸,熱後則

於二液之接觸面發生紫色,惟 gelatin 並無此反應,elastin 亦然, Agar-agat nest 則似有似無

5. Sulphur Recation 取少量之蛋白質與苛性曹達沸煮,則蛋白內之硫黃原子卽分解爲硫化曹達,滴加醋酸鉛液,卽發生黑色之硫化鉛沈澱, elastin 內含硫量雖少,仍發生黑色沈澱 agar-agar nest 亦然,惟 gelatin 不含硫黃故亦無此反應,

由上各種實驗確可得燕窩本體,近於 elastin 之結論 elastin 爲擬似蛋白之一種其所含 amino acids 不盡爲人體生活所必需,反不如獸肉卵白等普通蛋白,因據生理化學泰斗 Osborne 之研究組成蛋白之各種 Amino Acids 有五種爲人體所必需者,卽 Tryptophane, Tyrosine, Cystine, lysine, histidine,

膠質蛋白缺少 Tryptophane Tyrosin 及 Cystine 故幾無營養價值之可言 elastin 缺少Histidine 與 Lysine亦非良好食品,若燕窩果爲 elastin 則其營養價值反不如普通蛋白食品,當然無可寶貴之處,惟現在之操作,僅限於定性分析,詳細結果,尙在分別定量量組成燕窩各種 Amino acid 以後,預定今秋將再爲一次之發表,以待閱者指正也 (完)

十九年二月底於廈門

註一燕窩無確定英文名稱,惟廈大校長林文慶博士謂西人有稱燕窩爲 agar-agar nest 者故引用之.

註二本實驗所用參攷書如下特列出以誌感謝

1. Osborne the vegetable proteine

2. Cohnheim: Chemie der Eiweis kö̈rper

3. Abderhalden: Biochemische Handlexikon

4. Bogue: The Chemistry and Technology of gelatin and glue

註三擬似蛋白即 Albuminoid 之譯

燃 料

葛毓桂

衣食住行是人生最需的四個條件,都和燃料有直接或間接的關係.食如烹茶煑飯,行如舟車航空,住如溫室取光,關係之密切自不待言.和衣之關係似不鮮然.考衣之原料不外毛棉絲皮等等.自生料成熟料,熟料製作成品,大規模的製造廠中,驅使複雜,精確,巧妙機器的原動力曷一莫非由各種燃料的燃燒之結果.(並不是說所有動力俱靠燃料;如化學變化,天然水力,風力,日光,皆可發生動力.惟均不若燃料之爲用廣耳.)

燃料應用的範圍,日見擴大,天然間儲藏者只有此數.在新的燃料代用品未發明以前,(有人提議利用地心之熱作原動力,倘能成事實,誠熱量的一大來源也.)遲早總有一日,感覺缺乏燃料之苦.故現在儲量消費的經濟,分配的均勻,及利用方法的改良,俾應用時間得以延長,以求更多量更優美的生產及製造,增進人類的幸福諸問題,應與以充分的研究.是以一九二八年九月世界動力會議在倫敦開會,對於燃料諸問題有專門討論.(世界動力會議紀略見"科學"第十四卷第四期)

現在吾人利用的各種燃料,除天然油類(Natural Oils)其出身如何還是一個待解決的問題而外,其餘各種燃料的初步出身大都是纖維質(Cellulore),此纖維質受自然力的影響如溫度,壓力等誘導而成並含有松香性之物質.

當植物生長時其葉綠素在陽光下,能令自空氣中取得之二氧化炭(CO_2)和從土壤中藉根的力量吸來的水分化合成纖維質,其簡單的化學公式為:—

$$6H_2O + CO_2 = C_6H_{12}O_6 + 6O_2$$

纖維質係木材質中主要的成分.這個神工鬼斧,奇妙絕倫的變化,現在還是一大謎,尚沒有公認一致解釋.這個變化的結果有三個好處;—

第一,是防止空氣中過量的二氧化炭氣的存在—二氧化炭是極有害於動物的生命的.

第二,補充空氣中氧之不足,免得有缺乏之虞.

第三,特別重要,他能吸收太陽的輻射熱(Radiant Heat)—卽是被植物所儲藏能供人類種種利用者之熱.

無論木材,纖維質,稍微變形之泥煤(Peat),褐煤,以及高級煤與明煤(亦稱白煤,硬煤,或無煙煤佔世界儲煤量的百分之6.75,全儲在亞洲)間之各級煤,或直接燃燒取用其熱,或為適應特別用途,製成焦煤,木炭,或製成液體燃料如煤膏(Coal Tar)—可提取多種之液體物—,氣體燃料如煤氣,發生氣,燃燒後利用其熱,總不過是,僅取囘其預自太陽

取來者,令其還原而利用之耳.

燃料分類——燃料分固體的,液體的,及氣體的三大類.屬於固體者如木材,泥煤,煤以及炭化後的木炭,焦煤等等.液體燃料天然產者爲量甚多如石油等（亦稱煤油）,但令固體燃料行毀滅蒸溜（Destructive Distillation）製得者亦不少,如煤膏油類(Coal Tar oils),木精等.行毀滅蒸溜同時並可製得大量之氣體燃料如煤氣(Coal Gas)是.復利用固體燃料的不完全燃燒作用而發生之水煤氣(Water gas),發生氣(Producer gas)爲用極廣.由穀類或糖類之發酵作用造成燃料者亦有之如酒精是.天然的氣體燃料如我國四川之自流井,以竹管引至他處作煮鹽之用.各植物之廢棄物,如甘蔗之燼,五穀之稭,稻草高粱桿皆農民之主要燃料.我國以農立國又工商落後,天產燃料爲惟一之取熱品,利用人造燃料者誠絕無而僅有.

凡物質有選做燃料之價值者,必須點燃比較容易,能在任何情形下自由燃燒,卡里(Caloric value)愈高愈好.若以經濟的眼光選擇,尤須方使,儲量豐富,價值低廉.

燃料含氫量之多寡是定燃點（Ignition point）高低之一因.例如木炭;木料若在紅熱（約在340°C或644°F）溫度之下,行炭化者;因驅出揮發物少,而含氫量多,於是在800°F就可點着.假使在亮紅熱（900°C或1634°F）之下,行容化;必須溫度達到1000°F左右才可點燃.油類燃料燃點之高低用

之於德塞機 (Diesel Engine) 時,尤應注意其含氫量.其量不得低過某一定限度.

燃料燃燒結果優劣大半隨通風的情形如何爲轉移.如加入空氣之遲速,冷熱（在未與燃料接觸之前有預先加熱增高溫度者）以及加入量之多寡俱有密切之關係.

一種燃料之卡里值 (Caloric value) 恆以其所含炭與氫之成分而定,因二者俱能氧化發生熱量故也.所以爲實際上應用起見僅注重這兩個成分.假若某種燃料僅含氫與炭兩成分,則其卡里值必是二者之和無疑.但大多數之燃料常含有某量之氧,此氧在燃料內已與氫或炭化合（自然是一部份的可能）. 他們何以發生變化,尚不得知,但習慣上都認爲所有必俱被氫化合淨盡.沒有用作燃料之物質,其含氧量比與氫化合所必要之量再多者,故含氧量愈高則燃料之價值愈低,適成反比.

關於燃料的幾種重要性質茲分別記之於下:—

一.燃燒作用—所有工商業及家常用的各種燃料,無論其爲固體,液體,或氣體,其燃燒作用乃是其可燃成分與氧氣或空氣起化學反應之所致.反應結果發生熱,能爲吾人知覺所感觸者叫做迅速燃燒 (Rapid Combustion), 其反應相同,但進行甚緩不爲吾人知覺所感觸,名曰遲緩燃燒 (Slow Combustion). 二者之反應進行緩急雖有不同,但每單位燃料所發生之總量則相同也.

若求完成燃料的化學反應,及能發生之熱量得全部利用,是必充分的供給氧氣或空氣,惟各燃料之成分不同所需要之氧氣或空氣亦異其量.究應需要若干在理論方面可計算而得.(計算法見後).不完全燃燒不但消耗熱量於可見之煙苔中,其爲目所不能見有待於化學方法之檢驗而後知者爲量亦多,如囱煙內之含未飽和之氣體卽是.一氧化炭氣(CO)乃炭成分未完全燃燒產品之一.內燃機之氣缸中此氣尤多.有劇毒,冬令受煤毒而致命者率由於是.

小規模及試驗室中,常用純氧以助燃燒,但大範圍無用之者,不徒價值太昂,且管理亦不易,不若空氣之取不盡,用不竭,又不耗分文也.

達到完全燃燒之目的,有三事須注意;一.須注意充分空氣或氧氣之供給;二.增加氧氣或空氣與燃料密切接觸之機會;三.燃燒裝置之冷却力不得低過完全燃燒所必需之溫度.

一種燃料燃燒的化學變化異常複雜,很難用一簡單的化學公式表出之.爲說明上方便起見姑採用之.例如煙煤經驗公式 (Empirical formulor) 是 C_9H_6O (C=83·1%, H=4·6 %; O=12·3%),燃燒時的化學反應爲—

$$C_9H_6O + 10\,O_2 = 9CO_2 + 3H_2O$$

生煤爐內燒之,其初先行毀滅蒸溜,揮發出煤膏爤(Cool

tar gas）及水冷等.揮散出之主品爲炭氫化物（如沼氣，CH_4；困C_6H_6；二炭炔C_2H_2等）氫,氧,及一氧化炭;並含有少量細炭紛一卽煙菸.揮發量多少雖各有不同,大抵在15–20%之間（以重量論）.其殘燼卽爲焦炭.所以固體燃料之燃燒分出極淸楚的兩層;上層係揮發物之燃燒,下層是固定炭（Fixed Carbon）之燃燒.

二.火焰之生成—火焰亦燃燒現象之一,係揮發物可燃成分與空氣或氧氣化合而成已如上述.但固定炭在其開始燃燒,或不充分供給空氣或氧氣生成的一種未飽和炭化物——氧化炭（CO）——亦爲造成火焰之一因.此氣火焰發淡藍色.火焰繼續維持,要必需之溫度.否則卽息滅.如燈燭噓吹之卽息滅.卽此之故.固體燃料如煤者,其火焰之長短大半視可燃揮發物與固定炭之比而定.揮發物較多固定炭較少則火焰長,如煙煤;又如明煤揮發物甚少故幾無火焰.

三.燃點（Ignition point）——一種燃料必須加熱至某一定溫度方能燃燒,此溫度謂之燃點.若使燃燒繼續不絕此溫度必須維持.尤重要者燃點之高低係乎塊粒之大小粗細.如同一種煤,粉末易燃,塊粒較大者則否.煤之燃點因塊粒之粗細而變異如下;—

	通過二百網目篩者	通過一百至二百網目篩者
印度煤	240°C	380°C以上

平常煤	229°C	390°C以上
逗德煤(Yardcoal)	219°C	396°C以上
考比煤(Gobcoal)	232°C	346°C

燃料之燃點除氣體的無大差異外,在氧中燃燒比在空中時低得很多,茲舉例如下,—

	在空氣中	在氧氣中
明煤	500°C	258°C
煙煤	400–425°C	230°C

K. Bunte 及 A. Kölmel 謂各炭化的燃料,其燃點亦大不相同;木炭爲252°C;亞焦炭(在低溫下炭化者)爲395°C;煤氣焦炭爲505°C;焦廠焦炭爲640°C.

液體燃料在空氣及氧氣中之燃點比較,—

	在空氣中	在氧氣中
石腦油	360–390°C	270–280°C
酒精	518°C	395°C
以脫(醚)	347°C	190°C
煤油	367–432°C	250°C

氣體燃料在氧氣中及空氣中燃燒時二者之燃點無大別,茲舉例如下,—

	在空氣中	在氧氣中
氫氣	580–590°C	580–590°C
一氧化炭	644–658°C	637–658°C

沼氣(CH_4)····	650−750°C	556−700°C
二炭烯(C_2H_2)	542−547°C	500−519°C
二炭炔(C_2H_4)	406−440°C	400−440°C

三.燃燒時理論應需要空氣量之計算法—這個計算法於內燃機尤特別重要,由是可預料囪煙或廢氣的成分的大概情形.使用燃燒之經濟與否係焉.

茲舉炭燃燒爲二氧化炭氣之例,以示此計算法,—

	炭		空氣		囪煙
化學公式…………	C	$+$	$O_2 + (N_2)$	$=$	$CO_2 + (N_2)$
以磅或克計重量	12	$+$	$32 + (107)$	$=$	$44 + (107)$
	1	$+$	$\underbrace{2.66 + (8.93)}_{11.6}$	$=$	$\underbrace{3.66 + (8.93)}_{12.6}$

以竔計容量:—

A. 在 C°O 及 760mm氣壓下

$$12\text{克} + 22.32 + (84.0) = 22.32 + (84.0)$$

$$1\text{克} + \underbrace{1.86 + (7.0)}_{8.86\text{立升}} = \underbrace{1.86 + (7.0)}_{8.86\text{立升}}$$

B. 在 60°F 及 30吋氣壓下

$$12\text{克} + 23.52 + (88.4) = 23.52 + (88.4)$$

$$1\text{克} + \underbrace{1.96 + (7.36)}_{9.32\text{立升}} = \underbrace{1.96 + (7.36)}_{9.32\text{立升}}$$

以立方呎計容量:—

A. 在 C°O 及 760mm氣壓下

$$12\text{磅} + 357.5 + (1345) = 3575 + (1345)$$

$$1\text{磅} + \underbrace{29.8 + (112)}_{141.8\text{立呎}} = \underbrace{29.8 + (112)}_{141.8\text{立呎}}$$

B. 在 60°F 及 30吋氣壓下

$$12\text{磅} + 377.0 + (1418) = 377.0 + (1418)$$

$$1\text{磅} + \underbrace{31.4 + (118)}_{14G.4\text{立呎}} = \underbrace{31.4 + (118)}_{149.4\text{立呎}}$$

於是國煙之氣體成分爲（以容量論）—

$$CO_2\% = \frac{29.8 \times 100}{141.8} = 21.0\% \quad N_2\% = \frac{112 \times 100}{141.8} = 79.0\%$$

			0°C及760mm	60°F及30吋
注一	每分子重氣永遠佔據	以克論	= 22.32立升	= 23.52立升
		以磅論	= 357.5立呎	= 377立呎

注二　空氣之日成分表

	%	N/o	空氣/o	
氮	77	3,35	4.35	以重量論
氧	23	1	1	
氮	79	3.76	4.76	以容量論
氧	21	1	1	

四.卡里值 (Caloric value) 之計算法—各燃料各可燃成分之量不一致,卡里值之高低亦異.測定值之法通常用熱量計 (Calorimeter) （熱量計之種類頗多,茲篇從略），既簡單尚準確.然計算法仍有其相當價值.計算時必先承認其可燃各成分的發熱量和同樣的各單體原素之發熱量完全相等.既無熱量額外發生,復無熱量額外消耗.

例如炭在氧氣中燃燒生成二氧化炭,各物之重及發生之熱量,以熱化公式 (Thermo-Chemical equation) 表之如下,—

$$C + O_2 = CO_2 + 97.644\ \text{卡里}$$

12克炭　32克氧　44克二氧化炭

又氫在氧中燃燒（在恆等壓力之下）則生水,公式爲,—

$$H_2 + O = H_2O + 69{,}000\ \text{卡里}$$

2克氫　16克氧　18克水

若爲水汽 + 58,100卡里

卽是一克炭發生 8,137卡里 (14,646 B.T.U.), 一克氫發生(若化成之水降爲零度($0^{\circ}C$)時) 熱量爲34,500卡里(62,109 B.T.U.),若仍爲蒸汽 (卽在$100^{\circ}C$時), 其熱值爲 29,050卡里 (52,290 B.T.U.).

若某燃料僅含炭與氫兩種成分則其

$$卡里值(毛) = \frac{(炭\% \times 8137) + (氫\% \times 34,500)}{100}$$

但大多數燃料均已含有少量之氧,此氣體係消耗品,熱量必因而減少,因爲平常都認爲燃料內之氧都被其中之氫化合完竣,已化合之氫不能再生熱量,燃料全熱量之減低職是之故,但究竟減低多少亦有法計算,吾人已知道八倍之氧和一倍重之氫化合成水,氧與氫之比爲八比一,故從氫的總量減去,八分之一的氧,餘者卽爲有效之氫.——卽能燃燒發生熱量之氫.則卡里值之公式變爲,—

$$每克之卡里(毛) = \frac{(C\% \times 8137 + \left\{(H - \frac{O}{8}) \times 34,500\right\}}{100}$$

更完備之公式可用之於煤者,公式擴充爲,—

$$卡里數 = \frac{(C \times 8137 + \left\{\left(H - \frac{(O+N-1)}{8}\right) \times 34.500\right\} + (S \times 2220) - H_2O \times 600)}{100}$$

煤中常含氮,係消費熱者,平均減去 1%。硫能燃燒生熱故加入,水蒸汽係耗熱者故減去.

我國燃料概况—世界蓄煤總量據十年前國際地質調

查會之估計為7,397,553兆公噸,約六千倍於全世界每年之消耗量.近世用煤之處雖大形擴大,一時或無缺乏之虞.就中6.75%是明煤(大部儲藏於我國境內),52.75%為煙煤,亞煙煤如泥煤褐煤等則佔40.5%.我國儲煤佔世界全量的13.5%.

我國連年內亂百業退敗,煤業自不能例外.十三年產量為25,780,875,公噸,十五年退縮為21,481,521公噸.近四年中尚無可靠之統計,以大勢測之,決不能超出十五年之產額,或更形退縮亦未可知.

我國煤業即現萎縮,外煤乘隙而入,此必然之勢,十二年至十五年四年間之統計如下;—

		十二年	十三年	十四年	十五年
輸出	煤	3,108,682	3,202,352	3,002,826	3,085,722
	焦	29,324	27,170	18,913	14,321
輸入	煤	1,366,108	1,610,016	2,752,927	2,897,572
	焦	16,053	57,393	4,781	4,879

就上表得知,每年輸出均在三兆噸左右,無甚出入,而輸入額由1.3兆噸增至2.8兆噸,增加一倍有奇.輸入量大概行銷於中南各部,因交通梗阻北煤不能南來,是不得不仰給舶來品也.沿平遼路線及東北之煤區幸未受大影響,均有活潑氣象稍堪自慰者.開灤十六年產額為4,629,764噸,北票年產300,000噸,復順十六年產6,918,800噸,近年有增至

8,000,000 噸之勢.

新疆沿天山山脈以及甘肅西部南山山脈均發現油礦,但儲量不豐.陝西北部向稱蓄油豐富之區,前經開採不幸已歸失敗.山西爲最有希望之產油區域.四川有數處亦能出產煤油,產鹽區附近爲尤著.貴州貴陽西南之泡木冲近年曾發現油礦.內外蒙廣東各地皆有儲煤油之報告,均有待於詳細的調查,與科學的研究.

熱河片岩頗著名,含油在 12 % 以上;山東福山油片岩日本曾加研究,蓄量甚富含油則在 10 % 左右.

我國森林東北最著佔地有 177,536,000 畝之多.

液體燃料如酒精,汽油之類在我國漸漸佔重要之地位.惟幾乎盡是舶來品.氣體燃料亦有數處利用,上海,大連,復順皆非我國自已經營.

貨棄於地,盡量開採,固屬必要,而利用方法之改良尤爲緊要.無價之寶,棄之不稍顧者所在皆是.如我國之舊式煉焦,棄其精而取燼,甚屬可惜.幸國人注意及之.

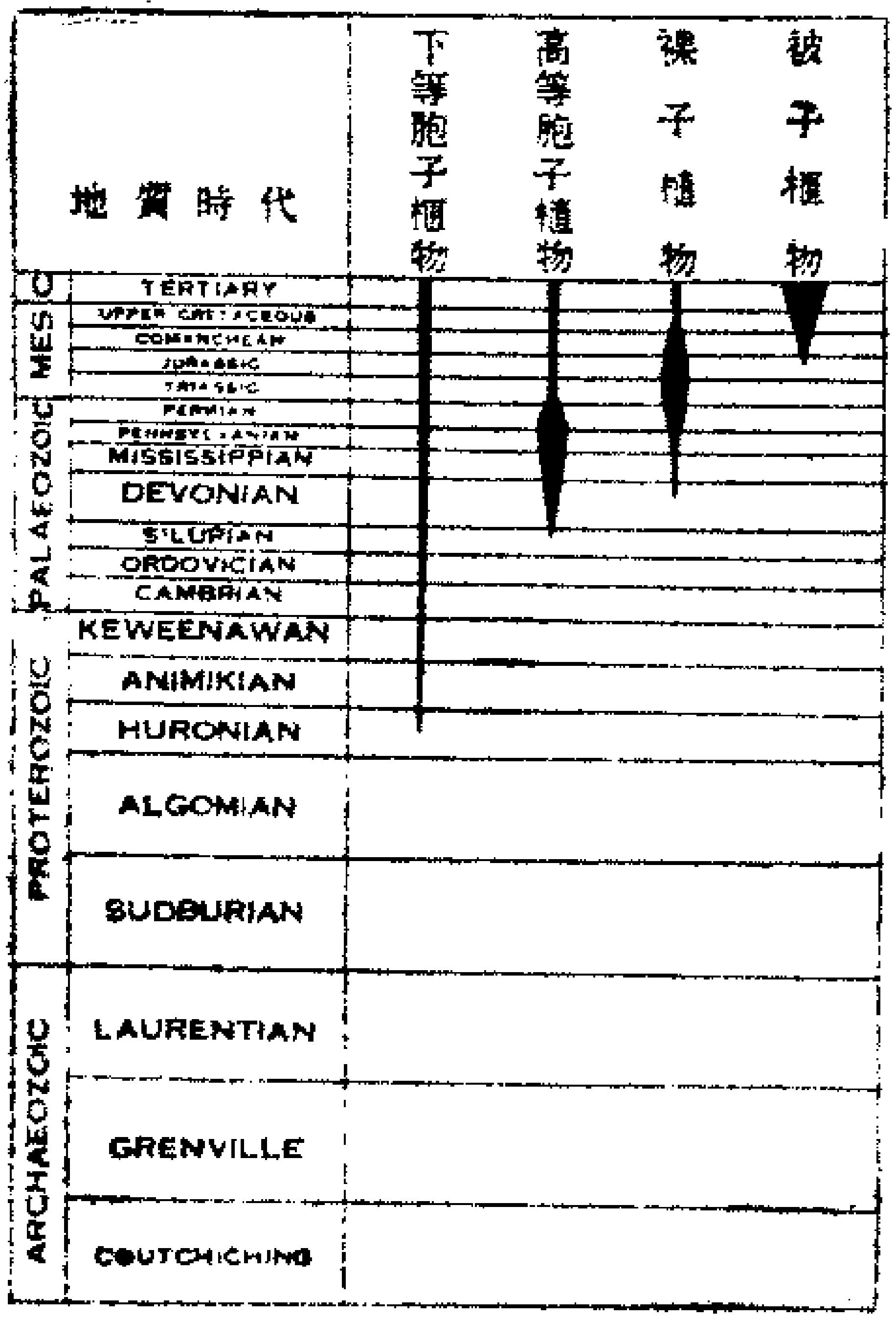
陸生植物之起源及最古之陸生植物

張 珽

地球上之有生物,當在地殼冷却之後,自不待言.然此最初之生物,如何現出於地上乎?此誠極難解決之問題矣.林內 (C V Linne) 之上帝創造說,固荒誕無稽,而湯姆生 (Willian Thomson) 謂自他星球依附隕石落於地上,亦無根據.然則其較可信者,其爲多數學者所主張自無生物化成之說乎?據是說推之,現今跋扈地球上動植物之始祖生物,不過一構造至簡至單去蛋白質不遠之小塊耳,此至簡至單之原始生物,漸次進化,遂成爲細菌類及肉質動物.細菌類現出以後,無著大進步,僅生體制略優之藍藻類,藍藻類再進化生紅藻類而止,而肉質動物則不然,進而生變形菌類及鞭毛類,前者雖迄於現今,無甚變化,而後者生出以後,經種種變遷進化,發生種種生物羣.據一般學者之說,現今生息地球上之動植物,直接或間接,大都自此類演進而來者也.

通觀太古以來,生息地球上植物各類之地史的盛衰之跡,則如第一圖所示:自原生代 (Proterozoic era) 至奧陶紀, (Ordovician Period) 爲僅有下等植物之時代,自志留利亞紀 (Silurian period) 至二疊紀, (Permian period) 爲高等胞子植

物之時代,自三疊紀(Triassic period)至白堊紀,(Cretaceous period)爲裸子植物繁榮之時代,至於被子植物,始現於侏羅紀(Jurassic period)之末葉,迨白堊紀,分布漸廣,入第三紀,(Tertiary period)則大茂盛,至第四紀(Quarternary Period)之現代,種類益多,更達繁榮之域矣.



第一圖
各類植物之地史的發展圖
各地質時代區劃之大小比例其時代之長短而作
MES……Mesozoic　C……Cainozoic

據學者之推測:原始生物最初出現之地,乃在海底泥線附近所堆積岩石破碎沈澱之中,因高熱及其他適當條件,蛋白質之小塊,變爲有生命之原形質.依是說觀之,海洋乃生物發祥之地,生物無論動植,當初皆生水中,後方移至陸上,可知也.又觀於最古之生物化石,皆屬海產,現代生存生物之下等者,均爲水生,益可無疑義矣.

生物無論動植,當初既皆水生,則陸生植物,必由水生植

物變化而來,無待論矣.考陸生植物之始生,當在古生代之初,其由水生變爲陸生之原因,想係着生岩石之海藻,因地體變動,曝露於陸上,其形態與構造,因環境變化亦隨之變化,而能適應陸上之生活,遂漸化爲陸草,是爲陸生植物之起源.如此偉大變化,在植物進化史上,可稱爲空前絕後之變化也.

上述陸生植物之起源,雖屬推測之說,然考諸現今植物,類似此現象者,亦嘗有之,例如杏銀藻:(Ricciocarpus natans)原爲浮游水面之植物,若晴天繼續,其所棲息之水,蒸發乾涸,則植物體匍匐泥面,生出假根,伸入泥中,吸收水分,葉狀莖之表面,發生角皮,以防範水分之蒸發,形態與構造,居然成爲一陸生植物矣.據此實例觀之,水生植物化爲陸生植物,乃屬可能之事.然則陸生植物之起源,歸之於海藻化成,亦信而有徵矣.

陸生植物,由海藻化成,既如上述.然而由何種海藻化成乎?又最初生出之陸生植物,爲何如植物乎?此亦吾人極欲研究之問題也.通觀現代之植物界,自分生植物以迄紅藻植物,皆棲息水中或潤濕之處,而陸生植物,以苔蘚類爲最下等,故就現代生存植物而言,苔蘚類爲出現地球上最早之陸生植物也.就植物之系統考之,苔蘚類乃自綠藻類降下而來,有種種事實,足爲憑證:例如苔蘚之有性世代(Sexual Generation)植物體,雖生於陸地,然性好陰濕,且授精之

際必須藉雨水之助力,此皆表示其祖先傳來之水生性質.又如胞子發芽所生之原絲體,(Porotonema) 構造及形態,與綠藻植物之絲藻類 (Confervales) 極相類似,以個體發生史乃反覆其系統的發生史之原則律之,亦可證明苔蘚乃由綠藻進化而成者也.

苔蘚植物之發育史上,最可特記者,厥爲有性與無性之世代交迭,(Alternation of Generation)此現象亦可爲苔蘚乃由水生植物進化而來之一證.夫世代交迭,綠藻及其他藻類雖亦有之,但其有性世代與無性世代(Asexual Generation)之形狀,完全相同,蓋其兩世代同爲生育海中,在同一環境之下,無惹起形態上差異之動機故也.而苔蘚適與此相反,兩世代之形狀,全然不同,試推測其不同之起因,乃係由水棲變爲陸生所惹起,即當其祖先由水中遷移陸上之際,因適應陸上生活,形態上雖發生極大變化,而原有水中生活之適應形態亦未能完全脫淨,此兩世代植物之形態所以不同.申言之:有性世代植物,尤保存祖先傳來之水生形質,無性世代植物,則適應新環境,全爲陸生之形態.茲以地錢爲例述之:通常所見地錢之葉狀體,爲有性世代,匍匐地面,性嗜陰濕,且授精之際,必需雨水,便精蟲游泳,以達雌器,故授精之前,雌器托 (Female receptacle) 柄部極短,殆與葉狀體相接,藉以接近地面,俾多得水分,迨受精之後,柄部迅速伸長,使無性世代之蒴胞,(Sporagonium) 高張於空中,俾胞子

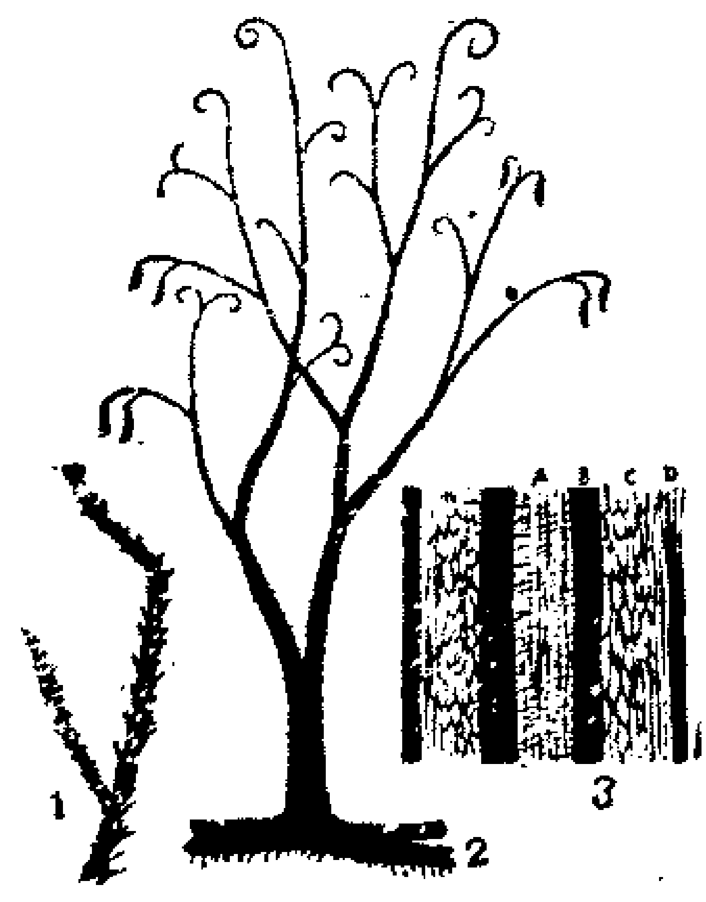
成熟後,蒴胞乾燥破裂,吐出胞子,飛散空氣之中,以廣分布.由上述觀之,其兩世代之性狀,判然不同,是以苔蘚之世代交迭,可視爲能堪水陸兩種生活之適應, Bower 氏錫以兩棲的交迭 (Amphibious alternation of generations) 之名,良有以也.

茲再就苔蘚植物與羊齒植物有性無性兩世代之發育狀態,比較之:苔蘚兩世代之情形,觀於上述地錢,已可知其大概,卽有性世代發育充分,通常所呼爲苔蘚者,實爲此世代.至於無性世代,形態簡單,不過一胞子囊耳.而羊齒植物則與此相反,有性世代植物,極其微小,稱曰扁平體,(Prothallium)雖有假根,而無莖葉之分化.無性世代植物,體制複雜,具根莖葉諸器官,有極完備之維管束,且有時莖幹偉大,狀如喬木,通常所呼爲羊齒者,乃無性世代也.要之,上述世代交迭,由於植物自水棲轉爲陸生之變遷所惹起,彼有性世代,具有適應水中生活之體制,無性世代,具有適應陸上生活之體制,植物漸次進化,其陸上生活適應形態,隨之發展,而具有適應水中生活形態之有性世代,則愈退化,此勢所必然也.羊齒之無性世代,較苔蘚爲發達,有性世代,較苔蘚爲退化者,職是之故,更進而裸子植物,而被子植物,其有性世代愈萎縮退化,終生潛伏於無性世代體內,比之羊齒之有性世代,猶能獨立生活者,又有霄壤之差矣.

據上所述,苔蘚由綠藻進化而來,可無疑義.但自植物系

統的進化揣測之,苔蘚似非直接自綠藻生出,位於綠藻與苔蘚之間,應尙有一羣較苔蘚稍簡單之陸生植物,先苔蘚出現於地球,而爲苔蘚之近祖,綠藻乃苔蘚之遠祖也.惜乎此一羣陸生植物,業已絕滅,全無孑遺,吾人不復能目擊之,爲系統的進化研究上之材料,斯爲缺感耳!

太古以來,棲息地球上之一切生物,若均能成爲化石,保存於地層之中,則研究系統的進化,極爲便利.然而實際不能如斯,生於古代之生物,其體之組織,不適成爲化石,縱有偶然成爲化石者,古代地層,其後不知經幾許變動,亦不能保存至今.不但苔蘚近祖之陸生植物,不獲成爲化石,卽苔蘚類之遺跡,亦渺焉而不可尋,實際吾人所可目擊之最古陸生植物,惟羊齒類耳,現今所知最古之陸生植物,厥爲下等羊齒植物之 Psilophyton Hedei Halle,(第二圖之1)係一九二〇年瑞典 T. G. Halle 博士,於哥德蘭 (Gotland) 地方志留利亞紀上部發見之.志留利亞紀所見之陸生植物,雖僅此一種,而入次代之泥



第二圖

1. Psilophyton hedei halle.
2. P. princeps Dawson
3. 同上莖之縱斷面(擴大)
A.木質部B.韌皮部C.內皮層D.外皮層

盆紀,則有多數種類產生.所可注意者,最古陸生動物蠍(Scorpion)之化石,亦發見於志留利亞紀.又繁盛於中世代三疊侏羅等紀之菊石類,(Ammonoidea)亦始生於此時.迨至末葉,復產出最古脊椎動物之淡水產甲冑魚,而筆石類,(Graptolites)則於此際完全絕滅.故志留利亞紀不僅爲最古陸生植物發見之時代,而動物之變化,亦極顯著也.

通觀泥盆紀植物之變遷,可大別之爲下中部泥盆世之Psilophyton Flora與上部泥盆世之Archaeopteris Flora,前者爲下等羊齒植物,後者爲有名石炭紀植物羣之先驅,當此時代,地球表面,初爲森林所包被,一碧無際,呈以前未有之壯觀,故自中部泥盆世至上部泥盆世之間,植物之變化,在植物進化史上,除前述海藻化爲陸草空前絕後之大變遷外,當推此時代之變化,爲最偉大也.

泥盆紀陸生植物,最初發見者,爲一八四七年H. Miller氏,於英國蘇格蘭(Scotland)得一植物化石,記載於氏所著Footprints of Creater第一版中,此植物既類古留太木,(Cordaites)而構造又與石松類相似,一八七〇年MaC-Nab氏,命之以Palaeopitys Milleri M' Nab.之名.後一八五九年,W. Dawson氏,於加拿大泥盆地層內,又發見名爲Psilophyton Princeps Dawson之植物,(第二圖之2)作文詳論其形態及分類上地位,而世人均漠視之,未有加以注意者.迨至一九一七年,R. Kidston及W. H. Lang兩氏,發表論文,記述蘇格蘭Rhynie之中

部泥盆層中,有 Rhynia, Hornea, Asteroxylon 三屬之最下等羊齒植物,其論文凡五篇,研究周密,記述詳盡,引起世人之注意.嗣後泥盆紀植物之研究,遂有長足之進展,如 R. Krausel 氏及 H. Weyland 氏之中央歐羅巴泥盆紀植物之研究, W. Goldring 氏之北美合衆國東部泥盆紀植物之研究, T. G. Halle 氏之挪威泥盆紀植物之研究,諸論文繼續刊行,吾人關於此紀植物之知識,益大進步,終至羊齒植物(Pteridophyta)門中添設古松葉蘭 (Psilophytales) 之一新綱焉.

現今於泥盆紀各部所發見植物種類,已屬不少,茲揭其名錄於次:

第一　古松葉蘭類 (Psilophytales)

Horneaceae.

Hornea, Sporogonites.

Rhyniaceae,

Rhynia, Loganella, Hicklingia, Haliserites, Zosterophyllum.

Pseudosporochnaceae,

Pseudosporochnus, Hostimella.

Psilophytaceae.

Psilophyton Arthrostigma, Dawsonites.

Asteroxylaceae.

Asteroxylon, Thursophyton.

第二　鱗木類 (Lepidophytales)

Protolepidodendron, Barrandeina, Leptophloen, Cyclostigma (Bothrodendron), Dictyodendron, Lepidodendron Nothum.

第三　木賊類 (Arthrophytales)

Hyenia, Calamophyton, Pseudobornia, Sphenophyllum, Asterocalamites.

第四　羊齒類似植物 (Fern Allies)

Sphenopteridium, Rhacopteris, Aphyllopteris, Aneurophyton, Archaeopteris, Broeggeria, Ptilophyton, Spiropteris, Milleria, Psygmophyllum, Asteropteris (初生羊齒), Clepsydropsio (初生羊齒), Sphenopteris, Triphyllopteris, Cephalopteris, Psaronius (觀音座蓮科)

第五　羊齒狀種子植物 (Pteridospermophyta)

Cladoxylon, Pietzchia, Kalymma, Eospermatopteris, Calamopitys,

第六　裸子植物 (Gymnospermae)

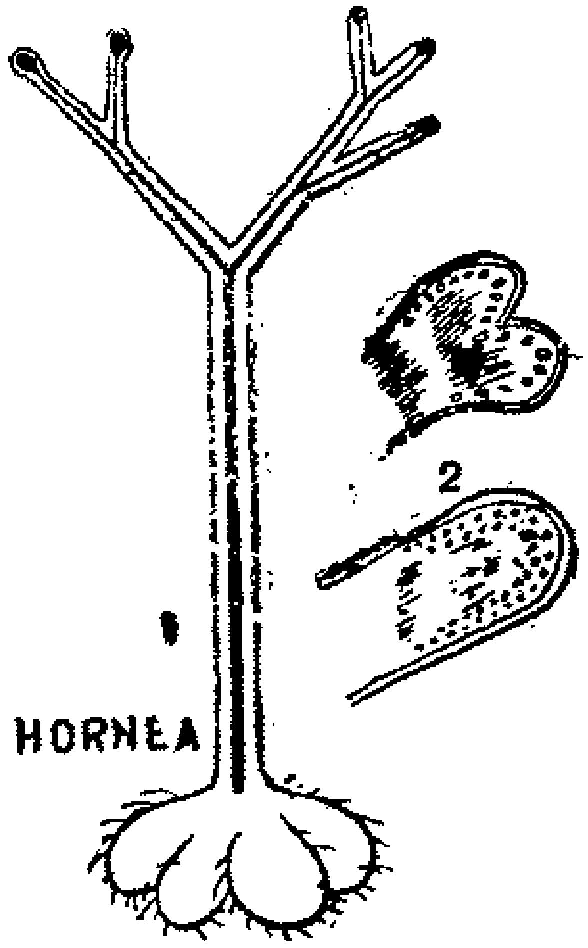
Palaeopitys, Callixylon, Dadoxylon (Araucarioxylon).

上列各植物,非謂泥盆紀各部悉含有之,由其種類不同,產生之時期亦異,下部泥盆世唯有古松葉蘭,其他種類,至中部有少數現出,迨達上部,始漸繁多,其中最多者,首推Archaeopteris.茲擇其主要者,詳記之:

(一) Hornea

此植物之化石,含於中部泥盆世.一九一三年,地質學者

Mackie 博士,於英國 Scotland, Aberdeenshir, Rhynie 等處之舊赤砂岩系中掘得之.經古生植物學者 Kidston, 及 Lany 兩氏,自一九一七年至一九二一年,亘五年之久之研究,其形態與構造,乃大明瞭.第三圖所繪,爲其全形,無根無葉,地下部有掌狀分裂之根莖,埋於泥炭堆積物中,由柔軟細胞而成,上生多數假根.莖高十五糎,直徑二糎,直立,而呈圓柱狀,上部叉狀分歧,中央有維管束,維管束之構造,木質部居中心,韌皮部在外圍,導管具不規則之螺旋紋或網紋,胞子囊(第三圖之2)由小枝先端部變化而成,往往叉狀分裂,囊壁頗厚,具有中軸,而不裂開.胞子被角質之皮膜,四個相集而爲一組。



第三圖
1.植物體想像復原圖(縮小)
2.胞子囊縱斷圖(擴大)

據上述之形態及構造觀之,最可注意者,爲胞子囊具有中軸之一點,此與蘚類及苔類之角苔相同,其爲下等羊齒植物明矣.此外體制簡單,與通常體相似,及生於甚古之地質時代諸點,亦皆表示爲最原始的羊齒植物也.

(二) Sporogonites

此植物之化石,爲 T. G. Halle 博士,於一九一六年,得之

於挪威之下部泥盆世地層中.氏爲瑞典首部斯德哥爾摩(Stockholm)國立博物館古生植物學主任,故此化石,現陳列於該館內.惟所得者,僅胞子囊,其他部分,尙屬不明.囊有柄,呈倒卵狀,先端圓形,至下部則漸狹,長六粍乃至九粍,直徑二粍乃至四粍,所可異者,胞子囊下半部充實組織,而不生胞子,上半部外面,有由數層細胞而成之膜壁,中央有中軸,壁與軸之間,爲胞子形成部.胞子被角質之皮膜,四個相集而爲一組,此與前種相同.

此植物與前記 Hornea, 同爲最原始的羊齒植物,與苔蘚植物類似之點頗多,故此等化石之發見,使從來苔蘚植物與羊齒植物間之空隙,大爲縮小,於植物系統的進化研究上,裨益不少也.

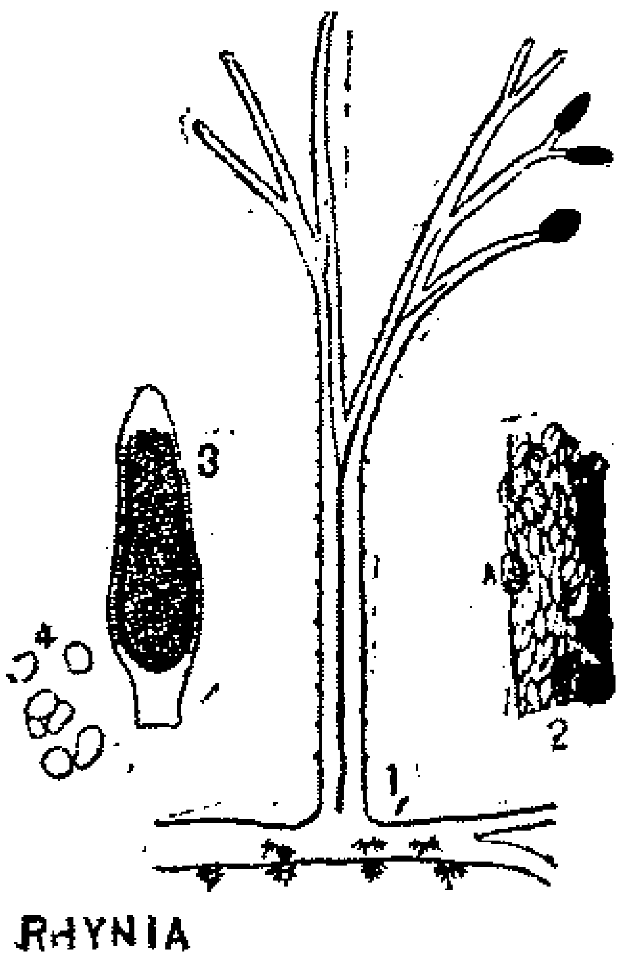
（三） Rhynia

此植物與 Hornea 在一地方發見.植物體之全形,如第四圖所繪,無葉無根,地下莖匍匐地中,處處生出單細胞之假根,莖自地下莖發生,直立,而爲叉形分歧,高八寸乃至一尺,粗一粍乃至六粍,表皮角質,而具氣孔,（第五圖）莖之表面,通常雖平滑,然古老部分,則生小瘤狀突起,(第四圖之2)此突起非不發育之葉,乃不定枝也,故其上往往生出假根,（第六圖）脫落後,可營無性蕃殖.根莖及莖,均有中心柱,木質部居中央,由環紋導管而成,韌皮部包於其周圍,皮層爲肉質,外皮層似爲同化組織.胞子囊（第四圖之3）生於

小枝之末端,呈圓柱形,長三粍乃至一二粍,厚一.五粍乃至四粍,不具中軸,外壁頗厚,胞子(第四圖之4)有角質皮膜,個個獨立,或四個相集爲一組.

第五圖
Rhynia 氣孔(擴大)

第六圖
Rhynia
P. 瘤狀突起縱斷圖(擴大)
R.假根 (擴大)



第四圖
1. 植物體復原圖(縮小)
2. 莖之一部(擴大)
3. 胞子囊之縱斷圖(擴大)
4. 胞子(擴大)

此植物有呼吸空氣之氣孔,及通導水分之組織,胞子被角皮,抵抗力頗大,其爲陸生植物,極爲明顯.

(四) Loganella

此植物之化石,含於下部泥盆世地層之最上部.莖高五十糎,下部直徑約一糎,不生葉,表面有縱走徵細之條線,二叉分枝,但所分之枝,恆在一側,胞子囊尚未發見.據 Stolley

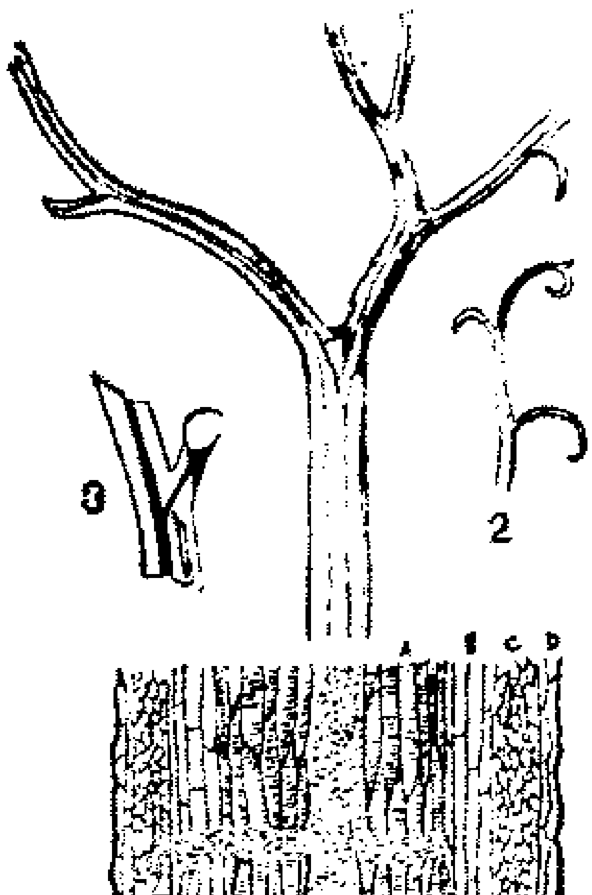
氏之說:此植物與 Dawson 氏之 Psilophyton robustus,恐係同一種類.

（五） Haliserites

此植物之化石,產於 Rhine 之下部泥盆地層中.莖徑大一粴,無葉,而爲叉狀分歧,中心柱之木質部,自階紋導管構成,胞子囊尙未發見.

（六） Pseudosporochnus

木本植物,產生於歐洲中部泥盆層.高六尺,莖之下端,膨大而呈鱗莖狀,直徑達二十粴,全體皆有中心柱,分枝繁密,狀若海藻,胞子囊生於小枝之末端,而呈叉狀.



HOSTIMELLA

第七圖
1. 莖之一部 2. 小嫩枝 3. 胞子囊 4. 莖之縱斷一部(擴大) A.木質部B.韌皮部C.皮層部 D.皮下層部

（七） Hostimella

據 R. Krausel 及 H. Weyland 兩氏之考查,此植物（第七圖）產於歐洲中下部泥盆層.莖叉狀分歧,先端之小嫩枝,常盤旋而成卷鬚狀,（第七圖之2）植物體之表面,雖平滑絕無突起,然往往有橫紋,且枝之分歧點,常有一圓形隆起體.中心柱（第七圖之4）木質部之導管爲階紋,但後生木質部,則

具卵圓形或圓形之孔紋,雖有韌皮部,而無篩管,皮層由柔膜組織而成,表面具有角皮,角皮下有由二層細胞而成之皮下層,髓及氣孔,均付缺如,胞子囊有中軸,生於小枝之先端.(第七圖之3)

(八) Psilophyton

此植物之化石,自一八五九年, Dawson 氏於加拿大下部泥盆層發見以後,在英吉利美利堅德意志比利時那威諸國之下部及中部泥盆地層中,常常掘得之.本屬之一種 P. Hedei, (第二圖之1)產於瑞典之上部志留利亞地層,爲現今所知最古之陸生植物,前已述之.凡此屬植物,(第二圖)概有匍匐之地下莖,由此發生高尺許細長之地上莖,叉狀分歧,小枝盤旋而成卷鬚狀,莖面有氣孔,且生與葉性質類似之刺狀物,但頂端附近之枝則無之.莖之解剖,雖不明瞭,而地下莖有中心柱,由木質部與韌皮部而成,(第二圖之3)導管概具階紋,胞子囊呈卵圓形,常成對綴於小枝之端.

(九) Arthrostigma

此植物與 Psilophyton 類似,亦產於下層泥盆層,莖直徑八分,往往分枝,表面有大形鈎狀之刺,內部有中心柱,胞子囊不詳.

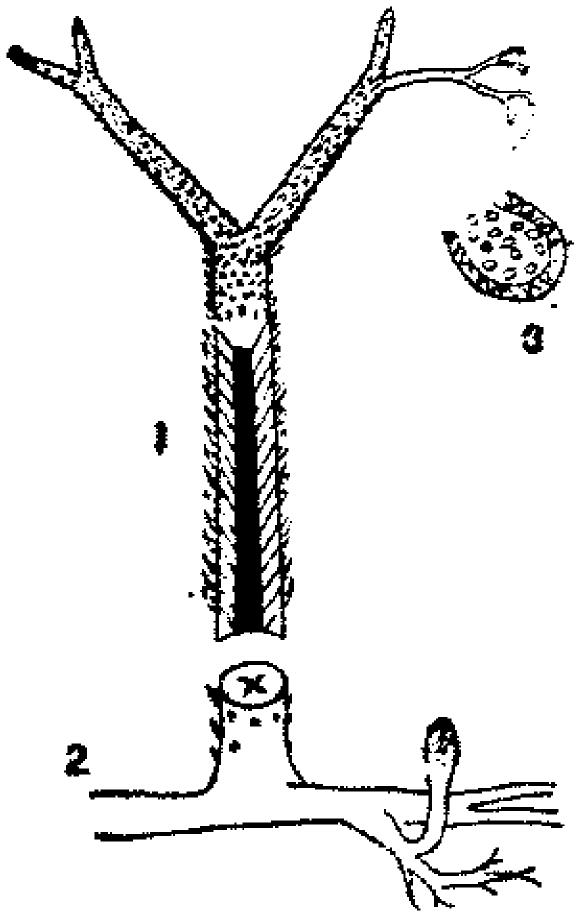
(十) Asteroxylon

此屬植物,習性及解剖的特徵,與石松類及松葉蘭類相似,胞子囊則與初生羊齒類 (Primofilices) 之 Zygopteridae 相

類.現今所知者,有下述二種:

1.　Asteroxylon Maackieri Kidst Et Lang

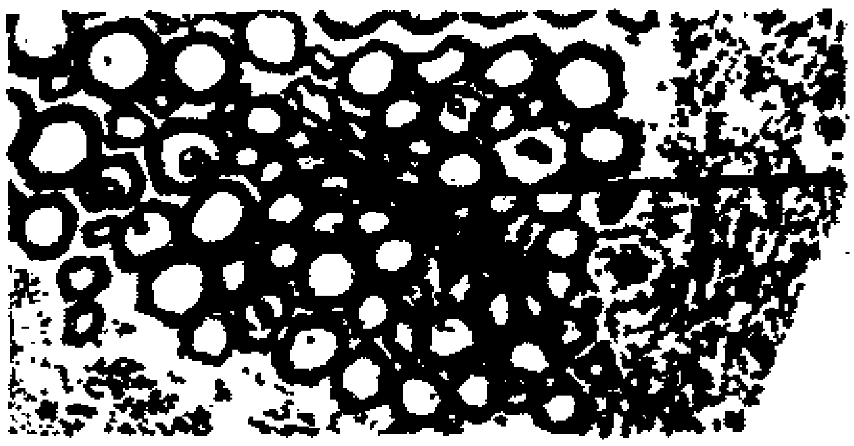
此植物化石,與 Hornea, Rhynia 等,同在蘇格蘭發見之.外觀與石松類相似,地下莖水平匍匐地中,(第八圖之2)無毛,亦無根,僅生根狀之枝.莖自地下莖生出,直立,高一尺,徑一糎,叉狀分枝,着生小單葉.(第八圖之1)地下莖有與 Rhynia 莖相似之簡單中心柱,莖之表皮有氣孔,皮層肉質,內含菌絲,木質部全由螺旋紋導管構成,範圍頗大,横斷面呈星芒狀,初生木質部在突出星芒之端,(第九圖)韌皮部位於木質部之周圍.葉爲線狀披針形,長五粍,由莖赴葉之維管束分枝,起自木質部星芒之端,僅達葉之基部而止.故葉內無葉脈.生胞子囊之枝,細長而無葉,叉狀分枝,胞子囊呈卵形,



ASTEROXYLON MACKIEI

第八圖

1.地上莖 2.地下莖與地上莖之下部 3.胞子囊



第九圖

Asteroxylon　木質部星芒之一片(擴大)

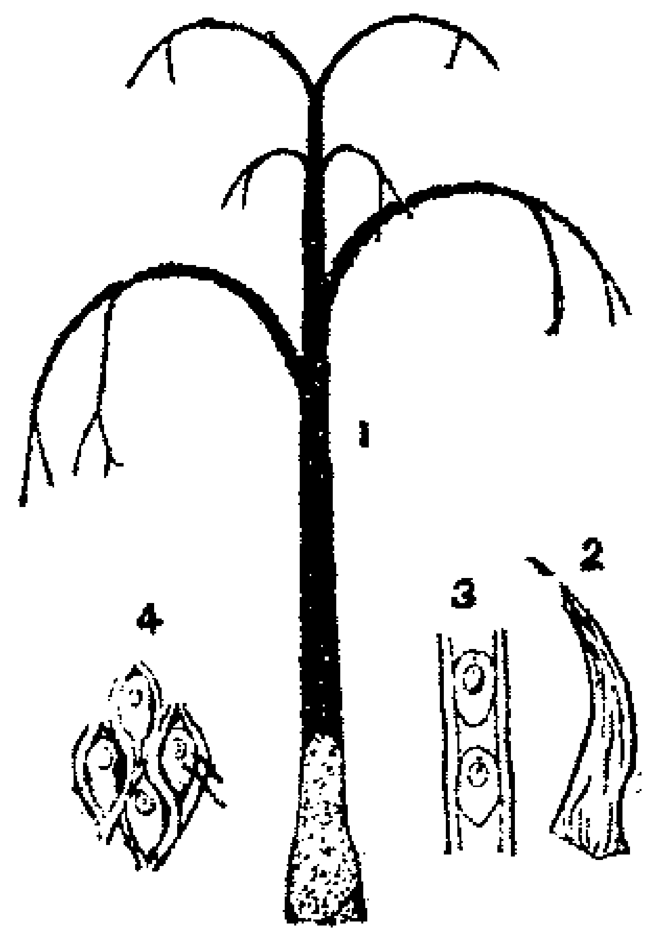
PX初生木質部

(第八圖之3)着生分枝之端,成熟則先端裂開,散出胞子,胞子或各個獨立,或四個爲一組.

就上述形態及構造,地下莖無根,葉無葉脈,導管悉爲螺旋紋諸點觀之,可知此植物,外貌雖類石松,而實爲下等之羊齒植物也.

2.　Asteroxylon elberfeldense Krausel Et Weyland

於德國中部泥盆層見之.較前種高大,葉至枝之上部漸狹細而成刺狀,更上則愈微小,不過一隆起點而已,木質部橫斷面呈星芒狀,中央有髓,然至上部,則斷面變爲圓形,髓部消失,上部之枝,細長平滑.叉狀分歧盤旋而成卷鬚狀,胞子囊與前種相似,前種發見之際,胞子囊與植物本體,離開存在,而本種則胞子囊綴於本體上,而掘得之.



第十圖
1.植物體復原圖(縮小)2.葉(縮小)3.下部之葉痕(縮小)4.上部葉痕(縮小)

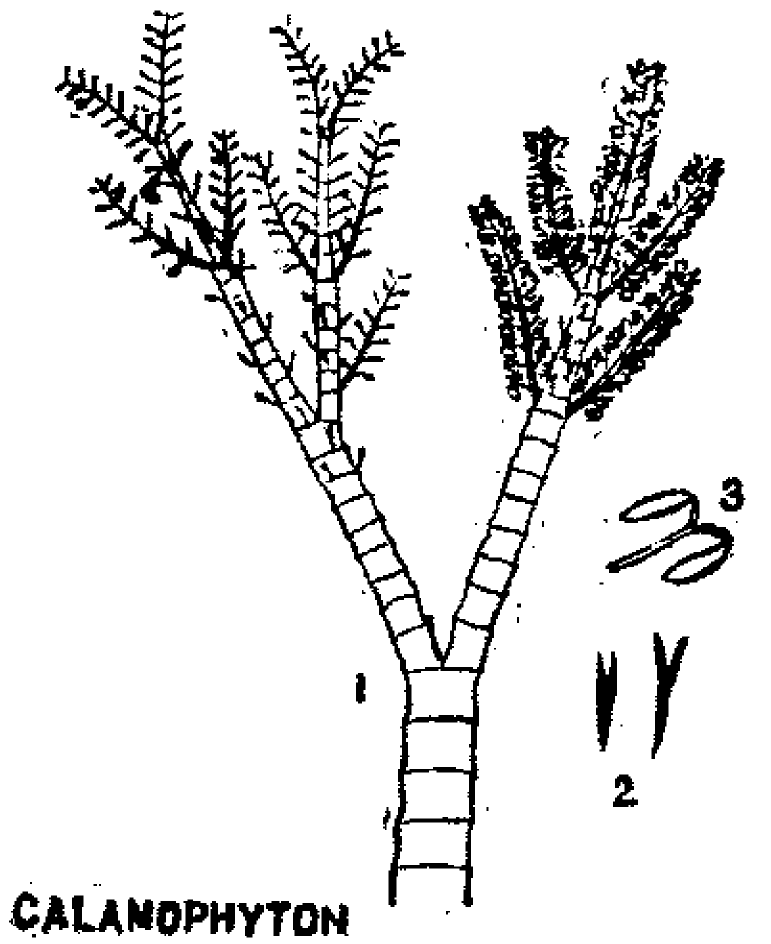
(十一) Protolepidodendron

此屬植物化石,產於英國北美那威中央歐羅巴及澳大利亞等處之中部泥盆層.爲石炭紀以前最高喬木之一,幹高三十五六尺,基部直徑一尺,枝之直徑亦達三寸.葉之形狀,因種

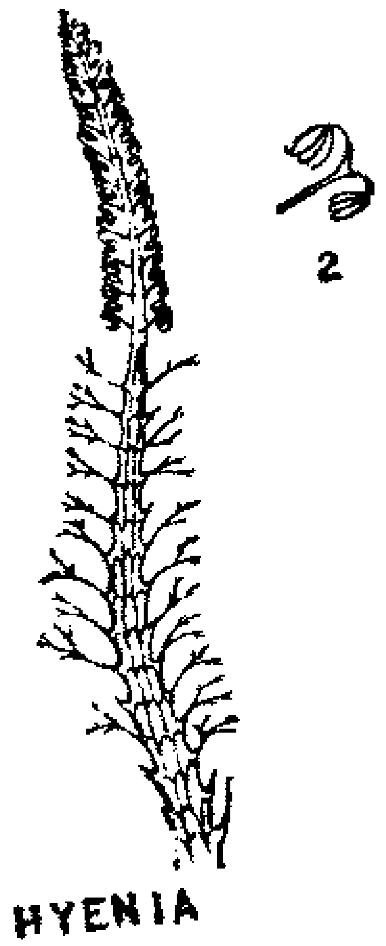
類而不同,Protolepidodendron Primaevum (第十圖) 與 P.Karsteini 之二種,呈披針形,先端尖銳,(第十圖之2)而 P. Scharyanum 與 P. australicum 之二種,則爲線狀,先端二裂,但無論何種之葉,其基部概肥大而呈圓錐狀,脫落後,殘留明顯之葉痕,葉痕之形狀,兼鱗木 (Lepidodendron) 型與封印木 (Sigillria) 型而有之,即在幹之下部者,排成縱列,爲封印木型, (第十圖之3)至上部,則排爲螺旋狀,斯屬鱗木型 (第十圖之4) 矣.

(十二) Hyenia

此植物化石,產於那威德意志等中部泥盆紀地層中,莖之節上有凹溝,但無凹溝者亦有之.每節輪生三四葉,葉具



第十二圖
1.植物體之一部2.葉3.胞子囊(縮小)



第十一圖
1.枝之一部2.胞子囊(縮小)

單脈,羽狀分裂,胞子囊柄輪生於枝之上部,排列成總狀,無苞,叉狀分枝,各小枝上,着生三四個胞子囊.(第十一圖)

(十三) Calamophyton

此植物化石,亦產於德意志中部泥盆紀地層.幹直立,叉狀分枝,節及節間極爲明顯,(第十二圖之1)維管束之橫斷面,雖如楔葉木,(Sphenophyllum)呈三角形,但無髓部.葉輪生,叉狀二裂,(第十二圖之2)惟枝之上部有之,至於古老部分幹上,則變爲螺旋狀排列之刺.胞子囊柄,輪生於上部小枝,總狀排列,無苞,叉狀分爲二枝,先端附着細長形之胞子囊.(第十二圖之3)

Krausel 與 Weyland 兩氏,特設一目,名曰原初關節植物類,(Protoarticulatae)將前記 Hyenia 及本種隸屬之.

(十四) Aneurophyton

此植物化石,亦存在德意志中部泥盆紀地層中.葉具木

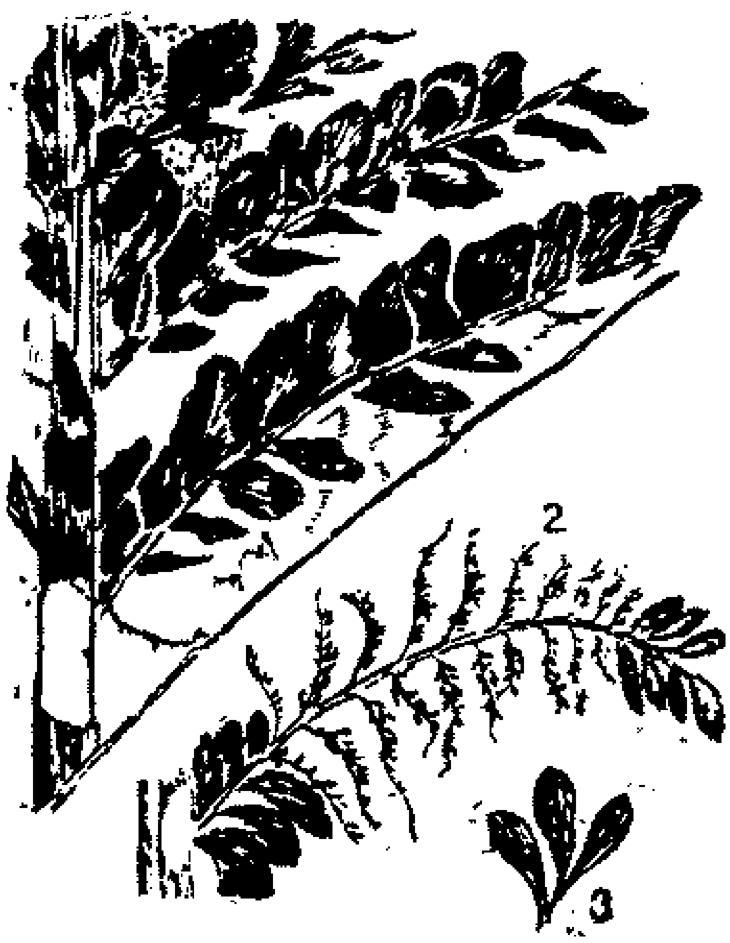
第十四圖
Aneurophyton 胞子葉之一部

第十三圖
Aneurophyton 葉狀體之一部

生羊齒複葉之習性,爲繁密分歧之體,(第十三圖)且有營養葉與胞子葉(第十四圖)之分,後者生有柄而無環帶之胞子囊.

此植物,頗與 Eospermatophyton 類似,然究屬木生羊齒,抑爲羊齒狀種子植物,雖尙不明確,然其盛行分歧之葉狀體,爲真正複葉之起源,似可斷言也.

(十五) Archaeopteris



第十五圖
1.葉之一部2.胞子葉之一部
3,胞子囊(縮小)

本屬植物,分布頗廣,地球上各處上部泥盆世地層多有之.葉(第十五圖)頗大,有時竟長達三尺,爲二回羽狀複葉,小葉全緣,或有齒牙,又間或分裂,葉脈明顯,爲一回或二回叉狀分歧,胞子囊(第十五圖之3)形狀甚大,着生於營養葉之一部,(第十五圖之2)一個獨生,或二三個羣生於一處.

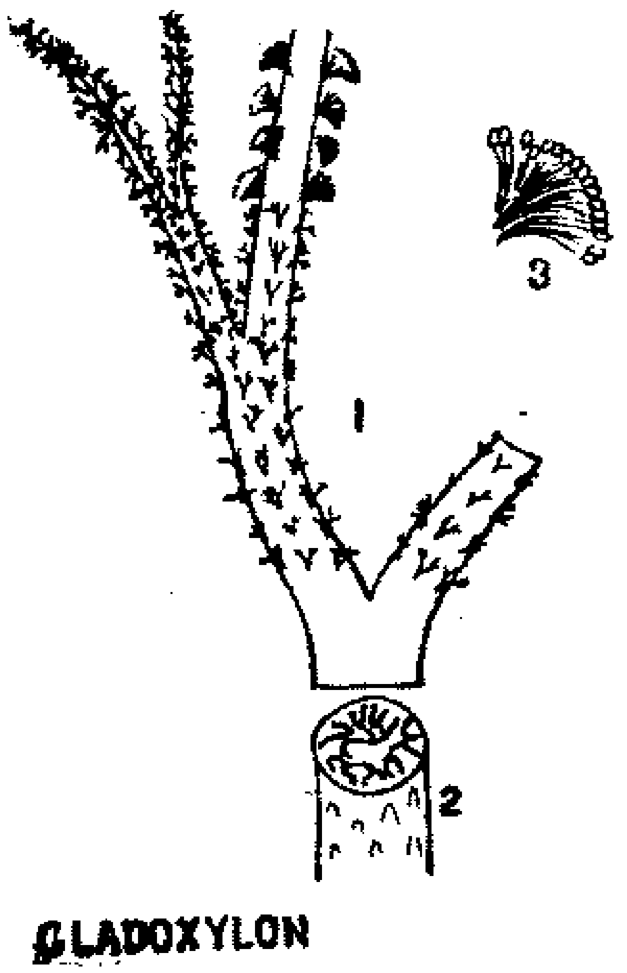
(十六) Milleria

此植物化石,於英國蘇格蘭中部泥盆紀赤砂岩地層內發見之,爲近似 Aneurophyton 及 Hostimella 之植物,具有與 Aneurophyton 相同之羊齒狀葉

之分歧體,有表裏區別,其最末端者,略呈羽狀裂片葉之觀.胞子囊生於枝之上部,複總狀排列.

（十七） Cladoxylon

此爲自中部泥盆紀末葉迄石炭紀初期繁茂之羊齒狀種子植物.莖（第十六圖之 1,2）堅硬而直立,叉狀分歧,有複雜分歧之中心柱.葉微小,掌狀深裂,無葉脈,其裂片復叉狀裂開,最上部小枝上着生之葉,形狀較大,而有明瞭之葉柄,反之,在莖幹下部者,質厚而短,漸至下部則漸小,終至不



第十七圖
1.植物體復原圖 2.皮層之一部
3.種子(縮小)

第十六圖
1.植物體之一部 2.莖部橫斷
3.胞子葉(縮小)

明.胞子葉全形呈扇狀,(第十六圖之3)有葉脈,亦掌狀分裂,胞子囊着生於各裂片之端.

(十八) Eospermatopteris

此植物化石,產於美國紐約洲季爾波亞(Gilboa)村之上部泥盆世地層,乃生育海岸低濕地附近之羊齒狀種子植物也.莖幹(第十七圖)高三十尺乃至四十尺,直徑一尺乃至三尺五寸,幹之基部特別肥大,樹皮縱裂,或有縱裂之凹帶,當其生活之時,莖幹外面,蔽有自表皮生出之鱗片或纖維狀物.莖之中心部,通常中空,皮層外部厚一寸乃至七寸,其構造與 Lyginopteris Heterangium 等相似,有網狀或幷行之厚膜組織束,散布其間,自其橫斷面觀之,此等厚膜組織束,或爲不規則星散之點,或爲不規則粗短之條,迫近幹之中心,則排列成爲環狀,此則與 Lyginopteris, Heterangium 等大異之點也.根頗長,不分枝,自幹之基部周圍放射狀生出,葉爲三回羽狀複葉,長六尺乃至九尺,小葉片二裂,其裂片略向內彎曲,葉柄細長,基部粗大,脫落後殘留葉痕.胞子葉由小葉片變形而成,種子(第十七圖之3)通常兩個,成對生於葉片之先端,亦有時二三對簇生於一處,呈卵圓形,直徑二分,被有殼斗,與 Lygenopteris Oldhamiana 之種子酷似,藥胞呈卵圓形漏斗形或皿形,附着分歧之柄上,而生於胞子葉下面.

以上所述泥盆紀各種陸生植物中,以古松葉蘭類,在羊齒植物羣系統上,居最下等之地位,亦卽吾現今所得目擊

之陸生植物最古之種類也.其中尤以 Hornea, Rhynia 等,形態最爲簡單,無根無葉,與通長體(Thallus)相似,一見恰如藻類然試考其構造,內部有維管束,表皮具角皮,且有氣孔,其非藻類,而爲生育陸地之羊齒植物,彰彰明矣.此等體制簡單與藻類類似之羊齒植物,其卽爲藻類化成之最初陸生植物乎?則又不然也.蓋植物形態簡單之由來,有二:一係系統上老者,形態原本簡單,一因適應環境之結果,由複雜而退化成簡單. Hornea Rhynia 等形態簡單之原因,就種種之點推測之,似屬於後者,試言之:此等植物,皆生育於泥炭原野,其土壤富於酸性,而缺乏水分,非普通土地可比,植物欲適應此特殊環境,形態不得變爲簡單.又就泥盆紀一般植物之狀態觀之,如 Palaeopitys, Dadoxylon Callixylon 等非常進步之種類,(此等屬裸子植物,後生木質部之假導管,具有緣孔.)亦生息於此時代,此外中部泥盆世之 Hyenia, Aneurophyton Calamophyton, Cladoxylon,上部泥盆世之 Protolepidodendron, Eospermatopteris, Archaeopteris, Pseudobornia, 形態均甚進步,可知泥盆紀一般植物,皆有相當進化之程度,則 Hornea, Rhynia 等體制之簡單,因適應環境狀態而退化,不難推之.再自其構造上論之,有維管束,有角皮,有氣孔,胞子且被角皮,甫自海藻化成之最初陸生植物,安得有如斯完備之陸上生活適應形態.則其非最初之陸生植物,更無俟多言矣.

近時 Krausel 氏,自德國前寒武利亞紀 (Precambrian period)

地層發見名爲 Archaeoxylon 之古留太木系植物之化石片,又於北米威斯康星(Wisconsin)安剔膾阿(Ontario)等處之前寒武利亞紀掘得煤炭,據此等事實觀之,陸生植物之起源,當遠在古生代之初,或更較遠亦未可知.然而吾人現今關於古生陸生植物之知識,不過如上所述而已,如此後比現在所知最古陸生植物更古種類之化石,能繼續發見,則對於陸生植物之起源及始生年代,或有較確切之證明.然在是等化石尤未發見之今日,亦徒止於理論而已.

古 ; 葉蘭類係一九一七年 Kidston 及 Lang 兩氏所新創設者.下分五五科,茲將各科之特徵,列記於下以資參考.

古松葉蘭類 (Prilophytales)

自上部志留利亞紀迄中部泥盆紀生育之植物,植物體具原生中心柱,(Protosteles) 胞子囊生於上部小枝之先端.

1. Horneaceae

植物體叉狀分歧,無葉,表面有氣孔,地下有原塊體 (Protocorm) 狀之根莖,上生假根,胞子囊爲小枝先端部變成,往往二裂,囊壁頗厚,具中軸而不裂開.

2. Rhyniaceae

地下莖匍匐地中,生假根,地上莖自地下莖生出,直立而爲叉狀分枝,無葉,有氣孔,胞子囊生於小枝先端,不具中軸,囊壁稍厚,而不裂開.

3. Pseudosporochnaceae

木本植物,無葉,莖之上部有繁密分枝之樹冠,基部肥大而呈鱗莖狀,胞子囊生於小枝先端,往往分叉.

4. Psilophytaceae

自匍匐地下莖生直立而叉狀分歧之地上莖,莖之下部表面雖有小刺,而上部枝上則無之,嫩枝常盤旋成捲纈狀,胞子囊成對着於小枝之端。

5. Asteroxylaceae

地下莖叉狀分歧,匍匐地中,而不生根,自地下莖所生之地上莖,直立,叉狀分歧,密生鱗片狀之葉,生胞子囊之枝,亦叉狀分歧,但不生葉,胞子囊着生分枝之端,壁頗厚,成熟則先端部裂開。

最近之法國生物學界

何春喬

小引——巴特容——人工的處女生殖——多精入卵的實驗

小引

學術是沒有國界的.但英人多主互爭,俄人獨倡互助,達爾文的學說,已風行於全歐,法人猶固守他們祖宗拉馬克的主義以自豪.生物科學獨有國界歟?曰,不必有國界;但思想之發展,必多少受其環境之支配.地域不同,生物的分布亦不同,生活的表現亦不同,於是影響於生物學者的思想方面亦不盡同.克魯泡特金解釋俄人多主互助的原因道:"俄國動物學者容易接收克斯拉(Kessler曾任聖彼得堡大學校長,力主互助)的主張,乃自然之理.因為俄國學者差不多都有研究地方廣漠人跡不到的北亞細亞東俄羅斯等處動物的機會;凡一經到此等地方研究過的人,便沒有不容納互助的見解的.………克斯拉的學說,何以獨為俄國學者所歡迎,而為西歐達爾文派所漠視,理由卽在於此."本此,我遂敢於生物學界之上,冠上法國兩個字樣.亦且法國生物學界,最為我國人所隔膜.而我又因曾受法國

的教育,對於法國生物學界,知之較詳.國人苟各就其所從學之國,介紹其學術而匯集之,是亦一國際的生物學也.

謹擬選擇最近法國著名生物學者若干人,分別介紹其研究與學說,而以我親炙其門下之巴特容(Batai'lon)先生冠其篇.

I. 巴特容(E. Bataillon)

巴特容先生現任法國蒙伯里野(Monpelliar)大學教授.蓋已六十餘歲精神矍鑠之老翁.平生專事研究,不喜做教科書式之編著.故雖名滿全歐,尚無成册之書,流傳於世.其供獻於學術界者,僅散見於各雜誌上之研究論文十餘篇而已.本篇乃根據巴特容先生於1924—1925年口授講義,旁參 Delage et Goldsmith-La parthénogénèse naturelle et expérimentale, Brachet-L'œuf et les facteurs de l'ontogénèse, G. Matisse-Le Mouvement scientifique Contemporaim 及 Caullery-Les Problems de la sexualiti 等書而成.

巴特容研究範圍極狹而深.本篇分爲兩部分介紹.其一,爲處女生殖,其二,爲多精入卵,但兩者仍有聯帶的關係.

一, 人工的處女生殖

雌體不用授精,所生的卵,仍能孵化成爲新的個體,便叫作處女生殖.處女生殖的現象,在下等動物,並不希罕,但都係自然的現象,叫作自然的處女生殖.後來美國學者 Lœb

氏及法國學者 Delage 氏等,能用人工方法,催進處女生殖。但他們所用的材料,都係下等動物如海膽海星等;此等動物,卽在自然界,亦每有處女生殖的事發生.不過應用人工方法,可以增加處女生殖的數目罷了.至於高等動物,如脊椎動物類,似決不能以人工代自然.巴特容多年苦心的研究,居然能使脊椎動物中如兩棲類魚類等,亦能以人工的方法,促使處女生殖.此等動物的卵,尋常如不授精,決不發展.巴特容試驗的成功,卽以人工代替精子之成功.精子之在生物界,爲最神祕不可思議者之一;所以人工的處女生殖方法之完成,宇宙間之神秘,爲之頓減.

讀者將想像這個精子的代替者,必亦非常複雜,未可以常物方比.其實代替最神奇之精子者,不料竟係最簡單之物;卽以任何之細針,一刺傷卵子爲已足.卵子一旦被刺,卽開始其個體發展之程序:卵細胞由一而分而二,由二而四…………,一如精子鑽入後引起之現象.

巴特容想到這個方法,並非偶然.他從前有一次實驗,用亞爾伯士水蜥 (Triton alpestris) 的精子,來令授精於蘆蟆 (Bufo Calamita) 的卵子.這兩種動物,一屬有尾類,一屬無尾類,親緣相差極遠;但卵子却能發展.他仔細考察,精核並不曾真正與卵核結合.有些精子的頭,僅鑽穿卵黃膜,卵子便開始分裂起來.他於是想到:在這個試驗之中,精子給與卵子發展的原因,似僅僅一個機械的刺激.卵子一受刺激,必

有所收縮;收縮的結果,必有某種溶液之擠出.卽此便足以變更卵子內部化學之平衡.於是一個靜止的潛伏的窒悶的卵子,不免大吸空氣,如嬰兒之墮地第一聲,開始一個新的生命.本着這個理想,試以針頭代精頭,居然理想事實化!

不幸理想實現之中,仍有不滿人意之處.卽卵子之受刺發展者,數固不少,其永遠不動者,數仍極多.卽已開始活動之卵,又復中途停頓.達到"原腸期"(Gastrulation)者,不過占全卵十分之一.到了"耶考氏栓期"(Bouchon d' Eker)者,更寥寥無幾.至於到了"襞褶之形成"(Formation des Plis)的時候,幾全體萎頓,無有存者,計凡九次實驗,達蝌蚪而死者不過三頭.

巴特容因想到:機械的刺激,雖足以喚醒卵子於沈悶之中;但使卵子得到正常之發展,必增加其他催促劑(Substance accelératrice)方爲有效.於是當刺傷卵子時,同時導入蛙的血球(假定所刺的是蛙卵),居然結果大佳.不用蛙血,而用其他動物的血,結果亦佳.例如巴特容從宰場取囘之馬血,用作催促劑,結果與用蛙血無異.但此處有當注意者:從宰場取囘之血,除去纖維靜止後,約分爲三層:赤血球層,白血球層,血清層.試以這三層分別使用,結果相差極大.

巴特容宣布其結果道:"用血清作催促劑,完全不發生效力.用赤血球作催促劑,至多亦不過百分之一爲有效;因爲赤血球中,有時不免雜一些白血球.至於白血球層,至少

有百分之七十五爲有效.我所以相信催促劑的作用,實在核中". 因爲血清裏面無細胞.赤血球雖係細胞而核久失,白赤球的核獨健在.蛙的赤血球尙有生活之核,所以用作催促劑,尙能發生效力.

核必有運動能力方爲有效.例如使用濃血,仍無效力.因爲濃汁內雖含有白血球,但業已死去,故仍失効.馬血加熱到攝氏四十六度,經過一小時之久,亦不能用作催促劑.如係活動之細胞,則不限動物,皆爲有効.例如取鼠的脾臟之汁,或與蛙親緣極遠之動物,如蠶蛾,如蝸牛等之生殖腺汁,皆極有効.

巴特容根據這個實驗,斷論授精的程序,可分三級:

第一級是使之活動(L'activation);

第二級是調節與催促 (La regulation-accélération);

第三級是雌雄核之結合(L'Amphimixie).

活動乃內部細微的變化,但亦有可以觀察者.卵子被刺活動之後,色素較多之一極即所謂動物極者,轉向上方.第二極體之形成,卵核之成熟分裂於是告畢.卵原核由周邊同到中心.卵球收縮;收縮之結果,有溶液之透出與水之滲入.灰色新月 (Croissant gris) 之出現,劃定了將來胎兒頭部之所在.

第二級核質之加入,其作用足以使卵子第一次分裂,非常平衡,此其調節的作用.同時還有觸媒的功效,使分裂原

動力之中心,卽所謂星狀的放射系統(Le système des irradiations astériennes)者,勢力加强與加速.

至於雌雄核之結合,從前的學者認爲授精最重要之條件,甚至認爲唯一之條件.在巴特容看來,雌雄核之結合,不過在遺傳學上有價值,對於授精作用之完成,並非必要之事.因爲根據人工的處女生殖之實驗,雖於刺卵時,同時導入核質;但導入之核質,必沒有與雌核結合之可能,而授精作用,亦能達於完成之境.所以巴特容論授精,活動,催促爲已足.

現在就我在巴特容實驗室中,依法實現處女生殖之手續,詳述於下,以備有志重試者之參考.

將雌蛙飼養到實驗室中,隔離雄蛙.必等到第二年,方爲妥適可用.次年春,卵子成熟了的時候,便將雌蛙殺死,取出體腔及輸卵管內成熟之卵.或不用殺却,由背部輕壓,亦可將卵子擠出.蛙卵上面,必有一層膠質包被,不便刺傷.必將膠質除去,方爲合用.巴特容叫這種除去膠質的卵爲裸卵(Des œufs nus)裸卵的取得法:將被有膠質之蛙卵,放到千分之8.5的衰化鉀(Cyanurs de Potassium)溶液裏面;經過三小時半到四小時,外面的膠質,便可以一齊溶解.巴特容因此又叫這種卵爲衰溶卵(des œufs au cyanure).以後又將這種卵繼續洗濯於千分之七的綠化鈉的溶液中,約經過一小時,便可取來使用.但要置放到這種溶液內,經過二十四小時,

也不妨事.衰潞卵最爲安全,卽令與精子接觸,精子亦無鑽入之可能,此亦最有趣之一點.此時卽塗少許蛙血或牛馬之血於卵面,最好塗天竺鼠脾臟之搾汁,塗過了之後,再用極細的玻璃針或白金絲刺卵,以入卵不得過直經之半爲度.不久便至少有三分之二的卵子,開始分裂.約到四十八小時之後,便有極規則的耶考氏栓出現.

巴特容應用此法,可以得到成長的蛙.不過因爲飼育方法極爲困難,蛙體孱弱,每易爲寄生蟲所侵害,所以終不能達到生殖完全成熟之境地.

二, 多精入卵的實驗

任何種動物,所產精子之數必多於卵子之數.以千百精子同時徵逐一個卵子,乃極普通之現象.但在大多數的事實,祇有一個精子鑽入.學者叫這件事實爲單精入卵(Monospermie).至於多精入卵 (Polyspermie)的現象,在自然界殊不多覯:僅如 Henking 之於昆蟲, Rügkert 之於軟骨魚類, Fick Braus Michaelis) 之於有尾兩棲類, Oppel Nicolas 之於爬蟲類, Patterson 之於鳥類所見之數例而已.

自然界何以多係單精入卵呢?這是極有研究價值的問題之一.

有些學者因想到:有許多卵子,僅留一個小孔 (Micropyle) 可以容精子之鑽入,其餘皆無孔可入.一個精子,逢着了較

好的機會,鑽進了小孔.頭入深部,尾留門裏.後來的精子,當然無鑽入之可能.這個解釋,極爲簡單近理.不過自然界單精入卵的現象,極其普通,而具小孔之卵,爲數極少.即令這個解釋爲有効,而大多數的事實,仍屬疑謎.並且根據Delage的實驗,便是這個小部分的解釋,也有推翻的危險. Delage應用細胞解析法(Mérotmie),將海膽的卵子分之兩部,一部具小孔,一部當然無小孔.不具小孔之一部,有尋常認爲精子不能鑽入之膜,結果仍有一個精子鑽入,所以用小孔解釋單精入卵似尙不足.

於是學者羣推授精膜 (Membrane de fecondation) 爲單精入卵之原因.因爲精子入卵,卵子的內部,當然起變化,同時外圍固結,形成一層較堅之膜:因此叫作授精膜.授精膜一旦形成,後來精子,當然無鑽入之可能.

凡此皆以機械的理由來解釋.巴特容則以爲必精子一旦入卵後,卵子內部起了整個的理化之反應.其結果遂失却吸引精子鑽入之能力.至於授精膜之欄隔作用,實無關係.巴特容氏說,乃根據於其所行多精入卵之實驗.現在先敍述其多精入卵試驗之成功,再說明單精入卵與授精膜之無關.

巴特容證明處女蛙卵,一放到千分之2.5的綠化鈉溶液裏面,授精的狀態,可以大加改變.即此種溶液,以及其他陸續發現之數種溶液,有使蛙卵同時被三數精子鑽入之可

能.綠化鈉的作用,巴特容以為在使卵子內部理化的反應起得較遲,故其他精子,尙有鑽入之機會.上面所舉自然界多精入卵之例,都係卵黃質較多之卵.此等卵所含卵黃質旣多,卵黃質原係滯笨無生氣之物,因之精子入卵,頗難於短期間將理化反應達到於全體,所以其他精子,尙有鑽入的機會.

試驗多精入卵時,溶液濃度,最宜注意.試以蛙體內取出多量精子,放到普通水中.再以此精液,分作若干份,各加以不等量之綠化鈉,計如下表:

	精液與綠化鈉之配合比	含鹽百分比
1	一份精液加一份 NaCl Fp. 1000	3.5
2	二份精液加一份 NaCl Fp. 7000	2.33
3	三份精液加一份 NaCl Fp. 7000	1.75
4	四份精液加一份 NaCl Fp. 7000	1.4
5	六份精液加一份 NaCl Fp. 7000	1.0

巴特容宣布實驗的結果道:"每一份溶液,用來和兩百個處女卵接觸.在第一種溶液中,無授精之可能.第二種溶液能授精,但分裂極為奇特.驗之,多係多精入卵,至少有二分之一的卵子如此.三四五種溶液,則多精入卵之數,由百分之三降到百分之一.以下則絕無一多精入卵者".總之,溶液太濃,則授精為不可能.溶液太淡,則都成單精入卵.

以上爲多精入卵實驗之成功.但何以證明與授精膜之無關?

巴特容使用某種方法,能妨止授精膜之形成,而仍保障自然界單精入卵之正規.

防止授精膜之形成極其容易.例如將已授精之卵,卽刻放到千分之2.5的綠化鈉溶液裏面,卽可妨止授精膜之形成.這個溶液裏面,雖含有多量之精子,而此溶液之濃度,又適於多精入卵,但結果仍不會有第二精子之鑽入.卽此可見多精入卵之能否,與授精膜之有無關係.

防止授精膜之形成,除綠化鈉外,綠化鈣,綠化鉀,硫酸鈉之稀薄溶液皆爲有效.

多數學者不僅認定授精膜之形成,爲維持單精入卵之保障物,且認爲卵子以後分裂中所起之一切變化都由此策源.蓋重視此膜,已達極點.巴特容將適被授精之卵,設法阻止其卵膜之形成,而卵子仍照正軌進行,依樣發展.可見授精膜之形成,並非個體發展中必要之現象.

不過巴特容更根據其他實驗,知道授精膜之於卵,亦不無作用.

試以處女的裸卵,放到一種無脊椎動物的肝膵汁 (Suc hepato-pancréatique) 裏面,不到兩分鐘,便膨脹而破裂,以至於消溶.但裸卵如果先已授精或僅與以刺傷之處理,放到肝膵汁裏面,便足以抵抗此汁消化之力.可知卵子授精或被

刺傷以後,則卵之性質,大有所改變.而改變達於完成之時間,因情形而各異.例如以針刺傷,約九十五分鐘乃達於完成;利力電力刺傷,祇七十五分鐘爲已足.卵之大小,似亦有關係.如蘆蟆 (Bufo calanita) 之卵較小,最短時間,十分鐘爲有效;烏顯蛙 (Rana fusca) 的卵較大,最短時間爲三十分鐘;普通蟆(Bufo vulgaris) 居中,最短時間爲二十分鐘.以上均就電刺而言.

但如果卵雖已授精,而授精膜不使形成,放到肝胰汁裏面,可卽刻崩壞而消溶.可見授精卵之所以能抵抗肝胰汁消化之力,並非原於整個卵細胞內部之改變,實單由於授精膜抵抗之能力.

總之,授精膜之作用,經巴特容的試驗,大減少其價値.卽對於單精入卵,無所保障;對於卵子以後之發展,亦不關重輕,僅於抵抗外界破壞之毒汁,略有保護作用而已.

(待續)

書 評

Dowling's Projective Geometry

怎樣作實圓錐截線經過一實點和兩對共軛虛點,向使這五點當中沒有三點是在一直線的?

這個問題曾經 Dowling 採用作爲射影幾何教材,他編的射影幾何原文(第一版)一百四十二頁第二題是大家都看得到的.到了一百四十三頁忽然發生了一個錯誤.如果這是筆誤或者是印刷的錯誤呢,我們也就很可以原諒他.但是據我的考究認爲的確是教材上不應當發生的錯誤,現在承瑊益兄督促叫我發表出來,我相信:若是我的考究對呢,發表之後,也很可喚起許多讀外國算學書的要小心一點,似乎於讀者還有益處,若是我的考究不對呢,發表之後,必能引起同志參加討論,彼此指正,那更是我所心願的了,因此我沒有顧及自己的狂妄和其他一切,居然把這問題討論起來.

先看原文 142 頁從第廿列到 143 頁第十列止,可以不必改動.從第十一列起便有錯誤應當更正.現在分別說明如下:

(1)無誤 爲便於讀者參考起見先將原文 142 頁第廿

列到 143 頁第十列沒有錯誤的照抄於下:

To Construct the conic passing through one real point and two pairs of conjugate imaginary points, no three of the given points lying on the same straight line.

Let P be the real point, and let the pairs of conjugate imaginary points be defined by elliptic involutions on the lines u and u′ (Fig 88). We may suppose that these involutions are determined by pairs of points which separate each other harmonically (Art 105,2). Let these pairs be A, A_1 and B, B_1 on u and A, A_1' and B,′ B_1' on u′, where A is the point common to u and u′. Since corresponding points in the involutions on u and u′ are conjugate with respect to the conic we are to construct, the polar line of A must pass through both A_1 and A_1'. If the line PA meets the polar line of A in R, then the harmonic conjugate of P with respect to A and R mlust lie on the curve. Let Q be this point.

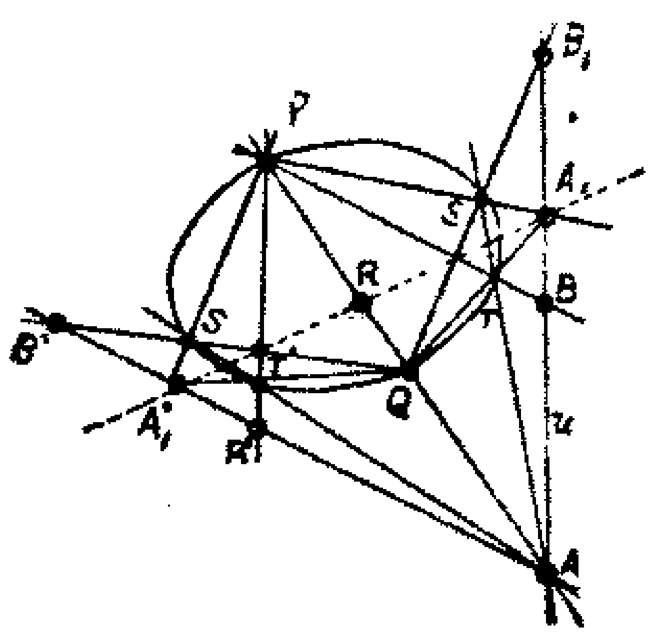


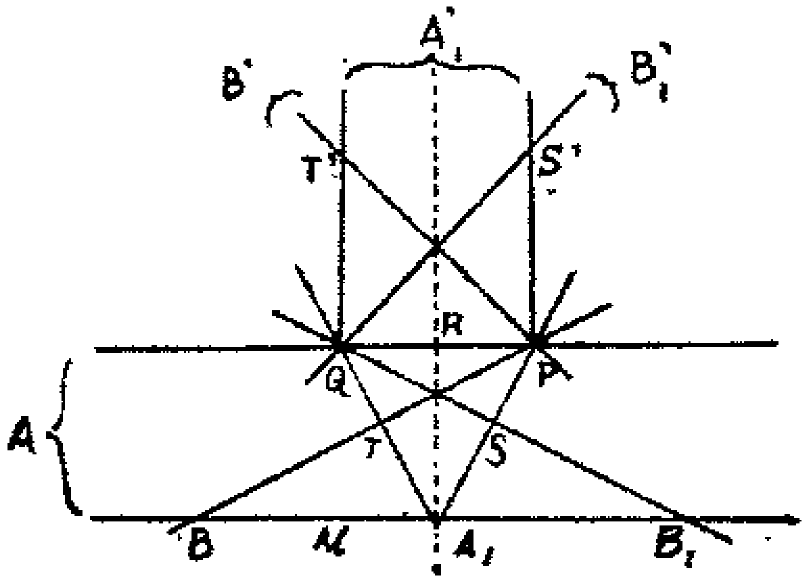
Fig. 88

(2)錯誤　接着上面便是原文 143 頁第十一列.先將原文抄出兩句然後再證明他的錯誤於下:

We can now construct the quadrangle PQST whose pairs of opposite sides intersect in A and A_1 and whose diagornals pass through B and B_1.

This quadrangle is inscribed in the conic.

錯誤之證明　第一句說四角形怎樣作法第二句肯定這四角形內接于所求作之圓錐截線.第二句的確錯了,第一句也就因此失去意義.何以錯呢?第一個證明就是這肯定並沒有根據.然而有的人也許說我的眼睛疎忽,沒有看出這根據來.因此又費了好些時間我再作第二個證明.我們去找一個特例去說明他這肯定不對,那末他這肯定便不能適用同時便算錯了.這個特例便是加兩個特性:一設 u' 在無限遠處而且 A, A_1' 和 B', B_1' 所決定的虛點就是無限遠處那兩個圓點,再設 u 在有限遠處而且 A, A_1 和 B, B_1 所定虛點能使 $\angle PSQ =$ 直角.於是由第一特性知道這要



作的圓錐截線是一個圓.而因 A, A' 和 B', B_1' 各爲這個圓的一對共軛點,所以 $u \perp A_1A_1' \perp PQ$, $PR' \perp QR_1'$ 更因 $APQR$ 爲調和點列, A 在無限遠處,所以 $PR=RQ$.因此 $A_1'R$ 是 PB' 和 QB_1' 的交角(直角!)平分線從而 $\angle PS'Q =$ 半直角.但由

第二特性 $\angle PSQ$ = 直角.所以由這兩個結果知道 $PQSS'$ 四點並不在一圓上,與第一特性中的一個結果(即所作之圓錐截線因爲一圓)於是乎相反.這就是說 S,T,S',T' 這四點並不在所作的圓錐線上,因此原文那肯定是的確錯了.

原文底下那句仍然是錯,現在不再討論.

(3) 更正　既然知道錯誤,當然設法更改.下面的話大概可以算是更正了.讀者並且可以將原文 143 頁第十二列起到第十五列止的那兩句塗去,把下面的幾句抄上:

We can now construct the real points of the lines joining the given imagieary points (Art. 115). Let these be A' and A''. Join $A'P$, and find P' such that P and P' separte A' and the point of intersection of $A'P$ and AA' harmonically. Join $A'Q$, $A''P$, and $A''Q$, and find Q', P'' and Q'' similarly.

以下可接原文: We thus have six real points on the conic, and as many more can be constructed as may be desired by perviously given methods.

原文書這類錯誤而需要更正的地方,現在祇提出一點——其實前前後後何嘗祇有這一點呢?盼望讀者小心讀去才好.若是我的考究不對,也就希望有所指正.

湯璪真

歐陽祖綸級數概論

日本林鶴一與小倉金之助共著之級數概論,敍理詳審示例明顯,爲級數論專書中之良本,是書在日本早已風行全國.近更由歐陽祖綸譯成中文,尤爲極便初學.惟原書魯魚亥豕之處,常見於篇幅之中.雖其改訂增補本,仍多未改正之處.玆姑舉一二如下:

林氏原書 第一版至四版		歐氏譯本		誤	正
頁數	行數	頁數	行數		
101	4	105	14	$100^{\frac{1}{100}}=1.071$	$100^{\frac{1}{100}}=1.047,\ 1000^{\frac{1}{100}}=1.071$
147	15	154	10	$x=e^y$	$y=e^x$
160	10	168	12	$e=2.57$	$e=2.71$
161	15	169	20	22.026	22026.466
338	8	366	6	$1+(1+c_1)qx+(c_1+c_2)q^2x^2+\cdots+c_mq^{m+1}x^{m+1}$	$1+c_1qx+c_2q^2x^2+\cdots+c_mq^mx^m$
343	20	372	6	$\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_n}{R_1}$	$\lim\limits_{n=\infty}\frac{\Sigma a_n}{R_1}$
344	1	372	7	$\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_1}{R_n}$	$\lim\limits_{n=\infty}\frac{\Sigma a_n}{R_n}$
391	6 7	424	1 2	$\sin\theta_2\cos\theta_1$ $\sin\theta_2\sin\theta_1$	$\sin\theta_2\sin\theta_1$ $\sin\theta_2\cos\theta_1$
441	4	476	2	$2\sin$	$-2\sin$
448	5	483	19	$(-1)^n\frac{x}{n+1}$	$(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$
458	10	494	6	$(-1)^n\frac{x^n}{n}$	$(-1)^{n-2}\frac{x^n}{n}$
576	8	620	13	$+\frac{m^2}{2}\left(e^{-2i\alpha}-e^{2i\alpha}\right)$	$-\frac{m^2}{2}\left(e^{-2i\alpha}-e^{2i\alpha}\right)$

上表所示,原由日本手民所誤.譯本仍之,亦未更正.讀者尙不難隨時發見.惟原書第二章 § 17 載「つゑざろ丨ノ定理,」應卽 § 66 之「Cesàro.」譯者於 70 頁譯作笛卡兒,並註明卽 Descartes. 但於 284 頁復譯作西薩羅.其實笛卡兒爲十六七世紀之人,而西薩羅則於 1906 年去世之義大利人也,前後相距,已二百餘年.又原書第四章 § 40 載「くむめろノ判定條件,」應卽「Kummer. 之判定條件.」譯者於 171 頁譯爲「克拉墨之判定條件.」幷註明克拉墨卽 Cramer. 想亦諧音揣度之辭.且原書以後仍有「くむめろ」之名.譯者於 196, 197, 250, 254 等頁,又另譯作「枯模羅路」則更形前後不一致矣.再譯本 243 頁有文曰「然 (A') 條件之速度較 (A) 爲大,故 γ 愈增其速度亦隨之而增.」原文爲「但シ (A') ノ條件ハ, (A) ノソレヨリモ鋭敏ニシテ, r ノ增加ニ從テ益マ鋭敏トナル.」當譯作「但 (A') 之條件較 (A) 爲鋭敏.故 γ 愈增加則愈鋭敏.」或譯作「然 (A') 條件之鋭敏較 (A) 爲佳.故 γ 愈增,其判定之程度亦隨之而增.」今若譯鋭敏爲速度,而以鋭敏之佳劣作爲速度之大小.則難免不與級數發散收斂之速度互相淆混.譯本中 § 57, 58, 59 有數處均同具此缺陷.讀者閱之,當更明瞭.又譯本 480 頁「沙意德路級數.」係譯自原文「ふ丨りえ級數.」應譯作「富利亞級數.」卽 630 頁之「富利亞,」而非 442 頁之「沙德路.」蓋富利亞卽 Fourier, 而沙德路則

爲Seidel也.又譯本 602 頁「恩遜及卡耶姆之定理.」乃譯自原文「えんぜん及ビかへんノ定理.」應爲 Jensen 及 Cahen之定理.」譯者對於えんぜん未加註明,而於かへん竟誤註爲 Khaygam, 至於譯本 628 頁之「雷曼.」係譯自原文之「りまそん.」應卽爲「Limaçon.」卽巴斯噶 (Pascal) 之蚶線.亦稱蝸牛形線.并非在 263 頁之「雷曼,」乃德國大數學家 Riemann 也.此兩處之原文,一作「りまそん.」一作「りーまん.」一爲曲線之名.一爲人名.前後各別.焉能同譯爲「雷曼」以致互混爲一哉.他若 432 頁末行「通常不言其不一樣收斂」之第一「不」字,何可任意添入.在 500 頁中「羃級數之代入,」於 640 頁另譯作「羃級數之移換.」其原文均爲「羃級數ノ置換」此俱譯者疏忽之處.讀者不可不特加注意者也.縱覽全書,可知從事譯述者,除通曉其文字,洞悉其意義外,尤貴乎能使全書爲我所用.不僅以逐字譯文卽謂能事已畢也.如遇原著有時意義欠明晰,或述理欠完備者,譯者能爲一一修正補充之.如此則不特可以闡發原著之精采,其價値且可高出原書之上,是不啻原書之修增再版品也.惟是學術深邃,探尋匪易.加之現在全世界言語文字復不統一,學者因各國文字之迴異,正不知須枉費多少時日.今有人爲之減少此種困難,其於學術上自不無稍許裨益.卽就中日兩國素號同文者而言.日文書籍雖稱易讀.然不能謂僅識國文者卽可徹底明白.

