Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Vorlesung 32

> Verwandle große Schwierigkeiten in kleine und kleine in gar keine
>
> Chinesische Weisheit

Das Lösen von linearen Gleichungssystemen

Es ist von vornherein gar nicht so klar, was man unter dem Lösen eines (linearen) Gleichungssystems verstehen soll. Jedenfalls geht es um eine möglichst gute Beschreibung der Lösungsmenge. Wenn es nur eine Lösung gibt, so geht es darum, diese Lösung zu finden und anzugeben. Wenn es überhaupt keine Lösung gibt, geht es darum, dies festzustellen und zu begründen. Im Allgemeinen ist aber die Lösungsmenge eines Gleichungssystems groß. Dann versteht man unter der Lösung eines Systems, freie Variablen zu identifizieren, die beliebige Werte annehmen dürfen, und explizit zu beschreiben, wie die anderen (abhängigen) Variablen von diesen freien Variablen abhängen. Man spricht auch von einer *expliziten Beschreibung* der Lösungsmenge.

Lineare Gleichungssysteme können systematisch mit dem *Eliminationsverfahren* gelöst werden, bei dem nach und nach Variablen eliminiert werden und schließlich ein besonders einfaches äquivalentes Gleichungssystem (in Dreiecksgestalt) entsteht, das direkt gelöst werden kann (bzw. von dem gezeigt werden kann, dass es keine Lösung besitzt). Systeme mit zwei Gleichungen in zwei Variablen haben wir schon in der letzten Vorlesung behandelt. Wir fahren mit einem typischen Beispiel fort.

Beispiel 32.1. Wir wollen das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ 3x & -4y & & +u & +2v & = & 1 \\ 4x & & -2z & +2u & & = & 7 \end{array}$$

über $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{Q}$) lösen. Wir eliminieren zuerst x, indem wir die erste Zeile I beibehalten, die zweite Zeile II durch $II - \frac{3}{2}I$ und die dritte Zeile III durch $III - 2I$ ersetzen. Das ergibt

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ & -\frac{23}{2}y & -3z & +u & +\frac{7}{2}v & = & \frac{-7}{2} \\ & -10y & -6z & +2u & +2v & = & 1\,. \end{array}$$

Wir könnten jetzt aus der (neuen) dritten Zeile mit Hilfe der zweiten Zeile y eliminieren. Wegen der Brüche eliminieren wir aber lieber z (dies eliminiert gleichzeitig u). Wir belassen also die erste und zweite Zeile und ersetzen die dritte Zeile III durch $III - 2II$. Dies ergibt, wobei wir das System in einer neuen Reihenfolge[1] aufschreiben, das System

$$\begin{array}{cccccc} 2x & +2z & & +5y & -v & = & 3 \\ & -3z & +u & -\frac{23}{2}y & +\frac{7}{2}v & = & \frac{-7}{2} \\ & & & 13y & -5v & = & 8\,. \end{array}$$

Wir können uns nun v beliebig (oder „frei“) vorgeben. Die dritte Zeile legt dann y eindeutig fest, es muss nämlich

$$y = \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v$$

gelten. In der zweiten Gleichung können wir wieder u beliebig vorgeben, was dann z eindeutig festlegt, nämlich

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{23}{2}\left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v\right)\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{92}{13} + \frac{115}{26}v\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{93}{26} - u + \frac{12}{13}v\right) \\ &= -\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v. \end{aligned}$$

Die erste Zeile legt dann x fest, nämlich

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(3 - 2z - 5y + v) \\ &= \frac{1}{2}\left(3 - 2\left(-\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v\right) - 5\left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v\right) + v\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{30}{13} - \frac{2}{3}u - \frac{4}{13}v\right) \\ &= \frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v. \end{aligned}$$

Daher kann man die Gesamtlösungsmenge als

$$\left\{\left(\frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v, \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v, -\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v, u, v\right) \mid u, v \in \mathbb{R}\right\}$$

schreiben. Eine besonders einfache Lösung ergibt sich, wenn man die freien Variablen u und v gleich 0 setzt. Dies führt auf die spezielle Lösung

$$(x, y, z, u, v) = \left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{31}{26}, 0, 0\right).$$

[1] Eine solche Umstellung ist ungefährlich, wenn man den Namen der Variablen mitschleppt. Wenn man dagegen das System in Matrizenschreibweise aufführt, also die Variablennamen einfach weglässt, so muss man sich diese Spaltenvertauschungen merken.

