Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 18

Meromorphe Funktionen

Definition 18.1. Es sei X eine riemannsche Fläche. Eine *meromorphe Funktion* auf X ist gegeben durch eine diskrete Menge $D \subseteq X$ und eine holomorphe Funktion

$$f\colon X \setminus D \longrightarrow \mathbb{C}$$

derart, dass für jedes $x \in D$ der Limes $\lim_{y \to x} f(y)$ in $\mathbb{C}$ existiert oder gleich ∞ ist.

Dabei werden meromorphe Funktionen als gleich angesehen, wenn sie als holomorphe Funktionen auf dem offenen Komplement einer diskreten Teilmenge übereinstimmen. Wenn der Limes gleich ∞ ist, was bedeutet, dass für $|y| \to \infty$ auch $|f(y)| \to \infty$ gilt, so sagt man, dass ein *Pol* in y vorliegt. Wenn der Limes in einem Punkt existiert (also in $\mathbb{C}$), so kann man nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz die Funktion in diesem Punkt holomorph fortsetzen. Man kann daher jede meromorphe Funktion durch eine holomorphe Funktion auf einer größtmöglichen offenen Menge repräsentieren, nämlich auf dem Komplement der Polstellen. Insbesondere ist eine meromorphe Funktion genau dann eine holomorphe Funktion, wenn sie keine Polstellen besitzt, wenn also $D = \emptyset$ gewählt werden kann.

Eine meromorphe Funktion f besitzt in jedem Punkt P mit einem lokalen Parameter z eine *Laurent-Entwicklung*, also auf dem Kartenbild eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ und (bei $f \neq 0$) $c_k \neq 0$. Bei $k \geq 0$ ist die Funktion in P holomorph und bei $k \in \mathbb{Z}_-$ liegt ein Pol vor, wobei $-k$ die *Polstellenordnung* heißt (generell heißt k die Nullstellenordnung im Punkt).

Lemma 18.2. *Es sei X eine riemannsche Fläche. es sei $D \subseteq X$ eine diskrete Teilmenge und $f\colon X \setminus D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

1. *f ist eine meromorphe Funktion.*
2. *Für jedes Kartengebiet $U \subseteq X$ ist die holomorphe Funktion*
   $f|_{(X \setminus D) \cap U} \circ \alpha^{-1}|_{\alpha(U) \setminus \alpha(D \cap U)} \colon \alpha(U) \setminus \alpha(D \cap U) \to \mathbb{C}$
   meromorph.

(3) *Es gibt eine offene Überdeckung* $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ *mit Kartengebieten* U_i *derart, dass die holomorphen Funktionen*
$f|_{(X \setminus D) \cap U_i} \circ \alpha_i^{-1}|_{\alpha_i(U_i) \setminus \alpha_i(D \cap U_i)} \colon \alpha_i(U_i) \setminus \alpha_i(D \cap U_i) \to \mathbb{C}$
meromorph sind.

Beweis. Siehe Aufgabe 18.3. □

Meromorphe Funktionen f_1 und f_2 auf einer riemannschen Fläche X kann man in natürlicher Weise addieren und multiplizieren. Dazu fasst man die jeweiligen diskreten Ausnahmemengen D_1 und D_2 zu einer diskreten Menge $D = D_1 \cup D_2$ zusammen und addiert bzw. multipliziert die holomorphen Funktionen auf $X \setminus D$. Die Summe bzw. das Produkt besitzt in den Punkten aus D entweder einen Limes oder aber einen Pol.

Satz 18.3. *Es sei* X *eine zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann ist die Menge der meromorphen Funktionen auf* X *mit den natürlichen Verknüpfungen ein Körper.*

Beweis. Es ist klar, dass ein kommutativer Ring vorliegt. Es sei f eine meromorphe Funktion $\neq 0$ auf X, die auf $X \setminus D$ holomorph sei. Nach Satz 3.5 ist die Nullstellenmenge E von f innerhalb von $X \setminus D$ diskret. Somit ist f^{-1} auf $X \setminus (D \cup E)$ nach Lemma 3.4 holomorph und aus den Nullstellen von f werden Polstellen und umgekehrt. □

Wir bezeichnen diesen Körper mit $\mathcal{M}(X)$.