且學問之道,傳播之方法愈多,則進步愈速.果爾則僅就日文著作,去其「カナ」譯成華文之工作,又豈可少哉.今草此文,抑以引起學者之注意與討論已耳.非加譏辭於歐氏也.尙願海內出版界著作家多方傳播學術,不以困難而停頓.不因批評而擱筆,是所馨香禱祝者也.

昭 安

Hermann Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik.

1928. 288頁, 粗訂本20馬克, 裝訂本22馬克.

在科學發展史中,物理學和數學的相互關係,處處可以看出.兩者平行前進,好像同行的伴侶,途中有互相等待的必要.這種現象,恰可于最新的發展中,找得其顯明的例子,有些數學問題的解決,恰是物理學必不可少的工具,而數學一定方面的發展,恰要等待物理學的新發現.安斯坦的相對論和絕對微分的關係,就是一個最好的例,旁的一個例,就是羣論和新量子力學的關係.

多體問題的量子力學,把物理學家引到數學的困難上去,非羣論不足以克服這類的困難.1926年 E. Wigner 始把羣之描寫理論於新力學上的價值詳細估計.因此就成爲新力學中解決許多問題之不可少的工具.

過去不久,羣之描寫理論,爲多數物理學家所不知.要到原來的論文裏去找,事實上也是不容易的. Weyl 的這本書,把數學和物理的部分,分章相間說明,末了再把它們融合起來;一方面可以減去上邊的困難,旁一方面可以使數學和物理二方面間的關係益加明顯,確爲研究物理學的必不可少的一本書.

書分五章.第一章述 Unitäre Geometrie 中于此必不可少的

基礎(一次變換,行列,主軸變換等)這裏的行列數學取像于幾何,比平常的說法好的地方是可以想像和應用簡單的話語而減少了許多的附號.

第二章述量子論的基本原理.由 De Broglie 的波和 Schrödinger 的方程式一直引入新力學之抽象的組織."純粹情形"和"混合情形"的統計之區別亦加以說明.最終述光與原子的相互關係.

第三章論羣及其描寫,爲本書精彩的部分.除了述羣之一般理論外,還論及著者認爲對於量子論特爲重要的"輻射體"內的描寫.

第四章述羣論在量子力學上的應用.復分爲四:

A. 旋轉羣,

B. Lorentz 羣,

C. 互換羣,

D. 量子動力學.

末了這一章詳述對稱的排列羣和單一羣(unitäre Gruppe)的描寫之深入的數學理論.于其相互關係中這兩種羣的合論使極易深入它的理論.這種研究的真目的是一方面要決定羣的特徵,旁一方面是要決定"分支定律"(Verzweigungsgesetze),這些定律對於許多原子,分子和結晶體的理論的問題極爲重要.

潘祖武

Arthur Haas, Materiewellen und Quantenmechanik.

第三版,1930. 202頁. 粗訂本 7 馬克,裝訂本 8 馬克.

讀過 A. Haas 的 Atomtheorie (有英譯本),或 Das Naturbild der neuen Physik (有英譯本,名為 The new Physics) 或其他各書的都知道他的特長是能以淺近的文字完全地達到很深奧的理論,沒有遺漏,而易得要領.近年來物理學的進步是太快了,幾乎非專門研究物理學的不能探得其新的內容.

量子力學和波動力學因被了數學的形式,其物理學的內容不易了解. A. Haas 的這本小書就是給與其物理學的內容以一幅完美的圖畫.它對於研究化學和實驗物理學的尤其適用.

這書在 1928 年初次出版,八個月內就再版,現在是三版了.較前版增了兩章,把再版中小有毛病的地方也改正了; Dymond 的實驗經 G. P. Harnwell 的研究發生了疑問,再版中還詳細地引用,現在的新版已將它改掉.這書由 A. Bogros 和 F. Esclangon 譯成法文,由 L. W. Codd 譯成英文.

開始的一章提示原子力學的各問題,在說明了 Fermat 的原理, Lorentz 變換和羣速度 (Gruppengeschwindigkeit) 的概念之後,詳述 De Broglie 的學說及其實驗的證明,隨導入

Schrödinger 的特有值力學（die Eigenwertmechanik）；關於決定特有值之數學的問題,特別加以說明.此外舉線的振動體和有自由軸的旋轉體做例,使讀者較具體地了解.次章開始說明 Heisenberg 的理想,於其所用的數學方法,行列算(Matrizenrechnung) 的基本概念特加說明.立卽述說量子力學同 Schrödinger 的學說間的關係.提出原子物理學之因果的和統計的兩種觀點.接着就是本書很精彩的 Pauli 的原理,其次所論的是 Bose 的量子統計學及 Fermi 的統計學等.再後述平行氫素(Parawasserstoff) 的發現和放射能之波動力學的理論.這兩章是最新的東西,以前兩版所沒有的.末了在論波動力學方程式之相對性的推廣,和 Dirac 的電子說後提示新力學關于因果律,物質和自然律諸概念之哲學的意義.他說:

"回顧理論物理學的歷史,物理學進步的真義是物理學對純人類的立場的進步的解放.在這樣的意義之下, De Broglie, Schrodinger, Heisenberg 和 Dirac 的工作所發生的時期可算是一個啓明期,它在物理學中對於所生的偏見之征服有許多的貢獻."

潘祖武

原件短缺

1930年

第1卷

第2期

國立武漢大學

理科季刊

第一卷第二期

QUATERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. I. No. 2 December 1930

本期目錄

中華民國十九年十二月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認為新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第一卷第二期目錄

國立武漢大學理科季刊

第一卷第三期目錄預告

絕對微分學之理想與方法

葉 志

絕對微分學之成功,是數學史上一個非常重要的事蹟,因爲這種學說開闢了數學的一個新途徑,由精深縝密之理想,創造成一種奇巧的,審美的,很有力量的學術工具.現今用這種工具,解說舊的空間觀念,甚著成効,更用他製成不少的新的空間觀念.可惜關於這種學說的著作甚少,寥寥的幾篇論文和散見於相對論著作中的一鱗一爪,前者不易蒐羅,後者不易了解.世之喜歡研究相對論者雖多,而明白相對論者甚少,即因爲相對論的思想和方法,是根源於絕對微分學的思想和方法.所以作者不揣譾陋,敢將絕對微分學的思想和方法,用簡單的說明和淺顯的舉例,貢獻於本刊讀者.

(一) 絕對微分學略史

創造絕對微分學的人,是意大利數學家李奇 (Gregorio Ricci). 他受德國大數學家黎曼 (Riemann) 的幾何觀念之暗示,於一八八七年發表一篇創作 Sulla derivazious Covariants ad una forma quadratica differenz ale. 經過很久,無人注意.又於一九〇一年與利未奇微塔 (Levi-Civita) 公同發表一文

Méthode de Cacul différentiel Absolu et leur applications. 文以法文著成,登載德國數學雜誌 Mathem. Annalen; Bd. 54.S. 400－416 之上.時人又經過很長久的時間,仍然無一個應聲.以如此重要之創作,竟遭時人,甚至同聲同氣之數學家,如此之冷淡,豈非怪事.然而正以見其理想之精微,非淺嘗者所能領悟也.

直至一九一五年相對概論出世以後,世人知道愛斯坦發明的相對概論用的是絕對微分學,夫然後絕對微分學的名詞才傳播於世界.這種學問,包含一種理想和一種方法,成爲研究多次空間微分幾何學必不可少之工具.愛斯坦相對概論之前提,承認實現的宇宙是黎曼四度空間,所以他的研究,完全用絕對微分學的方法,他研究所得的結果,完全是絕對微分學的算式.沒有絕對微分學絕不能有相對概論的成功.

絕對微分學不但用以研究黎曼幾何學,更用以創造更新的幾何學.據這種思想,稍稍改進他的方法,近十年內,又創造成功非黎曼的種種微分幾何學.利用這種種新幾何學解說宇宙問題的有威爾（Weyl）的相對論,和厄丁頓(Eddington)的相對論.

絕對微分學不但是幾何學必不可少之工具,對於解析數學亦非常重要.與代數的算式論(Theory of forms)及微分學的微分式論（Theory of differential forms）尤其有密切之關

係.所以絕對微分學的方法,在解析數學上,亦有漸漸採用之趨勢.

(二) 絕對微分學之基礎觀念與種種的量

絕對微分學是量[有人稱之為引量(Tensor)其實不如直稱之為量較明瞭而確.當荷蘭人叔騰(Schouton)稱之為Grösse(意譯為量)]的數學,不是數的數學.這是最緊要的一點.量的觀念有兩個要件:(1)對於每種座標,一個量必須有其一副配數(Components),(2)從一種座標,變換一種新座標,一個量之舊座標配數與新座標配數之間有一簡單的變換關係.此關係又必須適合於兩個條件:(a)一個量之配數,從第一座標變換為第二座標,再由第二座標變換為第三座標,所得之結果,可以直接從第一座標變換為第三座標得之.(b)一個量為零時,其一切配數,完全為零,並且無論改用何種座標,一切配數仍全為零.

一種座標是一種觀察,配數是對于一種觀察的量之表現.量之表現雖非量之本體,然而量之本體即於其一切表現認識之.舍表現直無所謂本體,斯為量之認識法.量之要件(1):說明一個量對於一種觀察必須且只有一種表現.要件(2):說明一切表現只不過代表一個量.

兩個量之變換關係相同,謂之同類.兩個量之相當配數完全相等,並且無論改用何種座標仍常相等,謂之同值.同值者必須同類.

國立武漢大學

理科季刊

第一卷第二期

QUATERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. I, No. 2　　December 1930

本期目錄

中華民國十九年十二月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認為新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第一卷第二期目錄

國立武漢大學理科季刊

第一卷第三期目錄預告

絕對微分學之理想與方法

葉 志

絕對微分學之成功,是數學史上一個非常重要的事蹟,因為這種學說開闢了數學的一個新途徑,由精深緻密之理想,創造成一種奇巧的,審美的,很有力量的學術工具.現今用這種工具,解說舊的空間觀念,甚著成効,更用他製成不少的新的空間觀念.可惜關於這種學說的著作甚少,寥寥的幾篇論文和散見於相對論著作中的一鱗一爪,前者不易蒐羅,後者不易了解.世之喜歡研究相對論者雖多,而明白相對論者甚少,即因為相對論的思想和方法,是根源於絕對微分學的思想和方法.所以作者不揣譾陋,敢將絕對微分學的思想和方法,用簡單的說明和淺顯的舉例,貢獻於本刊讀者.

(一) 絕對微分學略史

創造絕對微分學的人,是意大利數學家李奇 (Gregorio Ricci). 他受德國大數學家黎曼 (Riemann) 的幾何觀念之暗示,於一八八七年發表一篇創作 Sulla derivazious Covariants ad una forma quadratica differenz ale. 經過很久,無人注意.又於一九〇一年與利未,奇徵塔 (Levi-Civita) 公同發表一文

Méthode de Cacul différentiel Absolu et leur applications. 文以法文書成,登載德國數學雜誌 Mathem. Annalen; Bd. 54, S. 400–416 之上.時人又經過很長久的時間,仍然無一個應聲.以如此重要之創作,竟遭時人,甚至同聲同氣之數學家,如此之冷淡,豈非怪事.然而正以見其理想之精微,非淺嘗者所能領悟也.

直至一九一五年相對概論出世以後,世人知道愛斯坦發明的相對概論用的是絕對微分學,夫然後絕對微分學的名詞才傳播於世界.這種學問,包含一種理想和一種方法,成爲研究多次空間微分幾何學必不可少之工具.愛斯坦相對概論之前提,承認實現的宇宙是黎曼四度空間,所以他的研究,完全用絕對微分學的方法,他研究所得的結果,完全是絕對微分學的算式.沒有絕對微分學絕不能有相對概論的成功.

絕對微分學不但用以研究黎曼幾何學,更用以創造更新的幾何學.據這種思想,稍稍改進他的方法,近十年內,又創造成功非黎曼的種種微分幾何學.利用這種種新幾何學解說宇宙問題的有威爾 (Weyl) 的相對論,和厄丁頓(Eddington)的相對論.

絕對微分學不但是幾何學必不可少之工具,對於解析數學亦非常重要.與代數的算式論 (Theory of forms) 及微分學的微分式論 (Theory of differential forms) 尤其有密切之關

係.所以絕對微分學的方法,在解析數學上,亦有漸漸採用之趨勢.

(二) 絕對微分學之基礎觀念與種種的量

絕對微分學是量 [有人稱之為引量 (Tensor) 其實不如直稱之為量較明瞭而確.當荷蘭人叔騰 (Schouton) 稱之為 Grösse (意譯為量)] 的數學;不是數的數學.這是最緊要的一點.量的觀念有兩個要件: (1) 對於每種座標,一個量必須有其一副配數 (Components),(2) 從一種座標,變換一種新座標,一個量之舊座標配數與新座標配數之間有一簡單的變換關係.此關係又必須適合於兩個條件:(a)一個量之配數,從第一座標變換為第二座標,再由第二座標變換為第三座標,所得之結果,可以直接從第一座標變換為第三座標得之.(b)一個量為零時,其一切配數,完全為零,並且無論改用何種座標,一切配數仍全為零.

一種座標是一種觀察,配數是對于一種觀察的量之表現.量之表現雖非量之本體,然而量之本體卽於其一切表現認識之.舍表現直無所謂本體,斯為量之認識法.量之要件 (1):說明一個量對於一種觀察必須且只有一種表現.要件 (2):說明一切表現只不過代表一個量.

兩個量之變換關係相同,謂之同類.兩個量之相當配數完全相等,並且無論改用何種座標仍常相等,謂之同值.同值者必須同類.

根據這種量的觀念,李奇發現了種種的量.茲分述如下:

(1)不變量(Invariant or Scalar).不變量只有一個配數,其數爲常數,不隨換標而改變.

(2)逆變量(Contra-Variant) 一個量對座標系 x_α ($\alpha=1,2,\cdots,n$) 之配數爲 A^μ(注意 μ 並非方數)($\mu=1,2,\cdots,n$) 對另一座標系 x'_β ($\beta=1,2,\cdots,n$) 之配數爲 A'^ν ($\nu=1,2,\cdots,n$), 其變換關係式爲

$$A'^\nu=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}A^\mu \qquad \nu=1,2,\cdots,n$$

則稱爲一次逆變量.其配數 n 個.例如綫微 dx_μ, $\mu=1,2,\cdots,n$ 卽屬此類.因爲

$$dx'_\nu=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}dx_\mu \qquad \nu=1,2,\cdots,n.$$

更有一量,其對座標系 x 之配數爲 $A^{\mu\nu}$, $\mu,\nu=1,2,\cdots,n$, 對座標系 x' 之配數爲 $A'^{\lambda\sigma}$, $\lambda,\sigma=1,2,\cdots,n$, 而其變換關係式爲

$$A'^{\lambda\sigma}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu} \qquad \lambda,\sigma=1,2,\cdots,n$$

則稱爲二次逆變量,其配數 n^2 個.三次以上逆變量倣此類推.

(3)協變量(Covariant) 一個量對座標系 x 及座標系 x' 之配數爲 A_μ 及 A'_ν, 而其變換關係式爲

$$A'_\nu=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu}A_\mu,$$

則稱爲第一次協變量.一個點函數 $F(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$ 之偏微係數恰表一個一次協變量.因爲

$$\frac{\partial F}{\partial x'_\nu}=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu}\frac{\partial F}{\partial x_\mu}.$$

一個量$A_{\mu\nu}$之變換關係式爲

$$A'_{\lambda\sigma}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma}A_{\mu\nu},$$

則稱二次協變量.例如$ds^2=\sum_{\mu}\sum_{\nu}g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu$, $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$爲綫徵之長之平方是不變量.其係數$g_{\mu\nu}$表一個二次協變量[$g_{\mu\nu}$有一特別名詞曰基本引量(Fundamental Tensor)]因爲換座標後則

$$ds^2=\sum_{\mu}\sum_{\nu}g'_{\mu\nu}\,dx'_\mu\,dx'_\nu,$$

而 $$g'_{\lambda\sigma}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma}g_{\mu\nu}.$$

三次以上協變量做此類推.爲分別逆變與協變,故將逆變之配數之指數書於右上角.協變指數書於右下角.

(4)雜變量(Mixture)設變換關係式如下

$$A'^{\lambda}_{\sigma}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\nu}A^{\nu}_{\mu}$$

則A^{ν}_{μ}稱爲二次雜變量.ν爲逆變指數.μ爲協變指數.三次以上之各種雜變量做此類推.

以上旣敍述了種種的量,並且知道絕對微分學爲研究這種種量的科學,當然要聯想到向量解析(Vector Analysis).他的發明在絕對微分學之先,應用已廣,並且也是一種量的數學.二者之關係如何,當然有考查之必要.

據我們的觀察,向量解析所討論的向量(Vector)近似絕對微分學之一次逆變量.許多絕對微分學的著作,卽稱一次逆變量爲逆變向量(Contravariant Vector).然而兩者之所謂

量其實不同.不同之點有二:(a)向量分析認兩點間之直線段表一向量,然而直線段絕不能表一一次逆變量,因爲直線段之配數僅對於笛卡兒座標而存在,對於非笛卡兒座標則直線段並不有若何配數.按諸量之要件(1),兩點間之直線段在絕對微分學上並不爲量,除非只許用笛卡兒座標.(b)向量分析認速度與加速度等爲向量,絕對微分學亦認之爲一次逆變量,然而表此種量之配數,二者所用不同.倘絕對微分學表一速度或加速度以配數 v^ν, $\nu=1,2,\cdots,n$,則向量解析表之以 $\sqrt{g_{\nu\nu}}\,v^\nu$,每差一因數 $\sqrt{g_{\nu\nu}}$.例如對直角笛卡兒座標,二者同以 $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ 表速度以 $(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z})$ 表加速度.因 $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$. 若變爲球極座標,則按絕對微分學之變換關係,速度之配數應爲 $(\dot{r},\dot{\Phi},\dot{\Theta})$;加速度之配數應爲 $\left\{\ddot{r}-r\dot{\Theta}^2-r\dot{\Phi}^2\sin^2\Theta, \frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\Theta\dot{\Phi}), \ddot{\Theta}+\frac{2\dot{r}\dot{\Theta}}{r}-\dot{\Phi}^2\sin\Theta\cos\Theta\right\}$, 然而向量解析則謂速度之配數爲 $(\dot{r}, r\sin\Theta\dot{\Phi}, r\dot{\Theta})$,加速度之配數爲

$$\left\{\ddot{r}-r\dot{\Theta}^2-r\dot{\Phi}^2\sin^2\Phi, \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\Theta\dot{\Phi}), r\ddot{\Theta}+2\dot{r}\dot{\Theta}-r\dot{\Phi}^2\sin\Theta\cos\Theta\right\}.$$

蓋因 $ds^2=dr^2+r^2\sin^2\Theta d\Phi^2+r^2d\Theta^2$, $g_{11}=1$, $g_{22}=r^2\sin^2\Theta$, $g_{33}=r^2$. 絕對微分學與向量解析之異點如此,其相互之關係又如此,應特加注意.

(三)　量之普通運算

(1)量之加法　同類二量相加仍得一同類之量.其配數爲相當配數之和.不同類之量不能相加.(蓋相加不能得

一新量,則相加爲無意義,故曰不能).

(2)量之乘法　任何二量皆可相乘得一高次量.其配數爲原二量配數之互乘.例如

$$A_{\mu\nu}\ B^{\tau}_{\sigma}=C^{\tau}_{\mu\nu\sigma}\qquad \mu,\nu,\sigma,\tau=1,2,\cdots,n,$$

設 $A_{\mu\nu}$ 及 B^{τ}_{σ} 爲一協變及一雜變量,則 $C^{\tau}_{\mu\nu\sigma}$ 爲一四次雜變量.

(3)量之縮法　從一個雜變量例如 $A^{\sigma}_{\mu\nu}$ 求

$$\sum_{\sigma=1}^{n} A^{\sigma}_{\mu\sigma}=B_{\mu}\qquad \mu=1,2,\cdots,n,$$

可得一低次量 B_{μ}.此種方法稱爲 $A^{\sigma}_{\mu\nu}$ 對於一逆指數 σ 及一協變指數 ν 之縮法.

以上加法求和,乘法求積,縮法求縮得之新量,這三種運算,不限在何種座標系之下.對於一切或任何座標系皆無不可,在各種座標系之下所得之各種運算結果,當然而且必須表一個而且只是一個量,此爲量之運算之最要意義.

絕對微分學的算式,是許多量與許多量之運算結合而成,亦猶普通算式,由許多數與許多數之運算結合而成.絕對微分學的算式,仍表一個量,亦猶普通算式,仍表一個數.

今述一個量的算式以見絕對微分學價值的一端.　設 dx_{μ} 和 δx_{μ}, $\mu=1,2,\cdots,n$ 表同一點的兩個綫微,是兩個逆變量.$g_{\lambda\nu}$ 爲基本引量.如是三者連乘得一個四次雜度量 $g_{\lambda\nu}\ dx_{\sigma}\ \delta x_{\tau}$, $\lambda,\nu,\sigma,\tau=1,2,\cdots,n$. 此雜變量經兩次縮法成一不變量 $\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} g_{\lambda\nu}\ dx_{\lambda}\ \delta x_{\nu}$. 此不變量以他兩不變量 $\sqrt{g_{\alpha\beta}\,\delta x_{\alpha}\,\delta x_{\beta}}$ 及 $\sqrt{g_{\gamma\delta}\,\delta x_{\gamma}\,\delta x_{\alpha}}$ 即 dx_{μ} 及 δx_{μ} 兩綫微之長除之,當然仍爲不變量.因此量之値顯

然在 0 與 1 之間,故可令

$$\operatorname{Cos}\Theta = \frac{\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} g_{\lambda\nu}\, dx_\lambda\, dx_\nu}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta}\ \sqrt{\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\delta=1}^{n} g_{\gamma\delta}\, \delta x_\gamma\, \delta x_\sigma}} \qquad \text{(A)}$$

Cos Θ 以及 Θ 俱不因換標而改變,而且當 dx_μ 與 δx_μ 等值卽兩綫微相合時, $\operatorname{Cos}\Theta=1, \Theta=0$. 根據這兩點,吾人知 Θ 表明兩綫微間一種確定的關係,而 Θ 稱爲兩綫微間之角度.

這種角的定義,勝於舊的定義有三點:(一)不根據幾何圖形之直觀,而根據數量之解析.(二)不限於用何種座標.若用直角笛卡兒坐標,則因

$$g_{\lambda\nu} = \begin{cases} 1. & 設\ \lambda = \nu \\ 0 & 設\ \lambda \neq \nu \end{cases}$$

(A)變爲

$$\operatorname{Cos}\Theta = \frac{dx_1\delta x_1 + dx_2\delta x_2 + dx_3\delta x_3}{\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}\ \sqrt{\delta x_1^2+\delta x_2^2+\delta x_3^2}}$$

此與普通幾何學之公式完全吻合.但普通公式只適於一種座標,(A)式則適用任何座標.(三)不限於何種空間.(A)式的角之認識法,適於歐氏空間,已如上敍.至對於非歐的黎曼多角空間,因無幾何圖形可供直覺的觀察,角之觀念之發生,舍由量的研究如(A)外,殆無其他途徑.亦卽角之定義,舍用(A)式外,殆無其他方法.

(四) 量的微分法

一個量之配數若爲點座標之函數,則此量之值隨點而

異,成爲量場.例如 ds^2 的係數 $g_{\lambda\nu}$ 爲 x_μ $\mu=1,2,\cdots n$, 之函數,則 $g_{\lambda\nu}$ 表一個基本引量場.

在談及量的微分法(又稱絕對微分法)之前,對於黎曼幾何的基礎觀念不可不略知一二.黎曼的空間認識法與普通幾何（指歐氏幾何橢圓式非歐幾何雙曲式非歐幾何三種）的空間認識法,其立足點根本不同.普通幾何對於空間本性以一羣公理決定之.以公理決定空間,雖或接近常識,然而是不自然的.因爲一羣公理是所謂無須且不能證明的敍述.所以公理之承認終屬近於武斷.而普通幾何之對於空間本性,實際上只有敍述,不容研究.黎曼的空間觀念則異於是.有兩個要點:(一)有 ∞^n 個互相連續之點;每點可用 n 個變數 $x_\mu,\mu=1,2\cdots,n$ 之一數值羣表之,則此 ∞^n 個點成一 n 度空間;變數 x_μ 爲其座標.(二)空間每點有每點的量法(Measurement)以其點之基本引量表示.全個空間之組織,卽以此基本引量場認識之.基本引量場按數學的觀察可有種種,故黎曼幾何學不是決定一種空間,乃是研究一切有組織的理想中可能的空間.

有不變量場 F, 其一次導函數 $\frac{\partial F}{\partial x_\mu}, \mu=1,2,\cdots,n$ 是一個一次協變量,已如前述.然而研究 $\frac{\partial F}{\partial x_\mu}$, 之導函數,卽 F 之二次導函數,非但不是二次協變量簡直不是量.因爲從座標 x 變爲座標 y, 二次導函數之變換關係式爲

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_r \partial y_s}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q}\frac{\partial x_p}{\partial y_r}\frac{\partial x_q}{\partial y_s}+\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_t}\frac{\partial^2 x_t}{\partial y_r \partial y_s},$$

不是量之變換關係式.李奇以爲這羣二次導函數既不能表量,卽不値注意.所應當注意的,是用這羣二次導函數所組成的一羣算式.這羣算式是一個二次協變量的配數.從一次協變量 $\frac{\partial F}{\partial x_\mu}$ 求此二次協變量的方法,稱爲絕對微分法.

李奇又推而廣之,能從任一量場導得一個較高一次之量場.此新量稱爲原量之協變導量.(Covar ant derivative) 例如有電量場 $X_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}$ 則可得協變導量 $V_\mu X_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}$. 其算式如下:

$$V_\mu X_{\beta_1\cdots\beta_q}^{\alpha_1\cdots\alpha_p}=\frac{\partial X_{\beta_1\cdots\beta_q}^{\alpha_1\cdots\alpha_p}}{\partial x_\mu}+\sum_{l=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ \alpha_l\end{Bmatrix}X_{\beta_1\cdots\cdots\cdots\beta_q}^{\alpha_1\cdots\alpha_{l-1}\lambda\alpha_{l+1}\cdots\alpha_p}$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\begin{Bmatrix}\beta_l\mu\\ \tau\end{Bmatrix}X_{\beta_1\cdots\beta_{l-1}\tau\beta_{l+1}\cdots\beta_q}^{\alpha_1\cdots\cdots\alpha_p}$$

記號 V_μ 書於量前以表導量,亦猶 D 書於函數之前以表導函數.記號 $\begin{Bmatrix}rs\\ t\end{Bmatrix}$ 爲「三字號」(Christoffel's three indices Symbol) 以算式表之如下:

$$\begin{Bmatrix}rs\\ t\end{Bmatrix}=\sum_{p=1}^{n}g^{pt}\left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial x_s}+\frac{\partial g_{st}}{\partial x_r}-\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_t}\right).$$

其式之 $g^{\alpha\beta}$ 爲基本引量,$g^{\lambda\mu}$ 爲與基本引量有關之一二次逆變量,其關係如下:

$$\sum_{\beta=1}^{n}g_{\alpha\beta}g^{\lambda\beta}=1 \quad 設\ \alpha=\lambda \qquad \sum_{\beta=1}^{n}g_{\alpha\beta}g^{\lambda\beta}=0 \quad 設\ \alpha\neq\lambda \qquad g^{\lambda\mu}=g^{\mu\lambda}.$$

$g^{\lambda\mu}$ 之配數從上式及 $g_{\alpha\beta}$ 之配數可以完全決定之.

此種微分法,初見的人頗覺繁難而奇異.然而用這種方法所得之結果,恰好是一高次量,是可以證明的,所以當然有他的價值.果然後來勒西維他創平行移動的學說,(Parallel displacement)用以研究黎曼的幾何,因而發現了絕對微分法的幾何意義.其詳細理論限於篇幅,不能敍述.其大意可以說明如下:

在一個黎曼空間中,因 x_μ 點與其隣點 $x_\mu+dx_\mu$ 之量法不同,所以兩點上量之比較,非僅比較量之配數,更應比較兩點之量法.兩點上量之各配數之差爲

$$\sum_{\mu=1}^{n} dx_\mu \frac{\partial x^{\alpha_1\cdots\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\cdots\beta_q}}{\partial x_\mu}$$

並無若何意義.其真正兩量之差應爲

$$\sum_{\mu=1}^{n} dx_\mu V_\mu X^{\alpha_1\cdots\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\cdots\beta_q},$$

表明一個微量.

黎曼空間包括歐氏空間在內.絕對微分學適於黎曼空間,當然亦適用於歐氏空間.世人應用未慣,覺其繁難,其實他是最簡單而齊整的一種方法.

在普通幾何學或力學上,以球極座標或圓柱座標求加速度之公式,繁難易常.而且對每種座標有一種算法,豈非至爲瑣碎.若用絕對微分學,則只用一種公式,無論何種座標皆可適用,豈不是天下最簡易之方法嗎?其公式爲

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{dx_\mu}{dt} V_\mu \frac{dx_\alpha}{dt} .$$

此篇之作,意在介紹絕對微分學之思想與方法.至言其應用,則甚爲廣大,絕非短篇之中,所能一一列舉也.

黎曼(Riemann)積分法理論

曾瑊益

緒言

積分之運算,自牛頓(Newton)及來布尼茲(Leibnitz)使用極微數(Infinitesimals)於數學之解析而起.因已有微分之運算,自必推想及其逆問題;卽已知一個函數$f(x)$,欲求一個函數$F(x)$,使合於$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$之式是也.此為微分及積分之基礎關係.通常謂此二法之一,卽為他法之逆.但此亦不能恆為眞確之論;因有時由某函數之微係數求其積分,不能得回原函數,或與之相差僅為一個常數也.

今若以積分法,不與微分相關,而為獨立成立者.則積分之運算,可視為求諸項數値之和之極限,當其項數增加至無限多,而各項之數値減少極近於零也.此類問題之形式,常於幾何學或物理學中見之.

積分法之理論,至十九世紀漸形顯著.自傅利(Fourier)之著作出,始知前此所採用之定義,頗不完備.科摩(Cauchy)因之,遂設立函數連續曲線下之面積等名詞之新定義.勒仁(Lejeune)狄利士勒(Dirichlet)更深加研究.至黎曼乃明白確定可求積分函數之必要且充分之條件爲何.黎曼之定

義,原祇限於在有界節段 (Bounded intervals) 之有界函數.嗣後擴充之於無界節段之無界函數,更推廣之於多重積分.

迄近又由雷柏士革(Lebesgue)之研究,成立一種新定義.於是積分法之理論,更形完備.雷氏之理論,根本在乎集合論及其測度.曾經坎托 (Cantor) 德底欽 (Dedekind) 約但 (Jordan) 波勒爾 (Borel) 諸人從事闡發之.依此新定義,則函數之可求積分者,成爲更廣之類,而包括可求積分之黎氏函數爲其一部分.

雖然,黎氏之積分法,於近世解析學中,仍占重要之位置,且將永爲積分學中實際應用之基礎焉.茲特討論之於篇.

第一篇　黎氏以前之積分法

在未敍黎氏定義之前,應先述對此理論之發展有重要關係之數則於次:

第一章　連續函數之積分法. 連續性.

設有積分法,自必思求其逆問題,卽已知一個函數$f(x)$,則思用方法,以求其他一個函數$f'(x)$爲$f(x)$之微係數也.反言之,亦成一個問題;卽設有$f'(x)$,能否有何方法以求原來之$f(x)$乎?將此問題變更之,可書爲普通之形式如下:

試求函數$F(x)$,令其微係數適爲已知之函數$f(x)$.

此問題曾經從前數學家之研究.於此可知,若能求得一個解答,則必可得無數個解答.蓋因任意常數之微分,均成爲零也.現在所研究之問題,亦卽在此.惟宜注意者,函數之

名詞,從前所含之意義,較現在所用者,尤受限制.換言之,函數論發展後,所謂積分法者,現在所採用之意義,更加精嚮焉.

在牛頓及來布尼茲時,函數名詞所含之意義極不完善.其時所謂函數者乃謂 x 與 y 兩個量間之關係,可以一個方程式表出之,而施以有限次之運算者也.

嗣後於幾何學中討論積分法,始得重要之發明;卽在直角坐標中,設有曲線 $y=f(x)$,試研究其在曲線下之面積.於此可以曲線,x 軸,二固定縱線 a 及 b 各爲界限,求其面積之增加對於變數 x 之增加 dx,卽得 $f(x)$,是爲 $S(x)$ 之微係數.此 $S(x)$ 乃表示曲線下之面積也.

因 x 與 y 之關係,可於幾何學中表出.故函數名詞之意義,亦得擴充.卽在幾何圖形中,不能以解析法表出者,不作爲真正之函數.其能如此表出者,特名曰連續之函數.(現在名曰歐拉(Euler)之連續)

函數名詞,雖經如此之擴充.但其意義仍受限制.蓋當時以爲不連續之函數,必不能用解析法表出之也.

至傅利始糾正其誤.證明三角函數之級數,可用以表示連續函數,亦可用以表示不連續函數.於是所謂真正函數及其他函數之區別,當然不克存在.至後科犀則更進一步,證明就取簡單之代數式,亦不能謂其盡屬於連續函數之類中.故伊得一新定義如下:

當 x 與以任何之值時,y 即有相當之值.則 y 謂為 x 之函數.但科氏曾中言函數可成為陽函數或陰函數者,恆依方程式之能否解出 y 為斷.是在該時,其心意中仍存有解析表示之意也.

科氏所立之定義至今仍然採用.據其研究,即謂若能求得一個任意之小數 η,而下式得以成立時,則函數 $f(x)$ 謂之連續於一點 x_0 即

當 $|h|<\eta$ 時, $|f(x_0+h)-f(x_0)|<\epsilon$

此式中之 ϵ,亦為一個極小之數.若 $F(x)$ 能連續於一個節段 (a,b) 間各點,則必能連續於其節段.於此亦可書為次式:

當 $|x_2-x_1|<\eta$ 時 $|f(x_2)-f(x_1)|<\epsilon$

此式中之 x_2 及 x_1 為在閉合節段 $(a,\ )$ 間之二點.

科氏就上所述,因規定 $S(x)$ 之定義如下:

設分節段 (a,b) 為諸小節段,合於下式:

$$a<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n-1}<b$$

而作成總和:

$$S=(x_1-a)\cdot f(\xi_1)+(x_2-x_1)\cdot f(\xi_2)+\cdots+(b-x_{n-1})\cdot f(\xi_{n-1})$$

式中 $x_{i-1}\leqq\xi_i\leqq x_i$

當 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_i-x_{i-1})$ 接近於零時,無論其如何接近,必能證明此總和恆接近於一個定極限.科犀即取此 S 之極限,作為 $S(x)$ 之定義.依傅利之記法,以 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表之.此記號 $\int$ 即係 S 字之變形.而 dx 之意,則原係 (x_i-x_{i-1}) 之差也.

更有進者,設 M 及 m 爲在節段 (a,b) 間 $f(x)$ * 之各上限及下限,則可書

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a)$$

或

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a).f(\xi) \qquad \text{式中 } a \leqq \xi \leqq b, \quad m \leqq f(\xi) \leqq M.$$

$S(x)$ 之意義既定,則易推知原函數之存在.因可書

$$\frac{S(x_0 \pm h) - S(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0 \pm h} f(x)\,dx = f(x_0 + \Theta h)$$

此式乃表示 $S(x)$ 爲連續的,且有 (x) 爲其微係數.在初命 $S(x)$ 名爲函數 $f(x)$ 之定積分. $S(x)+k$ 名爲 $f(x)$ 之不定積分.此不定積分,常以 $F(x)$ 表之.若一函數 $f(x)$,有 α 及 β 在其節段間,則得

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

第二章 不連續之函數

由上所述,雖得科犀之較廣定義.然可求積分之函數,仍爲有限制之類.此外所討論者,卽爲可求積分之不連續函數,而研究其與上述之定義有若何之關係.

函數中僅含有有限個不連續者,甚易處置.於此可將函數分爲幾部分以研究之.故科犀再得定義如下:

若一個函數,在節段 (a,b) 間,除在 c 點外,均爲連續的.如當 h 漸近於零時,下列二式:

---

* 此時 $f(x)$ 必爲有限值,且 M 及 m 必均存在.如 $f(x)$ 在閉合節段爲連續的,卽假定 M 及 m 中之一切值,且包含 M 及 m 之自身在內,至少必均含有一次.

$$\int_{a}^{c-h} f(x)\,dx \qquad 及 \int_{c+h}^{b} f(x)\,dx$$

漸近於一定之極限,則在該節段可以決定$f(x)$之積分.於是可書為

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{h\to 0}\left[\int_{a}^{c-h} f(x)\,dx - \int_{c+h}^{b} f(x)\,dx\right]^{*}$$

此式亦可應用於含有任意個不連續者.但其個數,僅限為有限之數.

勒仁狄利士勒更進一步研究.若函數含有無數個不連續點時,積分之記法如何?

勒氏研究不相連續之 E 之點之集合,及其微分 E'.但其中 E 點為無限個,而 E' 中之點則為有限個.試以 E' 中諸點,分節段 (a,b) 為有限個小節段 (α,β).則由此可求函數之積分.今在各個小節段 $(\alpha+h,\beta-k)$ 間,僅含有有限個 E 中之點.故可應用科氏定義,以作成 $\int_{\alpha+h}^{\beta-k} f(x)\,dx$.若應用此定義推及於各個 (α,β),則可書

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \int_{\alpha+h}^{\beta-k} f(x)\,dx$$

及 $$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \sum \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

由此卽得下之定義:

---

* 科犀未討論當 $x=c$ 時,此函數自身之值為何?於此若 x 接近於 c 時,$f(x)$ 有一定之值,則其值為$f(c)$.不然則$f(c)$可為$f(x)$之最高限最低限間任意之各值,而$f(x)$謂之無一定之值.

* 一個函數$f(x)$,在節段(a,b)間之任一小節段(α,β),若能得一個函數$F(x)$合乎下式:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

且$f(x)$在該節段爲連續的;則$f(x)$在(a,b)中必含有一個小節段.

此定義經狄氏述之如次:

一個函數$f(x)$在節段(a,b)間可求積分時,其必要且充分之條件,爲在$f(x)$中不連續之諸點之集合必可化簡,(Reducible) 且有一個函數$F(x)$合於上之關係式.

下示之例,卽爲此類函數之一.

$$f(x)=\sin\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x-x_2}+\cdots+\frac{1}{2^p}\sin\frac{1}{x-x_{p+1}}$$

第二章　黎氏之初步研究

積分記法,經狄氏研究後,其應用函數之種類較廣.在昔僅對於連續函數可求積分.至此則函數含有無限個不連續者,亦可求其積分.惟此無限個之不連續,尙受有條件之約束;卽其諸點之集合之微分,僅爲含有有限個之點在其中也.

在實際上,此不連續諸點之集合,尙具有特性,初時并未注意,迄後狄氏*忽遇次之函數始發見焉.

$$\Phi(x)=\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n}\right]$$

* 欲詳細明瞭,可參照第二篇第三章.

此式中之一切點均爲不連續之點.蓋當 x 爲有理數時,則 $\Phi(x)=1$. 又當 x 爲無理數時,則 $\Phi(x)=0$.故此函數若依上述之定義,則不能求其積分.蓋其中不連續之諸點,成爲稠密之集合 (Dense Set) 也.

黎氏更舉例如下:

設 (x) 爲 x 與其極隣近整數之差.若 $x=n+\frac{1}{2}$,則取 $(x)=0$,而攷次之函數:

$$f(x)=\frac{(x)}{1^2}+\frac{(2x)}{2^2}+\frac{(3x)}{3^2}+\cdots+\frac{(nx)}{n^2}+\cdots$$

若 x 不爲 $\frac{2p+1}{2n}$ 之形,則 $f(x)$ 爲連續的.但若 $x=\frac{2p+1}{2n}$ 時,則可證明當 x 從 $f(x)$ 下方漸近於此值時,應漸近於極限 $f\left(\frac{2p+1}{2n}\right)+\frac{\pi^2}{16}$. 又若從上方漸近於 $\frac{2p+1}{2n}$,則 $f(x)$ 漸近於極限 $f\left(\frac{2p+1}{2n}\right)-\frac{\pi^2}{16}$.

是 $f(x)$ 在任何節段間,均含有不連續之諸點.故依前述之定義,此函數不能求其積分.

此種不能求積分函數之例頗多,甚易求得,設用無限級數法,則如此之函數,可由諸不連續函數 f_n 之齊一收斂 (Uniformly convergent) 之級數所作成.惟函數中所有不連續諸點,卽爲級數中 f_n 之一切不連續之點;而級數中之各不連續點,亦僅卽 f 之各不連續點.

由上述黎氏之例,知此等函數,甚爲尋常,不屬於某特殊之類.黎氏繼續研究之,最終乃得可求積分函數之必要且

* Ueber die Möglichkeit eine Funktion durch eine trigonometrische Reihe darzustellen.

充分之條件焉.

第二篇 黎氏之積分法

第一章 黎氏定義

茲述可求積分函數之必要且充分之條件,爲黎氏所得者於次:

設 $f(x)$ 爲一個函數,在節段 (a,b) 間,成爲有限之值.試將此節段,以下列諸點分之,

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad \cdots,\quad x_i,\quad \cdots,\quad x_{n-1}$$

但 $a<x_i<b,\quad x_{i-1}<x_i$ 且 $\Sigma(x_i-x_{i-1})=b-a$

今用簡便記法,設以 $\delta_1^{(1)}$ $\delta_2^{(1)}$ $\delta_3^{(1)}$ $\cdots,$ $\delta_i^{(1)}$ $\cdots,$ $\delta_n^{(1)}$ 表示下列之各小節段:

$$(a,x_1),\quad (x_1,x_2),\quad (x_2,x_3),\quad \cdots,\quad (x_{i-1},x_i),\quad \cdots,\quad (x_{n-1},b)$$

又設 $\triangle_1$ 爲此等節段中之最大者.

若再細分之,得諸新節段 $\delta_1^{(2)}$ $\delta_2^{(2)}$ $\cdots,$ $\delta_i^{(2)}$ $\cdots,$ $\delta_{n_2}^{(2)}$ 之集合.其中以 $\triangle_2$ 爲最大.

由此仍復細分,繼續進行,至任意之第 m 次時,最初之節段 (a,b) 細分爲小節段 $\delta_1^{(m)},$ $\delta_2^{(m)},$ $\delta_3^{(m)},$ $\cdots,$ $\delta_i^{(m)},$ $\cdots,$ $\delta_{n_m}^{(m)}$ 其中以 $\triangle_m$ 爲最大.且恆得 $\sum\delta_i^{(m)}=b-a.$

於此若 $\triangle$ 所作成之次之敍列:

$$\triangle_1,\quad \triangle_2,\quad \triangle_3,\quad \cdots,\quad \triangle_i,\quad \triangle_m,\quad \cdots$$

漸近於零爲其極限,則節段 (a,b) 次第所細分者,謂之細分之收斂系.

今設　$A(\delta_i^{(m)})$　為合於下式之值

$$m_i(\delta_i^{(m)}) \leqq A(\delta_i^{(m)}) \leqq M_i(\delta_i^{(m)})$$

式中 m_i 及 M_i 為 $f(x)$ 各在節段 $\delta_i^{(m)}$ 中之下限及上限.

設相當於次第細分之法作成次之總和:

$$S_1=\delta_1^{(1)}A(\delta_1^{(1)})+\delta_2^{(1)}A(\delta_2^{(1)})+\cdots\cdots+\delta_{n_1}^{(1)}A(\delta_{n_1}^{(1)})$$

$$S_2=\delta_1^{(2)}A(\delta_1^{(2)})+\delta_2^{(2)}A(\delta_2^{(2)})+\cdots\cdots+\delta_{n_2}^{(2)}A(\delta_{n_2}^{(2)})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_m=\delta_1^{(m)}A(\delta_1^{(m)})+\delta_2^{(m)}A(\delta_2^{(m)})+\cdots\cdots+\delta_{n_m}^{(m)}A(\delta_{n_m}^{(m)})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

則得次之定義:

若敍列 S_1,　S_2,　S_3,　$\cdots$,　S_m,　$\cdots$　為收斂的.且無論用如何細分系,及無論如何以選擇 $A(\delta_i^{(m)})$,(但限制函數在相當節段中其值在其上下限之間)恆得某數為其同一之極限.則此函數 $f(x)$,依黎氏意義,謂之在節段 (a,b) 間可以求其積分.且其總和 S 之敍列之極限,即為積分之值.

上述為黎氏較廣之定義.其中 $A(\delta_i^{(m)})$ 之值,限制於函數在節段 $\delta_i^{(m)}$ 間某點之值.但此限制,亦易證明其不為必要者.

設在各節段 $\delta_i^{(m)}$ 有一個數 ζ_i 齊一漸近於零.即對於一正數 ϵ,可得他一個數 η.當其各節段 $\delta_i^{(m)}$ 均小於 η 時,恆得 $|\zeta_i|<\epsilon$.此數 η 必然存在也.而 $A(\delta_i^{(m)})$ 之數可書為 $f(x_{i-1})+\zeta_i$ 於是可證明下式:

$$S' = \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+\zeta_i\right].(\delta_i^{(n)})$$

必有$f(x)$之積分爲其極限.

若在實際上,η之值,當$\delta_i^{(m)}<\eta$時,能滿足次之二不等式:

$$\left|f(x_{i-1}).(\delta_i^{(m)})-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\in \quad 及 \quad |\zeta_i|<\in$$

則可書

$$S'-\int_a^b f(x)\,dx=\left[\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1}).(\delta_i^{(m)})-\int_a^b f(x)\,dx\right]+\sum_{i=1}^{n}\zeta_i(\delta_i^{(m)})$$

但此式中之第一括弧小於$\in$,且

$$\sum_{i=1}^{n}\zeta_i(\delta_i^{(m)})\leqq\in.\sum_{i=1}^{n}(\delta_i^{(m)})=\in(b-a)$$

故

$$\left|S'-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\in+\in(b-a)$$

此卽證明

$$\lim_{\varepsilon\to 0} S'=\int_a^b f(x)\,dx$$

蓋$(b-a)$爲常數,而$\in$可使之爲任何小也.

黎氏定義,係依科犀所立連續函數之定義而擴充之者.科犀更取$A(\delta_i^{(m)})$爲函數在節段$\delta_i^{(m)}$間之下限.得式如下:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\left[(x_1-a)\cdot f(a)+(x_2-x_1)\cdot f(x_1)+\cdots+(b-x_{n-1})\cdot f(x_{n-1})\right]$$

第二章 總和S及s. 上積分及下積分.

1. 總和S及s

設$f(x)$爲在節段(a,b)間之有限函數.如前法細分(a,b)爲諸小節段$\delta_1^{(1)}$ $\delta_2^{(1)}$ $\delta_3^{(1)}$ ...., $\delta_i^{(1)}$ ...., $\delta_n^{(1)}$

設M及m爲在節段(a,b)間之各上下限.M_i及m_i爲在小節段$\delta_i^{(m)}$間之上下限.

今作成總和:

$$S=M_1\cdot\delta_1^{(1)}+M_2\cdot\delta_2^{(1)}+\cdots\cdots+M_i\cdot\delta_i^{(1)}+\cdots\cdots+M_n\cdot\delta_n^{(1)}$$

及 $$s=m_1\cdot\delta_1^{(1)}+m_2\cdot\delta_2^{(1)}+\cdots\cdots+m_i\cdot\delta_i^{(1)}+\cdots\cdots+m_n\cdot\delta_n^{(1)}$$

卽無論用如何細分法,常得一個 S 及一個 s. 再者 $M_i\,\delta_i^{(1)}$ 決不能小於相當之 $m_i\,\delta_i^{(1)}$ 更不能小於 $m\cdot\delta_i^{(1)}$ 故各個 S 大於 $m\,(b-a)$. 由是一切總和 S 之聚合,必有一個下限.命 I 爲此極限.

同樣總和 s 決不能大於 $M(b-a)$. 此 M 卽最大之 M_i. 故一切總和 s 之聚合,必有一個上限.命 I' 爲此極限.

又因

$$\sum m_i\cdot\delta_i^{(1)}\geqq m(b-a) \quad 及 \quad \sum M_i\cdot\delta_i^{(1)}\leqq M\,(b-a)$$

故總和 S 及 s 必在二個定極限 I 及 I' 之間.

對於總和 S 及 s,可得次之性質:

設用細分法,所得諸節段均小於$\triangle$.若已計算其總和 S 及 s. 又若令 p 爲細分新添之諸點.則總和 S 必仍舊或減少,而總和 s 必仍舊或增加.但各總和之變化,不能超過於 $p\,(M-m)\,\triangle$.

試先攷總和 S.如僅限於單一之節段 δ_i. 並在該節段間,設有一分點,以之分爲他二小節段 δ_i' 及 δ_i''.則原先在總和 S 中之項 $M_i\cdot\delta_i$ 今成爲諸新項 $M_i'\cdot\delta_i'+M_i''\cdot\delta_i''$. 其值介乎 $M_i\cdot\delta_i$ 及 $m_i\cdot\delta_i$ 之間.

由此可知於細分中增加一點,不能增加 S 之值,如若減

少,則其值不能大於 $(M_i-m_i)\ \delta_i$. 更不能大於 $(M-m)\ \triangle$.

2. 達波(Darboux)之定理:

茲證明次之定理:

若在節段 (a,b) 間 $f(x)$ 爲有限之值,其細分諸點之數無限增加,而各節段 δ_i 漸近於零爲其極限.則無論首先所用細分 (a,b) 之法爲如何,其總和 S 及 s 應各漸近於極限 I 及 I'

此定理祇須證明對於 S 可以成立.同樣得證明對於 s 亦能成立.因 I 爲一切所能作成之總和 S 之下界.由是當 $\delta_i\to 0$ 時,卽應證明 S 漸近於 I 爲其極限.但欲證此祇須下式成立可也.

$$S<I+\epsilon$$

此式中之 ϵ,爲當細分諸節段小於某數 $\triangle$ (依 ϵ 而定)時所取一個任意之正數.

試攷 (a,b) 中之又一細分法.因 I 爲其下界,故可得相當之總和:

$$S'<I+\frac{\epsilon}{2}$$

又若將前二法所得諸點疊置之,則爲細分之第三法.於此得 S'' 爲其相當之總和.

由上所述.若依第二法所細分者有 p 點,則可書成下式:

$$S<S'+p\,(M-m)\,\triangle$$

但若以由第一法所得諸點,疊置於第二法所得者之上.

作為第三法之細分諸點,則亦可書為

$$S'' \leqq S' \leqq I + \frac{\epsilon}{2}$$

故代入於上之不等式中

$$S < I + \frac{\epsilon}{2} + p(M-m)\Delta$$

於此若欲滿足於不等式 $S < I + \epsilon$,則僅須取

$$\frac{\epsilon}{2} + p(M-m)\Delta < \epsilon \quad 或 \quad p(M-m)\Delta < \frac{\epsilon}{2}$$

因得 $\Delta < \dfrac{\epsilon}{2p(M-m)}$

此式恆能成立.

對於此等極限,用上述 (a,b) 中細分之任意二法,恆得下式:

$$I' \leqq I$$

蓋以細分中任意二法所得者疊置之,則為 (a,b) 中細分之第三法,各對於任一前法為相連續.於此設 S, s 及 S', s' 為初二法之總和.$\sum$ 及 σ 為由疊置所成之細分法之相當總和.則適所證明者可書成下式:

$$\sum \leqq S, \quad \sigma \leqq s \quad 及 \quad \sum \leqq S' \quad \sigma \leqq s'$$

但因 $\sigma \leqq \sum$ 故卽得

$$s \leqq S' \quad 及 \quad s' \leqq S$$

換言之,任意之 s 小於任意之 S.於此所用細分諸法,均為絕對獨立者.因此得下式:

$$I' \leqq I$$

3. 上積分及下積分

由達波定理,已知

$$\lim S = \lim \sum M_i \cdot \delta_i = I$$

及 $$\lim s = \lim \sum m_i \cdot \delta_i = I'$$

此等極限,亦各謂之函數之上下積分,而以下之記法書之:

$$I = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad 及 \quad I' = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

此二式間之關係式,拉發雷波松 (La Vallée-Poisson) 曾在"數學解析" (Cours d'Analyse) 書中言之,茲重述之如次:

若以 $W(x)$ 表示函數 $f(x)$ 在一點 x 之振動,則可證明:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} W(x)\,dx$$

設節段 (a,b) 再分為小節段 δ_i 又設 M_i, m_i 及 $\triangle_i$ 為 $f(x)$ 之各上下限,及 $W(x)$ 在小節段 δ_i 之上限,今欲證明上之關係式,須先明白次之預備定理:

無論取 $\in$ 為如何小之數,將 (a,b) 細分為若干小節段 δ_i 時,對於各個 δ_i 必恆得下式:

$$M_i - m_i < \triangle_i + \in$$

此式中之 $\triangle_i$ 為 δ_i 之最大者.

蓋若在節段 (a,b) 間,有一細分,對於上式為不可能,則可證明在該節段,至少有一點 c,對於節段 $(c-\delta, c+\delta)$ 間之細分,無論取 δ 為如何小,求其合乎上之條件亦為不可能,但此為矛盾之結果,因 δ 漸近於極微之值 $f(x)$ 在 $(c-\delta, c+\delta)$ 間

之振動,亦必小於 $W(c)+\in$ 也.但 $W(c)$ 爲 $f(x)$ 在該點 c 之振動.

再者諸 δ_i 可取爲任何小,若於某次所分 (a,b) 爲節段 δ_i 時合於上述預備定理之條件.再對於諸 δ_i 施同樣之運算,則最終在 (a,b) 中可得所欲求得之諸節段爲任何小.

由此易得其最初之關係式.因若致 (a,b) 中細分諸小節段滿足於預備定理.則對於其中各個可得

$$\triangle_i \leqq M_i - m_i < \triangle_i + \in$$

又取在全節段 (a,b) 中之總和,則得

$$\sum \triangle_i \delta_i \leqq \sum M_i \delta_i - \sum m_i \delta_i < \sum \triangle_i \delta_i + \in (b-a)$$

今若令 δ_i 及 $\in$ 同時漸近於零,則得

$$\lim \sum \triangle_i \delta_i = \lim \left[\sum \triangle_i \delta_i + \in (b-a) \right] = \int_a^b W(x)\,dx$$

故

$$\lim \sum M_i \delta_i - \lim \sum m_i \delta_i = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b W(x)\,dx$$

第三章　點之集合.　不連續性.

在第一章,已述黎曼所論可求積分之函數之必要且充分之條件爲何.厥後函數理論愈益進步.此等條件遂亦變更,另參加各種名詞以表示之.如採用最新之發見,卽在各種情形時,當證明其內之包含(Content)是也.

近世函數理論,其基礎完全在於集合論及其測度.今於未討論各條件式樣之先.應先說明黎氏之同類條件,卽對此理論有相關係者.此種集合理論,現時已成有系統且廣大之學科.但此時僅示以數種定義及其結果,以備明白此

後之所討論者而已.

1. 點之集合之數種定義

今假定集合之意義,僅限於一次元之集合.但此種結果,甚易擴充之於 n 次元之集合.不過不爲現時討論所必須也.

一個集合,任用何法可決定其中一切之元, (Elements) 不致有一個遺漏,亦無一個相重複者,則此集合謂爲已知.

一個集合,可爲有限的,亦可爲無限的.

對於無限之集合,可用冪之記法,或順序各數目表之.設有二個集合.若對於兩組中各元,能成立一與一之相應關係者,則謂之同冪;卽一組中之各元,各相當於他組之一元,且僅一元也.

一切正整數之集合,及一切集合與之有同冪者,均謂之爲可以計數 (Denumerable).

但在 0 與 1 之間一切實數之集合,可證其非爲可以計數者.

自任意一個無限之集合,取去可以計數之諸元,所餘者仍必爲無限.

若 E 爲點之集合,不包括一節段 (a,b) 中一切之點,則在其節段中不屬於 E 之諸點,謂之相補集合,而以 $C\ E$ 表之若 p 爲 E 中之一點,如能求得一個 δ,對於各點 p' 距 p 小於 δ 者屬於 E,則 p 謂之屬於 E 之中,而在 $C\ E$ 之外,又諸

點不在 E 之外,亦不在 E 之中者,則謂之二集合 E 及 $C\ E$ 之極限點.

若取 ϵ 爲任何小,如能求得 E 中一點 a,距 a' 小於 ϵ,則此點 a' 謂之 E 中之一極限點.

集合 E 中之諸極限點,作成一集合 E',爲 E 之微分.

一集合 E 中之微分 E',亦可謂爲諸點之集合;卽其各點之附近,均有無限個 E 中之點也.

諸點之閉合集合者,含有其微分之一切點;卽諸極限點也.但亦可含有其他之諸點.

完全集合*者,全等於其微分,或與其微分相疊合者也.由此可證明:

若微分爲零包含,則此集合爲可以計數者.且此定理之逆,亦爲真確.

又: 閉合集合與其微分之差,僅爲一個可以計數諸點之集合.

一個導來集合 E',謂之相對完全:卽含有其自已之微分 E''.

若在 (a,b) 中所含任一節段 (α,β),無論其爲如何小,常包括 E 之諸點,則謂在節段 (a,b) 間諸點之集合爲稠密.若此

* 波勒爾命此爲完全集合.但亦常通用雷柏士革之記號.在昔波氏自己曾採用之,但於其所著積分法理論 (Leçons sur l'Intégration) 書中,則又解棄之.

集合亦爲完全,則包括 (a,b) 中一切之諸點.

諸點集合之長度或測度[(1)] (Length or Measure):—

設 E 爲一個一次元中諸點之集合.又 $e(X)$ 爲一個函數,對於 E 之各點均等於 1.但對於其他各點,則等於 0.今在節段 (a,b) 間,設作成次之積分:

$$\overline{\int_a^b} e(X)\,dx \quad 及 \quad \underline{\int_a^b} e(X)dx$$

第一個積分,爲在節段 (a,b) 間 E 之外長度或測度.(Exterior length or measure) 第二個積分,爲其內長度或測度[(2)].(Interior length or measure) 書爲下式:

$$e_e E = \overline{\int_a^b} e(x)\,dx \quad 及 \quad e_i E = \underline{\int_a^b} e(x)\,dx$$

若此兩個積分相等,則其公共之值,謂之在節段 (a,b) 間 E 之集合之長度或測度,而此集合謂之可測.

今若分節段 (a,b) 爲小節段 δ_i 其極限爲零,則可述之如次:

在節段 (a,b) 間 E 之集合之外測度,卽爲諸小節段 δ_i 之總和之極限.但當 δ_i 漸近於零時,至少必含有 E 之一點.又 E 之內測度,卽爲諸小節段 δ_i 之總和之極限.但此時之 δ_i 僅含有 E 之諸點,再者此等極限,無論將 (a,b) 如何分法,其結果恆同.

於此若以 $C\ E$ 爲表示在節段 (a,b) 間 E 之相補集合,則

(1) 參照以後測度或包含之定義.

(2) 此等名詞,與約但所與之意義相同.

得:

$$c_e E + c_i C E = b - a$$

今可書

$$\overline{\int_a^b} c(x)\,dx - \underline{\int_a^b} c(x)\,dx = \overline{\int_a^b}\left[c(x)\text{ 之振動}\right]dx = c_e E'$$

蓋 $c(x)$ 之振動,對於境界上各點均等於 1, 對於其他各點均等於 0. 由是可述之如次:

諸點 E 之集合之外測度與內測度之差,等於其極限諸點之集合之外測度.

故得定理如下:

在一節段間諸點之集合可以測度者,其必要且充分之條件,爲在該節段間,其諸極限點之集合,必爲零之測度或包含.

E 之集合,在一節段 (a,b) 間爲零測度之必要且充分之條件,卽爲下式:

$$\overline{\int_a^b} c(x)\,dx = 0$$

換言之,其諸節段之總和之極限,當 δ_i 漸近於零時,至少必含有 E 之一點爲零.再者 (a,b) 中之細分,若對於某一法可以成立,則對於他法亦必成立.

2. 不連續性

函數一名詞,依科犀所與之定義,甚爲普遍:卽除實際者外,以爲 x 與 y 間之關係,必以解析法表之.但此限制,科氏本人並未注意,以後黎曼方明白說之.於是得函數一名詞

之定義爲現在所通用者如次:

設與 x 以某値時,y 有相當之値,且此種關係無論如何恒可成立,則謂 y 爲 x 之函數.

今述數語關於函數之不連續者於次,以備應用時之便.

試攷在一點 α 之函數 $f(x)$,及一個節段 $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$. 此 δ 可爲任意小之數.若 δ 漸近於零時.設 $f(\alpha-0)$ 及 $f(\alpha+0)$ 漸近之値爲 $f(x)$,但於此可得差數.

1. $f(\alpha-0)$ 及 $f(\alpha+0)$ 均可成立時.

茲爲便利計,令

$$f(\alpha-0)=k \quad 及 \quad f(\alpha+0)=1$$

(A) 若 $k=1=f(\alpha)$,則此函數謂爲連續的.又連續性,可視爲不連續性之極端.

(B) 設(A)之關係式不能滿足,則函數謂之在點 α 有第一類之不連續性.

a) 若仍得 $k=1$,則其不連續性可以取消.蓋依函數之定義,當 $x=\alpha$ 時,卽得

$$f(x)=f(\alpha-0)=f(\alpha+0)$$

b) 若 $k\neq 1$,則得

$k=f(\alpha)$. 於此時謂之函數不連續於其右方.

或 $1=f(\alpha)$. 於此時謂之函數不連續於其左方.

2. 若僅 k 或 1 可以成立,則得混合不連續性.

3. 若兩極限 $f(\alpha-0)$ 及 $f(\alpha+0)$ 均不成立,則謂之有第二

類之不連續性.

對於此等不連續性,應證明者如次:

第二類不連續性之一點云者,謂在其任意極小之附近處,其函數有無限個之有限振動或無限振動也.

函數 $f(x)$ 在節段 $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ 間之上界,當 δ 漸近於零時,有一下限,則謂之 $f(x)$ 在點 α 之極大值,而以 $M(\alpha)$ 表之.同樣其下界有一上限 $m(\alpha)$, 為 $f(x)$ 在點 α 之極小值.

函數 $f(x)$ 在點 α 之不連續之測度,為當 δ 漸近於零時,函數在隣近 $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ 間之振動之極限.

由是知其測度卽等於 $M(\alpha)-m(\alpha)$.

試攷 $M(\alpha)$, $m(\alpha)$ 及 $f(\alpha\pm0)$ 之存在.但為便利計,卽其中有為無限大之值者亦可不除外.

數值 $|f(\alpha-0)-f(\alpha+0)|$ 謂之函數在點 α 之振動之測度.

今依不連續諸點之性質,函數可分類如下:

1. 一個函數完全無連續之諸點者,謂之完全不連續.(Totally discontinuous)

2. 連續諸點成為可以計數之集合者,則其自身不能成為分組之稠密.(Component dense)

3. 連續諸點之集合有連續冪者,可分為下之四類:

 a. 不稠密.

 b.* 到處稠密,且不閉合.於此時函數謂之逐點不連續.(Point-wise discontinuous)

* 逐點不連續函數之定義,亦可如次述之,即諸點之測度,無論取 k 爲如何值時,常得大於 k 而作成一個不稠密之集合.

c. 到處稠密且閉合.於此時函數謂之普通連續.

d. 一組中之各節段,均到處稠密.此外他組中之各節段,則不稠密.

狄尼 (Dini) 研究函數 $f(x)$ 之不連續諸點之集合爲完全者,可有下之二類:

a) 無論取 ϵ 爲如何小之數,在某集合中諸點,其函數 $f(x)$ 之振動恆小於 ϵ. 如此之函數,謂之逐點不連續.

b) 能得一個正數 ϵ,在其集合中某部分一切之點,函數 $f(x)$ 之振動 $>\epsilon$.如此之函數,謂之完全不連續.

第四章 必要且充分之條件之各種形式.

由前第二章之事實,得述之如次:

1. 一個函數 $f(x)$,依黎氏意義可求積分之必要且充分之條件,爲其上積分與下積分相等.

此條件爲必要者,蓋因

$$m_{s_n}(\delta_s^{(m)}) \leqq A\cdot(\delta_s^{(m)}) \leqq M_s\cdot(\delta_s^{(m)})$$

式中 m_s 及 M_s 爲函數在節段 $\delta_s^{(m)}$ 間之上界及下界.

因 A $(\delta_s^{(m)})$ 爲自所討論之極限中任意選出之數.試取其特例;卽如等於其極限之一,且若次之積分成立

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum (\delta_s^{(m)})\cdot A\ (\delta_s^{(m)})$$

則必得

$$\lim \sum_1^{n_m} (\delta_s^{(m)}) . m_s(\delta_s^{(m)}) = \lim \sum_1^{n_m} (\delta_s^{(m)}) . M_s(\delta_s^{(m)})$$

或 $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

此條件爲充分者.蓋若其滿足時,則得

$$\sum_1^{n_m} (\delta_s^{(m)}) . M_s(\delta_s^{(m)}) \geqq \sum_1^{n_m} (\delta_s^{(m)}) . m_s(\delta_s^{(m)})$$

此兩總和,得有同一之極限,亦爲 S 之極限.

上述必要且充分之條件,亦可以其他各法說明.故若

2. 令 $D(\delta_s^{(m)})$ 爲函數在節段 $\delta_s^{(m)}$ 間 $M(\delta_s^{(m)}) - m(\delta_s^{(m)})$ 之振動.則必可確定細分節段 (a,b) 之一收斂系,即施行細分法,任至若何程度,次之總和

$$\delta_1^{(m)} . D(\delta_1^{(m)}) + \delta_2^{(m)} . D(\delta_2^{(m)}) + \cdots + \delta_{n_m}^{(m)} . D(\delta_{n_m}^{(m)})$$

當 m 增加至無限大時,有極限必爲零.

由上所述,即謂相當於一個任意之小正數 ϵ,必能求得一個數 m,合於下式:

$$\left|\sum^{n_m} (\delta_s^{(m)}) . D(\delta_s^{(m)})\right| < \epsilon \quad 或 \quad \left|(b-a)M\right| < \epsilon$$

式中之 M 爲諸數 $D(\delta_s^{(m)})$ 之一平均值.

3. 若用次之事實

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} W(x)\,dx$$

則得:

一個函數可求黎氏積分之必要且充分之條件爲

$$\overline{\int_a^b} W(x)\,dx = 0$$

若命 E 爲節段 (a,b) 間諸點之集合,在其中取任意之正

小數 ϵ,能得 $W(x) \geqq \epsilon$,則得

4. 可求黎氏積分之必要且充分之條件,爲當 ϵ 爲任意之小數時,其集合 E 爲零之測度.

蓋若在 E 內一切之點時,$e(x)$ 之值等於 1.在其他一切之點時,其值等於0. 則在節段間對於 x 之各值,可得下式:

$$\epsilon . e(x) < W(x) < \epsilon + (M-m).e(x)$$

式中 $(M-m)$ 爲函數 $f(x)$ 在 (a,b) 間之振動.若以 dx 乘之,而取其上積分,則

$$\epsilon . e_0 E \leqq \overline{\int_a^b} W(x)\, dx \leqq \epsilon\,(b-a) + (M-m).\, e_0 E$$

由此可知其積分爲零時,e_0E 必等於零.反之當 ϵ 漸近於零時,其積分必爲零.

5. 此條件又可述之如次:

若取節段 (a,b) 中所細分之任一收歛系,則相當任一正數 k,其諸節段總和之振動必 $\geqq k$.蓋繼續細分之,必成爲任意小,而以零爲其極限.

此條件爲充分者.因設 $s^{(m)}$ 爲諸節段之總和,其中之振動 $\geqq k$. 故可書

$$\sum_1^{n_m} \delta_s^{(m)}.\, D\left(\delta_s^{(m)}\right) \geqq k.\, s^{(m)} + (b-a-s^{(m)}).\, \overline{D} \geqq k.\, s^{(m)}$$

式中之 $\overline{D}$ 表示在任一個 $\delta^{(m)}$ 中之最小振動.由是知

若　$\lim s^{(m)} = 0$　時,則得

$$\lim \sum_1^{n_m} \delta_s^{(m)}.\, D\left(\delta_s^{(m)}\right) = 0$$

6. 有時爲便利計,可述此條件如下;

有限函數$f(x)$在節段(a,b)間可求積分之必要且充分之條件,爲對於任意之正數k,在節段中諸點之測度$\geqq k$,可作成一個爲零包含之集合.

此條件爲必要者.蓋

當節段之測度$>k$時,各以其振動乘之.所得諸乘積之和,必大於諸節段之和之k倍也.故除非最後者之和以零爲其極限外.則繼續施行細分法時,其他之總和,必不能以零爲其極限.

此條件爲充分者.蓋

若點之集合中$\sigma\geqq k$爲零測度,則此一切之點,必含在有限個節段中.但此諸節段之和小於ϵ.又在節段(a,b)中之其他諸小節段,其中各點之$\sigma>k$,含有有限個之小節段,其和$>b-a-\epsilon$.此等小節段中之任一小節段,可分爲諸部分.在其中各部之振動$<k$.由是全節段(a,b)可分爲諸小節段,其振動均$<k$.且當$\sigma>k$時,其總和必小於ϵ.故此函數可以求其積分.

7. 最終此條件可以最簡單之語述之於次:

有限函數在一已知節段間可求積分之必要且充分之條件,爲此函數之不連續諸點作成爲零包含之集合.

蓋若$k_1,\quad k_2,\quad \dots,\quad k_n,\quad \dots$ 爲漸次收斂於零之正項數列.又$G_1,\quad G_2,\quad \dots,\quad G_n,\quad \dots$ 爲諸點之閉合集合,且在諸點時函數之測度各爲$\geqq k_1,\quad \geqq k_2,\quad \dots,\quad \geqq k_n,\quad \dots$

則函數之一切不連續之集合,當 n 增加至無限大時,爲 G_n 之集合之極限,又此集合有零之測度,蓋 G_n 對於 n 之各值均爲零之測度也.

（未 完）

集合理論幾何學

湯璪眞譯

（原文：Mengentheoretische Geometrie. Von Hans Hahn, Wein. 見 Die Naturwissenschaften, Heft 47, Seite 916）

因有數百年之經過,幾何學之領域,遂有意外的推廣.古代之幾何學家,僅研究極少數種形狀而已:直線與平面,以及由線分合成之多角形,與由多角形合成之多面體,再次則少數種曲線由圓而至其他種圓錐截線.又少數種曲面由球而至圓錐等皆是.自有解析幾何之發明,此領域卽推廣至於由解析方程決定之一切幾何形狀;凡此皆可作爲幾何學上所研究之對象,而其始則偏重於全體代數曲線及代數曲面.至引用微積分之方法以研究幾何學,則又爲晚近進一步之推廣,於是成立一種所謂微分幾何學,其中所論者有各種曲形狀之長度面積體積,與乎相切及曲率之性質,更及其他等等.凡此皆略習算學者所無不深悉者也.然最近數十年中之變化,則知之者尙屬少數.變化爲何,卽自有坎托（Cantor, 1845–1918）創造之研究以後,幾何學遂產生一新派別,其中對象複雜深奧,絕非一切舊幾何學所可比擬,而其與吾人以空間關係之分析,又絕非以前所

能想像之精細.此爲何物,即集合理論幾何學是.然集合理論方法之効用,尙非僅將其研究之對象突然增加其範圍而已;由此方法,更可將各系之幾何基本概念向之用經驗決定而曾未與以任何完全定義者,自今開始作明確之論理認識,關於集合理論幾何學之此一部份,今當論之於下.

自從坎托始集合理論幾何學所涉及之範圍,僅爲直線上平面上或歐氏空間內任意點集合.其後有夫勒拆(Fréchet)者,更注意集合理論之方法,可以推廣至與所取基礎空間之性質毫不相關.此後集合理論幾何學在極普遍而抽象之空間內進行研究竟成爲通常之事.此種空間之最重要者即位置解析空間.

所謂位置解析空間者,乃由任意元素合成之任一集合 E 也;各元素名曰點, E 之部分集合名曰點集合.點與點集合間之關係茲僅假定對於每一點 x 必有一適合簡單條件之點集合與之相應;此點集合名曰 x 點之近傍;而其所適合之簡單條件大都用豪士多夫(Hausdorff)所造成之四條件:

(1) 對於每點 x 至少有一近傍 U_x 與之相應,且每一近傍 U_x 必含其點 x.

(2) 若 U_x 及 V_x 同爲 x 點之兩近傍則必有一近傍 W_x 同時爲該兩近傍之部分集合.

(3) 若 y 點在 U_x 之內則必有一近傍 U_y 爲 U_x 之部分集

合.

(4) 若 x, y 爲兩點則必有兩近傍 U_x, U_y 無一公共點.

此四條件可名曰豪士多夫氏之近傍公理.根據如是之近傍概念於是可下集合理論幾何學中基本概念之定義.極限點概念乃坎托以前所偶見,以後所常見者也.茲取其定義爲例:若 x 點之每一近傍 U_x 常含點集合 A 之無數點者則該 x 點名曰點集合 A 之極限點.故有限點集合(即由有數點合成之集合)決不能有一極限點,而無限點集合(即由無數點合成之集合)可有亦可無,例如直線上一切有種數坐標之點,成一集合 G 其中無極限點;若由線分除去兩端後其餘全數之點合成一集合 J 則必有無數之極限點.由此可知有時極限點屬於 J 集合(指線分內之點)有時則否(指線分之兩端).於是引起吾人復從一切可能之點集合中用極簡單之條件選出一類:即若點集合 A 之每一無限部分集合必有一極限點屬於 A,則該點集合 A 名曰完全集合;上述之集合 G 及 J 非完全集合也,然若取線分內全數之點及其兩端合成一集合則必爲完全集合.

藉近傍概念之助,則遇一點集合時,即易下其邊界概念之明確定義:設 A 爲空間 R 之點集合;若 x 點之每一近傍既含屬於 A 之點,又含不屬於 A 之點,則該 x 點名曰集合 A 之邊界點;A 之全數邊界點成一集合,於是再名曰 A 之

邊界.又一憑感官而生之概念,今當與以明確之論理解釋,此卽連鎖概念是:先名點集合 A 之能分爲二部分 B,C 且能令 B 之點,無一爲 C 之極限點,又 C 之點無一爲 B 之極限點者爲分裂集合,則點集合 A 之不能如是分裂者,卽名曰連鎖集合,線分不論其帶兩端與否均爲連鎖集合.今若去其內分點,則所去者雖少至僅爲一點,然其殘餘點所成之點集合卽不復爲連鎖集合.如是之連鎖概念與由豪士多夫,西品士啓(Sierpiński),及其門人克那士忒(Knarster),庫拉托士啓(Kuratowski)所闡發幾何內容仍相通.關於此點有一極簡單之定理,完全爲感官所認識之事實,今述之於下;卽若 A 爲一完全任意之集合,B 爲一連鎖點集合,旣含屬於 A 之一點又含不屬於 A 之一點,則 B 至少含 A 之一邊界點.分離概念至是亦能明確解釋:設 A,B,C 俱爲空間 E 之點集合;若每一連鎖點集合含 A 中一點爲 B 中一點者,亦必含 C 中一點,則曰 A 與 B 爲 C 所分離;於是每一點集合 A 與其補集合(卽不屬於 A 之點所成之集合)必爲 A 之邊界所分離.此外尙有待決定者卽連鎖概念者是:凡含多於一點之集合,如爲完全且爲連鎖者卽名曰連續形,例如含兩端之線分成一連續形是.集合之無一部份爲連續形者,則謂之不連續.(例如每一有限點集合又如上述無限點集合 G 皆是).

茲更略論曲線概念!似乎人人心目中皆懷有幾分關於

曲線之直覺見解,然而在極近以前此概念始終缺乏明確之定義.往日對此概念雖有種種決定之嘗試,要皆不能認爲適當;茲僅須就其中一種考之,其言曰:“曲線乃由一點經過連續運動而成”,或詳言之爲:若一點集合,能由一連續運動之點,於有限時間內經過者,則其點集合名曰曲線.曲線之此種定義就目前言之,一望而知其無用,蓋裴諾(Peano)曾發見,二次面亦可由一連續運動點,於有限時間內經過之,然後無人認二次面爲曲線也.於是發生一應解決之問題,卽何種點集合爲理想之曲線定義中所不可不用者,——此爲小範圍內連鎖問題之一,馬祖岐維(Mazurkiewiez)與予同時解之,因而發見向爲人所未注意之幾何性質——然曲線概念之有用定義仍一無所得.如是之定義直至最近數年中始由孟吉(Menger)及烏立遜(Urysohn)建立之,其言曰:若連續形 K 上每一點 x 之每一近傍 U_x 內必能求一近傍 V_x 令 V_x 之邊界與 K 有一公共之不連續集合,則該連續形 K 名曰曲線.此定義已公認爲極端合用.在解析幾何及微分幾何僅能將極特殊之曲線作一度之研究,此後用集合理論之方法,卽可進而研究最普遍之曲線;少數年前曾出有一種範圍廣大而內容充實之一般曲線理論,從事著述之人,除主要之孟吉與烏立遜外,尙有若干美國少年學者亞勒(Ayres),基曼(Gehmann),魏爾德(Wilder),槐柏(Whyburn)勞績亦不少.茲僅引一有趣味之結果:孟吉

於三度歐氏空間內作成一萬有曲線 K 其性質如次:任意(僅在無關重要條件之下)空間之每一任意曲線,必可與 K 之一適宜部份互成一一連續對應;或簡言之,即萬有曲線 K 含每一任意曲線之位置解析原形.

集合理論幾何學之一最大成績爲度數概念解釋之成功.吾人常以直線圓橢圓等爲一度,平面球面圓錐等爲二度,經驗空間立方球體等爲三度;至於"一度""二度""三度"各概念之明確定義,則未嘗有也.一部分人或者以爲其分別在乎二度集合所含之點遠多於一度集合,三度集合所含之點又多於二度集合,此種意見仍經證明爲無用,蓋坎托爾於研究集合論之際,曾發見直線平面空間含有同數之點,即平面(空間)之點,能與直線之點,互成一一對應是也.度數之實際定義,似乎由玻紮諾(Bolzano)開始,就極多處考之,此人實爲批評算學之前輩,其言曰"……依予言之,若每有一充分小之距離,範圍內之每一點,必有一點或數點爲帶此小距離之隣點,但斷非有過多之隣點,以致此等隣點之全體,又已獨自成爲新範圍,則該範圍名曰一度範圍或線;若每有一充分小之距離,範圍內之每一點必有一全線之點爲帶此小距離之隣點,則該範圍名曰二度範圍或面;若每有一充分小之距離,範圍內之每一點必有一全面之點爲帶此小距離之隣點,則該範圍名曰三度範圍或立體"此處已試用度數概念之上溯定義;即先確

定何謂一度,於是二度概念卽可根據一度概念以下定義,其餘類推.度數之上溯定義,又有傍卡勒(Poincarè)用之:"若作度數爲 n-1 之一個或若干截口能將連續形析散成若干分離部分,則曰該連續形有 n 度."傍卡勒之言,經過布牢厄(Brower)之改良,臻於明確,因之適合論理嚴格要求之上溯定義遂得建立.布牢厄又已證明凡在解析幾何所常視 n 度空間之物,依新定義言之亦爲 n 度.至此始真能得出屬於現今度數理論教材中之結果.此定義與人隔絕甚久,直至 1921—1922 年有過悲慘生活之俄國人烏立遜與孟吉者,——互相研究而與布牢厄不生關係——,定出與布牢厄定義並非相等之上溯度數定義,爲各最重要空間之用,於是度數理論遂有極迅速而多價值之發展.予今採用者係出自孟吉之定義:若集合 A 內每一點 x 之每一近傍 U_x 內,必能求得一近傍 V_x 令 V_x 之邊界與 A 無公共之點則曰該集合 A 爲 o 度;若 A 中每一點 x 之每一近傍 U_x 內必能求得一近傍 V_x 令 V_x 之邊界與 A 最多有公共之 n-1 度(n>o)集合,則曰 A 最高爲 n 度;若 A 最高爲 n 度而非最高爲 n-1 度則曰 A 爲 n 度.(上述之曲線定義,至此亦可改爲:曲線乃一一度連續形).關於度數理論之建設,除烏立遜與孟吉外,亞歷山大洛夫(Alexandroff),赫勒威次(Hurewicz),馬沮岐維,圖馬琴(Tumarkin)均有貢獻.其重要結果爲近時所已見者,孟吉已著成度數理論一書: Menger, Dimensionstheorie. Leipzig und Berlin: B.G. Teubner 1928, IV und 320s. 本文雖亦可介紹其中之最重要結果,惟爲篇幅所限,茲先指出:孟吉已證明每一 n 度集合能與一歐氏 2n+1 度空間互成一一連續對應,故凡有限度數可能集合之位置解析原形,均能於有限度數歐氏空間內求出;然後介紹著名驚人之分解定理,卽每一 n 度集合必能由 n+1 度而不能由少於 n+1 之 0 度集合所合成,例如直線本爲一度而係由其有理點集合與無理點集合二者所合成.(此二者皆爲 0 度集合)是也.此外另有若干度限理論之問題尙待解決,吾人可於孟吉書之末自行參考,茲不贅.

附本文內中西重要名詞對照表:

點集合	Punktmenge
近傍	Umgebung
極限點	Häufungspunkt
完全點集合	Punktmenge, welche in sich Compakt ist.
分裂集合	Spaltbare Menge
連鎖集合	Zusammenhängende Menge
連續形	Kontinuum
分離	Trennung
萬有曲線	Universalkurve
位置解析原形	Topologisches Urbild

度數 ································ Dimension

分解定理························ Zerspaltungssatz

幾何學之定義與分類

美國芝加哥大學雷因教授 (Ernest P. Lane) 著

程綸譯

此篇乃雷因教授於一九二九年十一月二十九日在芝加哥大學科學及數學教師中央聯合會之演講原文載在 School Science and Mathematics; Jan. 1930. 譯者註

1. 引論　為讀者易於明瞭起見,今先略述此篇之梗概.篇中首先述明幾何學最著名之古典定義.再以定量幾何學 (Metric Geometry) 與射影幾何學 (Projective Geometry) 之對照,為此定義之例證,復作少許之歷史記載以標明此種對照之重要.並述綜合幾何學 (Synthetic Geometry) 與解析幾何學 (Analytic Geometry) 之別.

此後則述及著名之各種幾何學之分類,例如定量幾何學,定限幾何學 (Affine Geometry),射影幾何學,雙有理幾何學 (Birational Geometry),及位置解析學 (Analysis Situs).最後述明代數幾何學 (Algebric Geometry),及微分幾何學之別,黎曼幾何學 (Riemannian Geometry),及非黎曼幾何學 (Non-Riemannian Geometry 之別,歐幾里德幾何學 (Euclidean Geometry) 及非歐幾里得幾何學 (Non-Euclidean Geometry) 之別.

2. 定義　此處採用德國著名數學家克萊茵 (Klein).

之定義.此定義發表於1872年挨爾蘭根(Erlangen)大學報告書爲造成時代之名著,以加入挨爾蘭根大學哲學院及委員會之機會而公佈之.其定義可以簡單之語述之如下:

幾何學者研究一個圖形在一變換羣中一切不變式者也.

欲此定義之意義更爲清晰,今由幾何學之結構而評論之.幾何學之構成,第一事爲選擇幾何之空間,例如平面,尋常空間,或 n 次空間,故幾何學可依其空間而分類.第二事爲選擇空間內之原素.空間內假設均被原素充滿,在初等幾何學中爲點,然亦可爲綫,面,圓,球;或其他等等.故幾何學可依其原素而分類.第三事爲於此空間內用原素以作圖形,例如平面幾何學中之三角形,可謂爲用點作成也.第四事爲選擇變換羣,或選擇圖形所受之演程.最後當施行變換時,其圖形中一切不變式之研究.凡此研究卽克萊茵之所謂幾何學.

再以定量幾何學與射影幾何學之區別爲此定義之例證.定量幾何學爲圖形在運動羣中一切不變式之研究.尋常初等幾何學卽爲此種類.定量幾何學之基本假定,爲疊置假定,近代教科書列爲第一假定,其述敍如次.

任何幾何圖形,可以運動而不變其形狀大小.

此假定之敍述,可以更準確之語句述之,卽"不變其任何主要性質,"所謂形狀與大小,或角度與距離,祇定量不

變式中之二者而已.如在芝加哥作一三角形於紙上,郵寄至紐約,及至紐約時,其定量性質仍然存在.

由他一方面言之,射影幾何學爲圖形在射影羣中一切不變式之研究.於此幾何學內可將一圖形由此處射至彼處不變其任爲主要性質.例如電影機開演時由膠片上之圖像射影於觀衆前之銀幕上.此二圖像有不同之點,如其大小是,但就他點言之,仍爲同一圖像.若膠片上之圖像爲"跳舞",而銀幕上之圖像爲"宴慶",此必無之事也.膠片圖像與銀幕上圖像之共同性質,不因射影而變,即在射影之下不變.如此研究即爲射影幾何學.

3. 歷史之紀載　定量幾何學與射影幾何學之歷史,其間有顯著之對照.定量幾何學爲幾何學中之最古者.希羅多德(Herodotus)曾謂幾何學起源於埃及,而其所以能致此之原因有二:第一,尼羅河每年泛濫,有求方法以恢復田界之必須.第二,僧侶組織閒暇學會,乃有研究之機會.相傳紀元前六百餘米利都(Miletus)人退利斯(Thales)將幾何學輸入希臘.希臘人將幾何學組成學科,成有論理之系統.最著名之希臘幾何學家爲歐幾利得,生於紀元前三百餘年,彼時之幾何學爲定量幾何學,但埃及所論者,則僅量地之法則而已.

射影幾何學較爲近代.創始於逢塞勒(Poncelet)之著作.彼爲拿破侖軍隊中之官員,於1812年侵入俄國受傷於克

剌斯餒 (Krasnoi) 之役,待死戰場,被俄人擄去,置於薩拉多夫 (Saratoff) 之軍獄中,遂有此閒暇之時間,乃於 1813 年之春,不用書籍紙筆之助,發現其射影幾何學之理論. 1814 年回法, 1822 年遂公佈其射影幾何學之巨作.

由歷史之脈絡觀之,仍可得綜合幾何學與解析幾何學之區別.古代之幾何學爲綜合幾何學,卽以直觀爲憑證,以理論爲工具之純粹幾何學.中等學校初習之課程,卽此種幾何學.至與綜合幾何學相對照者則有解析幾何學.運用坐標之系統以研究之,其優點在能用解析學與代數學有力之方法以得幾何學之結果.但解析幾何學家絕不能以此而忘却純粹幾何學之定理,因其定理,均不倚賴坐標系統而自存在也.解析幾何學創始笛卡兒 (Descartes 1596—1650), 此所習知者也.

4. 分類　　幾何學顯著之種類已如上述.爲簡單計,今述以點爲原素之平面幾何學.並採用解析之觀念,而依其變換之基本羣,作爲幾何學之分類如次:

今取平面上之常用直交坐標系而論,則普通一點之坐標爲 (x,y), 又設 $(\bar{x},\bar{y})$ 爲經過一變換後,此點對於同一坐標系統之新坐標.但此節所討論者,均假定其坐標系統不變.

平面幾何學之最簡者,爲移動幾何學 (Translational Geometry) 卽其變換羣爲次之移動,

(1) $x=\bar{x}-h,\qquad y=\bar{y}-k$

另一簡單者爲轉動幾何學 (Rotational Geometry) 卽其變換羣爲依一定點而轉動.若此點爲原點時,則轉動之方程式爲

$$(2)\qquad x=\bar{x}\cos\alpha+\bar{y}\sin\alpha,\qquad y=-\bar{x}\sin\alpha+\bar{y}\cos\alpha.$$

設先施以一移動,再施以一轉動,則其結果爲一運動 (Motion) 如下:

$$(3)\qquad x=\bar{x}\cos\alpha+\bar{y}\sin\alpha-h,\qquad y=-\bar{x}\sin\alpha+\bar{y}\cos\alpha-k.$$

此運動(3)於尋常定量幾何學中爲組成變換之基本羣.

另一較簡之幾何學以次之伸張 (Stretchings)

$$(4)\qquad x=m\bar{x},\qquad y=n\bar{y}$$

爲其基本羣.若 m 及 n 二者或一爲負數時則爲反映 (Reflection).

又一較任何種更普遍之幾何學爲定限幾何學,其定限變換之方程式爲

$$(5)\qquad x=a_1\bar{x}+b_1\bar{y}+c_1\qquad y=a_2\bar{x}+b_2\bar{y}+c_2$$

此定限羣含有本節上述各羣甚明,但定限羣又屬於次之射影變換羣

$$(6)\qquad x=\frac{a_1\bar{x}+b_1\bar{y}+c_1}{a_3\bar{x}+b_3\bar{y}+c_3},\qquad y=\frac{a_2\bar{x}+b_2\bar{y}+c_2}{a_3\bar{x}+b_3\bar{y}+c_3},$$

此處

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$$

由此可見一射影變換能使有限點相當於有限點而無限距離之點相當於無限距離之點者,即爲定限變換.

尙有須注意者,羣愈大,則不變式愈少.在一羣中之不變式,當必爲分羣中之不變式.故各射影不變式亦各爲定限不變式,反之則不然.同理各射影不變式,亦各爲定量不變式,反之則不然.因之射影幾何學之全部,可云含於定量幾何學中.由歷史方面言之,在射影幾何學未宣告獨立另成一科之前,多數射影定理常發現於古代幾何學,此乃事實也.

射影羣屬於次之雙有理變換羣

(7)　$x = P_1/P_3, \qquad y = P_2/P_3$

此處 P_1, P_2, P_3,爲 $\bar{x}, \bar{y}$ 之多項式,設其次數最高爲 n.此種幾何學之著作甚廣,此處暫不具論.

最後,較上述更普遍之變換爲普通之連續點變換

(8)　$x = f(\bar{x}\,\bar{y}), \qquad y = g(\bar{x}, \bar{y})$

此處之 f, g 爲 $\bar{x}, \bar{y}$ 之連續函數.研究在此羣中之不變式謂之位置解析學.位置解析學之著名問題爲四色之問題(Four Color Problem).即證明僅以四色繪世界地圖,足使相隣二國不以同色表示之.

5. 微分幾何學　由另一觀點言之幾何學可分爲代數幾何學即積分幾何學 (Integral Geometry) 與微分幾何學二種.簡言之,代數幾何學爲解析幾何學,其方程式爲代數

的.又因雙有理幾何學之運用較廣,因之代數幾何學之名辭,常與雙有理幾何學有同一之意義.但代數幾何學視一圖形爲整個的,故亦可稱爲積分幾何學.例取此幾何學中一問題;如求一直線及一錐線之各交點.欲得此解答,須知此直線及此錐線之全體.

反之,微分幾何學,則研究一原素隣近處之圖形,例如某點隣近處之曲線,於微分幾何學用極限方法.實際則全部應用微分法.例取此幾何學中一問題,如定曲線上一點之切線,則以通過曲線上二點之割線之極限作爲切線之定義,此所習知者也.而此敍述,祇須知切點隣近處之曲線,亦甚明顯.

自相對論發生後,造成幾何學之文藝復興.近代之人,均知微分幾何學有黎曼幾何學及非黎曼幾何學二種.此二者皆與物理學理論有密切之關係.

黎曼幾何學之自然觀念,不難了解.在尋常空間之定量微分幾何學中,一曲線之微弧,表以常用之公式

(9) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

此式之右端爲二次微分形式,或微分 dx, dy, dz,之二次齊次多項式.黎曼於其 1854 年論文中,推廣此種記法.令次數之數目非爲三而爲 n,則一點之坐標爲 $x^1, x^2, \cdots, x^n$.又令曲線之微弧表以次之普通二次微分形式:

(10) $$ds^2 = \sum_{ij}^{1\ldots n} a_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

此種幾何學卽黎曼幾何學.如取此幾何學中一問題,爲決定長度最短之線,以之代初等幾何學中之直線.則此長度最短之線,謂之極短線.(Geodesis) 可由下之微分方程式求之

(11) $$\frac{d^2x}{ds^2}+\Gamma^{i}_{jk}\frac{dx^{j}}{ds}\frac{dx^{n}}{ds}=0 \qquad (i,j,=k1\cdots\cdots n)$$

此處利用張量解析之總和規則,將對於 j 及 k 之總和記號略去,而係數 Γ^{i}_{jk} 則爲係數 a_{ij} 之函數及其微分,謂之克里斯妥夫記號 (Christoffle Symbols). 但其公式此處暫不寫出.

非黎曼幾何學創始於槐爾(Weyl) 1918 年所發表之論文.黎曼幾何學與非黎曼幾何學之區別,乃在非黎曼幾何學係不用二次式 (10) 且係數 Γ^{i}_{jk} 爲坐標 $x^1, x^2, \cdots, x^n$,之任何函數.其變換一如克里斯妥夫記號,屬於上列普遍變換之中

(12) $$x^{i}=x^{i}(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\cdots\cdots\bar{x}^n,) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad \frac{\partial(x^1,x^2,\cdots,x^n)}{\partial(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\cdots,\bar{x}^n)}\neq 0$$

6. 今可論及歐幾里德及非歐幾里德幾何學之區別矣.歐幾里德之幾何學爲尋常經驗之幾何學,其中所根據有著名之歐幾里德之平行假定,或稱第五假定,其文如下.

通過一點,祇能作一線與一已知線平行.

數學家盡力旁徵以證此假定,約二千年,均不愜意.薩析里 (Saccheri 1667—1733) 將達到非歐幾里德幾何學,然失其勇力,由伊證明用兩個替換假定將引起雙曲線幾何學及橢圓幾何學,但不真確.及至 1825 年俄國喀山 (Kasan) 大學

羅巴遜斯啓 (Lobachevski) 及匈牙利人波耶 (Bolyai) 不期而同時發現雙曲線幾何學,謂通過一點至作二線以至無窮線,與一已知線平行.羅氏發表其結果在先,但波氏得此結果,或較早於羅氏.又橢圓幾何學之存在,以黎曼 1854 年博士論文公佈之,卽所謂過一點不能作一線與已知線平行.此等雙曲幾何學及橢圓幾何學,統名曰非歐幾里德幾何學.

7. 結論　　幾何學之定義與分類之討論,於此告一結束.以簡略之文敍述至大之題,僅及梗略,必非所宜.但若於測地術專科之偉大,知之更週;於其各部對於全體之關係,審之更晰;則以餘暇潛思此理,不僅有與,亦復有益,此或可以得閱者之同意也.

波動力學導言

潘祖武

1. 波動力學之基本思想.

1·1. 波和粒子. 當 Planck 于 1900 年發表其量子說時決料不到沒三十年的功夫就發展成一包含極廣的理論.物理學中的宇宙相因之異常拓充.關于物質真性的問題大體上久已認為得了解答.自古希臘時代以至近年哲學家和物理學家都相信物質是由不可再分而性質不變的原體所構成.在古希臘,這種原體只是不可再分的剛體,Democretus 所謂原子的就是它.遠至十八世紀, Leibniz 把這思想加以發展,以為原子並無空間的展拓,只好看做一個力的中心,換言之,可見可觸的物體只是個外相而已,事實上是包含許多力的中心的真空.但至前世紀末原子性的思想才得其嚴密的實驗的根基.與那原體相當的却不是原子而是兩種更原始的東西,電子(Electron)和初子(Proton).這種理想一直到 1925 年沒有敢懷疑它的.與此比類,有 Planck 的作用量子 (Elementare Wirkungsquantum) 和安斯坦的光量子 (Lichtquant) 或光子(Photon).

至于光的真性自 Huygens, Young 和 Fresnel 的研究以後,

其爲連續的波動現象,無復可疑.但自光電效應及其逆現象發現後而這種理想又發生動搖.若以 m 表電子的質量, v 表其速度, h 表 Planck 的常數, U 表電子由金屬脫出的功作,而 ν 表射入金屬面的光的振動數,則安斯坦的光電定律爲

$$(1)\qquad \frac{m}{2}v^2-U=h\nu.$$

接此定律除了假設在輻射場裏的能力集中成 $h\nu$ 那麼大的量子,原子裏的電子把它吸收進去變成運動能力之外,好像不容有旁的意義.安斯坦由理論的研究,以爲光子不但具有能力 $h\nu$ 還具有衝動 $\frac{h\nu}{c}$ (c 表光的速度). 據衝動不滅定律,一個光子由物體放出時必有一種反衝,如彈子放出時鎗上所受的反衝一樣;原子中的電子遇一光子時能吸收它的能力之外,還有它的衝動.Compton 效應可作爲它的一個實驗的證明.可是旁一方面,光子說並不能說明光之干涉和迴折的問題.那嗎光同時具有波動性和粒子性.這種光之"波動粒子平行性"於 1924 年由法國的物理學家 Louis de Broglie 首先應用于物質上去,後經 Schrödinger, Dirac 等的補充,以及與 Heisenberg, Born 等的量子力學的聯絡,成功第三種力學,不但把第一種加利略的力學而且把第二種安斯坦的力學包含着,作爲特例.

1·2. 波動力學的出發點. 波動力學的出發點是要使粒狀性和週期性的理想間有一種聯絡,粒子運動與波動

兩種概念要有不可分離的關係.

設一小體于無外力作用之下運動.在這最簡單的情形,可用相對論的基本原理得出上邊所尋求的波動與小體間的關係.試于加利略坐標系的總體中,任取兩系,小體對於第一系 S 是在 x 軸的方向以速度 v 運動;第二系 S',小體對之為靜止的,即所謂靜止系,而該系對第一系則以速度 v 循着 x 軸運動.令靜止系中一點的坐標為 x_0, y_0, z_0,而在第一系的為 x, y, z,則依 Lorentz 變換,

$$(2)\qquad x=\frac{x_0+vt}{\sqrt{1-\beta^2}};\ y=y_0;\ z=z_0;\ t=\frac{t_0+\frac{\beta}{c}x_0}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad \left(\beta=\frac{v}{c}\right).$$

反之得

$$(3)\qquad x_0=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}};\ y_0=y;\ z_0=z;\ t_0=\frac{t-\frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

設在靜止系內一小體的坐標是 x_0, y_0, z_0.假定有一波動與該小體相應,它在靜止系中是定常波,即它數學的式子只在 $\cos 2\pi\nu_0 t_0$ 的因子中包含時間.常數 ν_0 叫做該小體的特有振動數.在 S 系中,依方程式(3)這位相因子應為

$$\cos 2\pi\nu_0\frac{t-\frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

令

$$(4)\qquad \nu=\frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}};\ w=\frac{c}{\beta}=\frac{c^2}{v},$$

則上式變為

$$\cos\left[2\pi\nu\left(t-\frac{x}{w}\right)\right],$$

在 S 系內的觀察者看這現象好像是一個波動,其振動數是 ν,以速度 w 在 x 軸的方向傳播.w 叫做位相速度.這個

波動叫做位相波或物質波(或 De Broglie 的波).

據假定,該波動在靜止系中到處的振動數和位相都要相等.要表出該系中位相的分配如何,可設想該系空間的每一點上有一架錶.各錶要是同期的(Synchron)而週期 $T_0=\frac{1}{\nu_0}$.對 S 系,每架錶都以 v 的速度運動.一架錶在靜止系中有個固定的位置 x_0,但在 S 系中則其 x 坐標是隨時間變化的,于時間 t 內所變化的是 vt.該錶所示的時間變化,據 Lorentz 變換,有以下的關係:

(5) $$\delta t_0=\frac{\delta t-\frac{\beta}{c}\,\delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}=\delta t\frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=\delta t\sqrt{1-\beta^2}$$

如該錶完成一次振動時,則在靜止系中 $\delta t_0=T_0=\frac{1}{\nu_0}$,在 S 系中的時間

(6) $$T_1=\frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}>T_0$$

在 S 系的觀察者看該錶的週期較 S' 系的要長些.這就是安斯坦的"時間展緩".

各錶在 S 系中的振動數

(7) $$\nu_1=\frac{1}{T_1}=\nu_0\sqrt{1-\beta^2}<\nu_0$$

假設于時間之一值 t_1,對于 S 系中的觀者,波動

$$\psi=a\cos\left[2\pi\nu\left(t-\frac{x}{w}\right)\right]$$

的位相與該錶的位相相等,卽

(8) $$2\pi\nu\left(t_1-\frac{x_1}{w}\right)=2\pi\nu_1 t_1.$$

于時間 t_2 錶在 $x_2=x_1+v(t_2-t_1)$.ψ 波在該點的位相是

$$2\pi\nu\left(t_2-\frac{x_2}{w}\right),$$

而錶的位相爲 $2\pi\nu_1 t_2$. 欲兩者相等時,當

(9) $$\nu_1 t_2=\nu\left(t_2-\frac{x_2}{w}\right),$$

因 (8), 也可寫如

$$\nu_1(t_2-t_1)=\nu(t_2-t_1)-\nu\frac{v}{w}(t_2-t_1),$$

卽

(11) $$\nu_1=\nu\left(1-\frac{v}{w}\right)=\nu(1-\beta^2)$$

據(4)與(6)方程式 (11) 是滿足了的.

據量子論,立刻可以想到,小體的能力 E 與相應波動的振動數 ν,可有下之關係.

(12) $$=h\nu,$$

h 是作用量子.

據相對論,小體在 S 系的能力之值:

(13) $$E=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

在靜止系的値

(14) $$E_0=m_0c^2$$

于是得

(15) $$E=\frac{E_0}{\sqrt{1-\beta}}$$

按方程式(4),能力受加利略變換時與相應波動的振動數變換相同,所以 $E=h\nu$ 的假設是對的.

至於衝動則依相對力學

(16) $$\phi=\frac{m_0\mathcal{V}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

把它同方程式(13)比較,它的數量應爲

(17) $$p=\frac{Ev}{c}$$

卽

(18) $$p=\frac{h\nu}{w}$$

它的方向是位相速度 w 的方向.