In der allgemeinen Lösung kann man u und v als Koeffizienten rausziehen und dann die Lösungsmenge auch als

$$\left\{ \left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{31}{26}, 0, 0 \right) + u \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0 \right) + v \left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1 \right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

schreiben. Dabei ist

$$\left\{ u \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0 \right) + v \left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1 \right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Beschreibung der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

Definition 32.2. Es sei K ein Körper und seien zwei (inhomogene) lineare Gleichungssysteme zur gleichen Variablenmenge gegeben. Die Systeme heißen *äquivalent*, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

Lemma 32.3. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über K. Dann führen die folgenden Manipulationen an diesem Gleichungssystem zu einem äquivalenten Gleichungssystem.

(1) *Das Vertauschen von zwei Gleichungen.*
(2) *Die Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar $s \neq 0$.*
(3) *Das einfache Weglassen einer Gleichung, die doppelt vorkommt.*
(4) *Das Verdoppeln einer Gleichung (im Sinne von eine Gleichung zweimal hinschreiben).*
(5) *Das Weglassen oder Hinzufügen einer Nullzeile (einer Nullgleichung).*
(6) *Das Ersetzen einer Gleichung H durch diejenige Gleichung, die entsteht, wenn man zu H eine andere Gleichung G des Systems addiert.*

Beweis. Die meisten Aussagen sind direkt klar. (2) ergibt sich einfach daraus, dass wenn

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i = c$$

gilt, dass dann auch

$$\sum_{i=1}^{n} (s a_i) \xi_i = sc$$

für jedes $s \in K$ gilt. Bei $s \neq 0$ kann man diesen Übergang durch Multiplikation mit s^{-1} rückgängig machen.

(6). Es sei G die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$$

und H die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = d.$$

Wenn ein Tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$ die beiden Gleichungen erfüllt, so erfüllt es auch die Gleichung $H' = G+H$. Und wenn das Tupel die beiden Gleichungen G und H' erfüllt, so auch die Gleichung G und $H = H' - G$. □

Für die praktische Lösung eines linearen Gleichungssystems sind die beiden Manipulationen (2) und (6) am wichtigsten, wobei man in aller Regel diese beiden Schritte kombiniert und eine Gleichung H durch eine Gleichung der Form $H + \lambda G$ (mit $G \neq H$) ersetzt. Dabei wird $\lambda \in K$ so gewählt, dass die neue Gleichung eine Variable weniger besitzt als die alte. Man spricht von *Elimination einer Variablen*. Diese Elimination wird nicht nur für eine Zeile durchgeführt, sondern für alle Zeilen mit Ausnahme von einer (geeignet gewählten) „Arbeitszeile“ G und mit einer fixierten „Arbeitsvariablen“. Das folgende *Eliminationslemma* beschreibt diesen Rechenschritt.

Lemma 32.4. *Es sei K ein Körper und S ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem über K in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Es sei x eine Variable, die in mindestens einer Gleichung G mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten a vorkommt. Dann lässt sich jede von G verschiedene[2] Gleichung H durch eine Gleichung H' ersetzen, in der x nicht mehr vorkommt, und zwar so, dass das neue Gleichungssystem S', das aus G und den Gleichungen H' besteht, äquivalent zum Ausgangssystem S ist.*

Beweis. Durch Umnummerieren kann man $x = x_1$ erreichen. Es sei G die Gleichung

$$ax_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i = b$$

(mit $a \neq 0$) und H die Gleichung

$$cx_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x_i = d.$$

Dann hat die Gleichung

$$H' = H - \frac{c}{a} G$$

[2]Mit verschieden ist hier gemeint, dass die beiden Gleichungen einen unterschiedlichen Index im System haben. Es ist also sogar der Fall erlaubt, dass G und H dieselbe, aber doppelt aufgeführte Gleichung ist.

die Gestalt
$$\sum_{i=2}^{n}\left(c_i - \frac{c}{a}a_i\right)x_i \;=\; d - \frac{c}{a}b,$$
in der x_1 nicht mehr vorkommt. Wegen $H = H' + \frac{c}{a}G$ sind die Gleichungssysteme äquivalent. $\square$

Das praktische Verfahren, bei dem man sukzessive das Verfahren im Beweis des vorstehenden Lemmas anwendet, um auf Dreiecksgestalt bzw. Stufengestalt zu kommen, nennt man *Gaußsches Eliminationsverfahren* (oder *Additionsverfahren*). Es werden also Variablen eliminiert, indem man geeignete Vielfache von Gleichungen zu anderen Gleichungen hinzuaddiert.