Lemma 18.4. *Es sei* X *eine riemannsche Fläche und sei* $U \subseteq X$ *eine offene Teilmenge.*

(1) *Die Einschränkung einer meromorphen Funktion* f *von* X *auf* U *ist meromorph.*
(2) *Die Zuordnung* $U \mapsto \mathcal{M}(U)$ *ist eine Garbe von kommutativen Ringen auf* X.
(3) *Wenn* X *und* U *zusammenhängend sind, so liegt eine Körpererweiterung*
$$\mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(U),\ f \longmapsto f|_U,$$
vor.

Beweis. Siehe Aufgabe 18.4. □

Die Garbe der meromorphen Funktionen auf X wird mit $\mathcal{M}_X$ oder mit $\mathcal{M}$ bezeichnet. Es liegt die Untergarbenbeziehung
$$\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{M}_X$$
vor. Schon das Beispiel
$$U(0,r) \subset U(0,s) \subset \mathbb{C}$$

mit $r < s$ zeigt, dass die Restriktionsabbildung für die meromorphen Funktionen im Allgemeinen nicht surjektiv ist, da es zu jedem Radius holomorphe Funktionen mit diesem Konvergenzradius gibt, die nicht über den Rand hinaus fortsetzbar sind.

Beispiel 18.5. Wir betrachten

$$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}.$$

Jedes nichtkonstante Polynom p (aufgefasst als holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$) besitzt die Eigenschaft, dass der Limes $\lim_{|z| \to \infty} |p(z)|$ bestimmt gegen unendlich divergiert (siehe den Beweis zu Lemma 36.13 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))). Somit ist jedes Polynom eine meromorphe Funktion auf der projektiven Geraden. Es folgt, dass überhaupt jede rationale Funktion P/Q eine meromorphe Funktion auf der projektiven Geraden definiert. D.h. der Körper der rationalen Funktionen $\mathbb{C}(T)$ ist im Körper der meromorphen Funktionen auf der projektiven Geraden enthalten. In Satz 19.19 werden wir sehen, dass hier sogar Gleichheit gilt. Es ist andererseits einfach, meromorphe und auch holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ anzugeben, die auf der projektiven Geraden nicht meromorph sind. Beispielsweise definieren die komplexe Exponentialfunktion oder die komplexe Sinusfunktion keine meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, da diese Funktionen für $|z| \to \infty$ kein einheitliches Limesverhalten haben (also weder gegen eine feste Zahl noch gegen unendlich gehen).

Wir werden in Satz 26.9 sehen, dass auf der projektiven Geraden jede meromorphe Funktion rational ist. Generell besitzt auf einer kompakten zusammenhängenden riemannschen Fläche der Körper der meromorphen Funktionen eine algebraische Beschreibung, was für nichtkompakte riemannsche Flächen keineswegs gilt.

Holomorphe Abbildungen nach $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

Satz 18.6. *Es sei X eine zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann gibt es eine natürliche Korrespondenz zwischen meromorphen Funktionen auf X und holomorphen Abbildungen von X nach $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, die nicht konstant gleich ∞ sind. Einer meromorphen Funktion f wird dabei die Abbildung zugeordnet, die auf dem polstellenfreien Ort die holomorphe Funktion*

$$X \setminus \operatorname{Pol}(f) \longrightarrow \mathbb{C} \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

ist und die die Polstellen von f auf ∞ abbildet.