位相波的波長可與通常一樣,定義如:

(19) $$\lambda=\frac{w}{\nu}$$

則

(20) $$p=\frac{h}{\lambda}.$$

1·3. 羣速度. 設有許多的波,其振動數沒有超過一定範圍時,這一羣的波統稱爲波羣.試于一波羣中,觀察某一位置,其上各波的位相很一致,所以合成的振動數較大,此等位置較其旁的位置,其能力密度爲一極大,可稱爲該波羣的能力中心.那末對于能力中心有下之關係:

(21) $$\frac{\partial\psi}{\partial\nu}=0,$$

此處的 ψ 是位相, ν 是振動數.將 ψ 之值代入,則

(22) $$\frac{\partial\left[2\pi\nu\left(t-\frac{x}{w}\right)\right]}{\partial\nu}=2\pi t-2\pi\frac{\partial\left(\frac{x\nu}{w}\right)}{\partial\nu}=2\pi t-2\pi x\frac{\partial\left(\frac{\nu}{w}\right)}{\partial\nu}=0,$$

$$x=\frac{1}{\frac{\partial\left(\frac{\nu}{w}\right)}{\partial\nu}}t,$$

按上式 x 同時間有關,卽能力中心會運動的,而其速度爲

$$\frac{1}{\dfrac{\partial\left(\dfrac{\nu}{w}\right)}{\partial\nu}},$$

簡單以 g 表之（因 $\frac{dx}{dt}$ 爲速度,故 g 亦爲速度）. 能力以之向前傳播的這個速度 g 叫做波動的羣速度.在有拓散現象時,卽波速與振動數有關時,羣速度與波動速度是不同的.

將此應用于位相波,則據(4)

$$\frac{1}{g}=\frac{\partial\left(\dfrac{\nu}{w}\right)}{\partial\nu}=\frac{v}{c^2}+\frac{\nu}{c^2}\frac{dv}{d\nu}=\frac{v}{c^2}+\frac{c^2-v^2}{c^2v}=\frac{1}{v}$$

$$\therefore\quad g=v$$

那嗎依 De Broglie 的假設,上式所表的是,小體力學的速度等于位相波羣的羣速度.

1·4. 位相波的迴折　據 De Broglie 的理想,則物質小體如初子,電子等的運動,當有迴折的現象.普通光的干涉的觀察可能性與其波長有關,所以先要把與小體相應的波長的大小研究一下.

據方程式(20)

$$\lambda=\frac{h}{p},\quad p=\beta m_0 v,$$

但 v 甚小時,則對于光速爲甚小其二次方以上可以略去;

則
$$p=m_0v$$

而
$$\lambda=\frac{h}{m_0v}$$

設 $m_0=1g,\ v=1\ \mathrm{cm/sec}$, 則

$$\lambda \cong \lambda \cong 6.10.10^{-27}\text{cm}.$$

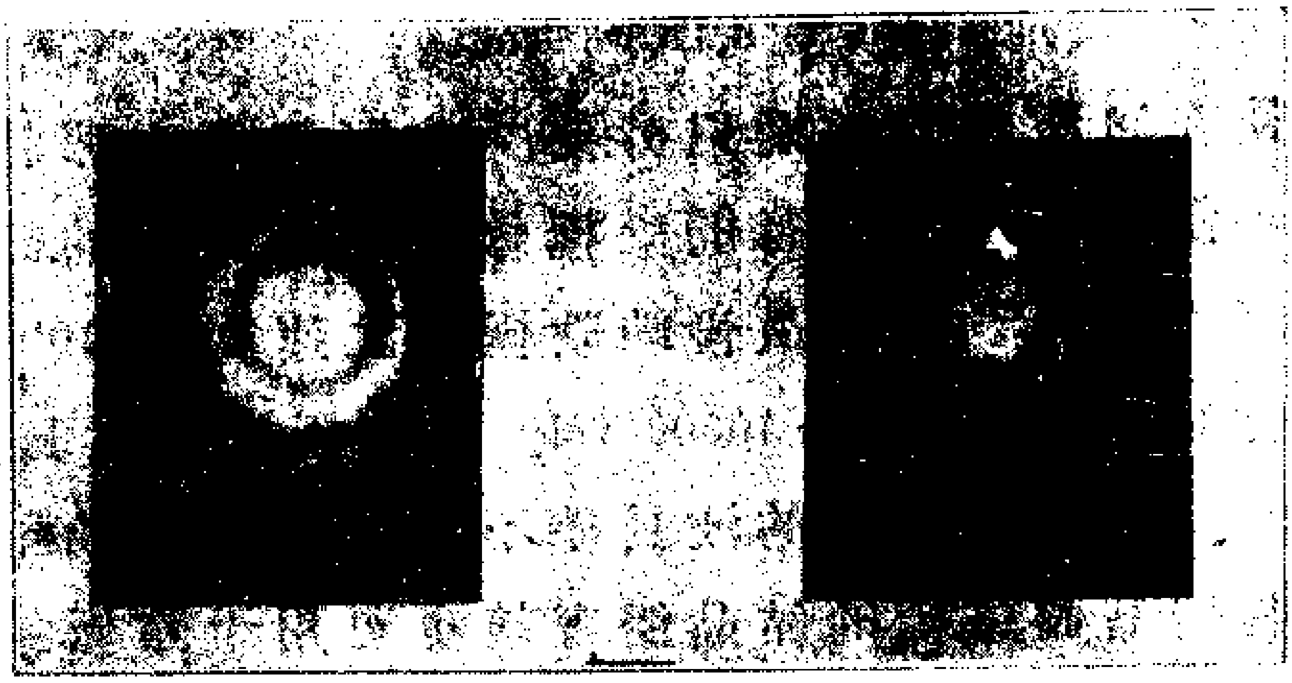
這波長在可觀察的範圍以外.要 λ 儘可能地大,那就要使 m_0 和 v 儘可能地小.緩行的陰極線是最合條件的.對于它 $m_0 = 9.10^{-28}$ 而 $\lambda \cong \frac{7.3}{v}$ cm. 最慢的陰極線之速度 $v = 10^8$ cm/sec., 故 $\lambda \cong 10^{-7}$ cm. 普通 $1 \rightarrow 10000$ Volts 的陰極線的波長爲 $10^{-7} \longrightarrow 10^{-9}$ cm. 與 X 光線的波長差不多.于 X 光線的干涉所用的是結晶體,這樣的結晶體應該也可用于陰極線,做迴折隔子,最好是金屬結晶體.

1927 年 Davisson 和 Germer 成功了這類的試驗.由其試驗可以證明經過結晶體的電子的迴折與 X 光線經過結晶體的迴折一樣.他們令一小束陰極線垂直射在結晶體的面上,用一電流計可得與其方向有關的電子之拓散强度.在一定的方向可得强度的極大.後來 G.P. Thomson 的試驗把這個試驗補充一下.他使極速的陰極線通過金屬薄.得一同心環的迴折相.由此所定的波長與 De Broglie 的波長 $\lambda = \frac{h}{m_0 v}$ 恰好一致.

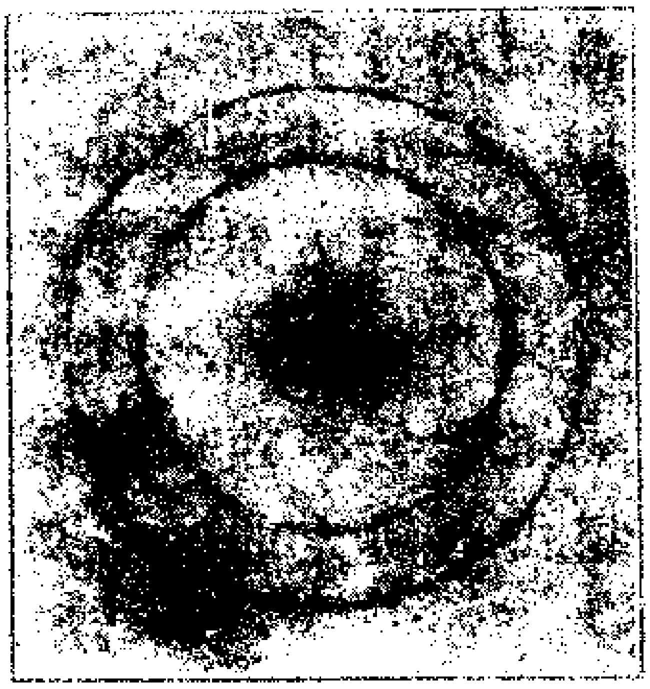
1928 年 Rupp 可于光學隔子上使生電子迴折的現象.可算出 De Broglie 的波長.那末電子的波動性的發現可以表示人類理性的威權和相對論極大的結果.

2. Schrödinger 的理論

2·1. 最小作用原理與 Fermat 原理. 由上邊的理論,一質量 m_0 速度 v 的小體要有一個相應的波動.其振動數



G. P. Thomson 的迴析相



菊池的迴析相

$$\nu = \frac{mc^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}$$

其位相速度

$$V = \frac{c^2}{v} = \frac{c}{\beta}$$

其波長

G. P. Thomson 的迴析相

菊油的迴析相

$$\nu=\frac{m_0c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}$$

其位相速度

$$w=\frac{c}{\beta}=\frac{c^2}{v},$$

其波長

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 v}$$

而羣速度等于 v.如果 β^2 較 1 爲甚小時(卽在牛頓力學的範圍),可令 $h\nu=m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2$ 和 $\lambda=\frac{h}{m_0v}$.

在屈折率爲一的媒質中,幾何光學裏的光線可由 Fermat 的原理來定義的:"光線由 A 至 B 時,其線積分

$$\int_A^\beta \frac{\nu}{w}dl=\frac{\nu}{c}\int_A^\beta n\,dl$$

是一個極小;" n 是個空間常數,卽 A,B 間的光線要最小的距離光線于是爲直線的而波是平波.因

$$\frac{v}{w}=\frac{p}{h},$$

則 Fermat 積分可寫如下形:

$$\frac{1}{h}\int p\,dl=\frac{1}{h}\int(p_x dx+p_y dy+p_z dz).$$

只加一常數 $\frac{1}{h}$ 就與 Maupertuis 的最小積分相等.那末關于小體的最小作用原理與關于相應的位相波的 Fermat 的原理間有類比的關係.

但光之直線的傳播雖在均勻媒質中亦非精密的.在對於波長甚大的範圍內,光之直線的傳播和有關的 Fermat 的原理始可應用.否則應囘顧到 Huygens 的原理,卽要顧到波動的主要特性. Schrödinger 的波動方程式就是進一步把波動的特性計入.

2·2. Schrödinger 的波動方程式. ψ 旣表 De Broglie 的振動函數而 w 表位相速度,則可用一般的波動方程式表之:

$$\triangle\psi-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0.$$

式中的

$$\triangle\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

首先限制於研究 ψ 對時間的關係可由 $e^{-2\pi i\nu t}$ 這個因子來表的,于是

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-4\pi^2\nu^2\psi$$

而

(2) $$\triangle\psi+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\psi=0$$

De Broglie 的波長可以小體的速度 v 表之.設小體的全能力是 $E=h\nu$. 如 v 之值甚小,則相對性改正可以略去而

$$\varepsilon=m_0c^2+\tfrac{1}{2}m_0v^2+U(x,y,z)=m_0c^2+E,$$

$$E=\tfrac{1}{2}m_0v^2+U,$$

與非相對性的能力定義相當.同法可得

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{m_0v}{h},$$

于是

$$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2m_0(E-U)}{h^2}$$

據(2)得

(3) $$\triangle\psi+\frac{8\pi^2m_0}{h^2}(E-U)\psi=0$$

這就是Schrödinger 的波動方程式.(至關于多體問題的,本文從略)

若加入相對性的補正,則必定

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{p}{h};$$

又因固有能力 $mc^2=\varepsilon-U$, 故 p 可以下式表之:

$$p^2 = -m_0^2 c^2 + \frac{(\varepsilon - U)^2}{c^2}$$

于是得

(4) $$\triangle \psi + \frac{4\pi^2}{c^2 h^2}\left[(\varepsilon - U)^2 - m_0^2 c^4\right]\psi = 0$$

令上式之 $(\varepsilon - U)^2 = (mc^2)^2 = h^2\nu^2$, 則變爲

$$\triangle \psi + \frac{1}{c^2} 4\pi^2 \nu^2 \psi - \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2}\psi = 0,$$

(5) $$\triangle \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2}\psi = 0$$

如果令

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

則

(6) $$\Box \psi - \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2}\psi = 0.$$

(5)或(6)就是相對性的波動方程式.

3. 特有值力學

3·1. 波動方程式之特有值. 據微分方程式論,于一微分方程式只對于其輔變數一定的值可求得到處唯一的,有限的和連續的解.這特別的值稱爲該方程式的特有值,與之相應的解稱爲特有函數.在 Schrödinger 的波動方程式中,其常數的輔變數是總能力 E,至于位能當然與其坐標有關.該方程式在一特別的情形所具的特有值,表能力之一定的非連續的值.能力之量子化的物理的問題,是由Schrödinger 引入一純數學的問題去.卽微方程式之特有值的問題.

3·2. 振動體. 現在把這種方法應用到較簡的例子上

去.設有一振動體,卽對一固定靜止位置振動的小體,如電子;它的振動是直線的且是純正弦振動.取靜止位置做坐標原點以振動的路徑做 x 軸,那嗎適用下式

(7) $$x = a\sin(2\pi\nu t).$$

將 x 對 t 微分就是速度 v,那末

(8) $$v = a\cdot 2\pi\nu\cos(2\pi\nu t).$$

運動能力是質量和速度平方的自乘之積之半,應爲

(9) $$L = 2a^2\pi^2\nu^2 m_0\cos^2(2\pi\nu t).$$

小體經過靜止位置時,其位置能力消失,只有運動能力,據能力不滅定律,它經靜止位置時的運動能力應等于總能力,則于上式,餘弦之值爲最大,卽等于 1 時,L 的值等于總能力 E.因

$$\sin^2(2\pi\nu t) + \cos^2(2\pi\nu t) = 1,$$

則于(9)以正弦代餘弦.參考(7),則得位置能力

(10) $$U = 2\pi^2\nu^2 m_0 x^2.$$

于這種特別情形,因 ψ 對于 y, z 兩軸沒有關係,再以方程式 (10) 關于位置能力之值代入,得

(11) $$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m_0}{h^2}(E - 2\pi^2\nu^2 m_0 x^2)\psi = 0,$$

設簡單令

$$\frac{8\pi^2 m_0}{h^2}E = \alpha$$

和

$$\frac{4\pi^2 m_0\nu}{h} = \beta,$$

而 $$\xi = x\sqrt{\beta}\,.$$

于是變成

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \beta\,\frac{\partial^2\psi}{\partial \xi^2}, \tag{12}$$

而

$$x^2 = \frac{\xi^2}{\beta},$$

代入(10)的兩方以 β 除之,則得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \xi^2\right)\psi = 0 \tag{13}$$

據微分方程式論(13)的特有值應由下式定之

$$\frac{\alpha}{\beta} = 2n+1 \qquad (n\ \text{為整數}). \tag{14}$$

由此得

$$E = (2n+1)\frac{h\nu}{2}. \tag{15}$$

於特有值力學中,線的調和振動體之能力為半個原能的奇數倍,即

$$\frac{h\nu}{2},\quad 3\,\frac{h\nu}{2},\quad 5\,\frac{h\nu}{2},\quad 7\,\frac{h\nu}{2},\quad \cdots\cdots$$

據舊量子論,能力應為原能的整倍數,這裏却是它的一半的整倍數.至于振動體所能具的最低能力值,亦與舊的不同,而不是零.

在熱學理論中,固體所具之能力應歸于原子的振動.那末剛才所得的結果,應可直接應用于此.舊量子論的結果,有與觀察的事實不符的地方,在波動力學發生以前,許多物理學家,如 Nernst 等,都想設法解决它,而引入所謂零度能力的假說,據此,物體在絕對溫度時,所具的能力不為零

而應爲$\frac{h\nu}{2}$.這種假說頗覺生强;而于波動力學中則變爲當然的結論.

3·3. 旋轉體. 與一固定中心有不變的距離的運動小體稱爲旋轉體.如果只在一平面上運動,就是循一圓周運動,稱爲有固定軸的旋轉體;如果在一球面上運動,則稱爲有自由軸的旋轉體.以下說明這樣的旋轉體.

對于此體的問題,最好是用空間極坐標而不用直角坐標,一點的位置是由與固定點的距離γ,球面上的經度及緯度來定的.設γ爲常數而可令等于1,則球函數的方程式變爲

$$(16)\qquad \triangle^{*}\psi+\alpha\psi=0,$$

$$\triangle^{*}=\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial}{\partial\Theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

φ是緯度,Θ是極距在這種情形旋轉體的位置能力和運動能力都是常數.設以L表運動能力,則Schrödinger的波動方程式變爲下形:

$$(17)\qquad \triangle^{*}\psi+\frac{8\pi^2 m_0}{h^2}\gamma^2 L\psi=0$$

由球函數論,上式只於

$$(18)\qquad \frac{8\pi^2 m_0\gamma^2 L}{h^2}=n(n+1)\qquad (n\text{爲整數})$$

時,有一個在全球面上有限的,連續的而不等于零的解.

因旋轉衝動D等于質量,速度和球半徑的積,即

$$D=m_0 v r,$$

而運動能力

$$L = \frac{1}{2} m_0 v^2,$$

于是

$$m_0 v^2 L = \frac{1}{2} D^2$$

由(18)式

$$\frac{4\pi^2 D^2}{h^2} = n(n+1)$$

或

(19) $$D = \frac{h}{2\pi}\sqrt{n(n+1)}.$$

舊量子論中旋轉衝動的值應爲

$$\frac{nh}{2\pi}$$

而于 Schrïdinger 理論的結果，$\frac{2\pi D}{h}$ 的比非整數而爲

0; 1,4142; 2,4495; 3,4641; 4,4721; ……………

3·4. 在氫原子上的應用 若將波動方程式(3)應用于氫原子,則

$$U = -\frac{\varepsilon^2}{r},$$

r 是電子與作爲不動的初子間的距離.于波動方程式(3)中有兩種情形: $E > 0$ 或 $E < 0$.在第一種情形與變成伊洪的原子相當,(3)有唯一的,有限的和連續的振動函數

$$\psi = \psi^0(x, y, z)\, e^{-2\pi i v t}$$

是它的解,顯明有一電子的雙曲電運動與之相當.在第二種情形只於 E 的一定值有唯一的,有限的和連續的解,與 Bohr 學說之量子化的能力值

(20) $$E_n = -\frac{2\pi^2 m_0 \varepsilon^4}{h^2 n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

一致.

所屬的"特有函數"

$$\psi_n = \psi'_n(x,y,z)e^{-\frac{2\pi i}{h}(m_0c^2+F_n)t}$$

與量子化的 Bohr-Sommerfeld 的橢圓軌道相當.

至於氫原子之波動方程式

$$\triangle\psi + \frac{8\pi^2 m_0}{h^2}\left(E + \frac{e}{r}\right)\psi = 0 \tag{21}$$

的特有值,其求法非常複雜,非這篇簡短導言所能述的,只好看 Schrödinger 自己的論文罷(在 Schrödinger, Collected Papers on Wave Mechanics 中).

4. 波動力學中之概率的觀念.

4·1. $\psi\psi^*$. M. Born 等研究原子現象時,都注重在粒狀的小體,以爲物理現象的實在內容都在小體的運動和其相互作用上,與之相應的波只好看作概率波.

函數 ψ,如平常光學中所論的一樣,可以一般地是複數:而以 ψ^* 以表其共軛複數. M. Born 把 $\psi\psi^* = |\psi|^2$ 看作輻射的强度,復把它來測小體於瞬間 t 在一定位置的相對概率.小體和波動有下邊的量的關係:

$$N \sim |\psi|^2,$$

N 表小體的數目.設 $|\psi|^2$ 關于全空間爲已知的,則在體積原素 dV 內所出現的小體的數目只能概率底地算出. $|\psi|^2dV$ 表一定小體在體積原素 dV 內出現的概率,而相應的 $|\psi^*|$

看做小體在該位置出現的概率密度.那末函數 ψ 與其共軛數之積關于全空間的積分 $\int|\psi|^2 dV$ 當等于 1.

設 | |² 甚大時,則可以不必深究小體的精密位置.如果 $|\psi|^2$ 甚小,則這個問題非常困難.只能用上邊的概率定義去解答.各個小體所表的是一個一個的原始作用而波函數 ψ 不能定這原始現象的位置.理論上只能計算一定原始現象在體積原素 $dV=dx\,dy\,dz$ 內出現的概率.這個概率不要看作同 $|\psi^2|\,dV$ 一樣.後者只關于一定小體在 dV 的發現而不關于彼處所能發生的原始歷程.這個歷程可看作由一定狀態到旁的一個狀態去的轉移.相互的轉移概率必與該兩個狀態特有的波函數 ψ_1 和 ψ_2 有關.它不但與一定體積原素而且與一定時間原素 dt 有關.若將該轉移歷程的位置略去不論,則有所謂概率的時間密度.

依 M.Born 等的意思,平常力學的歷程之因果觀必須代以概率的非因果的理解.但許多物理學家都喜歡把波看作原始的而粒狀小體作為其次的看.

不管把位相波看作概率波或是物理的實體,由粒狀的立場看去,物理現象要看作非定命論的來處理.平常力學所處理的是參考已知的,精確的開始條件及求一定運動方程式的積分,去決定某種事件.新力學不知道精確的開始條件.概率為 1 或為 0 的事件在新力學中是沒有的,只研究在 1 和 0 間的概率的.所以新力學不是要決定有一

定的概率的某一事件,而只是要決定所有可能的事件的概率.

在平常觀察的概大的 (Makroscopisch) 現象含有巨大數目的相等原始系,在實用上並不表現原始的非定命性,它爲"大數定律"所統治.由這概大的現象之表面上的定命性,可以有相當的原始歷程也有嚴格的定命性的結論.這個可是一個完全沒有根據的偏見,我們現在要由此解放出去.

4·2. 不定關係(Unbestimmtheitsrelation). 當觀察現象的時候,無論如何,多少總受些擾亂.只於研究的現象和外界(觀察者自身也屬於此)間能發生相互作用時始能觀察.如果測量過程對於研究的現象比較很少擾亂時,則特表該過程的量的值才爲適用(在實驗誤差範圍以內).如果測量過程把研究的現象變化的太厲害時,則所觀察得的結果不復能精密表出那個狀態.

常有測量過程決定一量 A 時必擾亂旁的量 B,使測量後不能認識,A 的值愈要精密而 B 的值就愈不能認識清楚.小體的位置平常是由它所反射,拓散或送出的光線而定的.一點狀光源由人眼或顯微鏡觀察時是個小迴折圈,其半徑約等於該光的波長 λ.小體的位置因此只是有限制的精密.我們可以擇取極小波長如 γ 線的(事實上不能構成 γ 線顯微鏡).設小體是一個電子.要決定該電子

所在的位置,就要觀察由其拓散的短波光線,於是有一原始的 Compton 效應,卽在觀察之際電子的運動量約變了 $\frac{h}{\lambda}$. 如果要同時決定電子的位置和運動量則永不能得一精確的結果:波長愈短時,則所測的位置愈精確而所測的運動量愈不精確這兩種測量的"不精密"的積的大小階次是 h 的大小階次,而與波長無關.

如果不由一原子所拓散的光而由原子自已所發的光來觀察它時,可得同樣的結果.若光以一光量子 $h\nu$ 的狀態射出,則原子受了一個反衝其大小是 $\frac{h}{\lambda}$.原子位置的決定愈能精確則在觀察之頃原子的運動量愈不能精確決定.反之在位相波的干涉試驗中,可證,小體運動量之實驗的決定愈精確,則其位置的決定必愈不精確.兩種 "不精密" 的積的大小階次仍爲 h.

不定關係,易證其對於運動量之每一成分和相當的坐標都各能成立:

(1) $\Delta p_x \cdot \Delta x \cong h, \quad \Delta p_y \cdot \Delta y \cong h, \quad \Delta p_z \cdot \Delta z \cong h$

令 $p = mv$, 則依豫設, m=const. ($v \ll c$):

(2) $\Delta v_x \cdot \Delta x \cong \frac{h}{m}, \quad \Delta v_y \cdot \Delta y \cong \frac{h}{m}, \quad \Delta v_z \cdot \Delta z \cong \frac{h}{m}.$

由上邊的公式可以看出只對於原始的物質小體才與"概大的"粒子力學爲重要的不同.令 $m = 1g$ 和 $\Delta x \cong 10^{-4}$ cm, 則依 (2),

$$\Delta v_x \cong 6.10^{-23} \text{ cm/sec.}$$

這與"概大的"小體運動相連繫的不精密,可以完全略去.至于關于電子和初子就完全不同.對于前者,因 $m=9.10^{-28}$ 時,$\Delta v_x \cdot \Delta x \cong 1$ ……. 于 $\Delta x \cong 10^{-13}$ 時,$\Delta v_x \cong 10^{13}$ cm/sec.

原始小體的運動因觀察而被擾亂,小體的位置或速度依(1)而變. h 和 $\frac{h}{m}$ 可表動力學的不定率.

若欲建立一微體力學,說明或豫言可以觀察的事實,則必棄去小體運動之嚴格定命論的說明.依 Heisenberg 的不定關係,只運動之概率的說明爲可能,它只能定小體於一定時間在一定位置的概率.依 M. Born, 這個概率可由波函數 ψ 決定.這概率理論的微體力學就是該波的力學或波動力學。

5. 放射之波動力學的理論.

5·1. 波叢的傳播. 據上邊所說的,小體的速度 v 並不與單色波傳播的速度相當而與一波羣的速度相當.運動小體之物理的相不是單色光而是波羣;所以波羣也叫做波叢(Wellenp·ket).

設 $\psi=\psi^{\circ}(x,y,z)e^{-2\pi i\nu t}$. 由2·2得 $\varepsilon=m_0c^2+E=h\nu$, 而 $\nu=\frac{E+m_0c^2}{h}$,

于是

$$E\psi=-m_0c^2\psi-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{4}$$

把它代入波動方程式而得

$$\triangle\psi+\frac{4\pi i m_0}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{8\pi^2 m_0}{h^2}(U+m_0c^2)\psi=0. \tag{5}$$

方程式(5)可以作爲波動方程式的一種推廣.但這種推廣

只于把 ψ 作爲複數處理時爲可能,則其共軛複數當滿足下之方程式:

$$(6)\qquad \triangle\psi^* - \frac{4\pi m i}{h}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \frac{8\pi^2 m_0}{h^2}(U + m_0 c^2)\psi^* = 0.$$

方程式(6)與(5)相當,可由(5)將時間方向掉轉(將 t 的正負號掉換一下).這個與傳統方程式

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

所表的"概大的"現象之可逆性相當.

設在無力作用的運動,$U = \text{const.}$ (5) 可變爲下形:

$$(7)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i}{4\pi}\frac{h}{m}\triangle\psi$$

這個方程式與拡散 (Diffusion) 方程式的形式相同,只要把 $\frac{ih}{4\pi m}$ 看作拡散係數.

設所研究的問題是一次的 (eind.mensional),則方程式(7)變爲(以 D 表 $\frac{i}{4\pi}\frac{h}{m}$).

$$(8)\qquad = D\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

其最簡的由拡散論所知的解爲

$$(9)\qquad \psi = \frac{N}{\sqrt{4\pi D(t+\tau)}}\, e^{-\frac{x^2}{4D(t+\tau)}},$$

N 和 τ 是兩個任意常數.于 D 之實值,此解與 N 個小體的拡散相應,這些小體原始集中在(在時間 $t = -\tau$) $x = 0$ 平面上,ψ 爲其濃度,而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\,dx$ 常等於 N.令 $2D\tau$ 爲實正數 a^2 而作出

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\psi^*\,dx = 1.$$

於是得

(10) $$\psi(x,t)=\frac{A}{\sqrt{a^2+\frac{i}{2\pi}\frac{h}{m}t}}\,e^{-\frac{x^2}{2\left(a^2+i\frac{ht}{2\pi m}\right)}},\quad\left(A=\sqrt{\frac{a}{\sqrt{\pi}}}\right)$$

和

(11) $$\psi\psi^*=\frac{A^2}{a\sqrt{a^2+\left(\frac{ht}{2\pi ma}\right)^2}}\,e^{-\frac{x^2}{a^2+\left(\frac{ht}{2\pi ma}\right)^2}},$$

函數 $\psi\psi^*$ 可以一 gauss 曲線表之,其在瞬間 $t=o$ 的寬度可以輔變數 a 測之,在時間 t 以輔變數

$$a_t=\sqrt{a^2+\left(\frac{ht}{2\pi ma}\right)^2}$$

測之.所觀察的波叢的寬度隨着時間的變化,如勾,股爲 a = const. 和 $\frac{h}{2\pi ma}t$ 的直角三角形的弦的變化一樣.

5·2. 放射 (Ausstrahlung). 令 $\psi_1, \psi_2, \psi_3,$ ……… 表氫原子之各特有振動函數,則據(5),

(12) $$\psi=\sum_n c_n\,\psi_n=\sum_n c_n\,\psi_n^c\,(x,y,z)\,e^{-2\pi i\nu_n t},$$

$c_1,\ c_2,$ ……… 表任意的振幅,那末

(13) $$\psi\psi^*=\sum_n\sum_m C_{nm}e^{-2\pi i\nu_{nm}}=\sum_{n\geqq m}\sum (C_{nm}+C_{mn})\cos 2\pi\nu_{nm}t,$$

$C_{nm}=c_n\psi^\circ_n\cdot c_m^*\psi^\circ{}_m^*$ 和 $\nu_{nm}=\nu_n-\nu_m$. 以 $\nu_n=\frac{E_n+m_0c^2}{h}$ 代入上式則

(14) $$\nu_n m=\frac{E_n-E_m}{h}.$$

方程式 (13) 中的振動數與 Bohr 的理論中兩種狀態轉移時所發光的振動數一樣. Schrödinger 利用這種事實以平常與傳統電力學相應的波動論理想來代替與光量子說相

應的 Bohr 的放光理想.他把放光的電子不作爲粒子看,只看作圍繞正核連續分配的電荷——"電子雲"——其體密度與$\psi\psi^*$成正比例.

設原子在一定量子化的狀態(n)時,則該量具一個時間的常數值 ($C_{nn}=|c_n\psi'_n|^2$); 那末,"電子雲"應發生時間的常數的靜電場.由此得 Bohr 的量子化的狀態之所以沒有輻射的說明.如果在方程式(8)裏有兩個或多個振幅係數如 c_n 和 c_m 不等於零時,則發生"電子雲"在空間的分配之起伏 (Schwebung),依傳統電力學,它生出電磁的交互場 (Electromagnetisches Wechselfeld),其振動數與起伏的振動數一致.以電磁波的形態每單位時間內所放射的能力與起伏振幅之平方,即 $|c_n\ c_m|^2$ 或 $|C_{nm}+C_{mn}|^2$,成比例.

參考書

近五年來波動力學的發展實在可驚.每種物理學雜誌裏幾乎多半是同它有關的論文;所出版關於它的書,好的也不少.這篇導言當然是很簡略的;有些地方只能把事實簡單地敍出,不暇詳細說明:這是要求讀者原諒的.如因這一篇小文使讀者對於波動力學發生研究的興趣,那就是他的目的已達.至於詳細的地方,請看下列各書:

Darrow, Introduction to Comtemporary Physics

Darrow, Wave Mechanics

Dirac, Quantenmechanics

Wilson, Modern Physics

Biggs, Wave Mechanics

Schrödinger, Four Lectures on Wave Mechanics

Birtwistle, The new Quautum Mechanics

Planck, Theoretische Optik

Försterling, Lehrbuch der Optik

A. Haas, Materiewellen und Quantenmechanik （有英譯本）

M. Born und P. Jordan, Elementare Quautenmechanik

Heisenberg, die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie

L. De Broglie, Wellenmechanik

Landé, Vorlesungen der Wellenmechanik

Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik

Sommerfeld Atombau und Spektrallinien Wellenmechanische Eganzungsband （有英譯本）

L. De Broglie, Selected papers on Wave Mechanics

Schrödinger, Collected papers on Wave Mechanics

M. Born, Probleme der Atomdynamik （有英譯本）

H. Hönl und C. Eckart Grundzüge und Ergebnisse der Wellenmechanik (Physikalische Zeitschrift, 31 Jakrgang No. 3 und 4.)

Gehrke, Handbuch der physikalischen Optik 2. Bd.

Handbuch der Physik, B. IV und BXX.

Leipziger Vorträge Herausgegeben v. Debye, 1930.

經過結晶體的短電磁波之迴折

The Diffraction of Short Electromagnetic Waves by A Crystal

W. L. Bragg 著　　袁至純 譯

1. 自從 V. Laue 公佈他由戀琴線 (Röntgen rays) 和結晶體所得樣式與光學中習知者相同的迴折效果 (Diffraction effects) 後,到今已有十五年了.在物理學的歷史裏,新效果的發現,要像它那樣在這麼短的時間達到這麼大的結果,是不可多得的.在這種情形之下,它開發了兩個新場地,一方使告訴了我們關于原子力學中許多東西的精密的 X 光線測量能夠做到;一方給與我們以觀察比用光學方法能夠試驗的還小過幾千倍的物體構造的新方法.後邊的場地,于我是非常有興趣的.我第一次的論文就被剛剛公佈的 Laue 的發現所吸引,并且我大膽地以我第一次冒昧入這研究場地時同樣的題目來標題這篇報告.要試由 Laue 所得的結果來推論些關于在鋅硫礦 (Zincblende) 的結晶體內原子或分子排列的報告,那鋅硫礦即當初觀察迴折效果時所用的.我于是把這些觀察推廣到石鹽 (rock-salt) 和氯化鉀 (Potassium chloride) 的結晶體上去.并且我同 Laue 由簡單結晶構造所得的照片的樣式對比以後,提出關于它們的原子排列的模型.在同時,我父親設計了一種

儀器,用一伊洪室,考察由結晶體所迴折的各小束以試驗它們所有的屬性究竟是否同戀琴線的一樣.由此他發現了X光線的分光景,因為它可以示明由對陰極所發的輻射包含一定純為單色的輻射,重疊于一波長的連續列上.這些單色輻射立刻由其吸收和其它屬性而全等于Barkla的表性X光線,于是我的父親做出X光線波長的第一次測量,這個場地不久就因Moseley的研究而發展到非常的燦爛.我父親的X光線分光器直接證為研究結晶構造之同類問題的很有權力的方法,我們共同工作於這個問題,而公佈一種模型,示明許多簡單結晶體內原子排列的方法.

在這一節中,我想給與試驗結晶體的方法以一簡略的回顧.開始被分析的結構其形式非常簡單,而且的確能夠由推理之邏輯的程序,示明那關于這些結構所提出的原子排列狀態是唯一可以解釋X光線測量的,我們不論用甚麼方法它們都是能夠達到的,如所有科學的工作裏,無論如何,這題目存在和生長的部分中所取的每一步驟是我們不能以邏輯的推理來辯護的.我們伸入到不知的去,超過已經固結的論據.用一切根源所導出的提議,與以已經分析的簡單結構的類比,和大膽的猜度,而結晶狀態的理論化學于是發展.這歷程有似于有機化學家關于他們的化合物構造式的發展,由簡單形式出發,拓充他們的分

析的權力以至他們開始稍稍理會些在生命過程中的複雜物體的組織.大部分的結晶固體結構甚爲複雜,它們的試驗的科學還在幼稚時期我們研究固體的目的與研究複雜分子的有機化學家的相似,因爲于這些物體如何組成的尋求,我們希望進一步去了解它們的屬性而有可以產出我們所需要的屬性的物體的一種權力.

2. 用X光線的結晶體的解析常常與用顯微鏡研究小物體來比較.在顯微鏡的情形,它是必須用波長較短于所研究的物體的結構的光來照該物體.這使顯微鏡的分解力 (resoling power) 有所限制,因相距比光的波長較密的兩物體拓散的波混成不能與單獨物體所拓散的波分別出來的波去,于是這兩物體不能分解.那是很有趣味的,去看這分解力的問題如何發生于類似的X光線之物質的研究.用去照這固體利便的X光線波長是在0.5和1.5 Ångström單位的範圍裏.因在固體物體中的原子有一 Ångström 單位或較多的距離,所以可使用使它們分離的X光線得到分解力,雖則近臨界極限時是很不便利的.換句話說,這固體的原子構造在對于它相當粗大的尺度上用X光線能夠看見.在顯微鏡的情形,由物體拓散的光以光學方法聚集成功一個像在眼睛的網膜上或在照像板上.在X光線的研究,像的直接形成是不可能的.這拓散的光束必須分別地記下而這拓散物體的形狀必須由解析的手

續推論出來.雖然,兩個方法的基本原理是相同的;但正當地說,物質之原子構造是用X光線去照它才看得見.

如上面所述的分解力是足夠使原子和原子分離,并且理論上它應當能夠去求出原子任何複雜聚集的形式.這分解力的極限僅在我們試進一步分析原子自身的形式時起首發生;重大的困難.所有原子構造的理論逼近地給與原子在空間的立積(extension)和它的詳細構造的尺度以相同的估價.這在空間的全立積是同普通用在實驗研究上的X光線波長的範圍的階次一樣,并且原子結構的精細情形是在比較甚小的尺度上.所以X光線測量僅能給與在一原子拓散物質之分配的近似觀念,而可以說這些原子的圖相是與由量子論舊形和根據新力學所得到的模型一致.這X光線測量的不定性(uncertainty)大于原子模型間的發散(divergence).爲得要更深入于原子的構造裏去必須發展"紫外"X光線分析的技術,這種分析用的是在0.1至0.2 Å範圍以內的輻射.這是無疑地可以做到,但是到這樣短的波長的輻射比用0.5和1.5 Å中間的輻射要困難得多,0.5和1.5 Å是很容易得倒不變强度的和容易以間隙系(Slit systems)遮禦或限制的.這原子構造的問題此處無論如何不能論,因爲我想集中我的討論于原子位置的分析,對之能夠容易得到相當的分解力.

雖然,在X光線和顯微鏡研究中間有這樣的近似,但却

有重大的差異.在顯微鏡的情形,是被一小物體拓散在各方向去.此光由對物鏡聚集而成一像.不止是在所有各方向拓散的光形成此像,而且拓散在各方向的光束的位相關係也顯出重要部分.在X光線情形,簡單的羣或原子是不能夠拓散出足夠偵察出它的能力的,必須給合許多原子羣的效果,自然這些必須同向使它們可以在一定方向完全拓散相同的分量.當這有規則的定向 (Orientation) 存在時這是必須用結晶體的.——其理由只是:如果它物理地可能,則結晶體去試驗單一原子羣,該簡單得多.

在考察結晶體時,是由結晶構造單位的原子之單一小羣拓散的光束來測量的.在結晶體裏,此單位的有規則的重複發生起迴折效果,這效果,限制這測量到由結晶細胞郎阻礙分析的擾亂的境界,的容積所安放的某一定向.再者,這拓散的光束在每一時候測量一次,并且關於一定投射波的拓散在各方向的光束之位相關係不是我們所能研究的事.事實上,這拓散的X光線的小束關于它們所發源的物體所傳送的報告不如顯微鏡之對物鏡所收的光束所報告的那麼多.

這解析的困難,幾全由這些制限發生.由結晶單位拓散在任何方向的輻射總量能夠很容易測量出來,但是由這些測量自身不足單獨去決定這構造的.除了很少數的極簡單的情形之外,我們不能以這些觀察代入那直接引導

到結晶體形式的方程式——所有的方程式少于未知數.

3. 結晶構造的複合可以由許多輔變數便利地測算,那輔變數是拿來固定它的原子的位置所必須的.在極簡單的情形,原子由結構的對稱固定在一位置,例如位于對稱的中心.當它須要一個輔變數來固定它的位置時,它的位置又可以限制在對稱軸的一定線上,或須要兩個輔變數時可以在一平面上,或須要三個輔變數時,則沒有受任何限制.我們可以由要去固定它的所有原子的許多輔變數之數目來定義結晶體為零,第一,或第 n 階:于是石鹽(rocksalt) 當為零階的結晶體,硫化鐵 (iron pyrites) 和方解石 (calcite) 屬于第一階,而紅寶石 (ruby) 屬于第二階.具有兩個或三個輔變數的任何結晶體,用所有解析的方法都能得到很快和正確的解.無論如何結晶物體的大部分有許多輔變數,二十或三十,并且我們試要拓充我們的分析到這種樣式的物體上去.

因有這多輔變數所引導出來的困難使它必須以非常不同的方法來接近結構的問題.我很想簡略地述說些能夠襲擊這些困難結構的方法.

第一,每個結晶體是根本在一個對稱元素的骨骼上.對稱中心,對稱線,和對稱面都存在于結構裏,并且它們的要求物質裏的每個質點都要服從的.這些對稱元素的排列,是純粹屬于幾何的問題,并且其形式的數目由 Schoenflies, Fedorow, 和 Barlow 在任何真正結晶體構造被分析之前許久卽已做出.現在對于我們想分析的任何結晶體究竟有甚麼對稱系存在,幾乎每個情形都能認識;一般地可以單獨決定"空間羣"(space-group)之有統系的全套試驗可以應用.任何解析的第一目的是空間羣的這個認識,而結晶體解析的新科學的生長引導到空間羣論的改造,使便應用.特別地, Niggli, Wyckoff 及 Astbury 和 Yardeley 已經備有關於認識空間羣的許多圖表.在較早的分析,結晶體是很簡單的,每個可看作特別情形,并且不須要全套的試驗,但是現在普通地認識那所有完全的工作必須根據於每個情形中空間羣的決定.美國的 Wyckoff 是一個用這對稱方法於決定空間羣中的最早而且最熱心的辯護士,并且它的重要之認識是大部分由他的努力的.

結晶體的原子是依對稱元素而集合的,而第二步是要求出它們如何安置在這架子的周圍的.在紛亂的構造裏簡單形式的集合的知識於我們很有幫助.例如我們可以構成一定的經驗法則,它近似地告訴我們在結晶構造裏相鄰原子間的距離.各種的原子適合它自已於結晶體裏的一定體積,這體積可看作一定大小的各原子所組成,好像小球集在一堆.這法則可以有許多例外,因爲在兩個已知原子間的距離是大部分隨它們中間化學的化合樣式之變化而大變的,并且除此之外隨周圍原子排列的變化

而亦稍有改變.雖然僅能輕輕地壓榨的,有一定表性的大小的原子之包成一堆的概念在要得未知結晶構造的第一步接近裏是最有用的.再者一定的集合如那些酸基——CO_3,——SO_4,等等,在所有結晶體裏顯然有非常近似地相同的形式.此種經驗知識使研究者能夠建立它所研究的構造之試用的模型,并且限制所試驗的相對位置到甚小範圍.

最終,有一種探求的試驗,在此試驗中可加以可注意的可靠程度.已經決定了這結晶體的對稱圖表,并且考驗過把原子包在一堆的各種方法,使它們服從對稱的要求和任何地方不至互相疊置到旁的區域,我們必須試驗所提議模型之對與不對.由比較投射在結晶體上的輻射和拓散在已知方向的輻射間的强度可以把這個做到的.自然,拓散在各方向的輻射的粗略比較常常形成任何結晶體解析的根基.這試驗變成更嚴密得多,并且人們更相信當這些測量是定量的時候可達到真實的結構.在測量裏的理論是頗複雜,并且結晶之顯微的物理的條件在試驗之下時常引導出那使測量非常困難的不確實.可是那些困難是可以克服的,我們於是如在天秤上有秤結晶單位的分數的方法,那單位要把輻射拓散到一定方向去.如果這個決定是對於許多方向的,并且與提議的結晶構造的模型相合,我們可以確信該模型是正確的.

4.　綠玉石 (Beriy) 結晶體可以作爲一種情形的一個例子,那裏關於原子排列的對稱和經驗法則已足以略述結晶的構造幷給與已經試驗證實的模型.這物質有複雜的公式, $Be_3 Al_2 Si_6 O_8$. 它形成純六角對稱的結晶體幷且由空間羣的決定示明每個細胞(它包含兩個分子)是有各種樣式的對稱元素稠密地包着的.較簡單的結構已經示明兩個氧原子不像中心相距在小過2.6 Å而相接近的;讓我們研究在這構造裏關於氧原子可能的位置是怎樣地被限制.顯然沒有氧原子中心距二倍旋轉軸,到反射面,或到對稱中心或它將越過它的像的區域之上,能更小於1.3 Å的.同理,它於結晶體裏六角形的一個軸上不能近過2.6 Å的.現在這結晶體爲這些對稱元素的稠密的網所包,幷且如果觀察這些制限,三十六個氧原子中有二十四個的位置被固定了.它們被包在軸的骨架和對稱的平面的網目裏,有恰好夠用的地位以適合其餘十二個氧原子,成爲每六個原子的兩個環,每個圍繞着六倍軸,於是所有的氧原子被固定了.鋍(Beryllium)和鋁 (Aluminium) 的原子落入爲對稱所要求的地位幷且與這些金屬在和氧氣化合時的通常位置一致,對於矽 (Silicon) 原子也是這樣的.自然像這樣的結構必須謹愼試驗;的確在這情形由第一原理推論出的結構,只須稍加修正以滿足這定量測量的嚴密試驗.這結晶體由七個輔變數決定,所以可稱爲複雜的樣式.

我們也可以引用一種情形,在有些簡單化合物中排列的研究,經過較複雜的問題,引到那輔變數數目的確非常大的情形.簡單氧氣化合物如 BeO, Al_2O_3, $BeAl_2O_4$, $MgAl_2O_4$,表示對於它的氧的排列有一定的類比,并且我們由相當迴折現象可以認識這排列.如已知道它的關健時,可進一步認識 Mg_2SiO_4, $MgCaSiO_4$, $H_2Mg_5Si_2O_{10}$, $H_2Mg_7Si_3O_{14}$, $H_2Mg_9Si_4O_{18}$ 中氧原子的同樣整列.在最後的化合物 Clinohumite 其對稱是一斜系的,這是很低的樣式,它讓原子排列有闊大的範圍.在一單位立方體積中總共有六十四個原子,爲四十五個輔變數所固定.這化合物(由 West 和 Taylor 分解)的構造還自然地得自前面簡單的例并且非常滿足所有可應用的證驗,我相信已經成功地發現所有原子的近似位置.

5.　我已敍述這些例以表出我想做的事情.以前結晶體解析的區域使我們僅去試驗這些結構甚簡和由小數輔變數固定原子的化合物,現在我們開始由它那裏解放出來.我不想減小這些簡單化合物的試驗的重要;它們有超越的興趣,因爲它們可有原子間的力的數學解析,在更複雜的樣式裏好像是不能有的.旁一方面,大多數固體的結晶物體是低級對稱和非常的複雜的.我們想拓展我們的技術,使它能應用到任何可希望試驗的物體.用所有方法在我們的處理裏要作出一複雜的構造,仍舊是一個長而討厭的工作.至今尚沒有論理的和系統的方法來駕馭

這問題.每個結構都有些特殊的狀態能使研究者由當直接襲擊時難於攻取的側面轉過來.每個成功底地解析的構造都使它易於了解新形式.我相信我們實在正在去得這些美麗的自然的將使它能夠去分解一切任何複雜形式的模型的了解.

萬國放射性元素表及主要常數

Quatrième rapport de la commission internationale des éléments chimiques. 1929. (Union internationale de la Chimie pure et appliquée).

陳 鼎 銘 譯

萬國元素委員報告(1929)

上表發表以後委員 T. W. Richards 逝世選爲代替者爲 H. V. A. Briscoë 氏 (Armstrong College, University of durham, New Castle upcn typ, England) 並 E. Moles 氏 (Madrid) 亦延爲委員.此次所出之表與1923所出者有下列數點之變更.

1. 鏻系中有鏻Z之增加.

2. radon之 λ 常數由 2.085×10^{-6} 變更爲 2.095×10^{-6}

3. radium F (polonium) 之 λ 常數由 5.90×10^{-8} 變更爲 5.57×10^{-8} 並此元素 α 線之 a_0 及 V 之値亦稍有增加.

4. protoactinium 之 λ 常數由 1.9×10^{-12} 變更爲 1.1×10^{-12} Uranium II 之 λ 常數由 10^{-14} 變更爲 1.7×10^{-12}

5. 鉀之放射能係指其同位元素 k_{41} 而言.

6. 表示同位元素之原子量採用Baxter所提出之"Isotopic Weight, poids Isotopique" 同位原子量.

本表之命名法備考亦有若干之變更.

委員　F. W. Aston; Gregery p. Borter; Bohuslav Brauner; H. V. A. Briscoë; A. Debierne, A. Leduc; E. moles; Frederick Soddy; Georges Urbain,

萬國放射性元素及其主要常數表

T	$\theta=\frac{1}{\lambda}$	λ (sec.)$^{-1}$	名　稱	記　號	放射性原子量	原子序數	同位元素	放　射	R_a	V (單位 10^9)	μβ Al	μγ Al	μγ Pb	附註
			Uranium 及 radium 系											
4.67×10^{9}年	6.75×10^{9}年	4.7×10^{-18}	uranium I	UI	238	92	U	α	2.50	0.0470	...	...	...	1
24.6 日	35.5 日	3.26×10^{-7}	uranium X_1	UX_1	234	90	Th	β	...	...	463	...	...	...
1.15 分	1.65 分	0.0 0	uranium X_2	UX_2	234	91	Pa	β(γ)	...	...	14.4	24; 0.1; 014	0.72	2
6.7 時	9.7 時	2.9×10^{-5}	[uranium Z]	UZ	?	91	Pa	β	...	...	500 乃至 60	...	...	9
1.3×10^{6}年	1.9×10^{6}年	1.7×10^{-12}(?)	uranium II	UII	234	92	U	α	3.11	0.0499	...	...	...	1a
6.9×10^{4}年	10^{5}年	3.2×10^{-13}	ionium	Io	230	90	Th	α	2.85	0.0485	...	...	...	...
1690 年	2440 年	1.30×10^{-11}	radium	Ra	226	88	Ra	α(β+γ)	3.13	α 0.0500; β 0.52; 0.65	312	354; 16; 0.27	...	...
3.83 日	5.525 日	2.095×10^{-6}	radon	Rn	222	86	Rn	α	3.94	0.0540	...	...	...	3
3.0 分	4.32 分	3.85×10^{-3}	radium A	RaA	218	84	Po	α	4.50	0.0565	...	...	...	...
26.8 分	38.7 分	4.30×10^{-4}	radium B	RaB	214	82	Pb	β(γ)	...	0.36;0.41;0.65;0.70;0.74	13.1; 80	230; 40; 0.51	...	...
19.5 分	28.1 分	5.92×10^{-4}	radium C	RaC	214	83	Bi	99.97%β及γ	...	0.786;0.862;0.949;0.957	13.2; 63	0.115	0.50	4
10^{-6}秒	10^{-6}秒	10^{6}(?)	radium C′	RaC′	214	84	Po	α	6.57	0.0611	...	...	...	...
16.5 年	23.8 年	1.33×10^{-9}	radium D	RaD	210	82	Pb	(β 及 γ)	...	0.33; 0.39	5500	45; 0.99	...	5
5.0 日	7.2 日	1.61×10^{-6}	radium E	RaE	210	83	Bi	β	...	...	43.3	...	...	...
140 日	202 日	5.75×10^{-8}	radium F (polonium)	RaF (Po)	210	84	Po	α(γ)	3.67	0.053	...	585	...	...
...	...	...	radium Ω′ 鉛	RaΩ′ (Pb_{206})	206	82	Pb	...	?	...	...	...	...	...
...	...	[1.8×10^{-7}]	radium C	RaC	214	83	Bi	0.03% α		...	...	...	...	...
1.4 分	2.0 分	8.3×10^{-3}	radium C″	RaC″	210	81	Tl	β	...	...	...	...	...	6
...	...	...	radium Ω (假)	RaΩ″	210	82	Pb	...	...	...	...	...	...	...
			Actinium 系											
...	...	...	uranium ?	.....	?	92	U	α	...	...	...	...	...	...
1.04 日	1.5 日	7.8×10^{-6}	uranium Y	UY	?	90	Th	β	...	...	約 300	...	...	7
2×10^{4}年	2.9×10^{4}年	1.1×1^{-12}	protoactinium	Pa	?	91	Pa	α	3.314	0.0510	...	...	...	8
20 年	28.8 年	1.1×10^{-9}	actinium	Ac	?	89	Ac	—	...	...	...	...	...	...
19.5 日	28.1 日	4.11×10^{-7}	radioactinium	RdAc	?	90	Th	α(β)	4.36	{α0.0559; β03.8;0.43;0.49; 0.53;0.60;0.67;0.13}	約 170	25; 0.19	...	...
11.4 日	16.4 日	7.06×10^{-7}	actinium X	AcX	?	88	Ra	α	4.17	0.0550	...	...	...	...
3.9 秒	5.6 秒	0.178	actinon	An	?	86	Rn	α	5.40	0.0600	...	...	...	10
2.0×10^{-3}秒	2.9×10^{-3}秒	345	actinium A	AcA	?	84	Po	α	6.16	0.0627	...	...	...	...
36.1 分	52.1 分	3.2×10^{-4}	actinium B	AcB	?	82	Pb	(β 及 γ)	...	...	非 常 大	120; 31; 0.45	...	...
2.15 分	3.10 分	5.37×10^{-3}	actinium C	AcC	?	83	Bi	α	5.12	0.0589	...	...	...	11
4.71 分	6.83 分	2.44×10^{-3}	actinium C″	AcC″	?	81	Tl	β 及 γ	...	...	28.5	0.198	{1.2 乃至 1.8}	12
			actinium Ω (假)	AcΩ″	?	82	Pb	...	...	...	...	...	...	...
			thorium 系											
1.31×10^{10}年	1.89×10^{10}年	1.68×10^{-18}	Thorium	Th	232	90	Th	α	2.58	0.0460	...	...	...	13
6.7 年	9.67 年	3.28×10^{-9}	mesothorium 1	MsTh1	228	88	Ra	—	...	...	...	...	...	...
6.2 時	8.9 時	3.12×10^{-5}	mesothorium 2	MsTh2	228	89	Ac	β 及 γ	...	{0.37;0.39;0.43;0.50;0.57; 0.60;0.66 及 > 0.70}	20.2乃至38.5	36; 0.16	0.62	...
2.02 年	2.91 年	1.09×10^{-8}	radiothorium	RdTh	228	90	Th	α(β)	3.87	α0.0587; β0.47;0.51	...	...	...	...
3.64 日	5.25 日	2.20×10^{-6}	thorium X	ThX	224	88	Ra	α	4.08	0.0546	...	...	...	...
54 秒	78 秒	0.0128	thoron	Tn	220	86	Rn	α	4.74	0.0574	...	...	...	14
0.14 秒	0.20 秒	5.0	thorium A	ThA	216	84	Po	α	5.40	0.0600	...	...	...	...
10.6 時	15.3 時	1.82×10^{-5}	thorium B	ThB	212	82	Pb	β 及 γ	...	0.63; 0.72	110	160;32;0.36	...	...
60 分	87 分	1.92×10^{-4}	thorium C	ThC	212	83	Bi	65% β	...	{(C+C″)0.29; 0.36; 0.93 乃至 0.95}	14.4	...	...	15
11^{-11} 秒	10^{-11} 秒	[1.25×10^{-4}] 10^{11}(?)	thorium C′	ThC′	212	84	Po	α	8.16	0.0688	...	...	...	...
...	...	...	thorium Ω′ (鉛)	ThΩ′ (Pb_{208})	208	82	Pb	...	...	...	...	...	...	...
...	...	[6.7×10^{-5}]	thorium C	ThC	212	83	Bi	35% α	{4.55; 14.69}	0.0572	...	...	...	16
3.1 分	4.5 分	3.70×10^{-3}	thorium C″	ThC″	208	81	Tl	β 及 γ	...	(看 the C)	21.6	0.096	0.46	17
...	...	...	thorium Ω (鉛)	ThΩ″ (Pb_{208})	208	82	Pb	...	...	...	...	...	...	...
7.5×10^{10}年(?)	...	...	Kalium	K	41	19	K	β	...	...	23 乃至 33	...	...	18
...	...	...	Rubidium	Rb	85.5	37	Rb	β	...	...	308乃至 347	...	...	18

表中 λ (sec.)$^{-1}$ 爲放射恆數

$$dQ=-\lambda Qdt \qquad Q=Q_0e^{-\lambda t} \qquad \log_{10}\frac{Q_0}{Q}=0.4343\lambda t$$

Q_0爲最初之量 Q 爲 t 秒時間後尙存之量.

$\lambda=-\frac{dQ}{Q}\frac{1}{dt}$ 爲在單位時間內變化之率.

二歧崩變 (double transformation) 之分歧恆數外用 [ ] 表示.其總體恆數不用括弧.有 (?) 記號者係其恆數由 α 到程 (range) 間接算出之值.

$\Theta=\frac{1}{\lambda}$ 爲放射性原子之平均壽命

T 爲平衰期 $\lambda T=-\log_e 0.5=0.69315$ $\Theta=1.443T$

放射欄中其有 ( ) 者爲比較的弱也

a_0 爲當標準狀態時在空氣中 α 線之到程 (cm) 在 $\tau^\circ C$, $p^{m.m.}$ 時其到程 $a=\frac{a_0(273+\tau)760}{273\eta}$. V 爲 α 線或 β 線對光線速度之比以 cm/sec 換算可用 3×10^{10} 乘之.就 α 線論則 $V=0.0342\sqrt[3]{a}$. $\mu\beta Al$ 爲 β 線在鋁中之吸收係數(鋁厚以 cm 爲單位). $\mu\gamma Al$ 及 $\mu\gamma pb$ 爲 γ 線在鋁及鉛中之係數(鋁,鉛之厚均以 cm 爲單位) 鉛中之係數僅舉其透過度之最强者而已.强度 I_0 之線透過物質 x cm 後其强度爲 I 則 $I=I_0e^{-\mu x}$ 或 $\log_{10}\frac{I_0}{I}=0.4343\mu x$.强度爲 $\frac{1}{2}$ 時其厚爲 D 則 $\mu D=0.693$.

命名法備考

由 c 體所發之分歧(')之記號表示 β 線放射之結果所生之物 (卽 Polonium 之同素體). (")記號表示 α 線放射之結果所生之物 (卽 Thaltrum 之同素體).放射終局體以 Ω 表示

之.

註之解說

註1. *VI*. Θ之值係之由下式計算得出

$$\Theta = \frac{1}{\lambda} = 2440 \times 0.97 \times 3 \times 10^6 \times \frac{226}{238} = 6.75 \times 10^9$$

此處之 2440 是以年爲單位鐳之平均壽命. 0.97 爲分岐係數.

$3 \times 10^6 \times \frac{226}{238}$ 爲在鑛物中平衡時鈾與鐳之原子數之比.至若 actinium 系與鈾 *I* 無此相當之關係故其 λ 值不能用此法計算之(註 7 參照)由鈾化合物所放射之 α 粒子可直接數得 λ 之值爲 4.57×10^{-18} 由此 $\Theta = 7 \times 10^9$ 年及 $T = 4.8 \times 9$ 年

註 1a.鈾II之恆數完全爲假說的其半衰期由 。算出之者 (G. C. Laurence phil. mag. (Vll), 5,1038 (1928))

註2. 鈾X_2 亦稱爲 Brevium, Brévium.

註3. Radon卽鐳Emanation或Ramsay氏所稱 niton 之代用名詞

註4. 鐳 *C* 爲二岐崩壞卽 99.97% 之原子放射 β 線生 RaC′ 此又放射 α 線. 0.03% 之原子放射 α 線生 RaC″ 此又放射 β 線.

註5. 鐳 *D* 亦稱鐳鉛 (Radiolead, Radioplomb)

註6. 鐳 *C*″ 亦稱鐳 C_2.

註7. 鈾 *Y* 係在 actinium 系中之最初所發現者由鈾 *I* 或由鈾 II 亦可導出之.此時,鈾之原子之3%生 actinium 系 97%

生鐳系 actinium 系由鈾第三(假說的)之同位元素可獨立生出之假說亦有故對此元素亦有 actino-uranium 之名稱之提出.

註 8, proto-actium 亦稱 Ekatantate, Eka-tantatirm)

註 9. 鈾 Z 爲鈾 X_1 之 β 線崩壞之 0.35% 中所生一分歧崩壞之生成體.

註 10. actinon 亦稱 actinium emanation

註 11. actinium C 所放射 α 線之0.3%其 a_0 非爲5.12而爲6.10. 故可說此原子亦若 RaC 及 thC 之分歧有 0.3% 爲 β 線之崩壞.

註 12.actinium C″亦稱 actinium D

註 13. Rollium 之 λ 值係由 th 化合物所放射之 α 粒子直接計得之者.其最小之值爲表中所示之 55/100 由此 $\Theta = 3.45\times10^{10}$ 年. $T=2.37\times10^{10}$ 年 (phys. Zeit. 19,259(1918))

註 14. thollon 亦稱 thollium emanation

註 15. thollium C 爲二岐崩壞其 65%之原子爲 β 線崩壞生 thC′ 此又放射 α 線.其 35%之原子爲 α 線崩壞生 thC″ 此又放射 β 線.

註 16. thC $a_s=4.69$ 之值係與由直接測定之 $v=0.0572$ 相對之值.

註 17. thC″ 亦稱 thD.

註 18.鉀與銣二元素雖放射 β 線此外並不見有何等放射

性之兆鉀之放射能因有少量 K 41同位元素之混存故此處所載 T 值係據假定推定之者.

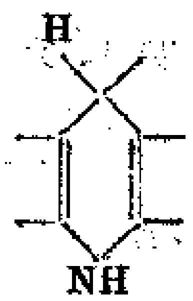
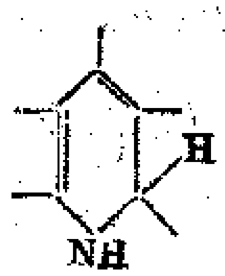
註19.表中所列 β 線速度值不過僅其比較的重要已耳詳細須參照 Honnees Numeriques de Radioactivité (Mme joliot-curie et p. Auger)

Pyridin 的構造式 (structural formula) 之研究

吳 屏

(文內之專名詞,用英文或德文直接表示之)

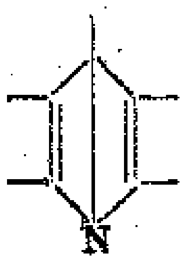
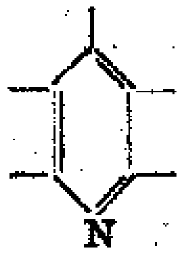
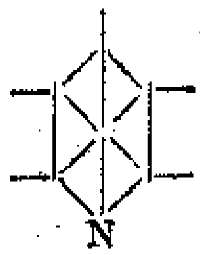
1923 年 O. Mumm 及 G Hingst[1] 將許多 Dihydro-Pyridin 族中之物體,分隔爲兩個同分異性物,並證明這兩種同分異性物之構造式,二式中其一是由 1, 4 Dihydropyridin (I) 變來,所含之 double bond 是 symmetric, 其他一式,則由 1, 2 Dihidropyridin (II) 變出,所含之 double bond 是 Conjugate.

I.  II. 

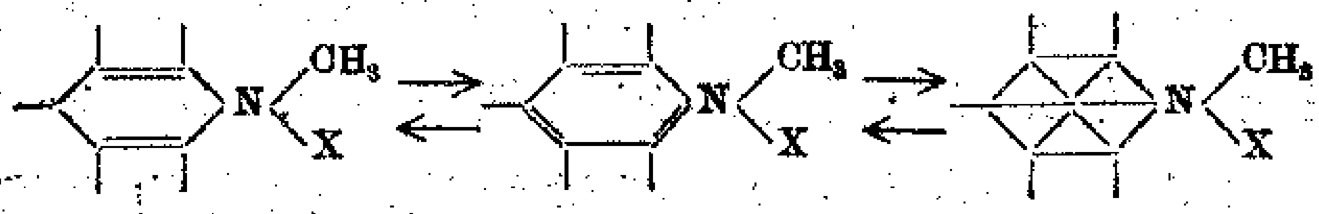
這兩個同分異性物的性質,完全不同,由 I 變出來者與用 Hantsch 的組成法 Synthesis 所得 Dihydro-Pyridin 族之代表物,完全一樣,以此我們可斷定他是一種 1, 4 Dihydro-Compound, 1919 年 Skraup[2] 對於常起糾爭的這種化合物之構造式,亦用他法[3] 證定其爲 1, 4 Dihydro-Compound.

註 1) O. Mumm G. Hingst B. 56 2301 (1923)
O. Mumm A. 443 272 (1925)
O. Mumm H. Ludwig B. 59 1605 (1926)
2) A. 419 11 (1919)
3) 他的證明,按照1920年 O. Böhme 的研究,不十分可靠.

自由 Hantsch 組成法得的 Dihydro-Pyridine 之構造式規定後,因之發生一種新的問題,卽"是否 Dihydro-Pyridine 經過除去輕氣 Dehydration 後卽變爲 Riedel formula 的 Pyridinderivative (III),"因爲 Körner-Dewar formula (IV) 及 Centric formula (V) 外, Riedel formula 最足引取一般學者之注意也.

III.  IV.  V. 

上述之推測,並非全屬理想,實在可能範圍之內,觀晚近化學研究之結果,發現許多帶有 Parabond 的 Pyridin 族之物體隱然表示 Riedel formula 之存在,卽可知也.因此 B. Emmert[4] 主張 Pyridin 的構造式應爲 Riedel formula, 在 Emmert 前, Hantsch[5] 已曾認定 Riedel formula 爲 Pyridin 的構造式之一,他解釋 Pyridiniumsalt 的 Chromoisomorsm 或由於三種 Pyridinformula 的接合變換 Bindungs aenderung, Chang in linkage 而成.



不過這三種物體,因爲"接合變換"的原因,很易來回變動,極難單獨的存在,除非在特別情形條件下,不能使任一構造式固定成立.

註 4) Wein'and, Einfuehrung in d.e Chemie der Komplexverbindung 2 Aufl. S. 231 (1924)

5) B. 44 1303 (1911)

按照 O. Mumm 及他的助手試驗之結果,這種特別條件,可於一種"全部或一部分的圈上輕氣 neucleus hydrogen (kernwasserstoff) 被 high molecular weight residue (höhermolekulare Reste)替換之 Pyridinderivative"得之,因爲用此法製成之 iso-meric Dihydro-compound of Pyridinderivative,至現在還沒法使他們彼此變換,Mumm發現的 Pyridonmethide 族中物體試驗之結果,卽其明證也.

用 Hantsch 法很易製就的 Pyridin 族之 1, 4 Dihydrocompound,卽屬於具有上述特別條件物體範圍之內者,同時因爲他的構造式佔有 1, 4 結合之地位,所以我們可以說他是由 Riedel formula 變出來的,換言之,卽其構造式爲 Riedel formula 也,此外 O. Mumm 發現的便於製取之 Ester of Dimethylchin-Chomeron acid[6] (Dimethylchinchomeronsäure-ester) 族中之物體,亦洽合上述之條件.

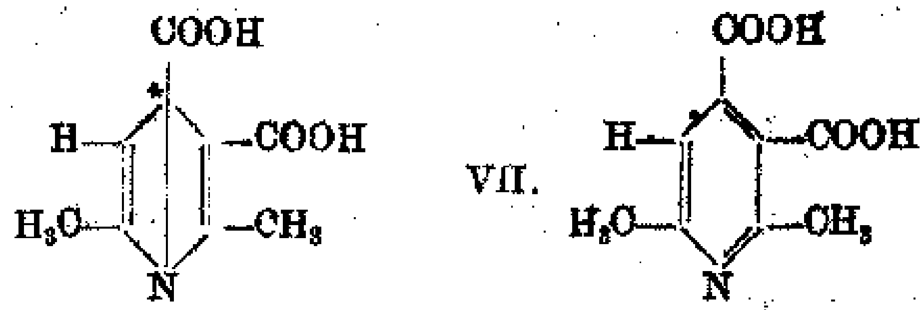
有了這樣好的實事,所以引起著者研究"Riedel formula 是否存在"之興味,不過研究時所用之方法,必須特別選擇,務使他對於被試驗的物體之分子,不起化學的影響,免致接合 Linkage 因之移動,(例如由 Riedel formula 移動而成 Korner-Dewar formula)這樣的方法,是屬於光學範圍之內,用光學方法試驗之路徑則甚多.

註 6) O. Mumm u. Huenekc B. 50 1573 (1917)

O. Mumm u. O.Boehme B. 54 726 (1921)

現在我們用 Dimethylcinchomeron acid 作頭一個例,他的構造式應有兩種,全視他是否由 Riedel formula 或 Koerner-Dewar formula 變來爲轉移.

VI. VII.



這兩個構造式很易於分別,第(VI)是一個 Riedel formula, 含一個 asymmetric 炭原子(以星號•表示之)第(VII)是一個 Koerner-Dewar formula, 不含 asymmetric 炭原子,假若 Dimethylcinchomeron acid 的構造式爲 Riedel Formula,那麼一定可以分作兩個光學的不同體物 Optic Antipode, 這種推論,行之於其他一切的 asymmtric substitute Pyridine 亦有効.

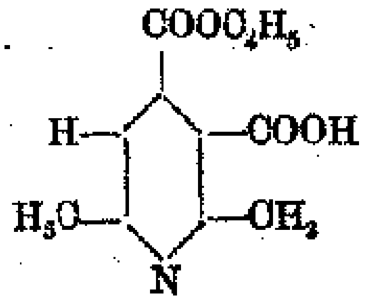
爲避免 Optically active Compound 時的錯誤起見,所以著者於 Dimethylcinchomeron acid外,還選製許多 Unsymmetric substitute Pyridine, 這種物質的圈輕氣,幾盡被 radicale 替代之,合這種條件的物體,用 Hantsch's Synthsis 是得不着的,因爲該法製成之物體,是 Symmetric, 非 unsymmetric 的 Pyridinderivative 也.

著者除用 Dimethylchinchomeron acid 的 Semiester (VIII)[8] 外,還檢驗 β-Benzoyl-Collidin-β'-monocarbon acid (IX), 第 IX 較以前所選之物體 (VI 及 VII) 爲尤佳,因他的圈輕氣都被 radicale 替換了

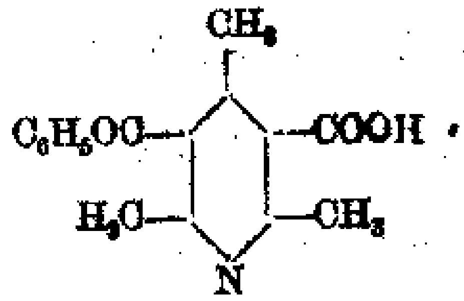
註 8) O. Mumm U. H. Hüneke B. 50. 1579 (1917)

故也.

VIII.



IX.



Benzoyl-collidin-monocarbon acid 是一個未發明的物體,著者由他的 Ester[9] 用酒精輕養化鉀液經 Saponification 製成,他的鉀鹽與醋酸銅或醋酸鉛接合卽成他的銅鹽或鉛鹽,導硫化輕於銅鹽或鉛鹽內,卽得該酸矣.

在分解試驗時 Spaltungsversuch, Cleavage experiment, 先將該酸製成他的 Brucinsalt, 然後作"分級結晶"fractional Cristalization, 至於 Dimethylcin-Chomeron acid, 則一方面將該酸的酸性 Brucinsalt, 一方面將他的 Brucinsalt (用當量酸與當量 Brucin 煑之卽得)檢驗之, Semiester of Dimethylcinchomeron acid 的 Brucinsalt 亦易製取,卽將該 Ester 與當量的 Brucin 溶解於酒精中卽成. Benzoyl-collidincarbon acid 的 Brucinsalt, 則以該酸的鉀鹽與 Brucinhydrochloride 製取爲最宜,所得之出產品在acetic ester 內從新結晶 recrystallize, 得很好的晶體.

對於各級結晶所得物體的光學檢驗 optische Untersuchung, 著者是用一個 Lippich polarization apparatus, 此器爲柏林 Schmidt und Haensch 儀器廠之出品,可直接看至0,01°, 所用之光

註 9) 此物是用 acetoaceticester 與 Benzoyl-aceton 及 aldehyd-ammoniak 經 Condensation 而成. C. Beyer B. 24. 1667 (1891)

源,是一個普通50支光的電燈及由N School[10]規定的濾光器 light filter所合成.濾光器分作兩部,第一部是一厚2 Cm的溶液 (8,8g結晶硫酸銅與 9,4g 一縮二鉻酸鉀 ($K_2Cr_2O_7$溶解於200 ccm水中), 第二部是一厚 3 cm 在室溫飽和之一縮二鉻酸鉀溶液,在折光角 Brechungswinkel, angle of refraction 較小時,用這種光源所得的試驗之結果,與用鈉光所得者完全一樣,如折光角超出五度以上,則不甚準確,宜直接用鈉光.

用 Dimethylcinchomeron acid 的酸性 Brucinsalt 做的光學檢驗,好像有一部分分解爲optic Antipode, 在頭幾個分級結晶所觀察之旋轉角 angle of rotation 算出來的分子旋轉度 molecular rotation, 爲

$[M]_D^{20^\circ} = -138^\circ$, 在最後幾個分級結晶算出來的旋轉度,爲

$[M]_D^{20^\circ} = -120^\circ$, 此外各種分級結晶物之溶解度,亦不相同,由此觀之,似乎已有分解之可能,但經重新詳細檢驗之後,則頭一次發現的差數,由18°降至9°,以故可決定上述之18°差數,並非分解之表現,且將用過的 Brucinsalt 加鹽酸後還原之 Dimethylcinchomeron acid 重行光學檢驗,則該酸完全 inactiv, 尤足證明其未曾分解也.

Dimethylcinchomeron acid 的中性 Brucinsalt, 在水內極難溶

註 10) N School pharm. Weekblad 1926 No 2 und pharm. Ztg 30 463

化,故溶於火酒 Methylalkohol 內而檢驗之,檢驗的結果,證明他的旋轉角與他的溶液之 concentration 有很大的關係,0,3749g 物體在 15 ccm 火酒內所得之分子旋轉度,爲

$[M]_D^{20^\circ} = -328,4^\circ$; 0,1763g 物體在 15 ccm 火酒內所得之旋轉度爲 $[M]_D^{20^\circ} = -363,8^\circ$; 以此所有的試驗,都用相等的濃度,而所得的結果,在 $[M]_D^{20^\circ} = -367,5^\circ$ 至 $-370,5^\circ$ 之間,亦毫無分解之表示,然爲慎重起見,仍將檢驗過的各分級結晶液加 Soda 使之變爲 Brucin 及 Dimethylcinchomeron acid 的鈉鹽檢驗之後, Brucin 的分子旋轉度,依然如故,而 Dimethylcinchomeron acid 的鈉鹽,則 inactive,

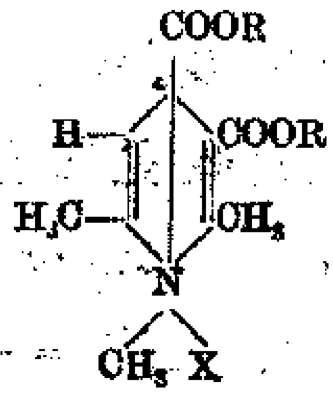
Semiester of Dimethylcinchomeron acid 及 β-Benzoyl-collindin-β'-carbonacid 在水內的溶解度及其溶液濃度對於分子旋轉度之影響,一如上述之中性鹽, 0,1682g Benzoyl-collidincarbon acid 的 Brucin 鹽,在 15 ccm 50% 酒精溶液內, $[M]_D^{21^\circ} = -168,5^\circ$; 反之 0,1682g 的該物質在絕對不含水之酒精內, $[M]_D^{21^\circ} = -109,4^\circ$, 以故此處所用的檢驗液,其濃度亦令相等, Semiester of Dimethylcinchomeronacid 的溶劑爲火酒, Benzoylcollidin-carbonacid 的溶劑爲 50 % 的酒精,頭一個物質的 Brucin 鹽各級結晶之分子旋轉度,在 $[M]_D^{16^\circ} = -7,89^\circ$ 及 $[M]_D^{15^\circ} = -6,39$ 之間,其旋轉角之特別小,很令人注意,大概是該鹽在火酒液內不甚起電解 Dissoziation 故也. Benzoylcollidincarbonacid 的 Brucin 鹽各級結晶之分子旋轉度,俱爲 $[M]_D^{21^\circ} = -168,8^\circ$, 以故這

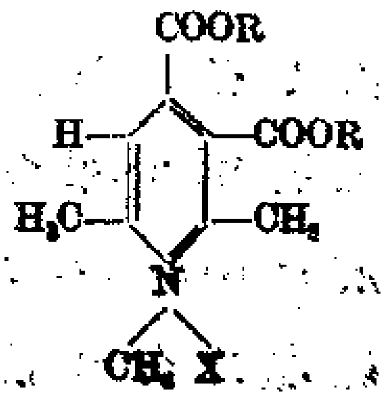
兩種物質亦未分解,然爲慎重起見,亦將分解後加 Soda 液所得之 Brucin 及 Semiester 的鈉化物,詳爲檢驗,結果Brucin得其應有之值,鈉鹽則 inactive,

上面的試驗都未得着我們所希望之結果,其原因或者是因爲我們未直接用 Pyridin-carbonacid 的 ester,(這種 ester 是組成時的 Primary Product, 或許有分解之可能), 而用該酸本身,因爲由 ester 製酸所用之鹼化法 Saponification, 乃一種頗激烈的反應手續,也許因他致將 Pyridin 圈上的雙結合之位置移動,故失却 Riedel Formula 之性質.

因此著者乃另尋一方法,能直接將 ester 分解爲光學的不同種物 Optic Antipode,適於此法之原料,著者於由 Pyridin-carbonacid-ester 製就之 quaternary Ammoniumsalt 及光學地偏的酸 optically active acid 製得之.

如果我們再選擇 Dimethylcinchomeron acid 作例子,(上面已用他的 Brucinsalt 作分解試驗), 那麼即視我們是否把他當作 Riedel 或 Körner-Dewar Formula 而得兩種新物質,即他的 ester 之 Methylammoniumbase 與光學地偏的酸所組成物也.

X. 

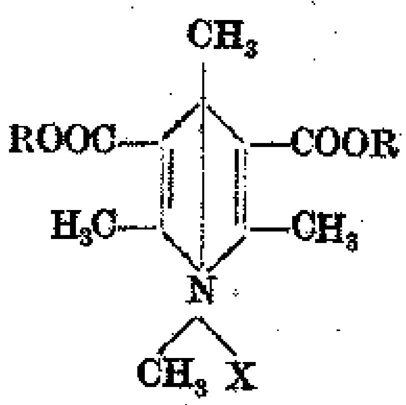
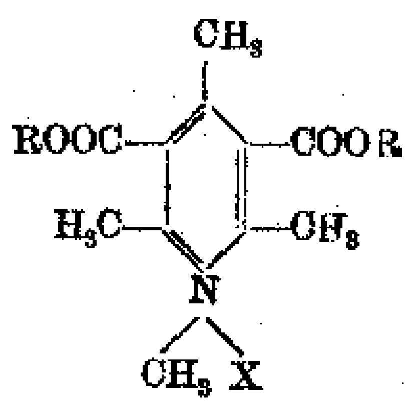
XI. 

式中之X，是代表光學地働的酸之餘剩 rest，我們詳細觀察之下，則知此處亦含有一個不對稱的炭質 asymmetric carbon（用星號表示之），但僅存在於 Riedel Formula 內（X式），此外式中之淡質也是一個「不對稱中心」center of asymmetry，他也為 Ptereo isomerism 之產源，這種現像，在 Riedel Fomula 一定要產生，因為該式內淡質的五個 Valence 與各種不同的分子族 Group 結合也，是否 Körner-Dewar Formula 的淡亦生同樣之現像，尙屬一問題，雖然一般的學者主張 N: a_2·b·c·d 式的化合物決定不能產生鏡像的同分異形物 mirrored image isomerism，但是在淡炭兩原質間如用一個雙結合 double bond 替代兩個相同的 substituent (a_2)，並非絕無分解為光學地不同種物之可能，Meissenheimer[11] 曾將 Aminoxyd（即五價的淡質有一個淡養的雙結合 ≡N═O）分解為光學地不同種物，惜這種發現對於五價之淡質的淡炭雙結合，並不發生連帶之關係，因為淡養雙結合之特性與淡炭雙結合之特性，完全不同也，H. O. Jones[12] 及許多其他學者證明 XI 式的化合物，用普通分解方法，無分解之可能，但是他們之失敗，不能就可以阻止我們研究的前進心，而況 Jones 所選之原料，多為簡單的 N-Alkyl-pyrindinium- 及 chinoliniumbase，用之於此，不甚洽當，以此著者覺得很有討論這種未解決的問題

註 11)	Meissenheimer	A.	385	117	(1911)
註 12)	H. O. Jones	soc	83	1415	(1903)
		soc	91	1821	(1907)

之價值,而且 Jones 歸咎他的試驗失敗於圈上雙結合之顫動變換 Oscilatory change of double bond in Neucleus, 假若該物質的旋光性 activity 是因爲圈上雙結合之顫動變換而消滅,那麼現在圈上的輕氣都被 substituent 之分子所佔據,則雙結合的顫動變換,應行停止或減少;如果該物具有旋光性,卽不難測出矣,不但此也,著者本欲研究之問題,——藉第X及XI式的物質以斷定 Riedel 或 Körner-Dewar Formula 之存在——非預先確知X及XI式之淡質決無「不對稱中心」,卽無法着手去工作.

要解決頃述之問題,則除 asymmetricsubstitute Pyridiniumsalts 外(X及XI),尙須測驗 symmetric substitute 的物質(例如 XII 及 XIII),以資參證.

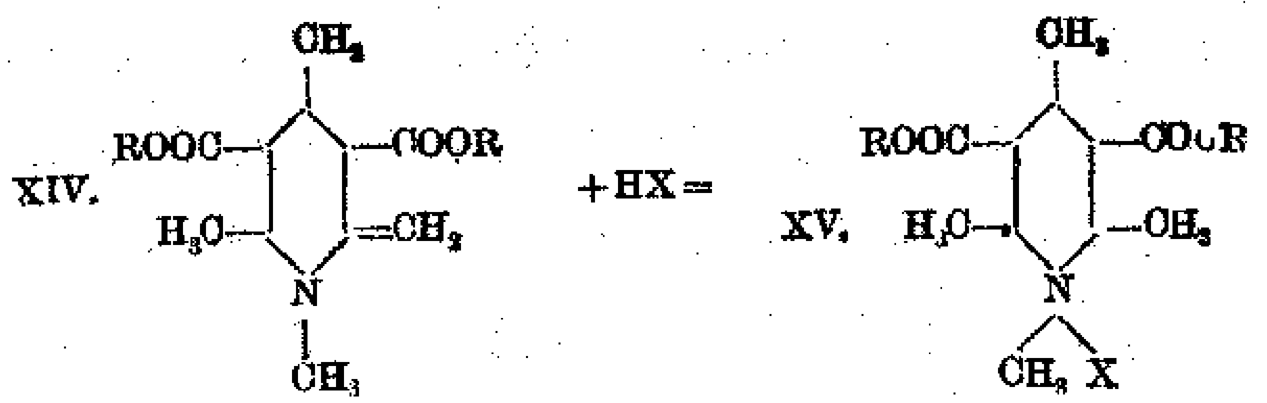
XII.  XIII. 

因爲這兩個式內並未含有不對稱的炭質,而第 XII 式亦未含有不對稱的淡質,假若他們能分解爲鏡像的同分異形物,亦僅 XIII 式有這種之可能,如果分解開了,卽證明 N: a_2· b· c· d 式的化合物圈上的淡質雖與炭質雙結合,仍舊是不對稱的,在這種情形下,分解試驗 cleavage experiment 亦

不能判決 X 及 XI 式爲 asymmetric substitute Pyridines, 因爲兩個式子都含有「不對稱中心」故也,著者試驗之結果,證明這種 Symmetric Substitute Pyridines, 無分解爲鏡形的同分異形性,所以才能無阻的去囘答一種相當的不對稱的組成物質,是否是由 Riedel (X) 抑由 Körner-Dewar (XI) Formula 推演出來?

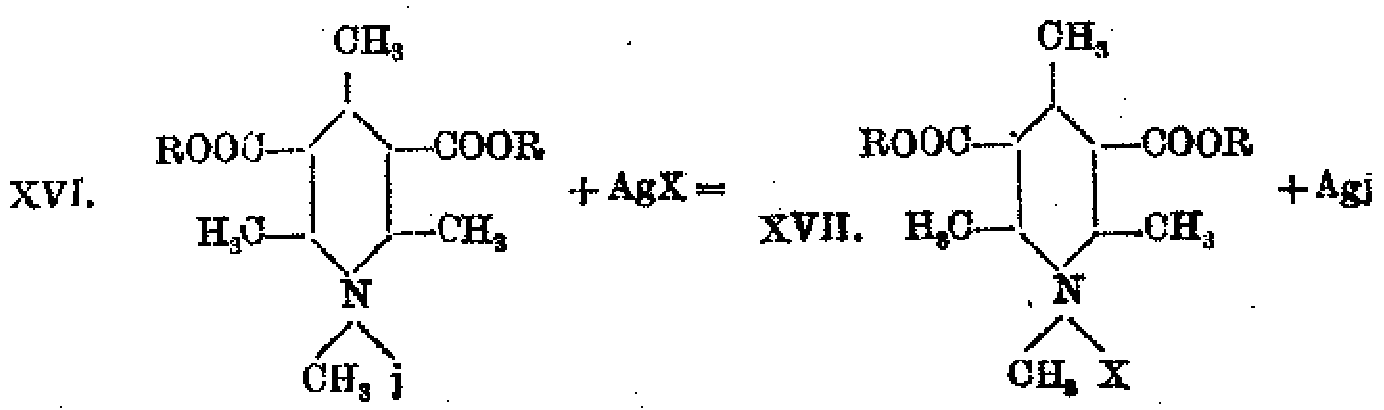
檢驗應需之 Pyridiniumsalt 與光學地働的酸之化合物,著者用兩種方法試製之.第一是用相當的 Pyridonmethide[13] 使與光學地働的酸[14]互相結合,例如

A.



第二是用相當的 iodinmethylate 使與光學地働的酸之銀化物起反應,例如

B.



註 13)　O.Mumm 及共同工作者 A 443. 272 (1925)

註 14)　X 是代表光學的働的酸之 rest.

著者選用之試驗原料,除頃述之各式外 (Collidindicarbon-acid-ester),尤注重於同樣組成之 Lutidindicarbonacid-ester,所用之光學地働的酸,有 tartaric acid, d-Kampfersulfosäure, α-Bromkampfer-α-sulfosäure 及 α-Bromkampfer-π-sulfosäure,所得之鹽類,大部是油質的或吸水性很大,不能結晶,以此僅限於研究 A 所表示的結晶很好的 Collidincarbonsäure-ester 的 Methylammoniumbase 之 d-kampfersulfonate.

所得之鹽在 acetic ester 內分級結晶,在水溶液內分極 Polarize,各級分子的旋轉度,大致相等,最高者為 $[M]_D^{16} = +53{,}98°$,最低者為 $[M]_D^{16} = +53{,}64°$,這種數價與 d-Kampfersulfosäure-ion 的 $[M]_D^{16} = +51{,}7°$[15] 幾相等,已足證明其未曾分解也,然為愼重起見,亦將各級的 d-Kampfersulfonate 用 Perchlarsäure 變為 Perchlorate,看他是否佔有旋轉能,結果俱為 inactive,

在製取合宜的 unsymetric Pyridiniumsalts 時,也發生上述同樣之困難,所找之鹽類,俱按照 A 或 B 的公式而組成,但不易使之結晶,所以結果祗得着兩個結晶很好者,卽 (1) Dimethylcinchomeronsäure-ester 的 Methylammoniumbase 之 α-Bromkampfer-α-sulfonat, (由 α-Bromkampfer-α-sulfosäures Silber 及 Dimethylcinchomeronsäure-ester-jodmethylat 所製成), 與 (2) Collidin monocarbonsäureester 的 Methylammoniumbase 的 α-Bromkampfer-π-sulfonat.

第 (1) 鹽的分子旋轉能在三個分級結晶液中為 $[M]_D^{20°} =$

註 15) E. Wedekind A. 442. 120 (1925)

272,5°, 276,0°, 272,5°, 同時用作比較之 α-Bromkampfer-α-sulfosäure 的 Ammoniumsalt 之 $[M]_D^{20°}$ 爲 275,8°, 此數與上面之三數約相等,足見此二物質之光學的旋轉能 optic Activity, 是源於 α-Bromkampfer-α-sulfosäure, 而 Pyridin 本身之 ion 爲 inactive 也,所得之 Perchlorate 亦爲 inactive, 愈足證明之.

第(2)鹽在 acetic ester 內結晶時,各級晶體的溶解度不同,熔點亦不同,易溶解的部分之熔點爲 183−184°, 他的 $[M]_D^{20°}$ = +260,0° 至 +261,0°, 難溶解的部分之熔點爲 186°, 他的 $[M]_D^{20°}$ = +284,2° 至 +285,0° 如果我們用他與 α-Bromkampfer-α-sulfosäure 的 $[M]_D^{20°}$ = +273°[16] 加減之,則易溶解部之陽伊洪 Kathion 的 $[M]_D^{20°}$ 爲 −12°, 難溶解部之陽伊洪 $[M]_D^{22°}$ 爲 +12°, 觀此似乎已分解開矣,惜所得之分子旋轉度爲數過小,或係試驗時難免之錯誤,非俟他與一種 Optically inactive acid 結合後而成一種 Optically active salt, 則不能斷定其爲分解矣,向這一方面所做之試驗物,盡屬 inactive,

上述各科試驗之結果,證明 symmetric 或 asymmetric substitute Pyridines 不能成鏡像的同分異形物,即使 Pyridin 圈上的輕氣完全被 Substituent 替代去,減少不能檢察的分子內部之變換時,亦不能成爲鏡像的同分異形物,以此在很有當作 Riedel Formula 可能的物質,亦證明其非 Riedel Formula, 因此我們可以推廣說: Pyridin 族的物質之構造式皆非 Ri-

註 16) Walden Ph. Ch. 15. 199

edel Formula, 而爲 Körner-Dewar formula, 這種實事與推論,正與 Jones[17] 及 E. Wedekind[18] 所得者洽相符,同時且證定一個五價的淡質如有兩價是與一個炭質雙結合,沒有不對稱中心. Center of asymetry, 卽各價之 Substituent 各異時亦無之.

試驗之經過

1. Dimethylcinchomeronacid 的酸性 Brucinsalt

用一分子的酸與一分子的 Brucin 在水內煑數分鐘,則很快的溶化,(如單獨將酸或 Brucin 在水內煑之,很難溶解的), 在真空內蒸去水分,卽餘下一種在酒精中很易結晶之物質,該物質最初溶解於少量酒精內,在燒煑時,忽爾分澱出來,至加多量之酒精後,始行再溶化,這種現像,在火酒 Methylalkohol 內亦然,粗物質 Crude product 的熔點爲 200°, 從新結晶數次後者亦爲 200°,

分析的結果:

0,1121g subst: 0,2691g co_2; 0,0561 H_2O

0,2123g subst: 13,10 ccm N (20° 767 mm)[19]

$C_{32}H_{35}O_8N_3$. 應得: C 65,75%; H 5,40%; N 7,13%

尋着: C 65,48%; H 5,60%; N 7,11%

註 17) Journ. Chem. Soc. 83. 1400 (1903)
91. 1821 (1907)

註 18) E. Wedekind A. 442. 119 (1925)

註 19) 收集淡氣的液體是33%. 的 KOH.

作光學檢驗時,將 10g 極純淨的物質在 180 ccm 酒精內分級結晶.第一級分濾出來之晶體,約計 7,5g, 母液每次蒸去 40 ccm, 共蒸三次,每次使結晶,所得之晶體,爲 Fraction II－IV.然後將第一級晶體在 160 ccm 酒精溶化,使結晶三次,爲 Fraction Ia, Ib, Ic; Ia 又溶於 100 ccm 酒精內,使分爲 Iaa 及 Iab; Iaa 又分爲 Iaaa.普通是久置於冷劑內(冰與食鹽)或待接種後 inoculate, 始行結晶,最足引取我們注意的地方,是該物質在水及酒精內之溶解情形,在水內的溶解度,愈至後來的 Fraction 愈增大,在酒精內則正相反.

一切光學試驗用的物質,都是溶解於 10 ccm 水內,在室溫時(約 20℃) 在 1 dcm 管內分極,

分級 Fraction 次數	Subst. in g	旋轉角α的度數	spezific rotatory Power $(\alpha)_D^{20}$ 之度數[19a]	分子旋轉能 $(M)_D^{20}$ 之度數
I	0,3713	—0,87	—23,43	—138,0
Ia	0,2404	—0,565	—23,50	—138,4
Iaa 1.	0,2862	—0,64	—22,36	—131,6
Iaa 2.	0,2484	—0,54	—21,74	—128,0
Iaaa	0,2738	—0,605	—22,00	—130,1
Iab	0,2955	—0,66	—22,33	—131,5
Ib	0,2209	—0,465	—21,05	—123,9
Iba	0,2040	—0,425	—20,83	—122,6
Ic	0,2189	—0,445	—20,33	—119,7
II	0,4515[20]	—0,37	—20,90	—123,1
III	0,2007	—0,40	—19,40	—117,4
IV	0,1456	—0,30	—20,61	—121,3

註 19a) 可釋作「固有的旋轉能」

註 20) 因爲物質的量很多故用 25 ccm 水溶化之

各種不同的分級,用當量的鹽酸變爲 Brucin-hydrochlorid 及 Dimethylcinchomeronacid. 將該酸從新結晶鍊淨後,使成爲鈉化物而分極,檢驗之結果,各級皆爲 inactive.

2. Dimethylcinchomeronacid 的中性 Brucinsalt

用水煮一個分子的Dimethylcinchomeronacid及兩個分子的 Brucin 於水鍋上,至完全溶解爲止,冷後結晶出來之物體,在水內或酒精內從新結晶,(Fraction I–V), 熔點爲 185°, 他的吸水性很大,

分析的結果(micro analysis):

4,816 mg subst: 11,80 mg co_2; 2,78 mg H_2O

$C_{55}H_{61}O_{12}N_5$. 應得: C 67,14%; H 6,20%

尋着: C 66,85%; H 6,45%

一切光學的檢驗,是將所用之物質在 15 ccm 火酒內溶解之,用 2 dcm 管子在 20°時分極,

分級的次數	Subst. in g	α 的度數	$[\alpha]_D^{20}$ 的度數	$[M]_D^{20}$ 的度數
I 1.	0,3749	—1,69	—33,41	—328,4
I 2.	0,1763	—0,87	—37,01	—363,8
I 3.	0,1817	—0,91	—37,56	—369,2
II	0,1749	—0,87	—37,52	—369,1
III	0,1532	—0,77	—37,69	—370,5
IV	0,1836	—0,93	—37,38	—367,5
V	0,1698	—0,85	—37,54	—369,0

用 1. 法還原的 Dimethylcinchomeronacid 爲 inactive.

3. Dimethylcinchomeronacid 的 β-Semiester 之 Brucinsalt

Semiester之製法,是加當量的(一個分子的)無水酒精輕養化鉀液於用冰冷却之 Dimethylcinchomeronacid-diaethylester, 使之鹼化,加當量的鹽酸於鹼化產品,即得 β-Semiester.

將 Brucin 的酒精溶液及 β-Semiester 的酒精溶液混合之,則反應的產生品 reaction product 即慢慢的結晶而出,在酒精內分級結晶,熔點為 163°. 他在熱酒精熱火酒 Aceton 及 Benzol 內易溶化,在冷酒精內難溶化,在水內很難溶化,在 Ligroin 或 acetic ester 內不溶化,他的吸水性甚大,

分析的結果(micro analysis):

4,547 mg Subst: 11,08 mg co_2; 2,83 mg H_2O

$C_{34}H_{39}O_8N_3$. 應得: C 66,12%; H 6,32%

尋着: C 65,81%; H 6,96%

3,169 mg Subst. 0,193 ccm N (21° 736 mm)

應得: N 6,80%

尋着: N 6,71%

一切光學的檢驗,是將所用的物質溶化於 15 ccm 火酒內,用 2 dcm 管子分極,

分級的次數	S.bst. in g	α 的度數	$[\alpha]_D^{20}$ 的度數	$[M]_D^{20}$ 的度數
I	0,4398	—0,075	—1,[illegible]	—7,89
II	0,6147	—0,085	—1,027	—6,39
III	0,5898	—0,08	—1,08	—6,66
IV	0,5908	—0,085	—1,079	—6,65

將 Fraction I 與 II 混在一處,加稍多於當量之炭酸鈉,則 Brucin 分澱出來,濾去後,母液用 Chloroform 搖洗之,至不含 Brucin 爲止,然後在真空內蒸去多量的水而行光學的檢驗,取出之 Brucin, 在水內從新結晶,亦行光學的檢驗, Fraction III 與 IV 混合後,亦作同樣之檢驗,

今將所得之結果列後:

0,0744g Brucin (Faction I 與 II) 溶化於 15 ccm chloroform 內在 2 dcm 管子分極,

$$\alpha = -1{,}26^\circ \qquad \therefore \qquad [\alpha]_D^{20} = 127{,}0^\circ$$

0,736g Brucin (Fraction III 與 IV)溶化於 15 ccm Chloroform 在 2 dcm 管子分極,

$$\alpha = -1{,}24^\circ \qquad \therefore \qquad [\alpha]_D^{20} = -126{,}3^\circ$$

Dimethylcinchomeronacid-semiester 之鈉鹽的光學地檢驗之結果:

Fraction I 與 II	$\alpha = 0^\circ$
Eraction III 與 IV	$\alpha = 0^\circ$

4. β-Benzoylcollidin-β'-Carbonacid 之 Brucin-salt.

β-Benzoylcollidin-β'-carbonacid-ester 之製法,是熱等分子量的 Benzoylaceton-imid 與 Aethyliden-acetic ester. 所得之 Dihydro-product, 用亞硝酸除去輕氣 Dehydrogenisation,[21] 用當量的(濃度爲 n/2)酒精輕養化鉀液將 Ester 煑八小時,蒸去液體後,即

註 21)　C. Beyer　B 24　1667 (1891)

得該酸之鉀化物(見IX式),在乾燥的 Aceton 內,從新結晶,成很美觀的針狀晶體,他含一個結晶水,熔點不明顯,在 165 – 183° 之間,他在火酒,酒精,水,錯酸內易溶解,在 Chloroform, Aceton 內難溶解,在 Benzol, Ligroin, Toluol 幾不溶解,分析的結果(micro Analysis):

6,720 mg Subst.: 14,51 mg Co_2; 2,95 mg H_2O

$C_{15}H_{14}O_3NK + H_2O$ 應得: C 59,08%; H 4,92%

尋着: C 58,91;% H 4,92%

將 β-Benzoyl-collidin-β'-Carbonacid 的鉀鹽與當量的 Brucinhydrochlorid之水溶液(因為固體的 Brucinhydrochlorid 吸水性很大,所以頂好是將 Brucin 溶化於當量的「濃度 0,1 Normal」HCl 內)混合後,蒸乾,用無水酒精溶取反應產生物 reaction product, 除去 KCl, 然後在 acetic ester 內從新分級結晶,晶體為較大的白色針,其熔點在 124°,但不甚明顯,他易溶於酒精火酒,難溶於水,很難溶於以脫,適於從新結晶之液體,acetic ester 外, Aceton 亦可,他的吸水性頗大,

分析的物質,先在56°時乾燥之,至分量不變為止,(Micro Analysis):

4,419 mg Subst: 11,45 mg CO_2; 2,54 mg H_2O

$C_{39}H_{41}O_7N_3$. 應得: C 70,59%; H 6,19% H_2O

尋着: C 70,69%; H 6,43% H_2O

一切光學的檢驗所用之物質,是溶化於 15 ccm 50% 的

酒精內,在 2 dcm 管子內分極,

分級的次數	Subst in g	α 之度數	$[\alpha]_D^{21°}$ 之度數	$[M]_D^{21°}$ 之度數
I 1	0,1682	—0,57	—25,41	—168,5
I 2	0,3510[22]	—1,01	—21,58	—143,0
I 3	0,1682[23]	—0,37	—16,5	—109,4
II	0,1680	—0,57	—25,45	—168,8
III	0,1680	—0,57	—25,45	—168,8
IV	0,1680	—0,57	—25,45	—168,8

各級的液加當量的炭酸鈉,濾去分泌出來之 Brucin,再加 Chloroform 搖洗之,至無 Brucin 爲止,光學的檢驗, Brucin 之價值正合於應得之數, β-Benzoyl-collidin-β'-Carbonacid 之鉀鹽,在分極時無旋轉能,

5. 用光學地働的酸與 Pyridin 族之 Ammoniumbase 試驗之經過.

爲研究 Symmetric Substitute Pyridines, 著者最初選取 γ-Phenyl-Lutidindicarbonacid-ester 爲試物,將他變爲光學地働的酸與 methyl ammoniumbase 之鹽類(見第109頁),是用 Pyridon-methid 與光學地働的酸. Pyridon-methid 的製法,是將 γ-Phenyl-Lutidindicarbonacidester 變爲他的 Methylsulfate 的 additive compound,然後再加一定濃度之 NaOH 液卽得之,用 Pyridon-methid 與 (1) tartaric acid,(2) d-Kampfersulfosäure, (3) α-Bromkampfer-α-

註 22) 物質液體之濃度對於分子旋轉能發生很大之影響

註 23) 爲測定酒精的濃度對於質發生之影響所以這一個試驗改用 96% 的酒精

sulfosäure, (4) α-Bromkampfer-π-sulfosäure 在各種溶液各種條件下起反應,結果都得一種油膠質的物體,置於真空內及平常壓下者數月,仍舊不能結晶,

經過這種失敗後,乃改用第109頁述過之 iodinmethylat 與光學地働的酸之銀鹽之方法因爲用Pyridonmethid 與 methyl iodide 製出之 iodinmethylate,既不容易鍊淨,又得很壞之收獲量 yield,所以著者設法改良之,而用 Hj 與 Pyridon-methid起反應,結果由 3,06g Pyridon-methid 與 2,3g H_3 溶液(比重爲1,7多於當量之10%),得 4,1g 幾純淨之 iodinmethylate,等於應得量之 95%,經三次酒精液中之結晶,卽完全純淨,熔點爲 173 – 174°,

同樣的試驗,亦施諸 β-Benzoylcollidin-3'-carbonacid-aethylester,製時將此 ester 及稍多於當量的 Methyl iodide,置於爆管內在 100° 時養 24 小時,所得之產品,在 Aceton 內從新結晶,熔點爲 180°,

分析之結果:

0,1213g subst.: 0,1567g CO_2; 0,0388g H_2O.