Satz 32.5. *Jedes (inhomogene) lineare Gleichungssystem über einem Körper K lässt sich durch die in Lemma 32.3 beschriebenen elementaren Umformungen und durch das Weglassen von überflüssigen Gleichungen in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem der Stufenform*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
b_{1s_1}x_{s_1} & +b_{1s_1+1}x_{s_1+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & +b_{1n}x_n & = & d_1 \\
0 & \ldots & 0 & b_{2s_2}x_{s_2} & \ldots & \ldots & \ldots & +b_{2n}x_n & = & d_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_{ms_m}x_{s_m} & \ldots & +b_{mn}x_n & = & d_m \\
(0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & = & d_{m+1})
\end{array}$$

überführen, bei dem alle Startkoeffizienten $b_{1s_1}, b_{2s_2}, \ldots, b_{ms_m}$ von 0 verschieden sind. Dabei ist (bei $d_{m+1} = 0$) die letzte Zeile überflüssig oder aber (bei $d_{m+1} \neq 0$) das System besitzt keine Lösung.

Durch Variablenumbenennungen erhält man ein äquivalentes System der Form

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_{11}y_1 & +c_{12}y_2 & \ldots & +c_{1m}y_m & +c_{1m+1}y_{m+1} & \ldots & +c_{1n}y_n & = & d_1 \\
0 & c_{22}y_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & +c_{2n}y_n & = & d_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & c_{mm}y_m & +c_{mm+1}y_{m+1} & \ldots & +c_{mn}y_n & = & d_m \\
(0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & = & d_{m+1})
\end{array}$$

mit Diagonalelementen $c_{ii} \neq 0$.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Eliminationslemma, mit dem man sukzessive Variablen eliminiert. Man wendet es auf die erste (in der gegebenen Reihenfolge) Variable (diese sei x_{s_1}) an, die in mindestens einer Gleichung mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten auftaucht. Diese Eliminationsschritte wendet man solange an, solange das im Eliminationsschritt entstehende variablenreduzierte Gleichungssystem (also ohne die vorhergehenden Arbeitsgleichungen) noch mindestens zwei Gleichungen mit von 0 verschiedenen Koeffizienten erhält. Wenn dabei Gleichungen in der Form der letzten Gleichung übrig bleiben, und diese nicht alle die Nullgleichung sind, so besitzt das System keine Lösung. Wenn wir $y_1 = x_{s_1}, y_2 = x_{s_2}, \ldots, y_m = x_{s_m}$

setzen und die anderen Variablen mit $y_{m+1}, \ldots, y_n$ benennen, so erhält man das angegebene System in Dreiecksgestalt. □

Es kann sein, dass die Variable x_1 gar nicht in dem System mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt, und, dass in einer Variablenelimination gleichzeitig mehrere Variablen eliminiert werden. Dann erhält man wie beschrieben ein Gleichungssystem in Stufenform, das erst durch Variablenvertauschungen in die Dreiecksform gebracht werden kann.

Bemerkung 32.6. Gelegentlich möchte man ein *simultanes lineares Gleichungssystem* der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 & (= & d_1, & = & e_1, \ldots) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 & (= & d_2, & = & e_2, \ldots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m & (= & d_m, & = & e_m, \ldots) \end{array}$$

lösen. Es sollen also für verschiedene Störvektoren Lösungen des zugehörigen inhomogenen Gleichungssystems berechnet werden. Grundsätzlich könnte man dies als voneinander unabhängige Gleichungssysteme betrachten, es ist aber geschickter, die Umwandlungen, die man auf der linken Seite macht, um Dreiecksgestalt zu erreichen, simultan auf der rechten Seiten mit allen Störvektoren durchzuführen. Ein wichtiger Spezialfall bei $n = m$ liegt vor, wenn die Störvektoren die Standardvektoren durchlaufen, siehe Verfahren 36.13.

Wir besprechen noch kurz weitere Verfahren, ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

Bemerkung 32.7. Ein weiteres Verfahren, ein lineares Gleichungssystem zu lösen, ist das *Einsetzungsverfahren*. Dabei werden ebenfalls Variablen sukzessive eliminiert, allerdings in einer anderen Weise. Wenn man mit diesem Verfahren die Variable x_1 eliminieren möchte, so löst man eine Gleichung, sagen wir G_1, in der x_1 mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt, nach x_1 auf, und erhält eine neue Gleichung der Form

$$G_1' : \ \ x_1 = F_1 \, ,$$

wobei in F_1 die Variable x_1 nicht vorkommt. In allen weiteren Gleichungen $G_2, \ldots, G_m$ ersetzt man die Variable x_1 durch F_1 und erhält (nach Umformungen) ein Gleichungssystem $G_2', \ldots, G_m'$ ohne die Variable x_1, das zusammen mit G_1' äquivalent zum Ausgangssystem ist.