Beweis. Es liegt unmittelbar die holomorphe Funktion

$$X \setminus \operatorname{Pol}(f) \longrightarrow \mathbb{C} \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

vor. Das die beschriebene Fortsetzung nach $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ebenfalls holomorph ist, kann man für jeden einzelnen Punkt P, an dem ein Pol vorliegt, nachweisen. Es habe also f einen Pol in P und sei $P \in U \subseteq X$ eine offene Kreisscheibenumgebung, auf der f keine Nullstelle und keinen weiteren Pol besitze. Es besitzt dann f auf U (bzw. dem zugehörigen Kartenbild) eine Laurent-Entwicklung $\sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n$ mit $k \in \mathbb{Z}_-$ und $c_k \neq 0$. Wir schreiben

$$f = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n = z^k \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_{k+m} z^m \right) = z^k g(z).$$

Es ist $g(z)$ holomorph ohne Nullstelle und daher ist

$$\frac{1}{g(z)} = h(z)$$

holomorph (auf einer eventuell kleineren Umgebung). Die zusammengesetzte Abbildung

$$U \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}^\times \xrightarrow{w \mapsto w^{-1}} \mathbb{C} \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

ist $z \mapsto z^{-k} h(z)$. Diese lässt sich durch $0 \mapsto 0$ holomorph fortsetzen. Da sich die projektive Gerade aus den beiden $\mathbb{C}$ mit der Identifizierung $z = w^{-1}$ auf $\mathbb{C}^\times$ zusammenklebt, liegt eine wohldefinierte Abbildung in die projektive Gerade vor. □

Zu einer meromorphen Funktion f auf einer zusammenhängenden riemannschen Fläche X versteht man unter der Gesamtnullstellenordnung einfach die Gesamtnullstellenordnung der zugehörigen holomorphen Funktion (auf dem maximalen Definitionsbereich), also die Summe $\sum_{x \in \varphi^{-1}(0)} \operatorname{Verz}(x|0)$, falls diese endlich ist. Hierbei werden die Nullstellen von f zusammen mit ihren jeweiligen Ordnungen gezählt, die man aus der Potenzreihenentwicklung ablesen kann. Die *Gesamtpolstellenordnung* von f ist entsprechend die Summe $\sum_{x \in \operatorname{Pol}(f)} -k_x$, wenn k_x die Startordnung der Laurent-Entwicklung von f in x bezeichnet. Diese Gesamtpolstellenordnung kann man wiederum als Gesamtordnung über ∞ der zugehörigen holomorphen Abbildung nach $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ auffassen, siehe Aufgabe 18.11.

KOROLLAR 18.7. *Es sei f eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf der zusammenhängenden kompakten riemannschen Fläche X. Dann stimmt die Gesamtnullstellenordnung von f mit der Gesamtpolstellenordnung von f überein.*

Beweis. Dies folgt unter Verwendung von Satz 18.6 und Aufgabe 18.11 aus Korollar 9.9. □

Hauptteile

Es sei X eine riemannsche Fläche . Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ liegt die Beziehung

$$\mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{M}(U)$$

vor, da ja jede holomorphe Funktion insbesondere eine meromorphe Funktion ist. Wir haben also eine Untergarbenbeziehung $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{M}_X$ und wollen die Quotientengarbe dazu bestimmen. Zur Formulierung verwenden wir die folgenden Begriffe.

Definition 18.8. Es sei X eine riemannsche Fläche, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $P \in U$. Zu einer meromorphen Funktion auf U mit der Laurent-Entwicklung $\sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n$ in P nennt man $\sum_{n=k}^{-1} c_n z^n$ den *Hauptteil* der Funktion in P.

Der Hauptteil ist ein Element des Restklassenmoduls $\mathcal{M}_P/\mathcal{O}_P$. Diese Sichtweise ist wichtiger als die übersichtliche Darstellung mit einem lokalen Parameter. Der Hauptteil einer holomorphen Funktion ist 0, der Hauptteil ist also relevant für das Polstellenverhalten einer meromorphen Funktion und ist dafür ein gewisses Maß. Jeder Hauptteil wird durch eine besonders einfache meromorphe Funktion repräsentiert, nämlich ein Polynom in z^{-1} ohne konstanten Term. Die Potenzen z^k, $k \in \mathbb{Z}_-$, bilden eine $\mathbb{C}$-Basis des Vektorraumes aller Hauptteile. Unendliche Summen dieser Potenzen sind keine Hauptteile.

Definition 18.9. Es sei U eine riemannsche Fläche und f eine meromorphe Funktion auf U. Dann nennt man die Abbildung, die jedem Punkt $P \in U$ den Hauptteil zu f in P zuordnet, die *Hauptteilverteilung* zu f.