$C_{18}H_{22}O_3Nj$. 應得: C 51,95%; H 5,01%

尋着: C 51,85%; H 5,26%

用頃述之兩種 iodinmethylate 與 tartaric acid, α-Bromkampfer-α-sulfosäure, α-Bromkampfer-π-sulfosäure 之銀鹽起反應,亦得一種油膠質不結晶之物體.

趁此機會,略述兩個同分異形的 Bromkampfersulfosäuren 的銀鹽之製法,往日所有的製法,是將該酸之鈉鹽或錏鹽與硝酸銀混合之,就著者試驗的結果看來,所成之銀鹽與同時產生之硝酸鈉或硝酸錏不易分離,以此著者乃更變之如下:慢慢加粉狀炭酸銀(稍多於當量)於濃厚的酵液,時常搖動之,產生炭酸氣很多,加畢後,在暗室內在水鍋上蒸半小時,趁猶熱時濾去未用完之炭酸銀,溶液冷却後,銀鹽卽結晶而出,所得之收獲量,幾爲百分之百, α-Bromkampfer-π-sulfosäure 之銀鹽爲很大的長針晶體,溶點爲 146°,

6. Collidin-dicarbonsäure-diaethylester 的 methylammonium-base 之 kampfersulfonat

加 10 % 多於應需量之 Dimethylsulfat 於 50g Collidin-dicarbonsäureester, 置於溫度 60－70° 之水中煮一小時,常常搖動之,然後將水燒至 100°, 再煮一小時,所成之結合物 additive compound, 在無水酒精內從新結晶,用無水以脫洗數次,

將 20g 結合物之溶液冷却後(用冰與食鹽製就之冷劑), 加 60g 2n 輕養化鈉液(也預先冷好一次加入), 產生之 Pyridonmethid, 用濾器吸去水分,置於 Exikator 內半小時乾燥之,然後用 10 倍的 Hexan 從新結晶,加當量的 d-Kampfersulfonsäure 於純淨的 Pyridonmethid 內(二物都用酒精溶解之), 卽得我們所要之 sulfonat, 在真空內蒸去酒精,用 acetic ester 從新結晶,其熔點爲 192°, 但起分解,分析之結果與應得之價相符合.

在 acetic ester 內分作五級之結晶,在光學檢驗時,每次溶化於 10 ccm H_2O 內,用 1 dcm 管子觀察之,所得之結果如下:

分級的次數	Subst in g	α之度數	$[\alpha]_D^{16°}$之度數	$[M]_D^{16°}$之度數
I	0,4362	+0,46	+10,55	+53,89
II	0,3239	+0,34	+10,50	+53,94
III	0,2990	+0,315	+10,54	+53,84
IV	0,3260	+0,345	+10,58	+53,98
V	0,3504	+0,344	+10,56	+52,96

由第 I 分級製成之 Perchlorat, 熔點為 142,5°, 溶 0,1660g 于 15 ccm Aceton 內,在 2 dcm 管子內行光學檢驗, α=0°,

由第 V 分級製成之 Perchlorat, 熔點為 142,5°, 溶 0,9626g 於 15 ccm Aceton 內在 2 dcm 管子內行光學檢驗, α=0°,

7. Collidinmonocarbonsäure-aethylester 的 Methylammonium-base之 α-Bromkampfer-π-sulfonat

當量的 Silber-α-Bromkampfer-π-sulfonat 及 Collidin-monocarbonsäure-aethylester-jodmethylat 在水內單獨溶解後,混合之,濾去 Agj, 將液蒸乾,得一種油質,置數日後,結晶,收獲量為應得數之 90 - 95 %,熔點為 167°,在水,酒精,火酒, chloroform 及 Aceton 內易溶解,在 Benzol, Taluol, acetic ester 內難溶化,在以脫內不溶化,絕對乾燥之物質,在 acetic ester 內從新結晶, 4,2g 物質加 30 ccm acetic ester 煑之,僅溶化一部分,共煑六次,每次用 30 ccm acetic ester, 尚餘 2g 不溶化,溶化者之熔點為 183-184°, 不溶化者為 186°,兩者混合後之熔點為 183°,晶體白色大棱

柱,

分析之結果:

0,119g Subst.: 0,2104g CO_2; 0,0669g H_2O; 0,0173g Br.

$C_{24}H_{34}O_8NBrS$.　應得: C 50,97%; H. 6,18%; Br 15,44%

尋着: C 51,29%; H. 6,44%; Br 15,46%

在 acetic ester 內溶解的部分,分作兩級,爲 Fraktion I 與 II, 其不溶之部分,分作兩級,爲 Fraktion III 及 IV. 光學檢驗所用者溶解於 10 ccm 水內,在 1 dcm 管子內分極.

分級的次數	Subst in g	α 之度數	$[\alpha]_D^{20°}$ 之度數	$[M]_D^{20°}$ 之度數
I	0,1684	+0,85	+5),48	+261,0
II	0,1466	+0,734	+50,07	+260,0
III	0,2432	+1,34	+55,30	+285,0
IV	0,1974	+1,083	+54,78	+284,2

由各級製成之 Perchlorat, 在分極時 $\alpha=0°$,

上面試驗所需之Collidin-monocarbonsäure-aethylester大部是按照 Michaels 的報告[24]製成,但就著者試驗之經過看來,粗 ester 宜先在真空內(在 17 mm 以下)在 140° 左右蒸溜之,然後始在平常氣壓下蒸溜之(熔點 250—260°),較爲良善,

由 Ester 製成他的 jodmethylat,最初亦按照 Michaels 的報告做去!法在常溫下使 ester 與 CH_3j 混合,靜置之,數小時後,即得一種針形絲光的晶體,收獲量多少,則未述及,著者將該

註 24)　R. Michael　A. 225. 124 (1884)

混合物置兩星期後,約得收獲量30％,乃改良此法,在12小時內,卽得收獲量95％,法加10％多於當量的CH_3j於ester內,在水爆管內Wasserbombe燒12小時,將凝固之反應品用酒精溶化取出,慢慢加以脫,使之分澱出來,爲一種美觀的絲光針形晶體,從新結晶,三次後,熔點爲142−143°,

著者最初製造Collidinmonocarbonsäure-ester的Methylammoniumbase之鹽類時,想利用他的中產品Pyridon-methid作原料,但無結果,製Pyridon-methid之Methylsulfat的結合物,却很易製得,如將collidinmonocarbon-säureester與少多於當量的新鮮蒸溜之Dimethylsulfat混合,在平常溫度置20小時,卽分泌沈澱出來,爲吸水性很大長而白的針形晶體,他在水,酒精,Aceton內易溶化,在以脫內不溶化,

加Perchlorsäure於此溶液內,卽得一結晶很好的Perchlorat,

其分析結果如下:

0,1078g Subst.:　0,1845g CO_2;　0,0587g H_2O

0,2655g Subst.:　10,2 ccm N (20°, 762 mm)

$C_{11}H_{16}O_6NCl$　應得: C 46,83%; H 5,85%; N 4,55%

尋着: C 47,19%; H 6,09%; N 4,41%

如將methylsulfat的結合物在水中溶化,使成極濃的溶液,在冷劑內冷却之,然後慢慢加極冷的輕養化鈉液,用玻璃棍在瓶壁上磨擦之,則產生鮮紅的油質,置冷劑內20−30分鐘,卽變硬,此物大約卽所找之Pyridon-methide,(就他

與 Phenylsenföl 及 Phenylisocyanat 的反應觀之,亦證明其屬於 Pyridon-methid 族內), 惜太不固定,在空氣中數小時,卽分解爲一種黑質,故不合於著者的試驗之用,

8. Dimethylcinchomeronsäure-diaethylester 的 Methylammoniumbase 之 a-Bromkampfer-α-sulfonat

使當量的 Silber-α-Bromkampfer-α-sulfonat 水溶液與Dimethylcinchomeronsäure-diaethylester-jodmethylat 的水溶液混合之,則立刻分澱 Agj, 濾去後,在真空內蒸去母液,得一種漿汁 sirup, 他在數日後結晶出來,收獲量約爲 90,5%, 易溶於水,酒精火酒, chloroform, Aceton, acetic ester, 難溶於 Benzol, Toluol, 不溶於以脫,熔點爲 130°, 熔時分解,在 acetic ester 內從新結晶,得白色棱柱晶體,

分析的結果;

0,1234g subst.: 0,1484g CO_2; 0,443g H_2O; 0,0171g Br

0,2211g Subst.: 4,4 ccm N (20°, 767 mm)

0,1421g Subst.: 0,5577g $BaSO_4$

$C_{24}H_{34}O_8SBrN$. 應得: C 50,00%; H 5,90%; Br 13,89%

尋着: C 49,97%; H 6,12%; Br 13,83%

應得: N 2,43%; S 5,56%

尋着: N 2,39%; S 5,57%

光學檢驗用的物質,在 acetic ester 內分級結晶,共分三級,在 15 ccm 水內溶解,在 2 dcm 管子內分極,

分級的次數	Subst. in g	α 之度數	$[\alpha]_D^{20^\circ}$ 之度數	$[M]_D^{20^\circ}$ 之度數
I	0,1648	+1,04	+47,32	+272,5
II	0,1153	+0,74	+47,92	+276,0
III	0,1648	+1,04	+47,32	+272,5

由各級製就之 Perchlorat, 盡屬 inactive,

上面試驗所用之原料,——Dimethylcinchomeron-säureester之jodmethylat——大部分是按照 Mumm 及 Gottschaldt[25] 法所製成,但是他們報告中,將 jodmethyl 及 Dimethylcinchomeronsäure-ester 之混合物在水爆管內燒七小時,宜改爲24小時,那麼則收獲量由70%增至90%,而且所得之產品,亦易於鍊淨,其熔點爲 143–144°,(他們的報告爲139°),

爲研究 α-Bromkampfer-α-Sulfonsäure 的分子旋轉度,著者乃製取該酸之錏鹽,(由該酸水溶液及 NH_3 製成),在水內從新結晶,

光學的檢驗所用之物質,是溶化於10 ccm 水內,在1 dcm 管子內分極,

Fraktion I. 0,2842g Subst.: $\alpha = +2,33^\circ$

$(\alpha)_D^{22^\circ} = +81,98^\circ$; $[M]_D^{22^\circ} = +268,9^\circ$

Fraktion II. 0,5000g Subst.: $\alpha = +4,31^\circ$

$(\alpha)_D^{22} = +86,2^\circ$; $[M]_D^{22} = +282,7^\circ$

註 25) B. 55. 2081 (1922)

光的化學行爲

葛毓桂譯

此篇係 Dr Bodeustein 在 Tae Johns Hopkins U. ivers ty 的公開講演,登載於 Journ l of chem cal Educat on Vol.VII No. 3. 內容備述攝影術,審視作用及植物生長幾種光化作用的重事實,以及最近的光化理論.舊其簡要,譯述如次.　譯者

講到光的化學行爲 (chemical action) 就首先想到攝影術.當氯化銀及膠質之混合物,塗於乾板,在鏡箱內感光之後,卽生成潛影 (Latent image). 潛影爲何,容後討論.玆先討論其效果;銜有潛影的部分已變爲可做顯影的.意思就是說,乾片已感光的氯化銀易還原作金屬銀了.照相術在工商業上自佔重位置,但尤重要者,乃是另一種光化作用 (Photo-chemical process) —因是人類生存之基—卽是植物之生長.僅陽光之力卽令植物同化炭酸並分離氧氣,氧氣爲人類呼吸上所必需者.同時炭素與水合併構成枝葉果實根幹等等.此卽吾人之衣,食,建築材料及熱能種種之原也.其供吾人之利用除開前途遠大之水力 (Water Power) 外,而炭素—植物後來受種種變化而成的—仍不失爲人類能力最重的來源.

照相術及植物生長是光化作用的兩種不同的例子.生

長植物是儲能工作.若取其原料與成品比較之就明白是什麼意思.原料僅爲二氧化炭氣及水.成品的構造極其複雜,簡稱爲炭水化物.(Carbonhydrates),普通公式爲 $(CH_2O)_n$,所有糖類,澱粉,纖維等等皆是.炭水化物之外自然造成氧氣,公式是:—

$$nCO_2 + nH_2O = (OH_2O)_n + nO_2$$

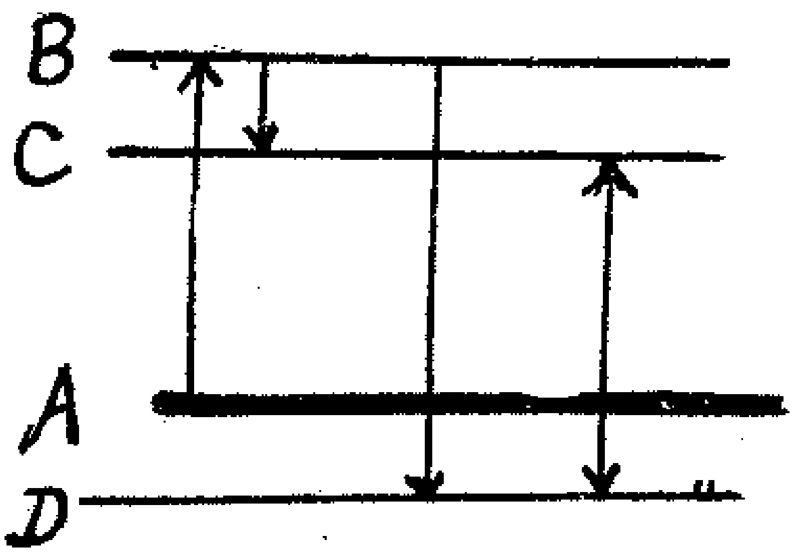
若自右向左讀之,就是澱粉或纖維質的燃燒公式.燃燒能發生大量的能力是吾人知道的.則是炭水化物加氧氣所含的能力,比二氧化炭氣加水多得多.自左向右起反應係由乏能組織變爲富能組織.儲蓄能力卽是收藏陽光之能,此光爲作用進行時所必需者.

照像乾片上的能的關係是怎樣的呢?設置一乾片於極暗處,經長時間洗出後爲雲霧狀之照片.潛影在黑暗中生成者必係感短促光亮體之所致.所以照像的光(包含日光,電光,鎂光等等——譯者)僅是加快作用,在暗中雖然極慢亦能自動的進行.反應後之成品,其能力比反應前之物更缺乏.促進緩慢的自動的這種作用在化學上叫做接觸作用.光化作用亦可認爲是接觸的.

接觸與儲能二作用,其差異似乎甚大,其實不然.接觸作用與其他作用一樣,光能是消耗的.惟光被物質吸收時則仍有效力.此事遠在 1818 年已被 Grothus 發見,不久 Draper 也發現.兩種作用的輻射能均被不穩定的中間物吸收及

轉變爲化學能力.此中間物復自動的進行第二步工作,此工作均是釋放能力的.

如圖A爲原料(或作用前之物質)的能力水平.吸收能力後上升至B水平.經自動的反應降到水平C或D.第一步自A到C係增高能力的:一即是儲能工作.第二步自A到D,係降低能力;即是所謂接觸的光化作用.(Photo-chemical process).



錏氣之分解,爲上兩種作用的確切例子.他易於分解爲氮氣及氫氣,所以合成是很難的.在室溫及大氣壓之下,錏佔98%,二氮氫游離原素佔2%,其結合與分解兩驅勢搆成一個平衡狀態.設置純錏於光中亦能分解.此等氣體的混合物不需光亦能達到他的平衡狀態;叫做接觸的光化作用.換言之,若置50%之錏及50%之二種原素之混合物於光中,錏仍分解,但不能搆成平衡是卽蓄能工作.兩種作用之間不是極小的差異.吸收某定量之能力就生成等量的分解之錏.錏升高到某一水平時,而這個升高不論其全部作用之能力或得或失,必然需要等量之能力.

關於消耗能力的量,能不能作一個簡單序述乎?對此問題的知識尙屬幼稚,且僅能以範疇光化作用.爲解釋起見,

須先略及其歷史.

物不是連續的,是小質點,原子或分子組成的,質點分子等又均爲原子的集合體.此爲往昔之憶說及學理,漸漸把他證實,現在吾人深已信所有物確是由極微極微質點構成.並且現在亦認爲能力也是一個原子的構造(Atomic structure)——這個說法,至少在本題是能成立的.在各分子間之微量能力可以傳達;就是物任意迭分至無窮,此能量是不能再分的.這就是量子學說(Quantum theory)的基礎. Planck氏首先推論,Stark氏繼用之於光化作用, Einstein 氏復精密研究.其應用定律是,每一量子對(或感應)一分子的物.這個愛因斯坦定律(Einstein's law)是能量消耗問題的根本答解.

倘細研究其事實,並非如此簡單.第一有好多物質.任便多少量子均不能應體,——如炭,金屬,石墨之類,並有其他物質雖在極亮況之下亦無變化.有的物質對某種光靈驗對他種則否.大概因爲後者光綫不能吸收僅是傳達(Transmitted)之故(這就是紅光或黃光爲什麼不能感應乾片的理由).所有量子所含之能,其大小不是一定不變的,能與浪長(Wave-length)有關,光色隨浪之長短而變.某浪長量子(Qnantum)的數值是一常數,(叫做Plank氏常數),與每抄振動數相乘之積.下表係表示紫外光線等量子大小之值:—

起始	紅光	黃光	藍光	紫光	紫外光	
					近	遠
λ	7500	5900	4900	4550	3950	2000Å
ν	400.0	508.5	619.2	659.3	759.5	1500×10^{12}/sec.
hν	2.62	3.33	4.01	4.32	4.97	9.9×10^{-12}erg
9.06×10^{23}hν	37.8	48.6	57.9	62.3	71.8	142kg.cal.

上表末行量子乘以 Avogadroś 數(或值)算出一分子物的量子能.爲方便計用 kg. Cal. 表其值比用erg好些.已經提議這個量叫作"愛因斯坦"(Einstein)完全與法拉第(Faraday)相似.紫光線一量子之體積幾倍於紅光之一量子,而紫外光的量子尤大.所以紫外光線一量子的力量能發生極强作用,極佳染料的分子能阻礙平常光的量子者,却被他侵蝕或漂白.所以就易明白,有好多例子除吸光外沒有作用之故.以一量子而促起作則嫌太不足用.

若一適當體積的分子吸收光之後,爲的一分子必起作用.此卽根據愛恩斯坦假定,是一個簡單的關係.我們若做光的試驗,就得許多左證.余此處僅舉一個特例,用這個例曾證實,愛氏假定中許多疑問.此例就是碘化氫的光化分解.下表是Emil Warburg氏試驗的結果.

HI的分解

λ	2070	2530	2820 Å
分子分解	0.292	0.356	0.404兆

吸收的量子	0.144	0.185	0.208兆
比	2.03	1.96	1 94

末行表示兩分子碘化氫被吸收的一量子光所分解.以二代一,因爲分解的第一步生成的物不是不變的.其第一步之公式如下;

$$HI + h\nu = H + I$$

H原子可照下公式發生作用;

$$H + HI = H_2 + I$$

並且I原子必定彼此合併成 I_2 分子,因爲碘不能同樣的再與氫化合,他是極不活動的.兩公式合之爲;

$$2\ HI + h\nu = H_2 + I_2$$

是試驗之結果.

據吾人所知,平常溫度是極應響化學作用的,但是否應響光化作用.余學生曾加研究知道是不能的.並且若以液狀碘化氫替氣狀碘化氫或更加入其他氣體亦均無變化.無論如何總與愛氏假定有關的.——卽是一量子光分解一分子物.尙有多種其他同種反應,其中之一是潛影(Latent image),容後討論.

就另一方面看,愛氏定律尙有例外,其數目至少等於其已經證實者,似是不幸.但硏究這許多例外於愛氏定律宣佈之後,是極可誇耀的.第一,有的所得之商(卽是以吸收的量子數除分解的分子數之得數)少於一(或一單位).這是

容易明白的.余已經說過,物吸收能力後能升高過於較高之能力水平線,從而下降搆造成品.若能力極小,例如微光量子,他不能應觸於上等染料,惟不論吸收多少,均能致能力升高,但不能過到化學變化所必需水平線之高,僅是增加一點熱於物質並沒變化,而吸收的能力仍在活動由此得一明顯之點,卽是吸收的某波長之光因其量子過小僅足發生熱量是也.浪波較短者(如藍光,紫光,紫外光)發出之量子大,足引起反應.此點不十分可靠.因爲各個分子於吸收光之前,所含固有能力並不均等.在 20°c 氣狀之物,所有分子的平均能力都相當於此溫度.但 1cc 內 3×10^{19} 分子中有的能力相當於10,000°C,有的相當於5,000°C, 大部分近於20°C, 還有低於 20°C 者.試取此事研究之,就知道光的行爲,無論量子體積大小如何,均不能頓然切開光帶的任一點.其變化自活動至不活動必是逐漸的.在此情形之下,其商自然小於每分子對每量子之關係.已經討論過的鍶氣分解,按之此假定是對的.在室溫中,分解一分子必需光波極短紫外光四個量子.倘令溫升高以提高分子的平均能力,其商必變大,於是在300°c 時,能過到分子量子一對一的關係(譯者按每量子能分解每分子物).

所以就不難明白,爲什麼在有的情形之下,其商數比照當量律(Law of equivalent)所應得的還更小些.而有的其商大於一,更有時大得很多,是 1,000,000 分子對一量子之比.於

是當量律就難憑信,惟相因而生的一種假定,不但應用於光化反應,暗反應(Dark reaction)亦極適用.——就是"鍊反應"(Chain reaction)的假定.試舉氯氫二氣構成氯化氫之例說明之.此作用 Bunsen 及 Roscose 二氏首先研究(1850-55),嗣後繼起者甚多,而於此極難反應的機關作用是怎樣,尙未確實知道.故不能說出."鍊"究竟是怎樣,僅是大概是怎樣而已.下爲氯化氫最簡公式;

$$Cl_2 + h\nu = 2\,Cl$$

$$Cl + H_2 = HCl + H$$

$$H + Cl_2 = HCl + Cl$$

Cl_2 復與 H 作用,於是成一"鍊形",繼續進行終了爲止.他自然是一個假定,惟在暗作用及其相似之作用中確實存在的.Weigert 及 Kellermaun 二氏證明氯及氫混合物,感光之後卽發生長久的暗反應.此混合物感光花 1/1,000,000 秒而其作用之進行達1/200至 1/20 秒之久.證明"鍊作用"實在是一個"暗作用".緣光而開始,籍吸收之光自由活動.

第一次動作之後接着就是鍊作用,是不能完全用直接試驗證明的,但因爲鍊作用可以表示黑暗的化學作用之特性.我們實在可說感光後第一步作用,適合愛恩斯坦的當量定律,——卽一光量子分解一分子物.感光的分子後來的作用方式則有各種.

余認爲這就是光力化學(Photo-chemistry)的最新知識的

基礎.

以下詳細的講三個重要的化學反應,——卽照像之成影;植物之生長,及審視(Seeing)的動作.審視亦是光化反應之一,至少其反應的第一步是的.知道乾片在鏡箱內得之潛影可以顯出.顧潛影究爲何乎之問題發生已久,至最近方確定的答覆.因片上起變化之物爲量極少.感光後的片子不能用極精細的顯微鏡或精密的分析法檢定其變化,自然除"能顯影性"不論,大概光化作用是鹵化銀的一種分解.此分解僅能於强光下並通風之處能之.氣流攜去之鹵氣易於驗出.雖然在平常情形之下,鹵與銀彼此迅速的作用,而並無空氣氣流,其潛影能固定一長時間.遊離的鹵氣不能存在於光亮的乾片上.必須用其他物質接受,且用膠質與鹵化銀混合塗於膠捲上是很容易的.所以可設想,潛影之爲物,就是銀,已成結晶體的矣;我們已知道利用顯影劑促進鹵化銀的還原,更增加銀的生成金屬的銀,固確實生成,而其生成之多寡係按照一原子銀對一光量子之比, Eggert 及 Noddack 二氏已經證明過的.此結果,並不恰與上邊碘化氫分解之例十分契合.測量這樣微的吸收的能力殊不容易,因爲不僅是被鹵化銀——此研究中佔重要之位置——吸收,並膠質亦吸收之.各種困難終究一概打破,現在可說愛氏定律用之於照像乾片上無不適合矣.

關於照像潛影之生成,還有很多問題,恕不能一一細講

了.

照像的乾片是人類的一種發明,在一人爲光化作用中,以靈敏論最佔重要.還有兩種"天然的"光化作用,尤屬重要,卽植物之生長及審視行爲是也.視察是光的化學作用之一至少他的第一步是的.光觸於眼,繼起生理及心理兩種作用於是激動腦髓變做感覺.

考究這種作用自然十分困難.此處僅論其第一步作用,卽是在眼睛內所起之變化.知道網膜(Retina)是很多的靈敏器官搆成.器官分錐體(Cones)柱體(Rods)兩種.柱體有色,錐體無之.更知道柱體的顏色因光亮可由紫變黃,在弱光下的視察用之,所以微光中不能辨別顏色,僅視灰色爲灰色,而已.

柱體之變色是光化作用的鐵板證據.依吾人對這種作用的知識俱用間接方法求得,因爲不能粗硬的化學劑直接接觸眼睛的靈敏的感官.有人首先試過,倘改變試驗的環境之後,何以物體作用激動變化呢:一係利用第二步的審視行爲——卽生理的——作第一步的試驗劑.眼睛能自動的適應各光度不同的環境,這是極昭著的事實.首先變更其瞳孔,繼於網膜之內大起變化,其進行並不甚快.好相一種物質A感光之後卽變做另一種物質B.網膜適合弱光者含A多,他能吸收多量的微光促起刺激.適應亮光者含A少,但亦足能吸收等量的亮光發生同樣的刺激.

倘將外界光度頓然改變復以特殊之光照射眼睛,此將光所有試驗完全一致.設於亮光頓然改變之後,在不同的時間以特光照射,就可測得變化之遲速,及其所遵循之定律.可與遲緩的著名的化學作用之定律比較之.哥倫比亞大學 Selig Hecht 曾用低等動物蛤做過試驗.結論是,不但物質 A 變做 B,並可變做 B 及 C 兩種.其一般的關係卽謂,視官適應弱光時其靈敏物的濃度大;換言之,適應强光濃度後.並且等量的物質,其化學變化發生同一的刺戟.

在人的眼睛上做同樣的試驗似乎很難.而於光度及視官銳敏之間則有種種測驗. Hecht 氏曾討論並測驗過.發明其定律及理論.最重要的是他求得嚴格的定量關係之定律.此定律關涉範圍很廣,余僅確定所有觀察完全與光化作用相符合.

以上研究對於何以能辨別明暗的理稍有解釋,而顏色之分辨尙少論及.要解釋此現像必須假定錐體有多種,一易感藍色,一易感紅色,一易感綠色.是三色以適當比例配合可搆成白光中所含之各色. Hecht 氏近收發表論文舉出好多例子證實此理論.故解釋分辨顏色之理也可假設爲一種錐體之作用. Weigert 氏曾創造一個假定解釋之,雖然尙是一個模型.他認爲氯化銀及氮化銀之各層在某種情形之下感有色光後,卽起相比的變化 (Specific Change).在綠光中變綠,藍光中變藍,於是就合乎以下假定,卽謂凡

形成此現相之各質點,按一致的規律排比均匀,以應付各不同之顏色.染料吸收於一薄膜膠棉中也可發生此現相,若此膜略塗以色則尤顯.

以上論據,轉用於眼睛.錐體似無顏色,惟須與柱體均假定覆有極淡的有色層.此層之變化與銀鹽及染色膠棉是一樣的,設變綠時,卽傳送"綠"的刺戟於腦部.更須假定當光消滅此層恢復常態.——此點模型不能表顯,但僅認定眼睛是可能的.

與上邊理論相關的重要現相必要知道,例如眼睛感受落日的有色强光之後而閉之就覺得有一殘影存留.是非以正色表現,但爲補助色.大概是對於太强而有色的一種反對表現,生成一種綠色染料以中和太陽之紅光.

不論Hecht氏的辛苦試驗與計算,不論 Weigert 氏用比擬的方法解決觀察問題亦及昔日偏於生理的試驗及理論,俱已證明眼睛行爲是根本於光化作用,並與以相當的解釋.在吾人充分明瞭這個奇異作用之前更辛苦的研究是必須的.

以吾人之知識,取植物生長作其他重要的天然的光化作用的例子再好沒有.已經講這種作用是起於二氧化炭及水構成氧氣及炭水化物的變化.爲研究這種作用起見,首先談談照像作用.

乾片上的臭化銀吸收藍,紫及紫外各光,並爲此顏色所

感動.他不能吸收綠,黃或紅各光,假若攝一晚霞,綠樹,白屋的美麗影片,結果僅能白屋實現而紅雲綠樹成爲負明正暗之色(底板爲負,洗出之片爲正).惟鉻片(ortho-chromated plate)多少可以彌補這個缺憾.此片製法係於片上塗以某染料之溶液.塗的要好,自然不要改變氮化銀結晶之顏色.如平常乾片一樣僅能吸收藍紫各光,設感受較長浪光之力發生作用時,則是染料之分子吸收光之能力後再傳達於氮化銀,其動作同直接感光是一樣的.染料的分子並不因是而起化學變化.已經證明,能傳達光於二十分子以上的氯化銀並起作用.能力之如何傳達尚不知其詳,僅知道也是氣狀態發生,其關係更爲簡單.希望此問題從速解決,爲討論起見,可以說能力傳達是可能的並"靈敏的光化作用"(Semitized photo-chemical reactions)是常見的現相.

感光性之於攝影功用極大,亦爲植物生長的基礎.構成植物之原料爲二氧化炭氣及水.二者均無色且能透光但感光卽起作用故必需要感光物藉葉綠素及其相似之微量物質而完成之.葉綠素爲一種染料,能吸收微弱之光,尤其是紅黃二色,傳達其能力於二氧化炭氣或其水化炭酸.提取植物之有色質及令此有色液體與二氧化炭氣之混合物而透以光線事甚容易.但無絲毫成功.(卽不能構成植物——譯者).同化作用僅於有生活之植物能之,是爲某物質如染色體(chromosomes)所限制.染色體卽葉之所由綠

也.從事研究極端困難,現仍然不能說明同化的機械作用.僅知道原料爲二氧化炭與水,生成澱粉,纖維,木材質等等.如此複雜的物質謂其構成僅經過一個簡單的作用自然是不可能的.大概先造成簡單的,嗣自動起暗作用造成成品.其第一步作用, Willstätter 氏提出一個意見——謂二氧化炭的水化物(卽炭酸)受日光應響之下重復排列爲醛(formaldehyde)的遇氧化物.於是分離氧氣而成醛,醛是最簡單的炭氫化物,繼凝集而成其他複雜之物.自然這個理論不是不可能的,但尙未經實驗完全證明.

Otto Warburg 及 Negelin 二氏曾精密測量能力有相當的結果.彼等確信分離一分子氧氣幾要用四個量子的能,不論吸收的光的顏色是紅是綠,是黃是藍.這個試驗極其清楚,但何以解釋愛恩斯坦對光的定律乎.有一實例極有趣味.吾人試取此能力與燃燒物質所得的能力而比較之,例如澱粉與氧氣——卽是反同化作用.燃燒所得之熱量僅等於由紅光吸收來者的70%.大自然利用陽光之能(70%)按排一種程續,此程續極其複雜吾人不能明了,並不能了然如何再造之法.這個事實幾令吾人不能不蔑視近代物理上及化學上無論理論方面及技術方面一切之成功.

這個研究同化作用一個基本觀念,此外還有.所有人類能力之原爲煤礦與油井,二者非他,乃幾百萬年前之植物之沈澱而已.消耗他們如同消耗資本,此資本是多年前自

太陽能力儲蓄而來者,而現在之消耗量遠過於儲蓄量.假資本耗盡將何以善其後乎之問題起焉.答語至簡單,曰發方法以代替植物之生長而已,在此法中利用陽光之能力控制一作用以儲蓄能力於物質之內.此類作用已知道幾種.例如分解水汽或二氧化炭氣是很容易的,讓此分解後的生成物發生儲能工作應該更容易.但是用於此分解的光是紫外光,則是可置能力發生器於得利用陽光的紫外光線之處.置地上數邁爾(Mile)之高自然不可能的.因是需要一種因徵光而發的一種作用.現在僅知道一種,係Luther 及 Weigert 二氏發明的.蒽草精(An thraceue) (煤膏內之一種產品)受藍或紫光的應響聚化 (Polymewzed) 爲雙蒽草精 (di-anthraceue). 此物之暗作用 (dark reaet) 是相反的復變爲單分子的蒽草精,其自動作用之能力就用去了.此研究僅表示能以求到這類反應,但此處所用之物不能供大規模之製造以應儲能之需要.尋求更好的方法,代替現在用的以往的植物儲存之能力,是將來工業的光化學家之目的也.

(完)

古生代末葉植物地理學之研究

斯 行 健

植物地理學(Pflanzengeographie)乃係研究植物分佈的一種學問.古生代末葉植物之分佈問題,早引起了一般古植物學家的注意,和研究的興趣.近世科學發達,與日俱進;古植物學方面,新的材料與事實,亦日有發見;因此這個問題,已得有相當結果.茲簡單述之.

對於這個問題,首先研究的,當推法國古植物學家蔡義南氏(R. Zeiller)氏于1897年在 Revue gener Sci. 8, No. 1. 雜誌上所發表的古生代植物分佈區域之研究,(Les provinces botaniques de la fin des temps primaires) 此篇對于古生代末葉植物之分佈問題,有特殊的創見,具體的研究.自此以後,世界許多著名古植物學者對于這個問題,皆深加注意.然皆僅對于其研究的一個局部的區域,所發見的化石而加以討論,如阿培氏(Arbev. E. A. N.)于1905年在 Brit Mus. 雜誌上所發表的大舌羊齒與其他植物化石之分佈 (Cataloque fossil plants glossopteris—Flora etc.) 賽華氏 (Seward A. C.) 于1914年在 Brit.Terra nova Expedition 1910. Geol. 1. 1914. 雜誌上所發表的南極植物化石誌(Antarctic fossil plants)哥登氏(Gothan W.)于1915年在 Englers Jahrbücher 年刊上所發表的古生代植物

與其繼起之中生代植物在植物地理學上之研究 (Pflanzengeographisches aus der Palaeozoisches Flora Mit Ausblicken auf die Mesozoischen Folgefloren.) 最近更有瑞典赫勒氏 (Halle) 之巨著山西中部古生代植物化石誌 (Palaeozoic plants from Central Shansi) 係北平中國地質調查所出版. (Palaeontologia Sinica Ser. A. Bd II, No. 1. 1927.) 此外最重要的文選當算蔡萊斯克氏 (Zalessky) 之盎格蘭古大陸古生代植物化石誌 (Flore Palaeozoiqe de la Serie d'Angara.—Atlas mem. Com. geól Petrograd. N. S. Livr 174, 1918. 176, 1927.) 此篇巨著對于盎格蘭古大陸區植物化石有具體的研究,并附有極詳細的圖影.以上所舉的文選,對于古生代末葉植物之分佈問題,皆有特殊的創見,所以特別舉出.

爲什麼我們不說古生代全部植物分佈之研究,而單研究古生代末葉呢?我們必須明白古生代初期及中期如寒武紀 (Kambrian) 奧陶紀 (Ordovizium) 志留紀 (Silur) 及泥盆紀 (Devon) 地層,我們已發見的植物化石,爲數極徵,而且都是極下等的植物,對于植物地理學上根本的研究,無關大旨.就是下石炭紀 (Culm) 地層,就我們已得的材料全體觀之,似乎此期中,世界各處的植物羣 (Pflanzen welt) 之外表 (Physiognomie) 大致是相似的.我們對於泥盆紀的植物,也有同樣感想.自從到了石炭紀 (Karbon) 的中期或末期,所謂歐美的前石炭紀主部 (Altere Hauptkohlenzeit) 植物的進化,

非常迅速,在歐洲及北美此期地層中發見植物化石,爲數甚巨,而其他各洲此期地層中所保存的化石,尙不甚多見.一直到了古生代末期如下二疊紀(Unter Perm)所謂德國的羅武里根期(Rotliegend)世界各處此期地層中,俱發見無數植物化石.因此這個時期的地層及其化石,遂引起了一般古植物學家的興趣.此期世界各處的植物羣,似乎並不相同.所以我們可以把這個時期的地層所發見的世界各處的植物化石,分成幾個區域來研究.

在我們進一步研究之先,有幾點必須明白:就是我們所已知此期世界各處的植物羣,當時是經過怎樣一種情形保存於地層中的呢?換一句話說,就是當時是怎樣的一種環境?我們知道,植物化石,有許多保存於頁岩中的,有許多保存於砂岩中的,而大部份的植物化石却與煤層有關.煤層的成因,我們已經知道是從前的沼澤中的植物(Mocrflanzen)經過了菌解,炭化而成的.所以煤層中的植物化石,各處都是一樣,當時雖然各處沼澤的氣候,略有不同,然而大部是經過了潮濕氣候.在已得植物化石中,有許多化石的性質仍可以證明其當時曾經受過這樣的潮濕氣候.從前乾燥區域中所保存的植物羣,爲數亦極微,對於植物地理學比較上,亦無關宏旨,而且我們可以明白,就是我們所已得在植物地理學上可以互相比較的世界各處的植物羣,其當時各植物羣的環境及其生存條件亦可以互相比較.

我們并可以推知,在煤層中所保存的植物化石,除了極少數的例外以外,當時是生長於平原上,而是一種平原植物.(Flachlandsvegetation) 換句話說,卽生長於當時平原上的沼澤中及其附近一帶.(Vermoorter gebiete)

更進一步須討論古生物學及地層學上的所謂同時候或同時代.(Gleichzeitigkeit oder Synchronismus) 怎樣證明此處生物化石與彼處生物化石是生長於同一時候,此處地層與彼處地層是屬於同一時代的呢?最先我們必須明白,這一地層中所保存的化石是動物,還是植物.大約世界各處的煤層中,總是植物化石,有時煤層中亦隔着當時淺水區域中成功的地層.此種地層中自然是淺水動物的化石.有時煤層上下亦有海洋中成功的地層.(Marinen Zwischenschichten) 這大約是當時近海或濱海的地方,受了海水的泛進(Transgressionen) 而成功的地層,這些地層中,自然是海洋動物化石.古生代末葉,煤層中隔着海洋區域中成功的地層,在德國雖不常見,而在世界各處却是常見的事實.因爲這個緣故,古植物學家根據植物化石;古動物學家根據動物化石而檢定這一帶的地層,觀察有所不同,意見往往相左.譬如現在阿爾太山 (Altai) 附近庫次納次克盆地 (Kuznezk-Becken) 層的年代,到現在古植物學家與古動物學家還互相爭論,沒有結果.但是植物方面的證據,比較淸楚.在我們已經知道的地球上的各處地層切面,其植物羣先後繼

續的層次,各處都是表示這一幅同樣的圖畫.所以知道了此處植物羣層次的時代,再比較彼處植物羣的層次,自然也可以定出彼處植物羣層次的年代了.假使我們定較古地層彼此的同時,我們首先必須明白,每一古地層是經過了極久的時間沉積成功的.因此此處古地層與彼處古地層的"同時"的意義,就不得過於絕對的,好像人類形態學家的所謂同時了.由此我們知道地質學家的所謂同時,是相對的,而非絕對的.我們常說,定各處地層的年代,是檢據各該處地層的化石的.我們應該曉得植物的遷移(Pflanzenwanderungen) —— 譬如由歐洲遷移到亞洲 —— 是必需極久的時間的.因此古植物學上的所謂"同時",更完全不是絕對的了.到此忽有一困難點發生,就是古生代末葉 —— 由上石炭紀至二疊紀末 —— 地球各處的植物羣,並不到處相同.有幾區的植物,却表示顯著的特異.怎樣可以比較此區植物與彼區植物是屬於同一時代的呢?雖然如此,我們亦已得了可以滿意的時代比較.(Altersvergleichung) 因爲有時地球各處的植物,往往互相遷移,(Wanderung) 互相混生,(Mischung) 在這兩區植物混生的地方,我們就可以推斷此兩區的植物是相對的屬於同一時代的.由兩個相距甚遠地方的兩種不同的植物,混生於一處,我們可以曉得,至少這兩種植物中的一種,是已經過極久時間的遷移了;但在植物地理學的比較上,此兩種植物,仍可以說是相對的

同時.(Relativen Synchronismus)

明白了這一點以後,我們可以進一步,討論古生代末葉植物的分佈區域了.我們將地球的全部,在這一個時期——古生代末葉——分成三個不同的植物區域,(Florengebiet)有幾處此三區的界限十分清楚,有幾處却不十分清楚.大約此三區中的二區,處於完全對立的地位.換句話說,就是此區植物與彼區植物完全不相同.而其餘的一區,却與前二區中的一區相接近,而或者其獨立的可能性,不能與前二區相比.

第一個區名爲極圈區 (Arcto—Carbonisches Element), 此名係哥登 (Gothan. W.) 氏 1915 年所定.(見 Englers Botanische Jahrbücher 52 a. a. o) 此區植物,特別發展於歐洲及北美,故亦可名爲歐美區. (Europäisch—amerikanisches Element) 此區植物,最顯著者,如鱗木 (Lepidodendron) 古木賊 (Calamarien) 楔葉 (Sphenophyllum) 各種羊齒如楔狀羊齒 (Sphenopteris) 櫛狀羊齒 (Pecopteris) 各種精子羊齒類植物 (Pteridospermen)——日人譯爲羊齒類似植物卽羊齒植物之含有精子Samen者——及柯達木 (Cordaiten) 等,後二者屬於棵子植物. (gymnosperm) 此種植物分佈於北美,南延而至於南美,一面分佈於中歐南延而至於北非,東延而至于小亞細亞.最近的發見,此區最南部的界線好像是在南美之哥倫比亞,或竟達巴西之北部.亞洲東部與西比利亞,屬石炭紀而含植物化石之地層,(及

煤層)似不若歐洲之發達.二層石炭紀(Permo-Carbon)地層及煤層,與歐洲完全相同的化石,亦甚豐富,所以我們比較此處地層的年代,亦較容易.西比利亞卽所謂古生代末葉之盎格蘭古大陸(Angaraland)與歐洲相同的種屬如羊齒類植物(Farne),如羊齒類似植物(Pteridosperm)尤其是一種不易誤認的歐洲種羊齒如美麗羊齒,(Callipteris)按希臘文 Calli 美麗之意)極爲豐富.但是亞洲東部(自高麗中國直至南洋羣島之蘇門答臘)情形略有不同,歐洲種屬或與歐洲種之近族植物,亦時有發見.惟最醒人目者,則在此一帶地方,發見許多特異植物,與歐洲種植物相混生,最顯著者卽所謂大羽羊齒(Gigantopteris),此外如丁氏屬植物(Tingia 此係一新屬,瑞典赫勒 Halle 氏所定新名,贈榮譽於丁文江氏,日人 E. Kon'no 氏在高麗發見此屬植物的花胞定名爲 Tingiostachya 參觀 Kon'no 氏所著 On Genera Tingia and Tingiostachya from Karea——Japenese Jurnal of Geology and Geography Vol VI nos. 3—4.)尙有一種特異的鱗木名 Lepidodendron oculus felis 及一屬與輪木相接近的植物名 Annulariopsis ……等,這個植物分佈區域,就是我們現在所定的第二個區域,名爲大羽羊齒區.(Gebiet der Gigantop terisflora)大羽羊齒除分佈於亞洲東部以外,僅發見于北美之南部 Texas 及 Oklahoma 等處.同時此二處,亦發見大羽羊齒與亞洲種相混生如美麗羊齒(Callipteris)此一種屬於古毬果植物(Conifer)之 Walchien 屬等.而此二種植

物在亞洲東部之大羽羊齒區中却甚希少.

第三個區域,名爲南極圈區(Antarcto-Carbonische Flora-Gebiet)或名爲恭華那古大陸區.(Gondwanagebiet)或名爲大舌羊齒區.(Glossopteris flora Gebiet)這個植物分佈區域,與北極圈區,(卽歐美區)完全對立.凡北極圈區植物,在此區中,從未發見.此區之特異植物如大舌羊齒(Glossopteris)及其一屬近種羊齒如Gangamopteris,亦未曾發見於北極圈區中.此外此區中植物,除上述兩種羊齒外,尙有許多特異植物如屬於木賊類(Equisetalis)文葉胞屬(Phyllotheca)及裂脈屬(Schizoneura)屬於柯達木類(Cordaitales)之Noeggerathiopsis屬,以及其他植物.此區植物分佈於現今之南極圈區中而北延至於亞洲中部,直達俄國內部.

我們先將這三個古生代末葉植物分佈區域,記得淸淸楚楚,然後再進一步將全球各洲分開來說.

歐洲　歐洲古生代末葉地層自下石炭紀(Culm)經威思化爾期(Westfälische Stufe)——卽中部上石炭紀——而直抵二疊紀.其先後繼續的層次及每層所含的植物羣,各處都是同一樣子.唯偶有幾處地方局部亦隔着幾層缺少植物化石的地層,在幾處大的煤田(Steinkohlenbecken),此種地層的切面,及其所含的植物羣,都可以看得淸楚.由歐洲全體觀之,差不多到處都表示這一幅同樣的圖畫.在二疊石炭紀(Permo-Carbon)及二疊紀(Perm)時代,此洲植物,最

重要者,如各種櫛狀羊齒(Pecopteriden)齒狀羊齒(Odontopteriden)及美麗羊齒(Callipteriden)地質上較新的古木賊(Calamiten)輪木(Annularien)楔葉(Sphenophyllen)鱗木葉(Lepidophyten)尤其是亞封印木(Subsigillarien)及柯達木(Cordaiten)在二疊紀時則已有最初之球果植物(Conifer)如Walchia屬,Voltzia屬,Ulmannia屬等,及中生代植物之先驅者如羽葉屬Pterophyllen——蘇鐵類(Cycadales)及公孫樹屬(Gingkophyten-Baiera)在極北緯度,北極附近,此種植物之踵跡,亦時有發見,如格林蘭北部(Nordgrönland)及司辟次彼格島(Spitzbergen)等處,但大部份屬於下石炭紀.(Untercarbon)

北美　北美古生代末葉地層,大致與歐洲相似.威思化爾期(Westfal)似不若歐洲之發達,而司推分尼期,(Stephan——即上部上石炭紀)則較爲發達.所以北美由司推分尼期直至二疊紀之地層極爲完備.二疊紀地層含有美麗羊齒,(Callipteriden)有幾處亦含有Walchia木,已詳于Fontaine及Whites二氏所著之二疊紀植物誌(Permian Flora 1880)中.此外北美石炭紀之古植物文選,却甚缺乏.最近Noe. A. C.氏對于伊里納省(Illinois)之研究報告則該處地層,當屬威思化爾期之最上部.其地層約等于歐洲之Westfal C.以White氏及Lesquereux'氏之研究著作觀之,則此處地層,實有重大意義.最近mathien, Délépine, Pruvost諸氏,亦謂中國開平亦有威思化爾期地層,(據李仲揆先生之海洋生物研究,此期

地層在中國分佈頗廣,不限于開平.)亦爲 Westfal C 則威恩化爾地層,除恭華那區域以外,分佈極廣,此地層自北美直至南美,其餘同緯度之處亦然.

南美 秘魯Paracas地方發見之北極圈區植物.哥登氏(W. Gothan)謂其屬于下石炭紀.(untercarbon)但在哥崙比亞亦發見最古之上石炭紀地層. Bahia 地方亦發見與北極圈區植物接近的一種羊齒,名Alethopteris branneri.(見 American Journ.Sci)南美之南部如 Parana, Santa catharina, Orgentinen 等處地層及植物化石,則全屬恭華那區卽南極圈區.最有興趣的事實則此地實爲南北二極圈區植物互相混生之處. White氏早已將此事實公佈于世界.雖然此地發見的一種封印木 Sigillaria brardi 尙有疑問.但其他尙發見北極圈區植物如鱗木 (Lepidodendron) 亞鱗木 (Lepidophloios) 楔葉 (Sphenophyllum Oblongifolium) 及櫛狀羊齒 (Pecopteris) ………… 等.或者此地尙有許多北極圈區植物埋于地層中,尙未發見.此處確爲南北二區植物互相擠生 (Zusammenstossen Und durchdringen) 之地.根據這點事實,我們可以相信,當時此二區植物的環境 (Lebensbedingungen) 是相似的.而且我們可以將大舌羊齒地層(Glossopteris-Schichten)的年代與歐美區(卽北極圈區)相當年代之地層互相比較.不但此地如此,就是別處也如此,我們總覺得大舌羊齒地層與歐洲之下二疊紀及上石炭紀之最上部地層相當.因南北二區植物,在此地互相擠

生的事實,我們可以曉得大舌羊齒,決不是一種冰帶植物.(Glazialflora)而且大舌羊齒既在此地與歐洲種植物互相混生,則當時此地氣候,確與歐洲相差不遠.更可證明大舌羊齒決非一種極寒地帶的植物.且從大舌羊齒之厚而無年輪的莖部視之,更可證明當時南北二區植物之環境,與其生存條件無顯著之特異.(即證明今日之南北二極,在古生代末葉時,並非極寒.)南美之最南部北極圈區植物似未曾擠進,Falklands 島則純係恭華那區植物.(即南極圈區)本世紀初,Scottsche Terra Nova Expedition 之探險隊,在南緯 85° 度等處,發見恭華那區植物,已經 Steward 氏研究.嗣後 Edwards 研究 Ferrar 氏于 1901—1904 年在南維多利亞(Südviktoria Land)所採集之恭華那區植物聞名于世.因此吾人對于南極植物之智識,已較前進步.將來探險者日多,南極化石,必疊有發見,則此問題之研究,當必更有興趣.

非洲　哥登(Gothan.W.)氏于 1915 年發表之論文(見第一頁)已證明非洲 Oran 之南部係純北極圈區植物.(Sinaigebiet 則僅以下石炭紀聞名)非洲南部及東部一帶之植物,又純屬恭華那區.南非洲之各處由中非及東非北延而至于 Rhodesia-Katanga,Belgisch-Kongo 以至 Tangarjika-gebiet 及前 Deutschostofrika,皆久以恭華那區植物聞名.從前對于 Sambesi 之 Tete 盆地,爲純北極圈區植物的意見,諸多懷疑.近則完全證實.因爲最近在 Süd-Rhodesiens 之 Wankie 地層發見無數北

極圈區植物如楔葉(Sphenophyllum Oblongifolium)櫛狀羊齒Pecopteris unita)及櫛狀羊齒之星狀胞(Asterotheca)………等與大舌羊齒(Glossopteris)互相混生則南非與南美,情形完全相同,亦爲南北二區植物互相混生之地,同時此地亦爲證明大舌羊齒的年代之最好地方.而大舌羊齒之確非寒帶植物,更得一重證明.Walton氏及其他古植物學家俱謂此地地層,尚未能謂其屬于中部或上部二疊紀而屬于下部二疊紀.

亞洲　(一)小亞細亞　亞洲情形較爲複雜,則對此問題之研究,亦更饒興趣.我們先從小亞細亞說起.蔡義南Zeiller氏于1899年公佈小亞細亞之Heraclee'-Eregli之煤層盆地(Kohlenbecken)植物化石之研究.此地植物,係純北極圈區種屬.其石炭紀地層切面,自上石炭紀之最下部,甚至自下石炭紀(Culm)起直抵司推分尼期(Stephan)地層無不齊備,且極富植物化石.其他層的層次及植物化石與歐洲大致相似.最近有人以爲Heraclee-Eregli煤層盆地與俄國南部之多納次盆地(Donezbecken)相連.哥登(gothan)意則不以爲然.多納次盆地係一濱海盆地(Paralisches Becken)有海洋地層.(Marinen Schichten)而小亞細亞之Heracleer盆地,以我們目前所得智識視之,則知其尙無海洋地層隔于其中.Lebedeff-Dneprapetrowsk教授謂其係一大陸上之淺水區域盆地.(Limnisches Becken)Heracleer盆地之地層切面大致可與德國Niederschlesien地層切面相比較,而尤以司推分尼(Stephan)地層,尤與德國接近. merzifoun 氏謂該處有二疊紀地層,并含歐洲種之帶狀羊齒 (Taeniopteris multinervis) 其實完全差誤.此"帶狀羊齒"的葉子與大舌羊齒的葉子極爲相似而實係始新期 (Eozän) 之一種植物名 (Chryso-duim-Acrostichum, 其他如英格蘭南部及南美智利等處始新期地層中亦曾發見.即大舌羊齒亦有人謂發見于小亞細亞,其實並非大舌羊齒,乃係一鱗木的闊葉子 (Lepidophyllen) 其周圍與大舌羊齒相似,而與大舌羊齒却毫不相關.我們可以肯定的說,小亞細亞乃係屬純北極圈區.附近俄國之多納次盆地亦然.保加利亞 (Bulgarien) 之 Isker 地方之石炭紀植物 Knestev 氏已證明其屬于中石炭紀.

(二)北亞之中部及俄國之一部　北亞中部即所謂古生代末葉之盎格蘭大陸 (Angaraland) 此地植物化石經 Zalessky 氏研究,已爲衆所共知.此地有無數二疊石炭紀 (Permo-carbon) 之盆地.有幾處二疊紀盆地含煤層及植物化石極富.尤其是阿爾太山 (Altai) 附近之庫次納次克(Kuzezk-Becken) 盆地及 unter Tunguska 河附近之 unter Tungnska 盆地,西比利西部之 Sudzenka 盆地. Zalessky 氏在他的第二部巨著 Flores permieunes des limites ouralieunes de l'Angaride 1927. 中,曾鄭重地說:盎格蘭區植物直達現在歐洲俄國之內部.當時此區植物曾渡過現今之烏拉山區域 (Ural-gebiet) 而至俄

國.現在俄國之 Dwuia 與 Petschora 一帶,猶見"盎格蘭區"植物的踪跡.然則"盎格蘭區"植物,有何種特異呢?第一,此區毫無疑問地發見了許多純北極圈植物,尤其是足以代表德國的羅武里根期(Rotliegend)的美麗羊齒(Callipteris)及各種櫛狀羊齒(Pecopteris-arten)如與 Pecopteris Pluckeneti 極相似之 Pecopteris anthriscifolia 此外令人注意者,如齒狀羊齒(Odonthopteris) 及扇葉類,(Psygmophyllen)尤其聞名的,如保存極為完全的兩種羊齒 Zygopterideen 與薇科(Osmundaceen)的矽化莖(Verkieselten Farnstämme)曾經 Kidston 與 Gwynne Vanghan 二氏研究.第二,此區植物與恭華那區植物互相混生.而大舌羊齒本身,却不甚多,僅在俄國北部之 Dwina 地方較為顯著.其他恭華那區植物如裂脈類(Schizoneura)葉胞類(Phyllotheca),扇柄葉類(Rhipidopsis),Noeggerathiopsis 類及恭華那木類(Gondwanidium Validum)……等.此地恭華那區植物,大約係由印度成放射狀向北遷移,而散佈于盎格蘭古大陸全部.(即現今西比利亞等處)此種事實,五十年前經Schmalh-ausen 氏研究而後,已為衆所共知.後來漸漸證實.惟最令人注意者,則大舌羊齒與 Gangamopteris 羊齒在其他盎格蘭區中未曾發見的僅發見于俄國北部之 Dwina 地方而與純北極圈區植物,互相混生,尤其是與種美麗羊齒(Callipteris)及櫛狀羊齒(Pecopteris)雜生于一處.此種事實,曾經 Amalitzky 與 Karpinski 二氏研究.最可惜者,此種重要之發

見地,尙無人加以詳細研究,雖然最先的報告,至今已有三十年了.此發見地亦爲檢定恭華那區植物年代的重要地方,其關係與南美及南非相同.

(三)南部亞細亞　此區植物與盎格蘭古大陸植物之關係,上面已經述及(卽盎格蘭大陸之恭華那區植物係由此地北遷)波斯,阿富汗,印度等處,係屬純恭華那區植物.自經 O. Feistmantel 氏研究而後,而前印度一處 (Varderindien),已成爲恭華那區之代表.卽恭華那 (Gondwana) 一字,亦本係此地地名,今則已成爲地質史上不朽之名詞.我們在此地不但發見下二疊紀之恭華那區植物如大舌羊齒 (Glossopteris) 及 Gongamopteris 羊齒及其他植物卽三疊紀之最上部 (Rhät) 及珠羅紀之最下部 (Lias) 地層,亦有此種植物化石發見.自此以後,遂漸漸絕滅.南非之 Beaufort 及 Sturmbery 地層,亦爲同樣情形.亞洲之純恭華那區植物除最顯著之大舌羊齒外尙有葉胞類 (Phyllotheca) 恭華那木 (Gondwanidium "neuropteridium" Validum)楔葉類 (Sphenophyllum speicosum) 扇柄狀木 (Rhipidopsis) 裂脈類 (Schizoneura) 以及 Naeggerathiopsis 類及其他植物,上面已經提及了.

但是亞洲東部——自高麗,中國(開平,山西,雲南)直達南洋羣島之蘇門答臘及麻六甲等處,乃屬大羽羊齒區域(Gigontopteris-flora) 上面亦已提及.按照許多古植物學家尤其是瑞典赫勒氏 (T. G. Halle) 的研究,則大羽羊齒區植物多少

與歐美區(卽北極圈區)植物互相混生如帶狀羊齒 (Taeniopteris multinervis) 楔葉 (Sphenophyllum Thoni) 及少數之美麗羊齒種 Callipterisarten)……等.尤其十分重要者.則赫勒氏曾鄭重地說過,此大羽羊齒區中植物與歐美區植物 europaisch-nordamerikanischen Typus) 接近之程度,較勝于盎格蘭區.(Angara-Flora)因爲大羽羊齒之無網狀脈者如 Gigantopteris america 及 Gigantopteris Whitei 二種,亦曾在北美南部發見,亦曾與純北極圈區二疊紀植物,尤其是美麗羊齒 (Callipteriden) 相混生.

此大羽羊齒區植物亦與大舌羊齒區植物(卽恭華那區亦卽南極圈區)完全對立.凡恭華那區植物,在此區中却未曾發見.但亞洲南部如安南東京(Tonking)三疊紀及珠羅紀之交地層 (Rhät-Lias Schichten) 亦曾發見大舌羊齒 (Glossopteris) 及其他植物如 noeggerathiopsis 類.但此地發生此等較新地層時,二疊紀時之大羽羊齒 (Giganteris) 絕滅已久.則此地之大舌羊齒 (Glossopteris) 及 noeggerathiopsis 類植物當係二疊紀時恭華那區中之最後孑遺者,(die letzten Uberbleibsel) 在三疊紀末珠羅紀初逐漸移生至于此地.德國下三疊紀 (Buntsandstein) 地層之裂脈類.(Schizoneura) 北意大利珠羅紀地層之葉胞類 (Phyllotheca) 亦可爲同樣解釋,卽古生代末葉恭華那區植物之孑遺者,後來移生于此.

Tabler氏在蘇門答臘之 Djambi 地方,發見許多歐洲種植物,

已經哥登 (Gothan) 及雲門 (Tongman) 二氏研究,謂其屬于純北極圈區,而與中國植物有連帶關係.後 Posthamus 氏亦在其地發見歐洲種植物與大羽羊齒 (Gigantopteris america, 及 Gigantopteris Whitei 相混生.則其與中國之關係更已證實.雲門氏謂其地層屬于上石炭紀.赫勒氏則謂其屬下二疊紀.惟令人注意者,則北極圈區植物南延而至于此地,同時恭華那區植物北延而至于益格蘭大陸.赫勒氏謂北極圈區植物係直延中國南部山脈之走向,自雲南而蘇門答臘.

附近屬于恭華那區之婆羅洲 (Borneo) 據 Tennison Woods 氏之簡單報告,謂亦有大羽羊齒之發見.但其化石,亦從無人見過,究竟大羽羊齒是否真發見于此地,及其南延至于何處爲止,仍爲一未解決之問題.

我們在此機會,亦將中國開平盆地地層附帶的說一說.開平二疊石炭紀 (Permo-karbon), 地層從前歸于司推分尼期, (Stephan) 最近法國 Mathieu, Delépine, Pruvost 三氏之著作 (Ann. Soc, Geol. nord. 52, 1928 S. 159—173) 則已證明開平二疊石炭紀地層當自威思化爾期 (Westfal) 經司推分尼斯 (Stephan)而至二疊紀. (Perm) 威思化爾期之最上部,其淺水動物化石以及植物化石之性質,完全係歐洲種,司推分尼期亦然.卽二疊紀地層亦含有純歐洲種植物如美麗羊齒 (Callipteris Conferta) 帶狀羊齒 (Taeniopteris multinervis) 及楔葉 (Sphenophyllum Thoni) 等與大羽羊齒相混生.故此地當爲檢

定大羽羊齒時代之重要地方.

註……德國李希礶芬 (Von Richthofen) 氏在東亞採集之植物化石,經 Schenk 氏檢定,其論文附于李氏所著 China 第四本末,其中種屬,大都誤定.原有標本現存于柏林大學.哥登 (Gothan) 氏,命余重行研究,先從開平着手,論題爲 Zu Schenks Publikationen über die Östosiatische Permokarbonflora I. Flora Von Kaiping. 余研究之結果,已發見 Schenk 許多差誤,如 Schenk 所定之 Neuropteris flexuosa Brongniart 葉脈細而密緻者,實爲 Neuropteris gigantea Sternberg 葉脈之粗而疏者,初疑爲 Neuropteris Schutzei Potanié 後乃知 Neuropteris Schutzei 亦無如此粗脈,擬更定一新種名以易之,現已定名爲 Neuropteris Kaipingana Sze. 其他 Schenk 所定之 Palaeopteris lanceolata 實係 Sphenophyllum Thoni, Dicranophyllum latum 乃係 Stigmaria 之附屬根, Ginkgophyllum Sp. 乃係 Lepidophyllum Sp., Psygmophyllum angustilobum 或係 Tingia Sp., Lepidodendron Sternbergi 乃係 Lepidodendron Sp. 其他如 Conchophyllum Richthofeni 及 Cyclopteris trichomanoides 俱有懷疑地方,據余意見,開平二疊石炭紀地層,亦當自威思化爾期起.關于開平化石,余已脫

稿,現在繼續研究李氏採集之本溪湖及賽馬集植物化石.

行健附識.

澳洲　澳洲西部,東部,南部,北部以及 Tasmien 島俱發見純恭華那區植物.據許多調查者報告,謂此地植物化石多發見于各種冰磧岩 (Tilliten oder "grundmoränen") 中間之地層.則此種化石乃係生長于間冰期時代之植物. (Interglazial-Flora) 最顯著者如大舌羊齒 (glossopteris) 及葉胞類 (Phyllotheca) 裂脈類 (Schizoneura) 及 noeggerathiopsis 類……等極繁殖于此地.最近 Walkom 氏研究此地植物最勤,先于 Walkom 氏而研究此地植物化石者,則先有 Mc. Coy, 與 O.Feistmantel 二氏,後有 Etheridge 與 Chapman 二氏.此地是否亦與北極圈區植物相混生,則尚未證實.不過此地亦發見與歐洲種相近似之一種楔葉名 Sphenophyllum speciosum, 此種楔葉,先僅發見于印度東部,後亦發見于此地.惟爲數極徵. (見 queenland, geol. Surv. Publ. 270,1922.) 此地情形與印度東部完全相同,有許多著者謂曾有北極圈區植物之移生.惟對此問題,總須十分小心,因此種楔葉 (Sphenophyllum Speciosum) 與歐洲發見之各種楔葉形狀差異過巨.即與其最相近的一種歐洲種楔葉如 (Sphenophyllum Oflongifolium) 亦表示極顯著的不同.且此種楔葉之果實 (Fruktifikation) 亦從未發見.故我們應認爲此種楔葉,乃係屬于純恭華那區中之植物.

註……日人 Kawasaki 氏在高麗平安南道江東郡晚

達面新壯里及江原道三涉郡上長面黔川里等處,亦發見 Sphenophyllum Speciosum (參觀 Kawasaki: The Flora of the Heian System Pt.I. Equisetales and Sphenophyllales—Bulletin of the geological Survey of Chosen (Korea) Vol VI) 觀其圖影(原著 Pl XIII. Fig.68.—69.) 則確係恭華那區(印度東部及澳洲)之 Sphenophyllum speciosum. 余據以示哥登(Gothan)氏,渠亦云然,然則 Sphenophyllum speciosum 確係北極圈區植物乎;抑確係恭華那區植物,而北延至于高麗乎,此誠地質學上一種有興趣之問題也,原著者 Kawasaki 氏,對此極有意義之問題,乃不提一字,不知何故.又山西亦發見一種與 Sphenophyllum speciosum 相近似之楔葉,經日人 Yabe 氏定名爲 Sphenophyllum Coreanum. 赫勒氏在其巨著山西古生代植物誌中,亦謂 Sp. Coreanum 與 Sp.speciosum 殊無顯著之差異. (參觀赫勒原著 Page 47—49, 及 Pt. 9.Fig 12—Fig20) 則 Sp. speciosum 究係恭華那區植物與否,尚屬一未解決之問題也.又 Kawasaki 氏在高麗發見之 Sphenophyllum emarginatum (見原著 Pt. XI Fig 46—53) 則確非 Sp. emarginatum 是否新種,抑係 Sphenophyllum 之另一種,尚未決定,

將于余所著之 Zu Schenks Publikationen Über die Östasiatische Permokarbonflora 論文之末,略一提及改正之.　　　行健附識.

以上所述,係古生代末葉植物分佈之概要,詳細研究,仍非熟讀各種文選,并實習化石標本不爲功.將來調查區域愈廣,則發見新事實新材料亦愈多.南北兩極——尤其是南極大陸——探險者日多,更不知有若干新事實新材料,給吾儕以研究之機會,則此篇又須擴展更易,惟此三大區域之分配,恐終成不易之定論也.

附……此篇除參考各種文選以外,大部份係由哥瑩教授 (W. gothan) 平日講演及其所著各書,及其最近在柏林植物學會之講演 Die Pflanzengeographischen Verhältnisse am Ende des Paläozoikums 一題,編譯而成,其功仍歸哥氏,余則僅負譯述之責而已.惟此間無華文植物辭典,植物譯名全由原文語根直譯,不能與國內已譯名詞合一之嫌,或所難免,望閱者有以諒之.

民國十九年二月作于普魯士地質調查所古植物學研究室.

西藏鳥類兩新種

Dr. Julius Von Madarasz 原著

Proc. Zool. Soc. 1886, No. XIV, P.P. 145—147.

任國榮譯

1. Myiophoneus tibetanus, N. SP. 西藏嘯鶇

此新品種與M. temmincki 相似,但體較小而顏色亦有區別如下:—胸部腹部羽毛其末端有光輝之部較小,背部羽毛則完全無之;次列覆兩末端之淡色斑點亦付闕如.在M. temmincki 腹部胷部羽毛之基脚白色,而在新種則適相反,一律爲黑色.

2. Pucrasia megeri N. SP. 西藏散尾雉

雄鳥　前頭,頰,喉及冠羽之延長部概黑,有青藍色及深紫色之光輝.頭之項及冠羽之較短部爲塵鵝黃色;頸側之大斑純白;白色大斑及上頸之後有赭黃色帶紋,其中有若干羽毛邊緣有黑色綫紋.背黑,每羽沿其羽幹之處有寬約3 m. m. 之綫紋,愈近末端綫紋愈小,顏色或黃或灰而混褐色,然其外緣皆灰色.下背,腰,胸側及腹部木灰色,其羽毛概有黑色及灰色之緣,許多腰部羽毛則混以黑鹿毛色.前頸,胸中部及腹部濃栗.第一第二列撥雲暗褐.外緣爲淺鹿毛色次列覆兩黑,基部鹿毛色,有黑色斑點,沿羽幹之邊緣有淡褐灰色之狹淺紋凡此羽毛,其邊緣概飾以灰色.上尾篋

鹿毛色,有墨色之斑點及條紋.中央羽毛棕色,末端顏色較淡,每側有二條不規則之黑綫,邊緣則為鹿毛色;外側尾羽之外瓣濃棕色,內緣帶褐色,有黑帶紋,每羽之末端純白.尾下面褐黑,末端白而甚寬闊.下尾筒深栗,有不規則之黑斑,末端白.腹下部一律淡栗.

雌鳥 頭部,遇眼綫及圍繞喉下部之帶紋黑色而有綠光,頭部羽毛之邊緣淡棕;耳羽及上頸兩側之條紋淡棕而有綠光,羽緣黑.眉斑,腮,喉及頸側棕黃,頸下部,胸部,腹部及後腹皆淺棕(下頸及上胸較鮮亮),有黑色之斑點及深黑色之外緣,羽幹淺色.背部,腰部及上尾筒蒼褐,有白色,鹿毛色及黑色之條紋與黑色之斑點.肩間部更深着黑色之大斑點初列撥風塵褐,外緣鹿毛色;次列撥風塵褐,外緣淡棕而點斑則為褐色.覆雨與雄鳥相同.中央尾羽棕而有黑色之大斑;外側尾羽一律濃棕色,內緣塵褐,有黑帶紋,末端白下尾筒濃棕,末端白.

此品種之模式標本,現存 Hungarian 國家博物館中.

Julius Von madarasz 曰:吾將此新種之鳥以 Dresden 博物館導師著名鳥類學家 A. B. meyer 博士之名名之.

附註:— J. v. madarasz 曰:1885 年吾曾於 "Zeitschrift für die gesammte Ornithosogie" P.50 發表一文.論及西藏東部四川一種新品種名曰 Tetraphasis SZ'echenyü 前時得人之報告,知所有該鳥皆購自某氏,而彼則自西藏中部攜返者云.

中國東南部兩鳥類新種之記載

Henry. H. Slater 原著

Ibis 1891. No. IX, PP. 41—45.

任國榮譯

J. D. de La Touche 君曾以汕頭福州附近射得鳥類標本若干賜余,俾資考驗,此等標本皆極有趣味,其中且有二新種,今特述之:

1. Æthopyga Satouchii, Sp. N. 賴圖史太陽鳥

於汕頭西部小山中得五標本,兩雄三雌,與海南島產之Æ. Christinae, 極近似,惟顏色鮮明而嘴峯較短,一望即可別之.至專就嘴峯一項而言似與明德諾 (Mindanao) 北部所產之 Æ. bella, Tweeded. 較爲相似.

Æ. Christinae.	♂	嘴峯 0.7 英寸
Æ. latouchii.	♂	嘴峯 0.53 英寸
Æ. bella.	♂	嘴峯 0.55 英寸

雄,其一雙之中央尾羽末端幷不如 Æ. Christinae 之狹峭,且尖端亦不細緻,而與 Æ. bella 相近似其實則此三種與 Æ. Shlleyi 本同棣于 Æ. thopya 一屬中,而此種則爲中間之品種,與其他各種之差別大概相若.與海南種之區別,其背部爲橄欖色而不爲天鵝絨黑色,(且參有微弱之綠色); 上頸金綠而腰部鮮黃.海南種之喉部深紅褐色而此則深紅,

且下體綠黃色而較鮮亮.量度:—嘴峯 0.53 英寸;翼 2.05 英寸;尾 1.85 英寸(中央二枚狹處成煤黑色而不作鋼黑色;尖端長0.5英寸,寬 0.03 英寸); 跗蹠0.5英寸.

雌　頭及面灰綠;背,覆雨,腰及二枚之中央尾羽橄欖綠,撥風亦有橄欖綠色之邊緣而稍爲褐色;下體淡青白色,脅部灰色稍深;中央二尾羽無末部尖銳之痕跡,其餘諸尾羽黑而每羽之末則白,如雄者焉.翼長 2 英寸,其餘量度與雄鳥同.

De La Touche 君對於中國鳥類之分布,在採集上在文章上吾人早受其賜不少,茲特以君名名之.

2. Gallinula (Amaurornis) Coccineipes 汕頭秧鷄

此品種若驟觀之與冬羽之水鷄(G. Chlovopus又名鷭)甚相似,惟體已小,且無前頭部之裸肉冠,又無帶白色之下尾筒,更無水雞之脅部白色斑點之特徵.茲略述之:—

頭上,頸背,背,翼,尾,脅及下尾筒在冬季皆濃褐,夏季則較爲橄欖色;尾羽及撥風略爲暗色;喉,眼先,頰,耳羽,前頸,前胸中部及股部灰色,喉部稍白,嘴帶綠色;虹彩金;脛及足洋紅.吾茲之記載,乃依照 1888 年四月於汕頭所得之雄鳥,及 1887 年十二月於汕頭所得之雌鳥也.徐家匯博物館中有一標本,上海博物館亦另有之.嘴峯雄 1.2 英寸,雌 1.03 英寸;翼雄5.2英寸,雌 4.75 英寸;尾,雄雌同爲2.5英寸;跗蹠雄2.1英寸;雌2.0英寸.

此品種每易與 G.olivacea Meyer 相混誤,後者適大,有帶紅色之下尾筒,其喉際終年無白色之痕跡,脛及足綠褐色.

拉薩遠征隊所得鳥類新種三種之紀載

Henry E. Dresser 原著

Proc. Zool. Soc. 1905 January 17. PP.54—55

任 國 榮 譯

Waddle 君乃西藏遠征隊之一員,新近自印度歸來,謂旅行西藏時,曾採其許多之鳥類,大部分可用拙著之"Manual of palaeartic Birds"一書以考證之.其中有未能認識者,則由君保存之并以寄余,請余爲之考證及驗其中有若干新種.其餘標本及行李,當自拉薩歸時,不幸失去.倖存之鳥,吾發見以下諸新種:—

1. Babax Waddelli Sp N. 西藏弟弟

雄成鳥(欖甫流域,西藏,25日,9月,1904年)

體上部爲幽暗之木灰色,每羽有寬闊之中央黑色條紋.腰部條紋較爲稀少;翼黑褐,大多數之羽毛外層有木灰色之邊緣;尾黑褐,爲凸尾.下體與上體相似,但顏色較着白而條紋較狹.嘴及脛部鉛色.虹彩幽橙色.

全長 12.6 英寸; 嘴峯 1.40 英寸; 翼長 5.10 英寸;

尾長 6.50 英寸; 跗蹠 1.70 英寸.

與此品種最近緣者厥爲 Babax lanceolatus 前者體惟較大(翼長 5.10 對 3.75;尾長 6.50 對 5.0)顏色及斑紋亦不同 Waddell 云:西藏人擬其聲因呼之爲 Téh-Téh 常至遠離村落之

白楊及赤楊茂林中,有羣性,常八個或十個成小團體,惟其行動則不及 Garrulax之活動及隱秘也.

2. Gassulax tibetanus. Sp. N. 西藏眉

雄成鳥(牸甫流域,西藏,25 日,9 月,1904 年)

上體暗褐而參以橄欖色,頭上稍深暗;眼先,貫眼綫,與耳羽黑咯咕律色;撥風切羽帶黑色,外緣石板灰;覆雨與背部同色;尾爲凸尾,黑褐色而尖端之白色部甚寬;下體較上體稍爲蒼白;眼下部有寬闊之白色條紋,眼上部有少許之白羽毛亦成條紋狀;下尾筒及下脇部粟紅.嘴及足暗鉛色.虹彩幽紅.

全長 10.5 英寸; 嘴峯 0.90 英寸; 翼長 4.50 英寸;

尾長 6.40 英寸; 跗蹠 1.50 英寸.

此品種與其最近緣之 Garrulax sannio 不同之點,在其體上部較暗而顏色較一致,頭上不作粟褐色,下部較暗而腹部絕無白色或赭色,尾之先端有白帶紋. Waddell 君告余,謂藏人稱之曰 "Jomo" 卽婦人之意也.亦常于白楊赤楊之茂林中見之,猶 Babax 焉.但亦有至極近村落之地者.常成八個或八個以上之小團體以遨遊,鳴聲爲"Whoh-hëe Whoh-hee 似笛嘯而喧鬧,又常穿插枝幹間,性隱秘,不易見.

3. Lanuis lama. sp. n. 西藏伯勞

雄成鳥(牸甫流域,西藏,9 月,1904 年)

頭部上頸及上體暗鉛色,極似 Lanuis algeriensis; 橫過前頭

之狹綫紋,眼光,及貫眼線皆爲深黑色;下腰及上尾筒棕色;翼黑,後列撥風及大覆雨羽緣幽黑;尾一律爲黑褐色,最末端稍爲蒼白;下體白,胸脇及下尾筒渲染棕鹿毛色.

全尾10.10英寸; 嘴峯 0.83 英寸; 翼長 4.20 英寸;

尾長5.0英寸; 跗蹠 1.12 英寸.

此品種與 Lanius schach 最爲近緣,但前頭有黑色綫紋橫過之,上體較暗,背部及肩羽無棕色,只下腰及上尾筒有之,亦無白色之翼斑.

以上所述諸鳥,皆於糌甫流域(Tsaupo Valley)祝三渡頭(Chuksau Terry) 附近得之,高出海面 12,100 英尺.

安徽新種之散尾雉

Reo: F. Courtois. S.g. 原著

Ibis. 1913. No I. PP. 14—16

任 國 榮 譯

Pucrasia joratiana 霍山散尾雉

此品種間於 P. darwini 及 P. Xanthospila 二種之間,但有以下諸異點:—

1.背部,肩部及胸側之羽毛有寬闊之三角形黑色斑紋,直至頂端,其數二而非四.

2.體側及背部,翼部之羽毛,其中央灰白色而非黃或鵝黃色.

3.後頭羽冠成叢狀而短,長不逾二英寸,羽闊而圓,與狹長而尖者有別.

4.下尾筒及中央尾羽無寬闊之粟色條紋,祇有黑色及白色者耳.

5.頸部及前胸之粟色大斑色較濃暗,與 P. Xanthospila 比較則缺去頸部及肩部之金色大斑,羽冠之形狀亦不同.

自然歷史博物館中之模式的雄鳥,其量度如下:—

全長 22.8 英寸; 翼 8.9 英寸; 尾 7.9 英寸;

跗蹠 2.75 英寸; 中趾及爪 2.70 英寸.

此鳥之特徵始由 Heude 發見,并以 Joret 之名爲學名,蓋

第一個標本由彼獲得也.

此品種于安徽西部之霍山 (Hwo shan) 海拔二千至五千英尺之處發見之.其分佈情況,乃在 P. Xanthospila 之于北直隸及 P. darwini 之于南方各省之中間者也.吾茲更一述中國各種散尾雉:—

1. Pucrasia xanthospila G. R. P Z. S. 1804. P. 259. Pl. XX 模式標本乃 F. W. A. Bruce 于北平西北之山中得之,現存自然歷史博物館中.

分佈: 中國西北部之北直隸.

2. Pucrasia xanthospila ruficollis David & Oustalet, Ois. chine. P. 408 (1877) 模式標本于陝西得之,現存巴黎博物館中.

分佈: 中國東北部之陝西或江蘇.

3. Pucrasia meyeri madarasz Lbis 1886. P. 145. 模式標本於西藏中部得之,現存 Hungarian 國家博物館中,

分佈: 雲南及西藏.

4. Pucrasia joretiana courtois, Busl. B. O. C. XXXI 1912. P. 1. 模式標本于中國中部安徽之霍山得之,現存英國博物館中.

5. Pucrasia darwini Swinhol, P. Z. S. 1872 P. 552, 模式標本于中國南部之浙江省山中得之,現存英國博物館中.

分佈: 中國南部之浙江福建二省.

6. Pucrasi styani. Ogilvie-grant. Bull. B. O. C. XXXiii P. 32(1906) 模式標本于中國中部湖北之宜昌得之,現存英國博物館

中

此六種之雄鳥可用下列檢索表區別之:

a. 外側尾羽基部棕色而無灰色.................................. P. Meyeri.

b. 外側尾羽基部灰色而無棕色.

a¹ 前胸及胸部有一栗色大斑塊.

a² 有顯明之黃色頸環.

a³ 喉之基部有綠色光澤與腮部同. .... P. Xanthospila.

b³ 喉之基部有紅色光澤,與腮部綠色不同. ....

.... P. X. ruficollis.

b² 無黃色頸環.

c³ 下尾筒無栗色;羽冠短而成叢.................P. joretiana.

d³ 下尾筒有栗色;羽冠長而狹. .... P. darwini.

b¹ 前胸無栗色大斑片. .... P. styani.

書 評

"示性方程之根俱爲實根"的證法

那是無庸聲明的,我們的評論不必是一種有系統的記載;所以現在忽然抓了這樣一道題作評論的材料.教科書 Coordinate Geometry of three Dimensions, Beel 著,似乎是我們中國好幾個大學都採用了,那末讀這書的人自必不少.這書裏頭正用著了示性三次方程.(P.208)原文是:(他畫的圖沒甚用處已經省略了)

All the roots of the dicsriminating cubic are real.

The equation may be written,

$$\varphi(\lambda)\equiv(\lambda-a)\left\{(\lambda-b)\ \lambda-c-f^2\right\}$$

$$-\left\{(\lambda-b)g^2+(\lambda-c)h^2+2fgh\right\}=0.$$

We may assume $a>b>c$ .... (1)

Consider

$$\psi(\lambda)\equiv(\lambda-b)\ (\lambda-c)-f^2.$$

Corresponding values of λ and $\psi(\lambda)$ are

$$\lambda=-\infty,\quad c,\quad b,\quad +\infty,$$

$$\psi(\lambda)=+\infty,\quad -f^2,\quad -f^2,\quad +\infty,$$

Hence (省去 from the graph) it appears that the equation $\psi(\lambda)=0$

has real roots α and β, such that

$$\beta < c < b < \alpha.$$

Consider now (省去 y=) $\varphi(\lambda)$. When $\lambda=\pm\infty$, $\varphi(\lambda)=\pm\infty$; when $\lambda=\alpha$,

$$\varphi(\lambda) = -\left\{(\alpha-b)g^2+(\alpha-c)h^2\pm 2\sqrt{(\alpha-b)(\alpha-c)}gh\right\}$$

$$= -(g\sqrt{\alpha-b} \pm h\sqrt{\alpha-c})^2, \quad \cdots\cdots (2)$$

where $\sqrt{\alpha-b}$, $\sqrt{\alpha-c}$ are real; when $\lambda=\beta$,

$$\varphi(\lambda)=(b-\beta)g^2+(c-\beta)h^2 \mp 2\sqrt{(b-\beta)(c-\beta)}gh$$

$$=(g\sqrt{b-\beta} \mp h\sqrt{c-\beta})^2 \quad \cdots\cdots (3)$$

where $\sqrt{b-\beta}$, $\sqrt{c-\beta}$ are real.

Hence (省去 from the graph 增加下二字及下第三行 and 一字)

if	$\lambda=-\infty$,	β,	α,	$+\infty$,
then	$\varphi(\lambda)= -$,	$+$,	$-$,	$+$;

and we see that the equation $\varphi(\lambda)=0$ has three real roots, λ_1, λ_2, λ_3, such that

$$\lambda_3 < \beta < \lambda_2 < \alpha < \lambda_1 \quad \cdots\cdots (4)$$

The above proof fails if α and β, the roots of $\psi(\kappa)=0$, are equal. In that case, however, we have, $b=c$, and $f=0 \cdots\cdots (5)$; and therefore the cubic becomes

$$(\lambda-b)\left\{(\lambda-a)(\lambda-b)-g^2-h^2\right\}=0,$$

The roots of which are easily seen to be all real.

示性三次方程原來是

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & h & g \\ h & b-\lambda & f \\ g & f & c-\lambda \end{vmatrix}=0$$

其中 a, b, c, f, g, h, 只知道盡是實數但不盡 0. 而上邊的原文只就 $a>b>c$ [見(1)] 和 $b=c$, $f=0$ [見(5)] 二層考之,那末剩下的二層 $a=b=c$, 和 $b=c$, $f\neq 0$ 便無形的遺漏了.遺漏是許多人頂容易犯的毛病,或者是由於太不謹愼的緣故,或者是旁的原故.既遺漏了,這定理便只能在沒遺漏的兩層條件之下暫時成立.然而他這定理何嘗加了這應加的條件呢?如果這樣的證明認爲可以相信定理必定成立,那便無異於瞎子相信雪必定是白的一樣!

再進一步說,就是他還沒有遺漏的兩層當中,也還是有不確實的地方.我們注意(4)的成立是由於 $\varphi(\lambda)$ 的符號有 − + − + 的變化,而中間的 + − 又由於(3)和(2).但是就(2)和(3)觀之, g 和 h 若取適當之實數值很可以使 $\varphi(\lambda)$ 爲 0, 於是 $\varphi(\lambda)$ 符號的變化同時也就減少了,所以必須再加應補充的說明,才能說三根都是實的.

我以爲他這定理的證法既不完全又還複雜,頂好只有取消,再換一個別的證法.由另外考究的結果,我得出了一個極簡單的證法,現在寫下來看看.

我們想,示性三次方程是如何得來的呢?我們去看 Bell

那本書p. 205便知道是由於令

$$\frac{al+bm+gn}{l}=\frac{hl+bm+fn}{m}=\frac{gl+fm+cn}{n}$$

的公共數值爲 x 而來的.依代數之理這些分數更等於

$$\frac{(al+hm+gn)\bar{l}+(hl+bm+fn)\bar{m}+(gl+fm+cn)\bar{n}}{l\bar{l}+m\bar{m}+n\bar{n}}$$

其中 $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ 是任意的數,虛也好實也好.因此得

$$\lambda=\frac{al\bar{l}+bm\bar{m}+cn\bar{n}+f(m\bar{n}+\bar{m}n)+g(n\bar{l}+\bar{n}l)h(l\bar{m}+\bar{l}m)}{l\bar{l}++m\bar{m}+n\bar{n}}$$

現在再設 $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ 以次爲 l, m, n 之共軛複數,則 $l\bar{l}$, $m\bar{m}$, $n\bar{n}$ 以及括弧中 $m\bar{n}+\bar{m}n$ 等三數都是實數.而 a, b, c, f, g, h, 原是實數, $l\bar{l}+m\bar{m}+n\bar{n}$ 依據 l, m, n 不盡爲 0 的性質決不會爲 0, 因此 λ 必然存在而且是實數.

於是一方面消去 l, m, n, 知道 λ 是示性三次方程的任意根,他方面照上邊講 λ 是實數,所以總括起來,示性三次方程的根,俱是實根.

同樣可證適用於高度空間之任意次示性方程俱爲實根.

湯璪真

過一點的共焦面究竟有幾個?

我說:"證明犯了遺漏的毛病定理卽生連帶的影響."如果要定理不受影響,除非是能將遺漏的證明補充起來.或者能換一個旁的無遺漏的證明.否則非將定理加以適當修改不可.我要證實我的話,我再從 Bell 著的 Coordinate

Geometry of three Dimensions 這本書裏頭拿出一道題來研究.這題目叫作過一點的共焦面

因爲便利研究的原故,又不得不抄出 Bell 的原文;原文176頁有:

Three any point there pass three conicoids confocal with a given ellipsoid,——an ellipsoid, a hyperboloid of one sheet, and a hyperboloid of two sheets.

The equation $\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1$ represents any conicoid confocal with the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. If the confocal passes through (α,β,γ),

$$\frac{\alpha^2}{a^2-\lambda}+\frac{\beta^2}{b^2-\lambda}+\frac{\gamma^2}{c^2-\lambda}=1,\qquad(1)$$

or

$$f(\lambda)=(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)-\alpha^2(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)-\beta^2(c^2-\lambda)(a^2-\lambda)$$
$$-\gamma^2(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)=0\qquad(2)$$

This cubic equation in λ gives the parameters of three confocals which pass through (α,γ,β). Suppose that $a>b>c$ when.

$$\lambda=\infty,\quad a^2,\quad b^2,\quad c^2,\quad -\infty,$$
$$f(\lambda)\ \text{is}\ -,\quad -,\quad +,\quad -,\quad +.$$

Hence the equation $f(\lambda)=0$ has three real roots $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, such that

$$a^2>\lambda_1>b^2>\lambda_2>c^2>\lambda_3.$$

Therefore the confocal is a hyperboloid of two sheets, a hyperboloid of one sheet, or an ellipsoid, according as $\lambda=\lambda_1,\ \lambda_2$, or λ_3.

大家想想原來的橢球的範圍甚廣,固然可以設 $a>b>c$,

但是其中兩個相等也還可以呀,更推廣言之,三個相等也還是可以的.如果只就 $a>b>c$ 一層證明,自然是犯了遺漏的毛病.那末可不可以補充呢?這就可以先從 $a \neq b = c$ 說來:

上面的(1)式現在變了,—— 已經變成

$$\frac{\alpha^2}{a^2-\lambda}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{b^2-\lambda}=1 \quad \cdots\cdots\cdots (1')$$

從此得不到上面的(2).但是有許多不明白極限的性質,他以為可以從(2)叫 c 慢慢變到 b, 於是仍舊得了三根.這種用極限的講法是靠不住者,現在就是一個例子.何以呢?倘若從(2)考之, c 慢慢變到 b 之後,結果得出一根是 $\lambda=b^2$.然而這只是(2)的根,决不是(1)［現在就是(1')］的根,因此這個根便不能適用了,換一句話過 (α,β,γ) 沒有和 $\lambda=b^2$ 相應的共焦面了 —— 此地沒有是真的沒有不能作為在無限或是作為虛的講.於是乎那定理受了影響了,我預約的那句話也證實了.

在考這受影響的原故,就是由於從(1)推到(2)在 $a>b>c$ 那一層不犯所謂增根的毛病,所以現在只能說:

由(1')得

$$f(\lambda)\equiv(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)-\alpha^2(b^2-\lambda)-(\beta^2+\gamma^2)(a^2-\lambda)=0 \quad \cdots\cdots\cdots (2')$$

設 $\lambda=+\infty,\quad a^2,\quad b^2,\quad -\infty,$

則 $f(\lambda)=+,\quad \pm,\quad \mp,\quad +;$

—— 其中上下層符號的分別視 $a \gtrless b$ 决定.所以這時候 $f(\lambda)=0$ 只有兩個實根,由這兩個實根便知道在 $a \neq b = c$ 這條

件之下過任意點是只有兩個共焦面了 —— 在長球 $a>b=c$ 一個共焦面是兩支旋轉雙曲面,又一個也是長球,在扁球 $a<b=c$ 一個共焦面是一支旋轉雙曲面,又一個也是扁球.

現在可以考究 a, b, c 三個都相等的這一層了.這時候 $a=b=c$, 所以(1)變成

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{a^2-\lambda}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1'')$$

由(1″)不能得(2)也不能得(2′),所得的乃是

$$f(\lambda)=a^2-\lambda-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2'')$$

從(2″)只將 $f(\lambda)=0$ 的一個根,因此在 $a=b=c$ 這條件之下,過任意點是只有一個共焦面了 —— 這時候共焦面是同心球.

所以證明有了遺漏,定理便受影響;現在呢,這個定理小更動之應爲

Through any point there pass three conicoids confocal with a given ellipsoid, —— an ellipsoid, a hyperboloid of one sheet, and a hyperboloid of two sheets —— unless the given ellipsoid becomes a surface of revolution.

如果要詳細一點,更可添上下面的幾個定理:

Through any point there pass two conicoids confocal with a given prolate spheroid, —— a hyperboloid of two sheets and a prolate spheroid.

Through any point there pass two conicoids confocal with a given oblate spheroid, —— a hyperboloid of one sheet and an oblate spheroid.

Through any point there passes one conicoid confocal with a given sphere,——it is the sphere concentric with the given one and passing through the given point.

湯璪真

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

(一)本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

(二)投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

(三)稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出刊時期地點

(四)稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

(五)本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

(六)來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

(七)稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

(八)稿件內容本刊得酌量增刪但不願意者請預先聲明

(九)來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學 理科季刊第一卷第一期目錄

國立武漢大學 社會科學季刊第一卷第二號要目

國立武漢大學理科季刊

第一卷第二期

價目	郵費
全年四期 價銀二圓	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費六角
每期零售 價銀五角	函購零本 本國及日本加郵費五分 其他地域郵費一角五分
本刊以九月十二月三月及六月爲出版期	
費須先惠空函不覆	
各地代售處零售概不另加郵費	

編輯者 國立武漢大學理科季刊委員會

發行者 國立武漢大學出版部

印刷者 中國科學公司

代售處 商務印書館

總發行所 武昌 國立武漢大學出版部

中華民國十九年十二月發行

1931年

第1卷

第3期

國立武漢大學

理科季刊

第一卷第三期

QUATERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. I. No. 3 March 1931

本期目錄

中華民國二十年三月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認為新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第一卷第三期目錄

國立武漢大學理科季刊

第一卷第四期目錄預告

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一·本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二·投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三·稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四·稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五·本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六·來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

七·稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八·稿件內容本刊得酌量增删但不願意者請預先聲明

九·來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

狀態及觀察量之記號代數學

(Symbolische Algebra der Zustände und der Observablen)

潘 祖 武

1. 狀態之相加 (Addition von Zustände) 一種物理像之每一狀態可以一記號 ψ 表之.不同各狀態則加指標以區別之,如 ψ_1, ψ_2, ψ_r.設一狀態 ψ_0 由 ψ_1, ψ_2 兩狀態疊合[1] (Überlagerung) 而成,則這些狀態間的關係可由下之方程式表之:

$$\psi_0 = c_1\psi_1 + c_2\psi_2, \tag{1}$$

c_1, c_2 可爲實數虛數,及複數.由 ψ_1, ψ_2 疊合而成之各狀態卽由係數 c_1, c_2 之不同的值以特表之,表兩狀態之兩 ψ 號,於是可以任意的係數 c_1, c_2 而相加,其和除適等於 0 者外,仍爲一 ψ 號,表該兩狀態疊合而成的一狀態.平常加法定律假定適用於此,卽互換定律 (das kommutative Gesetz)

$$c_1\psi_1 + c_2\psi_2 = c_2\psi_2 + c_1\psi_1$$

和締合定律 (das assoziative Gestz)

$$(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) + c_3\psi_3 = c_1\psi_1 + (c_2\psi_2 + c_3\psi_3).$$

前者表兩狀態之疊合,對該兩狀態爲對稱的現象 (ein symmetrischer Vorgang). 後者表于重複的疊合,次序之先後沒有

1) 一狀態 A 可看作兩狀態 B 和 C 之一個疊合,如果有個不等于 0 的機率,對於物理像于狀態 A 引到一定結果之任一觀察至少亦于 B, C 兩狀態之一引到相同的結果.

關係.

n 個狀態如果成立如下之一關係

$$c_1\psi_1+c_2\psi_2+\cdots\cdots+c_n\psi_n=\Sigma c\psi=o \tag{2}$$

時稱爲"相關的"(Abhängig),否則稱爲"獨立的"(unabhängig).

一種狀態與其自己之疊合,所成的狀態當與原來的沒有區別,所以

$$\psi_1+\psi_1=2\psi_1$$

亦當表與 ψ_1 所表的同樣之狀態.一般地可假定 $c\psi_1$ 與 ψ_1 表同一的狀態,c 除不爲 o 外,可爲實數,虛數及複數.

ψ 號之外再引入一 φ 號,仍以表各狀態.每一狀態可由一 ψ 號 ψ_r 表之者,仍可由一 φ 號 φ_r 以表之.表三個狀態的 ψ 如果滿足(1)式,則表該三狀態之 φ 當滿足下式:

$$\varphi_3=\bar{c}_1\varphi_1+\bar{c}_2\varphi_2, \tag{3}$$

頭上有一畫的字母表其共軛複數.對於 φ 亦當適用加法之互換定律及締合定律.ψ 之其餘各屬性亦當移用于 φ,如 $c\varphi_1$ 與 φ_1 亦當表同一狀態.關于 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots\cdots,\varphi_n$ 所表的各狀態如不成立方程式如下之形式時:

$$c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\cdots\cdots\cdots c_n\varphi_n=\Sigma c\varphi=o,$$

則稱爲"獨立的".對于 φ 和 ψ 全要對稱的.φ 與 ψ 之和因無意義,以下不用.

引入第二種記號好像是多餘的,但用之可得 -1 兩根之對稱.一種如(1)式的疊合現象,由兩複數 c_1,c_2 特表的,同

樣可以其兩共軛複數 $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ 特表之,所以方程式(3)當與(1)同樣適用.

φ 或 ψ 以任一數乘之表與原來所表的一樣的狀態.若以 ψ^*, φ^* 代 ψ, φ 來表所用的狀態,a, b 為不等于 o 的任二數,則

$$\left.\begin{aligned} \psi_r &= a_r \psi_r^*, \\ \varphi_s &= b_s \varphi_s^*. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

要方程式(1)與(3)間的關係亦適用于附星號的記號時,a, b 必滿足一定的方程式,卽

$$\psi_0^* = \frac{1}{a_0}\psi_0 = \frac{1}{a_0}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = \frac{c_1 a_1}{a_0}\psi_1^* + \frac{c_2 a_2}{a_0}\psi_2^*,$$

$$\varphi_0^* = \frac{1}{b_0}\varphi_0 = \frac{1}{b_0}(\bar{c}_1\varphi_1 + \bar{c}_2\varphi_2) = \frac{\bar{c}_1 b_1}{b_0}\varphi_1^* + \frac{\bar{c}_2 b_2}{b_0}\varphi_2^*.$$

因 ψ^* 方程式與 φ^* 方程式中的係數相當地互為共軛複數,故

$$\frac{b_1}{b_0} = \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}, \qquad \frac{b_2}{b_0} = \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_0},$$

由是得

$$b_r = z\,\bar{a}_r, \tag{5}$$

z 為與 r 無關之數.

由方程式(1)與(3),與(5)間的關係,可得每個 φ_r 只差一比例因子 z 就可看作相應的 ψ_r 的共軛量.以 z 的適當的值,再作(4)與(5)形式的變換 (Transformation), 則比例變為相等.但 ψ 與 φ 間的"共軛虛的" (konjugiert imaginär) 關係,不與平常複數間之"共軛複的" (konjugiert complex) 關係完全相同.

因 ψ 不能分爲虛,實兩部.如將平常的複數分爲虛,實兩部時,則其實部爲該複數與其共軛數之算術中央值.這種中央值的作法,不能用于 ψ, φ 記號,因 ψ, φ 兩量不能相加.所以以後把"共軛虛的"表 ψ, φ 間的關係而"共軛複的"則用于可分爲實,虛兩部的複數.

2. 狀態之相乘(Multiplication von Zuständen). 假定任意的 ψ 和 φ 也可以相乘,其積,一般地,當爲複數.該積常寫如 $\varphi\psi$,即 φ 必在左而 ψ 必在右;也守乘法之分配定律.(das distributive gesetz der Multiplication),即

$$\left.\begin{aligned}(\varphi_1+\varphi_2)\,\psi &= \varphi_1\psi+\varphi_2\psi,\\ \varphi\,(\psi_1+\psi_2) &= \varphi\,\psi_1+\varphi\,\psi_2,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

還要適用

$$\varphi\,(c\psi) = (c\varphi)\,\psi = c\,(\varphi\psi), \tag{7}$$

c 爲任一數.ψ 與 φ 既爲共軛虛量,則與之相應有下之二假定:對於每一不等於 o 的 φ_r,

$$\varphi_r\,\psi_s = \overline{\varphi_s\,\psi_r}, \tag{8}$$

$$\varphi_r\,\psi_r > 0. \tag{9}$$

由第一式,如果令 $s=r$,則 $\varphi_r\ \psi_r$ 爲實的;第二式則決定 $\varphi_r\ \psi_r$ 不爲負的.欲證這兩假定是允許的,當研究(4),(5)形式變換之作用.因

$$\varphi_r\,\psi_s = b_r\,\varphi_r^*\,a_s\,\psi_s^* = z\,\bar{a}_r\,a_s\,\varphi_r^*\,\psi_s^*,$$

$$\overline{\varphi_s\,\psi_r} = \overline{b_s\,\varphi_s^*\,a_r\,\psi_r^*} = z\,\bar{a}_s\,a_r\,\overline{\varphi_r^*\,\psi_r^*},$$

於是(8)(9)兩式變為

$$z\,\bar{a}_r\,a_s\,\varphi_r^*\,\psi_s^* = \overline{z\,\bar{a}_s\,a_r\,\varphi_s^*\,\psi_r^*}$$

和

$$z\,\bar{a}_r\,a_r\,\varphi_r^*\,\psi_r^* > 0.$$

設 z 為正實數,則由這兩個關係得

$$\varphi_r^*\,\psi_s^* = \overline{\varphi_s^*\,\psi_r^*},$$

$$\varphi_r^*\,\psi_r^* > 0.$$

所以要(8)與(9)經(4)與(5)之變換為不變時,常數 z 當為正實數.以後都把 φ 看作不但與相當的 ψ 的共軛虛量成比例,簡直與之相等.因那一般的雖為理論所允許而引不出甚麼有用的結果.

我們常要假定一量 ψ_r 與其共軛虛量 φ_r 滿足一方程式

$$\varphi_r\,\psi_r = 1.$$

於此情形這些量稱為"規定"(normiert) 於 1,或簡稱為"規定的." 由不等式(9)知一個 φ 或一個 ψ 可以一複數相乘而"規定之".這數的絕對值要是一定的;其在"數平面"上的角度可是任意的.

由(9)得如果對於所有的 ψ,

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_r\,\psi = 0 \\ \text{時,則} \qquad & \\ &\varphi_r = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

因 φ_r 如果不等於 0 時,其共軛量 ψ_r,無論如何,總是個 ψ,不

能滿足

$$\varphi_r \psi = o$$

這個式子若把 ψ 和 φ 互換,自然成立相應的定理.

