Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 23

> Aufklärung ist der Ausgang des Menschen aus seiner selbst verschuldeten Unmündigkeit. Unmündigkeit ist das Unvermögen, sich seines Verstandes ohne Leitung eines anderen zu bedienen. Selbstverschuldet ist diese Unmündigkeit, wenn die Ursache derselben nicht am Mangel des Verstandes, sondern der Entschließung und des Mutes liegt, sich seiner ohne Leitung eines anderen zu bedienen. 'Sapere aude! Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!' ist also der Wahlspruch der Aufklärung.
>
> Immanuel Kant

Das charakteristische Polynom

Wir möchten zu einem Endomorphismus $\varphi\colon V \to V$ die Eigenwerte und dann auch die Eigenräume bestimmen. Dazu ist das charakteristische Polynom entscheidend.

Definition 23.1. Zu einer $n \times n$-Matrix M mit Einträgen in einem Körper K heißt das Polynom

$$\chi_M := \det \left(X \cdot E_n - M \right)$$

das *charakteristische Polynom*[1] von M.

Für

$$M = (a_{ij})_{ij}$$

[1]Manche Autoren definieren das charakteristische Polynom als Determinante von $M - X \cdot E_n$ anstatt von $X \cdot E_n - M$. Dies ändert aber - und zwar nur bei n ungerade - nur das Vorzeichen.

bedeutet dies

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & X - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

In dieser Definition nehmen wir Bezug auf die Determinante von Matrizen, die wir nur für Matrizen mit Einträgen in einem Körper definiert haben. Die Einträge sind jetzt aber Elemente im Polynomring $K[X]$. Da wir sie aber als Elemente in $K(X)$ auffassen können,[2] ist dies eine sinnvolle Definition. Gemäß der Definition ist diese Determinante ein Element in $K(X)$, da aber alle Einträge der Matrix Polynome sind und bei der rekursiven Definition der Determinante nur multipliziert und addiert wird, ist das charakteristische Polynom wirklich ein Polynom. Der Grad des charakteristischen Polynoms ist n und der Leitkoeffizient ist 1, d.h. die Gestalt ist

$$\chi_M = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1 X + c_0.$$

Es gilt die wichtige Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M)$$

für jedes $\lambda \in K$, siehe Aufgabe 23.4.

Für eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

auf einem endlichdimensionalen Vektorraum definiert man das *charakteristische Polynom*

$$\chi_\varphi := \chi_M\,,$$

wobei M eine beschreibende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis sei. Der Determinantenmultiplikationssatz zeigt, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Basis ist. Das charakteristische Polynom der Identität auf einem n-dimensionalen Vektorraum ist

$$\chi_{\mathrm{Id}} = X^n - nX^{n-1} + \binom{n}{2}X^{n-2} - \binom{n}{3}X^{n-3} + \cdots \pm \binom{n}{2}X^2 \mp nX \pm 1.$$

Satz 23.2. *Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_φ ist.

[2] $K(X)$ heißt der Körper der rationalen Polynome; er besteht aus allen Brüchen P/Q zu Polynomen $P, Q \in K[X]$ mit $Q \neq 0$. Bei $K = \mathbb{R}$ kann man diesen Körper mit der Menge der rationalen Funktionen identifizieren.

Beweis. Es sei M eine beschreibende Matrix für φ, und sei $\lambda \in K$ vorgegeben. Es ist

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M) = 0$$

genau dann, wenn die lineare Abbildung

$$\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi$$

nicht bijektiv (und nicht injektiv) ist (wegen Satz 16.11 und Lemma 12.4). Dies ist nach Lemma 11.3 äquivalent zu

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \operatorname{kern}(\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi) \neq 0,$$

was bedeutet, dass der Eigenraum zu λ nicht der Nullraum ist, also λ ein Eigenwert zu φ ist. □

Beispiel 23.3. Wir betrachten die reelle Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det(xE_2 - M) \\ &= \det\left(x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} x & -5 \\ -1 & x \end{pmatrix} \\ &= x^2 - 5. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $x = \pm\sqrt{5}$ (diese Eigenwerte haben wir auch in Beispiel 21.6 ohne charakteristisches Polynom gefunden).