Für einen Punkt ist der Hauptteil einer meromorphen Funktion f in diesem Punkt genau dann 0, wenn f in diesem Punkt keinen Pol besitzt. Da die Polstellen einer meromorphen Funktion diskret sind, ist die Hauptteilverteilung einer meromorphen Funktion eine Hauptteilverteilung im Sinne der folgenden Definition.

Definition 18.10. Es sei U eine riemannsche Fläche. Unter einer *Hauptteilverteilung* T auf U versteht man eine diskrete Teilmenge $D \subseteq U$ zusammen mit einem Hauptteil T_P für jeden Punkt $P \in D$. Die Menge der Hauptteilverteilungen auf U wird mit $\mathcal{T}(U)$ bezeichnet.

Der Hauptteil T_P wird dabei durch eine in einer offenen Umgebung von P definierten meromorphen Funktion oder durch $\sum_{n=k}^{-1} c_n z^n$ mit einem lokalen Parameter z um P repräsentiert. Man kann eine Hauptteilverteilung auch so auffassen, dass überhaupt jedem Punkt ein Hauptteil zugeordnet wird, wobei aber außerhalb einer diskreten Menge die Hauptteile gleich 0 sind. Die Punkte, in denen eine Hauptteilverteilung $\neq 0$ ist, nennt man auch den *Träger* der Hauptteilverteilung. Statt von einer Hauptteilverteilung spricht man auch von einer *Mittag-Leffler-Verteilung*.

Wenn man einer jeden offenen Menge U die Menge aller möglichen Hauptteilverteilungen auf U zuordnet, so erhält man eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X, siehe Aufgabe 18.14. Diese Garbe bezeichnen wir mit $\mathcal{T}$.

Bei der Restriktionsabbildung werden punktweise die Hauptteile übernommen bzw. weggelassen, wenn der Punkt nicht zur kleineren offenen Menge gehört.

Beispiel 18.11. Wir betrachten die rationale Funktion $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$ als meromorphe Funktion auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ und wollen ihre Hauptteilverteilung bestimmen. Außer in den Punkten $-1, 1, \infty$ hat die Hauptteilverteilung den Wert 0.

Sei $z = -1$. Wir schreiben die Funktion mit dem lokalen Parameter $u = z+1$ als

$$f(u) = \frac{(u-1)^2}{u(u-2)^2} = \frac{1}{u} \cdot \frac{u^2-2u+1}{(u-2)^2},$$

wobei der rechte Faktor holomorph in diesem Punkt ist. Insbesondere ist die Polstellenordnung gleich 1 und es kommt nur noch auf den skalaren Faktor an, der sich durch Einsetzen $u = 0$ zu $\frac{1}{4}$ berechnet. Der Hauptteil in diesem Punkt ist also $\frac{1}{4}u^{-1}$.

Sei $z = 1$. Wir schreiben die Funktion mit dem lokalen Parameter $v = z-1$ als

$$f(v) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{(v+1)^2}{v+2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{v^2+2v+1}{v+2} = \frac{1}{v^2} \cdot \left(v + \frac{1}{v+2}\right),$$

wobei der rechte Faktor holomorph in diesem Punkt ist. Insbesondere ist die Polstellenordnung gleich 2 und wir müssen den rechten Faktor als Potenzreihe bis zur Ordnung 1 entwickeln. Dabei ergibt sich

$$\frac{1}{v+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}v + \ldots$$

und somit ist der Hauptteil in diesem Punkt gleich $\frac{1}{2}v^{-2} - \frac{1}{4}v^{-1}$.

Im unendlich fernen Punkt muss man mit $w = z^{-1}$ arbeiten, die Funktion besitzt dort die Beschreibung

$$f(w) = \frac{w^{-2}}{(w^{-1}+1)(w^{-1}-1)^2} = \frac{w}{(1+w)(1-w)^2}.$$

Dies ist holomorph für $w = 0$ und daher ist der Hauptteil in diesem Punkt gleich 0.