現在要證明,φ_r 和 ψ_s 如果是"規定的",則

$$|\varphi_r \psi_s| \leq 1, \tag{11}$$

這裏只 $r=s$ 時成爲相等,卽 φ_r 和 ψ_s 表同一狀態的時候.現在令 a 爲任一實數而將關係(9)應用於 $\psi_r - e^{ia}\psi_s$ 或 $\varphi_r - e^{-ia}\varphi_s$ 所特表的狀態於是

$$(\varphi_r - e^{-ia}\varphi_s)(\psi_r - e^{ia}\psi_s) > o$$

或

$$\varphi_r \psi_r - e^{ia}\varphi_r \psi_s - e^{-ia}\varphi_s \psi_r + \varphi_s \psi_s > o.$$

應用"規定"條件:

$$\varphi_r \psi_r = \varphi_s \psi_s = 1,$$

則得

$$e^{ia}\varphi_r \psi_s + e^{-ia}\varphi_s \psi_r < 2.$$

左方之第二項恰爲第一項之共軛複數,因此 $e^{ia}\varphi_r \psi_s$ 之實部小於 1. 這個對於 a 之一切值都通用,所以 $\varphi_r \psi_s$ 之絕對值小於 1. 如果 a 有一個值,對之, $\psi_r - e^{ia}\psi_s = o$, 卽 $\psi_r \psi_s$,表同一狀態,則以上三個不等式變爲等式于是完全證明了(11)式.

3. **觀察量之代數學** (Algebra der Observablen). 現在要引入動力學的量 (dynamische Grössen).在傳統力學 (klassische Me-

chanik）中關于物理相任一狀態之任一動力學的變數(dynamische Variable)看作時間的任一函數,那麼是關於任一時間的一個量.在量子力學(quantenmechanik)中一個動力學的變數可是不復看作時間的一個平常的函數,雖然它也要是關于任一時間的,如果它應當是一傳統動力學的變數的比類(das analogon).在量子力學中較便利的是不用關于任一時間的而用關于一定時間點（Zeitpunkt）的量,它當與一個傳統的變數(klassische Variable)關于一定時間點的數值相應.于是無論在傳統力學裏或量子力學裏都可以說,一個觀察是去測量一個觀察量而測量的結果是個數.這裏所謂測量(die Messung)是相當擇取的一串觀察.于傳統的理論,觀察不會擾亂狀態,簡直可以跟著觀察的;反之,在量子力學裏,因觀察會擾亂狀態,在每一觀察之後,首先要把這狀態恢復了,才可以做第二個稍變的觀察,其結果于是與第一次觀察的結果沒有固定的關係.那麼于一物理相在一定狀態的一個動力學的變數之測量,據傳統理論,看作結果的是個時間的函數,而據量子力學一般地並沒有意義.

每一觀察量以一記號表之.例如一電子于一定時間 t_1 的一個加特坐標(kartesische Koordinate)之值是個觀察量而可以記號 $x(t_1)$ 表之.一個動力學的變數,如 $x(t)$,可以看作一個觀察量,與一表時間的輔變數(Parameter)有關.

任一表觀察量之記號 α 可以一表狀態之記號 ψ 乘之,其積寫如 $\alpha\psi$,因子 ψ 必在右.按其種類,此積仍爲一 ψ 量,于是也表一狀態而可與旁的 ψ 量相加.仍假設乘法之分配定律適用,即

$$\alpha(\psi_1+\psi_2)=\alpha\psi_1+\alpha\psi_2, \tag{12}$$

再假定

$$\alpha(c\psi)=c(\alpha\psi), \tag{13}$$

c 爲任一數.

現在假定一觀察量 α 與所有的 ψ 滿足方程式

$$\alpha\psi=o$$

時,則必

$$\alpha=o.$$

這就是說,如果一觀察量與任一 ψ 的積既定,則該觀察量亦唯一地 (eindeutig) 決定.因爲,設有兩個觀察量,其與每個 ψ 的積都相等時.則以各積之差等于 o.依上邊的假定,差觀察量 (die Differenzobservable) 亦必等于 o.于是我們定義兩觀察量 α_1 與 α_2 之和以關于任一 ψ 的方程式

$$(\alpha_1+\alpha_2)\psi=\alpha_1\psi+\alpha_2\psi. \tag{14}$$

由這個定義與對于 ψ 號加法的相當定律即可得觀察量加法之互換與締合二定律.又定義兩觀察量 α_1 與 α_2 之積 $\alpha_1\alpha_2$ 以對于任一 ψ 的方程式

$$(\alpha_1\alpha_2)\psi=\alpha_1(\alpha_2\psi), \tag{15}$$

由此方程式卽可得觀察量乘法締合及分配二定律.締合定律首先所具的形式如下:

$$((\alpha_1\alpha_2)\alpha_3)\psi=(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\psi)=\alpha_1(\alpha_2(\alpha_3\psi))=\alpha_1((\alpha_2\alpha_3)\psi)=(\alpha_1(\alpha_2\alpha_3))\psi,$$

因此關係對于任一 ψ 均適用,所以

$$(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3=\alpha_1(\alpha_2\alpha_3).$$

但互換定律一般地不適用于觀察量乘法,卽一般地 $\alpha_1\alpha_2$ 不等于 $\alpha_2\alpha_1$.特別地 $\alpha_1\alpha_2=\alpha_2\alpha_1$ 時,α_1 與 α_2 就叫做"可互換的"(Vertauschbar).三個或多個觀察量,如果每兩個可以互換,也叫做"可互換的".

因對于 ψ 和 φ 要對稱的,所以也可把一觀察量 α 乘一 φ 號,其積寫如 $\varphi\alpha$,φ 要在左邊,按其種類,仍是個 φ 號,表一狀態而可以與旁的 φ 量相加.與(12)和(13)相應有下之方程式:

$$(\varphi_1+\varphi_2)\alpha=\varphi_1\alpha+\varphi_2\alpha$$

和

$$(c\varphi)\alpha=c(\varphi\alpha).$$

我們還用一個公理,卽下邊形式的乘法之締合定律:

$$(\varphi\alpha)\psi=\varphi(\alpha\psi),$$

所以兩邊的括弧都可以去掉而簡寫如 $\varphi\alpha\psi$.

末了這個公理使我們可以證明兩觀察量之和或積,以 φ 量之助,可如(14),(15)以 ψ 量之助,所做的完全一樣來定義的.如對于任一 φ,

$$\varphi(\alpha_1+\alpha_2)=\varphi\alpha_1+\varphi\alpha_2. \tag{16}$$

或

$$\varphi(\alpha_1\alpha_2)=(\varphi\alpha_1)\alpha_2.$$

設取和的例子,由定義(14),則可以(6)的幫助,推得,對于任一 φ 和 ψ,

$$\varphi(\alpha_1+\alpha_2)\psi=\varphi\alpha_1\psi+\varphi\alpha_2\psi$$

或

$$(\varphi(\alpha_1+\alpha_2)-\varphi\alpha_1-\varphi\alpha_2)\psi=o.$$

再由(10)得

$$\varphi(\alpha_1+\alpha_2)-\varphi\alpha_1-\varphi\alpha_2=o,$$

這就是方程式(16),所以兩個定義完全一致.同理可用于乘法.還有個相類的思想,由對于任一 ψ 的方程式,$\alpha\psi=o$ 時,$\alpha=o$ 的假設,可引出對于任一 φ,$\varphi\alpha=o$ 時,則 $\alpha=o$.

4. 共軛複觀察量(konjugiert komplexe Observable). 任意各觀察量之和及積都可看作新觀察量.但要求的是把觀察量的意義擴充,使之還包含與傳統觀察量之複函數相應的東西,精密點說,這樣的函數在一定時間點的值.一個觀察量不一定要是由一個觀察直接可測的量而是這樣的量的個理論的擴充.

一般地每個可與 ψ 及 φ 按所與的公理相乘的運算號(Operator) 可看作一個觀察量.因此,如對於所有的 ψ 給予 $\alpha\psi$ 的值——廣義的,自然不是數值(Zahlenwert)——只顧

及條件(12)時可任意擇取,則可定義一個觀察量 α.一系的 ψ,由之所有旁的 ψ 可以一次齊次地合成的,叫做 ψ 的一個完全系 (ein vollständiges system von ψ). 試取"獨立的" ψ 量之這樣的一個完全系而以 ψ_r 表這些量,則 α φ_r 值對屬于該系的 ψ_r 可以任意擇取. α ψ 對於其餘各 ψ 的值于是由方程式(12)得出,而 α 由這個 α ψ_r 已完全決定.如果不是已知 α ψ_r 的值,也可以給予 φ_s α ψ_r 數的值以定義 α,該值仍可隨意擇取,如果 φ_s 仍如 ψ_r 構成"獨立的"量之一完全系. α 之亦由此唯一地決定,可由(10)得出.

設 α 為一觀察量,試研究方程式

$$\overline{\varphi_s\,\alpha\,\psi_r}=\varphi_r\,\beta\,\psi_s, \tag{17}$$

這裏 ψ_r 和 ψ_s 當為兩個任意的量而 φ_r 和 φ_s 為其"共軛虛量"方程式(17)可看作一個新觀察量 β 的定義方程式,如果令這方程式適用於"獨立的" ψ_r 之一完全系及"獨立的" ψ_s 之一完全系.于此情形,容易證明,如果(17)對于兩個 ψ_r 適用而相應的適用于 ψ_s,則對于該兩 ψ_r 的每個一次集合(lineare kombination) 亦適用.事實上,如果(17)對于 $\psi_r=\psi_1$ 和對于 $\psi_r=\psi_2$ 適用,則有下之方程式:

$$\overline{\varphi_s\,\alpha\,\psi_1}=\varphi_1\,\beta\,\psi_s,$$

$$\overline{\varphi_s\,\alpha\,\psi_2}=\varphi_2\,\beta\,\psi_s,$$

由此可導出

$$\overline{\varphi_s\,\alpha\,(c_1\,\psi_1+c_2\,\psi_2)}=\overline{c_1\,\varphi_s\,\alpha\,\psi_1}+\overline{c_2\,\varphi_s\,\alpha\,\psi_2}$$

$$=\bar{c}_1\,\varphi_1\,\beta\,\psi_s+\bar{c}_2\,\varphi_2\,\beta\,\psi_s$$

$$=(\bar{c}_1\,\varphi_1+\bar{c}_2\,\varphi_2)\,\beta\,\psi_s,$$

由是得,(17) 也對于

$$\psi_r=c_1\,\psi_1+c_2\,\psi_2$$

適用.

由(17)定義的β稱為觀察量α之"共軛複量",寫如$\bar{\alpha}$.于是

$$\overline{\varphi_s\,\alpha\,\psi_r}=\varphi_r\,\bar{\alpha}\,\psi_s. \tag{18}$$

$\bar{\alpha}$的"共軛複量"是α.這裏所用的字是"共軛複的"而不是"共軛虛的",因為一個觀察量與其"共軛複量"是同類,可以相加.$\frac{1}{2}(\alpha+\bar{\alpha})$可定義為一觀察量的實部而$\frac{1}{2}(\alpha-\bar{\alpha})$為其虛部.一個觀察量$\alpha$如果沒有虛部,卽滿足

$$\overline{\varphi_s\,\alpha\,\psi_r}=\varphi_r\,\alpha\,\psi_s \tag{19}$$

的條件的,叫做實的.

于特別的情形觀察量是個數 (eine Zahl) 時,則其"共軛複量,"按定義(18)及方程(7),簡直是其普通的"共軛複數".

現在要證明:如果ψ_1和φ_1是"共軛虛號",則$\alpha\,\psi_1$和$\varphi_1\,\alpha$對于任一觀察量α也是"共軛虛的".以φ表$\alpha\,\psi_1$的"共軛虛量",則由(8)得

$$\varphi\,\psi_s=\overline{\varphi_s\,\alpha\,\psi_1},$$

對于一任意的ψ_s.旁一方面由定義(18)得

$$\overline{\varphi_s\,\alpha\,\psi_1}=\varphi_1\,\bar{\alpha}\,\psi_s.$$

由是得對于任意的ψ_s,

$$\varphi\,\psi_s=\varphi_1\bar{\alpha}\,\psi_s,$$

那麼由(10)得:

$$\varphi=\varphi_1\,\bar{a}. \tag{20}$$

現在要決定兩觀察量 α_1 和 α_2 之積 $\alpha_1\ \alpha_2$ 之"共軛複量."決定這"共軛複量" $\overline{\alpha_1\,\alpha_2}$ 的方程式是:

$$\varphi_p\,\overline{\alpha_1\,\alpha_2}\,\psi_q=\overline{\varphi_q\,\alpha_1\,\alpha_2\,\psi_p}, \tag{21}$$

對于任意的 ψ_p 和 φ_q.把

$$\varphi_s=\varphi_q\,\alpha_1,$$

$$\psi_r=\alpha_2\,\psi_p$$

代入方程式(8),按方程式(20)所表的定理,得:

$$\psi_s=\bar{\alpha}_1\,\psi_q,$$

$$\varphi_r=\varphi_p\,\bar{\alpha}_2,$$

那麼得

$$\varphi_p\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\alpha}_1\,\psi_q=\overline{\varphi_q\,\alpha_1\,\alpha_2\,\psi_p}.$$

把這結果與(21)比較,則因這些方程式對於任意的 φ_p 和 ψ_q 都適用,得

$$\overline{\alpha_1\,\alpha_2}=\bar{\alpha}_2\,\bar{\alpha}_1. \tag{22}$$

要求一個積的"共軛複量",必取每一分子的"共軛複量"而互換各因子的次序.積中有二個以上的因子時,這法則亦適用,如

$$\overline{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3}=\bar{\alpha}_3\,\overline{\alpha_1\,\alpha_2}=\bar{\alpha}_3\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\alpha}_1.$$

如果 α_1 和 α_2 是兩個實觀察量,則 $\alpha_1\,\alpha_2+\alpha_2\,\alpha_1$ 仍是實的而

$\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_1$ 是純虛的.只于 α_1 和 α_2 可互換時,α_1 α_2 也是實的,因爲只這個時候純虛量 $\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_1$ 等于 o.方程式(18),(20)與(22)告訴我們以下的一般法則:如果要構成表觀察量或狀態的記號任一允許的連結之"共軛複量"或"共軛虛量"時,則必于每一積中互換各因子的次序,然後每一記號以其"共軛的"代之.

5. 觀察量代數學之例 (Beispiele für die Algebra der Observablen). 設兩觀察量 p 和 q 滿足下之方程式:

$$qp-pq=i, \tag{23}$$

i 爲-1 之根,我們試研究他們的屬性.由上節知兩個實觀察量 p 和 q 可滿足這方程式.把 q 左乘(26)和右乘(26)各一次,則得下之兩方程式:

$$q^2p-qpq=iq,$$

$$qpq-pq^2=iq.$$

把他們加起來,得

$$q^2p-pq^2=2iq.$$

這個結果可以拓充的.第一次把q^{n-1}左乘(23),第二次以q^{n-2}左乘之,q 右乘之,第三次以q^{n-3}左乘之,q^2 右乘之,餘類推,以至第 n 次,只以q^{n-1}右乘之,則得方程式:

$$q^np-q^{n-1}pq=iq^{n-1},$$

$$q^{n-1}pq-q^{n-2}pq^2=iq^{n-1},$$

$$q^{n-2}pq^2-q^{n-3}pq^3=iq^{n-1},$$

……………………………………,

……………………………………,

……………………………………,

$$p\,q\,q^{n-1}-p\,q^{n}=i\,q^{n-1}.$$

把這些方程式加起來,可得:

$$q^{n}p-p\,q^{n}=n\,i\,q^{n-1}.$$

此方程式亦可寫如下形:

$$q^{n}p-p\,q^{n}=i\frac{dq^{n}}{dq}.$$

設 $f(q)$ 爲 q 之任一函數,可展爲方乘級數 (Potenzreihe), 這方程式適用

$$f\,p-p\,f=i\frac{df}{dq},\qquad (24)$$

因爲前式對于每一項適用這展開法.

作爲 f 的特例,可取方乘級數

$$f(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ic)^{n}q^{n}}{n!},$$

c 當爲一數.我們可由定義決定這級數當爲函數 e^{icq},于是對于此函數適用關于指數函數之普通定律,因在證明中沒有記號與 q 不可互換的.因此于這個情形中,沒有本代數學與平常代數學之區別.方程式(27)以 f 的這個意義給予下之方程式:

$$e^{icq}p-pe^{icq}=-ce^{icq}$$

或

$$e^{icq}p=(p-c)\,e^{icq}.\qquad (25)$$

參考:

P. A. M.	Dirac,	Proc.	Roy.	Soc.	第 109 卷,	642 頁,	1925,
„ „ „	„	„	„	„	„ 110 „	561 „,	1926,
„ „ „	„	„	„	„	„ 112 „	661 „,	1926,
„ „ „	„	„	„	„	„ 113 „	621 „,	1926,
„ „ „	„	„	„	„	„ 114 „	243 710 „,	1927,
„ „ „	„	„	„	„	„ 117 „	610 „,	1928,
„ „ „	„	„	„	„	„ 118 „	351 „,	1928.

本文取材于

P.A.M. Dirac, The Principles of Quantum mechanics 之德文譯本.

黎曼積分法理論

(續第一卷第二期)

曾瑊益

第五章 各種可求積分之函數

依黎氏定義,有限函數之可求積分者,有下列之各種:

1. 一切連續函數.

若$f(x)$為在閉合節段(a,b)間之一個有限函數,在該節段有一個上限M及一個下限m.在各節段δ_i間,函數又有一個振動w_i.設w為一切w_i之集合之上限,則得

$$S-s\leqq(b-a)w$$

於此可求得一個正數η,當$\delta_i<\eta$時,w必小於從前所假定之任一正數.故祇須取w合於下列之不等式時,

$$w<\frac{\epsilon}{b-a}\qquad\qquad \epsilon>o$$

卽可作成差數$S-s$為任何小.

換言之,達於極限時,其總和S及s卽上積分及下積分相等.故函數可求其積分.

2. 函數有有限個不連續者,於節段(a,b)間分為有限個小節段,卽取不連續諸點為其諸分點,則在各所分節段中,函數為連續的,故可求其積分.

3. 函數有無限個可以計數之不連續者,則不連續諸

點集合之測度爲零.

4. 在節段 (a,b) 間爲單調增加,卽能合於次之條件:

當 $x''>x'$ 時, $f(x'')\geqq f(x')$

又函數有時在某部分中成爲固定常數.於極特別時,在其全節段,均爲固定之數.

下舉之例,乃證明單調增加之函數可求其積分者.

試分節段 (a,b) 爲諸小部分,使其均小於 η,則可書總和 S 及 s 如次:

$$S=f(x_1)\,\delta_1^{(m)}+f(x_2)\,\delta_2^{(m)}+\cdots+f(b)\,\delta_{n_m}^{(m)}$$

及 $$s=f(a)\,\delta_1^{(m)}+f(x_1)\,\delta_2^{(m)}+\cdots+f(x_{n-1})\,\delta_{n_m}^{(m)}$$

因在任一節段 $\delta_i^{(m)}$ 中,$f(x)$ 之上限爲 $f(x_i)$.又其下限爲 $f(x_{i-1})$.

於是得差數如下:

$$S-s=\delta_1^{(m)}[f(x_1)-f(a)]-\delta_2^{(m)}[f(x_2)-f(x_1)]+\cdots\cdots$$
$$+\delta_{n_m}^{(m)}[f(b)-f(x_{n-1})]$$

因諸 $\delta_i^{(m)}$ 均不大於 η,故書

$$S-s<\eta[f(b)-f(a)]$$

其中之一切值 $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\cdots$, $f(x_{n-1})$ 均各消去.

故欲滿足於可求積分之條件應取下式:

$$\eta<\frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$$

同理可證明一個單調減少之函數,亦可求其積分.

5. 函數有有限完全變化,或有限完全振動者.

令 $f(x)$ 爲在連續節段 (a,b) 間之函數.又以一組細分收斂

系,再分其節段.

設取函數$f(x)$為(a,b)中任一細分系,而在(a,b)之小節段中,$f(x)$振動之和,以$\sum_{1}^{n_r}\triangle_r$表之.若此總和,對於各個$r$之值,小於某固定有限之數時,則$f(x)$謂之在節段$(a,b)$中一個函數有有限之完全振動.

於是可得次之諸條文:

若$f(x)$對於已知諸小節段之收斂系,有有限之完全振動時,則對於細分之任一收斂系,亦有有限之完全振動.若再改其一切可能之諸小節段之收斂系,則其完全振動,必有一上界及一下界.

函數有有限之完全振動者,不能有第二類之諸不連續點.且在其各點時,必有極限$f(x-o)$及$f(x+o)$可以存在.但除二點a及b在外.即在該處時,僅各有$f(a+o)$及$f(b-o)$可以存在.

於實際上,在第二類不連續一點之任意微小隣近處,此函數有無限個之振動,比其固定數為大,且其完全振動,在此隣近處,不能為有限之值.

當一個函數有有限個完全振動時,其在右及在左之測度

$$\Sigma|f(x+o)-f(x)| \quad 及 \quad \Sigma|f(x-o)-f(x)|$$

對於一切之不連續點,為有限之值,故如此之諸點,可作成一個可以計數之集合.蓋僅有有限個,其測度超過已知之正數也.此即證明函數有有限之完全振動者,可求其積分

也.

對於此類之函數,約但又以其他不同之法研究之.約但以有限完全變化之記法,與有限完全振動者有異.此兩類之函數,已證其完全相等.茲再述約氏之法於次:

設$f(x)$爲在節段(a, b)間之有限函數.設此節段,以下列諸點再分之,

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad \cdots,\quad x_{i-1},\quad x_i,\quad \cdots,\quad x_{n-1}$$

則得

$$\Omega = f(b) - f(a) = \Sigma\left[f(x_i) - f(x_{i-1}) \right]$$

式中Ω爲$f(x)$在(a, b)中之完全振動.

此式可書之等於$p-n$.此p及n各爲正項數及負項數之和.

對於(a, b)中細分之某特別系,則p謂之$f(x)$之正變化,n謂之負變化.若作成總和,卽得

$$t = \Sigma \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right| = p + n$$

此t謂之函數之完全變化.

若細分節段(a, b)之法變更,則t,p及n之值亦變.於特例時,若在其初所分小節段之任意二點間,插入第三點ξ.若$f(\xi)$之值在$f(x)$爲原二分點時所得之值之間,則p,t及n之值必不變.但若$f(\xi)$在此等值之外,則p與n必增加以$f(\xi)$與其極近之$f(x)$之值之差,... 必增加該數之二倍.

今設三值t,p及n之一,有一個極大之值.如此則因函

數爲有限之值,故其他二者,亦必有一個極大之值.

函數有有限完全變化者,其重要性質之一,可表之如次:

$$f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$$

此$f(x)$爲原函數$\varphi(x)$及$\psi(x)$爲正且有限之函數,但不遞次減少.換言之,卽在 a 及 b 間爲單調增加也.

但適已證明單調增加之函數,可求其積分.故$f(x)$可表示兩個如此函數之差者,亦必可求其積分.*

6. 普通逐點不連續函數,爲閉合集合,其測度$\geqq k$,而有零之包含者,則此函數可以求其積分.

7. 狄尼曾證明次之定理:

函數在一個有限節段(a,b)間常爲有限值,且僅有第一類之不連續,或第二類之不連續常在一邊,且同在相應點之同邊者,則此函數在 a 及 b 間可以求其積分.

設$f(x)$爲如此之函數,若其第二類之不連續點,在(a,b)中有一點或多點,假定均在此等點之右.

設取 $a<b$.又令ϵ爲一任意之小正數,試察其節段$(a, a+\epsilon)$.

因函數或爲連續的,或有第一類之不連續在各點之左邊,則在(a,b)間爲逐點之不連續,故在(a,b)間,亦必有無數個點,函數在其兩邊時,均爲連續的.若 x_1 爲如此之一點,σ 爲一任意之小正數,試僅察 x_1 之右邊,則可求得一個ϵ_1對

*於此係應用下章所述定積分之一個性質.

於在 x_1 及 $x_1+\epsilon_1$ 間之各點,(但除 $x_1+\epsilon_1$ 點在外)得有下式:

$$|f(x)-f(x_1)|<\frac{\sigma}{2}$$

今令 $y_1=x_1+\epsilon_1$ 作成節段$(y_1,y_1+\frac{\epsilon_1}{2})$.此 ϵ_1 之意義如前.試於此節段中,取一點 x_2 在 y_1 之右邊,則此函數爲連續的.又對於點 x_2,試察節段 $(x_2,x_2+\epsilon_2)$, 則在其節段間之各點 x,除 $x_2+\epsilon_2$ 在外,可得下式:

$$|f(x)-f(x_2)|<\frac{\sigma}{2}$$

今設 $y_2=x_2+\epsilon_2$,作成節段 $(y_2,y_2+\frac{\epsilon_2}{2})$. 又取一新點 x_3 在 y_2 之右邊,於此時函數爲連續的,再作成節段 $(x_3,x_3+\epsilon_3)$, 在其中之各點,得有下式:

$$|f(x)-f(x_3)|<\frac{\sigma}{2}$$

繼續行此法,卽得一組常增之數 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 於此可分爲二類: (1)僅作有限個節段 $(x_i,x_i+\epsilon_i)$, 卽可至點 b. 或(2)諸點 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 之個數爲無限,而有一定極限,或小於 b,或等於 b.

但上述之第二類情形不能存在.蓋若有之,令 c 爲無限數列 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 之極限,則在任意之小節段中,必有無限個之數在 c 之左邊.但因$f(x)$或爲連續的,或僅有第一類之不連續在 c 之左邊.故恆可決定一節段 $(c-w,c)$.於其節段中之任意二點,得有下式:

$$|f(\epsilon)-f(\eta)|<\frac{\sigma}{2}$$

於是在節段 $(c-w,c)$ 間有無數個點列 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 但若 x_m

爲此諸點之一,則在其節段中之各點得

$$|f(x)-f(x_m)|<\frac{\sigma}{2}$$

依施行各法之結果以決定 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \cdots$ 在其節段 $(x_m, x_m+\epsilon_m)$ 之末點 $x_m+\epsilon_m$ 相當於點 x_m,不能存在於節段 $(c-w, c)$ 之中.卽至極項,亦祗能與 c 密合.於是其次之點 x_{m+1} 應存在於節段 $(c-w, c)$ 之外.如此卽得矛盾之結果.故僅作有限個節段 $(x_i, x_i+\epsilon_i)$ 必可至點 b.

今設取諸點 $y'_1, y'_2, y'_3, \cdots$ 在諸點 $x_1+\epsilon_1,\ x_2+\epsilon_2,\ x_3+\epsilon_3, \cdots\cdots$ 之左邊,而在下列相應諸節段之中

$$(x_1, x_1+\epsilon_1),\quad (x_2, x_2+\epsilon_2),\quad (x_3, x_3+\epsilon_3),\quad \cdots\cdots$$

則得

$$y'_1>x_1+\epsilon_1-\frac{1}{2}\epsilon,\quad y'_2>x_2+\epsilon_2-\frac{1}{2^2}\epsilon,\quad y'_3>x_3+\epsilon_3-\frac{1}{2^3}\epsilon,\cdots\cdots$$

又察節段 (a, b) 間所分之各段,相當於下列之順序各點

$$a,\quad x_1,\quad y'_1,\quad x_2,\quad y'_2,\quad x_3,\quad y'_3\quad \cdots,\quad b$$

由此細分各段,卽成爲有限個小節段 (a, x_1), (x_1, y'_1), (y'_1, x_2), $(x_2, y'_2)\cdots$ 而其振動 $>\sigma$,僅能存在於次列之各節段間.

$$(a, x_1),\ (y'_1, x_2),\ (y'_2, x_3),\ (y'_3, x_4),\ \cdots\cdots$$

但在此等節段間,其振動各小於下列各數:

$$\epsilon,\quad \epsilon,\quad \frac{1}{2}\epsilon,\quad \frac{1}{2^2}\epsilon,\quad \frac{1}{2^3}\epsilon,\quad \cdots,\quad \frac{1}{2^n}\epsilon,\quad \cdots$$

故此等振動之總和 $<3\epsilon$.

依同理易知若第二類之不連續,均在相當諸點之左邊者.故得結論曰:函數在節段 (a, b) 間,可以求其積分.

此可求積分之條件,亦可應用於函數之含有未定函數之值,卽對於變數之某特別値,在未定函數之有限極限之間者.在此等點之任一點,可設函數僅有二個値,卽其未定之上限及下限.欲求函數在已知節段間之振動,其上界可取函數之未定上限,爲在節段間諸點之函數之値.又其下界,可作爲此等同點之未定下限.根據此說,可知測度之定義,仍然存在.其可求積分之條件亦相同.卽其函數必爲有界.且其不連續之集合,有零之測度.

茲舉可求積分之函數之例如下:

(1) 設有下列黎氏所說且上面已論及之函數

$$f(x)=\frac{(x)}{1^2}+\frac{(2x)}{2^2}+\frac{(3x)}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{(nx)}{n^2}$$

式中 (x) 爲 x 與極近整數之差.又當 $x=n+\frac{1}{2}$ 時,$(x)=o$ 爲逐點不連續的.此等之不連續性,爲尋常所見者.且在節段 $(0,1)$ 間到處稠密.故可求其積分.

(2) 下列之函數

當 $x=\frac{p}{q}$ 時,　$f(x)=\frac{1}{q}$;

當 $x\neq\frac{p}{q}$ 時,　$f(x)=o$

及 $f(o)=f(1)=o$ 此函數亦爲逐點之不連續的.故可求其積分.

第六章 定積分之性質

從上之討論.若 $f(x)$ 爲在節段 (a,b) 間一個可求積分之函數,則積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 之種種性質,可如下求之:

1. 積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ 成立,其値等於 $-\int_a^b f(x)\,dx$.

因其中任一節段 δ_i 或 (x_i-x_{i-1}), 均等於 $(x_{i-1}-x_i)$ 之絕對値.但其符號相反.故若取 $A(\delta_i^{(m)})$ 爲在上兩種情形時之同一數値,則得

$$\lim \Sigma(-\delta_i^{(m)}).A(\delta_i^{(m)})-\lim \Sigma(\delta_i^{(m)}).A\delta(_i^{(m)})$$

2. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 間可求其積分,則 $|f(x)|$ 亦可求積分,且 $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b \left|f(x)\right| dx.$

$|f(x)|$ 之振動,在任一節段 δ_i 間,不能超過 $f(x)$ 之振動.故若 D 爲 $|f(x)|$ 在 δ_i 間之振動,又若 D 爲 $f(x)$ 之振動時,有同一之極限,則 $\Sigma D(\delta_i)$ 對於諸節段之一收斂敍列,有零之極限.

又若 M 爲 $|f(x)|$ 在 δ_i 間之上限,M' 爲 $f(x)$ 之上限,且不得 $M > M'$,則

$$|\Sigma M.\delta_i| \leqq \Sigma M'.\delta_i$$

於是 $|\lim \Sigma M.\delta_i| \leqq \lim \Sigma M'.\delta_i$

3. 若可求積分函數 $f(x)$ 之諸值,使其在可量諸點 G 之集合中各點任意變更之,則所得之新函數 $\varphi(x)$, 可以求黎氏之積分.但須假定其爲有界限,且其微分 G' 之測度爲零.

因 $\varphi(x)$ 之不連續諸點,不爲 $f(x)$ 之不連續諸點,卽爲 G 之諸點,或 G' 之諸點.因是作成一個以零爲測度之集合.故 $\varphi(x)$ 之不連續諸點,爲作成以零爲測度之集合,而 $\varphi(x)$ 式可以求其積分.

若 $\varphi(x)=f(x)$ 其中所在一切之點屬在 (a,b) 間者,爲到處

稠密之集合,若 $\varphi(x)$ 爲可求黎氏之積分,則其積分全等於 $f(x)$ 之積分.

因在有限之總和 $\Sigma\delta\cdot M(\delta)$ 中,可於其任一節段 δ 間,取 $M(\delta)$ 之值,爲在該節段間兩個函數共有諸值之一個,則其一切總和,對於該兩個函數,可以取同一之值.故有同一之極限.

4. 一個函數 $f(x)$ 在 (a,b) 間可求其積分,則在含於 (a,b) 中之 (α,β) 間,亦可求其積分.

因在 (a,b) 間,$f(x)$ 不連續諸點之集合之測度爲零.故在 (α,β) 間者,必更爲零.

於特例時,若 $a<c<b$,則可書

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

因 $\int_a^c$ 及 $\int_c^b$ 能成立.故必可求得一個細分 (a,b) 之法.卽令 c 爲細分中之一點,則得

$$\Sigma\,\delta_i\,A(\delta_i)=\Sigma_1\,\delta_i\,A(\delta_i)+\Sigma_2\,\delta_i\,A(\delta_i)$$

式中 Σ_1 包括一切之項以至於 c.又 Σ_2 爲由 c 至 b 之諸項.

5. 若 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ 爲有限個有極限之函數.當其在 (a,b) 間可以求其積分.又若 $F(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 爲 n 個 f 之連續函數,則 $F(x)$ 在 (a,b) 間可以求其積分.

因 F 之不連續諸點,僅能爲 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ 之諸不連續點.但此等函數之不連續諸點之集合爲零之測度.故 F 之不連續諸點之集合,亦爲零之測度.

於特例時,可有下之各種:

$a)$　若 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$

則 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)\,dx+\cdots+\int_a^b f_n(x)\,dx$

$b)$　若 $f(x)=A\cdot f_1(x)+B\cdot f_2(x)$

則 $\int_a^b f(x)dx=A\cdot\int_a^b f_1(x)dx+B\cdot\int_a^b f_2(x)\,dx$

$c)$　若 $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdots f_n(x)$

則 $\int_a^b f(x)\,dx$ 成立.

$d)$ 若$f(x)$及 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 間可以求其積分.又若除 $|\varphi(x)|>A$ 外,能得$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$爲 x 之連續函數,則$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$在 (a,b) 間可以求其積分.

6. 若$f(x)$在 (a,b) 間可求黎氏之積分.又若其上界 M 及下界 m,有同一之符號.則$\frac{1}{f(x)}$在 (a,b) 間可以求其積分.

例若 M 及 m 均爲正數,則$\frac{1}{f(x)}$在 δ_i 中之振動爲

$$\frac{1}{m_i}-\frac{1}{M_i}=\frac{M_i-m_i}{M_i\cdot m_i}=\frac{1}{m^2}(M_i-m_i)$$

於是 $\lim\Sigma\left(\frac{1}{m_i}-\frac{1}{M_i}\right)\delta_i\leqq\frac{1}{m^2}\lim\Sigma(M_i-m_i)\delta_i=o$

此卽$\frac{1}{f(x)}$可求積分之條件也.

7. 命 $f^+(x)$ 及 $f^-(x)$ 之定義如次:

當 $f(x)\geqq o$ 時, $f^+(x)=f(x)$　　又 $f(x)<o$ 時, $f^+(x)=o$

當 $f(x)<o$ 時, $f^-(x)=f(x)$　　又 $f(x)\geqq o$ 時, $f^-(x)=o$

於是若$f(x)$在 (a,b) 間可求其積分,則 $f^+(x)$ 及 $f^-(x)$ 亦可求其積分,且

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f^+(x)\,dx-\int_a^b f^-(x)\,dx$$

$f^+(x)$ 在任意 δ_i 中之振動不能超過於$f(x)$者.又因 $\Sigma\delta_i\cdot D(\delta_i)$

有零爲其極限,則對於 $f^+(x)$ 之相當總和,亦有零爲其極限,而 $f^+(x)$ 可求其積分.

依同理 $f^-(x)$ 亦可求其積分.

今因 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ 依適所證明,卽得

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f^+(x)dx-\int_a^b f^-(x)\,dx$$

但此不能於一般情形均爲真確.若 $f(x)$ 在 (a,b) 間可求其積分,令 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 此式中之 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 爲有限的,則此等函數在 (a,b) 間可求其積分.

8. 若 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 間均可求其積分.又在此節段間 $|f(x)|\leqq|\varphi(x)|$ 則

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqq\int_a^b\left|\varphi(x)\right|dx$$

因在任何節段 δ_i 間不能得 $|\varphi(x)|-|f(x)|<o$,故可書

$$\int_a^b\Big\{|\varphi(x)|-|f(x)|\Big\}\,dx\geqq o$$

於是得

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqq\int_a^b\left|f(x)\right|dx\leqq\int_a^b\left|\varphi(x)\right|dx$$

於特別時,若 $\varphi(x)=P$ 爲 $|f(x)|$ 之上限,則

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqq P(b-a)$$

若 M 及 m 各爲 $f(x)$ 之上限及下限,則

$$m(b-a)\leqq\int_a^b f(x)\,dx\leqq M(b-a)$$

蓋 $\Sigma\delta_i\cdot M(\delta_i)$ 及 $\Sigma\delta_i\cdot m(\delta_i)$

爲 $\int_a^b f(x)\,dx$ 之近似值各在下列二式之間也.

$M\cdot\Sigma\delta_i$ 及 $m\cdot\Sigma\delta_i$ 或 $M(b-a)$ 及 $m(b-a)$

9. 若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots$ 爲可以計數諸集合,當其在 (a,b) 間爲長度漸次減少而不相叠置之諸節段.若 $f(x)$ 可以求其積分,則 $f(x)$ 之諸節段之總和,當 dn 無限增加時,此等節段應收斂於固定之有限極限.

設 S_m 爲 $f(x)$ 經過 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\cdots,\eta_m$ 之諸積分之和.其總和 $\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_m$ 因 m 之增大亦隨之而增加.但常小於 $b-a$.故得

$$\eta_{m+1}+\eta_{m+2}+\cdots+\eta_{m+n}<\epsilon$$

是以 $|S_{m+n}-S_n|<\epsilon\cdot P$

式中之 P 爲 $f(x)$ 在 (a,b) 間之上界.

若僅取 $\epsilon<\frac{\eta}{P}$ 則得

$|S_{m+n}-S_n|<\eta$ 卽 S_n 有一個一定之極限.

10. 若 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots$ 爲在節段 (a,b) 間諸函數之敍列.又 $f(x)$ 對於 x 在 (a,b) 間之一切值,能得下式:

$$|f(x)-f_n(x)|<\epsilon \qquad \epsilon>0$$

此式依 ϵ 之值,而定相當之大數 n,若對於大於 n 之一切值均能成立,則 $\{f_n(x)\}$ 謂之在節段 (a,b) 間齊一收斂於 $f(x)$.

根據此定義,卽得次說:

若諸函數 $\{f_n(x)\}$ 之一敍列,在節段 (a,b) 間均可求黎氏之積分,且在該節段間齊一收斂於有界函數 $f(x)$,則 $f(x)$ 可以求其積分,且得

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

不連續諸點之集合,對於任一函數 $f_n(x)$ 均有零之測度.設 ξ 爲其一點,在該處時一切函數 $f_n(x)$ 均爲連續的.若 h 取甚小之值,又選 n 爲甚大之值,如能得 $|f(x)-f_n(x)|<\in$,則在隣近 $(\xi-h,\ \xi+h)$ 之處,$f_n(x)$ 之振動小於 $\in$.由是 $f(x)$ 在 $(\xi-h,\ \xi+h)$ 間之振動小於 $3\in$.蓋 $\in$ 爲任意選擇者,ξ 爲 $f(x)$ 之一連續點,而 $f(x)$ 僅能爲包含爲零諸點集合中之不連續.是以可求黎氏之積分.且得

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b f_n(x)\,dx\right|<\in(b-a)$$

於此 $\in$ 爲任意之值時,則

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx)$$

第七章　積分學之基本定理.

此定理卽謂微分與積分通常互爲反運算者也.

玆先證明次之定理:

若 $f(x)$ 爲一個有界函數,在節段 (a,b) 間可求黎氏之積分,則 $\int_a^b f(x)\,dx$ 對於其全節段爲 x 之一個連續函數,且在該節段間,爲一個有限變化之函數.又此函數,亦爲絕對連續的.

設 $F(x)$ 表示在 (a,b) 間之一點之 $\int_a^b f(x)\,dx$ 之值,則得

$$F(x\pm h)-F(x)=\int_x^{x\pm h} f(x)\,dx$$

又

$$|F(x\pm h)-F(x)|\leqq P\cdot h$$

式中之 P 爲 $f(x)$ 在 (a,b) 間之上界.若 $\in$ 爲一個任意選擇之正數,且取 $h_1<\frac{\in}{P}$,則對於 $h<h_1$ 之一切值,可得

$$|F(x\pm h)-F(x)|<\epsilon$$

此卽 $F(x)$ 在 x 處連續之條件.若 x 爲 a 或爲 b,則 h 必僅限於正數,或僅限於負數.

今設 (a, b) 以諸點 $a, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, b$ 分爲 n 個小節段,則 $F(x)$ 在此等小節段之端點,諸值之絕對差數之和爲

$$\left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right|+\cdots+\left|\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx\right|$$
$$\leqq\int_a^b |f(x)|\,dx$$

卽其和小於一固定之正數.又 $F(x)$ 在 (a, b) 間之完全變化爲有界.故其函數亦有有限之完全振動.

今若 $(a_1b_1), (a_2b_2), (a_3b_3), \cdots, (a_nb_n), \cdots$ 爲在 (a, b) 間之有限個或無限個不相疊置之諸節段,其完全測度爲 η,則得

$$\sum_{r=1}|F(b_r)-F(a_r)|\leqq M\cdot\Sigma(b_r-a_r)<\eta\cdot M$$

式中 M 爲 $|f(x)|$ 在 (a, b) 間之上界.若取 $\eta<\frac{\epsilon}{M}$ 則 $F(x)$ 滿足於絕對連續*之條件.

當 $f(x)$ 在 (a, b) 間可求積分時.則函數 $\int_a^x f(x)\,dx$ 謂之對於 $f(x)$ 爲不定積分.

若 $f(x)$ 爲在 (a, b) 間可求積分之一個函數.又一個函數 $\varphi(x)$,在 (a, b) 中之各點,有一個微係數等於 $f(x)$,則 $\varphi(x)$ 謂爲

*一個函數 $F(x)$ 在 (a,b) 間絕對連續者,謂若吾人選一個數 $\epsilon>0$,於含在 (a, b) 間各個有限之不相疊置諸節段中,可求得他一個數 η,而其全測度 $<\eta$ 也.故得

$$\sum_r|f(b_r)-f(a_r)|<\epsilon$$

$f(x)$之原函數,但此定義可擴充之於 $\varphi'(x)$ 不存在時,或對於特別集合之諸點不等於$f(x)$之時.

若以 $F(x)$ 爲對於$f(x)$之不定積分,則可得次之性質:

A. 若$f(x)$在節段(a, b)間爲連續的.又 $F(x)$ 爲表示整函數$\int_a^x f(x)\,dx$, 則在(a, b)中之各點 $F(x)$ 有一個微係數等於$f(x)$.

因$f(x)$對於(a, b)中任一點 x 爲連續的,則在該節段間可得一小節段$(x-h_1, x+h_1)$, 則函數之振動小於原定之一個正數$\in$.故對於 $h < h_1$ 之諸値,得

$$F(x \pm h) - F(x) = \int_x^{x\pm h} f(x)\,dx$$

及 $h[f(x)-\in] \leqq F(x\pm h) - F(x) \leqq h[f(x)+\in]$

此式可書爲$f(x)-\in \leqq \dfrac{F(x\pm h)-F(x)}{h} \leqq f(x)+\in$

但因

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x\pm h)-F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$$

故得$f(x)$爲 $F(x)$ 在(a, b)間之微係數.

B. 若函數 $\varphi(x)$ 在(a, b)間各點,有一個連續函數$f(x)$爲其微係數.則

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x f(x)dx$$

在實際上,若以 $F(x)$ 表示$\int_a^x f(x)dx$, 則函數$\varphi(x)-F(x)$之微係數必等於零,且在該全節段間爲一個常數.今求此常數之値,可取$x=a$, 則

$$\varphi(x) - F(x)\,|_{x=a} = \varphi(a) - F(a) = \varphi(a)$$

此卽定理之證明也.

此定理亦可如次述之:

一切函數,在節段 (a, b) 間有一個微係數等於 $f(x)$,且若 $f(x)$ 在節段間爲連續的,則彼此相差,僅爲一個常數.

在此兩定理中,對於 $F(x)$ 及 $f(x)$ 均有限制.蓋有時 $F(x)$ 可爲整函數而無有微係數;或 $\varphi(x)$ 雖有微係數,但其微係數實際不能求其積分;又或雖可求積分,但所得者與 $\varphi(x)$ 之差,不僅爲一個常數.

第八章　中值(Mean value)定理

1. 積分之中值第一律.

設 $f(x)$ 爲在節段 (a, b) 間之一個有限函數.

若分 (a, b) 爲諸小節段

$$\delta_1,\quad \delta_2,\quad \delta_3,\quad \cdots,\quad \delta_i,\quad \cdots,\quad \delta_n$$

令 M 及 m 爲函數在該節段之各上下限,則得

$$m\sum_{1}^{i=n}\delta_i \leqq \sum_{1}^{i=n}\delta_i \cdot A(\delta_i) \leqq M\sum_{1}^{i=n}\delta_i$$

達於極限時,則

$$m(b-a) \leqq \int_a^x f(x)\,dx \leqq M(b-a)$$

由是得

$$\int_a^x f(x)\,dx = \mu(b-a)$$

此 μ 爲在 m 及 M 間之某值.

若 $f(x)$ 爲連續函數,則在 m 及 M 間之各值,至少應假定其有一次.故 μ 值必假定爲在 m 及 M 間之 x 之某值.試以下式表之,則

$$\int_a^x f(x)\,dx = f[a-\Theta(b-a)]\cdot(b-a) \qquad \text{式中} \quad o \leqq \Theta \leqq 1$$

今設 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 均爲可求積分之函數,於是在節段 (a, b) 間得 $\varphi(x) \geqq o$.

如前法繼續分之,再若命 m 及 M 爲 $f(x)$ 在 (a, b) 間之各上下限.又若 $\varphi(\xi_i)$ 爲 $\varphi(x)$ 在節段 δ_i 間某點時之值.於是可書爲

$$m\sum_1^n \varphi(\xi_i)\cdot\delta_i \leqq \sum_1^n \delta_i\,\varphi(\xi_i)\cdot A(\delta_i) \leqq M\sum_1^n \varphi(\xi_i)\cdot\delta_i$$

此式達於極限時,變爲

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx \leqq M\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

於是如前得

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx = \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

此式中 $m \leqq \mu \leqq M$

於特別時,若 $f(x)$ 於全節段間爲連續的,μ 爲 $f(x)$ 在 a 與 b 某點時之值.則最後之式可書之如下:

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx = f[a+\Theta(b-a)]\cdot\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

式中 $o \leqq \Theta \leqq 1$

此定理可擴充之.試察函數 $\varphi(x)+c$, 此式中之 c 在 (a, b) 間能得 $\varphi(x)+c \geqq o$,則 $\varphi(x)$ 在全節段 (a,b) 間不盡爲正數時,上之定理亦可用之.

2. 積分之中值第二律

欲成立此種關係,應先證明亞伯爾 (Abel) 之預備定理:

設 $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_p$ 爲一組單調減少之正量.又 $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_p$

爲任意之諸正值或負值.若 A 及 B 各爲下列一切總和之最小值及最大值.

$$s_0 = u_0, \quad s_1 = u_0 + u_1, \quad \cdots, \quad s_p = u_0 + u_1 + \cdots + u_p$$

則總和: $s = \epsilon_0 u_0 + \epsilon_1 u_1 + \epsilon_2 u_2 + \cdots + \epsilon_p u_p$

合於下式 $A \cdot \epsilon_0 \leqq S \leqq B \cdot \epsilon_0$

由上關於 $s_0, s_1, \cdots, s_p$ 之諸式得

$$u_0 = s_0, \quad u_1 = s_1 - u_0 = s_1 - s_0, \quad \cdots, \quad u_p = s_p - s_{p-1}$$

而總和 S 可書爲下式:

$$S = \epsilon_0 s_0 + \epsilon_1 (s_1 - s_0) + \cdots + \epsilon_p (s_p - s_{p-1})$$

或 $S = s_0(\epsilon_0 - \epsilon_1) + s_1(\epsilon_1 - \epsilon_2) + \cdots + s_{p-1}(\epsilon_{p-1} - \epsilon_p) + s_p \epsilon_p$

因諸差數 $\epsilon_{i-1} - \epsilon_i$ 不能爲負數.今以最大值 B 代一切之 S,則得一個上限.又以最小值 A 代各個 s,則得一個下限.於是

$$S \text{ 之上限} = B(\epsilon_0 - \epsilon_1 + \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_2 - \cdots + \epsilon_{p-1} - \epsilon_p + \epsilon_p) = B \cdot \epsilon_0$$

及 s 之下限 $= A(\epsilon_0 - \epsilon_1 + \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_2 - \cdots + \epsilon_{p-1} - \epsilon_p + \epsilon_p) = A \cdot \epsilon_0$

是以 $A \cdot \epsilon_0 \leqq S \leqq B \cdot \epsilon_0$

玆得一個公式,表示積分之中值第二律,爲波內 (Bonnet) 所示者如次:

設 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 爲在節段 (a, b) 間之二個連續函數.但除 $\varphi(x) \geqq 0$ 在外,又在該節段間爲單調減少,則得

$$\int_a^x f(x) \cdot \varphi(x)\, dx = \lim \sum_1^n f(x_{i-1}) \cdot \varphi(x_{i-1}) \cdot \delta_i$$

諸數 $\varphi(a), \varphi(x_1), \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_{i-1}), \cdots$ 作成一組之單調減少值.適

如亞伯爾預備定理之諸 $\in$,故 $\Sigma f(x_{i-1})\cdot\varphi(x_{i-1})\delta_i$ 之值必在 $A\varphi(a)$ 與 $B\varphi(a)$ 之間.此式中之 A 及 B,各爲下列諸總和之最小值及最大值.

$$f(a)\cdot\delta_1$$

$$f(a)\cdot\delta_1+f(x_1)\cdot\delta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(a)\cdot\delta_1+f(x_1)\cdot\delta_2+f(x_2)\delta_3+\cdots+f(x_{n-1})\cdot\delta_n$$

若達於極限時,則 $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$ 必在 $A_1\cdot\varphi(a)$ 及 $B_1\cdot\varphi(a)$ 之間.此 A_1 及 B_1 當 x 變化自 a 至 b 時,各爲 $\int_a^x f(x)\,dx$ 之最小值及最大值.蓋因

$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)$$

此 $F(x)$ 爲 x 之一個連續函數.故可書

$$\int_a^x f(x)\cdot\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx \qquad \text{式中}\quad a\leqq\xi\leqq b$$

若 $\varphi(x)$ 在全節段間不爲正數,則可令 $\varphi(x)=\varphi(b)+\psi(x)$. 但 $\psi(x)$ 必爲正數,故可書

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi dx=[\varphi(a)-\varphi(b)]\int_a^\xi f(x)\,dx$$

若 $\varphi(x)$ 爲單調增加,則公式變爲

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx=\varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx \qquad \text{式中}\ a\leqq\xi\leqq b$$

又有更普通之式,爲杜波伊累夢 (Du Bois-Reymond) 及威士特司 (Weierstrass) 所研究者.可由波內之式得來.蓋代 $f(x)$ 之式使成他式,但代入時,因其函數爲單調減少或單調增加之不同,遂成爲 $f(x)-f(b)$ 或 $f(x)-f(a)$ 之形.故得

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

第九章　黎氏積分法之幾何解釋

設$f(x)$爲在節段(a,b)間之一個函數,在該節段間,恆得$f(x)\geqq o$,則此函數可視爲在二次空間一切之點,其坐標爲x與y,且滿足於下式諸點(x,y)之集合也.

$$a\leqq x\leqq b\quad 及\quad o\leqq y\leqq f(x)$$

此二次空間諸點集合之範圍,可視爲面積之擴大記法.設其範圍之界限,爲x軸與兩直線$x=a, x=b$及曲線$y=f(x)$.於此可云此空間之外範圍(Exterior extent)及內範圍(Interior extent),各等於二次空間諸點集合之外面積及內面積.若此諸點之集合,當其外面積與內面積相等時,則面積之意義與尋常同.在此時,函數$f(x)$謂之可以求其積.

試取一個基本矩形之平面集合,於其內有一組閉合網眼(Meshes)之網結(Nets)$\{D_n\}$,適在矩形之上,與成線狀之諸小節段相似,若在(a,b)中以$\{D_n\}$之諸網眼之界限,分之爲小節段δ_i.今設在網眼中各點,均在G之中,(卽諸點之上集合)則諸網眼之測度之總和爲$\Sigma\delta_i\cdot L(\delta_i)+\eta_i$.此$\eta_i$之值當$n$增加至無限大時,收斂於零.同樣諸網眼至少含有平面集合G之一點者之總和爲$\Sigma\delta_i\bullet U(\delta_i)+\varrho_i$.此$\varrho_i$之值當$n$增加至無限大時,漸近於零.

由此證明G之外包含及內包含各如下式,卽

若$\int_a^b f(x)\,dx$　成立時,亦卽若$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx$時,

則其外包含及內包含之測度各爲

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx \qquad 及 \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx$$

G 之集合爲可測度者.而 $\int_a^b f(x)\,dx$ 爲以下列諸線爲界所作成之面積之值.

$$x=a, \quad x=b, \quad y=y, \quad y=f(x)$$

於此亦可謂 G 之集合可以測度之條件,爲 G 之邊界必有平面測度爲零,此卽等於 $f(x)$ 不連續點之集合有零包含之條件也.

以上係假定在節段 (a, b) 間 $f(x)$ 恆 $\geqq o$.但此限制,可以取消.蓋若不然,可書之爲

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)$$

在上式中當 $f(x) \geqq o$ 時, $f_1(x)=f(x)$. 又 $f(x)<o$ 時, $f_1(x)=o$.

當 $f(x)<o$ 時, $f_2(x)=f(x)$. 又 $f(x) \geqq o$ 時, $f_2(x)=o$.

再若此諸點之二集合各合於下式:

$$a \leqq x \leqq b, \quad o \leqq y \leqq f_1(x) \quad 及 \quad a \leqq x \leqq b, \quad o \leqq y \leqq f_2(x)$$

則依上之意義均可測度.而 $\int_a^b f(x)\,dx$ 爲第一集合之測度超過於第二集合者之餘體.換言之,在 x 軸上面積之部分超過於在 x 軸下者也.

參攷書

Borel: Théorie des Fonctions.

Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen.

Dini: Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse.

Dini: Fondamenti per la Theoria delle Funzioni di Variabili Reali.

Hobson: Functions of a Real Variable.

Jordan: Cours d'Analyse. (V. 1)

La Vallée-Poussin: Cours d'Analyse Infinitésimale. (V. 2)

Lebesgue: L'Intégration.

Tannery: Theorie des Fonctions. (V. 2)

Townsend: Functions of Real Variables.

普遍相對性之重要公式

鄭亞余

讀相對論,輒見引用次式以示普遍相對論之性質.

$$ds^2 = -\frac{1}{1-\frac{2m}{\varrho}}d\varrho^2 - \varrho^2 d\Theta^2 - \varrho^2 \sin^2\Theta d\varphi^2 + \left(1-\frac{2m}{\varrho}\right)dt^2$$

茲不揣謭陋,解釋此式成立之理由,以作初學者之參考.

(1)　由　$B^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} = o \qquad \gamma = \delta = \lambda$

則　$G_{\alpha\beta} = \left\{\begin{matrix}\alpha\lambda\\ \iota\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\iota\beta\\ \lambda\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \iota\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\iota\lambda\\ \lambda\end{matrix}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{\begin{matrix}\alpha\lambda\\ \lambda\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{matrix}\right\}$

$$= o$$

然　$\left\{\begin{matrix}\alpha\lambda\\ \lambda\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\kappa\alpha}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_\kappa}\right)$

$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}\frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x_\kappa} - \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_\kappa}$$

$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}\frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x_\alpha}$$

又　$g = g_{11} g g^{11} + g_{21} g g^{21} + g_{31} g g^{31} + g_{41} g g^{41}$

$$\frac{\partial g}{\partial g_{11}} = g g^{11} + o + o + o$$

$$\frac{\partial g}{\partial g_{21}} = o + g g^{21} + o + o$$

....

....

總之　$\frac{\partial g}{\partial g_{\lambda\kappa}} = g g^{\lambda\kappa}$

即　$g^{\lambda\kappa}\,\partial g_{\lambda\kappa} = \frac{\partial g}{g} = \partial \log g$

故　$\frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}\frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\log\sqrt{g}$

是以　$\left\{ {\alpha\lambda \atop \lambda} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\log\sqrt{g}$

然則　$$G_{\alpha\beta} = \left\{ {\alpha\lambda \atop \iota} \right\}\left\{ {\iota\beta \atop \lambda} \right\} - \left\{ {\alpha\beta \atop \iota} \right\}\frac{\partial}{\partial x_\iota}\log\sqrt{g} + \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}\log\sqrt{g} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{ {\alpha\beta \atop \lambda} \right\}$$

設將上式中 α 與 β 之位置變換

則為　$$G_{\beta\alpha} = \left\{ {\beta\lambda \atop \iota} \right\}\left\{ {\iota\alpha \atop \lambda} \right\} - \left\{ {\beta\alpha \atop \iota} \right\}\frac{\partial}{\partial x_\iota}\log\sqrt{g} + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\log\sqrt{g} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{ {\beta\alpha \atop \lambda} \right\}$$

又於　$$\left\{ {\alpha\lambda \atop \iota} \right\}\left\{ {\iota\beta \atop \lambda} \right\} = \left\{ {\iota\beta \atop \lambda} \right\}\left\{ {\alpha\lambda \atop \iota} \right\}$$　（又以 ι 與 λ 互換）

$$= \left\{ {\lambda\beta \atop \iota} \right\}\left\{ {\alpha\iota \atop \lambda} \right\}$$

$$= \left\{ {\beta\lambda \atop \iota} \right\}\left\{ {\iota\alpha \atop \iota} \right\}$$

故知　$G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$

然則 $G_{\alpha\beta}$ 羣中,縱有 4^2 組,而不相同者,

只為　$4+(4^2-4)\div 2=10$ 組

若令　$\alpha=\beta$　則 $G_{\alpha\alpha}$ 可代表獨特之四組.（斯處一代表項中雖有同樣之二 α,然非就 α 展開者.）

$$G_{\alpha\alpha}=\left\{{\alpha\lambda \atop \iota}\right\}\left\{{\iota\alpha \atop \lambda}\right\}-\left\{{\alpha\alpha \atop \iota}\right\}\frac{\partial}{\partial x_\iota}\log\sqrt{g}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2_\alpha}\log\sqrt{g}-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{{\alpha\alpha \atop \lambda}\right\}$$

$$=o$$

(2) 四度空間之距離

$$ds^2=g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu$$

令 σ,τ 僅代表1, 2, 3之三數字

則 $$ds^2=g_{\sigma\tau}\,dx_\sigma\,dx_\tau+g_{4\sigma}\,dx_4\,dx_\sigma+g_{\tau4}\,dx_\tau\,dx_4+g_{44}\,dx^2_4$$

物理空間之四軸,其一爲時間軸.故上式採取下列之四條件,以應用於普遍相對性.

壹 所有 $g_{\sigma\tau}$ 不包含時間 (t) 在內,卽與 x_4 無關.

貳 時間軸 X_4 可於四度空間與各立體軸互相垂直.

同系統內表示立體之各軸與時間軸各自獨立.

故 $g_{4\sigma}\,dx_4\,dx_\sigma=g_{\tau4}\,dx_\tau\,dx_4=o$

叁 旣知 $g_{\sigma\tau}\,dx_\sigma\,dx_\tau$ 爲立體中之距離其三軸互相垂直.

故以 $g_{\tau\sigma}\,dx_\sigma\,dx_\tau=g_{\tau\sigma}\,dx_\tau\,dx_\tau\,dx_\sigma=o$ 〔$\sigma\neq\tau$〕

而得 $g_{\sigma\sigma}\,dx^2_\sigma$ 以示立體中之距離.其合於 Pythagoras 定理更無具論.

然則 $ds^2=g_{\sigma\sigma}\,dx^2_\sigma+g_{44}\,dx^2_4$

肆 設以太陽爲座標之原點.則距太陽無限遠者,可無引力關係存其間.是應同於特別相對律之 Minkowski's 四度空間也.

其時應得　$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2$

$$g_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

倘將立體各量換成極座標

則　$ds^2 = -d\varrho^2 - \varrho^2 d\Theta^2 - \varrho^2 \sin^2\Theta\, d\varphi^2 + dt^2$

而以 X_1 表示變量 ϱ，X_2 表示變量 Θ，X_3 表示變量 Φ.

$$g_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varrho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho^2\sin^2\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

今取普遍形式亦將立體各量換成極座標.

$$ds^2 = g_{11}\,d\varrho^2 + g_{22}\,d\Theta^2 + g_{33}\,d\varphi^2 + g_{44}\,dt^2$$

可知 g_{22} 中有 ϱ^2，　g_{33} 中有 $\varrho^2\sin^2\Theta$.

但 x, y, z 對於太陽中心皆爲對稱.今惟令引力同於 X_1 軸之方向則

$$g_{22} = g\,\varrho^2, \qquad g_{33} = g\,\varrho^2\sin^2\Theta$$

由此又可知 g_{11} 與 g_{44} 皆有 ϱ 之關係.是卽 $g_{11}, g_{22}, g_{33}\ g_{44}$ 皆爲 ϱ 之函數也.且知無論爲何種函數,可表之如次

$$g_{\mu\mu} = e^x$$

以　$\log g_{\mu\mu} = x$

設能決定 x,必可得 $g_{\mu\mu}$ 之值.

但欲令 $g_{\sigma\sigma}$ 於太陽無限遠時,適合於 Minkowski's 四度空間,宜為負數.

故令 $g_{11} = -e^{a}$　　$g_{22} = -e^{b}\varrho^2$

$g_{33} = -e^{b}\varrho^2\sin^2\Theta$　　$g_{44} = e^{c}$

然則 a, b, c 各皆為 ϱ 之函數

又以 $g = -e^{b}$

於簡單情形可令 $b = o$

於某相當時期亦可假定

$$a = b$$

既令 $ds^2 = -e^{a}d\varrho^2 - e^{b}\varrho^2 d\Theta^2 - e^{b}\varrho^2\sin^2\Theta\, d\varphi^2 + e^{c}dt^2$

故

$$g = \begin{vmatrix} -e^{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{b}\varrho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{b}\varrho^2\sin^2\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{c} \end{vmatrix}$$

$$= -\varrho^4\sin^2\Theta\, e^{a+2b+c}$$

有時亦可假定 $a + 2b + c = o$

以得簡單之 $g = -\varrho^4\sin^2\Theta$

取以上三假定之一可作 $g_{\sigma\sigma}, g_{44}$ 求解之助.

(3) 安斯坦曾取 $b = o$ 以計算 a, c.因得各式如次.式中 a', b', c' 各表示 a, b, c 之一次微分係數,a'', b'', c'' 各表示 a, b, c 之二次微分係數.

$\therefore \qquad g_{22} = -\varrho^2 \qquad g_{33} = -\varrho^2 \sin^2\Theta$

$$b' = o, \qquad b'' = o.$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial(-e^a)}{\partial \varrho} = -e^a a'$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} = \frac{\partial(-\varrho^2)}{\partial \varrho} = -2\varrho$$

$$\frac{\varrho g_{33}}{\partial x_1} = \frac{\partial(-\varrho^2 \sin^2\Theta)}{\partial \varrho} = -2\varrho \sin^2\Theta$$

$$\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} = \frac{\partial(e^c)}{\partial \varrho} = e^c c'$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial(-e^a)}{\partial \Theta} = o$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x_3} = \frac{\partial(-\varrho^2)}{\partial \Theta} = o$$

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial x_2} = \frac{\partial(-\varrho^2 \sin^2\Theta)}{\partial \Theta} = -2\varrho^2 \sin\Theta\cos\Theta$$

$$\frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} = \frac{\partial(e^c)}{\partial \Theta} = o$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x_3} = \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \varphi} = o$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x_4} = \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial t} = o$$

以上各式依「引力等值」之理可適用於

故於 $\quad B^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} = G_{\alpha\beta} = o \qquad [\gamma = \delta]$

$$\left\{ {\alpha\beta \atop \gamma} \right\} = g^{\gamma\iota} \left[{\alpha\beta \atop \iota} \right]$$

由 $\quad g_{4\sigma} = g_{\tau 4} = o \qquad g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma} = o \qquad (\sigma \neq \tau)$

得 $\quad g_{\gamma\iota} = o \qquad (\gamma \neq \iota)$

又令 $\gamma = \iota$ 則 $g_{\gamma\gamma} g^{\gamma\gamma} \neq o$

蓋於 $g_{\gamma\gamma}\ g^{\gamma\gamma}=1$ $g_{\gamma\gamma}\neq o$ $\therefore g^{\gamma\gamma}=\frac{1}{g_{\gamma\gamma}}$

故 $\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\}=g^{\gamma\gamma}\left[\begin{matrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{matrix}\right]$

$$=g^{\gamma\gamma}\times\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\right)$$

$$=\frac{1}{2g_{\gamma\gamma}}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\right)$$

但 $\alpha\neq\beta$ $g_{\alpha\beta}=o$ $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}=o$

若 $\beta\neq\gamma$ $g_{\beta\gamma}=o$ $\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}=o$

又 $\gamma\neq\alpha$ $g_{\gamma\alpha}=o$ $\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}=o$

$\therefore$ $\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2g_{\gamma\gamma}}\times o$ $(\alpha\neq\beta\neq\gamma)$

故取 $\alpha=\beta$ $\beta\neq\gamma$

得 $\left\{\begin{matrix}\alpha\alpha\\ \gamma\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2g_{\gamma\gamma}}\left(-\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x_\gamma}\right)=-\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{2g_{\gamma\gamma}\partial x_\gamma}$

若 $\alpha=\gamma$ $\beta\neq\gamma$

則 $\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \alpha\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\beta\alpha\\ \alpha\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2g_{\alpha\alpha}}\left(\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x_\beta}\right)$

$$=\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{2g_{\alpha\alpha}\partial x_\beta}$$

若令 $\alpha=\beta=\gamma$

則 $\left\{\begin{matrix}\alpha\alpha\\ \alpha\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2g_{\alpha\alpha}}\left(\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x_\alpha}\right)=\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{2g_{\alpha\alpha}\partial x_\alpha}$

今知　$\left\{ {\alpha\alpha \atop \alpha} \right\}$所代表者爲

$$\left\{ {11 \atop 1} \right\}=\frac{\partial g_{11}}{2g_{11}\partial x_1}=\frac{-e^{a}a'}{2(-e^{a})}=\frac{a}{2}$$

$$\left\{ {22 \atop 2} \right\}=\left\{ {33 \atop 3} \right\}=\left\{ {44 \atop 4} \right\}=o$$

而　$\left\{ {\alpha\alpha \atop \gamma} \right\}$所代表者爲$(\alpha \neq \gamma)$

$$\left\{ {22 \atop 1} \right\}=-\frac{\partial g_{22}}{2g_{11}\partial x_1}=-\frac{-2\varrho}{2(-e^{a})}=-\frac{\varrho}{e^{a}}$$

$$\left\{ {33 \atop 1} \right\}=-\frac{\partial g_{33}}{2g_{11}\partial x_1}=-\frac{-2\varrho\sin^2\Theta}{2(-e^{a})}=-\frac{\varrho\sin^2\Theta}{e^{a}}$$

$$\left\{ {44 \atop 1} \right\}=-\frac{\partial g_{44}}{2g_{11}\partial x_1}=-\frac{e^{c}c'}{2(-e^{a})}=\frac{e^{c}c'}{2e^{a}}$$

$$\left\{ {11 \atop 2} \right\}=\left\{ {44 \atop 2} \right\}=o$$

$$\left\{ {33 \atop 2} \right\}=-\frac{\partial g_{33}}{2g_{22}\partial x_2}=-\frac{-2\varrho^2\sin\Theta\cos\Theta}{2(-\varrho^2)}=-\sin\Theta\cos\Theta$$

$$\left\{ {\alpha\alpha \atop 3} \right\}=\left\{ {\alpha\alpha \atop 4} \right\}=o$$

又$\left\{ {\alpha\beta \atop \alpha} \right\}=\left\{ {\beta\alpha \atop \alpha} \right\}$所代表者爲$(\alpha \neq \beta)$

$$\left\{ {21 \atop 2} \right\}=\frac{\partial g_{22}}{2g_{22}\partial x_1}=\frac{-2\varrho}{2(-\varrho^2)}=\frac{1}{\varrho}$$

$$\left\{ {31 \atop 3} \right\}=\frac{\partial g_{33}}{2g_{33}\partial x_1}=\frac{-2\varrho\sin^2\Theta}{2(-\varrho^2\sin^2\Theta)}=\frac{1}{\varrho}$$

$$\left\{ {41 \atop 4} \right\}=\frac{\partial g_{44}}{2g_{44}\partial x_1}=\frac{e^{c}c'}{2e^{c}}=\frac{c'}{2}$$

$$\left\{ {12 \atop 1} \right\}=\left\{ {42 \atop 4} \right\}=o$$

$$\left\{ {32 \atop 3} \right\}=\frac{\partial g_{33}}{2g_{33}\partial x_2}=\frac{-2\varrho^2\sin\Theta\cos\Theta}{2(-\varrho^2\sin^2\Theta)}=\cot\Theta$$

$$\left\{ {13 \atop 1} \right\}=\left\{ {23 \atop 2} \right\}=\left\{ {43 \atop 3} \right\}=o$$

$$\left\{ {14 \atop 1} \right\} = \left\{ {24 \atop 2} \right\} = \left\{ {34 \atop 3} \right\} = o$$

(4) 將以上各式代入 $G_{\alpha\alpha}$ 仍俱成立

故於 $$G_{\alpha\alpha} = \left\{ {\alpha\lambda \atop \iota} \right\} \left\{ {\iota\alpha \atop \lambda} \right\} - \left\{ {\alpha\alpha \atop \iota} \right\} \frac{\partial}{\partial x_\iota} \log\sqrt{g}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2_\alpha} \log\sqrt{g} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left\{ {\alpha\alpha \atop \lambda} \right\} = o$$

若 $\alpha = 1$

則 $$G_{11} = \left\{ {1\lambda \atop \iota} \right\} \left\{ {\iota 1 \atop \lambda} \right\} - \left\{ {11 \atop \iota} \right\} \frac{\partial}{\partial x_\iota} \log\sqrt{g}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2_1} \log\sqrt{g} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left\{ {11 \atop \lambda} \right\} = o$$

展開 $$G_{11} = \left\{ {11 \atop 1} \right\}^2 + \left\{ {12 \atop 2} \right\}^2 + \left\{ {13 \atop 3} \right\}^2 + \left\{ {14 \atop 4} \right\}^2 - \left\{ {11 \atop 1} \right\} \frac{\partial}{\partial x_1} \log\sqrt{g}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log\sqrt{g} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ {11 \atop 1} \right\} = o$$

而 $$\frac{\partial}{\partial x_1} \log\sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\varrho}$$

$$= \frac{i\varrho\sin\Theta e^{\frac{a}{2}+\frac{c}{2}}}{i\varrho^2\sin\Theta e^{\frac{a}{2}+\frac{c}{2}}} \left(\frac{a'+c'}{2}\varrho + 2 \right)$$

$$= \frac{a'+c'}{2} + \frac{2}{\varrho}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log\sqrt{g} = \frac{\partial}{\partial\varrho} \left(\frac{a'+c'}{2} + \frac{2}{\varrho} \right)$$

$$= \frac{a''+c''}{2} - \frac{2}{\varrho^2}$$

故 $$G_{11} = \frac{a'^2}{4} + \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} + \frac{c'^2}{4} - \frac{a'}{2} \left(\frac{a'+c'}{2} + \frac{2}{\varrho} \right)$$

$$+ \left(\frac{a''+c''}{2} - \frac{2}{\varrho^2} \right) - \frac{a''}{2}$$

$$=\frac{c'^2}{4}-\frac{a'c'}{4}-\frac{a'}{\varrho}+\frac{c''}{2}$$

$$=o$$

又若 $\alpha=2$

$$G_{22}=\left\{\begin{matrix}2\lambda\\ \iota\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\iota 2\\ \lambda\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}22\\ \iota\end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x_\iota}\log\sqrt{g}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\log\sqrt{g}-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{\begin{matrix}22\\ \lambda\end{matrix}\right\}=o$$

展開　$$G_{22}=\left\{\begin{matrix}21\\ 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\ 1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}22\\ 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\ 2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}23\\ 3\end{matrix}\right\}^2-\left\{\begin{matrix}22\\ 1\end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x_1}\log\sqrt{g}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\log\sqrt{g}-\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\begin{matrix}22\\ 1\end{matrix}\right\}=o$$

而　$$\frac{\partial}{\partial x_2}\log\sqrt{g}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\Theta}$$

$$=\frac{i\varrho^2\cos\Theta e^{\frac{a}{2}+\frac{c}{2}}}{i\varrho^2\sin^2\Theta e^{\frac{a}{2}+\frac{c}{2}}}$$

$$=\cot\Theta$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\log\sqrt{g}=\frac{\partial}{\partial\Theta}\cot\Theta=-\frac{1}{\sin^2\Theta}$$

故　$$G_{22}=-\frac{1}{e^a}-\frac{1}{e^a}+\cot^2\Theta+\frac{\varrho}{e^a}\left(\frac{a'+c'}{2}+\frac{2}{\varrho}\right)$$

$$-\frac{1}{\sin^2\Theta}-\frac{\partial}{\partial\varrho}\left\{-\frac{\varrho}{e^a}\right\}$$

$$=-1+\frac{1}{e^a}\left\{1+\frac{1}{2}\varrho(c'-a')\right\}=o$$

又若　$\alpha=3$

則　$$G_{33}=\left\{\begin{matrix}3\lambda\\ \iota\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\iota 3\\ \lambda\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}33\\ \iota\end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x_\iota}\log\sqrt{g}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2^2}\log\sqrt{g}-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{\begin{matrix}33\\ \lambda\end{matrix}\right\}=o$$

展開 $$G_{33}=\left\{\begin{matrix}31\\3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}33\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}33\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}13\\3\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}32\\3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}33\\2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}33\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}23\\3\end{matrix}\right\}$$

$$-\left\{\begin{matrix}33\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x_1}\log\sqrt{g}-\left\{\begin{matrix}33\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x_2}\log\sqrt{g}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\log\sqrt{g}-\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\begin{matrix}33\\1\end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\begin{matrix}33\\2\end{matrix}\right\}$$

$$=o$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\log\sqrt{g}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\varphi}=o$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\log\sqrt{g}=o$$

故 $$G_{33}=-\frac{\sin^2\Theta}{e^a}-\frac{\sin^2\Theta}{e^a}-\cos^2\Theta-\cos^2\Theta$$

$$+\frac{\varrho\sin^2\Theta}{e^a}\left(\frac{a'+c'}{2}+\frac{2}{\varrho}\right)+\cos^2\Theta$$

$$+\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\varrho\sin^2\Theta}{e^a}\right)+\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\cos\Theta)$$

$$=-\sin^2\Theta+\frac{\sin^2\Theta}{e^a}\left\{1+\frac{1}{2}\varrho(c'-a')\right\}$$

$$=\sin^2\Theta G_{22}$$

$$=o$$

$\alpha=4$

$$G_{44}=\left\{\begin{matrix}4\lambda\\\iota\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\iota4\\\lambda\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}44\\\iota\end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x_\iota}\log\sqrt{g}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\log\sqrt{g}-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{\begin{matrix}44\\\lambda\end{matrix}\right\}=o$$

展開 $$G_{44}=\left\{\begin{matrix}41\\4\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}44\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}44\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}14\\4\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}44\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x_1}\log\sqrt{g}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\log\sqrt{g}-\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\begin{matrix}44\\1\end{matrix}\right\}=o$$

因 $$\frac{\partial}{\partial x_4}\log\sqrt{g}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}=o$$

故 $\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\log\sqrt{g}=o$

$$\therefore\quad G_{44}=\frac{e^c c'^2}{4e^a}+\frac{e^c c'^2}{4e^a}-\frac{e^c c'}{2e^a}\left(\frac{a'+c'}{2}+\frac{2}{\varrho}\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{e^c c'}{2e^a}\right)$$

$$=-\frac{e^c}{e^a}\left(\frac{c'^2}{4}-\frac{a'c'}{4}+\frac{c'}{\varrho}+\frac{c''}{2}\right)$$

$$=o$$

故取 $G_{11},G_{22},G_{33},G_{44}$ 公同之 a,c 卽得所求之值.

因 $G_{33}=\sin^2\Theta\,G_{22}$

故只取 G_{11},G_{22},G_{44} 三式卽可.

G_{44} 中 $\quad -\frac{e^c}{e^a}\neq o$

故得 (A) $\quad \frac{c'^2}{4}-\frac{a'c'}{4}+\frac{c'}{\varrho}+\frac{c''}{2}=o$

令 G_{11} 爲 $(B$ $\quad \frac{c'^2}{4}-\frac{a'c'}{4}-\frac{a'}{\varrho}+\frac{c''}{2}=o$

令 G_{22} 爲 (C) $\quad -1+\frac{1}{e^a}\left\{1+\frac{\varrho(c'-a')}{2}\right\}=o$

由 $(A),(B)$ 得 $\quad a'=-c'$

就 ϱ 積分 $\quad a=-c+M_o$

M_o 爲積分定數,但就離太陽無限遠處着想,須令其值適合於無引力之情形則於(2)之肆

$$ds^2=-d\varrho^2-\varrho^2 d\Theta^2-\varrho^2\sin^2\Theta\, d\varphi^2+dt^2$$

比較 $\quad ds^2=-e^a d\varrho^2-\varrho^2 d\Theta^2-\varrho^2\sin^2\Theta\, d\varphi^2+e^c dt^2$

得 $\quad e^a=1,\qquad e^c=1$

可知其時 a, c 俱為零.一由此向正,一由此向負.

故 $M_o = o$

由 $a = -c$

得 $a' = -c'$

俱代入 (C) $-1 + e^c\left\{1+\varrho c'\right\} = o$

卽 $e^c + \varrho e^c \frac{dc}{d\varrho} = 1$

$\therefore \frac{d}{d\varrho}(\varrho e^c) = 1$

$\therefore \varrho e^c = \varrho + K$

K 為積分定數.

設 Φ 為引力位勢

$\Phi = \frac{c_o^2}{2} - \frac{c_o^2 m}{\varrho}$

c_o 為光之速度 $c_o^2 m = \gamma M$

γ 為萬有引力定數計 $6 \cdot 7 \times 10^{-8}$dyne

M 為太陽質量計 $1 \cdot 96 \times 10^{33}$ gr.

故 m 為定數

又以 $\Phi = \frac{c_o^2}{2} g_{44} = \frac{c_o^2}{2} e^c$

$\therefore \frac{c_o^2}{2} - \frac{c_o^2 m}{\varrho} = \frac{c_o^2}{2}\left(1 - \frac{2m}{\varrho}\right)$

$\therefore e^c = 1 - \frac{2m}{\varrho}$

$\varrho e^c = \varrho - 2m$

$\therefore K = -2m$

又以 $c=-a$

故 $e^{a}=\dfrac{1}{1-\dfrac{2m}{\varrho}}$

將各式代入 ds^2

$$ds^2=-\frac{1}{1-\dfrac{2m}{\varrho}}d\varrho^2-\varrho^2d\Theta^2-\varrho^2\sin^2\Theta d\varphi^2+\left(1-\frac{2m}{\varrho}\right)dt^2$$

上式中 ϱ,Θ,φ,t 爲表示四度空間之變量. m 爲定數.應用此式,可知物理空間之線分;大異於歐氏四度空間之距離,勿須躑躅矣.

直觀主義與形式主義

(Intuitionism and Formalism.)

Dr. L. E. J. Brower 氏著

君絳 譯

是篇之作,乃討論數學之基礎者也,乞注意焉.在數學基礎討論之範圍中,有相反之學說在,欲明厥發展,則首先非明瞭"科學"之一概念不爲功;蓋數學在人類思想中原來所居之地位,亦係以之爲科學之一部分故耳.

原夫科學云者,乃以現象間因果關聯之自然律而系統的所組織而成者也;換言之,卽以彼無論對個體言或對合體言,其現象之關聯,皆可方便的視之爲同樣的反覆不已者所組織而成;再進言之,則尤以在合體關係中占重要地位之因果關聯所組織而成者也.

科學之足使吾人在自然上之行動有若是偉大之權威者果何由乎?曰,在其有改進不舍之組織,使其中現象之因果關聯愈多,則對彼直接引申爲困難或竟不可能之所要之現象,依因果之關聯,將他種現象與最初者連結,因而得以實現者之可能性爲更大之一事實也.抑吾人在自然中,無論何時何地,恆得以建立秩序者,又安在乎?曰,是蓋由吾人不惟克以使現象之關聯孤立化(卽常能保持此諸現

象與他之足攪亂是者遠離),而並能以自身活動力所致之現象補充之而使其應用性更廣來也.在此後者之現象內,計算測度之結果,遂占若是一重要地位,竟能令由科學所得之自然律之大多數,僅爲論述計算測度之結果間之相互關係者而止,第在此關連中有尙須善爲注意者,則于彼有測度量者之陳述中之自然律,所可知者,不過對彼自然,僅爲達到某程度之近似值之一點耳;但實際自然律其物,一般對于量度工具之力求精巧,亦無所拒避者焉.

對此法則,邃古以來,便有二例外在:卽一方爲實用算術與幾何學;而他方爲剛體力學與天體力學.之二者,于觀測工具所有之改善,皆已峻拒之者矣;但當後者一類常被視爲有偶然性及暫時性而均欲以是種科學降爲近似理論之班時,彼算術與幾何學之定則之精密性,迄于近日,莫不絕對信仰,以爲任何實驗皆不足以亂之者,觀乎數學始爲精密科學之言,其信服之誠,可概見已.

彼信服數學定則之有無懈可擊的精密性者,果因何理由而致此乎?數世紀以來,此點已成爲哲學研究之對象,于此有兩觀點,足區別焉:一爲直觀主義是(大部屬于法國),一爲形式主義是(大部屬于德國).

之二說者,于見解上多數愈趨而愈形對立,第逮近載,則對于以數學法則視之爲自然法則時之精密真實性以爲無復問題之一點,則兩者已趨一致,不過于數學的精密性

之存坐問題,兩者之答有不同耳;在直觀主義者言,以此爲在人類之智力,而于形式主義者之論,則謂爲在紙上也.

在康德 (Kant) 之學說中,吾人可窺見直觀主義之舊面目者矣,今也殆全然蛻化.其言乃以時間空間爲人類理性所固有的概念之二形式.故于康德也,則算術與幾何學之公理,皆爲先天的綜合判斷 (Synthetic a priori judgement),換言之,卽離乎經驗且不能分析的證明之判斷也;因之在經驗世界內,與在抽象界內同,其所以有必然的精密性者,得以是說明之焉.以故對康德言,欲經驗的否證算術與幾何學定則之可能性,不惟爲其堅確之信心所固拒,且視爲全然不可思惟者也.

正反是者,厥爲形式主義觀,是蓋以爲人類理性,若憑其處理,則雖如一直線或十以上數之精確觀念,猶了不可得,因之此類數學的實體,在吾人自然之概念中之存在性,並不多于在自然自身中也.固然,由數學的實體卽所假定爲公理者中之某種種關係,于一種信念之下,以爲依此法則,由論理的推論,可由真理而誘導真理,遂依照定則,而可推得他種種關係,此寧不爲真;但此真理或合法性之非數學的信念,無論如何,皆無精密性之可言,亦不過因是諸關係及諸推論法則投影于自然上之効力之知識所生起之漠然的快感而已.故就形式主義者言,數學之精密性,僅在于關係連串上之發展方法中,而與是諸關係及其所關之實

體上人所欲賦予之意義無與也.以故此徹頭徹尾之形式主義者,以為此諸關係之無意義的連串而為數學所化成者之克有數學的存在性,僅在其表示為語體文字或文言文字而有其發展所憑之數理論理的法則卽彼形成所謂記號論理 (symboli logic) 者時也.且也,因平常之語體文字或文言文字毫不足以滿足符合一致性之要求之故,遂進而需要此記號論理,于是形式主義者在數學上乃舍普通文字而不用,至其果已成就至何地步,則由近世形式主義者之意大利派而得知,其開祖勃阿諾氏, (Peano) 在數學年報 (mathematische Annalen) 上,以記號論理之文字,曾發表其最重要發見之一之關于實微分方程式之積分之存在者;但其結果,則除少數之曾窺此中三昧者能讀外,若不以之譯成普通文字,則不能成為一般的有效者焉.

由此形式主義者之見地,勢必達到一種信念,以為若有另一種記號的公式可代替現所用以表示基礎的數理的關係及數理論理的法則者時,則由此置換的結果所生之快感所謂"合法性的意識" (consciousness of legitimacy) 者雖云缺乏,亦將于其數學之精密性無纖毫損害之處而後止.至研究何故某派記號論理,于投影自然上,較之他派為有效,此乃哲學家或人類學家所有事,而非數學家之業;又吾人何故取信某派記號論理而不及其他,或進之吾人何故棄置彼所謂矛盾派——卽于其中某類命題正者與反者

同樣皆真者[*)]——于不顧,凡此解釋,又爲心理學家之所有事,亦非屬於數學家之業者也.

彼直觀主義者在固執康德學說之際,則由十九世紀中數學之發展,其地位似較形式主義者傾于不利.良以由茲發展,可證一完全理論,能由數學之一領域以移及于他,如射影幾何學將點與直線之職責互易仍保持不變;又論實數的算術之重要部分,雖置于種種複素數之分野 (field) 仍不失爲真;此外則初等幾何學之定理,對于非亞基默特幾何學 (non-archimedian geometry) —— 此卽謂對于每直線線分,則有他之一線分對第一線分言爲無限小者存在之一種幾何學 —— 殆全部皆成立等是也.以是種種之發見而觀,似可見數學的理論,實只其論理的形式爲重要,而對于算術上一問題之確切解答,則亦除所用以運算之數字羣之意義有思惟之必要外,于其實質如何,似亦無較甚之關係焉.

且對于康德之學說,其最厲之打擊,厥爲非歐幾里得幾何學 (non-Euclidean geometry) 之發見,此乃由一組公理所發展而成之一貫的理論,其異于通常之初等幾何學者,僅在將其平行公理以反面者代之之一點.然此何故足爲其打擊歟?蓋因是已證明,凡平常用初等幾何學文字所述之現

*) 參看 Mannowry, "Methodologische und Philosophisches zur Elementarmathematik," pp. 149—154.

象,若以非歐幾里得幾何學文字述之,雖簡潔常較遜,然其有同一的精密性則一故也;是故不但以吾人經驗的空間爲具有初等幾何學性質者爲不可能,卽就對于吾人經驗的空間果何種幾何學將爲近真乎之詢問探求,亦無有意義.固然,彼初等幾何學,對于剛體運動學法則之敍述,因之對于大多數自然現象之敍述,較諸他種幾何學爲優越者矣,然試耐之,將見使運動學用非歐幾里得幾何學以解釋,較歐幾里得者爲易而可能也.*)

雖然,此直觀主義之地位,在玆數學的大發展之時期後,無論如何不利,然以其棄去康德之空間的先天性,而獨固執其時間的先天性之故,又爲所恢復.此新直觀主義,(neo-intuitionism) 見乎生命之剎那流轉,致各部分呈質的差異之觀,然恰當其爲時間所分之際,便卽可以復合,乃以是爲人類智力上之基礎現象,若將其情感成分而抽象之,遂得變而爲數理的思惟之基礎現象,是卽赤裸的"二一性"(two-oneness) 之直觀是也.此二一性之直觀,乃數學之基礎的直觀,不惟可造成一與二之兩數,且以此二一性之元素之一,又視之爲一新的二一性,將此過程反覆重之至于無限,遂得造成一切的有限序數;于是最小無限序數 ω (the smallest infinite ordinal number ω) 因以生焉;終之此數學之基礎的直觀,以其中合者,分者,連續者,分離者皆連合在內之

*) 參看 Pioncaré; La science et l'hypothèse, p. 104

故,因即得引起一次數連續 (linear continnum) 之直觀,即所謂"間" (between) 之直觀是已,但此雖以新單位之插入亦不至于盡,故不得僅視爲諸單位之集合體焉.

職是之故,時間之先天性,不僅足以使算術之諸特質合乎先天的綜合判斷之資格,即對于幾何學者亦復可使如是;且匪特對于初等的二元三元的幾何學如是,即令對非歐幾里得幾何學以及 n 次元的幾何學皆如是也,此何故歟?是蓋自笛卡兒氏 (Descartes) 以後,吾人已習知是種種幾何學,用坐標之計算法,皆得以化成算術故耳.以故自直觀主義現在之觀點言,則凡單位之得以被彼名者之數學的集合,皆可自基礎的直觀發展之,而行之之道,舍將下列兩運算施以有限回而結合之末由.此兩運算爲何?即一爲"造成一有限序數,"二爲"創造彼無限序數 ω"者是.但此所須了解者,在爲後者之目的計,則取任意一先已形成之集合,或先已形成之構造的運算爲單位可是也.因之直觀主義者,僅承認可數集合 (denumerable set) 之存在,換言之,即一種集合,其元素可使與有限序數或無限序數 ω 成一一對應 (one-to-one correspondence) 者之存在;而于此諸集合之組成上,其普通文字或記號文字,除以之作一非數學的補助以資數理的記憶或使相異的各單體以構成此同一的集合外,實無他之作用也.

由是以觀,則直觀主義者,對于數學的理論之精密性,不

得以其能證之爲非矛盾的,+)及得以有限字數定其概念之義*)或因其在人類之關係上不致惹起誤解之實用的確定性+)等之諸保障,而遂曰克以確證之者也.

如前所述,彼形式主義者,欲以在種種記號文字之得以一致發展者之中選擇"真正數學的"(truly-mathematical)文字之事委諸心理學家者矣.但因心理學尚未開始此項工作,于是形式主義,爲不忍其事業淪于荒蕪,不得已——至少爲暫時的——强而劃分一領域爲思以之爲"真正數學"(true mathematics)者,而爲彼目的計,復不得不建立一公理之定系統以及推論之法則焉.在此企圖之已見諸實行者之種種方法中觀之,則大率皆遵從一代表思想.此思想爲何?卽爲一數學的對象物之世界之存在之預想是也.

此世界與思惟之個人無關,且服從古典論理學;而其對象物,又相互間得有"一集合對其元素之關係"(relation of a set to its elements);而對此關係,各公理,由自然有限集合(natural finite sets)之熟習之暗示,卽由之而假定,其最要者如次,卽:

"一集合由其元素而定;"

"凡對每兩個數學的對象物,卽得決定是否其中一個爲

---

*) 參閱 Poincaré 之在 Scientia, No. XXIV, p. 6 中所論.

+) 參閱 Borel 之在 Revue du mois, No. 80, p. 221 中所論.

含在他之中以爲其元素者;"

"對于每一個集合,則有他一集合,其元素即爲元來集合之子集合 (subsets) 者屬之;"

"選擇公理 (the axiom of selection): "一集合,若其分爲子集合時,則至少含有一子集合之僅含第一次諸子集合之每個之一且不多于一之元素者;"

包括公理 (the axiom of inclution): "若對任一數學的對象物,得決定是否某一性質對此爲眞抑不眞時,則有一集合,其所含者即不外乎該性質對之爲眞之對象物者存在;"

組成公理 (the axiom of composition): "凡屬于一'集合之集合' (set of sets) 中所有集合之諸元素又形成一新集合.

在此一組公理之基礎上,形式主義者,第一步即發展其"有限集合" (finite sets) 之理論.原夫集合之稱爲有限者,乃其元素不能與其子集合之一之元素成一一對應者之謂耳,而以一比較複雜之推論,則完全歸納法 (complete induction, 即數學的歸納法) 之原理,可證之爲此類集合之根本性質也.*) 此原理爲何,乃謂一性質,若第一,對凡含一單元素之集合爲眞,第二,其對于任一有限集合之眞實性,係由其對于同集合之減少一單元素者之眞實性而來時,則對于凡有限集合而皆眞是也之原理也,就直觀主義者言,

---

*) 比較 Zermelo, "Sur les ensembles finis et la principe de l'induction compléte," Acta mathematica, 32, pp. 185—193.

則對于有限數時,以其構成之關係,本爲自明,然形式主義者,則非賦予一明顯的證明不可.本諸是,同時卽可知,形式主義者,不能以其理論之非矛盾性之一證明,代替彼訴諸不精密的實習,或訴諸在其視爲同樣不精密之直觀等不充分的援助,而遂以之辨護其公理之選擇爲正當者也.此復云何?良由欲證明一矛盾不至發生于無數結論之出自其所用公理者之中起見,則其首先卽應證明:若在第 n 個結論中未曾有矛盾出現,則于第(n+1)個結論中亦無有能出現者;次之則應直觀的應用完全歸納法.但此最後一步驟,彼形式主義者,雖將有事于完全歸納法之原理之證明,然却不可取;蓋因此將要求數學的確實性之爲第 n 個結論到達以後一組性質所獲得,且對任意之 n,又行能滿足其對于有限集合之定義者故;[+)]而爲得此確實性起見,又不得不爲彼對具體例證之記號的標準之所不能許可的應用是賴,賴之而不足,且須乞助于完全歸納法原理之直觀的應用,是豈非使之陷于不能自圓之循環論證者乎?故云云耳.

在有限集合之範圍內,形式主義的公理,乃有解釋,爲直觀主義者所可明白而又無保留的爲其所一致者,故此時兩派別之相違,僅在其方法,而不在其結果;但在無限或超限集合 (infinite or transfinite sets) 之領域中,則大殊其趣.斯時

+) 參照 Poincaré, Revue de metaphisque et de morales 1905, p. 834.

也,大都由上述之包括公理之應用,形式主義者,遂得多數之概念,如"元素爲空間之點之集合,""元素爲一變數之連續函數之集合,""元素爲一變數之不連續函數之集合"等等者是.凡此種種,自直觀主義者言,直全然無意義者,故在此形式主義的發展之徑路中,以包括公理之長此應用,必至無可避免的達到矛盾而後止.此事實之一明白的敘述,則彼所謂布羅里——忽爾第氏 (Burali-Forti) 之奇論 (paradox)*),可得而提供焉.爲明示此起見,應述若干定義如次.

一集合,若其任兩元素間有"高于"(higher than) 或"低于"(lower than) 之一關係存在,卽若一元素 a 高于元素 b,則元素 b 低于元素 a,復若元素 b 高于 a,而 c 又高于 b,則 c 高于 a 時,則名曰排列集合 (ordered set).

一排列集合,若其每個子集合,皆含有一元素較其他一切元素爲低者時,則名曰整列集合(well-ordered set)(自形式主義的意義言.)

兩個整列集合,在保持其"高于"及"低于"之關係不變而使成一一對應時,則謂之曰有同一之序數.

若兩序數 A 與 B 不相等,則其一較其他大,如云 A 之大于 B 然;是卽謂 B 在保持"高于"及"低于"之關係不變而克與 A 之首段 (initial segment) 成一一對應者也.

*) 參閱 Rendicorti del circolo matematics di Palermo, 1897.

自直觀主義者之見地言,吾人已於前介紹最小無限序數 ω,換言之,卽所有有限序數依其量之次序所排列之集合之序數者矣.*) 彼整列集合之有序數 ω 者,爰名曰根本系列 (elementary series) 焉.

任意一整列集合之子集合,仍爲一整列集合,其序數或小或等于原集合,彼形式主義者不難證也;故若對于一整列集合之不含所有一切之數學的對象物者,加一高于原集合之一切元素之一新元素,則一新集合其序數大于第一集合者生焉,此亦爲形式主義者所易得而證之者也.

今試在包括公理之基礎上,善爲構成一集合 S,其元素卽爲所有一切序數之依其量之次序所排列而成者;則吾人不難,一方面證明 S 爲一整列集合,其序數,在量上言,不爲他任何序數所超過;他方面,以所有數學的對象物不盡爲序數之故,復可證若加一新元素于 S,便能造成一序數較 S 之序數爲大者,是豈非一矛盾乎?此卽上述之奇論是已.+)

*) 直觀主義者之更一般之序數,乃用康脫爾氏 (Cantor) 兩產生原理 (principles of generation) 所構成,參閱 mathematische Annalen, Vol. 49, p. 226 可也.

+) 有時布羅里一忽爾第氏之奇論,又被稱曰利迦德氏 (Richard) 氏之奇論,實爲不當.玆將利迦德氏之奇論,以較簡化之形式述之如下:

"一最小整數不能以至多二十字之文句而定義者,果存在乎? (Does there exist *a least integer, that can not be defined by a sentence of at most twenty words?*)

一方可應曰然,因至多不過二十字之文句,其數爲有限,乃甚明故;

雖然,彼形式主義者,若欲貫徹其主張,自非承認矛盾的結果為數學的不可;但對于奇論如布羅里一忽爾第氏者流,則又不能予以同意,蓋因其議論之進展,同時却又為矛盾原理 (principium contradictionis) 所指導,卽拒絕兩矛盾性質同時為真者故也.

職是之故,彼包括公理,遂已略事變更,有如次述,卽謂:"若對于一集合之所有元素,某一性質得決定其是否為真抑不真時,則該集合便得含一個子集合,其所含之元素,除此某性質對之得成立者外,再無有其他者.[++]"

在此形式下,其公理所許得以輸入之集合,僅為先已輸入之集合之子集合而止;若欲有事于他種集合,便非明顯的假定其存在不可.雖然,欲其說之完成,則開宗明義須假定某一羣之集合之存在者矣.故欲拒絕一新集合之輸入,其正當之議論,只在指摘其將陷入矛盾一點,實則在形式主義之實用上,由奇論之發見所得來之修正變更,亦惟在棄去其足以惹起是種奇論之集合而已耳.雖則如是,然仍

但他方亦可應曰否,因若存在,便得以一十五字之文句由上括弧內有下橫之諸字所構成者定厥義也."

此奇論之根源,並不在于包括公理之中,乃在于上括弧內下橫文句中"定義" (defined) 一字之種種意義而來者也;究其實,由此文句實陸續的克以定無限多個之整數之義.

++) 參看 Zermels, mathema sche Annulen, Vol. 65, p. 263.

有將根據舊包括公理上所輸入之他種集合無躊躇的繼續用之而不窮者;此其結果,則爲在此擴大者之研究分野中,直觀主義者,雖視之毫無意義,而形式主義者,仍覺其有極大興趣在也.至此之實例,則于濃度之理論 (theory of potency or power) 上可得而見,且以其足以明白說明此兩方分離處之一不可侵越之疆界,爰于此約略述其梗概焉.

兩集合,若其元素能使成一對一之對應時,則名曰有同一的濃度.若有兩集合 A 與 B,使于 B 及 A 之一部分間能建立一一一對應,而 A 與 B 之一部分間則否時,則曰集合 A 之濃度大于 B 之濃度,B 之濃度小于 A 之濃度.一集合之濃度,若與其一子集合之濃度相等時,則名曰無限,其他之濃度,均名曰有限.凡集合,若其濃度與序數 ω 者同一時,則名曰可數無限 (denumerably infinite),而其濃度則名曰阿勒夫零 (Alef-null):此則已證明其爲最小無限濃度者也.由上所述,此濃度阿勒夫零,乃唯一的爲直觀主義者所承認之無限濃度焉.

今試就"可數無限序數" (denumerably infinite ordinal number) 之概念一討論之.此概念,對于形式主義者及直觀主義者兩方面,皆爲有一明晰而復定義恰當之意義在,由此事實,故形式主義者,遂推知得以有造成一"一切可數無限序數之集合"之權利.此集合之濃度,彼名曰阿勒夫一 (alef-one) 焉,但此權利,却爲直觀主義者所不許.蓋第一,因

可數無限序數之可數無限集合之形成方法有多種;第二,則對是種每個之集合,均可賦與一可數無限序數之不屬于此集合者;于是形式主義者所可得之“阿勒夫一大于阿勒夫零”之結論,乃直觀主義者所認爲毫無意義之一命題:凡玆所論,是能使形式主義者與直觀主義者兩方均得以滿足者也.不僅此也,欲構成*)一可數無限序數之集合,而又克證其有一小于阿勒夫一但大于阿勒夫零之濃度者乃不可能,于是形式主義者遂得結論曰:“阿勒夫一者,乃第二個之最小無限序數也,”之命題也,自直觀主義者觀之,又係無意義者耳,是豈非足以使形式主義者暨直觀主義者兩方復稱滿足者耶?由是,上之言,信矣.

今請再討論“0與1間之實數”之一概念.此概念,自形式主義者言,直與謂“在小數點以下的數字之根本系列”者同等;+)而自直觀主義者言,則又爲“以有限個運算構成小數點後的數字之根本系列之法則”之意.于是當形式主義者造成一“介乎0與1間之一切實數之集合”時,則凡此諸語,無論其所指者,爲由自由選擇得來之數字之根本系列所決定之形式主義者的實數,或爲由有限個構成法則所決定之直觀主義者的實數,然對于直觀主義者,實

*)若不曰“構成”而以“定…義”(形式主義的意義)替代之,則此證明,便不能爲直觀主義者所可滿足,蓋在 mathematische Annalen, Vol. 49 中康脫爾氏之論證內,若欲以“必有”(muss es geben)代替“能定”(können wir bestimme)(p. 24 從上數第17行)乃所不許故也.

毫無意義之可言也.此何故歟?蓋第一,因介在 0 與 1 間之實數之可數無限集合,可以種種方法構成之;第二,則對于此各集合,皆能賦與一不屬於其集合之 0 與 1 間之實數,于是形式主義者結論之也曰:"數連續之濃度,換言之,即 0 與 1 間的實數之集合之濃度者,乃大于阿勒夫零者也,"第此命題,自直觀主義者言,直最毫無意義者焉.且形式主義者又發問曰:介乎 0 與 1 間的實數之集合,其濃度較數連續者爲小而較阿勒夫零大者,其存在耶?抑否耶?換言之,即謂"數連續之濃度,果爲第二個之最小無限濃度耶?抑否耶"是也.是問題也,仍有待于答,乃彼視之爲最困難而又最根本的一數學問題也;凡茲所論證,豈不克使形式主義者及直觀主義者兩方均告滿足者耶?

雖然,此所述之問題也,自直觀主義者觀之,直是毫無意義耳;若能與以一解釋而使之有意義,則答之也易如反掌.