Bemerkung 32.8. Ein anderes Verfahren, ein lineares Gleichungssystem zu lösen, ist das *Gleichsetzungsverfahren*. Dabei werden ebenfalls Variablen sukzessive eliminiert, allerdings in anderer Weise. Bei diesem Verfahren löst man die Gleichungen G_i, $i = 1, \ldots, m$, nach einer festen Variablen, sagen wir x_1 auf. Es seien (nach Umordnung) $G_1, \ldots, G_k$ die Gleichungen, in denen die

Variable x_1 mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt. Diese Gleichungen bringt man in die Form

$$G_i' : \ x_1 = F_i \,,$$

wobei in F_i die Variable x_1 nicht vorkommt. Das Gleichungssystem bestehend aus

$$G_1', F_1 = F_2, F_1 = F_3, \ldots, F_1 = F_k, G_{k+1}, \ldots, G_m$$

ist zum gegebenen System äquivalent. Mit diesem System ohne G_1' fährt man fort.

Bemerkung 32.9. Die in Satz 32.5, Bemerkung 32.7 und Bemerkung 32.8 beschriebenen Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems unterscheiden sich hinsichtlich Schnelligkeit, strategischer Konzeption, Systematik, Fehleranfälligkeit. Beim Eliminationsverfahren tritt die systematische Reduzierung der Variablenanzahl (Dimensionsreduktion) besonders deutlich hervor und man kann mit ihm eigentlich keine Fehler (außer Rechenfehler) machen und weiß immer, wie es weiter geht. Allerdings treten diese Vorteile erst ab zumindest drei Variablen hervor. Bei zwei Variablen ist es nahezu egal, welchen Weg man wählt. Die Bewertung der Verfahren hängt auch wesentlich von konkreten Besonderheiten des vorliegenden Systems ab. Solche Besonderheiten muss man berücksichtigen, um „Abkürzungen“ auf dem Weg zur Lösung zu sehen. Die bewusste Wahl eines für das konkrete Problem angemessenen Lösungsweges nennt man *Adaptivität* (ein Begriff, der im didaktischen Kontext mit unterschiedlichen Bedeutungen verwendet wird). Wenn beispielsweise eine Zeile des Systems die Form $x = 3$ besitzt, so sollte man erkennen, dass daraus unmittelbar ein Teil der Lösung ablesbar ist, und nicht zu dieser Zeile andere Zeilen hinzuaddieren und dadurch viele Variablen reinkriegen. Hier sollte man stattdessen in den anderen Zeilen das x durch die 3 ersetzen und dann weiter machen. Oder: Wenn es vier Gleichungen gibt, wobei in zwei Gleichungen nur die Variablen x und y und in den beiden anderen Gleichungen nur die Variablen z und w vorkommen, so sollte man erkennen, dass im Prinzip zwei entkoppelte lineare Systeme mit je zwei Variablen vorliegen und diese getrennt lösen. Oder: Es kann sein, dass ein kleines Teilsystem des Gleichungssystems bereits sicherstellt, dass es gar keine Lösung gibt. Dann muss man nur dies herausarbeiten und die anderen Gleichungen gar nicht berücksichtigen. Und: die genaue Fragestellung beachten! Wenn gefragt ist, ob ein bestimmtes Tupel eine Lösung ist, so muss man das Tupel nur in die Gleichungen einsetzen, Manipulationen an den Gleichungen sind nicht nötig.

Bemerkung 32.10. Unter einem *linearen Ungleichungssystem* über den rationalen Zahlen oder den reellen Zahlen versteht man ein System der Form

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \star & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \star & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \star & c_m \, , \end{array}$$

wobei $\star$ gleich $\leq$ oder $\geq$ ist. Die Lösungsmenge ist deutlich schwieriger zu beschreiben als im Gleichungsfall. Eine Eliminierung von Variablen ist im Allgemeinen nicht möglich.

Lineare Gleichungssysteme in Dreiecksgestalt

Satz 32.11. *Es sei ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über einem Körper K in Dreiecksgestalt*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \ldots & +a_{1m}x_m & \ldots & +a_{1n}x_n & = & c_1 \\ 0 & a_{22}x_2 & \ldots & \ldots & \ldots & +a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{mm}x_m & \ldots & +a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

mit $m \leq n$ gegeben, wobei vorne die Diagonalelemente alle ungleich 0 seien. Dann stehen die Lösungen $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ in Bijektion zu den Tupeln $(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in K^{n-m}$. D.h. die hinteren $n-m$ Einträge sind frei wählbar und legen eine eindeutige Lösung fest, und jede Lösung wird dabei erfasst.

Beweis. Dies ist klar, da bei gegebenem $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ die Zeilen von unten nach oben sukzessive die anderen Variablen eindeutig festlegen. $\square$

Bei $m = n$ gibt es keine freien Variablen und es ist $K^0 = 0$ und das Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung. Ein beliebiges lineares Gleichungssystem formt man mit Hilfe des Eliminationslemmas in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem in Stufengestalt um. Dann stellt man fest, dass es entweder keine Lösung besitzt oder aber man kann aus der Stufengestalt eine Beschreibung der Lösungsmenge erhalten.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9