Lemma 18.12. *Auf einer riemannschen Fläche liegt eine kurze exakte Sequenz von Garben von kommutativen Gruppen*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow 0$$

vor, wobei $\mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe der holomorphen Funktionen, $\mathcal{M}$ die Garbe der meromorphen Funktionen und $\mathcal{T}$ die Garbe der Hauptteilverteilungen bezeichnet.

Beweis. Bei der Abbildung rechts wird natürlich einer meromorphen Funktion auf $U \subseteq X$ ihre Hauptteilverteilung zugeordnet. Dabei gehen holomorphe Funktionen auf 0. Es ist also lediglich zu zeigen, dass die Quotientengarbe $\mathcal{M}/\mathcal{O}_X$ unter dieser induzierten Zuordnung zur Garbe der Hauptteilverteilungen isomorph ist. Eine meromorphe Funktion, deren Hauptteilverteilung 0 ist, besitzt keinen Pol und ist daher holomorph, was die Injektivität sichert. Die Surjektivität (im Garbensinn) kann man punktweise testen und beruht darauf, dass jeder Hauptteil in einem Punkt in einer geeigneten Kreisscheibe durch eine meromorphe Funktion auf der Kreisscheibe repräsentiert wird. $\square$

Es sei betont, dass nicht jede globale Hauptteilverteilung von einer meromorphen Funktion herrührt. In der Tat ist die Frage, welche Hauptteilverteilungen von einer meromorphen Funktion herrühren und welche nicht, ein wichtiges Motiv zur Einführung der Kohomologie.

Meromorphe Differentialformen

Definition 18.13. Es sei U eine riemannsche Fläche. Eine *meromorphe Differentialform* auf U wird gegeben durch eine holomorphe Differentialform auf $U \setminus D$, wobei $D \subseteq U$ eine diskrete Teilmenge bezeichnet, mit der Eigenschaft, dass für jeden Punkt $P \in D$ lokal die Differentialform von der Form $f dz$ mit einer meromorphen Funktion f und mit einem lokalen Parameter z in P ist.

Die meromorphen Differentialformen bilden eine Garbe auf X, die wir mit $\mathcal{M}^{(1)}$ bezeichnen.

Bemerkung 18.14. Die Ableitung $\mathcal{O}_X(U) \to \Omega_X(U)$ lässt sich fortsetzen zur Ableitung

$$d\colon \mathcal{M}(U) \longrightarrow \mathcal{M}^{(1)}(U),\ f \longmapsto df.$$

Hierbei wird lokal der meromorphen Funktion f die meromorphe Differentialform $f'dz$ zugeordnet. Diese Ableitung ist wieder $\mathbb{C}$-linear und ein Garbenhomomorphismus, aber kein Modulhomomorphismus. Zu einer globalen meromorphen Differentialform ω (für die Existenz vergleiche Satz 26.2) erhält man einen Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{M}(U) \longrightarrow \mathcal{M}^{(1)}(U),\ f \longmapsto f\omega.$$

Da lokal ein Isomorphismus vorliegt, handelt es sich um einen Isomorphismus. Es liegt also eine nichtkanonische Isomorphie vor. Insbesondere kann man bei einer gegebenen meromorphen Form $\omega \neq 0$ jede weitere meromorphe Form ω' als

$$\omega' = f\omega$$

mit einer eindeutig bestimmten meromorphen Funktion f schreiben. Für nichtkonstante meromorphe Funktionen g, h gibt es insbesondere eine Beziehung

$$dg = fdh$$

mit einer meromorphen Funktion f. Nicht jede meromorphe Differentialform kann man als *df* mit einer meromorphen Funktion schreiben, siehe Aufgabe 18.17.