若吾人將此問題改如次述:

"今欲造成[*)]一介于 0 與 1 間之實數之集合,其濃度較數

+)本論文中,無論此處以及他處,皆暗地的假定有無限多個之數字 (digits) 是異于 9 者也.

*)若此"造成"(construct)二字,而以"定…義"(define)(以形式主義的意義言)代之,又若假定在後第74頁上關于討論 π 之小數展開中各對數字之問題爲不能解時,則文中問題之答,必爲否定;蓋若以 Z 爲此等無限二元分數 (binary fractions),其第 n 個數字爲不等的數字所成者,之集合,而又以 X 爲凡有限二元分數之集合時,則 Z+X之濃度,大于阿勒夫零而小于數連續之濃度故也.

連續者小而較阿勒夫零爲大,果不能乎?"
則其答必爲肯定;蓋直觀主義者,僅能造數學的對象物之可數集合,且在一次數連續之直觀之基礎上,若其容許自由選擇法之根本系列以爲構造之元素,則凡由此所造成之非可數集合 (non-denumerable set), 便含有一濃度爲數連續之子集合故也.

若吾人將此問題再改如次形式:

"今若一方有一個可數無限序數之集合,而他方則有一個介于 0 與 1 間之實數之集合;且此兩集合,由新元素之構造,而以次之形狀均無定限的擴張,卽其兩者之對應性,不得以此兩集合之構造之任如何的連續施行而爲所紊亂者是;若是,則二者之元素間,能成立一一一對應否?"
則其答又不得不爲肯定;蓋此兩集合之外延 (extension), 可以若是一方法分成爲若干相 (phases), 卽每一相中,咸得增加一可數無限數之元素故也.*)

雖然,若此問題復改述如下式:

"吾人果能建立一法則,使對于每個數字的根本系列,能與以一可數無限序數者乎?又對于每兩個相異的根本系列之決無有同一可數無限序數與之對應者,能予以一先

*) 凡集合,其元素皆得個別的實現者,且于其中,對于每個可數無限子集合,常有一不屬于該子集合之元素時,則名曰可數不盡集合 (denumerably unfinished set). 故一般吾人爲求與文中諸定義之一致,乃作說曰: "凡可數不盡集合,皆有同一的濃度也" 云.

天的確實性者乎"

則其答又必爲否定;蓋此對應法則,無論如何,在根本系列之各個相續位置中,必自規定一確實可數無限序數之構造;以故于每位置 a_v 也,乃有一意義確定之最大可數無限數 α_v,其構造卽爲此特別位置所暗示者在;于是便有一較一切 α_v 爲大之一意義確定之可數無限序數 α_ω 在,且其因是之故,遂不爲由此對應法則所含之任一序數所得而超過者也;故彼序數之集合之濃度,便不能超過阿勒夫零焉.

形式主義者,爲欲得更大之濃度起見,所取以資手段者,乃以每個濃度 μ 定一個"所有一切互異方法——卽于其中此濃度 μ 之選擇之數得以決定者——之集合"之義;于是當下列所述已證明得形式主義者及直觀主義者兩方之滿足時,形式主義者,遂得證此集合之濃度乃特較 μ 爲大也.所述之已證者爲何?乃謂吾人能以種種方法建立種種法,使互異之實變數函數,能依之得與一切數字的根本系列相對應;但却不能建立一個法,使依之,能令一數字的根本系列,得與每個一實變數函數相對應,且又不能謂凡兩相異函數之不能有同一的根本系列與之對應之一事,爲在此法中乃先天的確實具有者;于是形式主義者遂結論之曰:"所有一實變數函數之集合之濃度 c',較數連續之濃度 c 大也,"此不過自直觀主義者言之一無意義的命題已耳;又依其自 c 以達 c' 之理,形式主義者,乃由

c' 又得到一更大之濃度 c'' 焉云.

此外復有一第二方法亦爲形式主義者所用以求較大之濃度者在.其法爲何?乃對于每個濃度 μ 之能供序數之濃度用者,便定一"凡濃度爲 μ 之一切序數之集合"之義,然後證此集合之濃度較大于 μ 者也.其中最著者,乃以凡濃度爲阿勒夫一之一切序數之集合之濃度爲阿勒夫二 (alef-two),而證此阿勒夫二大于阿勒夫一,且就量上言,爲卽在阿勒夫一後而緊隨之者焉.若此結果,能以一足使對直觀主義者言爲有意義之方法而解釋之,則恐若是一解釋,此時將不能如前此諸情形之簡單也.

以上所論,只能視爲濃度理論上之消極部分,蓋對形式主義者言,尙有一積極部分之建立于白爾溫斯坦氏 (Bernstein) 定理上者存在故也.此定理爲何?曰:

"若集合 A 之濃度與 B 之一子集合者同一,而 B 之濃度,又與 A 之一子集合者同一,則 A 與 B 之濃度同一."

或述如下形,亦爲同等,卽:

"若集合 $A=A_1+B_1+C_1$ 之濃度與集合 A_1 之濃度同一,則亦與集合 A_1+B_1 之濃度同一"云.

此定理,在可數集合時,乃自明也;但若于濃度較高之集合,欲使對直觀主義者言須有意義,則應將其解釋之如次:

"若第一,能于 A 型 (type) 及 A_1 型之數學的實體間建立一法則以決定兩者之一一對應性;第二,又能建立一法則

以決定A型及A_1,B_1,C_1諸型之數學的實體間之一一對應性,則由此兩法則,藉有限個運算之助,便能得一第三法則以決定A型及A_1與B_1兩型之數學的實體間之一一對應性者也."

今爲研究此解釋之真實正當起見,爰述證如下:

"由A之分爲$A_1+B_1+C_1$之區分法,則藉A與A_1間之對應γ_1,便得一A_1分爲$A_2+B_2+C_2$之區分法及A_1與A_2間之一一對應γ_2.次由A_1分爲$A_2+B_2+C_2$之區分法,則藉A_1與A_2間之對應,便得一A_2分爲$A_3+B_3+C_3$之區分法以及A_2與A_3間之一一對應γ_3.將此手續反覆行之至無限次,則將分集合A爲C_1, C_2, C_3, ……諸子集合之一根本系列,及B_1, B_2, B_3, ……諸子集合之一根本系列而與一剩餘集合(remainder set) D也.此A與A_1+B_1間之對應γ_0,卽爲所求者,可于'C_v之每元素以C_{v+1}之對應元素與之,而以A之其他每個元素與其自身'之法而求得之焉."

爲試驗在一定例上此證明之如何起見,乃以0與1間用無限小數所表示之一切實數之集合爲A,而以在第(2n−1)位之數字與在第2n位之數字相等者之諸小數之集合爲A_1;至不屬于A_1之小數,以之屬于B_1或屬于C_1,則視上所述數字之相等性發生無限回或有限回而定.再陸續將A之任意一元素之每數字而以與之相等之一雙數字代之之時,便卽得決定A與A_1間之一一對應γ_1之法則焉.蓋

由與 A 之任一意義確定之元素如 $\pi-3$ 者對應之 A_1 之元素,則陸續便能多寡隨意以決定若干個數字;故此亦非視爲意義確定者不可也.

欲依對應 γ_c 以決定與 $\pi-3$ 相對應之元素,則所須事決定者,第一卽爲在 $\pi-3$ 之小數展開中,彼在奇數位之數字與在其次之偶數位數字相等者,是否出現無限次或有限次之一事是也.爲此之故,吾人其抑得發明一方法以建造此類一對一對之相等數字之一根本系列乎?抑將由是類根本系列之存在之假定而導入于矛盾乎?但如謂此兩問題能以解決,則尚無理由足徵信焉.*)

由是以觀,雖彼白爾溫斯坦氏定理以及由此而得之濃度論之積極部分,亦不容直觀的主義一解釋也.

以上,是卽不佞對于劃分數學世界的根本爭論之說明,然兩方皆不乏大家碩學,欲其于有限期間趨于一致,其機緣實際上可云無有也.潘加勒 (Poincaré) 氏有言曰: "人類爲本不相了解者,以所說之語言非同一故,而所有語言,亦不能相告故." 旨哉言乎!

---

*) 如是信念,只能訴諸排中律 (principium tertii exclusi) 而後能建立之,卽須訴諸一 "凡數學的性質之集合" 之存在公理者也.此公理之範圍,較大于前所引之包括公理者遠甚,關於此方面,可參閱 Brouwer, "De onbetrouwbaarheid der logische principes," Tijdschrift voor Wijsbegeerte, 2e jaargang, pp. 152—158.

光電學略述

(Photo-Electricity)

衷至純

光電這個名詞,用在一般的意義,係指由光之影響所發生的任何電效果.如硒(Celenium)曝在光裏時,電阻之變化叫做光電作用(photo-electric action).在這篇裏這個名詞是用在較狹義的意義,是指由光之作用所生的物體發電狀態之變化.因紫外(ultra-violet)輻射是引導此種變化之最有效的,故有時用光線電(Actino-electricity)之名.

單色光(Monochromatic light)是由決定分光景(Spectrum)裏的位置的波長(wave-length)(λ)特表出來的.這波長的單位,分光學者常以 Ångström (1 Å.U. = 10^{-8} cm.) 或 micro-millimetre (1 μμ = 10^{-7} cm.) 表之.波長在可見的分光景裏,其範圍大約由 7600 Å. 到 3900 Å.,以水晶代替玻璃時,則紫外線分光景約可以拓展到 1850 Å.,過此就是"Schumann域"(region),是必須特殊的實驗裝置的.與每個波長 λ 相當的有一定的振動數 ν,卽在單位時間內所有振動之數目;這些量由基本關係 $C = \nu\lambda$ 以聯絡之,C 爲光進行的速度(在真空中爲每秒 3×10^{10} cm.).分光學家(spectroscopists)通常用"波數"(wave-number)或"每cm之波數"(Number of waves per centimeter) 以代振動數 ν.

現在可以知道X光線和放射物質放出的 γ 線,所不同于通常光線的僅其波長較之可見的分光景中光之波長甚短而已.關于這些短波長或高振動數光線的光電效果之詳細討論,必須參考X光線或放射論(radioactivity)之特別論著.

據之近世電的理論,我們可以把光當做一種電磁波 (electro-magnetic disturbance), 把電變化當做由于陰電子的增多或減少.從這個觀點,光電變化是相當于電磁波影響之下的陰電子之遊離.這樣的手續,不特對于傳電變化立可探得的情形而且對于其觀察效果爲副性質之別種現象爲根本重要的.屬于此者有物體由于光照(illumination), 螢光 (fluorescence) 和燐光 (phosphorescence) 之電阻變化,與一切光化學的 (photo-chemical) 變換.

第一次關于光電的觀察是在1887年, Hertz 注意于當紫外線光落在火花通路 (spark-gap) 時的放電較火花通路不被照著時容易.光源可以是第二個火花通路的放電,通常火焰,或電弧.光源的含密輻射的(actinic) 性愈大,則效果愈强.

以後 Wiedemann 和 Ebert 證明該作用是在火花通路之陰極 (Kathode) 或負端 (Negative terminal).

同年, 1888, Hallwachs 有一個重要的發現,即一個帶有陰

電荷的物體,當紫外線投射在該物體上時,立失去其電荷;反之,物體所帶的如果是正電,則在光的影響之下是不會放電的.平常稱爲 Hallwachs 的效果;它的大的意義是此處帶正電和帶負電中有個差異,——這差異在電子說的發展裏已顯示出來.稍後, Hallwachs 和 Righi 各自獨立地證明謹愼地絕緣的一物體,起初不曾帶有電荷,如果曝于紫外線光底下必得正電荷.關于這個的實驗,是用磨光的金屬板.關于研究光電放電的實驗方法是由 Hcor, Righi 和 Stoletow 所發展.如果應用一個電場,由被照的金屬形成一空氣凝聚器之一板,其第二板以蓄電池充以正電,所生之連續電流可以象限電表 (quadrant electrometer) 或靈敏的電流計 (galvanometer) 測量之.若用夠大的電位差則電流變成幾與電場無關,而這"飽和" (Saturation) 電流可以看做金屬的光電作用 (photo-electric activity) 之測量.

在 1889 年 Elster 和 Geitel 的實驗,證明正電性的物體如鈉 (sodium) 和鉀 (potassium), 當曝于通常的光線底下時光電作用是顯而易見的.正電性較强的鉫(Rubidium), 當用正熱紅的玻璃棒的光照耀時卽失去負電荷.于正電性較弱的各種金屬如鋅 (Zinc) 和鋁 (Aluminium), 縱曝于太陽光下,所顯的光電效果甚小;但這是當表面新鮮光滑時的情形.如果把這個板放在空氣中,它的作用很迅速地減小了.這就是 Hallwachs 效果之"疲勞" (fatigue). Hallwachs 發現塗以

養化銅(CuO)的板子,保存在嚓閉的小室裏,有光電作用經長久的時間是不變的.在此,他根據光電測光術的一種方法,以通過含養化銅爲感光質的光電池(photo-electric cell)的飽和電流來測輻射的强度. R. Lindemann 用這方法以研究由弧光燈放出的輻射.倡用鋅球于紫外線之測光術的Elster和Geitel曾設計一測日光强度的光電池.在此情形,感光面是鉀做的置在氬(argon)或氦(Helium)的裏面以保能持久.

在1890年Elster和Geitel發現一重要事實,卽在低壓氣體裏實驗時橫磁場可以減小光電流.此觀察可得一種方法, J. J. Thomson, Lenard, 與 Merritt 和 Stewart 以之證明當金屬板在高度真空裏被光照着時,陰電之搬運者與Crookes管的陰極線相同而爲帶負電的"微粒"(corpuscles)或陰電子所組成.這些電子的質量約有氫原子(atom)之質量的1/1800, 並帶有等于在電解的對流裏的原始電荷.

在通常壓力之下的光電放電時,遊離在光照板上的電子附着于一個或多個氣體的分子形成了伊洪(ions),而這些搬運者在電場影響之下徐徐經過這氣體.如果場之强度增加很大,則發生因衝撞而成的伊洪化,最初由于陰電子之運動,後來却由于正負伊洪雙方的運動,直至以火花的形式而放電.

Branly 與旁的實驗家相反,他所得的結論,是在一定情

形之下,正電可從光照板放出.那末,如果一塊鋅以置于近旁的大感應圈(induction coil)的火花之光照耀之,那電荷之失去的快慢,正電荷負電荷一樣. Elster 和 Geitel 的實驗已經證明在這種情形其消失是由于負電荷感應鄰近物體而變衰,因該物體爲火花直接或由試驗所用的板反射後之光所照耀.如此所生的陰伊洪,在電場影響之下移動到光照板上而中和了正電荷. Le Bon, 曾證明帶正電的物體能夠由以光照在其鄰近的金屬板而放電.

稍後,由 Dember 在可達到的最高度的真空裏實驗那荷正電的微粒有少數從光照着的金屬板逐出.這些在它們的行爲上相似于在真空管裏的"溝線"(canal rays),大概是放了陰電子的金屬原子.在理論的基礎上,這種作用的發生的概率是較大的,雖然要在特別適宜的條件之下原子才能離開這固體.這樣的作用當可解釋在延長光照之後的表面現象之變化,這種變化係由 Lenard, Ladenburg 和其他諸人觀察出來,常稱爲這光滑表面的"變粗率."

在最近二十年之內,由在高度的真空裏實驗,以研究光電現象成功了大大的進步,因周圍沒有大氣故其條件甚爲簡單.有兩個主要的實驗方法可應用:被光照之板連結于驗電器(electroscope)或測電器(electrometer),則在光之影響下所得的正電位可得而量之,而其周圍的物體保持與地球的電位一樣;或光照板和平行板間流動的電流可由

電流計或測電器以測量之,如果知道了保存在兩板之間的電位差.第一方法給與離開光照板的電子之極大速度的報告;關于光電位,則升高以迄它達到夠大之值,以阻止運動最快的電子之逃逸.第二方法測量那脫離光照表面的電子之數目;並且,由變化所用的電位差,可以得出這個數目與電場强度的關係怎樣.如果這電場是阻滯電子從板逸出的,則只有一定高度快的電子可以逸出;反之,如果,應用加速的電場,脫離板的電子數目將升高到極大值,所以電位再行增加而電流近于常數.以電流對電位作圖,則可得一"速度分配"(Velocity distribution)曲線,從那曲線能推論出以任一指定的速度離板的電子之比例.

光電現象之科學的研究,必根據各種不同的實驗的條件之下的遊離電子之數目和速度的測量.

我們首先研究溫度的影響.從前的實驗家所有工作都在大氣壓力之下,其結果是複雜而難解.由 Varley 和 Unwin, Lienhop, Dember, Millikan 和 Winchester, Ladenburg, 及其他諸人在高度的真空中實驗,證明離開副作用不論電子發射的數目及其發射的速度均與溫度無關.這結果適用于低溫度,用液體空氣的溫度使放電時沒有光照耀在板上(800℃ 在 Ladenburg 的實驗).如果這結果精確地可信,必取之以表電子發射現象是從原子自身裏的些歷程發生的.

第二步研究由變化落在板上的光之性質所發生的各

種光電作用的變化.

在真空中實驗,並變化投射光之強度,得兩個重要的結論,卽(1)電子之速度與光之強度無關,及(2)電子發射的數目是正比例于光之強度.

這第一結果是由于 Lenard 所得出;他已經由 Millikan 和 Winchester, Ladenburg, Mohlin, Elster 和 Geitel, J. R. Wright, 和 Millikan 的實驗所證明,雖然光照的板最後達到的正電位無關于強度,而達到這電位的時間當光之強度減少時却增加.

Lenard 的結果的確應得 Millikan 所用的"可駭"(astonishing) 的綽號,它的意思是:微粒 (corpuscle) 放射的能力是一概無關于使它放射的光之強度,無論由于變化光之距離以變化強度或由加入吸收屏.再者這樣的沒有關係對于由 X 光線和 γ 光線二者所發射的陰電子也曾證實的.

第二結果在許多實驗者(包括 Elster 和 Geitel, Lenard, Ladenburg, Herrmann, 和 Richtmyer)的工作裏已經得到了確證,并且適用于光強度之極大範圍.並沒表示有個極限值在它之下的光是不生作用的.對于甚烈的光源,電子發射的數目比由得自比例定律的更少些無論如何是可能的.

Elster 和 Geitel 在 1894 年成功了一個可注意的發現,卽在一定情形裏,光電效果是與投射光之分極的平面的方位有關的.用鈉和鉀的液體合金,并使分極白光以 45° 角落在

該表面上,他們發現當光波 (light-wave) 裏的電向量振動在投射面上時電流爲極大,當電向量垂直于投射平面上時電流爲極小.

在討論這種結果,最便利的是去研究關于在研究之下的表面所吸收的光之總量的光電流之强度.全討論包含着兩個作用,"選擇的"(selective) 和"經常的"(normal) 光電效果間的區別,但我們可以用下面的方法以一般地說明分極平面的影響.如果使投射光與投射平面成直角的分極,則在光波裏電向量有一個成分垂直于光所落之平面上.結果這光所作用的些電子多傾于在與表面成直角之方向移動,并且從那裏逃逸時,無須與金屬分子衝撞.反之,如果光被分極在投射平面內,則電向量是平行于該表面,而電子趨向于與表面平行地移動,所以它們與周圍分子的撞衝機會多,而較少從表面逃逸的機會.

這分極平面的方位,在電子發射之極大速度上顯然很小的或竟沒有影響.

關于光電現象與刺激光的波長之關係的問題有極大的趣味,因所得的結果,對于光電子發射之理論是有意義的.

我們首先論飽和電流所測定的光電作用之變化與投射光波長之關係. Elster 和 Geitel 用鹼性金屬的實驗,對于分光景可見部分的光指示一極大的光電效果.旁一方

面,比光電作用(specific photo-electriactivity),卽對于單位光強度之作用之量的測量,對于以紫外線試驗各金屬,證明了當波長減小時而效果却增加.這貌相的矛盾已依 Pohl 和 Pringsheim 的工作解釋了.如果光波之電向量垂直于投射平面時,則當波長減小時而比光電作用連續地增加;但是如果電向量是平行于投射平面時,則須區別兩個不同的情形.對于僅有一"經常的"光電效果的物質,這比光電作用連續地增加當波長漸漸減小,但增加率是較電向量垂直于投射平面時爲速.關于有一"選擇的"光電效果的物質,這比光電作用對於特別波長(臨界波長)達到極大值,通常在分光景之可見部分.對于甚短波長則這些物質的行爲如那些僅有經常的效果的相同.發生選擇發射之有效的波長,其在分光景中的範圍甚大. Pohl 和 Pringsheim 已經證明如果研究光所吸收之能力以代替投射于表面上的光之能力,則這極大是非常觸目的.

Compton 和 Richardson 的實驗指示那"經常的"光電效果達到的極大,相似于由"選擇的"效果所達到的,但遠在分光景之紫外光線境界之外.

決定光電子發射的速度和光的波長間的關係,大部分工作已經成功. Compton 和 Richardson, Hughes, 和 Millikan 的研究,決然地證明發射之極大能力爲光之振動數(frequency)的一次函數.對于一定金屬要放出電子所須的振動

數,無論如何都有個一定的極小.當振動數增加時,因而發射的能力或阻止發射的正電位也因以增加.

一個可注意的例,是應用由紫外線的實驗所得的公式去計算 Röntgen 放射的波長,假設它有與極短波長之紫外光線同樣的行爲.這樣計算出來的數值(在 1 和 2×10^{-9} cm. 之間)與將岩鹽結晶體中出來的輻射反射所發生的干涉光帶上觀察所得的非常相合.

約十五六年前所知道的最短波長約 900 Å.的紫外線(由 Lyman 所測量)和最長的波長約 8 Å. 的 X 光線間(由 Moseley 所測量),有約 6 Octaves 之間隔存在.由間接光電方法,現在它已可由 X 光線分光景一直右溯由此間隙以至已尋得的紫外光線.旁一方面,Millikan 已示如何能在真空分光相 (spectrograph) 裏得極短波長之分光景的線,其在紫外線和 X 光線的間隙已經消失.

以上只由歷史的觀點論實驗的事實.現在要述些關于電子從受光波影響的物體的原子發射出來的理論.

許多大有興味的問題是關于光電子遊離的機構.雖則近時的研究已經把這些問題解釋了些,但仍有許多疑問等待着答覆.光電作用無疑地包含着從投射光線的能力之吸收;但我們要決定遊離電子的能力之大部分是直接由光線取得,或者發射的速度實際地還是電子先前在它的原子裏運動所具有的,而這光線僅供給使電子遊離的

能力.前者給與許多光電事實以解釋,設對于光之性質有個特別的假定,並且假定光之能力,不是均勻地分配于波列 (wave-front) 上而集中在特別區域裏,使我們可以想像幾包或幾單位的光能.每一單位的能力假定爲 $h\nu$, h 爲一萬有常數(Universalconstant),爲 Planck 的常數,其值爲$6,55\cdot10^{-27}$.

電子最大運動能力 ($\frac{1}{2}mv^2$) 與振動數同時增加,與當初 1905 年由 Einstein 根據"光量子" (light quanta) 之假說提議的公式相合.這光電作用的基本定律可以寫爲

$$\frac{1}{2}mv^2=h(\nu-\nu_0),$$

這裏的 ν 是刺激光的振動數,而 ν_0 是輻射所投落的金屬之表性的一定振動數.關于每種金屬此"門檻"(threshold)振動數決定光的行爲.由是,對于鈉,其表性的振動數大約是每秒 5 1 5 兆 (billion) ($5,15\cdot10^{14}$) 振動,相當于綠色光.如果使較紅于這個的光落于鈉上雖百年之久也不會有電子發射的,但是如果所用的光稍紫于這個特別綠光,將立即使電子遊離,並且發射的速度(較嚴密地當說運動能力)將因振動數之增加而增加.

Einstein 的方程式具有甚高度的普遍性,不僅對于通常的光可以應用,且可用之于 X 光線,不止在光影響之下電子發射的情形顯然有效,且在電子衝撞的結果使之成輻射的發射時有效.包含在此互逆關係裏的特別問題已經由 Sir William Bragg 中肯地提出:"好像從 100 呎高處令一

木板落入海中能夠看見展開的波紋行經1000哩後較其原來的量爲無窮小,這樣作用于一木船上,使該船之板飛出了它的地位到100呎的高.這能力如何得由此處達到彼處?"在許多地方能力的遷移要回復牛頓的微粒說(Corpuscular theory)去.無論如何光之"單體說"(unitary theory)是顯然不與Clerk Maxwell所作的電磁方程式相符合,除非它能夠述出一種光之學說,合有單體說與波動說之便利.輻射能之分立的"量子"(quantum)之假說僅引以解釋特種之事實.

物理學者的較舊學派,寧取第二觀點,卽光由共鳴作用著,電子之軌道運動的能力,由交感的光振動(lightVibrations)逐漸增加至電子能夠逃出使它曲向原子的力之控制爲止.好像要有附加的理由在假設這關于"選擇的"光電是正確的觀點,是故Lindemann曾在十分簡單的假設上計算相當于極大作用的振動的振動數.這觀點給與"經常的"效果的滿足的解釋是不甚明白的,因此我們曾假設關于原子的電子與所有可能的振動之振動數的存在,運動能力比例于振動數. J. J. Thomson曾經提議那制勝這觀察的許多困難的輻射理論.

在1925年間大多數的物理學者都承認"量子說"(quantum theory)的原理,但不承認"光量子"(light-quanta)的存在; Lindemann 的結果可以看爲伏于連接新力學到舊

力學的 Bohr 的相當原理 (Correspondence Principle). 光之波動說與量子說如何能歸一致——如果一致是可能的話——還是不明白的.

其它重要的問題是那光電子分類的問題.把它們當作原子價或外部電子之類,大概是的確正確的.

這發光 (luminescence) 的可疑問題是直接地與光電作用有關.依 Lenard, 投射光使電子從原子分離出來,結果的燐光是由于電子表示回復的振動.許多發燐光的物體是絕好的絕緣體,它因光電子的遊離得一定的正電荷.

我們于光化學 (photo-chemical) 變化的知識,現在還大不足以使我們能追尋包含在此種變化裏的進行的步驟,但第一步在原子價的電子(即 Chemical bonds)上的作用,無疑地是我們已經研究的這類的作用.科學的照像者,可以有興味于嘗試,依 J. Joly 的提議以電子論去述照像板的潛像之物理的理論.在此種嘗試 H. Stanley Allen 曾取 Lenard 的燐光理論當做指導.無論對于潛相形之物理變化所隨之化學變化問題之最終決定如何,此處的觀點是能容受關于許多照像之倒轉的事實,而在建立更深研究系統時,至少成功一個理論的機能.

Joly 關于潛像的性質的觀點,在別的方面具有大興味.它是與視的光電理論和光的治療作用有關係的.

無論如何,光量子說不能說明于涉廻折等現相,而此種

現象只能以光之波動說以說明之,旁一方面,光量子之有個體的存在如電子一樣,亦爲事實所證明,我們並未觀察過一個光量子的分數的存在.要得一個沒有矛盾的光之學說,于 1923 前後法國的 L. de Broglie 和德國的 Heisenberg 同時以不同的觀點各創立一種理論,以解決原子結構的問題;前者發明了波動力學 (Wave mechanics) 後者發明量子力學 (Quantum mechanics). 但兩者的結果相同.按之兩說物質兼有波之性質,而光亦兼有微粒之性質.以前不可解決的問題,于此至少可以告一段落矣.至于其詳細的敘述可參考關于波動力學及量子力學各種著作.

潛　行　艇

（續第一卷第一期）

郭　霖

第　三　篇

潛行艇的種類

第一種　潛行魚雷艇(Submarine Torpedo Boat)

近世所有的潛行艇,多屬此類～一百隻中,至少有九十隻是這一類.牠的作用,實與尋常魚雷艇相彷彿,不過多一潛水的功能罷了.中國海軍中的「辰」「宿」「列」「張」諸魚雷艇,連外形也有些像潛行艇呢.不過一個是在水下放魚雷;一個是在水上放魚雷;一個教敵人嚇得破膽,一個教敵人笑得彎腰;這『差一毫釐謬以千里』的關鍵,只在能潛水與不能潛水上頭!

至於此類潛行艇的構造,可用前面第四圖來代表,（參觀本刊第一期)此處不必再贅.

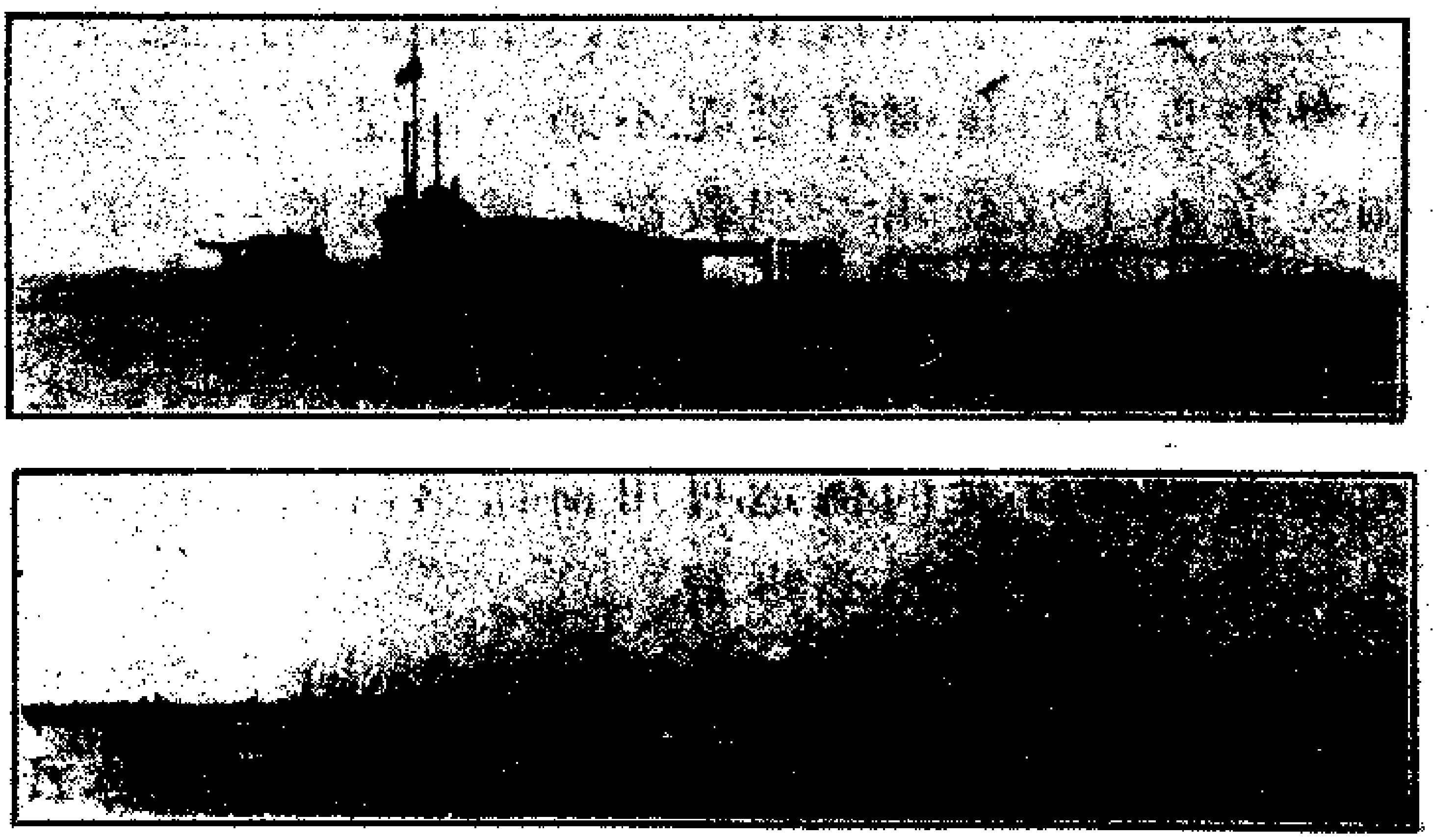
第二種　潛行水雷艇(Submarine Mine-Layer)

此種潛行艇,是爲埋水雷用的.在水底下埋水雷,人不知,鬼不覺,自然有許多妙處!可以潛入敵人軍港內埋水雷;可以於正作戰時在砲火掀天之下,預測敵艦所經之處攔路埋水雷;凡此種種,不能盡述.應用之妙,存乎其人.至於牠的

構造,約分兩種:一種,水雷艙在船尾;如第十八圖;一種,水雷艙在船頭,如第十九圖.

第三種　潛行重炮艦 (Submarine Monitor)

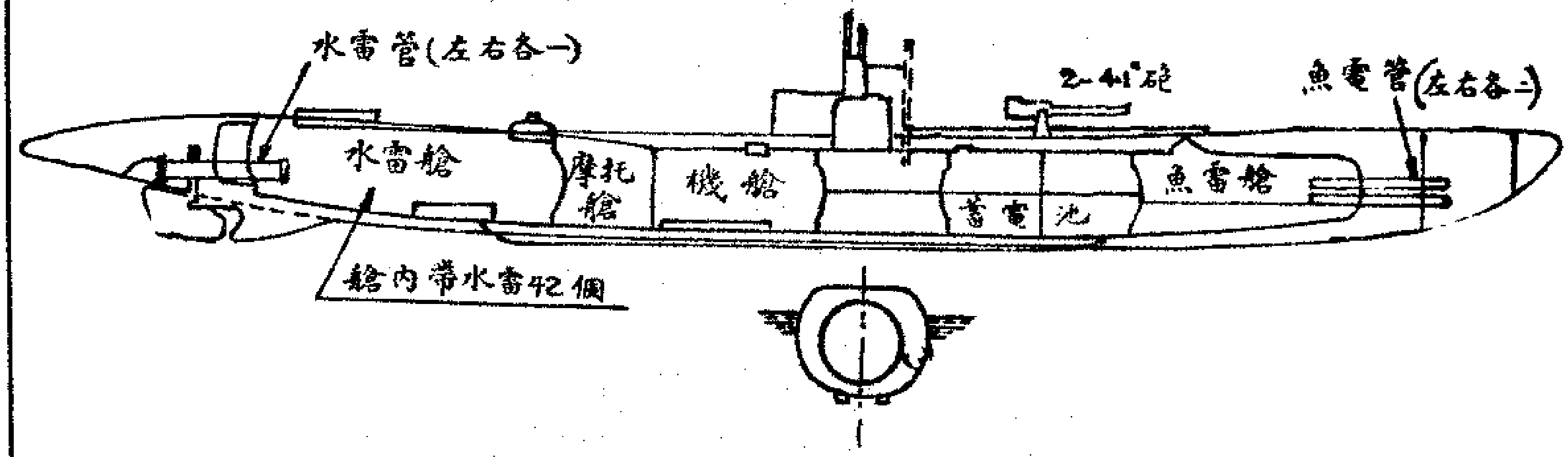
例如英國的 M_1,M_2,M_3 三隻潛行艇,即屬此種.牠們各裝12英寸的大"海戰砲"一尊,如第二十圖所示.此種砲,裝入砲彈後,將砲身揚起;然後潛入水中,約潛至水中12英尺與20英尺之間,僅留砲口於水外;於是一面前進,一面用"潛行瞭望鏡"瞄準發砲.這一砲放過之後,若要放第二砲,那就非浮到水面上來再裝不可了.牠們的武器,除這一尊大砲外,尚有3英寸砲"及路易士砲"各一架.並有18吋的魚雷管



第二十圖　潛行重炮艦 M_1 與 M_2

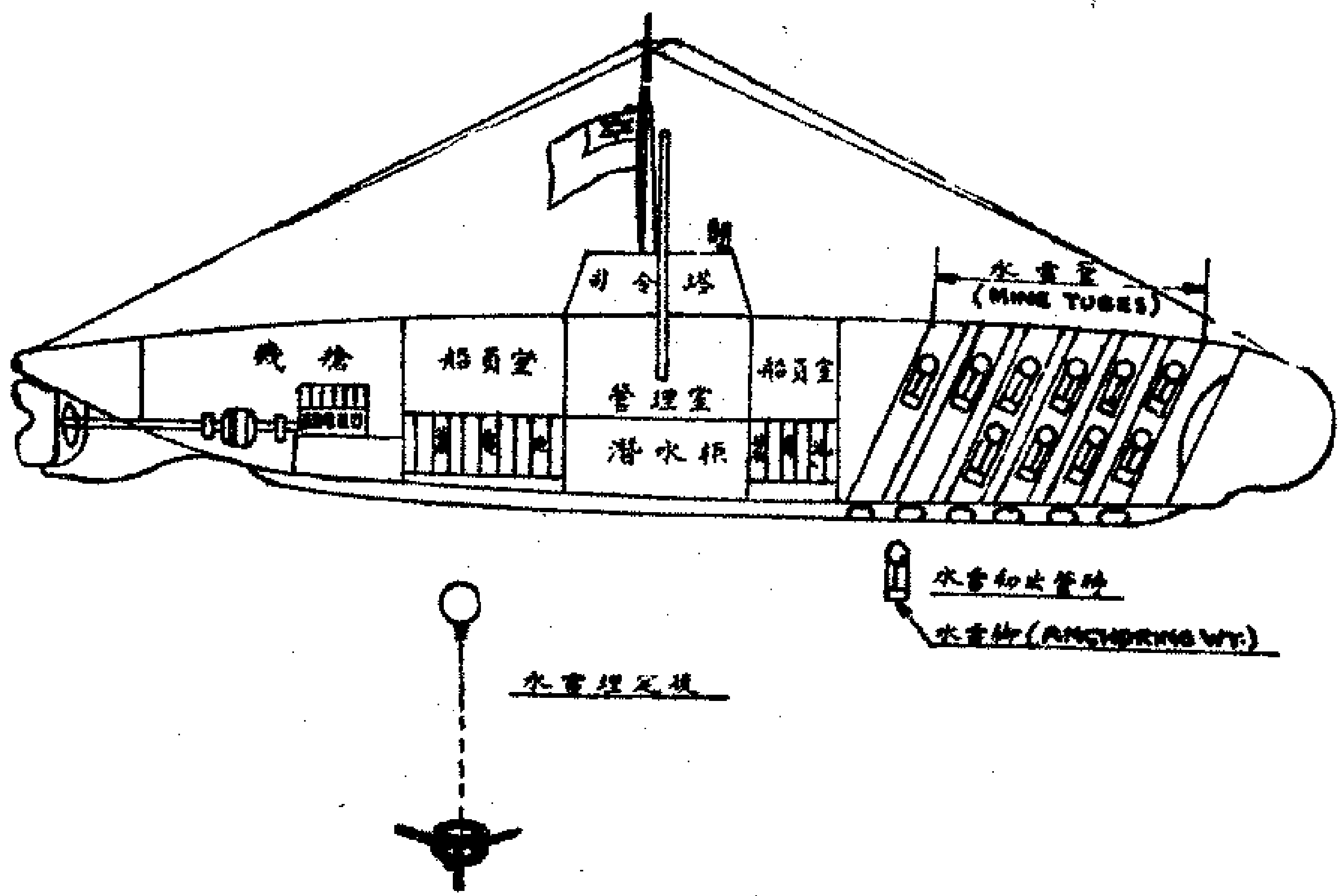
303'—0"×24'—6"×15'—9"

排水量 $\frac{1600}{1950}$ 噸　　馬力 $\frac{2400}{1600}$ = $\frac{15.5}{9.5}$ 海浬



第十八圖 德國 潛行水雷艇 U_{122} (U.E.Large Minelayer)

267'–5"×24'–6"×13'–10" $\left(\frac{1170}{1700}\right.$噸 $\frac{14.75}{7.5}$海浬 $\left.\frac{2400}{1150}\text{B.H.P.}\right)$



第十九圖 潛行水雷艇GERMAN SUBMARINE MINE--LAYER U.C.--5

水雷架觸海底時卽自動的張開放水雷上井(水雷腳卽留于海底)水雷升至一定深度時水力表(HYDRO.STATIC VALVE)卽使之停于其處

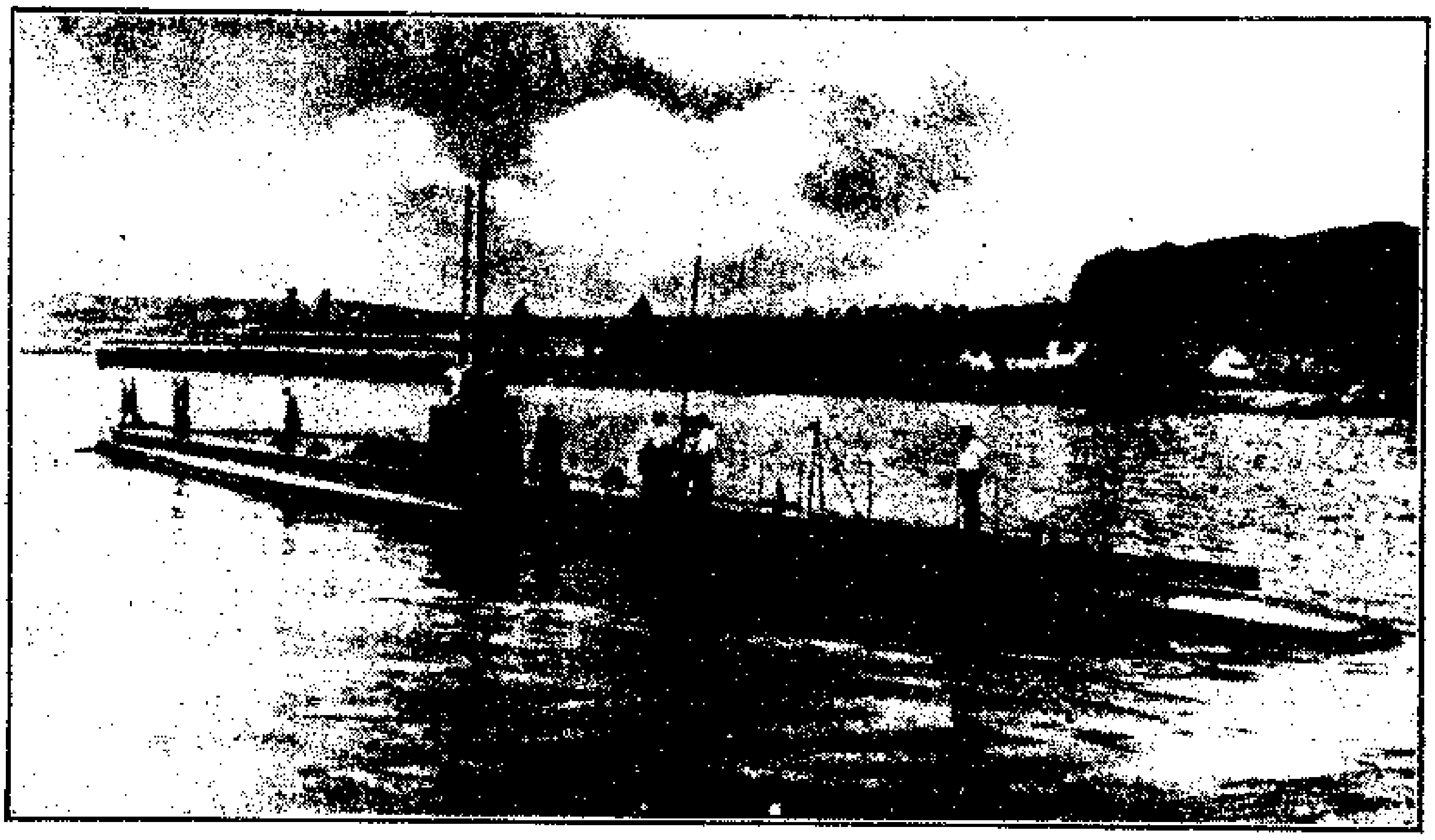
四條(都在船頭).照華盛頓條約:以後潛行艇不許再用這種 12" 的大砲了.而 M_1 又於 1925 年十一月十二日早七時在英吉利海峽操練時被一隻瑞典商輪撞沈了.所以現在全世界上,只有兩隻裝"12" 砲的潛行艇,就是 M_2 與 M_3.

第四種　潛行驅逐艦 (Submarine Destroyer of Submarines, or Submarine Chaser)

此種潛行艇,是專為驅逐敵人的潛行艇用的.所以牠在水下的速度要特別大.牠的用意是在"以毒攻毒".因為普通潛行艇所有的優點或缺點牠也照樣有,得失自然可以相抵啱;再又加上一個較高的速度,豈不可以制服尋常潛行艇嗎?這,在理論上自然是"持之有故言之成理";可是在事實上,恐怕絕對不然!因為潛行艇的優點,是對水面上的戰艦而言;對於水面下的戰艦,那些優點便算不得優點了!至於缺點呢,又不是速度一項可以補救的.最「糟糕」的還是視覺;在深海中,潛行艇和瞎子差不多.用一個瞎子去趕瞎子,縱然這個瞎子跑得快些,何害於那個瞎子咧?反正方向總是猜不準的,那末,跑得愈快,也許去敵愈遠呢!所以這種『潛行驅逐艦』在戰略上的價值,是很可懷疑的.但是現在既有這種東西,也無妨在此地說一說.

當歐戰時,德國 U 字號的潛行艇(第二十一圖)鬧了一個『天翻地覆』!在兩個半月之內,打沈了五十一隻商船!U 字 9 號艇行艇又在半點鐘之內,獨力打沈了三隻英國的頭

等巡洋艦(卽"Hogue," "Cressy," Aboukir)!於是英國人情急了,特別造兩隻潛行艇去趕那些U字號的潛行潛.這兩隻就叫R_4, R_{10}.這兩隻的構造是一樣的.排水量爲$\frac{420}{500}$噸;馬力爲$\frac{240}{1200}$,速度爲$\frac{9.5}{15.0}$海浬,這15海浬的水下速度,的確是最「

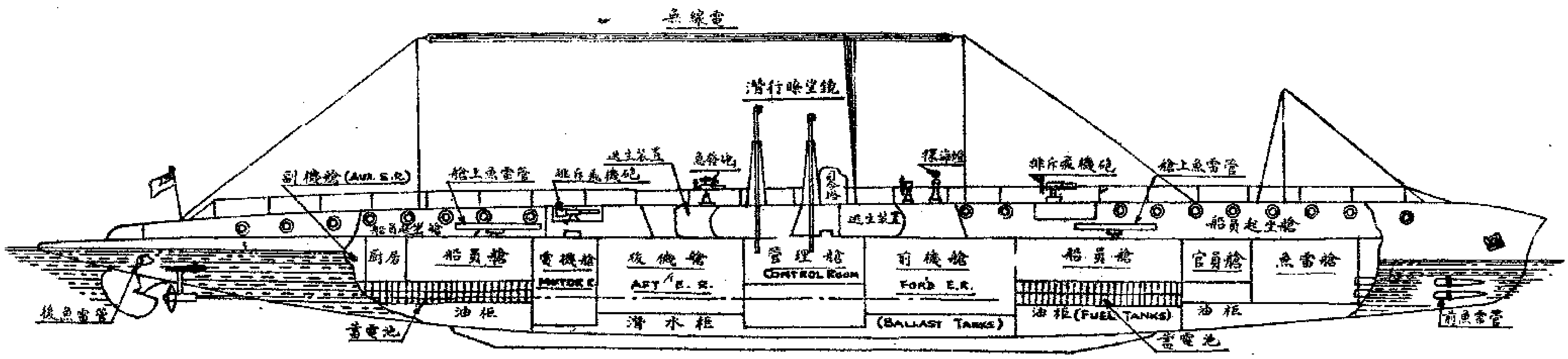


第二十一圖 德國潛行艇U_{11}

出風頭」的了;只可惜這兩隻還沒造成,歐戰便歇了火,從沒給這兩個「善跑的瞎子」一個試驗機會.也無從證明他們的理想不對.

第五種 潛行巡洋艦 (Submarine Cruiser) 與潛行大戰艦 (Fleet Type Submarine)

這兩種實爲一種.其作用都在遠出覓敵,或是隨艦隊作戰(參觀後面「戰略」篇).所以牠們的船身要大,速度要高,馬



第 二 十 二 圖

滑 行 巡 洋 艦 （美 國 勒 克 式）

SUBMARINE CRUISER (LAKE TYPE)

力要足,武備要充實,潛水的時間也要久.換一句話說,這類潛行艇就是把普通潛行艇及普通戰艦合併起來所成的一種潛行艇.牠們的構造,看第二十二圖便可得其大概.該圖爲美國勒克式潛行巡洋艦.機艙共有前後兩個;魚雷管上下共十條;至於急發砲 (Raipid-Fire Guns) 與排斥飛機炮 (Anti-Aircraft Guns) 等等,也「應有盡有;」其戰鬥力自然是非同小可!

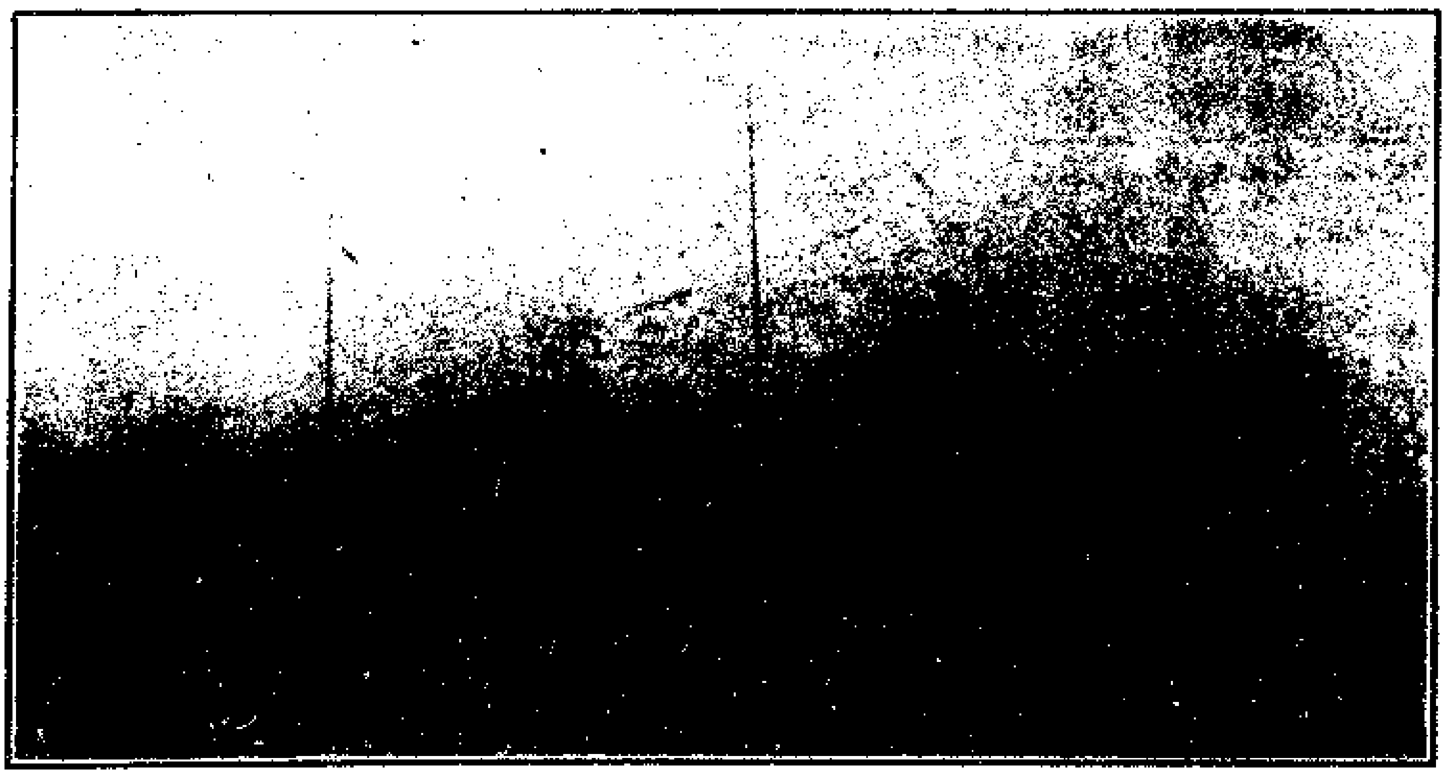
再看英國的潛行大戰艦 X_1 號(第二十三圖). 從 1921 年造起,到 1924 年才造成.造價爲£941,794(約合華幣一千七

(X_1的尾部)

第二十三圖　潛行大戰艦(英國)

350"−0'×29'−9"×17'−0"　排水量$\frac{2780}{3600}$噸

百萬元). 長爲 350 英尺,排水量爲水上 2780 噸,水下 3600 噸.在水上時,其速度爲22海浬.其武器爲六個12吋的魚雷管,及四尊 4 吋的炮.船員共爲 221 人.聽說在水中可以經過兩天半的長時間!此式在英國現在很通行,據說是英國歐戰經驗的結晶品!但此處須請讀者諸君注意:英國的海軍政策,因種種關係,只利於「攻」,不利於「守」.大潛艇是爲攻用的.英國上次在北海中,因爲德國的海軍深居簡出,屢挑不戰;英國又活怕德國的潛行艇,不敢深入,所以把歐戰延長了那許久!現在英國造這種大潛艇所本的經驗,定有上述經驗在內.換句話說,他們所本的是攻人的經驗,不是自衛的經驗.



第二十四圖 德國「運貨潛行艇」"Deutschland".

214'-0"×29'-7$\frac{1}{2}$"×15'-6"(吃水), 排水量=$\frac{1850}{2210}$噸.

百萬元)長為 350 英尺排水量為水上 2580 噸水下 3000 噸在水上時其速度為 22 海浬其武器為六輯 21 吋的魚雷管及四尊 4 吋的砲船員共為 253 人據說在水中可以經過兩天半的長時間此式在英國現在很通行據說是英國歐戰經驗的結晶品但此處須特請諸君注意英國的海軍政策因種種關係只利於「攻」不利於「守」大潛艇是宜攻用的英國上次在北海中因為德國的海軍深居簡出老挑不戰英國又害怕德國的潛行艇不敢深入所以把歐戰延長了那許久現在英國造這種大潛艇所本的經驗定含上述經驗在內換句話說他們所本的是攻人的經驗不是自衛的經驗.

第二十四圖　德國「運貨潛行艇」"Deutschland".

$214'-9'' \times 29'-7\frac{1}{2}'' \times 15'-6''$ 吃水.　排水量 $\frac{1850}{2100}$ 噸.

第六種 潛行貨船 (Cargo-Carrying Submarines)

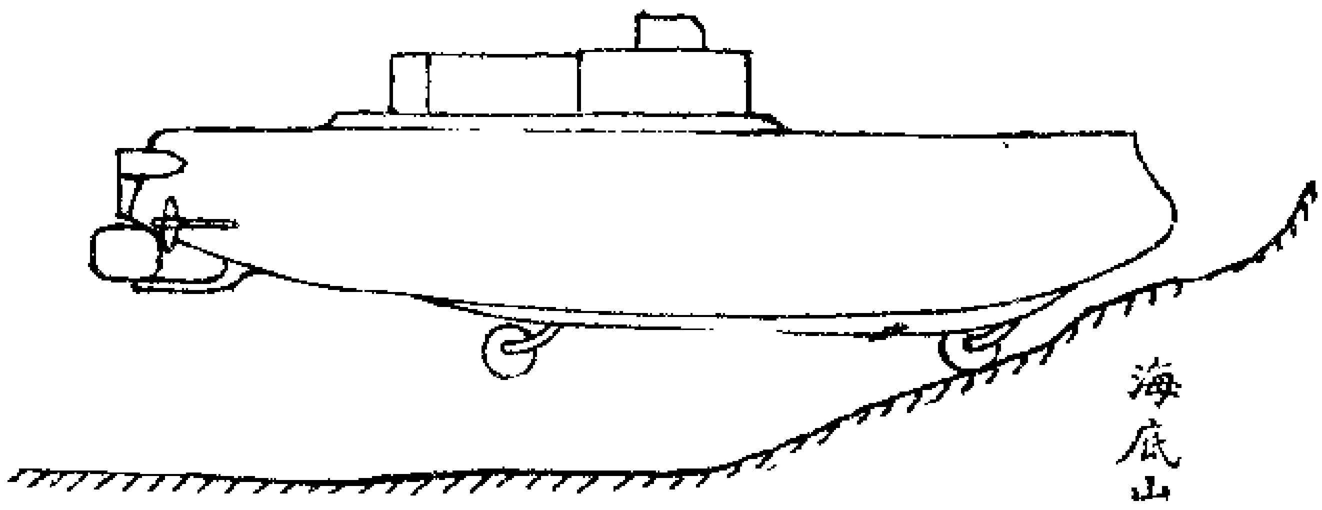
當海口被封時,欲向遠地友邦運貨,即用此種潛行艇.牠們只須躲過敵人的戰艦以後,便仍可在水面上行駛,牠們潛行的時間不必過久,所以不必多帶那笨重的蓄電池自然可以多載貨物.第二十四圖所示,為德國海口被封時所造的潛行貨船之一,名曰"Deutschland".在美國未對德宣戰時,牠曾到美國運貨數次,在潛行艇歷史上,第一個「扁舟橫度大西洋」的就是牠!後來美國對德宣戰,牠就停了牠的班期,也改為尋常潛行艇了;頭部設魚管二條,艙上更裝5·9英寸的炮兩尊.那些U 152−157,就是這種貨船改的.

第七種 潛行"汽車" (Submarine Automobile)

這是勒克君 (Simon Lake) 建議的.自然,牠的正式名字不叫「汽車」,還是叫做潛行艇.不過牠的作用很像汽車:故有是稱.牠脚下也有輪子,可以在海底爬行;不但可爬平地,還可爬山.並且比尋常的汽車還多一樁本領,就是牠一輪着地時還可以爬上山坡呢(第二十五圖),這一點倒叫尋常的汽車「望塵莫及」了.

此種潛行艇最大的用處,就是到敵人軍港內埋水雷 (Mine-planting), 及剪除水雷 (Mine-Cutting) 等等.普通的潛行艇,不便在淺水中往來,故欲入敵人軍港內,頗不容易;這類的潛行艇,却因為牠的「剩餘浮力」是負性的,(就是牠的體重,比同容積之水略輕一點.參觀前面「保險裝置」條)所以

牠總是貼着地走,在淺水中亦不致爲潮水翻起教敵人看出「馬腳」來.這自然有無窮的妙用囉!



第二十五圖 潛行『汽車』

第 四 篇

潛行艇的戰略

第一節 潛行艇在戰略上的價値

大略一個英國人,非不得已是不願意說潛行艇在戰略上有甚麼價値的;一個法國人,却要說潛行艇在戰略上的價値是無比的.我們也不管他們說些甚麼,只從戰略的根本原理上分析起來,看潛行艇到底有價値沒有.

攷一切戰鬥力都離不了下面的三大要素:—

(一) 實力— 就是一切物質上的戰鬥力 (Material Force). 例如兵艦,兵士,槍械等,這是「物」的戰鬥力;

(二) 士氣— 就是一切精神上的戰鬥力 (Moral Force). 例如決不畏死的勇氣,與期在必勝的雄心等等,這是「人」的戰鬥力;

(三) 組織— 就是一切組織上的戰鬥力 (Organic Force). 例如秩序,交通,軍紀,合作力等等,這是「組合」上的戰鬥力.

這三種原素,是任何戰鬥力所必具的.不論海陸空軍,都是一樣.不過就物的戰鬥力說,在海軍上爲戰艦,在陸軍上爲兵士;所以論陸軍常說有多少兵士,論海軍却不說有多少兵,只說有多少船.這一點在表面上似乎不同,其實也是一樣,因爲陸軍的兵士,本是當物質用的,所以德國兵素有 "Excellent Military Material" 之目, (即「絕妙的戰鬥材料」之意).

自然,對於自已一方面,要極力保存上面說的三種原素;對於敵人一方面,却要極力消滅他這三種原素.消滅的法子就是:—

(一) 對於「實力」用「破壞」法 (Destruction);

(二) 對於「士氣」用「恐嚇」法 (D-moraligzation).

(三) 對於「組織」用「紊亂」法 (Diserganization).

至於戰爭的目的,自然是要敵人的實力完全破壞.這種完全破壞,可由下面兩種順序得來:—

第一種—先行局部的破壞使敵人恐慌,由恐慌而紊亂組織,由紊亂組織而歸於完全破壞.

英國的訥爾遜 (Nelson) 大破法西兩國的海軍於 Trafalgar, 他先以全力用「集中攻擊」法摧殘敵人艦隊的尾部半段;日俄之戰,日本先以全力攻俄國艦隊的頭部半段;這都

是要先造成局部的破壞,使敵人氣餒,遂至秩序紊亂呼應不靈,終歸於完全破壞,(請參看著名的 Nelson's Memorandum 及 Baudry's The Naval Battle)

第二種—先使敵人恐慌遂致組織紊亂,於是始則局部破壞,終則全部破壞.

這裏有個好例子:國民軍北伐時敗孫傳芳於江西浙江等處,或用便衣隊混入城中,或繞道出其後方,使對方驚慌駭亂秩序蕩然,於是不旋踵卽歸完全破壞,就是用的這種戰略.韓信的「移幟計」,也是屬這一種.歷史上這類的例子很多.這種戰略,在自已物質方面的戰鬥力不及敵人時,用之尤爲相宜!

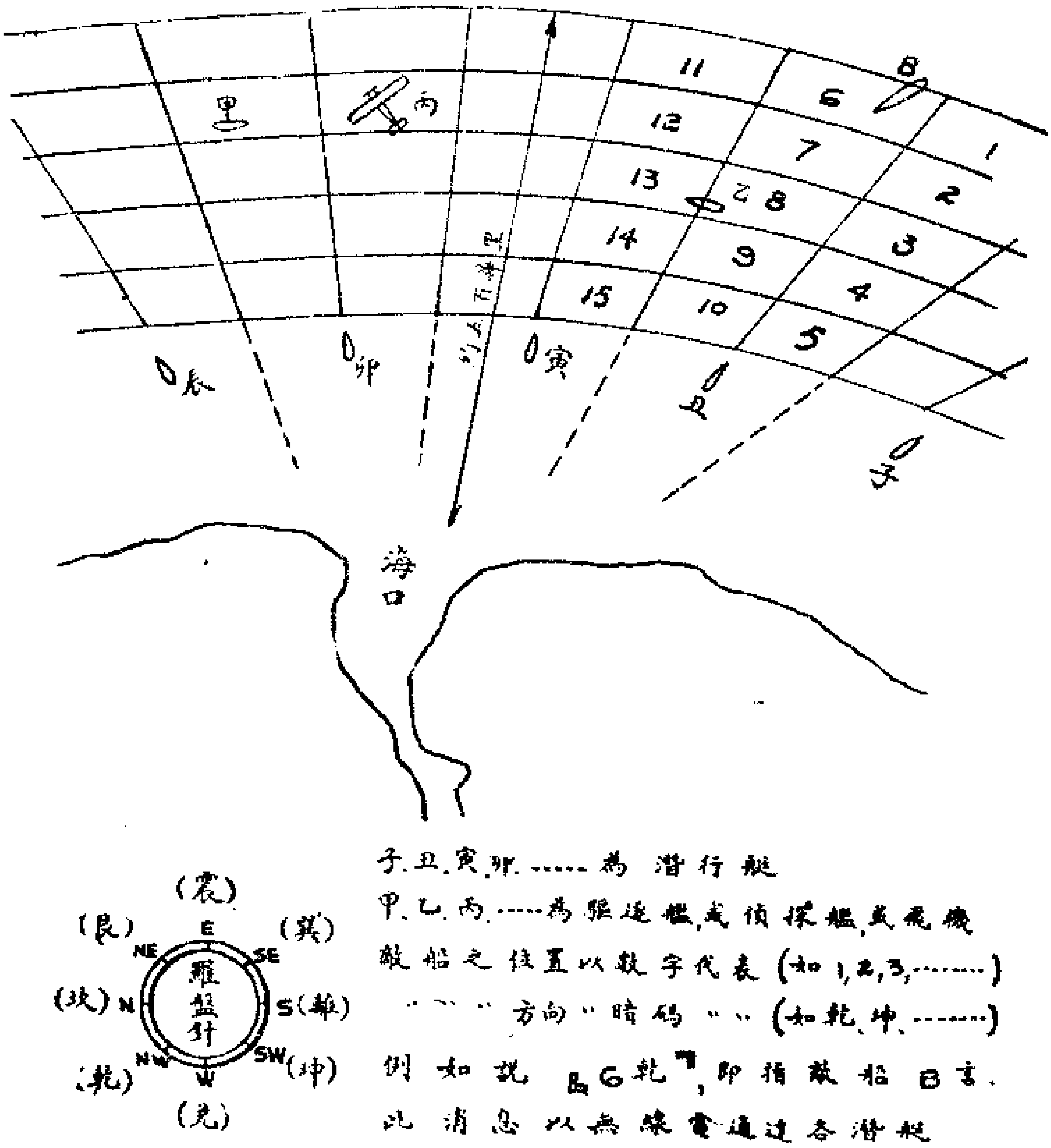
從上面看來,潛行艇在戰略上價值之大,可以不言而喻了.潛行艇恐佈力之大,可稱無倫!自然宜於第二種戰略.潛行艇專以魚雷或水雷攻敵船水線以下(敵船的弱點),簡直是敵船的『勾魂使者!』那末牠的破壞力也大,自然更宜於第一種戰略囉.歐戰時,潛行艇在大規模的戰爭舞台上,尙係發硎新試,成績已能如彼!將來速度增加,前途更難限量,這是誰也不能否認的!

第二節　潛行艇攻守之戰略

國手下棋,初無一定公式;那末大將臨陣,豈能拘於一格嗎?不過此處因欲把潛行艇的用途活畫出來,故聊舉數種步驟如下:

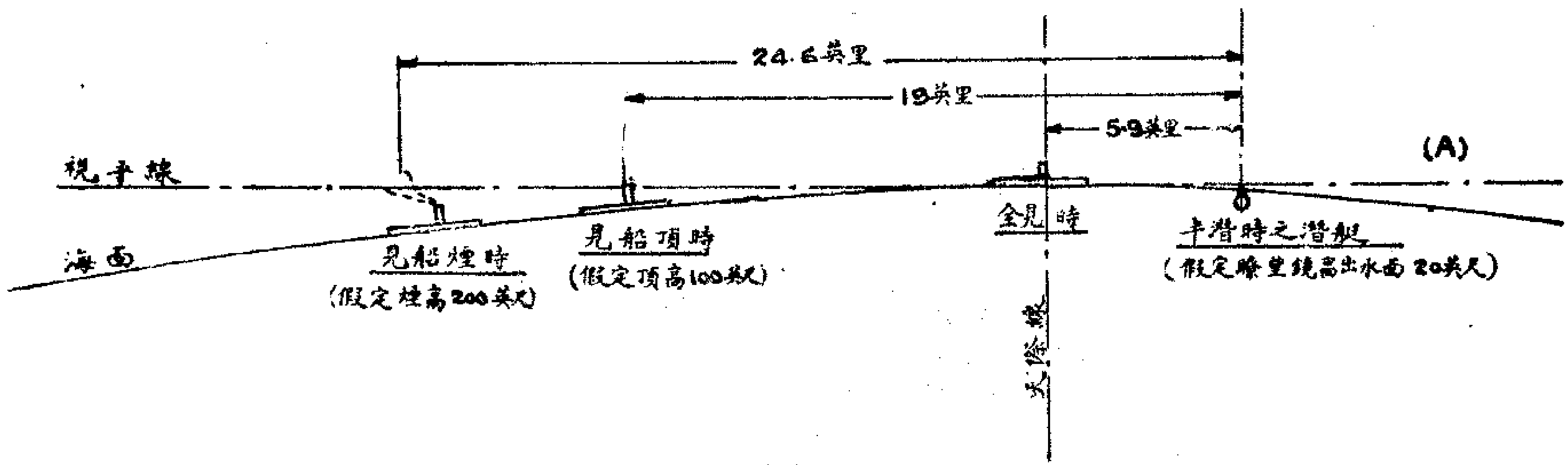
潛行艇的守法可分爲三種:(一)防海口;(二)防海岸;(三)破封鎖.牠的攻法也可分爲三種:(一)維持封鎖;(二)遊擊戰艦;(三)隨艦隊作戰.

我們先談潛行艇的「守法」:—

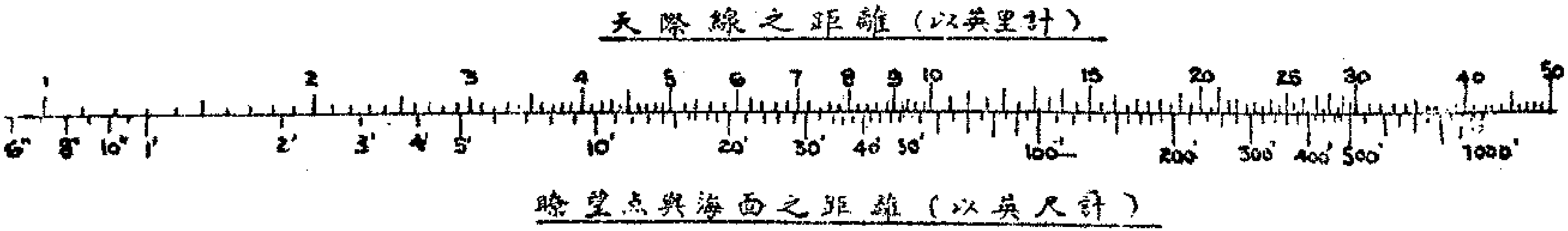


第二十六圖　防海口法

第二十七圖



註 (A)圖係根據附記之假定而來
別例可借(B)圖類推之



(B)

(一) 防海口法

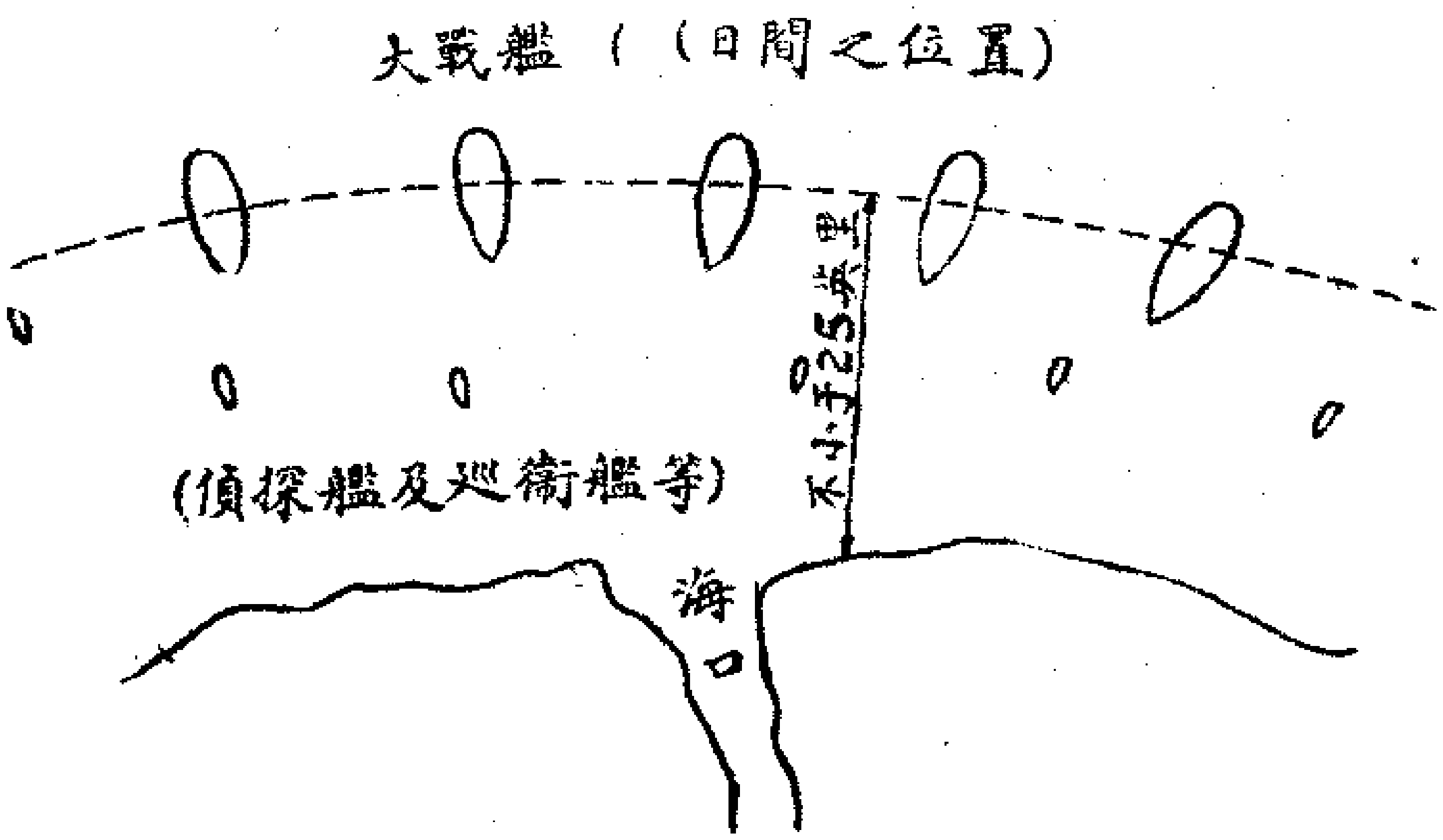
可將距岸 500 華里以內之海面分作若干「防守區」,並劃出 1, 2, 3,…… 等界段來,如第二十六圖.在每一防守區內,各駐潛行艇一隻,距岸須比敵炮的『射距』(Range) 還大一點.各潛行艇先「半潛」於水內,只留無線電桿於水外.在此防線以外,時時用驅逐艦 (Destroyers) 或偵探艦 (Scouts) 或飛機等往來梭巡,遇有敵艦如"B"時,即將其位置及行駛方向或其他消息(如船數等等)用無線電通報各潛艇,於是各潛艇即放下無線電桿,準備完全潛入水中.但仍可以半潛狀況向前進行,俟見敵人船烟時,(此時約距二十五英里上下參看第二十七圖)各潛行艇即停止進行.及至見敵船上半截時,即用瞭望鏡 (Periscope) 測量來船之速度及方向;測畢後,距敵最近的一隻(如第二十六圖"丑")即完全潛入水中,前往迎敵.此時其餘的潛行艇不必都去,只在"丑"附近的數隻(如"子""寅"等)隨"丑"前進,以便接應,(此隨敵艦數而異).這些前進的潛行艇都完全用潛行羅盤針行駛,只間以瞭望鏡出水糾正或有的錯誤.俟達到魚雷有效距離時,便放魚雷.此時若有變更預定防略之必要,即用「水下通話機」互通消息.

當瞭望鏡出水三呎時,本可看 4000 碼遠;但魚雷行經此距離時,約須五分鐘,若此時放出魚雷,那末對敵艦之速度若錯估了一海浬,魚雷行近敵船時便錯過 507 呎(以垂直

方向計算).若在1000碼時放出,那末只須一分鐘便可達到,卽使錯估兩海浬,也只錯出 203 呎來,若敵船有 500 呎長,仍可擊中.最妙是在 800 碼時放魚雷,那時敵艦雖欲改變方向,也來不及了!尋常水面上的魚雷艇對於敵船很不容易湊得這樣近,(歐戰時的魚雷,多半是在8000碼以上放的呢).不過在潛行艇,若用之得法,不難辦到這一步.這就是潛行艇可怕的地方.

(二) 防海岸法

此法可由上法「脫胎」而出,不必贅.



第二十八圖　　尋常之封鎖海口法

(三) 破封鎖法

通常之封鎖海口,用第二十八圖的法子,日進夜退.(因

夜間不利作戰,敵艦恐爲我所乘,故夜間必退至一二百英里以外,)退時,偵探艦(Scouts)及巡衛艦(Pickets),常在後面遊弋掩護.此時,潛行艇可躲過巡衛艦等,至大戰艦日間所駐之處,潛伏以待其明晨之來,來時卽出其不意,驟然以魚雷攻之.此時敵艦除「硬碰」(Ramming)與擲「潛水炸彈」(Depth Charge)外只有逃走一法.但大船若已停泊,必難於瞬息間引去,潛行艇大可在其左邊放一魚雷,然後深深潛下,行過船底,到右邊再由尾部魚雷管送一魚雷去.那時敵艦縱不大創,也必紛紛逃命不遑了!可是此處有一句話要補白一下,就是敵人若知我有潛行艇,必不敢緊緊封鎖!不見歐戰時英國用他的「總艦隊」(Grand Fleet)封鎖德國麼?封鎖倒是封鎖,可是距岸絕遠,甚至德國被封鎖的艦隊出去炸英國東岸 Scarborough 與 Hartlepool 兩個鎮市時,那「總艦隊」還不知道呢!事後他們逼近一點封鎖,却又在兩星期內被德國潛行艇炸沈了"Pathfinder","Cressy","Hogue""Aboukir"四隻大巡洋艦!於是那「總艦隊」不但退避三舍,並且還要今日遷東,明日遷西,年長月久的在北海中過這種飄泊生涯!由此可見潛行艇破封鎖的價值了.

[註: 此處在戰略上却不能不佩服英國的海軍.因爲德國所以攻 Scarborough 與 Hartlepool 兩個地方的,並無別意;就是要分開英國「總艦隊」的勢力以便行局部破壞法的意思!(卽前節所論第一種戰略). 偏偏英國不爲所動,情

願教那勢力雄厚的總艦隊在外面過飄泊生涯,也不分一部回去.真知灼見,的是難得!]

潛行艇的「攻」法

(一) 維持封鎖法 (Maintenance of Blockade)

第一步,先破除敵人海口外所埋的水雷,(若不能用掃雷艇 (Minesweeper) 行此手續時,即用掃雷潛行艇 (Mine-Cutting Submarine) 或避雷潛行艇 (Mine-Evading Submarine) 爲之.此種手續雖不容易,要非不可能.然後用潛行艇潛入海口內,以攻敵人戰艦及商輪.但是退出後,須有一「軍站」(可以一大駁船爲之),以便更替,再換一班水手前往,繼續工作.如此互相更替,便可延長時日.不過直到現在,此項避雷潛行艇尚未完全成功,只能用普通潛行艇去碰運氣罷了!

(二) 遊擊戰艦

此種手續,可想而知,亦因情形而異,此處不必談.

(三) 隨艦隊作戰

這最好是用大潛行艇 (Fleet Type Submarine). 當出發時,潛行艇緊隨大隊左右翼;見敵人艦隊後,即半潛入水 (Awash Condition), 此時主將發出命令,使潛行艇埋伏於某地,再設計誘敵人軍艦入其圈套.此計德人在北海中曾用過數次,不過英國人總是十分小心,深怕入其圈套.即如第二次北海之戰,當英國艦隊正追趕德艦 "Seydlitz" "Doerflinger" 及 "Maltke" 時,英國的密提中將大有滅此朝食的決心;不料忽

見德國的潛艇隊在那裏引滿待發,遂不得不急流勇退,連忙兢兢業業的跑了!

第五篇

潛行艇對於中國之關係

凡是地基大的國家,如美法等國,其海軍政策都宜於守;地基小的國家,如英日等國,其海軍政策都宜於攻.宜攻之國忌人守;故英國始終反對潛行艇,(這是凡讀過潛行艇歷史的人都知道的).在華盛頓會議時,英國已極力主張廢除潛行艇,雖未成功,却無時不想乘機再提.這次倫敦海縮會議自然又是絕妙的機會,所以特別聯合美國同提此案,結果,因法日反對,仍未成功!爲什麽潛行艇這樣難以廢除咧?就是因爲潛行艇是一種最有效的保護器,却又是一種最經濟的保護器!弱小的國家,要與大海軍,自然是不可能;地大的國家要與大海軍,却又不合算.爲這兩種國家計,只有潛行艇最爲合宜,小國有了潛行艇,不難使大國低首;經濟力弱的國家有了潛行艇,不難使大國放棄海上的霸權.所以潛行艇總是不易廢除的!那末,中國怎樣?中國地基很大自宜于守,潛行艇却是守的利器;中國經濟勢力薄弱,潛行艇却又是最經濟的保護利器!那末,潛行艇豈不是中國的對證藥嗎?作者還記得五年前,英國的M_1號潛行艇沈沒時,「倫敦路易船社」主席重唱廢除之議.那時在英國國內,真可算是一唱百和舉國若狂.于是有一個新聞記者特

去見英國海軍部的一位老公爵,探其意見.那位老公爵深深的嘆了一口氣,說道:"I am afraid Submarine will continue to be a weapon for Small naval powers!"(漢譯爲"我恐潛行艇將繼續爲小海軍國的利器呢!")我們固然決不承認中國是個小國,却不能不承認中國是個小海軍國.那末潛行艇對于中國的關係該是何等密切咧?這是就原則上說,再從環境上說,關係更大呢!

中國現在的國際地位,已是令人熱血欲沸慚汗難乾了!可是來日更有大難,將如之何?因爲東亞不久將有一場大戰,中國是必要捲入漩渦的.今請但言可能性較高的幾場大戰,如日美,中日,及日英等戰爭:—

『日美戰爭』如果實現,日本必以全力攻菲利濱.日本若得菲利濱,美國便不敗自敗,因爲美國在太平洋中海軍根據地不多,何能持久咧?但美國是「傻子」嗎?豈不知以全力守菲利濱嗎?美國海軍的實力比日本大,若用全力守菲利濱,日本豈易奪去嗎?日本不得菲利濱,也必失敗,因爲日本是蕞爾小邦最怕封鎖:封鎖一兩年,管包他們「一命嗚呼!」可是日本豈肯坐以待斃,嗎?(坐以待斃,是反人類本性的!)日本爲自衛計,必佔中國!這是自然的,必然的,毫無疑義的,因爲他們舍此卽無生路了!那末,我們中國取什麼態度呢.難道讓他們來佔中國嗎?不管那時中國的狀况如何,我相信明眼人必不持『同種同文』之迂論,以聯日而攻美.因爲

美國地大物博,對中國毫無領土上的野心;不似日本地小民多,力求發展,却又西見絕於美,南見拒於澳,所以時時刻刻總在中國想法子!我國要保存中國民族之光榮,決不能持書生之謬見以禍天下.所以對于日本來佔中國,我們是必要死力抵抗的.可是拿什麼來抵抗?請問!

日本欲佔中國,必一路由台灣來佔福建,一路由東海來佔長江一帶,一路由青島來佔津浦,一路由滿洲來佔平漢,除滿洲一路陸軍尚可幫忙抵抗以外,其餘各路,完全需海軍支持!大凡攻人之國,海軍不得勝利,陸軍卽不敢孤軍深入,致失策應.所以海軍實比陸軍更爲重要.但是我們的海軍在那裏咧?要新建設一個大海軍罷,那需一筆驚人的巨款!中國在實業未發達以前,政府之收入必無多!何能有此巨款?只有多造潛行艇,還是面面俱到的海軍良策!費既不多,勢力却厚!這大概是有目共睹,不須繁言的.

再談"英日戰爭".本來此種戰爭,由各方推測,是不會單獨發生的.但假定發生,日本必先攻香港,再攻新加坡無論此二處攻下與否,苟彼時美國不接濟日本鐵煤等原料,日本亦必佔據中國.但日英一旦有事,美國又何至接濟日本呢?只看數年前的一件事:自美國"移民案"發生後,英國卽着手重建新加坡軍港,這明明是防備日本向澳洲發展的意思.可見英美之對于日本,所憂患者正同,那時英美未必不聯合攻日呢!豈但英美如此,俄國爲西比利亞計,也未必

不加入英美一方呢!那末,日本除佔中國外,尙有何法?那時中國的地位,又與前條所論相同了!

由上文看來,可見中國之大患實在日本!本來人類的戰爭什九皆由『經濟』二字構成.日本厄於經濟,却又富於武備,"壯夫挺而走險",自不能不出於攘奪,况又與地大物博武庫空虛之中國爲隣,其攘奪自必更甚!中國欲防止此種攘奪,除自修武備外,決無他法!武備又以海軍爲最要;然欲費用之廉,魄力之大,見效之速,潛行艇在各種戰艇中實首屈一指.那末,潛行艇不是中國的『續命湯』是什麼?

此處可再附帶說一說中英間之關係:若說"中英戰爭",鄙意以爲是不會發生的.因爲英國若肯取消不平等條約,中英間之商務必甚,英國卽已心滿意足.英國屬地甚多,何必謀中國土地咧?雖現在英國在中國之勢力獨大,未必遽肯割愛;但若中國有一小小海軍兼有百十隻潛行艇可以自衞時,英國人是最善觀風色的,必馬上改變態度,將以昔日率列强謀我之手段,再率列强還我主權的!不見英國昔日對待日本麽?解鈴便是繫鈴人!這話是不會差的.再者還有一說:英國自己的前途也很危險.遠一點說罷,將來坎拿大因經濟的關係必要獨立;印度因政治的關係也必自主;於是"大英帝國"的命運就要隨"羅馬帝國"以俱去了!近一點說罷,現在英國的實業狀况已不見佳,以後也許更壞,於是她自"歐洲工業革命"以還在製造業上所享的優越

利也便完全喪失了.但是她若與中國攜手,商業尙可維持;若中國自已整興實業,她更可享受類似歐洲工業革命後的利益!所以她近來極力求好於華人.那末,她又何必與中國作戰咧?但是假定在某一時期內,中英兩方當道的人各走極端,造出一個戰爭來呢?那末中國只要有潛行艇,更可於攻下香港後,極力自守.從前德國的海軍,連英國一國也比不上;偏又加上法意等國的海軍!可是因為德國有潛行艇,公然被他支持至四年之久.最後還不是由海軍失敗的!那末,中國若用潛行艇政策以對付英國,守過若干時日後,國際間未必不起變化,正不知鹿死誰手呢!可是話又說回來了,英國人是最會觀風色的.若中國擁有許多潛行艇,英國必不與中國作戰.潛行艇素有「和平保障」之目,正是為像中國這樣的用小海軍可以守的一個大國說的!

左說右說,中國總以有潛行艇為佳.但是就中國現在的財政說,恐怕連潛行艇也不能多造呢!這一層或者可以不必過慮:法國當初造潛行艇時,法國人民,舉國若狂,羣猷樂輸,大款立集!所以法國有許多潛行艇,都是公民捐造的!我國人民,此時渴望國家强盛,願獻貲者必衆;海外華僑,更多殷實之戶,認捐豈肯後於國人?安見華人愛國之忱,不遠過法人數十倍呢?只要政府先造一兩隻,使國人知此事重要;以後卽募捐續造.也許是可能的.不然,由各省攤造亦決不難.

結論　本文的結論只有一句話,就是:—

爲國情計,爲財力計,兼爲小財力所能發生之大效力計,中國非厲行『潛行艇政策』不可!

（完）

〔附註〕　本論文第一篇脫稿於本年三月,故篇首尙謂『現在倫敦海縮會議尙未告終……』云云,(見第一期);後因印刷遲滯,遂將季刊改於九月出版,而彼時海縮會議閉幕已五月矣!幸閱者諒之.

再者:第一期中,本文尙有錯誤數處,謹改正如下:—

位	置	誤	正
第一卷	第八圖中	586'	528'
第一期	第21行	五百八十六呎	五百二十八呎
第115頁	第22行	每方吋平添三萬七千五百磅	每方呎平添三萬三千八百磅

作者補識

十九年十二月十日,武漢大學

𦾨圈上定位問題

(Orentation in Benzene Ring)

徐 賢 恭

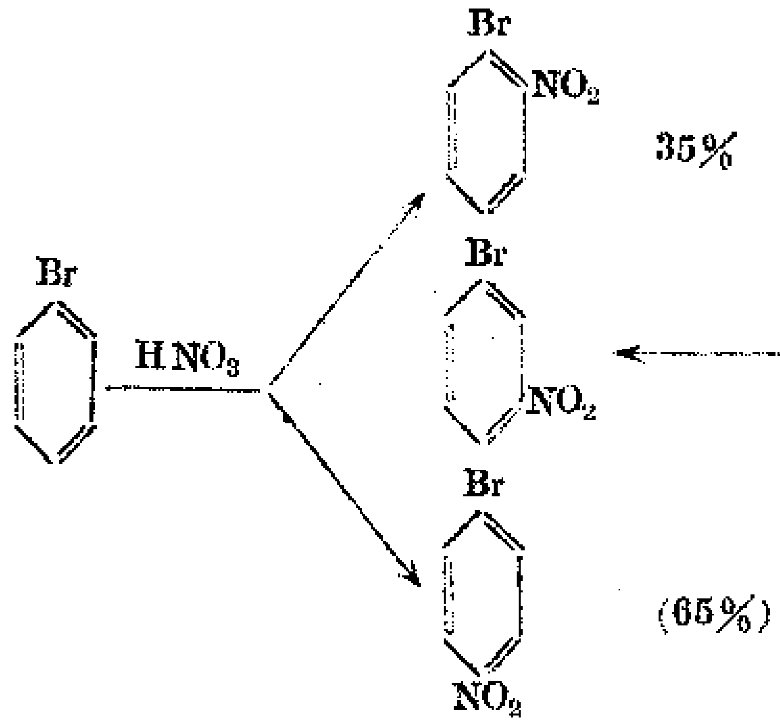
1. 引 言

關於𦾨圈上定位問題,情形複雜,範圍宏廣,歷來研究有機化學者,均頗注意及之,故討論詳甚,惜本章限於篇幅,僅能略述其大概,其詳細論列,則可於專書或雜誌中得之矣.

設有一次𦾨質誘導物(mono-derivative of benzene)與某一物質相化合,如下式,

$$C_6H_5X+YZ \longrightarrow C_6H_4 \cdot XY+H \cdot Z$$

其生成之物,可爲一種,可爲兩種或三種同分異性體(isomer);因𦾨圈上有三位置,任Y根選擇也.但究竟選擇何位置,產生何種二次誘導物(di-derivative),殊屬疑問.就普通情形推之,除𦾨質本身作用不計外,其餘X, Y, Z三根及被代替之氫元子四者,當各有影響,Y根選擇何位置,而成何種二次誘導物,須視此四者合成之影響如何以爲定.但據實際觀察,一次𦾨質誘導物上之X根,其性質關乎新根Y之定位,影響尤大,其餘均屬輔助之地位,作用殊微弱也.試將bromobenzene加濃硝酸使起氮化作用(Nitration)後,發生百分之三十五 O-nitrobromobenzene, 百分之六十五 p-nitro-bromobenzene, 而 m-nitro-bromobenzene 則付缺如;若顛倒此種變化,將nitrobenzene 加溴素使起溴化作用 (Bromination), 則完全發生 m-nitro-bromobenzene,而 o,p-nitro-bromobenzene 全付缺如:



觀此例,可知二次輪質誘導物之新根,採取何種位置,悉受原來根之支配,若原來為溴根,則採取隣位 (Ortho-position) 與對位 (para-position), 若原來為二氧化氮根, (-No$_2$) 則採取間位,(meta-position),固與其餘各事,不顯多大關係也;又知代替根,有兩種式態 (Two types of substituent), 一種式態之代替根,有隣位與對位之指向作用 (o,p-orienting influence), 如溴根屬之,其他一種式態之代替根,則祇有間位之指向作用 (m-orienting influence), 如二氧化氮根屬之,至其如何分法,實關重要,以下請將諸分類法則,試詳述之.

II. 各種定位法則 (Rules for orientation)

1. 胡布勒氏之法則 (Hubner's Rule) ——考定位之法則,當

推胡氏為首創.胡氏於 1875 年即進一法則如下:"蝓圈上原有之根,若為極弱之酸根,(least acidic radicle),則將另一酸根代入時,必發生隣位與對位二次誘導物(o, p-di-derivative);若原來之根為酸性,再代入一酸性之新根時,則祇發生間位二次誘導物(m-di-derivative)".此法則固有相當之價值,但其所謂酸根,及弱酸根,殊為含混,無明確之規定,故何者為酸根,何者為弱酸根,殊難斷定,乃其一大缺點也.就上例而言,溴與二氧化氮若謂一為酸根,一為弱酸根,實無根據,若謂二者均為酸根,則溴根有隣位與對位之指向作用,而二氧化氮則僅有間位之指向作用,二者截然不同,此何以故?

2. 羅爾亭氏之法則 (Noelting's Rule)——於 1876 年,羅氏又繼胡氏進一類似之法則:"若蝓圈上位置 1 為一中性,鹹性或弱酸性根,如 CH_3, Cl, Br, I, NH_2, OH 等,所佔據,則當 Cl, Br, I, HNO_3 及 H_2SO_4 與之作用時,即發生大部分對位與少量隣位二次誘導物;反之,如位置 1 上被酸根如 NO_2, COOH, 或 SO_3H 等,所佔據,則當 Cl, Br, I, HNO_3 及 H_2SO_4 與之作用時,即發生間位二次誘導物,而隣位與對位二物為量俱極微細."觀羅氏此法則與胡氏雖相似,但其定義稍較明晰,可算已有進步,惟胡氏法則中之缺點,羅氏仍未能免除,實屬缺憾.

3. 克,紀二氏之法則 (Crum Brown Gibson's Rule)——克,紀二氏之法則,創立於 1892 年,與以上二法則,迥然不同.彼謂"設有一次蝓質誘導物,$C_6H_5 \cdot X$,其中 X 根之氫化物 HX,若

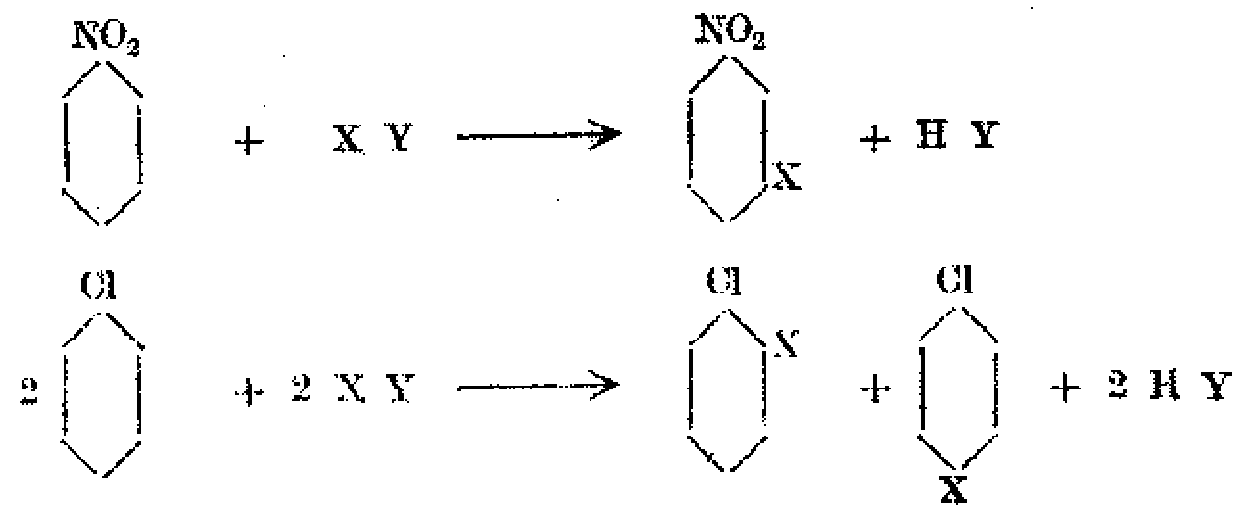
能直接氧化變爲其氫氧化物HOX,則此根,卽有間位之指向作用,而當 C_6H_5X 與他物化合時,則發生間位二次誘導物;反之,如 X 根之氫化物,不能直接氧化變爲其氫氧化物,則此根卽有鄰位與對位之指向作用,而當C_6H_5X與他物化合時則發生鄰位與對位二次誘導物." 所謂直接氧化,按二氏之意,卽由某氫化物可一步氧化變爲其氫氧化物也.例如 CH_3 與 CH_3CO 二根之氫化物爲 $CH_3 \cdot H$ 及 $CH_3CO \cdot H$,此二者均可氧化變爲其氧化物 $CH_3 \cdot OH$ 及 $CH_3 \cdot CHO$,但$CH_3 \cdot OH$ 一步氧化,不能得之,而 $CH_3 \cdot CHO$ 則可,於是後者卽謂之直接氧化而前者則否也.今欲實地表明此法之應用起見特製一表如下:

I	II	III	IV	V
$C_6H_5 \cdot Cl$	$-Cl$	$H \cdot Cl$	$HO \cdot Cl$	O—P
$C_6H_5 \cdot Br$	$-Br$	$H \cdot Br$	$HO \cdot Br$	O—P
$C_6H_5 \cdot CH_3$	$-CH_3$	$H \cdot CH_3$	$HO \cdot CH_3$	O—P
$C_6H_5 \cdot NH_2$	$-NH_2$	$H \cdot NH_2$	$HO \cdot NH_2$	O—P
$C_6H_5 \cdot OH$	$-OH$	$H \cdot OH$	$HO \cdot OH$	O—P
$C_6H_5 \cdot NO_2$	$-NO_2$	$H \cdot NO_2$*	$HO \cdot NO_2$	M
$C_6H_5 \cdot CCl_3$	$-CCl_3$	$H \cdot CCl_3$	$HO \cdot CCl_3$	O—P
$C_6H_5 \cdot COH$	$-COH$	$H \cdot COH$*	$HO \cdot COH$	M
$C_6H_5 \cdot COOH$	$-COOH$	$H \cdot COOH$*	$HO \cdot COOH$	M
$C_6H_5 \cdot SO_2 \cdot OH$	$-SO_2 \cdot OH$	$H \cdot SO_2 \cdot OH$*	$HO \cdot SO_2 \cdot OH$	M
$C_6H_5 \cdot CO \cdot CH_3$	$-CO \cdot CH_3$	$H \cdot CO \cdot CH_3$*	$HO \cdot CO \cdot CH_3$	M
$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot COOH$	$-CH_2 \cdot COOH$	$H \cdot CH_2 \cdot COOH$	$H \cdot CH_2 \cdot COOH$	O—P

表中第一列爲一次輪質誘導物,第二列爲各該誘導物

之根,第三列該根爲各之氫化物,上加有•符號者,則表示該氫化物可直接氧化變爲其氫氧化物,第四列爲各該根之氫氧化物,第五列爲由第二列中之各根,據此法則所推出之結果也.讀者一觀此表,必可對此法則,得一深切之了解矣,但其效用如何?想亦爲讀者所樂知,不可不順便討論之

據實際之觀察,克紀二氏之法則,較之以前諸法則,已有進步,大多數代替現象,均能與其相合,試舉二例以明之:就 nitrobenzene 而言,其中之根爲 NO_2, 此根之氫化物 $H{\cdot}NO_2$ 由實驗測知可直接氧化變爲 $HO{\cdot}NO_2$, 於是由二氏之法則推之, nitrobenzene 應發生間位二次誘導物;又就 Chlorobenzene 而言,其中氯根之氫化物 $H{\cdot}Cl$, 由實驗測知,不能直接氧化變爲 $HO{\cdot}Cl$. 於是據二氏之法則推之 Chlorobenzene 應發生隣位與對位二次誘導物,證之實驗,果不稍謬



足徵此法則之效用,殊可恭矣.但細察之其缺點亦甚多,何可謂已臻於至善也矣.例如二氏所謂一步氧化,毫無溫度

與壓力之限制,殊有未妥,試就氫氧根言之,其氫化物,水,在低溫時,固不能一步氧化變爲過氧化氫 HO·OH, 但在高溫時使水氧化,則能得之.

$$2H_2O+O_2 \rightleftharpoons 2H_2O_2$$

又若水受紫外光線 (Ultraviolet light) 之作用,亦可發生多量之過氧化氫,由此現象,則據二氏之法則推之,氫氧根當有間位之指向作用,但實際氫氧根爲有隣位與對位之指向作用,與所推測之結果未嘗相合,此顯係此法則未有溫度限制之缺點.若於"一步氧化"之前,加以"在通常情形之下"數字,卽"在通常情形之下一步氧化" (One step of oxidation under ordinary conditions) 則無此病矣.實則其要害,尙不在此.克紀二氏祇就其當時之觀察:凡有隣位與對位指向作用之根,其氫化物,均不能直接氧化,凡有間位指向作用之根,其氫化物則能直接氧化,於是乃創立此法則,其後化學日趨進步,已知其不能盡然,如 $H·CH_3$ 當時未見其能一步氧化變爲 $HO·CH_3$, 後於 1906 年,據鮑勒 (Bone) 氏之研究,謂屬可能,故此法則與此現象雖可苟合於當時,後卽不能適用矣.由此推之,此法則之前途,實未可樂觀,吾人對之,殊爲隱憂也.

4. 阿孟斯創氏之法則 (Armstrongs Rule) —— 阿氏之法則爲: "設將 $C_6H_5·X(Y)_n$ 表示一次輪質誘導物,其中 X 代表附着於輪圈上之元子, $(Y)_n$ 代表與 X 相結合之諸元子,若 $(Y)_n$

均為一價則產生隣位與對位二次誘導物,若其中有一多價之元子,則產生間位二次誘導物.此法則驗之 azo-benzene, $C_6H_5 \cdot N=N \cdot C_6H_5$, 殊難相合,其效用可想見矣.試將 azo-benzene 起氮化作用,其產物為 p,o nitro-azo-benzene, 但 azo-benzene 中兩氮元子,均為多價,此與依阿氏之法則所推得之結果適相反也.

5. 福爾蘭得氏之法則(Vorländer's Rule)——福氏之法則與阿氏之法則,頗相類似,惟稍有進步,其法則如下:"設使一次輪質誘導物 $C_6H_5 \cdot E$ 起硫化(Sulphonation),氮化與溴化諸作用,其產物為隣位,與對位抑為間位二次誘導物,則視 E 根中之與輪圈貼近之元子為飽和抑為未飽和以為定,如為飽和,則該根卽有隣位與對位之指向作用.如

$$-Cl,\ -Br\ -OH,\ -CH_3,\ -CH_2Cl,\ -CH_2COOH$$

諸根均屬之;反之若該根中貼近輪圈之元子為未飽和,則有間位之指向作用,如

$$-NO_2,\ -CN,\ -CHO,\ -COOH,\ -SO_3H$$

諸根均屬之.

試就上例觀之,何以知一根中與輪圈貼近之元子為飽和抑為未飽和?殊屬疑問.此福氏並未說明,姑舉 $-CN$,$-CHO$,$-CH_3$,$-CH_2 \cdot COOH$ 四根,按鄙意,解答如下:

考 $-CN$ 根之構造式為 $-C⋮N$,其中之碳與氮雖彼此相飽和,但遇有機會,每一元子均可分其二價與他元子或他根

相結合,如 $-CN \longrightarrow CO\cdot NH_2$, 卽其一例.凡一根中可另外增加新元子而無原有之元子或根被排出者,均謂之未飽和根,$-CN$ 適與此規定相合故不得不謂之未飽和根,而其中與輪圈貼近之碳亦爲未飽和元子矣.

$-CHO$ 之構造式爲 $-\underset{\displaystyle H}{\overset{\displaystyle H}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}=O$, 由上例推之可知其中之碳,亦爲未飽和之元子.

$-CH_3$ 之構造式爲 $H-\underset{\displaystyle H}{\overset{\displaystyle H}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}-H$,— 觀此式自可知其爲飽和之根.

$-CH_2\cdot COOH$ 之構造式爲 $H-\underset{\displaystyle H}{\overset{\displaystyle H}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}-C\begin{smallmatrix}\nearrow O\\ \searrow OH\end{smallmatrix}$,此根中第二碳元子,雖未飽和,但與輪圈貼近之碳元子,則爲飽和殊爲明顯.

觀此數例對於凡一根之與輪圈貼近之元子爲飽和抑爲未飽和當可明辨之矣.

考福氏之法則,證之實驗其效用頗爲不弱,但仍有未相符合之現象如下:試觀 $C_6H_5\cdot NH_2$, 其根中之氮元子,實爲未飽和,因此根常易與一分子氯化氫結合而成 $-NH_2,HCl$, 依福氏之法則, NH_2 根應有間位之指向作用,但實際若將 aniline 加濃硫酸使起硫化作用,其主要之產物爲 aniline-p-sulphonic acid 或稱 sulphanilic acid.

$$C_6H_5\cdot NH_2 \xrightarrow{\text{Sulphonation}} C_6H_4\begin{smallmatrix}\diagup NH_2\\ \diagdown SO_3H(P\cdot)\end{smallmatrix}$$

又如C_6H_5I,若加硝酸使起氮化作用,其產物為 o,p-nitro iodobenzene,就此須視碘為飽元子,始能相合,但就 $C_6H_5ICl_2$, C_6H_5IO 及 $C_6H_5IO_2$ 諸化合物觀之,碘似未飽和,此又將何以解釋之?故此法則殊難行之而無惑也.

以上所舉之法則凡五,固各有缺點,但其價值殊有不同,又各法則對於同一現象,其間復有彼此發生抵觸之處,嘗有一現象,可合於此而不合於彼,亦有可合於彼而不合於此者,試將荷雷曼(Holleman)氏所搜集之例,述之如下:

1. 取 Phenylacetic acid, $C_6H_5CH_2 \cdot COOH$,而論,其中 $-CH_2 \cdot COOH$,顯然為一酸根,於是據胡,羅二氏之法則,此根應有間位之指向作用,又據阿氏之法則,亦應如此,因 β 碳元子 ($C_6H_5 \cdot C_\alpha H_2 \cdot C_\beta OOH$) 為多價也.反之,因$-CH_2 \cdot COOH$ 根之氫化物醋酸,不能直接氧化變為 glycallic acid, 又因其中與綸圈貼近之元子碳為飽和狀態,依克,紀二氏與福氏二法則推之,此根應有隣位與對之指向作用,此與實驗結果,適相符合,但與胡,羅及阿氏三法則,則相抵觸矣.

2. 取 phenyl-nitromethane,$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot NO_2$, 而論,其根由 CH_2 與 NO_2 兩部分而成,$-CH_3$根通常認為帶鹹性,NO_2根通常認為富於酸性,其合成之根,謂為中性,或弱酸性,當屬合理,於是據胡,羅二氏之法則,此根應有隣位與對位之指向作用;又該根之氫化物$CH_3 \cdot NO_2$不能一步氧化變為$HO \cdot CH_2 \cdot NO_2$,且其與綸圈貼近之元子碳為飽和狀態,故依克,紀二氏及福氏

二法則推之,亦應如此,但據阿氏之法則,適與之相反,證之實驗,獨相符合耳.

3. Cyanide $-CN$ 根為弱酸性,故據胡,羅及克,紀諸氏之法則,此根應有隣位與對位之指向作用,但依阿,福二氏之法則推之,則適相反,應有間位之指向作用,實驗結果,亦得間位二次誘導物,與之不期然而合也.

4. Acetanilide, $CH_3 \cdot CO \cdot NH \cdot C_6H_5$, 其根為 $CH_3 \cdot CO \cdot NH-$, 除阿氏之法則而外,據其餘諸法則推之,此根均應有隣位與對位之指向作用,實驗結果亦相符合.

5. Cinnamic acid $C_6H_5 \cdot CH{:}CH \cdot COOH$,據諸法則推之,均應得間位二次誘導物,但實驗結果,乃為隣位與對位二次誘導物.

觀上數例,可知無一法則,與事實完全相符合,但比較之要以福氏之法則與實驗相合之機會為多,故較為可取耳.

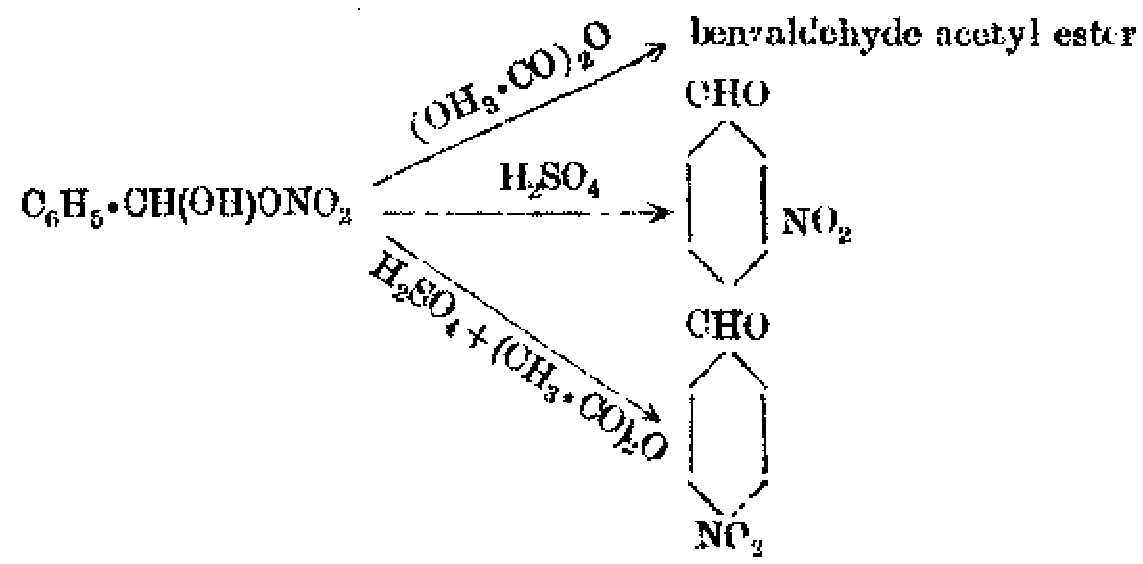
關於代替法則,上已略述之矣,但均謂隣位與對位二同體可同時發生,間位則單獨發生,未曾有一法則,謂同時可分有隣位對位與間位三種同分異性體發生.實則,此種情形,常有遇之,如 toluene, benzoic acid, aniline, acetanilide, benzanilide, acetophonone 諸化合物,若加硝酸,使其起氮化作用,均可同時發生隣位,對位與間位三種同分異性體.蓋由普通之觀察,如對位為主要之產物,隣位常有之,間位或有或無,有之亦極有限,如隣位為主要之產物,對位與間位,常俱有之,惟間位極少,如間位為主要之產物,少許隣位或對位或二者

俱可發生,此雖不能成爲一定之法則,實際常有此種情形,惟第三種同分體爲數極微,不易分出,故可認爲忽之.

III 代替作用與環境之關係及直接代替與間接代替之區別

以上研究諸法則時,往往遇有與諸法則相抵觸之現象,此固表示各法則之弱點,但代替作用殊爲複雜,常受外界之種種影響,而易其結果,如溶劑,溫度等,乃其影響之最大者也.又關於代替輪圈上之氫有直接與間接作用之不同,其情形亦甚複雜,此均爲各法則所未曾提及者,試詳述之如下;

溶劑關係:——當 benzaldehyde 加以60% 硝酸,即發生一種無色而不穩固之油狀產物,其公式蓋爲 $C_6H_5\cdot CH(OH)\cdot O\cdot NO_2$, 此物若溶於 acetic anhydride 中,則得 benzaldehyde diacetyl ester, 溶於硫酸中,則得 m-nitro benzaldehyde, 溶於硫酸及 acetyl anhydride 之混合液中,則得 p-nitrobenzaldehyde:



溶劑不同,則所得之結果各異,由此可知代替作用與溶劑

之關係,頗爲密切,蓋因苯圈上原有之根,其性質可隨溶劑而改變,故新來之根所入於苯圈上之位置,各有不同也.

溫度關係:——當phenol與濃硫酸加熱,若溫度不高,其產物爲 phenol-o-sulphonic acid 與少許 phenol-p-sulphonic acide, 但若溫度高至 $100°-110°$, 則 phenol-o-sulphonic acid 漸變爲 phenol-p-sulphonic acid, 由此可知溫度之與代替作用,殊有關係也.

直接代替與間接代替:-

凡新代替之根,直接作用於苯圈上某一位置,將該處之氫元子排出而已取而代之,此種代替,謂之直接代替(Direct substitution).但所有各種代替作用,是否均如此簡單,實屬疑問,及取多種情形而考究之,知其不然,常有一種情形,表面視之,似係簡單之直接代替,實則甚爲複雜,其根與苯質誘導物發生作用之點,往往非卽新根最後所佔據之位置,此種代替,謂之間接代替(Indirect substitution).可舉數例如下:

a. 漂白粉對於 acetanilide 之作用,乃一最簡單之例.韋特(Witt) 氏將 acetanilide 溶於醋酸中,後加漂白粉,得出 p-chloroacet-anilide

$$2C_6H_5 \cdot NH \cdot OC \cdot CH_3 + Cl_2 \longrightarrow 2C_6H_4(Cl)NH \cdot OC \cdot CH_3$$

此反應初見之,似甚簡單,乃氯元子與燐位上之氫相替換而已,後發現該反應中,若用酸性碳酸鉀($KHCO_3$)代替醋酸,則所得之物,爲一晶狀 aceto-chloro-anilide $CH_3 \cdot CO \cdot NCl \cdot C_6H_5$, 其分子中氯元子係接合於氮元子上,甚易爲他元子所替換,

如加以碘化鉀於含有該物之酸液中,則得 acetanilide, 若加以普通之酒精,則得 acetanilide, acetaldehyde 及鹽酸,其反應式如下:

$$CH_3\cdot CONCl\cdot C_6H_5+2HI\longrightarrow CH_3\cdot CONH\cdot C_6H_5+HCl+I_2$$

$$CH_3\cdot CoNCl\cdot C_6H_5+CH_3\cdot CH_2OH\longrightarrow CH_3\cdot CO\cdot NH\cdot C_6H_5+CH_3\cdot COH+HCl$$

若將此物溶於醋酸中,則立卽變爲 p chloroaceanilide, 其中氯元子離開氮元子,隨卽將輪圈上之一氫元子排出而代替之.由此以觀,漂白粉與 acetanilide 在醋酸中似先與其分子中之氮元子起作用,發生 acet-chloro-anilide, 然後再藉同分異性之變化 (isomeric change) 變爲 p-chloro-acet-anilide, 故其作用,乃間接代替也.

b. 如將 aniline 加硫酸使起硫化作用而製備 sulphanilic acid $C_4H_6\left\langle\begin{matrix}NH_2\\ So_3H(P)\end{matrix}\right.$ 其反應則更爲複雜:

$$C_6H_5\cdot NH_2+H_2SO_4\longrightarrow \underset{\text{aniline sulphate}}{C_6H_5\cdot NH_2\cdot H_2SO_4}$$

$$\Big\downarrow -HO$$

$$\underset{\text{Phenyl-sulph aminic acid}}{C_6H_5\cdot NH\cdot SO_3H}$$

$$\Big\downarrow \text{isomeric Change in presence of } H_2SO_4$$

$$\underset{\text{sulphanilic acid}}{C_6H_4\left\langle\begin{matrix}NH_2\\ So_3H(P)\end{matrix}\right.}\xleftarrow[\text{at higher temperature}]{\text{isomeric Change}}C_6H_4\left\langle\begin{matrix}NH_2\\ So_3H(O\text{-})\end{matrix}\right.$$

先 aniline 與硫酸化合成爲 aniline sulphate, 次加熱, aniline sulphate 被其中多餘之硫酸吸去一分子水而變爲 phenyl-sulphaminic acid, 再藉硫酸之作用起同分異性之變化,變爲 o-alniline sulphonic acid, 後加高溫度再從一次同分異性之變化,始變成 sulphanilic acid, 此變化間接又間接,須經四步,始克成功.

觀以上兩種代替情形,輪圈上初代替之根 (initial substituent) 頗似一起重機(crane), 先將後來之根提起,然後再放入於輪圈上一適當之位置,此雖係一種比喻,亦足以助吾人之記憶也.

c. Friedel-crafts 之反應亦爲間接代替之一種.據拍爾 (Perrier) 氏研究,當 aryl chloride 與 aromatic hydrocarbon 及氯化鋁諸物發生作用以製備 aromatic ketone 時,可分數步變化,並可得數種中間產物 (intermediate product): 第一步兩分子 aryl chloride 與一分子氯化鋁化合,變爲一種雙合物 (double compound), 此物再與一氫碳化物 (hydrocarbon) 化合變爲另一種雙合物而放出兩分子氯化氫,最後一步此物遇水分解始變成 aromatic ketone. 今取 benzoyl chloride 與 toluene 及氯化鋁三者之反應示之如下,以爲此類反應之代表:

I. $2C_6H_5\cdot COCl + Al_2Cl_6 \longrightarrow (C_6H_5\cdot CO\cdot Cl)_2, Al_2Cl_6$

II. $(C_6H_5\cdot CO\cdot Cl)_2, Al_2Cl_6 + 2C_6H_5.CH_3 \longrightarrow (C_6H_5\cdot CO\cdot C_6H_4\cdot CH_3)_2, Al_2Cl_6 + 2HCl$

III. $(C_6H_5\cdot CO\cdot C_6H_4\cdot Cl_3)_2,Al_2Cl_6+nHO \rightarrow 2C_6H_5\cdot CO\cdot C_6H_4.$

$CH_3+Al_2Cl_6,nHO_2$

觀拍氏之研究,似屬甚奇,但曾有博斯康 (Boesken) 氏為之證明,殊為可信,且顧斯特夫遜 (Gustavson) 氏研究從 ethyl chloride, 輪質及氯化鋁三者以制備氫碳化物之反應,亦如上相似.其初此三者發生少量 $C_5H_3(C_2H_5)_3Al_2Cl_6$, 此物有甚强之媒介性質,可結合於一氫碳化物上,結合之物,遂富有特殊反應能力,可再與一分子 alkyl halide 凝結,此凝結之物加熱立即分解,遂發生 $C_6H_3(C_2H_5)_3$, 同時原來之媒介物又恢復原狀,可再與 ethyl Chloride 及輪質發生作用,而繼續產生 $C_6H_3(C_2H_5)_3$,故以後無須添加氯化鋁,由少量之媒介物即可將所有之輪質與 ethyl Chloride, 變為 $C_6H_3(C_2H_5)_3$.其反應式如下:

I. $C_2H_5Cl+C_6H_6+Al_2Cl_6 \longrightarrow C_6H_3(C_2H_5)_3,Al_2Cl_6+3HCl$

II. $C_6H_3(C_2H_5)_3,Al_2Cl_6+C_6H_6 \longrightarrow C_6H_3(C_2H_5)_3,C_6H_6,Al_2Cl_6$

III. $C_6H_3(C_2H_5)_3,C_6H_6,Al_2Cl_6+3C_2H_5Cl \rightarrow [C_6H_3(C_2H_5)_3]_2Al_2Cl_6+3HCl$

$$\downarrow \text{加熱}$$

$C_6H_3(C_2H_5)_3+C_6H_3(C_2H_5)_3,Al_2Cl_6$

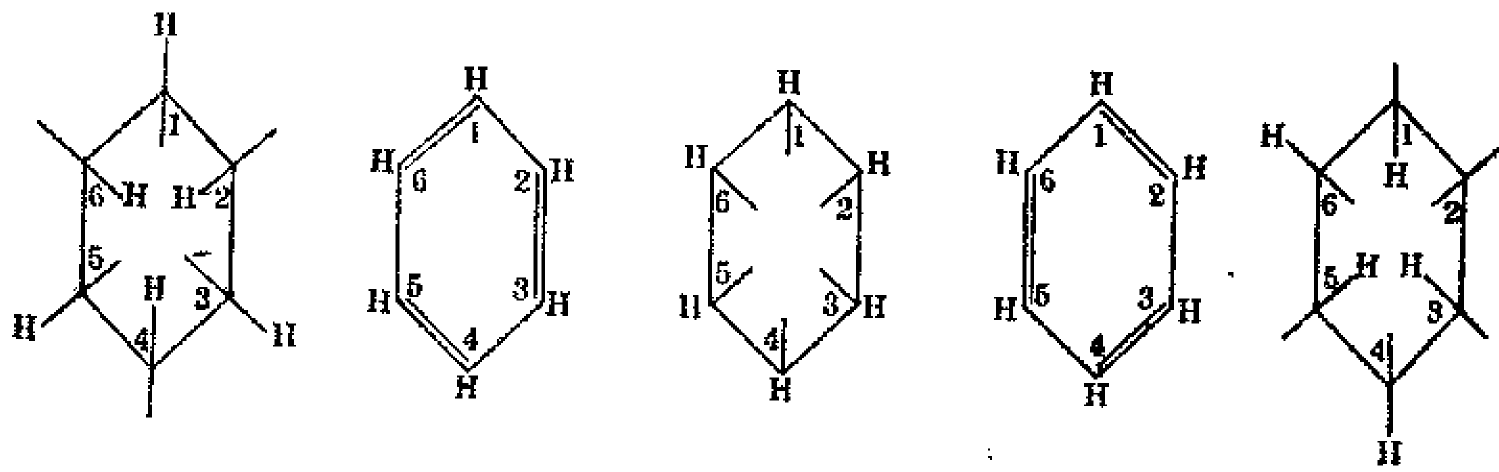
據顧氏之觀察,若欲得 mono- 與 di-alkylated benzene, 氯化鋁須極少,否則其產物均為 tri-alkylated benzene 矣.試觀此兩例,可知此種變化,須藉一媒介物之力始可成功,且媒介物之多寡,於其產物殊有關係.故 Friedel-Crafs 之反應,乃一新式

(fresh type)間接代替,與上不同也.

本題討論至今,尙祗說明各種法則而已,但法則之功用,僅能表示何根有間位之指向作用,何根有隣位與對位之指向作用,關於何故隣位與對位之產物,同時發生,間位之產物,則單獨發生,又後來之新根,其替換之情形如何?則毫未論及,此種問題,殊爲重要,曾有各種臆說,相繼而出,以解釋之,若歸納之,概可分爲二類:一類臆說,係以一切化合,均由於愛力作用之觀念爲其根據,一類臆說,乃以一切化合,均由於電力作用之觀念爲其根據,以下試分別述之.

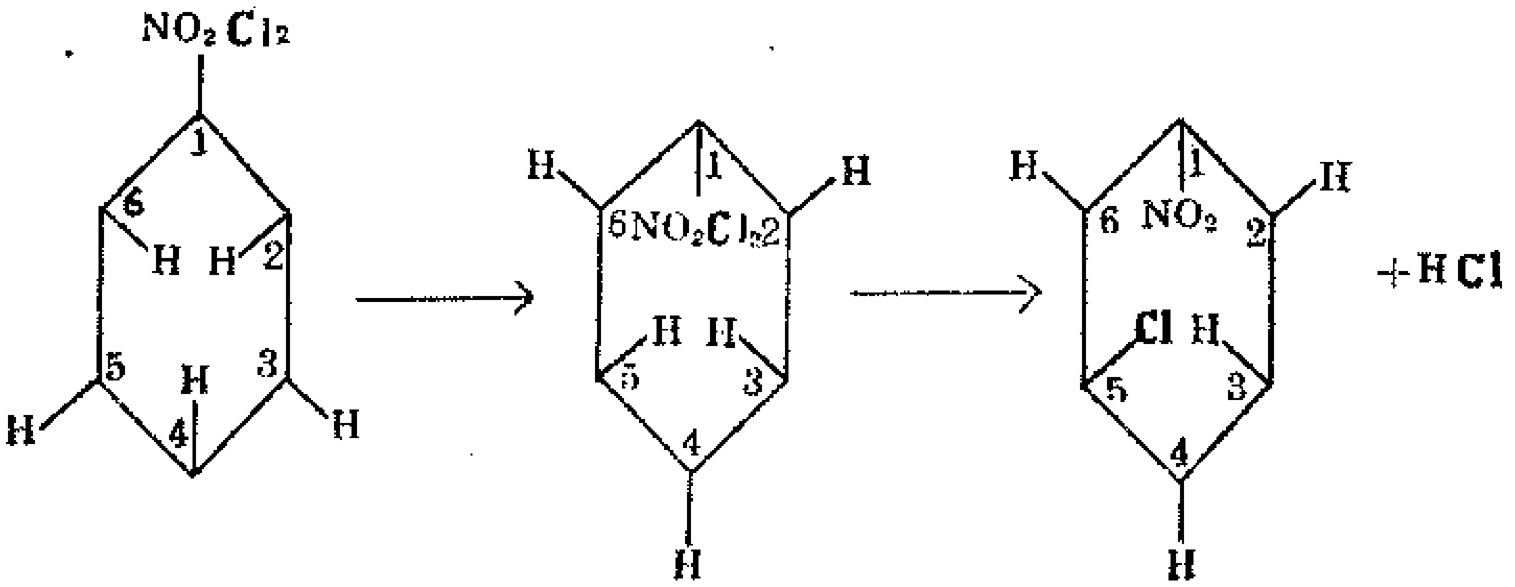
IV. 根據愛力觀念之各種臆說 (Orientation Hypothesis basded on Affinity)

1. 柯立氏之臆說 (Collie's Hypothesis) ——柯氏於 1897 年發明一動力輪質公式 (Dymanic formula). 此公式若無模型,雖殊解釋,今假定學者業已明瞭,於此乃順便一提耳.柯氏輪質公式,乃表明六碳元子各佔據於一有法八面形上之一頂角所,成一種對稱之組合,且每一碳元子均帶一氫元子於其上.此氫元子,其數共爲六,若一檢驗模型,卽知係分二組排列,每組爲三氫元子,據柯氏之推想,碳元子可自由轉動,此兩組之氫元子亦隨之而運動,一組向輪質分子中心運動,一組由分子中心向外運動,此種碳氫元子運動之結果,遂成輪質分子之數種擺動形態 (Vibration phases),其平面上之射影,可示之如下:



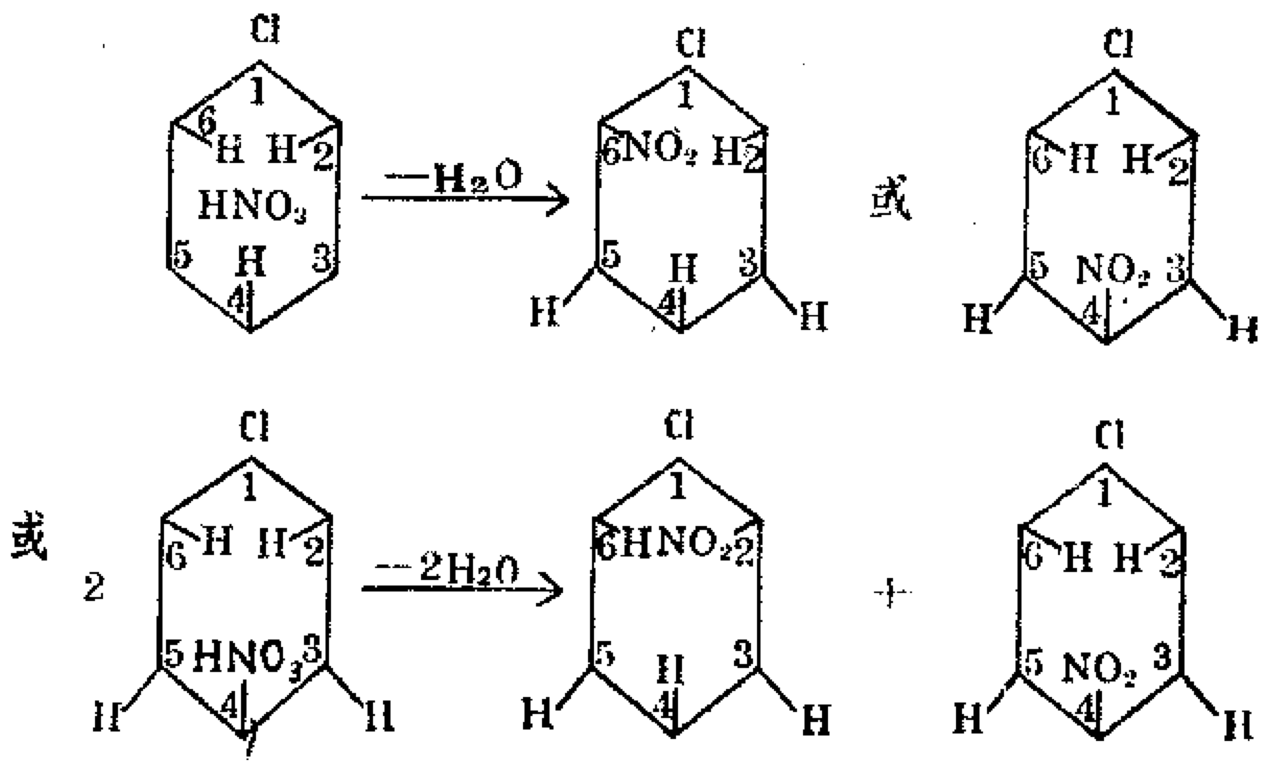
第一形態　第二形態 (Kekule氏公式)　第三形態 (Armstrong-Baeyer氏公式)　第四形態 (Kekule氏公式)　最後形態

觀察上圖,得知於第一形態中,1,3,5三氫元子位於分子之周圍,而最後形態中1,3,5三氫元子則位於分子之中央.柯氏卽根據此公式,遂立一臆說以解釋替換之情形如下:設想輪圈上之氫元子1,被一根代替,此根與輪圈之結合,假定其愛力未曾用完,尙有剩餘之愛力存在,遇有一新根加入,彼卽吸取之而暫與之結合以成一複根,當碳元子運動時則此根亦隨之而向分子中央運動,遂與3,5兩氫元子接近,於是複根因受兩氫元子之影響,不能牢結,其中後來之



根,卽脫離原根而與一氫元子化合,發生間位之產物.茲舉nitrobenzene氯化 (Chlorenation) 時之情形爲一例以說明之,其作用進行之程序,示如上圖:

nitrobenzene中之二氧化氮根可先與一分子氯結合,而成一複根NO_2Cl_2-, 此複根後隨碳元子之轉動而入於分子之中央,乃與3,5兩氫元子接近,因氫與氯發生愛力,氯分子遂脫離二氧化氮根,而與氫化合成一分子氯化氫,其餘一元子氯,卽入於輪圈上之間位,而發生 m-Chloronitro benzene. 此例係假設二氧化氮根可與氯分子暫時結合,成一複根,但柯氏又假定另有一類之根,不能與後來之新根結合,則其替換之情形完全不同矣.如氮化 Chlorobenzene 時,其原有之氯根卽無剩餘之愛力與一分子硝酸結合,成一複根;其替換也,乃2,4,6三氫元子先與一分子硝酸結合,後硝酸之中氫氧羣與隣位,或對位,或隣位與對位,上之氫元子發生極强



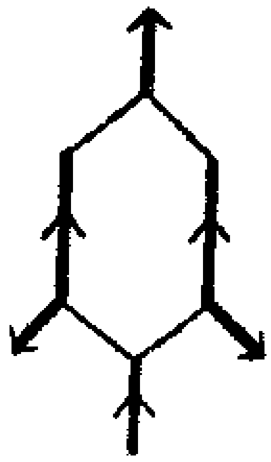
愛力,化合成水而去,剩餘之二氧化氮根遂入於隣位,或對位,或隣位,與對位,而成 O- 或 p- 或 O,p-nitrochlorobenzene, 其作用進行之程式如上:

考柯氏之理論,若能知其動力輪質公式,則殊易明瞭,其要點概括之有三:(1)輪質分子之空間模型 (Space model of benzene molecule) 上所帶之六元子氫,可平分爲 1,3,5 與 2,4,6 兩種組合;(2)間位之指向根 (m-orienting group) 須有與新根暫時結合之可能;(3)隣位與對位之指向根(O, p-orienting group),對於新根無直接影響,新根乃受另一組合之氫元子所支配也.

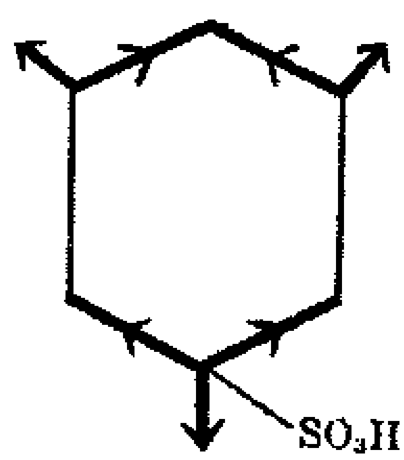
2. 阜洛希孟氏之臆說 (Flüscheim Hypothesis) —— 阜氏臆說大半以溫勒(Werner)氏之愛力(affinity)學說爲基礎,其根本觀念可概括之有三:(1)化學愛力,乃一種吸力,自元子中心作用於各方向;(2)每一元質,其元子之愛力,恆有一定之量,若一元子與某元子結合用去大部分之愛力,則與其他元子結合,卽用剩餘之少量愛力,其和必等於某一定之量;(3)各元子間牢固結合與疏鬆結合,判然有別,牢固結合,乃表示彼此所用之愛力甚多,疏鬆結合,則表示彼此所用之愛力甚少也.阜氏用此觀念,以解釋各種代替現象,頗能自圓其說,試一述之如下:輪質中之六碳元子,初各與一氫元子相結合時,其間愛力之分配,可視爲彼此完全相同,後若有一碳元子上之氫,被一根或另一元子所代替,則六碳元

子間愛力之分配,即行擾動,須從新排列,設代替之元子爲氯,並假定其與碳之結合甚爲牢固,則碳元子之愛力被其中和者甚多,於是用於結合兩隣位碳元子之愛力,其量必微,而兩隣位碳元子,遂剩餘多量之愛力,未能飽和,此多量之愛力一部分乃與兩間位碳元子結合,而此兩間位碳元子所剩餘之愛力又與對位碳元子結合,其結果惟隣位與對位兩碳元子之愛力,尚未完全飽和,故若有一新根加入,必爲此兩位置所吸取,而成隣位與對位之產物;反之,若代替之根與碳元子結合甚爲疏鬆,如 SO_3H, 則該碳元子剩餘之愛力必甚多,悉與兩隣位碳元子相中和,此兩隣位碳元子因已用去多量之愛力,其剩餘者必甚少,於是兩間位碳元子除與其中和而外,尚可有甚多之愛力存在,以其一部分與對位碳元子結合,尚有一部份仍未飽和,故設有新根加入,則立即爲其吸取,遂成間位之產物.此兩種情形若以圖示之,則更爲明瞭:

(I)



(II)



圖中粗綫,表示多量愛力之結合,細線表示少量愛力之結

合,箭頭則表示愛力作用之方向.考阜氏此種臆說,固頗饒興趣,但其缺點甚多,荷雷曼 Holleman 氏對之,殊多批評.茲略舉數端如下:第一點,各元子間之引力,不外兩種系統,不屬於重力,即屬於電力,若謂其屬於重力.則阜氏首先認爲每一元子愛力之儲藏,有一定之量,若與某元子結合,用去大半之愛力,則與另一元子結合,其愛力必甚弱,實爲不可能之事,因據重力定律,兩物體間彼此相吸引之力,與第三者之存在無關.例如地球以定量之力吸引月球,設有一第二月球引入此系統內,其所受之引力與第一月球相等,而地球此時對於第一月球之引力,亦仍與前相同,不因第二月球在場,遂行減弱也.若謂其屬於電力,亦與常見諸電力現象未見相合:設 A 爲一正電球,若持近一負電球 B,則二異性電荷,因彼此相吸,遂多聚集於二球貼近之半球面上,其兩遠端之電荷必甚弱,但若有一荷正電之 C 球持近與 B,並與 A, B 球聯成一貫 (A-B-C),則 A, B 兩球面上之電荷,必感受影響,從新排列,若球之電荷爲負,其排列又必不同,由是可知 A, B 兩球上電荷之分布決非可視爲絕立無緣,實際與 C 球電荷之性質,極有關係,且此貫串愈長,則可以發生影響者亦愈多.由氏推之,化學愛力之強度,非僅靠與其結合某元子之性質爲何如,其分子中全體元子之性質,亦頗關重要.阜氏祇重視原根之性質,對於後來新根之性質,則忽視之,其觀念實與此相背馳矣.第二點,元子間之結

合,有一定强弱之分,此與硝酸銀能沈澱Methyl bromide中之溴較沈澱bromobenyzne中之溴爲易之現象,似相符合,因可設想此二有機物中碳溴二元子結合有强弱之不同也.但觀Grinard試劑之合成,鎂作用於此二有機物,均甚容易,無稍差別,則知其不然

$$C_6H_5Br+mg \longrightarrow mg\begin{matrix}\diagup C_6H_5\\ \diagdown Br\end{matrix}$$

$$CH_3Br+mg \longrightarrow mg\begin{matrix}\diagup CH_3\\ \diagdown Br\end{matrix}$$

又觀二氧化氮根與輪圈之結合,就大多數情形而言,實甚牢固,但若有他根在場,則此根卽甚易排出,如tetra-nitro-resorcinol加水分解,則消去一分子亞硝酸,而產生tri-nitro-phloroglucinol,由此例,可知元子間結合之强弱無一定不變之値,須視整個分子之組織如何,而用以起作用之試劑,其性質亦大有關係也.第三點,試觀阜氏所創擬之上圖,則知隣位與間位兩碳元子,均與一强一弱之愛力相結合,其愛力之分配,旣毫無差異,而同爲碳元子,其儲藏之量,亦無不同,然則何故於第一種情形,祇有隣位而無間位產物之發生?於第二種情形,又何故祇有間位而無隣位產物之發生,此實難以索解也.

觀以上所舉數端,可知阜氏之臆說之價値矣,但亦未可厚非,因奧柏米勒(Obermiller)與側稀把賓(Tschitschibabin)二氏亦有類似之臆說,相繼供獻也.

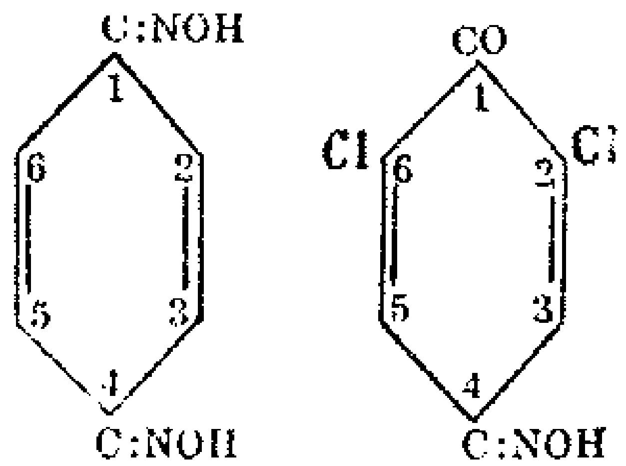
3. 奧柏米勒氏之臆說(Obermiller'sHypothesis)——奧氏深

信將一元子代入於輪圈上,乃由於元子間彼此互換之作用;例如 nitrobenzene 之合成,係硝酸中二氧化氮根與輪圈上一氫元子互相易位而已:

$$R\cdot H+NO_2\cdot OH\longrightarrow R\cdot NO_2+H\cdot OH$$

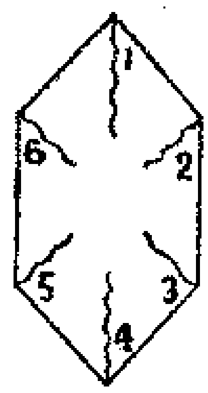
於此種情形時,圈上各氫元子之活潑度 (Reactivity), 可設想其隨位置而有不同.據奧氏之意,隣位,對位與間位諸物之產生,可推測之如下假定根有二類,一類之根,如 OH,NH_2,等能使隣位與對位上之氫元子活潑度增强,故易被他根所排擠,遂成隣位與對位之產物;一類之根如 NO_2,SO_3H 等,能使隣位與對位上之氫元子活潑度減弱,於是間位上之氫元子相形之下,其活潑度,卽稍變强,遂易被他根所排擠而成間位之產物.

至若何故隣位與對位上之氫元子活潑度,能被 NO_2SO_3H 諸根減弱,奧氏則用空間阻礙 (Steric hindrance) 以解釋之.常有輪圈上之一根,其作用可被其隣近有直接聯絡之元子或根所阻礙,例如 Quinone 與 hydroxamine 可發生 dioxime, 而 m-dichloroquinone 則發生 monoxime, 有一氧元子對於 hydroxyl-



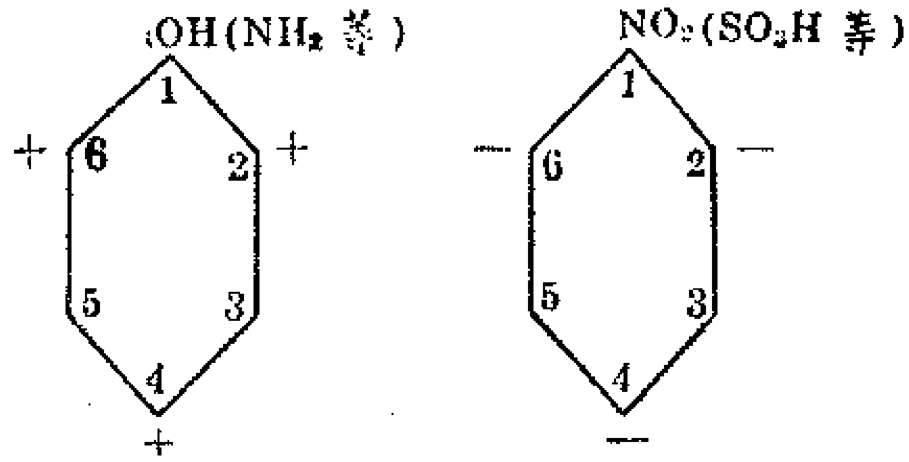
amine 則無作用,因受其隣近氮元子之影響也.

此種現象,即謂之空間阻礙 (Steric hindrance). 奧氏為欲說明空間阻礙之作用,乃進一輪質之新公式如下:

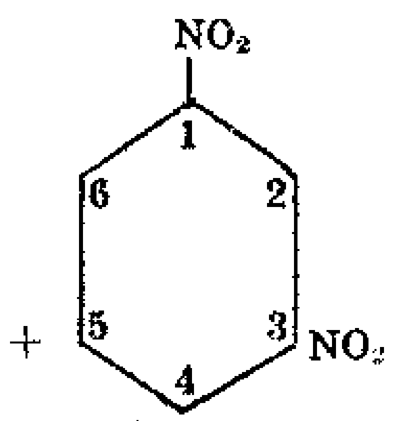


此公式與對角公式 Diagonal formula 及向心公式 Centric formula 均相類似,可算其介乎此二公式中間之一公式.據此公式,則隣位與對位之碳與位置 1 上之碳,均有直接聯絡之關係,故位置 1 上之根,對於隣位與對位上之氫元子,均可發生空間阻礙作用,而使其活潑度減弱也.

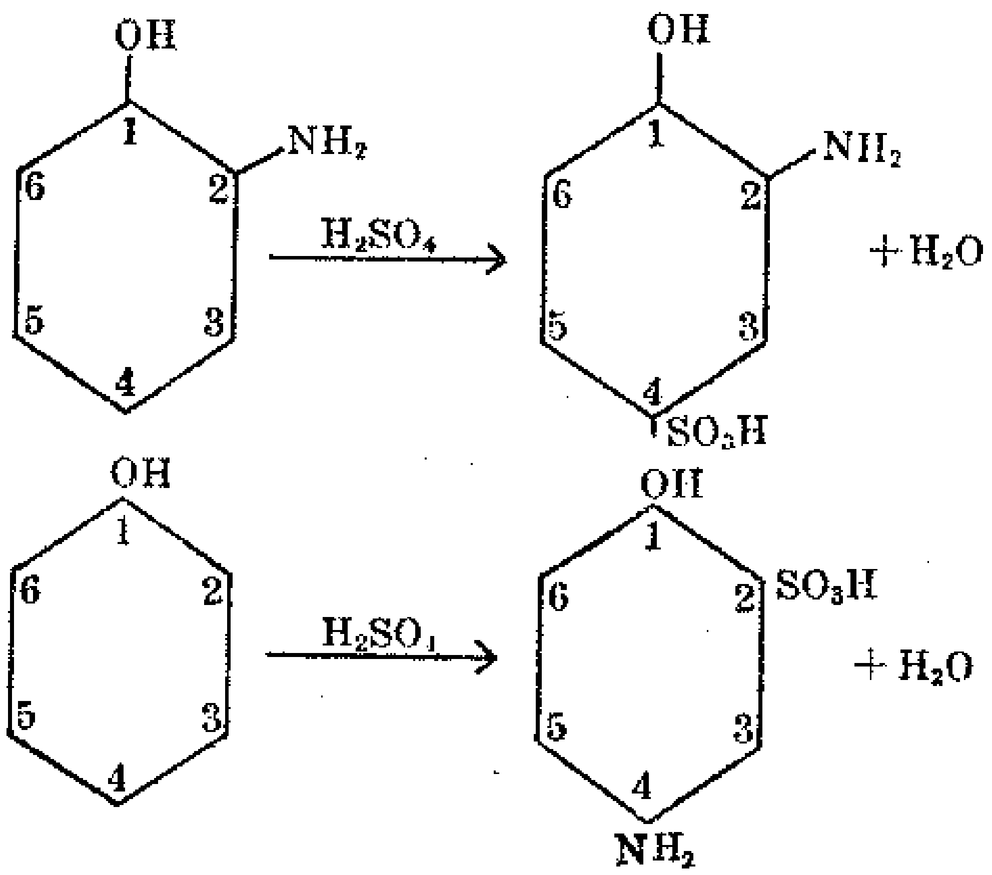
若欲解釋隣位與對位上之氫元子活潑度之增加,奧氏則與阜氏之觀念相似,假定 NH_2, OH 諸根與輪圈上之碳元子聯絡甚強,於是該碳元子之愛力,大部分遂被其中和,其結果,此分子中其他諸元子之聯絡因受其影響,均稍變弱,尤以隣位與對位上之氫元子感覺最甚,故其活潑度,大為增強,易與他根相替換,而成隣位與對位之產物.奧氏用正(+)負(−)號表示輪圈上氫元子活潑度之增強與減弱,試舉例如下:



觀上所述,乃為一次綸質誘導物之情形,若有二根佔據於綸圈上,則其餘各位置上之氫其活潑度將如何?不得不再討論之.於此情形,則殊無一定,須視此二根之性質及其位置如何以為定.(a)設有二相同之根佔據綸圈上1,3兩位置,若二者有隣位與對位之指向作用,則於2,4,6諸位置上之氫,其活潑度必大為增加,如 resorcinol, m-phenylene-diamine, m-cresol m-xylene 等,均屬此例,其原因甚為簡單,就 resor-cinol 而言,因2,4,6諸位置上之氫,對於二氫氧根均屬隣位與對位,故此二根對於該三氫元子均可發生同樣影響,二者相加,此三氫元子之活潑,遂大為增強.若二者有間位之指向作用,則情形大異,位置4上之氫較為活潑,其餘均甚冷淡,此就 di-nitro-benzene 觀之,殊易明瞭:



附着於2,4,6諸位置上之氫,對於二 NO_2 根,均屬隣位與對位,故均感受空間阻礙之作用,惟位置5上之氫則否,故較爲活動.(b)設有不同之二根均有隣位與對位之指向作用,若佔據1,2兩位置,則對位(對位置1上之根而言,以後仿此)上之氫元子較爲活潑,若佔據1,4兩位置,則隣位上之氫元子較爲活潑.例如硫化 o-amino-phenol,



SO_3H 根則採取對位,而成 1, 2, 4-hydroxamino-benzene sulphonic acid, 若硫化 p-amino-phenol, SO_3H 根則採取隣位,而成 1, 4, 2-hydroxamino-benzene sulphonic acid. 若窮其理,則假定此二根有强弱之不同,以解釋之:就上例而言,可設想氫氧根較 NH_2 根爲强,於是在 o-amino-phenol 之情形,2, 4, 6三位置上氫元子之活潑度,受氫氧根之影響而增加者,必較 1,3,5 三位置上

氫元子之活潑度,受 NH_2 根之影響而增加者爲多,其結果,4,6 兩位置上之氫故較爲活潑.依同理亦可解釋在 p-amino-phenol 之情形,隣位上之氫元子較爲活潑也.奧氏由觀察之結果曾將各種不同强度之根,排成一次序如下:

$$OH > NH_2 > Cl > CH_3 > H$$

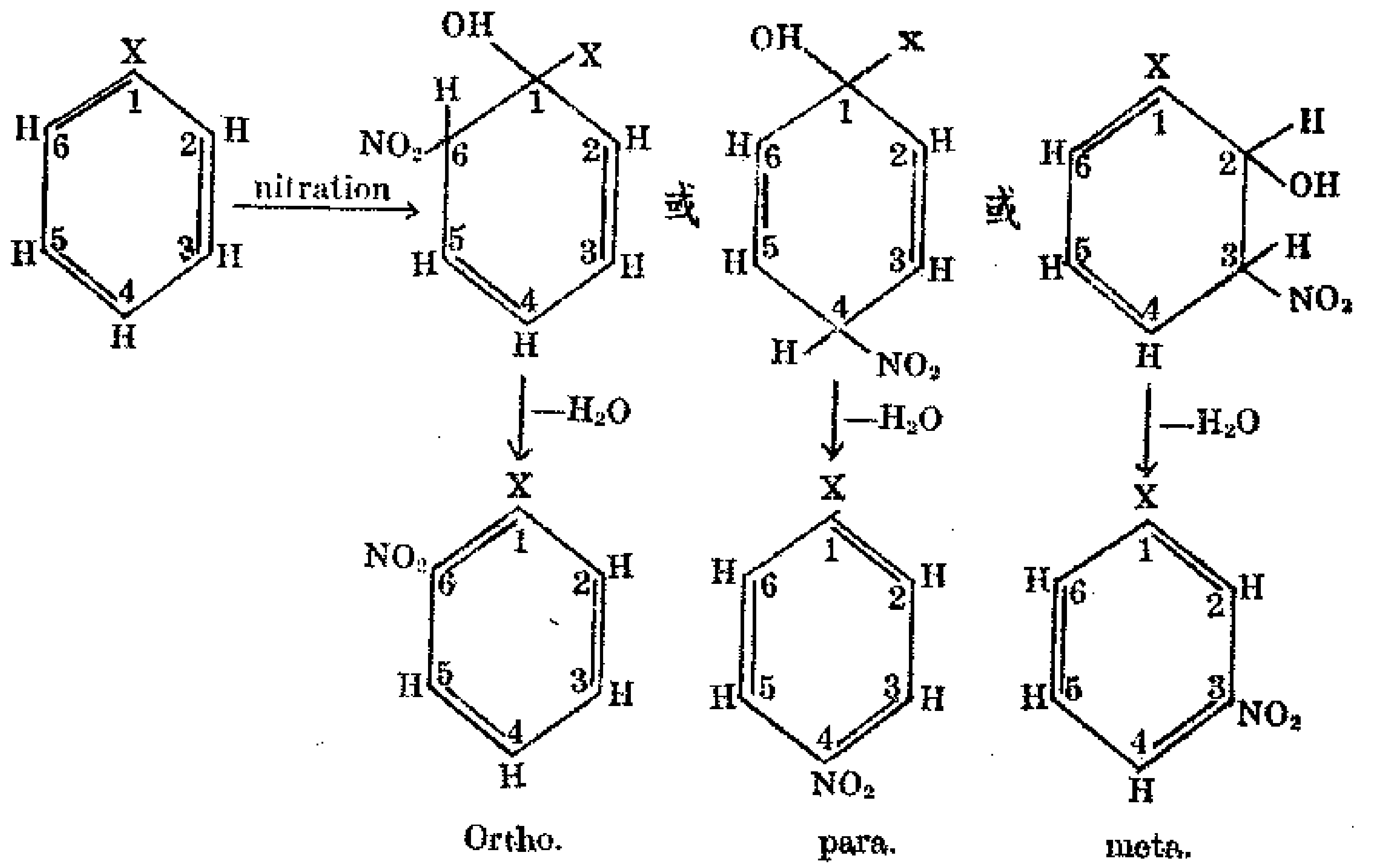
位於前者,必較其後各根爲强.

總之據奧氏之意,若有數根存於輪圈上,可設想各於其餘之氫元子有相當之影響,或增加其活潑度或減小其活潑度,殊不一定;但何位置上之氫元子較爲活潑,則須視各影響合成之結果何如耳.

奧氏之臆說,上已討論甚詳,其立論雖可自圓其說,但多濫一己之假設,而無若何之根據,故至今引用之者,尚不多也.

4. 荷雷曼氏之臆說 (Holleman's Hypothesis) —— 吾人若稍觀察脂肪屬諸化合物 (aliphatic Compounds) 必可得一普通現象,卽附着於雙鏈之兩碳元子 (doubly-bond Carbon atom) 上之根,其性質必稍改變,如 $CH_2{=}CCl{-}CH_3$ 中之氯較 $CH_2{=}CH{-}CH_2Cl$ 中之氯必難替除,卽其一例.此蓋受雙鏈之影響,而易其活潑度也.荷氏推想其逆理,亦必真確,卽該根對於雙鏈之性質 (Character of the double bond),亦可發生若干之影響.據此觀念,若有一 X 根代入於凱氏輪質之公式上,則1:6之雙鏈,必較無 X 時較爲活潑或變冷淡;次復,因 1-6-5-4 成

一共軛系統 (Conjugated system), 故 X 之影響,亦可伸至1:4之位置,惟2:3之雙鏈,則殊少感受直接影響.荷氏又假定代替作用,乃先起合成反應 (additive reaction), 後消除一分子水,遂成二次誘導物.據此則當一次輪質誘導物氮化時,第一步,以下三種加成物均有成功之可能:



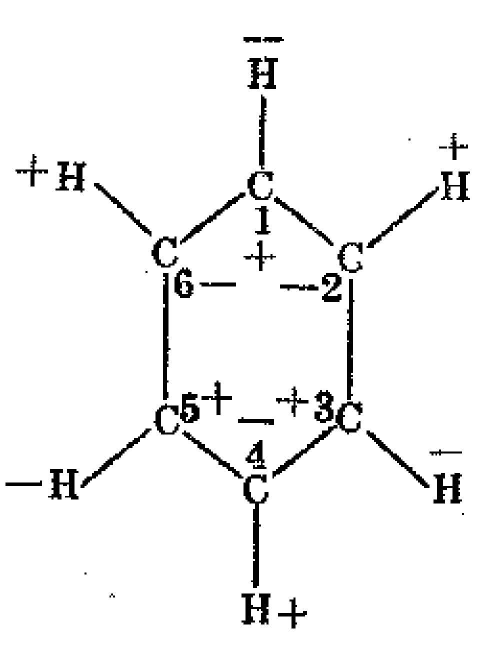
第二步,再消去一分子水卽發生 $C_6H_4\cdot X\cdot NO_2$ 二次誘導物.若 X 根能增進雙鏈之活潑,則得(1),(2)兩式所代表之加成物.消去水後,遂發生隣位與對位之產物,若 X 根減弱雙鏈之活潑,則得(3)式所代表之加成物,消去水後,遂生間位之產物.此種解說,頗爲新奇,有獨到之見地,但缺點亦殊難免,姑不詳述之矣.

B. 根據電子觀念之各種臆說

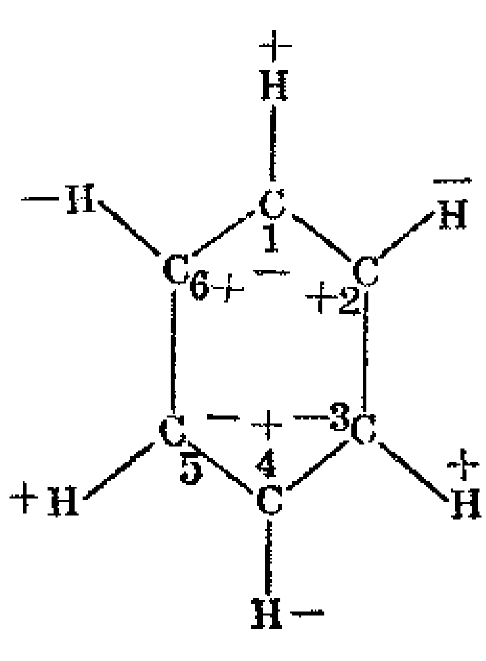
(Orientation Hypothesis based on Electronic Conception)

1. 孚銳氏之臆說(Fry's Hypothesis)——孚氏之臆說,乃以湯母遜氏電子學說為基礎 (Thomsons Electronic Theory).湯氏謂一分中各元子之結合,乃由於電子之作用.各元子之電子有得有失,得一電子,則荷負電 (negatively charged),失一電子,則荷正電 (positively Charged),正負相吸,遂彼此結合也.孚氏應用此學說並加以新假設,以解釋代替現象,殊覺圓滿.彼曾推想,凡元子間之結合,既由於電子作用,則輪質中各元子之結合,亦必可用電子觀念表示之,於是乃創擬一輪質電子公式(electronic formula of benzene) 如下:

(I)



(II)



其重要之假設即六碳元子正負號之排列,乃交相間隔者(alternately positive and negative),如(1)式中 1,3,5 三碳元子為正

2,4,6 三碳元子則爲負,而附着於各碳上之氫,則其符號與該碳元子適相反.又據孚氏之意,若假定1,3,5 三碳元子爲負,2,4,6三碳元子爲正,如圖(II)所示,亦無不可,蓋同一元子可爲正亦可爲負,視其得一電子抑失一電子也.

試觀上圖,可知隣位與對位上諸氫元子與首席上氫元子均屬異號,間位上諸氫元子,則與之爲同號,由此,設有二次誘導物在焉,其中之二根,若爲異號,必彼此採取隣位與對位,若爲同號,則彼此採取間位,至爲明顯矣.

2. 福爾蘭得氏之臆說 (Vorländers Hypothesis) —— 福氏之觀念與孚氏頗多相似之點.彼亦謂同一元子,可爲正,亦可爲負,若㮰圈上之碳元子與一正根相接合,則爲負,與一負根相結合,則爲正,如下所示:

(I)	(II)
Bz $\overset{-}{C} \cdot \overset{+}{N}\overset{-}{O_2}$	Bz $\cdot \overset{+}{C} \cdot \overset{-}{N}\overset{+}{H_2}$
Bz $\overset{-}{C} \cdot \overset{+}{S}\overset{-}{O_3}\overset{+}{H}$	Bz $\cdot \overset{+}{C} \cdot \overset{-}{O}\overset{+}{H}$
Bz $\overset{-}{C} \cdot \overset{+}{C}\overset{-}{O_2}\overset{+}{H}$	Bz $\cdot \overset{+}{C} \cdot \overset{-}{C}\overset{+}{H_3}$

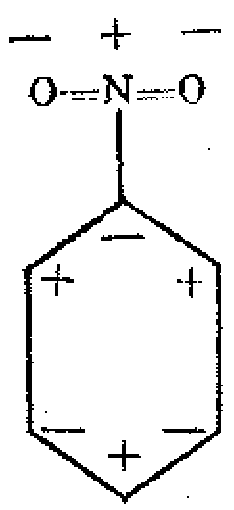
(BzC=㮰圈上與根相結合之一碳元子)

在此種情形時,㮰質之六碳元子間正負號之排列,亦各不同,福氏取 $C_6H_5.NO_2$ 與 $C_6H_5.NH_2$ 爲此二類之代表,曾規定其公式如下:

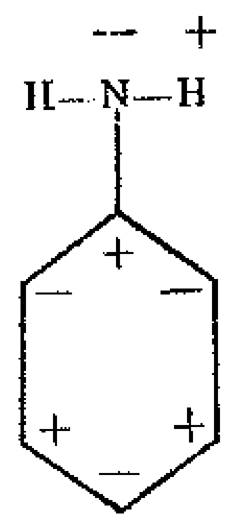
氫元子設爲正,二氧化氮亦爲正根,故於公式(1)中,乃以一

正元子易一正根,其生成之物必與苯質之性質甚相似,且頗穩固 (stable);但於 (II) 式中,則以一負根易一正元子,所

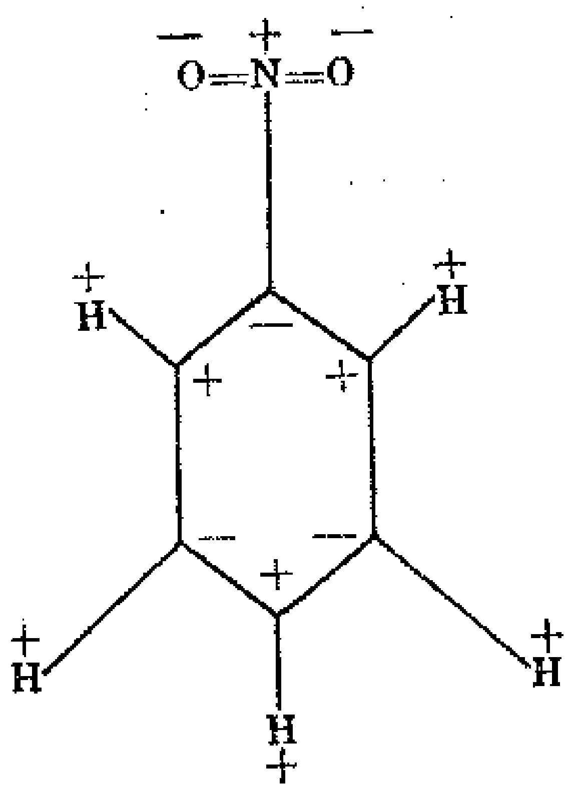
(I)

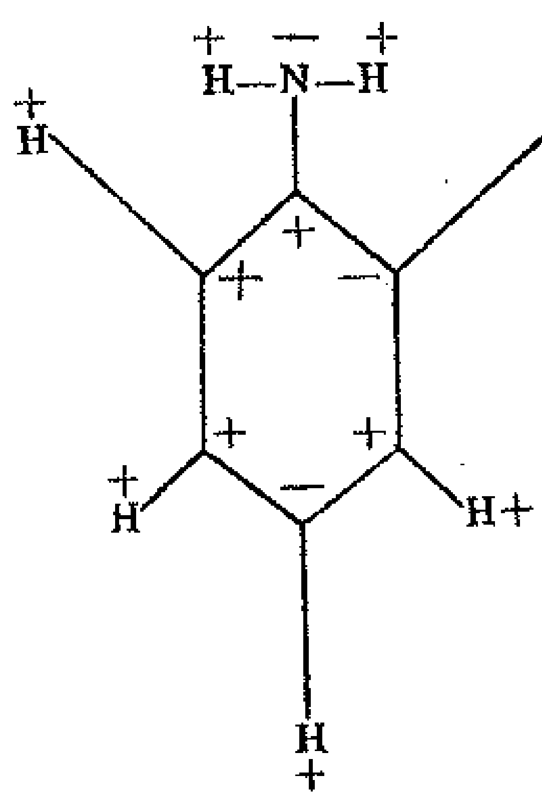


(II)



成之物,正負號之排列既異與苯質,則其性質亦必大異也.又若將此二公式中所附着之氫元子加上,則知隣位與對位上之氫元子,其與碳之聯絡與間位上之氫元子與之碳聯絡顯有不同,福氏曾用長短線,以示其區別;





據上圖,於 nitrobenzene 公式中,間位上氫元子乃與負碳相結合,而隣位與對位上氫元子,則與正碳相結合.於 aniline 公式中,適表示相反.由此可推得一代替作用應有之結果如下:若輪圈上原有之根爲正,則當負根代入時,必居隣位與對位,因該位置之碳元子,須爲正號,惟負根始可使其感應成爲正號.當正根代入時,必居間位,因該碳元子須爲負號,惟正根始可使其感應成爲負號也.若輪質上原有之根爲負,則新根代入時,其採取之位置,適與前相反.至若正負根之分別,本無明確之界限,但據福氏之分法則如下:

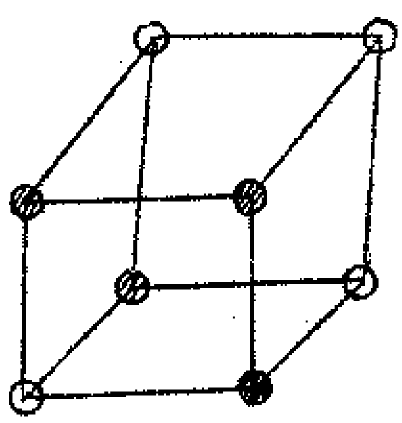
第一類 (正根) $-SO_3H$, $-NO_2$, $-CHO$, $-CH{:}NO_2H$, $-COOH$, $-COOEt$, $-CO{\cdot}NH_2$, $-CO{\cdot}CH_3$ $-CO{\cdot}COOH$, $\equiv CO{\cdot}H$, $-C\equiv N$, $-CCl_3$, $-NH_3X$, $-NH_2(CH_3){\cdot}X$, $-NH(CH_3)_2{\cdot}X$, $-NH_2(CO{\cdot}CH_3){\cdot}X$

第二類 (負根) $-F$, $-Cl$, $-Br$, $-I$, $-OH$, $-OCH_3$, $-O{\cdot}CO{\cdot}CH_3$, $-NH_2$, $-NHCH_3$, $-NH(CH_3)_2$, $-NH{\cdot}CO{\cdot}CH_3$, $-N{:}N-$, $-CH_3$, $-CH_2{\cdot}CH_3$, $-CH(CH_3)_2$, $-C(CH_3)_3$, $-CH_2Cl$, $-CH_2{\cdot}O{\cdot}NO_2$, $-CH_2{\cdot}SO_3H$, $-CH_2{\cdot}NH_2$, $-CH_2{\cdot}CN$, $-CH_2{\cdot}COOH$, $-CH_2C H_2{\cdot}COOH$, $-CH{:}CH{\cdot}COOH$, $-CH{:}CH{\cdot}NO_2$, $-C\equiv C{\cdot}COOH$, $-C_6H_5$

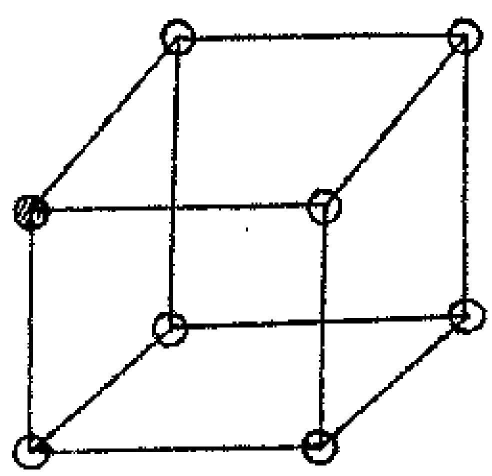
按此分法,試取各根以驗上述之結果,頗稱相合,故福氏之種種假說,尚未可否認也.

3. 克爾瑪克與饒賓遜二氏之臆說(Kermark-Robinsons Hypothesis)——克,饒二氏之臆說,乃由魯意士原子構造學說

(Lewis theory of atomic) 推出之.魯氏倡言凡各元子,中心有一正電核,外有電子層層繞之,各層所含電子,均有法定之數,第一層爲二,第二層爲八,愈外層電子愈多.若一元子祇有一或二電子,則祇有一層,如氫氦是也.電子愈多,則層數亦愈加多,至於分配之法,先從最內層起,載滿法定數目後,若有贏餘,則散布於第二層,由是而遞推之於第三第四層.凡元子之最外層滿足法定數目者,爲最安定狀態,不起化學作用,否則反是.凡元子間之反應,皆因其外層未能滿足之故,如碳,氯兩元子最外層電子法定之數,均爲八,實際最外層之電子,碳爲四,氯爲七,均未滿足,故有化合作用.據魯氏之意,凡八電子層,其電子之排列,可設想其居於該層內容之立方形八頂角上,碳,氯二元子之最外層,可示之如下:



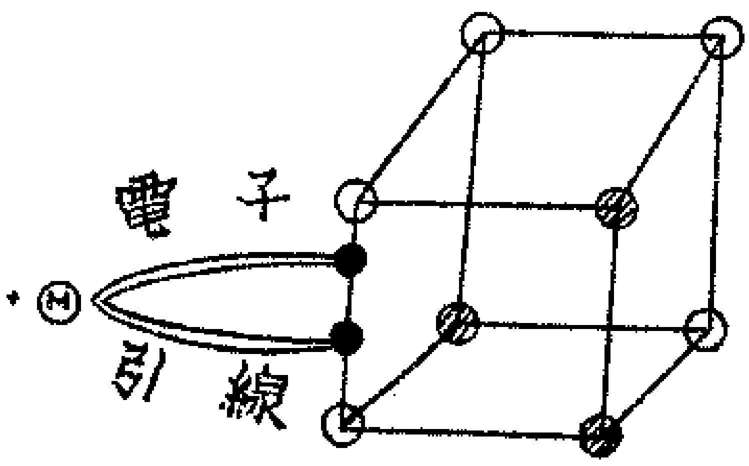
碳元子之外層



氯元子之外層

圖中(○)代表外層所含之電子,(●)代表未滿足之電子.當元子間相化合時,則彼此以一對或若干對之電子相共用,以

期達於滿足狀態.如碳,氫二元子之化合,彼此卽以一對電子相共用,其情形示如下圖:



圖中除(●)表示共用之電子而外,其餘如(○)及(◍)所代表者,均與前同.

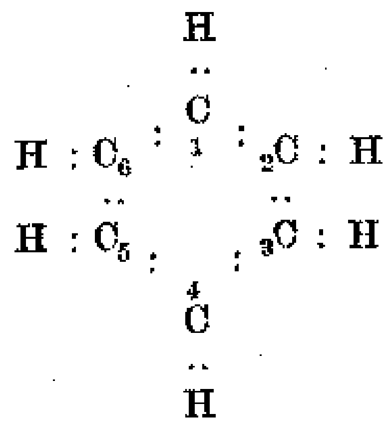
氫元子之外層,有一電子,其法定之數爲二,現以其一電子與碳相共,再共碳一電子,其結果氫之外層遂成滿足狀態,碳元子則少去一未滿足之電子.若碳與四氫元子化合,則碳之外層亦滿足矣,由此例,可知一價之結合,有二或一對電子相共用,二價之結合,必有四或兩對電子相共用,故 mathane, ethane, ethylene 之公式,可如下法表示之:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} H \\ \cdot\cdot \\ H : C : H \\ \cdot\cdot \\ H \end{array} & \quad \begin{array}{c} H \quad H \\ \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \\ H : C : C : H \\ \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \\ H \quad H \end{array} & \quad \begin{array}{c} H \quad H \\ \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \\ H : C : C : H \\ \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \\ H \quad H \end{array} \\ \text{mathane} & \text{ethane} & \text{ethylene} \end{array}$$

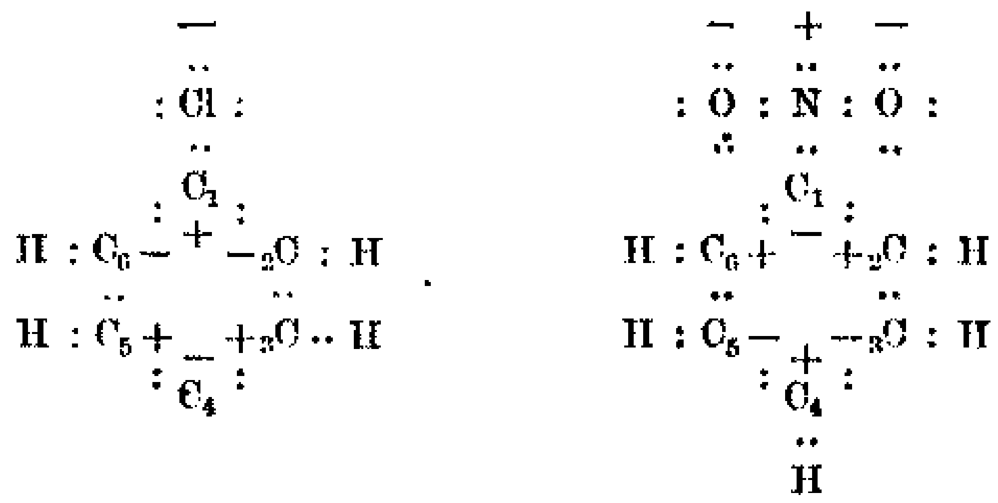
此三分子中之各元子外層,均爲滿足狀態,尙有未能完全滿足者,如 allyl chloride, 卽其一例.其公式爲

$$\begin{array}{c} \quad\quad H \quad H \quad H \\ \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \\ : Cl : C_1 : C_2 :: C_3 : H \\ \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad\quad\quad \\ H \\ (-)\,(+)\,(-)\,(+) \end{array}$$

據克饒二氏之推想,此分子中氯元子之外層,原有七電子,共 c_1 一電子,遂成滿足狀態;c_2 碳元子亦共 c_1 一電子,c_3 二電子,氫一電子,故其外層,亦成滿足狀態,惟 c_1 與 c_3 二碳元子之外層,則未能飽和.由此可知 allyl Chloride 中之元子,滿足與未滿足,乃彼此交相間隔者 (alternately),推之於輪質,其構造式亦可爲



若附於首席上之氫換以氯元子,則六碳元子之外層,亦必滿足與未滿足交相間隔,且 1,3,5 三碳元子之外層爲飽和狀態,2,4,6 三碳元子則否,因此隣位與對位之碳元子,其性質與間位碳元子,顯有不同,其理至明顯矣.反之若首席上之氫元子換以二氧化氮根,其中兩氧元子之外層均奪取氮之電子,於是氮之外層遂未飽和,而與氮結合之首席碳元子亦可奪取其電子而呈飽和狀態,如是,輪質上之六碳元子,其外層之滿足與未滿足,亦交相間隔,惟此時 1, 3, 5, 三碳元子之外層爲飽和狀態,2,4,6 三碳元子則否,與上情形適成相反;



然則氯與二氧化氮根,其指向作用之不同,由此亦可得一解說矣.此種臆說,頗爲新穎,是否有當尙待證明也.

V 結論

由以上之討論,可知定位現象,殊極複雜,有種種法則,種種臆說,相繼而出,推定之,解釋之,仍有未能解決之問題存焉.但卽以此各種法則與臆說,究以何者最爲可取,此亦無人能斷定之,蓋旣成一法則與臆說,必有其相當之根據與相當之理論,須有確實之發現,始可否認之,故本篇一一錄而述之未敢遺棄也.實則將來研究此問題,愈趨進步,其中有若干之法則與臆說,必有一日須被淘汰;因此諸法則與臆說彼此間常發生相抵觸之處,往往同一現象,據此法則,有此結果,據彼法則,結果則相反,又據此臆說,殊易解釋,據彼臆說,則無法解釋之,是知其中必有謬誤,不能同時均可成立,可斷言也.又本篇之範圍,僅限於二次誘導物,至三次誘導物,則毫未論及,此問題,荷雷曼氏曾著有一書(Holleman Die direkte Einfuhrung von Substituion)討論甚詳,以其情形

更爲繁雜,俟以後遇有機會,再行介紹,以饗讀者.

一九三零年十月於武漢大學

最近之法國生物學界

（續第一卷第一期）

何春喬

杜納奇—生物新說—對於多體說的見解—細胞解剖術—化學授精

（二）杜納奇(Yves Delage)

杜納奇以千八百五十四年生於法國之 avignon 地方.至千九百二十年十月以尿毒症死於巴黎郊外之 Sceaux 地方,時年六十六歲.生平大部著作有 L' Hérédité et les grands problemes de la biologie générale 乃近千頁之偉著,舉凡遺傳學細胞學進化學及其他生物學上之重要問題,皆有淹博之徵引及銳利之批導.其次則有 Traité de zoologie concrète,亦龐大之著作,與 Ed. Hérouard 共著.此書對於動物各部記載詳盡,文筆明潔有極鮮明之插圖,爲動物學界有數之著作.惜出版到第六卷,卽行停止.以現出之數量與全動物學界比較,佑計非三十卷不能畢.再其次則有 Les theories de levolution 以及 La parthénogénése naturelle et experimentalu 第一部論進化,對於進化的證明及事例,不甚措意;而關於歷來各種進化學說,則論列獨多.第二部對於人工處女生殖之各種學說以及各種方法,纖舉無遺,亦珍奇之著作.此後兩部乃與 M. Goldsmith 女士合著.

杜納奇擔任巴黎大學教授多年,名滿全歐.惜予負笈入

巴黎大學時杜納奇適沒,僅於其實驗室中,得視其規劃與手澤,並得晤覿與杜氏半生相伴共同著作之goldsmith女士,蓋已皤然老嫗!每有關於學術之談話必稱道杜納奇先生,蓋思之甚殷也.

杜納奇關於學術上的研究可劃分爲兩個時期.千八百九十四年以前差不多專注意於純粹動物學:解剖學或敍述的胚胎學.從千八百九十四年以後乃轉注意於實驗生物學.不久卽得到以化學方法代替精子之成績.杜氏對於遺傳問題亦發生興趣.上舉第一第二兩部著作,對於遺傳問題皆有廣泛之論列.

我們現在對於他第一期的研究,僅略舉名目,而特詳於其後期之研究.

關於第一期的研究,計有:

甲殼類中十足類(Crustacés décapodes)的循環系統之研究論文一篇,此乃杜納奇作Milne Edwards教授下助理時所發表之博士論文,曾博得法國國立科學院的賞牌.審查此論文中之一人爲 H. de Lacaze Duthier,尤贊賞此文.讀者諸君當亦知Milne Edwards以及H. de Lacaze Duthier皆法國生物學界的泰斗,名滿全歐者也.

其次則有蟹奴(Sacculine)發展之研究,亦著名於世.蟹奴爲蔓脚類(Cirripede)之一種,寄生於普通的蟹體裏面.成長的蟹奴,無論外形與解剖,無一效似蔓脚類之處.蓋形如小囊,略

露於蟹尾之外;由此小囊,發出許多細絲,伸張於蟹體內之各部.但如果研究蟹奴的發生史方知其在少年時,亦曾活潑游泳,具有蔓脚類一切公有之性態.蟹奴的絲,如果伸張到雄蟹的生殖腺之中,而蠶食之,則雄蟹如被閹割,失其雄態,而呈雌蟹之觀.是謂之"寄生閹"(Parasitic castration),在兩性問題中,爲極有意義之事例.杜納奇則仔細研究蟹奴發展之各級,加以極忠實極完備之描寫.蟹奴個體發展(Ontogenie)之大明於世,實杜納奇之功.

又其次乃關於海綿的發生史.海綿體制,剛柔剝雜,爲最難研究之動物.且授精之卵,每卽在母體內孵化;及其既出,已成具有纖毛自由游泳之蟲.是必刻刻守視,然後可以察知各羣細胞轉變之迹.此纖毛幼蟲,因海綿種之不同,而或圓或扁.纖毛雖有時包被全體,有時亦僅具數帶.以後忽停止運動降於水底,於是原來用作運動器官之纖毛,漸次脫落且被壓陷下.至於原在纖毛層下之一層細胞,反翻出體外,成爲海綿之表皮.以後再經一度之變化,舊日殘存之纖毛細胞乃變爲襟細胞(Choanocytes),貼附於顫動籃(Corbeilles Vibratiles)之周圍.此中經過,備極複雜,杜納奇以其精密忍耐之精神應付之,故卒能得到極美滿之成績.

關於動物學的研究,我們卽以此敍述爲限.以下敍述其第二期研究之成績.

一,生物新說

生物如何造成?各種形態如何產生?各種性質起源於何處?大多數的生物學家對此問題,皆認定卵子之中,必有代表此各生物各部分各性質之物質,因而成立所謂代表點粒派.達爾文的生芽(gemmules de Darwin),外司曼的決定子(Determints de Weismann),兌佛爾的泛生子 (Pangens de De Vries),雷吉尼的米塞爾 (Micells de Negeili),斯賓塞的生理單位體 (Physiological unit of Spencer) 等,皆屬此例.是皆認定個體一切之發展皆原於胚質之發展.一切原因,皆在胚質之中;一切結果皆完全由此原因而生.

杜納奇獨立脚在動力方面,另立新說.他最初即標明細胞之爲物乃不斷的在形成破壞與轉變之中.細胞乃不斷的在出入潮流激蕩之中;此出入的潮流,隨生命以俱來,亦將隨生命以俱去.細胞爲不固定的半流動物質所形成,外被以半滲透之膜,此膜乃包圍細胞質及核等而司種種選擇的作用;尤因營養質中帶來一些醱酵素,遂使細胞內物質,日在轉變之中;細胞之所以轉化不定,此其主因之一.又如卵細胞分裂爲多數細胞,各細胞所占之位置不同,彼此相對之關係不同彼此對外之關係,亦不盡同,因之而有生理學的與形態學的差異.又如一個兩側對稱自由游泳的幼蟲,一旦墜落海底,於是游泳工具之纖毛,不得不漸次失去,同時着底之一面,因附着海底而呈附着足之觀.身體因以成爲放射相稱之形.此時食料與前不同,因而消化器以

及消化腺亦隨之而改變.

組成相同之細胞,可以因所處地位之不同,而發展亦不同.一個生物如何在個體發展中漸次變化而爲一個成體,此不特關係於卵子化學的組成,細胞的趨避性 (Tropisme) 或接觸性 (Tactisme) 實有極大的作用;又"機能的刺激"與"有機體各部之競爭,"向爲Rowx氏闡發之生物發展兩因子,亦有極大之關係.卵子在未發展以前,決沒有含着以後發展各部之要素;即所謂代表點粒派之假設,皆不可信.杜納奇有這樣一段簡單明瞭的敍述:

"個體發展決不僅是授精卵中整個進化的傾向之發展分離與加强,無論此種進化的傾向爲物質的或非物質的.除此以外,個體發展之中,應尚有各部分之漸次形成與真正新性質之漸次形成,至於卵子原來之組成,不過其成立條件之一罷了.發展的個體乃多數因子之產物.各因子需要與重要之程度應相等.生殖質賦有之組成物乃此多數因子之一,其餘因子則爲趨避性,接觸性,機能的刺激,營養物之納入與排出以及其他環境之條件."

許多生物學者當其追求形態成立與特徵起原的問題時,都相信卵子之中,必埋伏有一些進化的勢力;勢力之表現,必僅予闢開之爲已足.杜納奇便鄭重的聲明道:卵子裏面並不含有他一切的將來.他將來的許多條件,原來都在他本身以外.杜納奇曾這樣的比喻道:

"譬如一顆流星,受原來某力的發動,運動在星系之中.他以後所經過的路徑,便要受他所穿過的羣力圈內各星球的影響與決定.但如果他本身的質量或原動力有所改變,則又取根本絕對相異之路徑.所以運動時經過的路徑,不完全決定於流星之質量與原動力,但在任何方面,亦不能與流星之質量與原動力無關係."

"同樣的情形,可見之於卵子之發展.卵子發展中必需之要素預含在卵子中而決定在先者爲數極少.大多數的要素都在卵子以外,是必在發展的途徑中乃可漸次碰着或漸次製造出來,"

遺傳這個名詞至此乃空虛無所指.杜納奇又比喻一座高山,積雪覆嶺,漸就溶解,匯爲奔流,當其最初由高山經懸岩而下也,則爲白練萬丈之瀑布.人們利用水力,於瀑布之下,建設機廠,則先成瀑布之水,此時乃旋轉機輪.再下掘土成川,激流之中,突遇柱石,則折迴而成旋渦.再下則延展爲湖泊,最後乃分繞三角洲以入海.試再設想此入海之水,爲陽光所熱,化爲蒸氣,駕空成雲,雲循舊地觸高山冷巔,復凝而爲雨爲雪,又復墜下,於是循環復始.近代生物學家見生物個體與個體繼續循環之現象,驚異不置,輒創出遺傳這個名詞以解釋.不知遺傳這個名詞,實與循環兩字相當,絲毫無所解釋.是猶一個物理學家,不明循環之眞正原因,僅見此水之爲雲爲雨,爲雪爲冰,成瀑布轉機輪,構成旋渦,再

爲湖海此一串之現象,無論爲形狀,大小,速度等,皆重複演奏,絲毫不變,決非偶然.此現象之發生,都必有物質的基礎.此各級的現象,當各有其代表之物質的因子,預藏於雲端,故以後乃能因時因地,演導爲各級之現象.如是之代表點粒說,豈非滑稽不經?!

這位物理學家,何以鑄此大錯呢?我們卽刻便知道是他忽略了眼前的原因,而反搜討到冥晦遙遠之境地裏去.所以陷於大錯而不覺.山之懸岩,輪之設置,岩石之挺出,太陽之光熱等,凡此皆爲直接之原因,此物理學家,皆忽不及察,所以祇得托之於代表因子之謬論.同樣,多數生物學者亦竟相信生物發展中所起的一切現象以及一切反覆的性質都完全決定在卵子中,且極力搜尋此現象與此性質之以如何形式存在於卵子中.其實卵子不過含有發展中一切因子中之一.此因子爲何?卽化學的成分及此化學成分之排列.其他則如流星之穿過太空,受各勢力圈之影響而變化萬千.但在此處我們應注意生物發展與流星貫天,究有不同之處.流星之貫穿於天體中也漫無限制,生物所能通過之路徑却極其窄狹.加於卵子或加於胎兒之各種必需條件如稍出乎範圍之外,個體向前演化之勢便立被截止,或瀕於死亡.卵子含有之理化組成,極其嫩脆,亦極其細密,我們苟稍與以變化,卽不免於破壞,但事實上又不能不有極其輕微不損生機之改變,進行不息,因爲卵子決不會

達到平均,而達到平均,即爲死徵.卵子之前進乃在此千綜萬錯之環境中,選擇其最狹之路徑以行.必在此狹路中,乃有其生存所必要之一切條件,乃能免於劇變之危險亦免於不變之死亡.

我們在此處,便看出生物之何以有遺傳.而所謂遺傳現象究係如何.因爲卵子一切理化之稟賦完全與以前各代卵子之稟賦相同,勢必於發展途中,任何時期與任何地位,尋着與以前各代卵子所遇之條件相同,乃有生存之可能,於是發展於外者,自然與各該祖先之各級相當,於是有遺傳之現象.此處我們可以不必假定卵子預含一切演化之因子,我們祇假定其含有許多必要因子之一爲已足.祇要有了開首的一個因子,便足以產生以後演化中一切之現象.於後之許多因子,雖都在萬不可少之列,但實不預包在卵子之中.勢必以後於適當時間遇着之,否則必死.

至於無機物質則可以改變之方向極名,極無限制之可言.其所能變之數與所遇環境岐異之數幾至相等.生物之進行也,雖亦有千百之路,導於前.然千百皆導之於死僅其一得生,此唯一之生路亦即曾引導其祖先於生存之一路.

總之,杜納奇不承認遺傳爲生物循環現象中之一因子,當然不足以說明生物循環的現象生殖質中,並沒有甚麼潛伏的性質,並沒有甚麼傾向於發展之潛伏性質.他很不客氣的講道."所謂潛伏的性質即無此性質."事實上祇有

眼前的原因,乃物質與眼前環境衝突之產物.

關於生物適應的問題,杜納奇分爲種族發生的適應與個體發生的適應兩種.所謂種族發生的適應杜氏以爲不可解釋,即事實上並無此適應.至於個體的適應,杜氏則以機能的刺激解釋之.

二,對於多體說的見解

在十九世紀中,我們發見:

一,生物之一切組織皆由細胞而成;

二,卵子是一個細胞,經過多次直接間接之分裂乃成爲許多細胞,因以構成後生動物及後生植物之各部;

三,有些生物僅由一個細胞構成,亦能如高等生物之營自由獨立之生活,備有消化,運動,呼吸,排泄,生殖之各種機能,是爲原生動物與原生植物;

四,有些動植物,能由身體出芽,芽漸發展,竟如母體;最後乃脫離母體而營自由獨立之生活;但亦有永附母體並不脫離者.

有了這些事實,遂使生物學者推想一切後生動物與後生植物乃羣體而非個體.每一個細胞皆相當一個原生動物或原生植物.不過此各個原生物不曾分離,遂羣集而爲一個大個體之觀.研究各種動植物的結果,更發見此等原生物集合之大小與疏密,有各種階級,於是有由細胞集而爲 meride, 再集爲 zoide,再集爲 démes 之四級.

此學說形成後,最初應用於腔腸動物中之水螅,珊瑚,及管水母類,皆極有效.次則應用於複海鞘類,亦極真切,次乃應用於環節動物,因爲環節動物,也是由繼續出芽而成生;每新生之一節,差不多與前一節完全一樣.次乃推演到甲殼類,因爲甲殼類亦由多節而成.最後則推行至全體動物界甚至到全體植物界.事實上,我們在高等動植物中,亦屢見出芽現象與成節(metamerisation)現象.雖然有時亦似完全無迹可尋,但我們似可設想其因受種種變化而漸趨於泯合.

這個學說叫作多體說 (Doctrine du Polyzoisme). 雖出世較遲而推行極快.生物學者幾全體接收,毫無異議.但在千八百九十六年,杜納奇發表了一篇論文,叫作"生物多體性"(Polyzoisme des êtres),對於這個已定的陳案,又加以精密的檢閱,於是生物多體說,在生物學者之間,又起熱烈之爭辯.

據杜氏意見,欲解決後生動物之是否爲較低一級之個體所組成,决不能用一個通用而簡單的答覆.我們應該分開幾個部分來討論.

例如淡水水螅,在他的長莖之某一部,生出一個小芽;此小芽最初不過是一個簡單的細長突起,不久於突起的前端,生出幾個觸手;觸手的中心,且生有裂口;於是完全和母體相似.此新生之水螅芽,不久便脫離母體,另成一個自由成立的水螅.不過有時候新生之水螅芽並不脫離母體,等

生既多,狀如樹枝,於是構成真正之羣體水螅.

海水水螅之出芽與淡水水螅同.但通例所出之芽,雖達到成長,一如母體仍不脫離.複體海鞘,例如海菊 (Botryllus),情形亦完全相同.再推演到珊瑚,每一枝花狀體爲一個zoide, 而全體水螅體(Polypier)則爲一個dème.

但是談到昆蟲與脊椎動物,我們也可以應用這個原則麼?昆蟲與脊椎動物,也可以類比一個水螅體或一個管水母麼?一個昆蟲,如果被認爲羣體,則頭胸腹三部,各爲一個個體麼?驟看亦似有可信之點,但須事實上與我們以直接的證明或旁證.事實上,最好"有某種生物,僅由頭部而成,又能由此頭狀的個體,由出芽作用,再生個體,此新生之個體,其一變爲胸狀個體其又一則變爲腹狀個體.又或有具節而未分化爲頭胸腹之動物,由出芽而繼續生出前後相接之兩個體,後始各分化爲頭胸腹之三部."必如此則昆蟲爲多體之說,始有可信.

第一個想像,事所決無.第二個想像,頗有可以引證之處.昆蟲的祖先,也許爲多節動物而又無頭胸腹之區別.不過以後所以成爲頭胸腹,乃由開首若干節固結而成頭,中間各節固結而成胸,後部各節固結而成腹.頭胸腹乃鄰接類似羣節之名稱,並非各爲一個體也明甚.而學者所想像相當 zoide 之部,渺不可得.

然則昆蟲之各節,各爲一個個體麼?或至少環節動物之

各節,當各爲一個個體.以下試就環節動物,略與以較詳細之討論:

許多生物學者認定環節動物實導源於與渦蟲(Planaires)相近之扁蟲類.然扁虫實單體動物並非羣體,因其本體並無所謂環節.

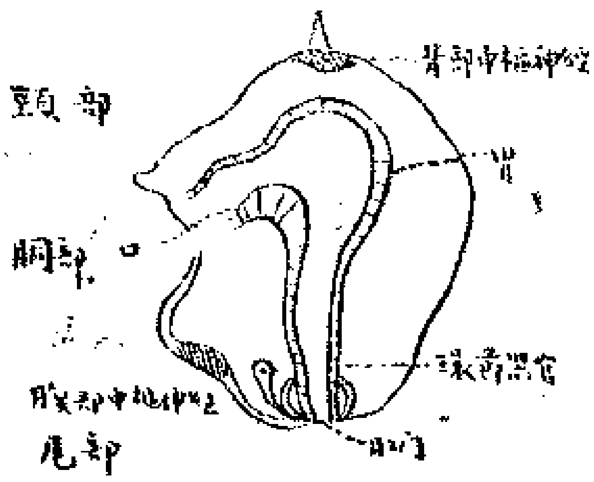
世人所以相信羣體之說乃主由研究環節動物中之多毛類(Polychetes)而來.尤其研究環節動物之發生而來.

任何一個環節動物都由一個担輪幼蟲(Trochophore)發展而成.此担輪幼蟲在他身體的後部,用出芽法,生出許多相續之環節,因以構成成體多節之觀.身體各節,都極相似,每一節都有一對運動肢,一對神經節,與一對排泄器及一節消化管.因此大家都相信環節動物乃爲許多相當個體之節,前後連續而成.故當身體被切斷爲多節時,此各節卽本其原來各爲個體之機能皆能自由生活,且再運用出芽方法,增加節片,各爲完整之羣體.多體之說,至此乃十分可信.

杜納奇則以爲此皆皮相之所得,不合事實.我們如果就担輪幼蟲,仔細研究,必得相反之結論.因爲所謂担輪幼蟲實乃一個完整之個體.其體制亦如渦蟲,並不分節;凡後生動物應有之主要器官,皆已完備於此幼蟲中.此體並不與環節動物頭部以後之任何一節相當.所以担輪幼蟲不能視爲身體的第一節,因爲以後各節,雖由此而生,但並不與之相當,更非頭部數節之固結體.

担輪幼蟲所有各器官,既已完備,以後成長之環節動物,乃由此各器官擴張而成.

担輪幼蟲,"事實上,不僅具有將來成長動物所有之頭,並有將來必要之口及其第一環節器官,此環節器官乃屬於胴部.此外並有一肛門,此肛門卽將來成體之肛門,在體之最後部.所以担輪幼蟲,在未起分裂以前便至少含有下列三部,此三部實各不相當,第一爲頭部,其中無消化器官而有背部中樞神經.第二爲胴部,有口,差不多有消化管之全部,及一個腹部中樞神經.第三爲尾部有肛門,無脚.及將來生殖器官及環節器官之痕跡;其伸張到胴部時,乃在將來胴部完全形成以後之事.如斯構成之動物,身體完全出自中部卽所謂胴部.而此胴部,乃初限於頭部與尾部之間."



擔輪幼蟲圖

然則所謂生物之多體問題,雖有事實可證,然極有限亦極不重要.在後生動物中,除被囊類以及腔腸動物中之水螅體,證據充分以外,再無所謂眞正之羣體.至於其他有許多動物,由許多環節或分瓣而成;其沿着體軸排列之各部,雖極相類似,其實乃由雙機械力影響所決定之特殊構造,

並不宜認為真正之多體式.凡此生物皆係單體,乃完整之個性,不可分離之"人格".

"卽細胞構造亦沒有認為多體式之必要.有些生物,雖可確認為細胞之羣體.但在一般,我們可以講,多細胞生物,並不是由細胞之羣體而來.多細胞的個體性實不減於單細胞生物,其所以成為多細胞生物者,蓋為滿足其生長之必要,為容易各部之分化,乃亦如某類細胞,先大增殖其細胞核,久之,乃於原生質塊中,以每一核為中心,分離為許多間隔,遂成為多細胞之狀."

三,細胞解剖術

杜納奇在生物學上的供獻,有所謂人工的處女生殖法,極其著名.但在行人工的處女生殖法之前,曾就海膽的卵子,舉行細胞解剖術亦極有價值.因為要鑑定雌雄生殖細胞的核與染色體的作用,杜納奇乃在顯微鏡下用一個小切針,切斷一些處女卵.因此叫作細胞解剖(merotomie).被切之兩半,一半含有細胞核,一半雖然還比較大些,但僅係細胞質,而無核之存在.他所用的材料,為某種海膽的卵子,試以同種海膽之精子加入此被切之無核卵細胞中,精子依然鑽入,且依次分裂,以至達到 Pluteus 幼蟲期.

在此奇特之實驗中,我們卽刻便注意到;

一,卵核並非發展為 Pluteus 幼蟲必需之物;

二,如此得來之 Pluteus 幼蟲應祇含有 n 數的染色體,而

通常認爲必二 n 染色體相合乃成個體之說,有改更之可能.

以後這個幼蟲並不能達到變態期便死去.但此並不能斷定確係缺乏一副染色體之故.因爲海膽幼蟲原極難培養,此幼蟲之死,或由於其他原因.

四,化學授精

一,關於海星之實驗——杜納奇應用化學方法,得到人工的處女生殖,其成績之佳,較之美國 Loeb 教授,有過之無不及.但其方法,則非常簡單.先以未經授精之海星卵子,浸於飽和炭養氣之海水中.或浸於用海水製成之汽水(seltz)中.所浸時間約一小時或小時半.以後再移到普通海水之中,卵子便開始分裂.其發展直達到 Bipinnaria 幼蟲期,有時能達到一個完全成長的小海星.

二,關於海膽的實驗——手續比較繁雜.試將已出極體之海膽處女卵,放在小玻璃缸內,其中所有之海水約三百立方糎,再加與海水滲透壓等量之糖水七百糎,再加十五個䴚的單甯與三立方糎的安母尼亞普通溶液.卵子之存在於此溶液中者約一小時,再轉移到海水內,且換水數次,以滌淨前此之殘液.如此約經十餘小時後,大部分的卵子,便開始分裂起來,以至發展爲 Pluleus 幼蟲期,杜納奇並曾用此法得到幾個成長的小海膽.

杜納奇之解釋授精而發展之理與 Loeb 及前篇所述之

Bataillon各大家皆不同.他以爲卵子"乃由各種膠質合成.有些膠質常爲溶態,有些膠質常爲凝態,有些膠質,則或凝或溶,極不安定,正足以表明生活物質之時性."略經小變化,卽足以使其由溶而凝,或由凝而溶.據杜納奇講,卵子之所以分裂,卽細胞內原生膠質之一事凝溶交替的變化.此凝溶之交替進行,亦有一定的程序,不容紊亂.例如精子鑽入卵細胞後,卽刻便於卵子外圍,形成卵黃膜,再當細胞核開始分裂時,有星狀體與紡錘絲之出現.卵黃膜之形成,星狀體與紡錘絲之出現,乃原生膠質成凝態之表現,至於細胞核在未分裂之前,核膜忽無形消散,此卽原生膠質成溶態之結果.所以我們如在相當時期分別使用化學反應,使其或凝或溶,則卵子卽應此反應而發展.事實上我們不必於每一階段,都加以外力,我們祗要使用一次,或兩次將卵子的反應,引動起來,以後的各級,卽可連環而來,不可復止.所以初使用某劑,促之使凝,卽見卵黃膜之形成;再與之溶,卽可促核膜之消散.上述酸類或單甯,用作凝劑,而亞爾加里性或安母尼亞,便作爲溶劑.上述甯單與安母尼亞同時並投,此因安母尼亞之起作用較遲於單甯,故雖同時並投而作用仍有先後,先予以凝,再予以溶,機軸一動,進行不息,故能由卵黃膜開始形成之點起,經過 Pluteus 等各幼蟲期以達於成體,以化學方法代精子之理想乃完全實現.

(待續)

中國西部植物採集記

畏爾遜原著

張仮譯

第一章

中國西部

山脈及水系

中國西部,有橫斷山系,自直北南下,與西藏隔絕;復有狹谷,爲其鴻溝.地圖或用雲嶺之名,以包舉此山系,而區爲雪山洪山 (Hung shan) 大涼山等脈.山系中名稱甚夥,譯成英文,大多難得正確之音,然捨此則無可通名稱,以徵其尙存於此世界矣.玆後,吾將於本區,爲繁複之敍述,蓋注意於山脈一般趨勢,及其重要形勢之大概,實多餘暇也.

諸峯巉削如刃,起伏嚴峻,谷峽偪仄,穿插其中.高峯幾皆出雪線外,備極崔巍;荒樸宏壯惟印度之喜馬拉雅山,得一擬其崢嶸.本區各地,雖未實地測繪,而此中數峯,所達高度,作者確信,足與喜馬拉雅奇峯,互爭雄長.

松潘(松潘廳)隣境(約北緯33°) 有支脈自終年積雪諸山系崛起,奔放迤邐,微作南傾,向正東越經線約十度,達湖北東北之安陸縣,其勢乃迄,而爲小山.此支載於地圖,常謂爲九條山,(九支山脈之意) 大巴嶺.或大巴山.大巴之名.僅以支中一主峯,徵實全系;惟以九條名,則異常適宜,因所指諸脈,接嶺連峯,而又並行也.山,爲四川及北方甘肅陝西之界,兼爲揚子江中段,與漢水水系之分水嶺.至城口縣區,(東經 108°30′ 北緯 32°15′ 左右)造其極峯,羣山如柱如笏,皆自絕頂迸湧,射達各方.南支界分川鄂,蜿蜒至揚子江右.副脈餘峯,其自山東之稍東各處分出者,荒野崎嶇.蟠踞湖北省西北省全境.省中山脈,遂與揚子直交,江岸山連水勢偪激,由是三峽之名著於天下.

外此支脈山系,分出滇西大理各地,(東經105°北緯25°42'左右)脈理之明,不若上述,而高亦遜焉.乃橫亙滇北黔南,及桂省北境,又復北劃湘贛,南判湖南廣東之界.入贛東,折向北及北北東行,迄寧波,(東經121°35' 北緯29°50'左右)終沒於海.此支山系綿亘,跨經線約二十一度,北有揚子江,其南河川無數,皆分水於此.紅河,注入東京灣,西江在香港澳門附近入海,並爲嶺南主川.

此嶺復岐出小支,爲數特夥,以致國內區域險阻,吾等所歷之西部各地爲尤甚.貴州一省,全係山國.鄂西川南亦如之.此三區中,副脈崇峻,斜趨於諸方,與支脈相嵘,成糾複怪異之山系.凡東經一百十二度迤西,地勢類皆聳矗,全無平原高原,或任何平坦地面;成都平原,爲惟一之例外.如此種種,以後吾等將隨時敘述之.百一十二度東,江流入平地,經冲積平原,其間山脈支系,略相聯屬,條理井然,第此範圍,與吾等工作不相關涉耳.

最要區域,包舉上述諸山系及一百二十度以西之地,曾經Richthofen名之曰四川紅盆地.蓋廣包四川岷江以東之地,且及於鄂省邊疆附近也.盆地爲農產極饒之區,水系滂溥,重鎮大城,與夫村集之屬,絡繹相望,人烟至爲稠密.物產捨海濱盛產之棉花外皆足自給並有盈餘以資輸出.鹽區散布彌廣,產額多至無限,煤鐵及貴重金屬,亦稱富有,一言以蔽之,紅盆地者,中國最美富區域之一也.

中國西部全區,爲吾等所經採集地域,恰位於揚子江流域內.根據現行地學報告,揚子導源約在加爾各答(Calcutta)正北,(約北緯30°處)中亞細亞大草原,東南境上.其流確實長度,迄未能知,大概計之,當逾三千哩.江水自其源,流作屈折,似向正南,所經荒曠,爲地千哩,人世鮮知.於是忽東向直流,入中國中部,經約三千哩,終至上海直北,而入於海.

自江口至宜昌,長一千哩,輪船往來四季無礙.每年冬令時有沙灘淺瀨爲阻,其困難處,則皆在漢口宜昌一程,故特造淺底拖輪若干,航駛其間,以利商賈.滬漢間,定期航輪,亦因貿易而來往,陳設頗爲華麗.航海深底汽船,得溯流

至於漢口.惟水落則否.夏間,江水洪漲,瀕江窪地,盡成澤國,其時航行惟一之困難,則爲乖離航線而致岐趨矣.冬夏兩季,水面高度,差異甚大,其變化視江水闊度,與江濱天然狀態而特殊.宜昌兩岸,相距千一百碼,冬夏兩季,水面高度平均相差約四十呎,其西五哩處,峽中江面窄狹,爲尋常闊度三分之一,水面平均差度,達百呎以上.自宜昌上,巨巖湍水,種種障礙,壅塞江流,惟中國特製之小艇,其最大排水量爲八十噸者,得以通航.此水程,宜昌萬縣一帶,距離約二百哩,甚爲困難;更西,自萬縣至屏山,約五百哩,反較便利.

揚子江自宜昌以西,論者多謂可以開放供商輪貿易.曩者英國特造淺水戰艦二艘,闊度及長度皆小,於1900年,四月逆江遠達,重慶;重慶爲中國西部商業重鎮,去宜昌約百哩也.其後,此二艦復上溯,至屏山縣,其一續前,達於眉山:(眉州)眉山城位岷江上,去岷江注揚子處,(敍府)約百四十哩.經此番探察,英國乃建造戰艦二艘,船式較大戰鬥力頗強,以保護僑商,現方泊於重慶,即以之爲海軍根據地.於是,德法沿英國方策,亦用有戰艦多艘,留駐重慶.每値節季適宜,戰艦上下江流,且規定每年至屏山及樂山(嘉定府)一次或數次,樂山城在岷江上,去宜賓(敍府)北,約七百哩.昔在1898年方戰艦猶未入川,有小汽船名利川者先至,船爲此區僑商先進故Mr. Archibald Little之物業,受船長C. Plant之指揮.1900年商輪"先驅"還以Plant爲船長,英國商船公司爲之發動, Mr. Little籌劃其中以履行利用小輪嘗試結果之實際應用.拳匪亂前,先驅曾爲一度試航,旋英政府褒以獎狀,後復收爲海戰之用.