Holomorphe Differentialformen sind insbesondere meromorphe Differentialformen, wir haben also die Untergarbenbeziehung $\Omega_X \subseteq \mathcal{M}^{(1)}$. Dies erlaubt neben der Einbettung von holomorphen Differentialformen in reell-differenzierbare 1-Formen eine weitere Auflösungsmöglichkeit für die holomorphen Differentialformen. In einem Punkt $P \in X$ gilt

$$\mathcal{M}^{(1)}{}_P/\Omega_{X,P} \cong \mathcal{M}_P/\mathcal{O}_{X,P} \cong \mathcal{T}_P,$$

der Quotientenmodul ist also in einem Punkt isomorph zum Hauptteilmodul in diesem Punkt. Um mit natürlichen Abbildungen zu arbeiten und falsche Identifizierungen zu vermeiden sollte man in diesem Kontext die Hauptteilverteilungen stets punktweise durch $[\omega]$ mit einer meromorphen Differentialform ω aus $\mathcal{M}^{(1)}{}_P$ repräsentieren oder in der Form $\sum_{n=k}^{-1} c_n z^n dz$ mit einem lokalen Parameter z in P. Die zugehörige Garbe bezeichnen wir mit $\mathcal{T}^{(1)}$, sie ist isomorph zur Garbe der Hauptteilverteilungen.

Lemma 18.15. *Auf einer riemannschen Fläche liegt eine kurze exakte Sequenz von Garben*

$$0 \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \mathcal{M}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{T}^{(1)} \longrightarrow 0$$

vor.

Beweis. Siehe Aufgabe 18.19. □

Beispiel 18.16. Auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ist $z^{-1}dz$ eine globale meromorphe Differentialform. Es sei $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = U \cup V$ die Standardüberdeckung. Auf $U \setminus \{0\}$ ist die Form holomorph, im Nullpunkt hat sie einen Pol der Ordnung 1. Auf V mit dem lokalen Parameter $w = z^{-1}$ ist

$$z^{-1}dz = wdw^{-1} = w\left(-\frac{1}{w^2}\right)dw = -w^{-1}dw,$$

im unendlich fernen Punkt liegt also auch ein Pol der Ordnung 1 vor. Diese Form definiert im Sinne von Lemma 18.15 die Differentialform-Hauptteilverteilung mit dem Träger $\{0, \infty\}$ und den Werten $z^{-1}dz$ in 0 und $-w^{-1}dw$ in ∞. Diese Verteilung rührt wie gezeigt von einer globalen meromorphen Form her. Dagegen rührt die Verteilung, die allein im Punkt 0 den Wert $z^{-1}dz$ besitzt, nicht von einer globalen meromorphen Form her (dies folgt auch sofort aus Satz 17.13). Eine solche müsste nämlich auf V eine holomorphe

Differentialform sein, also von der Form hdw mit einer holomorphen ganzen Funktion auf $V \cong \mathbb{C}$, sagen wir

$$hdw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n dw$$

Doch eine solche Form hat, wie die Transformation mit $w = z^{-1}$ zeigt, in $0 \in U$ einen Pol der Ordnung ≥ 2. Die Verteilung wiederum, die allein im Punkt 0 den Wert $z^{-2}dz$ besitzt, rührt von ebendieser meromorphen Form her, da

$$z^{-2}dz = w^2 dw^{-1} = -dw$$

eine holomorph Differentialform ist.

Definition 18.17. Zu einer meromorphen Differentialform ω auf einer riemannschen Fläche X und einem Punkt $P \in X$ mit einer lokalen Beschreibung $\omega = fdz$ (wobei z ein lokaler Parameter und f eine meromorphe Funktion ist) nennt man das Residuum von f in P das *Residuum* der Differentialform in P. Es wird mit $\operatorname{Res}_P(\omega)$ bezeichnet.

Eine holomorphe Differentialform nennt man auch (meromorphe) *Differentialform erster Gattung*. Darüber hinaus gibt es die folgenden Sprechweisen.

Definition 18.18. Eine meromorphe Differentialform ω auf einer riemannschen Fläche X heißt *Differentialform zweiter Gattung*, wenn alle ihre Residuen $\operatorname{Res}_P(\omega)$ für $P \in X$ gleich 0 sind.

Definition 18.19. Eine meromorphe Differentialform ω auf einer riemannschen Fläche X heißt *Differentialform dritter Gattung*, wenn sie höchstens Pole der Ordnung 1 besitzt.

Abbildungsverzeichnis