1900年十二月十七日,有德國商船"瑞湘",係經意擘劃建造,以供溯江用者.去宜昌,發重慶,乃於上行僅四十哩左右,船遭毀破,全覆於東陵急灘之下.

1910年以前,試航事業,仍進行不懈,其時有拖船名"蜀通"者,製造堅固,橫曳一平底木船,載客貨以泝江.設置者爲中國商船公司,經營則同爲C. Plant船長.此行冒險旣成,年中往還,遂達一十四次.船長Plant旣隻手創闢,爲此全事業之先導,則終必有以證明揚子江上流,實可行駛商輪,固爲的當.然其工

作危險,困難特甚,消費復多,此後苟非改善水道,則航行之利難溥,終無大批輪舶遡洄於此水中也.

屏山以上江流阻截,僅可以小帆船,於某段中,實行航事.江多經峽中行,岸巖壁削,狂湍瀑布,時絕其流,注瀉沸湧,銀沫駭湧生物不可一刻居.1911年秋,有法國海軍官員特製民船乘之,自揚子江上流,下達宜賓(敘府),冒險爲非常之旅行其旅行記,殆令人振奮之文也.

揚子江中段,最困難一帶,在宜昌萬縣間,已如前述.是間即長江三峽,名滿世界者也.峽有五,自宜昌直西,延至奉節(夔州),長約百五十哩.其中,隨地危崖峻絕,並夾江流,方之尋常闊度但得三分之一,或且遜之,是以淵深異常矣.英艦1900年上溯,測得有兩處水深六十三哩半,而宜昌水,於○號標上,深且不及六呎也.懸崖大半硬石灰石,高五百至二千呎以上,通常垂直高,亦自五百呎遠一千呎外.就近處上望景象極獷莽莊雄,威靈驚肅之致.

外國地圖,皆以揚子二字名此大江,拼音盡殊,書寫則絕無例外.然迄今余未曾見此名,通用於一般中國民衆.究其名稱涵義,或謂爲"海洋之子",而用以名蕪湖至海口之一部.然乎否乎余殊昧也.江之全部,俗稱甚多,惟自川西之宜賓(敘府)至江口,華人常謂爲大江,有時名曰長江,或單稱爲江,即 The River之義.江在宜賓(敘府)迤東,爲金沙河,華人無視之爲正川者,而皆以岷江爲揚子主流,華人以爲金沙固有較大之利,而其航路長祇四十哩左右,稍上,即入蠻荒之區,未若岷江,自宜賓(敘府)上溯,可航達成都,長約二百哩.故自實利眼光之華人視之,遂重要多多矣.自巴塘附近,金沙河向北流,藏人呼曰Drechuo其導源一帶,唐古特語,皆謂爲木魯烏蘇.

宜昌溯江至重慶,支流浩繁,行者偶加停察,皆覺其無足輕重,惟有一流,於江右岸涪陵縣(涪州),蕩蕩然與大江相屬,是爲黔江,源出貴州西部,流經黔省中心各地.自江口乘土著划艇,可抵思南以上.過黔江,直抵重慶,不復見有支河,足徵重要.然每過名城大村,恆見小川游湯,注入揚子.凡小川口有人拉

堅底小船,以踰灘石.故展閱地圖,得知此程中匯入主川支流,約有數十而鄂西地野山蠻,衆流因之湍冽單簡;川東一帶,頗遠荒榛,河流縱錯,但皆不利航駛,其理爲何,則非皮相者所能道矣.

1910年,余自宜昌作陸地旅行,經人跡罕至之道,至成都既入川,自巫溪(大甯縣)稍北,西行得閬中,(保甯府)由是循大道向西南進,西達成都.此行,岷江以東江左諸大支流,余悉一一横過,考察所得,其足注意者,則諸流中各種舟艇,皆得爲遠距離之浮泛是也.余復詢知通航諸水,行程大多終止於入揚子二哩至五哩之前.奉節(夔州府),雲陽,開縣諸河,可舉爲例,以資此種情形之證實.

近支流匯合處揚子常漸狹隘,漂石巖沙,壅蔽諸旁出水道之口,湍流險湍,常現其間.據一般觀察,皆信諸支流水,挾無限沙礫以俱下,而致冲積其口.此說用於山地急川,則甚爲詳洽,惟究此諸流,則於入江前五十哩內外,所歷頗多平坦,而作安流.夏間水漲,其流量流力,亦不足以下移此無限沙礫障諸川口,就余所見,則此責任,當加諸大江之本身.方夫揚子夏漲,泥沙無量,雜江水下趨,偶得機會,不拘何處,遂停積沉澱.其流既泛溢於剝岸斷續之間,支河出口,乃成巖礫冲積最適處.况其水勢浩蕩,速力強大,凌駕諸流,遂使諸流逆行,而沉滓淤塞於其口.而此弛緩諸支流,泛溢突漲,其所雜少量巖滓,亦遂累積於沉澱之近處.

揚子在重慶,與其左岸嘉陵江相接.嘉陵蓋所謂小江矣.讀地圖知此河爲三支流所匯,而涵接於合川(合州).嘉陵江及其支流流域,略如扇形,位揚子此岸,面積較紅盆地全部之半爲大.其重要點全在利於行舟以達遼遠之境.最東支流,可乘小舟,達三漢(東鄉縣),北約四十哩;另一小支,則達巴中(巴州)之北.中心(閬中卽保甯)一流,可航華麗之大船,至廣元縣,而輕舟載藥材土產,常自甘肅碧口,順流來會於此.極西支流,舟行可達白石舖(Pai Shih Pu),去中壩僅數哩,其西諸小川,有一支入於成都平原之東北隅.

嘉陵水系,匯合分歧,爲四川最大之水道,其商業之重要,或且過於重慶以西之揚子江流及支系,此蓋非盡人所知矣.沱江於瀘縣(瀘州)入揚子,雖爲天然水系,以其水利甚爲重大,溶二支渠,橫貫成都平原北:其一自灌縣經新都,其一經廣漢(漢州),而相會於一市鎮,是爲趙家渡.自廣漢(漢州)新都每逢夏季可順流抵瀘縣(瀘州).

岷江本支,非河水下落最甚時,船艇可自灌縣成都下駛.成都支流,係人工開鑿,爲運河若干,橫經平原,與灌縣水相接,諸渠咸會於江口.岷江支流,其自新津縣來注者,水漲,可容小舟達邛縣(邛州)城位於成都平原極西南隅.

岷江源出松潘縣(松潘廳)北三十五哩處,接四川之西北境及Amdo區(約北緯33°).於松潘正南忽入荒曠之山地,行經一峽,自灌縣北上抵峽口,流長纔及數哩,僅通木筏.

灌縣自昔有偉大灌溉之利,著聞於世,至今尚存,余將於後專論及之.

岷江爲東河(即大渡河)之一派,與東河相會於樂山(嘉定府)惟自古即已利航,實際頗爲重要,故華人視爲傑出之川.東河雖有木筏往來於西方上流較高處,然自樂山(嘉定)以上,航程僅得數哩.其支流雅江(按實爲青衣江)於樂山直西,注入東河.多貿易之利.有大批木筏商賈,自雅安(雅州)上下.雅安,蓋四川西部--磚茶業中心地.

東河實四川大川之一,導源於西藏東北隅(約北緯33°40')。流經蠻荒地帶之西境,土著呼之曰大金河,至瓦司口(Wassukou 打箭鑪東十八哩之一小村)視成都至拉薩之大道,可爲驚絕.自瓦司口至樂山(嘉定),與岷江會合,其水道繞富林一帶,雖常以大渡河名之,然皆可謂爲東河.東河,以其不便舟楫,故貿易之利亦鮮.人每忽之,惟是已往地理學家,猶且漠視此河,縱據華人之觀察眼光,以爲解釋,余亦認爲無可恕也.

自屏山縣更西,有鴉礱江,注於揚子.其流量略等於主川.鴉礱源出西藏高原東北境,與揚子同屬一處,第流作東南耳.其全部所經,似皆爲正南,以注地

城中,一切情事,不及揚子江流域之明晰於世.其上流行經鴉礱(Niarung)部落,名曰 Niachu,地圖上鴉礱之稱,想即譯自 Niarung 一名也.

揚子右(南)岸,川流多出滇北及貴州省,來注於江,獨無一河,足與江左諸支流伯仲者.諸支流據地理學眼光觀之,雖無足輕重,然使商賈輻輳於流域各區,實成其勳因矣.

總之:揚子江爲中國之主川,特於中國西部爲諸河之長.四川省內,則嘉陵江岷江爲其首,以其支流運河,錯縱如織,農產富有,氣象繁昌也.凡宜賓(敍府)以西之江河,流多阻塞,不便行舟,渡口亦寥寥無幾.皆在荒莽崎嶇之地,鮮有居民.此即本章所述水系之概要,而足供記憶者.

第二章

湖北西部

地勢地質之一般

湖北西部之地,爲吾等採集區域,位於東經百一十二度以西.宜昌城在揚子江岸,適當此經線之西,自其地至江口,地上距離約一千哩,爲探採中國西部一便利之起點.此重城於 1877 年,開爲商埠,與外人貿易.人口略計在三萬上下.外僑有英國領事,海關辦事員,少數僑商,及天主教與各派之教士,合爲一小社會.本地貿易額雖甚小,以其實爲揚子江輪船航行起點,遂成一重要之轉載碼頭.大輪六艘,定期上下宜昌漢口間,復有民船數千,檣櫓如櫛,以顯其爲一貨物大集散地.於近之將來,宜昌預定爲川漢鐵路中一最大站口;此計劃內,繁重工作,已在該地開始.宜昌之名頗著,每年外人來此者,爲數日增,其目的則玩宜昌直外著名之江峽.自上海北平,皆易達此.上海有輪船,建造經意,陳設宏麗,每晚啓椗,遡揚子六百哩,抵漢口.北平漢口一道,每星期有平穩之特別快車往來.自漢口至宜昌下,約四十哩逐入山國.山初不甚高,漸乃增長;及抵宜昌城時,行人環在皆山,幾疑置身圖畫矣.城外屏拱諸山,外形似金字塔,削壁危立其旁.南西北三面,地形割裂頗甚,峯巒聳如海島,高二千達

四千呎,距縣約數日程.一自高達七千至九千呎之支脈岐出,此環抱宜昌錐式之山,極饒雅興,遊客對之,欣賞忘倦.其地質下層爲礫巖;巖上有海底沉積之石灰岩.紅泥板岩,沙岩層,平薄敷被;外又包以沙泥.其疊層累積整然,迨外面各方,侵蝕皆遍.錐形遂露出而保其嶔崎矣.此系統廣布,自大平原邊境,至於宜昌.偶包有薄層之煤田.其時代頗近今,當在二疊中生代後.所含化石,極多蘇鐵,最幼諸岩,或將屬於鍾石統.削壁危峯,在宜昌南西北三面者,主爲古生代石灰岩,略有泥板岩沙岩,成在中生代之後,各層疊積,顯係整齊,無多大變化.在川東,此岩層,蔓延於紅盆地之下.揚子江水,爲其所阻,乃直衝出峯岩,闢爲長大地罅;而各種系統,展示其中,覩之悅目.

黃陵廟附近,(宜昌西三十哩)及東陵灘流西十哩,有片麻,岩形似花崗石,暴出於外.是爲此區最古之岩,幷爲揚子江中段,人世僅知之寒武紀前岩層,故此段江流,名曰大石河,(巖礫漂石之河)亦可謂名實相稱者矣.

次古重要岩石,皆成絕壁,聳插南沱對岸,在牛肝峽及巫山峽之東半.此層厚爲四五千呎,大部係灰暗或肝色之石灰石,與黑砂石相雜,含有寒武紀及奧陶紀之化石.就其各面論之,實爲一海底沉積之大石灰石.此石風化,爲奇詭岩坂,直高常達一二千呎;稍凸卽成奇峯,廣袤恆爲數十百哩.江右岸,對南沱諸崖壁,綿續幾至黃陵廟者,卽可視爲典型之例.水落之季,諸灘流急,其名曰,新灘者,在宜昌西約四十五哩,有泥板岩層,顯瑰美之景色.其厚約千八百呎,主爲黏板岩,作橄欖綠,兼有局部之黑泥板岩,與石英岩,其年齡則屬於中古生代.

在此泥板岩統之上大致一律者,爲上石炭紀之石灰石大沉澱,厚達四千呎以上.是爲宜昌及迷灘峽(按此名原文爲Mitangorge)間之特殊系統.巫山峽之西端,夔府(風箱)峽外,亦有之.其岩大多爲灰暗或黑色之石灰石,饒有海洋化石,間有無烟煤薄層,彼經風化,亦森成巖壁,斷皆有陡削稍遜之山面環之.湖北西部,濱長江南岸,寒武紀奧紀之岩層特多,而此種系統,廣布迨遍兩岸,

第北岸較多耳.其次繼起,爲二疊中生代之紅泥板岩層,沙岩層,及海底沉積之石灰石與煤之薄層,此皆已於記述宜昌時敍明.諸層皆在江左,爲迷灘峽西一帶之特色,直至巫山峽出口乃盡.此範圍內,發現煤鑛數處,尤以巴東縣爲多.冰河性沉澱及冰河活動痕迹,湖北西部,雖無大型之顯現,然尙略存於某數隔中.其最易接近處,在南沱對岸,揚子江上一小村,村位宜昌峽西端盡處,在宜昌城上遊約二十哩.其處得見冰河性沉澱,厚約百二十呎,外覆寒武紀與陶紀之海底沉積石灰石,如上述者.一切冰河活動之跡證,皆明白表現,而作冰河性沉澱之全部展覽,最能灌輸智識.本區因有種種不同系之沉澱,地面乃生重大之擾動,諸岩層常自深邃地底,彎曲而高舉.故域中最高峯巔,常有志留系(?泥盆系)之泥板石.

湖北西部鑛物,貴重及可供應用者,產量無多.煤雖散布全境,究無何處十分饒富,且其質亦平平.鐵鑛素稱惡劣;開發多所,僅一二處,質料優美.建始興山兩縣產銅,然開採不能達稍鉅之量.鹽,四川紅盆地雖饒,此間轉無有.沙土及泥灰石,用作磚瓦.又有數地,燒石灰以供建築之需.其泥土及石灰石,同爲中古生代之岩層.石灰紀之石灰岩,亦採爲各種建築工作之用.

峽中,川澗無數,出瑰秀之幽谷,來注於江.諸川,流盡縈迂通常充溢,幾及谷底全部,兩岸限以岩壁,垂直高三百至一千呎.瀑布極多,所生植物,皆得遂其繁榮.岩頂悉作荒詭奇譎之形.地下泉流良爲普通.小河恆以爲源,其流或出自穴中,或出自削壁之面,或由岩石平面而上湧.興山河源,卽此例也.華人於此巖洞潛流,輒來強附會,傳爲神異之說,而常因其地勢,建爲宏麗之寺廟.

揚子附近,峯巒岩壁,聳立威峻.寺廟林立,皆道教徒所供奉.諸廟以悉冠於不可攀躋之巔,故思其建築材料,何以轉運達於其上,莫不驚異也.隨地皆有林叢,若冬青皂莢松柏公孫樹之屬,植於廟旁,以增風景之秀美.寺觀結構輝煌,但其內黑暗,污穢沉鬱,迫察之餘,遂覺靈氣被奪,實爲恨事.然自遠處望之,極形景麗,其建造格式,與四週融洽,遊人莫不盡情驚賞此風味及文化,此卽

寺廟存立至今所繫矣.被除惡煞,以保守城鎮村集之"幸運",爲中國極要之事;寺廟之創立,恆與之有關.寶塔,即專爲此目的而修造,遍中國皆有之,堪輿學幾全歸附於道教.禁錮華人思想,至於極度,且實際限制其行動之大部.余等可以宜昌一實例以明之:宜昌隔江右岸,有錐形小山,而城立,高近六百呎,外人稱之曰"金字塔."居民誤認此山,使宜昌蒙不祥之影響,謂其地文風衰沒,皆山爲祟,若非建廟於城後高丘,使其高聳,俯視金字塔,則此惡煞,且繼肆其虐,而幸運之神祇,終不悅此城.某年,此廟落成,即有秀才掇高科於省闈.由斯以觀,豈非建廟之善果乎?廟名東山寺,醵資甚豐,其廟貌就近各點觀之有顯赫崇偉之致,此種信仰名風水,其原理爲西方一般人士所不能解,但知華人心理往往受其影響而已.

湖北西部,特爲荒野,不適廣大之農墾,有用鑛物,蘊藏亦甚稀,故爲中國人口最少,貧苦無開之地.然還以此而爲植物家非常興趣所在,蓋其地植物,鮮經注意,不若中國其他各地常有採集之事也.宜昌可用之地,曾否遍經耕耘,尚難斷言,但以區中地性,不適耕種,雖華人忍苦耐勞,尚多未經農墾者.

坡坂岡巒,(其高三四千呎者)及谿谷,苟土性稍宜,即有種植.然以其地天生巖壁如林,隙地則磽确,縱令可耕,其土中收成歉薄,而出產不足以補償勞力所消費.六千呎以上崇山高坡,華人之才智堅忍,且未能達,尚有原始林地,及多數之林落存在.崇高之山,廣有各種中國藥材,鄉民恆往採集,補助生計.昔時曾經開闢,山中廣大之區,種馬鈴薯,頗有成效.約四十年前,馬鈴薯病菌來侵蹂躪丘畝,農民破產,不得已,向下移居於較適之高度.敗垣殘瓦,荒冢纍纍,覆以惡草荊棘叢灌,約略可辨曾經人居;然至今日,行經此區高處,即自朝至暮,亦不復見有人居或人影矣.凡在一谷,可容種植自給者,則有少少村落,連續如帶,而四千五百呎之高處,常見村居茅舍農莊,等建築此上,農耕無甚希望,居民絕鮮.

余與中國認識閱十一年,行蹤廣遠國內梗阻之區,頗爲快意.以爲中國合

西藏邊境論之,採集最困難者,當推湖北西部.良以供給缺乏,苦力無從僱覓,道路未經開闢,復有鄉間一切困難情形,遂致旅行此區,艱苦迥異尋常矣.

本章附錄宜昌附近採集植物之記載,宜昌及毗近諸地,所採既多,於中國植物採集工作紀載中,實佔第一流之地位.

附 錄

宜昌植物誌

本篇所誌植物,產於宜昌及其附近高二千呎以上之地域.主為暖區溫帶性,亞熱帶性亦不少.又有大批寒帶植物,與繁茂之涼區溫帶植物,伴生其中.諸特殊植物,可供此點之說明者,為:油桐 (Aleurites Fordii) 楓樹 (Liquidambar formosara) 水蠟樹 (Liq strum lucidum) 雲實 (Caetalpinia sepiaria), 八大王 (Toddalia asiatica)紫藤花 (Wisteria sinensis) 映山紅 (Rhododendromindicum),木瓜刺 Pyracanthacrenulata) 藏報春 (Primula sinensis) 秋牡丹 (Aremonejaponiea) 飛天蜈蚣 (Aspidestra punctata),石海椒 (Reinwardtia trigyne) 狗脊 (Woodwardia radicans).宜昌環在諸小山,外觀極荒瘠,多被黃茅 (Heteropogon Contortus),稍有灌木草莽,有小形之松 (Pinus Massomana) 柏 (Cupressus funebris),偶或尋常淡竹 (Phyllostachys pubescens) 之叢,點綴其間.

惟是宜昌植物價值,吾等所注意者,不屬此諸小山,而屬於谷峽中之石灰岩壁.其間所生,為繁茂開花灌木,與小阜迥殊.

早春先花,有鬧羊花 (Daphne genkwa), 毒空木 (Coriaria Nepalensis) 兩種.鬧羊花為極可愛之植物,遠勝同屬中最美麗之種,吾等不能使其成長於英國,實為深恨.惟在宜昌,當山墳塋之上,礫岩,石灰石性之漂石,及峽中小耕地四周亂石間,莫不生長殆遍;有時亦生於陰蔭處,但常以充分暴露於烈日中者為多.此植物平均高約二呎,罕有分枝.其形狀可擬為一週年之幼梅樹,花朵密攢,聚於一幹,佔全長三分之二,望之如一大形之密錐花.花作紫丁香色,甚濃暗,白色亦所常見,外觀似紫丁香,宜昌外僑遂以紫丁香呼之.

毒容木,不若闢羊之著名,觀賞趣味亦遜.其花異性同株,結實者纍,形頗美麗.華人謂其莖葉毒害牲畜.

紫藤花 (Wisteria sinensis) 豐富,常升長爲高樹,以半灌木狀者,較爲普通.其花,開時繁多,顏色淺深,頗多變化,惟白花罕焉.

此間別有著名而豐富之灌木,——檵木 (Loropetalum Chinese),生於巖壁頂頭,及疏散之礫岩與石灰石性之漂石間,作極密之矮叢.其高鮮逹三呎以外,分枝甚多.花盛開時,自遠處望,儼如雪片. Veitch 女士,善栽此花,不過榮茂之盆景,與自然狀態者,懸隔極大耳.若植於英國 Oeven 及 Cornwell 假山上,吾料其生長必能暢旺也.

隨地皆薔薇叢每年四月,花發如錦,絢爛異常,殆一切花卉所不逮也.若金罌子 (Rosa laevigata) 刺糯棚 (Rosa Microcarpa) 常見於無蔭蔽處.野薔薇(Rosa Multiflora) 藥王子 (Rosa Moschata),木香花 (Rosa Banksiae) 漫生谷峽中,而以陡壁削岩上爲尤多.藥王子木香花,常長成高樹,其幹上花枝招展,誠可供回味之奇觀也.每於侵晨或微雨之後薔薇陣中,芬芳馥郁,揚溢四達,行經谷裏,誠遊人世之天園矣.

鐵馬胡燒 (Sophora Viciifolia),散布甚廣,三四月,開遍谷峽,滿着青白花朵,甚爲美麗.雲南省及西藏界河之溫暖流域,亦常見之.惟宜昌所生,其刺較雲南川西者爲少.滇蜀所產,或將實爲印度之鐵馬胡燒 (S. Moorcroftianum) 也.

山峽壁上,最普通之植物爲枇杷 (Eriolotrya japonica) 蠟梅 (Meratia praecox),花時皆在聖誕節.前此植物分類,於日本原產,多所誤認,是卽二顯例也.

蘭香草(Caryopteris incana) 礫岩漂石間頗多,其花之美,似不如極西所產.木瓜刺 (Pyracantha crenulata) 牡荊 (Vitex Negundo),特爲普遍;野皂角 (Caesalpinia sepiaria) 亦然.——此刺灌木係半攀緣性極似更熟知之雲實 (C. japonica). 其葉美麗,花爲密錐式總狀花直立,呈亮黃色.以是爲極顯著之植物.

山指甲 (Symplocos crataegoides) 饒富,有美白之花,燦藍之果,爲有用而可愛

之灌木,尤宜馳譽於世.溲疏(Deutzia, Schneideriana),紫薇花 (Lagerstraemia indica),映山紅(Rhoodendronicum),探春花(Jasminum floridum),南天竹(Nandina domestica),貓兒屎(I lex cornuta),羊石子(Viburnum utle),密蒙花(Buddleia officinalis),皆極多,其餘此間常見熟知灌木,或鮮知者,述之如下;

Abelia Chinensis, A. parvifolia, 黃櫨 (Rhus Cotinus),醉魚草 (? Buddleia asiatica).多青 (Ilex pedunculata),蕃茶樹(I. Corallina), Deutzia discolor,野黃豆(Desmodium floribundum),胡頹子(Elaeagnus pungens),羊奶子 (E. glabra),翠籃茶(Spiraea chinensis),柃(Eurya japonia),金絲桃 (Hypericum Chinensis,),土常山(Hydrangea strigosa),勾兒茶(Berchemia lineata),小衛矛(Evonymus alata),米花子 (Polygala Mariesii), Viburnum brachybotryuna, V. propingum, 南山茶? (Thea cuspidata),薅田藨(Rubus parvifolius),及多數其他之種.木梨 (Chaenomeles sinensis) 開紅花,木瓜(C. Cathayensis)開白或青色之花,常經栽種.以上所舉過長,余遂遺去老鼠刺(Iteailicifolia)未列,此誠不當.老鼠刺外形似冬青,有長綴之之白總狀花.宜昌灌木美麗,無出其右者.樃榆(Distylium Chinensis) 杞柳(Salix variegata),冷飯子樹(Yicus impressa),凍綠(Rhamnus dahuricus),水冬瓜? (Adina globiflora),水柏枝(Myriceria germanica),及怪異之黃楊(Burux stenophylla),為河岸最常見之灌木.攀緣植物,顯見極多,其美麗者,若忍冬 (Lonicera japonica),絡石 (Trachelospermum jesminoides),葛 (Rueraria Thunbergiena),亨利鐵線蓮 (Clematis Henryi),九龍鬚 (C. Benthemiana),鐵線蓮(C. Armandi),木通(C. Uncinata)葛藟(Vitis flexuosa),紅葡萄藤(Parthenocissus Henryana), P. Thomsonii),油蔴藤 (Mucuna sempervirens) 等.

油蔴藤一物,頗可注意.宜昌上流二哩,江之右岸,此植物標本無數,覆地數百方呎,上攀松竹之林,主幹基部,臃腫幾若人身,故外人呼之曰大藤(Big creeper).五月花開老幹上,作總狀,呈暗朱古律色,莢長二至二呎半,種子頗多,色黑,巨大如豆.

宜昌鮮有叢大之林,然其內容複雜,至爲可愛.春有泡桐 (Paulownia Duclonxii), 楝樹 (Melia Azederach) 盛開圓錐花,華美奪目.秋有烏桕 (Sapium sebiferum) 獨立,作奇異之秋色.冬則水蠟 (Ligustrum lucidum), 柞青 (Xylosma racemosam var. pubesceus), 常綠特秀.而柞青幾盡生於道傍,蔭庇廟宇.

皂角樹 (Gleditsia sinansis), 櫨 (Rhus javanica), 化香樹 (Platycarya Strobilaceae), 櫟(Quercus serrata), 椿 (Cedrela sinensis), 鬼柳 (Pterocarya stenoptera), (樹上有寄生)既爲常見之樹.其次有梧桐. (Sterculis ptatanifolia). 白楊 (Populus Silvestrii), Crataegus hupehensis 朴樹 (Celtis sinensis), 檀樹 (Dalbergia hupeana), 飛蛾子樹 (Acer oblongum), 沙木 (Cunninghamia lancelata), 樗 (Ailanthus glandulosa), 穀(Broussontia papyrifera) 榔 (Ulmus parvifolia), 枳椇 (Hovema dulcis), 無患子 (Sapindus Mukorossi) 柳 (Salix babylonia), 槐 (Sophora japonica). ——槐有奇異之變種,其葉與幼枝上,密被白色絨毛.

宜昌既饒着花灌木,草本植物亦復不少,尤爲優美園藝植物之一淵藪.其最著者爲報春花?(Primula obconica), 美麗怡人,遍地皆是,而以濕地山峽揚子江岸草中爲尤多.偶於極適環境中,其高度花形與枝葉之茂,一如經人培溉,然一般所生,皆卑靡無足觀之野草.故宜昌特爲藏報春之藪.並有園藝菊花之模式標本出於其間.

其餘可愛之草,常見者有:黃連? (Corydalis thalictrifolia), 秋牡丹 (Anemone japonica), 野馬齒莧 (Sedum sarmentosum), 虎耳草 (Saxifraga sarmentosa), 鳶尾 (oris japonic), 石海椒 (Reinwardtia trigyna, 忽地笑 (Lyconis Meaurea), 石蒜(Lgconis radiata), Rehmannia angulata, 千葉萱草(Hemerocallis fulva)萱草 H. flava. 特殊草本有沙參(Adenophora polymorpha)白及 (Bletia hyacinthina), 馬蹄香 (Asarum maximum), Ophiorrhiza Cantonensis, 紫花地丁 (Viola Patrinii), 還亮草? (Delphinium Chinensis), 狗尾巴? (Lysimachia Henryi), 珍珠菜 (L. clethroides), 委陵菜(Potentilla Chinensis), 翻白草(P. discolor), 蛇莓 (Yragaria indica), 小金花 (Thalictrum minus), 斑鳩窩? (Mazus pulchellus), 馬鞭草 (Verbena officinalis), 桔梗 (Platycodon grandiflorum),並多種之菊類豆類及繖形類植物.

宜昌之名,遠播一般園藝家之耳,或由盛產可愛之野百合 (Lilium Henryi) 所致.此馳名之點種,生於石灰岩礫岩之上,初不甚多.百合 (Lilium Brownii) 及其變種 L. Chloraster L. leucanthum 極夥山丹 (L. Concolar) 則間有之.

羊齒種類不多,惟狗脊 (Wooduardia radicans), 薇 (Osmunda regalis), 蜈蚣草 (Pteris longifolia), 鳳尾草 (P. surrulata),羊齒? (Nephrodiumonolle), Cheiranthes palula, 裏白 (Glese' cnia linea is), 極豐富.鉄絲草 (Adiantum Capillus-Veneris) 之變種,羣生於峽中石灰石筍之上.此羊齒小石筍,常取以運售國內各地,通常稱爲"宜昌羊齒石".

宜昌附近渠沼多,有漂浮植物.茲略舉數種,結束本篇.蓮 (Nelumlium speciosum 係經種植)芡 (Euryale ferox) 葉態美好爲最常見.其餘普通水生植物有莕菜 (Limnantheum Nymphoides), 水龍 (Jussiaea repens),槐葉蘋 (Salvinia natans), 菱 (Trapa natans), 滿江紅 (Azolla filiculoides),田字蘋 (Marsilea quadrifolia),雨久花 (Monochoria Vagidalis), 大鬚草 (Eriocaulon Buergerinnum), 並數種眼子菜屬狸藻屬之植物.晚秋之時,槐葉蘋科於池沼中,着深紅色,極爲美觀.附近稻田,曾經 Dr. Henry 覓獲奇形植物一種,已定爲新種茶菱 (Trapella Sinensis) 之模式標本.然歸之自然目 Pedalineae,則殊可疑.

第三章

旅行方法

道路及準備

輪船既達於揚子江中段上遊,重慶與海岸及西方文化之接觸,縮短三星期之久,遂一躍而爲中國西部商業都市.此於行旅者誠有莫大之助,然亦不過苟延無可奈何於片時而已.旦夕間,旅客必捨棄現代西方交通工具,去奢華安適,而求合於東方簡陋奔僕也.吾等採集之區,僅成都平原,有粗笨之獨

輪車此外絕無輪車轉運之工具騾隊無有騎乘之馬,亦不能覓得.陸上交通全賴轎子與兩腿,水上則僅有小民船.堅毅,慧敏,閒暇,爲行旅者必要之條件.苟三者中,任缺其一,則只能到較進步之地帶.凡人天賦堅毅慧敏,復有無限時間,供其支配,必一路平安,遍歷中國各地,其樂固無涯,而加惠學識者亦廣.中國文化悠久,蘊富無限,景物瑰奇,勞農數十百萬,長期留寓境內之外人,莫不迷戀而沉醉而興奮,而終陷於絕望.歐洲北美而外,無復國家,具此世界上永久之興味,偉大得如中國.蓋中國變革多端,原形仍在,能流瀣二十世紀,與耶蘇紀元前黎明文化而爲其鎖鏈也.優遊此龐大之國中,可謂爲一種教育,使凡幸運完滿以獲得此閱歷者,留永久之印象.至於華人不以西方人之觀點,視其時間,此則外人旅行中國內部始終最須牢記之事矣.

今旅客多仍以民船自宜昌溯江,倘無定期輪船,往來此危險水道,而屏民船於無用,此現象或將延長甚久.自宜昌至重慶以上歷程,常多紀述,致成老生之談,余亦不願再有所記,良以此題作述,已屬浩繁,他日又或將有作家物起,且能完全告無愧於其文也.

余於此程已上下數次,每對峽裏威嚴之美,輒愈歆而愈深.罅隙荒榛森羅萬象,尤有任何作家筆所不能摹之妙.故此景欲完全了解,而增其評價,自必俟手親臨.而上下更數,於其急湍錯出,迅流若馳,灘瀨阻舟,亦彌生駭怖敬謹之念.

民船爲世代經驗之結果,裝置完善,以行駛於此亂流,其利用平衡之舵及尖塔建築,早於歐西諸國.其人駕駛民船,以餬生計,亦完全熟悉其任務.洋瞟旅客,多筆記彼等溺職,不堪任重,此說未能適當,實屬無可諱言.中國船夫,小心謹愼最合格爲全權之駕駛人,凡人觀察彼等及其工作愈多,其驚羨之心亦將隨之而增長.噫,東方方法非若西方,第其成功,則一而已.西方人居舟中,必竭力以求適於東方方法,任何企圖以實施西法,一般結果,常爲不幸.外國人常不明地方情形,以及危險困難,強迫船主前進,而反對其可靠之判斷,此

長江屢次慘禍發生所由也.旅客於可靠之中國船行寫船溯江時,若經商立合同,明載合意之處理而後任船主按其本來方法,履行合同.此爲擔保平安,惟一之法,書契約時,絕無何人欲有所反駁,然究諸實際,此等契約,一般常僅因犯禁者之冒險而訂立.

書中於陸地旅行之事,多所陳述,故略論及道路,似頗稱題,且符所願.此於未來者固可視爲瑣屑,而於經歷者則殊不然.中國道路,使凡旅行其上者,所得印象,刻骨不磨.一般旅客,雖欲一吐其積怨,亦苦於言語,不足以形容.道路分已鋪未鋪兩種.余曾未遇旅客,確具決心,以判別此路道,何者爲劣,何者爲通行較難也.曩有敏辯作家書曰:"中國公路,非經皇帝管理,令其整齊者,乃爲皇帝而必使其整齊之路也".任何大官,往國內遠地赴任,地方紳董,每於其必經道上,稍加補葺,亦若重修者然.此工作常係強制徵徭之役,於嫉怨中草草完成,故在山縣一經狂風暴雨輒致毀損多處.

看管道路,非某人實際職務,並亦無人爲之.大路土地,乃強取歸公,耕種區內,農夫盡心剷挖此路,至最狹之度.道路因是逐年偪窄,及有某大員來臨,始迫地方紳董重修,以回復其舊觀.中國路道,究其原始,一如世界其餘各地,即以行軍征戰商業貿易於遠距之處所,爲其動因也.

公路遍達中國全境,聯絡國都省會,爲數雖少,價值極大.皆往昔建作軍事用者,其時,中華帝國,方忽於征服異國,開拓疆宇也.道上遍鋪大石塊,皆有極大之軍事價值,往往確係自堅岩實際鑿鑿而成.按地方情形,及必須出於其間貿易之性質,而變其度.北方諸地,陸上交通,恆用車,其路亦適於此種輸運.吾等採集之區,地殊野陋崿錯,不適行車,旅行僅容乘轎,公路,原可容二轎自由往來.中國西部有一道,闊爲十至十二呎,其寬度足以適於此用,自必可信,然不幸其路罕能保全達稍長距離.此種古代道路,逶迤上下,計劃至周,而古代工程師,於全工作中顯其才力之價值.其路亦曾林林於一時,一若國內其餘之路,而至今日,皆遠讓於前矣.此路通常盡遭漠視,言之痛心.洪水既隨地

破毁,鋪路石板,復被竊去以建家屋,或供其他之用.其未鋪砌之峽,每值雨季,泥淖載途,幾不可通者,亦殊常見.然而古代工程師,死去雖久,留得寬舒道路,使後世激賞其精明練達,令行旅之徒,莫不追懷上世之昇平焉.

中國境內繁盛之地,凡大城巨鎮村集之間,大道相釋.通常寬爲八至十呎,昔時皆經鋪砌,而至今日,似皆露失修之態.中國西部城村,幾皆位於河岸,蓋流域一帶,多有險阻路無之路線.河流縱令不利舟行,然可使腹地較易接近,非若崇山林莽之難也.凡較古之路率皆密邇河流;惟值地態必須背馳,及分水嶺插入其間,如行岐分.

小路仄徑,向各方穿插於境內,卽人口最稀之山起,亦多有之.曾有絕智之人,想得鹽商,大概爲人類最初之一種貿易.故中國之鹽,自來係政府專利,而私運之行,亦肇始於湮遠之代.此山路,殆可謂其皆私鹽商所創闢.今中國若干重要通商路線,確可據此,以究其根源.以四川省論之,鹽產極富,山徑亦然.經長時研究,知此小路如織,爲鹽業之結果,而尤爲私運所致成.遍湖北四川交界之處,至今小路甚多,其於鹽運之外,實無別用,且鹽仍得由此路,違禁以達於某數縣內.鹽客視此難行之路,極爲有用,蓋無此路,食鹽不能遍達中國西部,以及內地極荒遠厚利之處也.

中國陸地旅行,不能使用帳幕,故皆不得不應用當地居民簡陋之供應.華人素不知帳幕,必欲改變習俗,徒致居民疑難,則不智矣.旅客最宜有伴,至可能時,然後可離大衆.大路上有種種客店,其中皆極汚穢蚊蠅蚤蝨甚多,如時出擾,更雜惡臭,到處皆然.小路上,情形異常惡劣,膳宿困難,以中山爲尤甚,雖然,旅客困倦之後,卽不堪之宿所,亦聊甚於終夜佇立也.在濕季中,或遇行程阻於溪川暴漲等事時,尤深覺旅途缺乏應有設備.而旅客在中國荒曠之地,莫不渴望有印度及錫蘭之郵舍,或類似之設備也.

旅行中國,必備糧食,炊具,床帳,被褥,及除蟲藥粉.若此以言,則中國旅行殊非非易事.但其地勞力價賤故些些經驗.旅客卽知保持其行裝,於適當之限

度,而不至困難.至於雇用工人,必倩可靠者爲之介紹,一切必具瑣事,尤須定立合同.別有首領,照管諸工,是爲伕頭.

中國與外人習狎之地乘轎之繁文,可以免去,然轎子爲尊敬之標幟,灼然外見,殆所必知.故轎子乃旅行正當之中介,殊遠去其實用,而爲吾等外人所必須,蓋其所至,令人起敬也.在窮鄉僻壤,轎子縱令拆散,抗之亦甚有用.其價值且較高於護照.是以乘轎特爲必要,而決不可省去者.

猶有一事,爲旅行充分準備中,所必須者,即覓一好厨工是也.外國旅客,若不能作中國話,必須有工人能說夾雜之英語.良好旅行工伴,覓得頗難,最後.一般旅客對之當思雇請翻譯者.雖然,故鄉挈來良善之工人,即能勝此任以達於必需之度也.

第 四 章

訪 花

湖北西北之行程

1919 年六月四日余別闢新徑,離宜昌,經湖北西北之荒野,以至成都.此六百哩陸地旅行,前驅者爲旅行隊,經余指示,裝備完善,而熱情促使我等向前使余覺一切困難不難征服.隊中人,幾皆熟識,蓋曾與余屢作相同性質之旅行也.

我等因至興山縣之路上,有工人從事於標定川漢鐵道路線之記號,擁擠不通,乃改擇較小之路,行經三友洞谷.旅行隊爲挑力十八人,採集及路上雜務工人數名,工伴(Boy)及余坐轎二乘.余之出發,先兆不祥,蓋方余坐轎前行,尚未及認清租界界限,轎桿忽斷其一,所幸其地,新桿不難覓得,延誤僅一小時.可知第一日欲趕早出發,決非易事,而宜擇得短距離之站口.自宜昌上行五哩,下午一時,追過大隊,抵三友洞谷口,是日天熱,我等復行十五哩,止於沙老寨,(譯音 Sha-Lao-Che)共行二十五哩.此小村房屋,僅寥寥數橖,余等擇最大一所居宿,其屋適爲酒作,陳釀醇香,甚爲濃烈.

自三友洞上,行程殊饒興趣,景緻多爲偉大崢嶸.硬石灰石巖,聳立常過五百呎,是班羚等獸所居,亦許多巖生植物之宅也.壁隙巖龕,爲報春(Primula Siu ensis) 所家,其花時已過,花莖皆彎曲,使其種子得全存於岩縫中.報春爲溫室櫻草之野生者,二三月間岩壁被絳紫色花叢植物之群,奇觀艷艷,令人生溫暖之感.岩非絕聳處,生長尤爲繁茂.春季開花灌木,大多已有幼實.若非松樹(Pinus Massoniana)綴飾其頂,玫瑰靡開,則所見之花極少矣.

次早出發,因一二挑力,不再前進,須另找他人,躭擱甚久.終日所經,路道崎嶇計行四十五里,費十小時又半,初十里,爲上山路,谷中頗狹,景物更美於昨.我等經一可愛之天然洞穴,穴內石筍如林,鐘乳石上,有鐵絲草之叢.此石暢銷於揚子下流諸省,皆知爲宜昌羊齒石.

谷中紅葡萄藤豐富,其初生稚葉,有白脈露出,鮮明奪目.洎葉長成,此異色卽滅去,而絲毫無異於常矣.

谷忽不可通,我等爬行諸岩上最後乃遠望四野,所見梯田甚多,地上寸土,凡可耕者,皆經種植.主要農作物,如小麥大麥豌豆,皆已成熟,片片黃雲,活躍於隴底.罌粟一二畝,蔭在樹下,品質甚劣.復瞰近處,多植梨梅,竹叢松林亦茂白尾捕蠅烏 (Jchitrea incei) 到處得一瞥見之,復有山雉鷓鴣,鳴聲相和.

牛坪爲今日目的地,附近多稻田,農夫方忙於插秧.鄉地成秀朗之臺梯,而背倚寒武紀至奧陶紀之石炭岩.將抵牛坪,經美麗之銀杏樹下,枝上突起,奇形作根狀.道旁岩石面上,蜂糖花 Rehmannia angulata 豐富,梯田壩上爲尤多.蜂糖花高呎半至二呎,每株開花六至十二朶,紅玫瑰色,似實麦容里斯.(Fox-glove)

牛坪地積極小,屋舍約十餘,居民性格平和,吾等宿所偪窄,然頗安適.此小村去南沱三十里,有路可通.1901年,余初來牛坪,留居若干時,居民始終視余爲大怪物.自後往來數次,迄今彼等視余如老熟人矣.

入夜甚寒,須蓋絨毯.此時如在宜昌,卽想及羢毯,亦當汗出也.早六時左右,

離牛坪,幾經上嶺下坡後,至一小河之旁,其河在南沱入揚子.溯流數里始陟陡峻.山路有時平易,有時峭立,屈折隱現山裏,至午後六時半吾等始得投宿處.落伍挑夫更遲一小時.路程全長約祇六十里.然皆以爲足有七十里,姑無論其距離若干,此程確爲一天苦路.

山兩側危峻,脊如削刀.各地皆墾成梯田,植稻山底,玉蜀黍皆在坡上,亦偶有馬鈴薯土.山旁過陡之地,或某季不適栽種者,生灌木大樹,主爲矮櫟,及尋常松樹.威爾遜山茱萸(Cornus Wilsoniana)之小樹,開花滿枝,隨地常有.石棗(C. Kousa)花亦正開,盛着於山邊林木叢中.其枝橫出,樹頂恆平坦,花極繁,直立而恰在葉上.苞色白甚顯,直徑常超過五吋,長成變爲粉紅.果實大,橙紅,可食.此中國石棗,若經培植,或將較園藝家熟知之日本種爲佳.其性喜向陽乾燥之地.但今日所見豔絢者,非石棗而爲野薔薇.野薔薇,河旁豐富,(Rosa Mulltiflora)其花紅白相間.藥五子(R. Moschata)高懸林中,柔香瀰漫.羊桃藤(Actinidia Chinensis)到處皆有,攀昇高樹,環以白色及鵝黃之香花.下午見蜂糖花(Rehmannia angulata)以斷岩石上,當陽處爲尤多.

老木家(Loa Mu Chia)爲我等歇處,高約三千五百呎,有房房六棟,瓦窰一所.近邊,燒成木炭頗多,以備運售南沱及下流一帶.途遇多人,揹大包梨葉及蘋果葉.此葉常用代茶,有大批自此輸往沙市.

離老木家,卽攀登扇籠山,(Hsau lung shan)爬行千呎.始造其巔,上有小廟,已就頹敗.下危坡數百尺,道路紆迴於衆小山之頂,山皆花岡片麻岩,崩解急速.路復低下,終於河濱,與宜昌與山大路相接.

近扇籠山頂,爲寒武奧陶紀石灰岩.林中多鵝掌楸(Lixiodendron Chinensis)又有蛺蝶戲珠花(Viburnum tomentosum)幹上白花如雪.別有湖北九苔(Styrox Hemsleyanum),六月莓(Amelanchier Asiatica, Var Sinica)着白花,以美麗繁富著.較開陽之坡坂,白檀(Sympl eos Crataegoides)馬尿樹(Lonicera Maackii Var. podocarpa)揚櫨(Diervilla japonica)山楂子(Cratoegus Cuneata)爐其華美.亦有松

樹衆屬之疎林.其松株皆割傷,以促長松脂.凡開闊處富有懸鈎子(Rubus Corchorifolius) 其莓紅色味美如葡萄,可稱佳果.下坡有Dipteronia Siuensis, 爲小灌木,具直立小白花束.楊桃藤頗多.有兩性及雄性株開白色大花,易變成鵝黄色,香味可愛.其純雌性株,尚未發現.下降至山麓,爲宜昌興山大路,循之前進,下午五時,達水月嘴(Shui-yueh Tsse) 爲一小村位稍隴中.人口百戶,居民極好盤詰,余卽隨時招待,直至就寢乃止.

我等上大路,見川漢鐵路測量標記.劃之路線,豎竹竿爲記,岩石上則標亞拉伯數字,而冠以羅馬字.此線恰在水月嘴前,沿河下達梁河口,(Liang No pou) 於是續下興山河,復至揚子江,於香案(Hsiany Che) 與揚子江相連.其建築須大才能之工程師經營,卽在此段,已須許多隧道及炸毀,艱難可見.然漢口至此,較自此以西之工作,仍屬簡易.故雖在工銀低廉之地,其路價仍將極大.而人民激烈反對借款築路.蓋於此事業之偉大,及路價之奇昂,殆絕未有正確之認識.

次日路程,頗險峭有趣,經起伏小徑,一山脊上.其處有大椴樹,因名椴樹埡(Tau Shu-ya).此樹高約八十呎,幹圍二十七呎,嫩葉如銀,雖已中空,望之却甚茂.其龐大成爲附近數里內顯著之目標.

下行過大壠進一山坤,長二十里,坤口景緻偉大硬石灰岩壁直立約二千呎外.坤尾常見山柳樹(Pterocarya Nupehensis) 沿在野燒之地.罕見之Pteroceltis Tatanawii 此間亦有兩棵.遍谷中木香花(Rosa Banksiae) 特富.灌叢高十至十二呎,其上羣生白色香花.木香花盈千累萬,特喜生於岩石及溪濱漂石之上.野皂角(Caesolpinia Sepiaria) 附近亦豐富,開黃色直立密圓錐花,有香氣.八角茴樹(Illicium Heneryi) 生絕壁上,開鈍紅色之花亦堪注意.稍進見一小河,其流以石爲底,甚闊而淺,出自谷中,更上不遠,爲一絕險高阜,約二千呎.過山坳,步平壠,有路下至石巢寨,(Shik-Tsao-Che),達時天已垂暮.此小村屋十餘棟,散綴狹谷中.

是日採得木本植物標本三十種.下午,路上最著植物爲扶移屬及 Dipelta Floribunda 花皆團聚而生.胡桃 (Juglans regia) 漆樹,三千呎以上豐富,山邊山頂被以槲松之林,就中槲爲尤多.亦有柳樹樗樹,多而且美 Primula Obcon'ca, Lys'machia Crispidens,蘭花鼠尾草,在二千呎以上,亦豐富.伙店附近有灰楸(Catalpa Fargesii) 數棵,尙未開花.周圍富有芫花 (Daphne Zenkua)但在此高度,花頗稀少.

侵晨微雨,中間有雨陣,氣候不甚炎熱,宜於旅行.途中所經多下山路.早發不久卽經窄狹之高原,過一二坳,將午,始下行赴興山縣.一路雖多危峻,山邊大都墾植.半途見有煤礦,產質平平,無甚特色,興山附近產少量石灰,並有紙廠數家.

興山屬四等縣,爲此荒野中獨一之縣城,可謂全中國最隘陋貧苦之一縣.縣位河左,居民不滿百戶,屋舍大多廢敗.河岸城牆參差,高四至十二呎.有一道,似爲主線.沿在城牆頂頭.東門爲溝水所封閉,北門極矮,低頭方可進城.全城暗無生氣,貿易亦然,而小孩之多,一若中國其他各地.城倚峻峭之山,城牆上築至山之兩邊.城圈之內,山地多未墾闢.河寬,水清澈,以礫石爲底.堅底木划往來香灘(Hssiang Tau)與香寨(Hsiang Che)——揚子江內迷灘峽首之一村.——行人通常不在興山停駐,故我等乃向香灘進發.香灘,意爲芳香之灘水,水或香甜,村集則汚穢齷齪也.其他伙店不多,我等尋覓宿所,頗覺費事,迨逐去一可厭之挑力後,夜間乃得安寢.

日間所見皆非平常之花.途見油杉 (Keteleeria Davidiana) 大樹,高八十呎,圍十六呎.其樹蔭庇墳塋,栽植殆已頗久.下坡路上,過一湖北山楂閣,花方盛開.湖北山楂,爲中國山楂之一種,種之,採食其果. Torricellia augulata 稀少而有趣.隨地見油麻藤大蔓,糾覆大樹上.高原上頗多河楸 (Catalpa Ovata) 小葉白楊,形態可喜,生在農莊周圍者頗稀少.

香灘高出宜昌僅三百呎.氣候乾熱.水路與揚子江相通,貿易可觀.藥材爲

主要輸出品.胡桃木製成之來福槍托粗坯,市價每支三百文,(約合六便士)自此地方輸往漢陽,其量年有增加.村在河之左岸,有鴉片稅卡,及總督衙門之錢糧房.據余先後四次來此,經驗所得,肉豬之數顯似較人爲多.

我等離香灘,逕自渡口過河,上一窄谷,漸行漸狹,隘爲小谷,終成荒野之山狹.峽口得山徑,自河床循此上四閤山阜之巔,爬越甚費氣力.上山路藥王子呈奇觀,櫟木豐富,花時已過.此去白楊寨 (Peh Youg tsoi) 山頂曾有綺嶇小路可通,我等即以寨內一新潔之農舍爲宿所.

峽中採得享利蜂糖花 (Rehmannia Henryi) 此植物爲草本,高呎許,開大白花,似實麥答里斯.附近有人採木香根皮,乾後捆包,運往沙市.木香皮用以漿固魚網,謂其能使魚不見網罟也.谷中間有 Kaelreuteria lipinnata. 小谷內植物大極與三友洞相似.

山上多生松柏,及櫟樹矮叢.稍有縱樹及楓樹 (Liquidambar Formosana) 白楊 (Populus Silves Trii) 皮淡灰色,爲附近極常見之樹,烏桕極多,成爲奇景,其在小谷中者,葉茂而實大,于五百呎至三千呎上所生,尚未生葉,方在開花.

河旁低地,野薔薇 (Rosa Multiflora) 紅白爭放,爛若雲霞,藥王子亦正着花,灌叢滿簇白色香花,高六至二十呎,叢徑達二十呎外.幾處古墳上有木香,開花作硫黃色,余以爲此殆人工培植者.薔薇叢燦爲大觀,數量之富,他灌叢無出其右者.宿處四圍種杜仲樹 Eucommia ulmoides)其皮珍爲補劑.

白楊寨高約二千五百呎,位窄谷中,村落疎散.宿處面向羣峰,是爲萬條山 (Wan tiuo Shau) 外露峻削斷崖係硬石灰所成,絕頂遠坡,林木蔭蔚.村民異常和藹慇懃如附近各地往來其間信可樂也.

萬條山勢詭譎,引人入勝,閒閒過之,似大可惜,故窮竭一日之力,以升降之.上午八時離宿處,經山麓林灌耕種之地,繞諸低峰,費數小時.在六千呎爲竹林,林中一徑盡處有方坪,黨參 (Tang Shen) 極其豐富亦種有大黃,在六千五百呎入於大木林.其路在林緣,廣植黃連 (Huang glus). 黃連 (Coptis Chinensis) 藥

用爲補劑及清血劑,其灌叢稠枝錯綜,出地上約三四呎,藥用黃連卽生其下。

循山徑迤邐上,林景漸變其觀,其始樹皆矮小,多竹林,成極狹之林帶,稍高有大樹林繼之綿亘遠距山巔五百呎處而止,山巔復有竹林阻塞,凡森林蔭密,竹不繁茂,五千呎以上,樹木稀少陽光直透,乃有竹林,路非特闢,不得通行,致旅行頗多攀援之苦.

森林雖饒樑棟之材,種類並不甚多.水淸岡樹 (Fagus Sinenis) 爲最普通,常長成大木,其高六七十呎圍三至六呎者甚多.水青樹 (Tetracentron Sinenis) 甚豐富,葉稀疏且極特殊.多有高六七十呎圍八至十呎之樹,白樺及槭屬之數種大樹散見森林中.間有平葉山白菜 (Davidia involarata Vav Vilmoriniana) 而各種嘉樹如櫻桃,鳥櫻(Bird Cherias),山楂,野梨,皆屬普通.又有牛鼻拳 (Berchemia Giraldiana) 蔓生最高樹端,山躑躅有數種,中一種大杜鵑花,(Rhododendron Sutchuerense), 樹圍五呎高三十呎以外.灌木豐富;空林中蝴蝶樹珠花(Viburnum tomentosum), 盛開如雪.較開陽處藥王子繁茂,近山頂一帶高山薔薇(Rosa Sericea) 豐富.

山頂成傾斜崎嶇之坪,大可一英畝,被以野草,間有灌叢.絕峰上有小廟,現已殘敗.山脊岩磡尖削,自山頂北削,使此山上與主脈相屬.其兩邊山面,爲危峻斷崖,垂直高二千呎外.

我等自高七千八百五十呎之山頂,矚覽八方.舉目所矚,但見崇山,北及西北,連山競險接嶺爭高,隘道中分,激流怒吼.視極險艱之道當前,而窮奇之心轉切.復循曲徑下山,路無人跡,及抵宿處.天已夜暗.是日共得標本約四十餘種,可償爬越之勞,中有數新種又有數種非常可喜.余所發見之新種高山丁香 (Syringa Ve rucosa)係與絕頂上黃楊灌叢並生者.

次日我等繼續北進.剛出白楊寨卽經矮橡殼樹林 (Quercus Va iabilis) 其處栽種銀耳.銀耳種法:斬徑尺之橡殼樹,取其枝截成棍棒長八九呎.寨置地上約數月,卽有菌絲蔓生其上,於是取棍棒約二十根斜架之,菌之子實體卽發

育而成銀耳.其狀似人耳,有膠質華人視爲珍品,余嘗試之並不覺極其可口,且致肚痛甚劇焉.

過種銀耳處,山路降入小谷,復循谷以透迤,約一二里.灌叢甚多,開花谷裏,余採得多數植物標本,中有一新屬,開黃色香花與鐵葛藤 (Holboellia) 爲近親,隨後覓得其種子,因名之爲 Sargentodoxa evoneata, (漢名大血藤), 取其種子栽種,亦已成功.谷頭有峻坂,經樺櫟樹林,達可耕坪臺上爲茶園,疎綴兩三屋舍.某屋側有肉皂角 (Gymicladus Chinensis) 其莢具石鹼性,可供洗濯,人重視之.

過茶園,經松林,山路皆作上紆,忽而平坦,忽而陡階,及抵目的地(升天嘴Shin tien tsoe)皆大喜.升天嘴附近,老林繁蔭灌木及落葉樹種類頗多.余所及見大樹:有馬栗 (Aesculns Wilsonii) 山白菓,山毛櫸兩種 Styrox Hemsleyanum. 𣘻木 (Melisoma Veitchiorum) 及槭樹櫟樹多種.林緣宜昌花絲條 (Viburnum ichongense) 特別美麗.櫻桃樹甚多,花方盛開,分紅白兩色.藍櫻草 (Primula oralfolia) 生林蔭濕處覆地數里.黃花 (Stylophorum japonicum) 淫羊藿,與各種紫堇,盛生林中,且及林外.

升天嘴小村,高五千六百呎,有較大房屋一棟.屋在嶺脊下數百呎斜坡上,周圍景物呈奇觀於屋前.視力所及但爲峯山,曾不見半畝之平地.吾等宿處雖窄,而一切究頗舒適,在此荒野能得如此,已良屬難能矣.

次晨趕早動身,擬自昇天嘴到毛虎嶺 (Mao fu lien), 行六十里.出發即橫過一老林,其中特富槭樹之種.山白菓,山毛櫸,亦普通.不凡之 (Cornus Sincusis 頗稀有,爲瘦長之樹,高六十呎.亦有 Pinus Armandi, 然在此間松柏類植物極少.

我等循蜿蜒而升之山徑,曲折上,至山嶺斷口處,過山脊下行,路約二千呎其勢險絕,有一白楊新種,嫩葉作紫銅色,各方皆普通.下山採得香櫻草(Primula Violodara), 茶花 (Rhododenron Angustinii), 紅色木 (Acer griseum), 紅花省沽油 (Stoplylea).——紅色木,紅花,省沽油皆爲小樹.最有趣之發見爲八仙花

屬之一新種Hydrangla Sargentiana灌木高五六呎,莖上密被短剛毛葉大作暗綠色,柔潤有絨光,單就葉言,此種植物已極美麗.

下至山麓,過松樹(PinusHenryi)小林松樹一般高達六十呎,樹蓋略作三角錐形,樹皮黑色粗糙,有時上部作紅色.其球果留綴樹上數年之久,大小不一.山谷之中,胡桃樹普通沙木豐富,松林附近,多有耕種.

出谷,經安適長徑,上達一嶺,復下歷嶮崖,至一窄谷.此種昇降,極感疲乏,沿途所遇,日必數次,至為懊惱是日所經,爲數尤夥.最後復上爬越二千呎,而到當日目的地,食宿棧房中.棧房亦即大藥材行主,人爲江西遷來之一富人.房屋寬敞,爲兩層,有大天井,附建雜屋甚多.山勢傾斜,無平面足爲此屋面基址,故其前半,皆以支柱撐持.屋爲附近各地之總倉庫,實即一眞確之博物館.集污穢之大成,佈覆於全屋,近側猪欄惡臭,復夾各種芳草之香味以蒸騰.余在此換銀買羊,估計所費,知棧中人逐利之心甚熾.棧房早晚敬奉祖先誠恪不懈,而事事皆以求發財爲心,焚香燃燭,虔誠拜跪,容或可助長其商務,但自外國人之見言,則以爲稍加注意於清潔衞生更爲必要,蓋小駐此間三十六小時之觀感,不得不爲此言也.

次日天雨不止,第余等既已先決作一日勾留,尙無不便,上午外出,觀毛虎嶺附近森林,約數小時.見大黄樟樹(Sassafras T.umu)數株,其最大者高近百呎幹圍十二呎,中國黃樟,無醫藥價值,木材僅爲箱櫃及柴薪之用.櫟樹栗樹頗饒成小森林.錐栗(Castanea V lmorin ana)爲奇異之栗,花有奇臭,實橢圓,僅一枚,居刺球內,棧房周圍種杜仲樹及厚朴(Maglnolia Officinalis)多株.胡桃樹漆樹豐富.屋後有平葉樅樹(Picea Pachyclada).山頭灌叢生草莪,荊棘,矮櫟,粉紅色杜鵑花(Phododendron, indicum),及大紅杜鵑花(R. Mariesii).

自棧房四眺,極目唯崇山峻嶺,縱谷深谿,曠野無際.奇景洵令人沉醉,特與登太苦行旅之人耳.

翌晨雨止天霽,萬象一新,遍地花開,濃芳馥郁.挑力在棧房中吵鬧,勒逼加

餞,喘喘久之,又數小時方恢復其興致.是日行程始上嶺頂,繼下峻崖一如平日.附近 Staphylea holocope (省沽油屬一種)小樹極普通,花開甚繁,分紅白兩色,美麗最著.別有可寫之植物,爲矮柳 (Salix Fargesii) 上生大葉,色極暗綠.山脚有小溜界在涉之,上一嶺,竭力爬越數小時乃得在高在七千三百呎處越過去.上山之途中,發現虎尾樅新種,——其葉短方,枝上有小球果,——又見尖頭樅小株頗多.近嶺頭之岩壁,極多黃陽 (Buxus micropylla) 草中櫻草豐富,花作玫瑰紅.矮竹繁密,簇簇於迎風之嶺頂.

越嶺稍下即爲樺樹叢,繼爲蔚林,雜有落葉喬木及灌木間以松柏.我等於諸林內,費時停留,採集所獲殊厚,計得木本植物標本五十餘種.見山白菓大樹一二株,水青樹 (Tetracentron) 多株.各種櫻桃皆饒,紅白叢聚,成爲奇觀.杜鵑花 (Rhododendron) 共見六種,採得三種.槭樹種類甚多,中紅色木 (Acer griseun) 最爲珍貴,大株獨秀,樹皮栗紅,剝落頗似江樺 (River Birch) Pomaceae 多種及樟科 (Lwcaeere)　二種,佔小樹林中之大部分.莢蒾忍冬溲疏錦帶花山梅花之屬及 Neill a Sinensis 到處豐富.岩壁間較開闊處有木繡球 (Viumum Rhytidophylum) 其皺葉厚長,自得其所.日光照處有海紅 (Malus Spectabilis) 開粉紅花,足令諸天笑悅.崖上濕泥之地,Pleione Honryi 繁榮,草本種類極繁,群生適宜之地.清麗小溪無數匯成一湍,下注窄谷,墜爲瀑布高數百呎,巨響喧眩,獨破森林岑寂.

文巢 (Wen tsao) 高六千一百五十呎,居民膽怯,我等經許多困難,始得一農舍爲宿所.此小村僅矮屋四所,散建危坡之上.崇山茂林環繞四周.屋舍左右,闢土數方種小麥菜蔬,間以豌豆及玉蜀黍.

此間森林,異常偉富,極堪重視之,故余不憚繁瑣,引余另一次旅行日記中所記之片段如次:——

"五月三十日——文巢宿所對面危坡上有山白菓樹二十餘株,皎皓一團於垂暮陰暗中而特顯.其中有大葉白菓樹 (Ptoro Styrox hispida) 兩大樸,滿everything

乳白花鏈".

五月三十一日,再往察看研究山白菓樹及森林之一般情狀,越窄峽,有採樵曲徑,經蔚茂之林,下至隘路.復冒險上援絕壁,至山白菓樹下.山白菓二十餘株,生山坡崖峻上,高度三十五呎至六十呎,最大者幹粗六呎.以其生於密林之中,下半無枝,但以白苞無數,墜地繽紛,足證其存在.經砍伐後,其基部輒有穉枝怒生,老成之樹,所以下部裸露者,則其蔭裏小枝,隨時枯萎而然耳.樹皮暗黑,小片剝落,形狀參差.時樹端花正盛開,余擬攀昇危岩邊際,大水青樹上斬枝爲隙,以攝影片.余偕二人,先後援上,各息一處,次第以繩輾轉運斧頭及攝影箱.余深知水青樹脆而易折,雖跨坐之枝粗逾四寸,然踞高臨下,直降處已二百餘呎,益深慄然.所歷尙幸平安,而余等乃得飽餐,此奇樹之秀色.雖然,其險其難,可謂極矣.山白菓天賦美麗在其二苞,包覆花朵,潔白如雪.苞之大小,多不一律,大者常長六吋寬三吋,小者長三吋半,寬二吋半,通常皆在長八吋,寬四吋及長五吋寬三吋之間.初爲綠色,花開乃成純白,老則成棕色.花與苞皆垂美麗長柄上,風輕颺若巨大蝴蝶翩翩舞於林間,至爲可觀.苞質地脆嫩,略如艇形,恆爲樹葉所隱蔽,然其生長,極得自由,於近處望之,樹上有如綻雪.每當晦日,或侵晨薄暮,潔白尤顯.果實內殼絕硬,外觀如小胡桃.余意以爲北溫帶植物最美麗可喜之樹,宜推平葉山白菓(Davidia imrolucrati).

馬栗高五十呎,圍四呎,與山白菓並生.更上黑見風乾,水青樹普通'白,赤,黑,樺亦繁榮.

"櫨雖不甚粗大,皆成高樹,爲諸林之特色.不幸本年林樹,大都不甚開花,故槭樹之花亦甚鮮.

"林中有多處盡生山毛櫸,此或即最普通之樹.山毛櫸性最向陽故樹林無能之爭長令其下蔭者.至是余始能決然謂此間生有兩種特殊之山毛櫸,其一爲單株,其一常分數幹.單株樹高四五十呎,幹粗五至十呎,葉光滑作亮綠色.頂類頗大,歧枝密茂,極似歐洲山毛櫸.惟樹身較小耳.數幹者爲中國著名

之山毛櫸,較單株爲高,粗則遠遜,通常分六至十二幹,一般粗二至五呎,初生時密緊相接,及長彼此斜出而分離,樹皮淺灰,葉面略被白粉,背面有毛,枝頗直,惟幼枝纖細下垂,此樹俗稱"白梨子"(Peh Litzu)幼株頗多,但無花.

"林蔭下多威爾遜茶藨子(Ribes Iongaracemosum, Var Wilouii)是爲可注意之黑色醋栗屬灌木,開總狀花,長一呎至呎半,而老蛇盤(Rodgersia Aescelifolia)蔓衍其大白花,直立作密圓錐.

"林中櫟樹,落葉者三種,常綠者二種.野木(Meliosma Veitchiorum) Pomaceae 數種,及櫻桃皆普通,漆樹亦到處豐富.密蔭中有各種常綠伏牛花,在開闊地則 Neillia Sinensis 成密灌林.

"松,柏,樅樹,(Pinus armandi) 亨利松(Piuns Henryi)散在岩壁上.稀有威爾遜松及平葉虎耳樅(Picea Pachyclada).尖頭樅(Tsuga Chinensis)甚多,生於崖上,樹不甚大,多老球果,嫩葉方吐,望之密茂而整齊.諸山高處更多樅樹,其神趣盤鬱針葉叢生,樹皮淺灰,復有球果懸垂,光滑枝端,誠殊美也.此等木材,含樹脂甚富,燃之,失焰明耀,而發亮光,故居民用爲火把."

第 五 章

森林與巖壁

過湖北四川之邊疆

離文巢,登峻嶺,二小時,達興山河上流,我等數日前,適與是河相別,步橋,過溪,抵梨兒口(Li-erh-kow).此小村,周圍植杜仲(Eucommia)厚朴(Magnolia officinalis)樹,以取其皮.自梨兒口上,傾斜平緩,途中時有櫟樺之林,間以平壠,其地農夫方忙於耕田,及播玉蜀黍種,行抵青田坡,(Chin-t'en-po)打尖.村邊有美麗之泡吹屬新種(Meliosma Beaniana),樹高六十呎,無葉,惟見乳白花朵,簇生,成懸垂之圓錐花.於此樹近旁,發現小猶太樹(Cercis racemosa)一株.前此我所知猶太樹,僅有二株,在宜昌西南約十五日行程之處.猶太樹,高約二十呎,樹幹半枯,其頂蓬鬆如帚,雖樹部分朽壞,望之殊有生氣,淺紅花朵簇成短總

狀花.其葉,背面生毛.此外所見,漆樹胡桃樹豐富.途遇苦力多名,挑有蠟餅其蠟榨自漆 (Rhus vernicifera) 實.重瓣笑靨花滿叢,遍栽墳塋上,繁花裝之.

出青田坡,始上危徑,爬行數里,至一山脊之顛,其地 Viburnum rhytidophyllum 繁榮.自此上,山路愈陡,種植鮮生,蓋已漸達此區種植之極界.諸石灰巖壁近邊,馬加 (Mack'a) 大樹二株各高六十呎,圍七呎,樹皮光滑,淺灰色,展開之葉,作銀灰色.又有 Staphylea holoca'pa 及桃樹幼株,甚夥.花方盛開,小太陽鳥 (Aethopya dabrya) 羽毛美麗,翠飛花叢,吸食其蜜.山躑躅 (Rhodoendron indicum) 生五千五百呎以下.

我等於諸石灰岩壁外三數百碼處,越高七千呎,入房縣境,橫過窄狹荒谷,谷被野草,小山環抱上多木林,荒谷爲 Art'lbe Davidii A-grandis 之宅,並有望江南屬 (Senecis) 數種,及堪作園藝之草本植物多種.木林主爲樺木,柳樹,稀雜白楊,銀樅.偶見僅有之平葉虎尾樅一株.草木,葉皆稀少,觀察地面,得知積雪適纔融去高地,動物殆已絕跡,途中唯一見孤鶺鴒飛,又曾獲雄雉一羽以佐膳.我等於荒谷之首,步入仄徑,沿山涯行,穿過諸林,達紅石口,林有各種槭木及醋栗屬灌木.紅石口,唯木屋一所,位於六千三百呎高處,旁有大溜,適以峻拔繁蔭之山其屋淒清半毀,屋主全家襤褸如綸.

夜間我之臥室樓頂,假息苦力數人,時使塵埃穢屑,墜落床上.次晨睡醒,週身滿被污屑,益以灰塵飛揚,尤令我窒息.屋主爲一獵人,曾射獲本區之羚羊,即馳名之明岑羊 (Mingtsen Young) 也.彼有角二對,光皮一張,我等設法取得;據皮角以判斷,凡已知羚羊之種,必皆小於此.(1907年余友 Mr. Zoppey 曾數來索此羊,雖甫得暫見一頭,第以可望而不可及,終無結果.)

紅石口之名,義爲 "Red Stan Mouth",蓋指此間有紅沙石露出地面,延及小龍塘也.小龍塘,去此二十里,我等定爲次日之駐所.顧行程雖祇二十里,動身頗早,欣欣然以逃出此頹殘宿舍,復入樹林,溯一溪,經叢林,有柳樹,樺木,繡線菊,及薔薇花.未抵目的地前,過溪二次,橋皆不甚穩固,斬粗木材爲之.途中見

Picea Wilsonii美樹數株,下有古墳埋瘞.最大者,高約七十呎,圍六呎,葉鮮綠,姿態極其莊嚴,球果,簇成大叢,仍多留於枝上.亦有小白松樹,(Pinus armandi)生球果長九吋.又見白楊之一新種,正開花,而維稚莢蒾(Veitch's Viburnum),繡線菊皆普通,樹上幼葉,乍經展吐.

此間最美之樹,當推中國之Betula untilis(堅樺),係一種樺木,樹皮橙紅,剝落後,露出樺木脂層.其高四十呎者,樹立仍作三角錐形,分枝頗多,枝皆纖細,漸上漸短,皮目甚顯著.山巔老株,頂如掃帚,高六十至八十呎,樹幹近根無枝一段,高四十呎以上,雖經狂風吹壞,依然美秀動人.

小龍塘村,高七千四百呎,有破敗木房兩所,夾清溪對立,溪流經一谷,谷狹窄而傾斜,幾作正東西向.三面峻嶺環繞,嶺上僅生草茅,樺木銀松,殘林零落,足徵曾有大森林,已毀於火.古塚纍纍,田畝荒蕪顯見谷中,昔時居民,多於今日.屋週多甘藍馬鈴薯土,又有當歸(Angelica polymorpha Var. sinensis)叢,當歸爲有價值之中國藥.居民言此谷,藝小麥大麥,皆屬太寒.

1901年當我第一次至此,給養缺乏,不得已而折回.嗣後遂無白人來到.我等預定此方向前進,必經百里,始有人烟,即此二屋也.

到時,得住所像一幀,然我欲拍照者,實爲屋內.其內,雖日午時,欲視達屋角,必須光照,映相遂不可能.穢物塵垢極富,形狀複雜,雖饒有木材,以供斬伐,宅主懶惰,任其房屋傾斜達敗廢之極.屋低矮僅一層,分爲四間,除門口及屋頂孔隙外,無出煙透光之設備,地板自爲天然之泥土,豬佔房一間,我等來到,迫屋主遷入其內.牛羊欄,在門外六呎處,欄底積糞,足深一尺.連日晴明,實爲幸事,於是四週景物雖愁慘,尚覺不甚逼人.(於此記載,當我得在此間,享樂晴天,實僅有之機會.以前兩度,流居累日,惟蜷息床上,或於門側,望雨戰慄而已.)

養蜂,在此荒野,爲一主要農事,宅固有蜂數十窩,蜂窩係刳空銀松樹幹爲之,長約三呎六吋,寬一呎,木片二,十字交叉定住中心,對面穿孔三四,俾蜂出入.此木桶常以粗製之箱代之.蠟蜜常不析離,蜂房移出其窩,即供食用.氣候

雖深烈,蜂仍強健,並不知有所謂蜂病.

到小龍塘,次日,上宿所後沙木尖正嶺.初五百呎,殊險峭,自此以上,爬行反易,約八千呎處,有銀松林.銀松初非大形,惟隨我等之上昇而漸大.較大之株,多已斬伐,以製棺材,剩餘數千株,散在四周各處.銀松樹多傾圮朽壞,幹上叢生山躑躅植物,卽此可證其樹倒臥,已歷有年.幹有徑六呎長百五十呎,以上者,林中現已無此大樹,惟高百呎外者甚饒.嶺脊上部絕壁,高二百餘呎.岩後避風處,樺大槭樹普通,亦有野生大黃.我等發現較平易之徑上絕壁,越高九千七百呎.此山脈最高峯,似尚有二百呎.其絕頂爲硬石灰石,略露紅沙石,飈風疾掃,延有銀松及各種醋栗屬灌木,生長不盛.山躑躅屬及矮榆樹(T. Squ-anmata)亦普通.下降經樺竹之林,至一荒地,開闊傾斜,被有草茅荊莽,大湍溪流經其中.近邊竹林,極其美富,成闊三呎至十呎之叢.竹竿,金黃色,高五呎至十二呎.葉色深暗,披拂如鳥尾;新竹有寬襭護其小枝.綜我所見之竹,以言此爲最美.(註)

註　1910年余移種之,已經成功.

溪之附近,灌木豐富,種數複雜,主要成分,爲柳樹,薔薇,繡線菊,山梅花,八仙花等屬,並特異之高山杜鵑花(Rhododendron Fargesii)灌叢,及土當歸(Aralia Chinensis).高山杜鵑花,爲最美之一種,白花,稠生成束,作玫瑰紅者尤多,偶有深紅色.葉小,陪襯花束,益顯美麗.灌叢,常高五呎至八呎,叢頂直徑略如之,高十五呎至二十呎者較稀.罕陡峻草坡,多無樹木,其狹谷具良好牧野與典型荒地之特性,與中國中部各地,迥然不同.

下午,往大龍塘,塘水淵靜,繞在峻峭草坡中,水面之闊,約一箭地,其周廓略圓,環生蘆葦.此潭位置形狀,皆與各國先民神話中心之潭水相埒,由是本地許多神仙惡魔奇異故事,皆著於此.是日日出,天氣晴朗,而風自谷底吹來,飈勁寒冷.究屬地勢使然,抑爲高度所致,我未能決.惟其地木本植物稀少,無可喜,極不似四千呎與六千五百呎間之林帶.蕪然,雜草甚宜,皆得繁茂.亦有可

喜之灌木多種,但除銀松,樺木,白楊外,罕有樹木.

由此前去六十里野路,我等預定爲一日行程,卒以出發之前,必須預備早飯,未得如願.附近食品供給全缺,旅行異常困難.昨日我隊有四人折回四十五里,以購食料,天黑始還,夜深時,猶有數人,磨玉蜀黍作粑,供行路之用,

別大龍塘,溯溪流較小之一枝,流經狹谷,有童禿草山夾立,上山散有銀松樺木樹叢.山徑平易易行,雖不陡峻,常有竹叢阻塞.腐朽樹樁,僵死樹幹,明示此間,昔必有大林存在,後始毀於斧伐火焚.如此大殺風景,凡植物學家及愛好自然者對之,殊痛心.但就經濟關係言,此舉或可謂爲必要.推其動機,純由於種馬鈴薯之故.不幸二十三年以前,馬鈴薯病,戕害耕作,蹂躪地方,居民遠徙,林木自然因得遂其報復,努力恢復舊領,惟再造森林,尚須時日.

由山徑起點附近,入大木林,爲處女林之殘跡,限於銀松樺木,其下密生山躑躅.山躑躅共四種:—— R. fargesii, R. Maculiferum R. Sutchenense, R. adenopodum, 灌叢,大半高十呎至十二呎,花色絢耀.銀松樺樹,巨幹魁梧,皆未結實.出林,入起伏荒野,被竹叢,漸次蔓佈,入於平地.平地遍生小檜草茅及草本,其中玉葱一種,頗豐富.此荒野橫於圓形之馬鞍嶺,延伸下達他邊,凡數里,我曾上鞍頂,至九千五百呎高處,自此望,羣峰連綿,野樸荒蠻,作鋸齒狀,由是名神人峽(Sheng-Neng-Chia). 最高峰,殆逾萬一千呎,低坡皆有樹林,然而景物,殊不動人.動物絕跡,欲見一鳥,亦不可得.殊荒遠僻難到,四野悄然,僅有汩汩溜溪,長風低吟樹巔,破其閴默.蔭下仍留冰塊,山徑起點,草方茁綠.除一種高山櫻草,及一種蒲公英外,別無他花.

山徑盡,復入興山縣,橫過荒谷,數里,小逾陡峻,跨支脈入於巴東縣.自此危巔下行二千呎,得一小屋,破敗荒涼,地名瓦盆,爲此間僅有之尖站.下山見怪石千百,皆直立露頭頁岩塊,邊緣銳利,如瘦削哨兵,爲方警衛.山邊昔曾墾植,今已荒蕪,被以羣茅惡草.小屋四週,多黨參,亦少有大黃,可知以前曾種植此類藥材.此地,各方峻極,絕險.惟古林僅存,餘殭朽樹幹,破玷四週風景之美麗.

下午到瓦盆(高八千四百呎),甚早,隊中人採柴薪,搭竹棚,以備過夜,忙碌直至日暮.今日天氣晴明,夜間亦然,日落後,嚴寒極劇.火聲虎虎,物貌生動,人亦極其旺健.屋外透空,大風往來,呼號達旦.屋頂多罅,繁星在天,閃爍可見.是間,地雖冷僻,夐絕塵寰,人得到此,遂如羽化.

次晨起牀,並無困難,出發時,朝陽方破大地.密霧瀰漫,約一小時,既而日出霧散,復得晴明.下行千呎,陡峻危嶮,折頸堪虞,終達蔭谷,頗狹.多樹之山繞之。銀松分佈,止於瓦盆下五百呎處,此下則有尖頂樅 (Hemlook Spruce) 代之.尖頂樅不甚多,大株恆高百呎,圍十二呎.漸下,林木漸雜最後遂不見松柏目植物.喬木灌木,種類可驚,凡湖北西部可喜之樹,幾皆包羅數量尤富.槭樹特衆,採得開花標本十二種.山躑躅四種,散生各處,但不甚多.岩石上散生一種可喜之蘭科植物 (Pleione Henryi),繁花聚錦,常見山白菓樹,奇怪之 Euptela Franchetii), 及水青樹 (Tetracentron Seninse),為最普通之樹.省沽油 (Staphylea holocarpa)小樹上,滿垂白色及玫瑰紅色花束,為諸林一特色.威爾遜馬栗(Aesculus Wilsonii)一種,及中國黃木(Cladrastis Sinensis),亨斯來白雲木 (Hemsley's Styrax), 及 Ptrostyrax hiopidus, 皆大株極普通.櫻桃,烏櫻,各種Pomacea皆豐富.各林,樺木為最普通之一成分,較開陽處矮竹密成稠叢,林中高處,有 Rhododendron Maculiferum,樹徑一呎,高二十五呎.

四處闢地以種黃連 (Coptis Chinensis), 荒地內卷丹 (Lillium tigrium)無數,繁生草莽中.陰蔭下貴重之 Lillium Mirabile 普通.花雪白,筒狀,紅點斑駁,綠葉艷耀,心臟形.偶有虎尾樅,或松樹,林緣見杉木屬植物 (Cunninghamia).絕壁多生尖頂樅,樺木甚普通,槲木除一二種常綠者外,極稀少.然見風乾屬植物不多,木蘭屬植物確罕見,櫸木普通,菩提樹凡三四種,頗豐富,樟科植物四種,皆落葉,中一種,幼葉作紫銅色,殊美秀.忍冬罕有,僅 Lonicera tragophylla, 蔓本,花金黃.鐵線蓮屬,質量皆多,特別者有 Clematis Montana, 花白,或玫瑰紅,C. pogonandra 花黃,作陀螺形.內風消屬若干種.皆多花主要蔓本.為 Holbaellia Fargesii,

及植物學上著名之 Sinofranchotia Sinensis.

路沿澢溪蜿蜒,溪流源自瓦盆,稍下,旋成大澗,小徑逼狹,艱險難行,余殊不解,當時轎子何以竟能通過,澢溪小徑,最後同入一峽,峽鎖峭壁中,棵露不可攀援,岩多石灰石,五千呎以下,石盤石 (Slate),泥頁岩,偶出其間.

至森林邊緣,高四千五百呎入耕區,種大麥馬鈴薯,烟火數家,其第一棟房屋,目前已在望中,近林緣處,澢溪滑流約一哩,此間岩上,Lonicera pileata 豐富,爲河邊灌木; Hosiea Sinensis, 奇異蔓本,覆終朝日曬之岩石上,開闊地,見鬱金香一株 (Liriodordron Chinensis), 花盛開,高七十呎圍五呎.

下行危峻,路徑田畝,兩邊植茶叢,抵小村,名沙口坪,昔所循澢溪,至此,與一溪匯,溪大,來自東北,合流隨入峽中,終於巴東城上數里入揚子.沙口坪,海拔僅二千六百呎,四面繞以峭壁爲垣,植物皆宜昌附近谷峽所共有,開花之多,頗爲特異,木香花爲附近最普通灌木之一,白色香花,叢簇滿枝,罌粟豐富,遍地繁花如錦,有 Styrax Veitchiorum 高有十二呎至十四呎之樹,成叢,作牙白色.

由沙口坪緩進,上岩峽,大溪自此衝激下注,其間紙坊一二家,居屋稀少,岩爲石盤頁岩,常極朽碎,澢溪爲一急流瀑布之連陣,水雖洶湧汨沸,魚甚饒,且有數種,形體甚大.

麻線坪,爲我等想定目的地,村集荒寒茅屋六七,滿住採茶人,於是復行十里,日薄崦嵫,抵瑞亭嶺嘴 (Shui-ting-Liang-tsze). 農莊數四,高三千九百呎,我等擇一大莊膳宿,是日所經,風景雄壯,植物奇富詭異,路雖艱阻,所獲殊足抵償,合計採得新種林樹標本逵五十以上,多從前所未知,我所到植物最繁盛處,此爲其一,旋復搜得大宗種子,寄蒔歐美名園,大多萌發生長,蕃息至今.(後我再經此地,歷小龍塘瑞亭嶺嘴間,天大雨,逾一星期,溪漲阻途,整整三日.)

昨夜將半,四野無聲,除人喧譁,反對不走巫山而改道大寧(巫溪),據傳聞,得知:前途極貧瘠,我隊將遭困厄,而以彼等爲尤甚,臥牀上聽之,尚幸無人,前來訴苦.

翌晨,出發較平常爲遲.上陡峻,沿山邊紆迴,終經小徑,高五千六百呎,越入房縣.江漢分水嶺,實在此間.神人峽,爲一大支嶺,自主脈之脊突出,此支嶺三面發源之水,集流成溪,下入揚子.立分水嶺巔,得見神人峽諸峯,作東南東向,正東尙有等高衆山,顯在揚子江附近.分水嶺兩旁,谷頗寬,有種植,界以小山,脊如刀,被有樅松之林.田邊,漆樹豐富,胡桃亦普通.農莊散建各處,隨處得聞山雉雊,野鴿啼,與鷓鴣之啼.路旁板栗及木蘭屬之樹,美而且多,有 Corylusulu Chinensis嘉樹一株,高百二十呎,圍十二呎.附近多種藥材,大黃黨參特多.Pop-s lasiecarpa大葉姣美,爲最普通樹之一.

數哩谷盡,山峻多樹,下沿隘道,其間可喜之 Sinourilsonia Henryi 普通,小灌木,披葉秀美,長總狀花懸垂,花不甚顯著.最麗之樹,當爲野蘋果,花繖形,純白芳香,着細長梗上.出隘道,入田壠,宿卞井 (Pien-Chin), 村高五千二百呎.

沿途植物,不甚新奇,僅採得十六種. Viburnum rhytelophyllum 生岩壁上,頗堪注意,花污白,不甚好聞,繖房花序,大而平.隘路山旁,富有灌木山躑躅類爲特出,山 (R. indieum)普通. Rosaericea 初花新吐.盡日所見,樹林甚多,過目而已,無甚可喜.荒蕪耕地,有小罌粟,似冰洲產 (Iceland poppy). 花深黃,偶有橙色,極豐富悅目.蔭處, Chelidonium lasis carpum 花大,黃色,華美.Corydalis Wilsonii C. tomentosa, 常見於裸露石灰岩壁上,花亦黃,葉有白粉.宿處附近,多耕種,以玉蜀黍,大麥,豆類,馬鈴薯爲主.溪邊紙坊數家,用竹髓爲原料造紙.

去卞井,逐河行,至與其一支溪相會之點,渡溪,循河渦道路上行.此溪在湖北,當認爲緩流,沿河十里,路最平易.山旁被林莽,連香樹屬 (Cercidiphyllum) 顯著.偶或見有耕地,房舍居民極稀. Populus las ocarpa 豐富,其大枝多釘地作籬,枝復生根,長成小林.途見Ailanthus Vilmoriniana大樹,高百五十呎,圍二十呎,形體魁偉驚人.獼猴桃 (Actinidia Chinensis), 各種野薔薇,盤錯成叢,到處豐富,柔氣瀰漫.別此大好山溪,陡上九百呎,忽得一谷,曠闊平坦,令我等駭異.此谷在昔,顯爲山湖,今日湖邊,皆經墾植,湖心猶爲沼澤.全境名竹谷坪 (Chu pu ping),

或大竹湖(Ta Chu Hu),大竹湖一名,可爲昔時湖之跡歟.據余所知,類此平原,區中無兩.道路數線,交織此原,我等遵一線往巫溪縣(大甯).路旁,繁生紅莓白莓,甚可口.平闊細草,牛馬成羣,就地積言,倘闢作牧場,當溢此數倍.

縈紆十五里許,盡最坦道,上行,路極險艱疲困,終達高七千三百呎,越入四川省.自分水嶺顛,東南東望,得神人峽全景,主脈支嶺,簇簇峯巒,齡爲山國僅有小谷在足底,是適纔所經.上山路中多灌木,花盛開,各種株萸,多忍冬屬,莢蒾屬,及溲疏屬尤著.下穿峽裏危峻,達花果嶺站,高六千三百五十呎,其地多栽大黃,兼有他種藥材.

我等所循之路,名大鹽路(Great Salfroad),途中只遇四人挑鹽,實際全程所經,未見貿易.山國荒野,不足贍養多人,外間交易無由得生,爲我隊多人覓食,直大難事.在竹谷坪時,曾倩團總(Ihe local headman),備辦盛饌,並買得新鮮野猪肉數塊.在站,無物可購,隊人不得不出其隨帶糧食,以爲補充.此間,到處有頸線腫病,似每人皆患之.此症殆一遺傳病,蓋襁褓嬰孩,喉道間,亦礪有腫脹.

第一日旅程,鎮日唯烈日,暴風,陣雲相間.在此,我等入硬石灰岩叢中,景緻極似揚子諸峽,及其附近之地.境內過陡,不適耕植,居民疏少,氣象頹唐.土壤混雜,堅硬有黏性,所見農作物,爲小麥,裸麥 (Secale fragile) 馬鈴薯,玉蜀黍,豆類.石壁,大部喬木蓊翳,有湖北所常見之樹木灌叢.帥樹(Pinus Armandi)極豐富,亨利木公(P. Heuryi)亦多.又有虎尾樅,及尖頭樅(Hemlock)之單株. Acer g-iseum一株,高六十呎,圍七呎,樹皮奇異,如紙張,作肉桂紅,今日所見,此爲特色,獨惜着生地位惡劣,不適照像.山毛櫸屬,黃木, Dipteronie 爲途次之普通樹.

路線起伏綿長最感疲困.下午,爬經異常慘酷之峭道,而後行穿槲櫟(主爲櫟Quercus Variabilis及Q. Aliena)板栗之林約一小時.板栗花開,白色,奇臭.胡桃漆樹,四處豐富,桔梗(Canpanu-la punctata)爲常種之草.自昔無外國人來經,我等行近,居民極羞怯,皆扃戶藏匿.隣近岩壁,饒有窟穴,大多磚砌,用以避難.夜抵白菓園,高三千七百五十呎,宿村長家.食品缺少,懇請居民分讓長雞.乩後

分得少許,索價不減凶年,猶復怨聲遍野.

次早,下平緩小徑,抵湍流,始上峻巉,約二千六百呎,心胆俱裂.天殊熱,生平出汗之多,以此爲最.其間,崢嶸巉刻,幾不見人,使我不願再覩.石灰岩區,景象誠極雁偉,至於擇無阻,爬越之苦,絕非文字可以狀摹.我等目的地,爲小坪子,路之遠近,莫可知.途中遇人卽問,所得答覆,皆爲:"從白菓園到此七八里,往小坪子去七八里." 近暮,始知前去尙有三十里,及得猝見小坪子村二茅屋,所得告語,仍爲三十里,絕未稍減.

上行所經,大部耕植,最後一程,乃過密林.忍冬屬之一種 (Lonicera trogophylla) 普通,花盛開,此外未見良好植物.岩壁上,鑽地風 (Lchizophragma integrifoilum) 之叢,純白一團,遠遠卽已入目.一般植物,皆甚普通,隨處有Rhododeudron discolor, R. Mariesii.登絕壁頂.至一種植之斜坡,地名大坪山,胡桃,漆樹豐盛.農舍數家,散在玉蜀黍,豆類,大麥,馬鈴薯田中.隊人請於一農舍,得烹備佳肴,精神爲之旺盛.

去此續前,緣起伏小山,步平徑上.二哩之內,房屋零落,類皆荒棄.隨後卽無耕種人居之跡.小山童禿,多被草茅,間有柳樹,伏牛花,繡線菊之叢.山內窪地,有藍花琉璃草.全境可爲一最優之牧場.越過七千九百五十呎高處,循坦途下,哩許,有兩茅舍,舍旁皆種大黃,袤延甚廣,其間繁生多種草本,中有威爾遜鳶尾 (Iris Wilsonii)開黃花,顯著,覆地甚大.終至懸崖之邊,顚躓而下,行五里,到小坪子.小坪子,如其所名,位於一小塲上.(塲或起於山崩).有屋二棟,簡陋可憐.我等以較小一所,稍爲潔淨,寄宿其中,實則二者之間,無可選擇.屋旁,三面峭壁如堵,餘一面,崖邊懸絕.自房屋至崖邊,可三十碼,自此眺望之景致絕奇,爲我生平所僅見.壁下,(次晨察知,約四千呎).有小村如帶,與流經其下之大河河岸,成一銳角.其外,層山浪疊,裸露無樹,巉刃尖削,高五六千呎;更遠,則峯巒益高,山脈益大.岩石主爲石灰岩,白,灰,帶紅,在全景中,獨呈詭異.凡我所經,僻荒寂澀,無過如此.大風驟起,陰霾四合,不能撮影,然撮影亦不傳眞,使於影

片中,領略此荒蠻全景之偉大,是誠足感人,俾生肅敬畏怖.一見之下,沁入肌骨,印象之深且固,雖多年而後,憶及猶歷歷在心目間.有頃怒雲沉晦,隱滅全景,刹那間,雷雨暴作.風雨徹夜,屋漏如篩,室內泥地,頓成澤國.我等驚集,儘力設法,以求乾暖,然而長夜漫漫,彌感不樂.

次早,黎明後,即逃出此極劣之駐所.雲海蒼茫,雨仍未止,昨夜峽中怪景,皆不得見.下行最陡,我等踉蹌滾下二千呎.繼而略衍,過紅黏泥陡坡,曾經種植,步行困難.此路無尺寸平,深喜步步皆爲下行,而非攀登.山徑既終.大路穿過石隙,出河岸,河水清漣,寬約六十碼.渡河到唐家店.即昨夜自宿所,近處望見之小村,房舍聚集,約五十棟,前凸河面,後倚絕壁,形勢迥異尋常.有長街兩側房屋零落,自此蜿蜒二哩,至齊口 (Chi kou). 齊口,位河旁,有兩等大之河在此相匯.自齊口上支溪,哩許,爲大寧鹽井.

唐家店前進之路,係一大道,北通陝西,南達揚子江上之奉節縣(夔州府).此間,及下至巫山十二哩處,皆絕壁綿延,矗立水濱,北去近遠則不得知.路爲挖鑿轟炸堅岩所得,甚平坦,足寬六呎.

由齊口到巫溪,謂有三十里,路中無房店.我等經困難,僱船通過.船名新殼子,船身狹長,構造輕便,頭尾捲起,駛行不以槳,有長櫓搖動,自船首至於船尾.流急,灘多,益以汛濫半小時,達巫溪.程穿大地隙,岩壁直立水濱,岸湖平面,可容駐足.諸絕壁裸禿無樹,僅綴草塊,及纖姍竹叢 Arandinaria nitida 路在右岸,繞岩壁縈紆,高出漲水線外,寸寸皆由轟炸硬岩壁而成.隙間,無家屋,僅有石門石隄.此路,性質獨異,年久失修,曾少影響,然而今日,除河涸時,間有行人鹽販,偶爾過外,鮮有所用.我竭力求知此路係何何日所修,終無能告我者.據我意度,殆中國古代幹線之一,年代或在發現鹽井以前,亦似古時軍路,又或數百年前奉節縣(夔州府)爲衝繁之地,重要遠過今日,而建之乎?

所言河流,俗名大寧河,源近陝西,湖北,四川三省之界,其流路向正南,於巫山縣入揚子江.由齊口順流,下達大寧河口,二百里程.

巫溪(大寧縣)高七百五十呎,爲四川東部之城,位河右岸,其河寬約百碼,奔駛出峽,彎曲如良弓.其城楔入山坡之邊,城牆上山數百呎,一面濱河.商店,家屋,衙門,皆聚近此河.城牆內高地,皆未墾種.居民約四百戶.縣縣長住此,並有鹽賈雜商.昔時爲雅片煙交易大中心.

巫溪,中國榕(Ficus infactoria)豐富,蔚爲大觀,是四川中部之特色.在舟中,望北門外,數百碼處,一廟附近,現出蠻子洞,在石灰岩面.詢之,得知此旁,尚有四五穴,正復相似.此種洞穴,以後另將論及,而余能記載其出現於四川極東偏,甚爲有趣,蓋從前皆認爲蠻子洞,爲川西之特色也.就自然狀態,及地質學言,大寧河迤東地當屬湖北西部.大概河之直西,始顯四川紅沙石之特徵.

我與隊員,奮力經過湖北西北山寨,荒野淒涼,道路險惡,膳宿粗劣,糧食短少,備歷艱苦.開外國人經歷此程之第一次紀錄,此時思及前路,地域較爲繁裕,隊人莫不個個興高采烈.

書評

黎曼幾何學

"Eisenhart's Riemannian Geometry"

非黎曼幾何學

"Eisenhart's Non-Riemannian Geometry"

研究幾何學之方法有三.以度量(Metric)及測圖法研究之者,有歐幾里德(Euclid),羅巴瑟斯啓(Lobachevski),波耶(Bolyai),高斯(Gauss)諸氏.以射影(Projective)及綜合法(Synthetic)研究之者,有奉斯陶(Von Staudt),逢塞勒(Poncelet),揆力(Cayley),克萊因(Klein)諸氏.以解析(Analytic)及微分法(Differential)研究之者,有笛卡兒(Descartes),赫爾姆霍斯(Helmholtz),黎曼(Riemann),李奇(Ricci),諸氏.此三方法,因其所根據者不同,研究之術全異.其始也各自爲謀,不相統一,甚至有用此法者每擯斥用他法者之謬妄,勢若冰炭,不克相容.其繼也因一方進步,他方亦受其影響,於是前此之互相排斥者,乍改舊觀,彼此利用,頓生密切之關係,蓋因各方逐漸進步,同趨發展,始成今日幾何學上之鉅觀.此抑極饒興趣之事實也.

自愛恩斯坦(Einstein)相對論出世後,非歐幾何學之徒託空言者,竟可用之以解釋宇宙現象.多元幾何學之得諸

想像者,轉可用之以說明眞正空間.故研究物理現象者,不特於度量幾何學應當重視,其於解析幾何學及微分幾何學,尤不可須臾離者也.

微分幾何學中表示鄰近兩點 x, $x+dx$ 之距離 ds 如下:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

此爲在歐氏幾何學三度空間之公式.

黎黎曼於 1854 年擴張此種記法,將上式變之如次:

$$ds^2 = \sum_{ij}^{1-n} a_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

是爲黎曼幾何學之嚆矢.

利未奇徽塔 (Levi-Civita) 於 1917 年運用極微平行移位之觀念,增加以向量平行理論.威爾 (Weyl) 於 1918 年又推廣黎曼之記法,更成一宏大之新幾何學,俾黎曼幾何學包含在內,爲其一部份,是曰非黎曼幾何學.故非黎曼幾何學者,乃更普遍之黎曼幾何學也.

研究黎曼幾何學者有俾安岐 (Bianchi), 柏爾拉米 (Beltrami), 克里斯妥夫 (Christoffel), 許耳 (Schur), 佛斯 (Voss) 諸人.研究非黎曼幾何學者,有卡坦 (Cartan), 叔騰 (Schouten), 韋布隆 (Veblen) 諸人.惟因各氏著作,大諸散見於雜誌論文之中,蒐羅頗非易事.故研究之者,輒引爲憾事焉.

今有書出,將黎曼幾何學與非黎曼幾何學之概要,編纂成篇,採取諸家之學說,應用於最近物理之理論.則其必爲學者所歡迎,可無疑義.此書爲何?卽美國艾森哈 (Eisenhart)

所著之黎曼幾何學與非黎曼幾何學二書是也.

艾森哈著之黎曼幾何學.凡分六章.首章論張量解析.次章論度量之引用.第三章論垂直向量域.第四章論分支空間幾何學.第五章論平直空間之分支空間.第六章論運動羣.書末附有簡要之書籍及論文目錄,藉便檢查.

艾森哈著之非黎曼幾何學.凡分四章,首章論非對稱關聯.次章論對稱關聯.第三章論途徑之射影幾何學.第四章論分支空間幾何學.書末亦附有簡要之書錄及論文目錄.

學者得此二書,再參照義大利人利未奇徵塔所著之絕對徵分學.則不特於最近幾何學,新闢寶藏.對於近世理論物理,有用從前之徵分幾何學難以解釋者,今俱有奇巧精徵之方法以駕馭之矣.此豈非快人之事也耶?

昭 安

國立武漢大學理科季刊第一卷第一期目錄

國立武漢大學理科季刊第一卷第二期目錄

定價：　每册銀五角　　總發行所：　武昌國立武漢大學出版部

代售處：　各埠商務印書館

國立武漢大學文哲季刊第一卷第二號目錄

國立武漢大學社會科學季刊第一卷第三號目錄

國立中央研究院

各所館新出版刊物

所館	出版品	編著者	定價
化學研究所	集刊第二號	唐瓚源等	一册二角
工程研究所	中央陶瓷試驗場工作報告	周仁	一册七角
	集刊第一號	王季同	一册六角
地質究研所	集刊第九號(中文)	李捷等	一册一元五角
	集刊第九號(英文)	李捷等	一册一元五角
	集刊第十號(中文)	葉良輔等	一册一元五角
	集刊第十號(英德文)	斯行健等	一册一元五角
天文研究所	流星論	陳遵嬀	一册一元
	民國二十年天文年曆		一册一元五角
氣象研究所	集刊第二號	呂炯	一册一元
歷史語言研究所	集刊一本二分	陳寅恪等	一册六角
	集刊一本三分	羅常培等	一册八角
	集刊二本一分	陳寅恪等	一册八角
	安陽發掘報告第二期	李濟等	一册一元五角
	燉煌掇瑣上輯	劉復	兩册三元五角
	明清史料	第一卷	一册一元二角
	〃	第二卷	一册一元
	〃	第三卷	一册一元
社會科學研究所	台灣的租佃制度	瞿明宙	一册三角
	封建社會的農村生產關係	陳翰笙	一册三角
自然歷史博物館	叢刊第八號	方炳文	一册二角五分

經售處						
上海	商務印書館	生活週刊社	開明書店	新月書店‡	北新書局‡	中國書店‡
南京	商務印書館	中大出版部	保文堂	國粹書店	本院	
北平	歷史語言研究所	北大出版部	景山書社	開明書店	神州國光社	商務書館
各埠	商務印書館					

‡經售史語所刊物

＊經售史語及社會科學兩所刊物

本院各所館出版品為數繁多不克備載茲摘錄其最新出版者若干種於上詳細書目請附郵票一分向南京成賢街本院或上海亞爾培路三三一號本院出版委員會函索

普通刊物

英文概況(二十年) 每册二元

各年度總報告 每册一元

院務月報 每册一角

國立武漢大學理科季刊

第一卷第三期

價目	郵費
全年四册 價銀二圓	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費六角
每期零售 價銀五角	函購零本 本國及日本加郵費五分 其他地域郵費一角五分

本刊以九月十二月三月及六月爲出版期

費須先惠 空函不覆

各地代售處零售概不另加郵費

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌 國立武漢大學出版部

中華民國二十年三月發行