Beispiel 23.4. Zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom gleich

$$\chi_M = \det\begin{pmatrix} X-2 & -5 \\ 3 & X-4 \end{pmatrix} = (X-2)(X-4) + 15 = X^2 - 6X + 23.$$

Die Nullstellenbestimmung dieses Polynoms führt zur Bedingung

$$(X-3)^2 = -23 + 9 = -14,$$

die über $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar ist, so dass die Matrix über $\mathbb{R}$ keine Eigenwerte besitzt. Über $\mathbb{C}$ hingegegen gibt es die beiden Eigenwerte $3 + \sqrt{14}i$ und $3 - \sqrt{14}i$. Für den Eigenraum zu $3 + \sqrt{14}i$ muss man

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}_{3+\sqrt{14}i}(M) &= \operatorname{kern}\left(\left(3 + \sqrt{14}i\right)E_2 - M\right) \\ &= \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{14}i & -5 \\ 3 & -1 + \sqrt{14}i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bestimmen, ein Basisvektor (also ein Eigenvektor) davon ist $\begin{pmatrix} 5 \\ 1+\sqrt{14}i \end{pmatrix}$. Analog ist

$$\operatorname{Eig}_{3-\sqrt{14}i}(M) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{14}i & -5 \\ 3 & -1-\sqrt{14}i \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1-\sqrt{14}i \end{pmatrix} \rangle .$$

Beispiel 23.5. Für eine obere Dreiecksmatrix

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom nach Lemma 16.4 gleich

$$\chi_M = (X-d_1)(X-d_2)\cdots(X-d_n).$$

In diesem Fall liegt das charakteristische Polynom direkt in der Zerlegung in lineare Faktoren vor, so dass unmittelbar seine Nullstellen und damit die Eigenwerte von M ablesbar sind, nämlich die Diagonalelemente $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (die nicht alle verschieden sein müssen).

Invariante Untervektorräume

Definition 23.6. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Untervektorraum $U \subseteq V$ *φ-invariant*, wenn

$$\varphi(U) \subseteq U$$

gilt.

Lemma 23.7. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei

$$V = U \oplus W$$

eine direkte Summenzerlegung in φ-invariante Unterräume. Dann gilt für das charakteristische Polynom die Beziehung

$$\chi_\varphi = \chi_{\varphi|_U} \cdot \chi_{\varphi|_W} .$$

Beweis. Es sei $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von U und $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W, die zusammen eine Basis von V ergeben. Bezüglich dieser Basis wird φ insgesamt durch die Blockmatrix $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ beschrieben, wobei A die Einschränkung $\varphi|_U$ und B die Einschränkung $\varphi|_W$ beschreibt. Dann ist

$$\chi_\varphi = \chi_M = \det\,(t\,\mathrm{Id} - M) = \det\,(t\,\mathrm{Id} - A)\det\,(t\,\mathrm{Id} - B) = \chi_{\varphi|_U} \cdot \chi_{\varphi|_W} .$$

□

Algebraische Vielfachheiten

Für eine genauere Untersuchung der Eigenräume ist die folgende Begrifflichkeit sinnvoll.

Definition 23.8. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und $\lambda \in K$. Man nennt dann den Exponenten des linearen Polynoms $X - \lambda$ im charakteristischen Polynom χ_φ die *algebraische Vielfachheit* von λ. Sie wird mit

$$\mu_\lambda = \mu_\lambda(\varphi)$$

bezeichnet.

Wie neulich eingeführt, nennt man

$$\dim\,(\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi))$$

die geometrische Vielfachheit von λ. Der weiter oben stehende Satz besagt also, dass die eine Vielfachheit genau dann positiv ist, wenn dies für die andere gilt.

Im Allgemeinen können die beiden Vielfachheiten aber verschieden sein, wobei eine Abschätzung immer gilt.

Lemma 23.9. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Dann besteht zwischen der geometrischen und der algebraischen Vielfachheit die Beziehung

$$\dim\,(\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)) \leq \mu_\lambda(\varphi) .$$

Beweis. Sei $m = \dim\,(\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi))$ und sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von diesem Eigenraum, die wir durch $w_1, \ldots, w_{n-m}$ zu einer Basis von V ergänzen. Bezüglich dieser Basis hat die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix} .$$

Das charakteristische Polynom ist daher $(X-\lambda)^m \cdot \chi_C$, so dass die algebraische Vielfachheit mindestens m ist. $\square$

Beispiel 23.10. Wir betrachten 2×2-*Scherungsmatrizen*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in K$. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_M = (X-1)(X-1),$$

so dass 1 der einzige Eigenwert von M ist. Den Eigenraum berechnet man als

$$\operatorname{Eig}_1(M) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -as \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor ist, und dass bei $a \neq 0$ der Eigenraum eindimensional ist (bei $a = 0$ liegt die Identität vor und der Eigenraum ist zweidimensional). Bei $a \neq 0$ ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 gleich 2, die geometrische Vielfachheit gleich 1.

Vielfachheiten und diagonalisierbare Abbildungen

Satz 23.11. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom χ_φ in Linearfaktoren zerfällt und wenn für jede Nullstelle λ mit der algebraischen Vielfachheit μ_λ die Gleichheit

$$\mu_\lambda = \dim \left(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)\right)$$

gilt.

Beweis. Wenn φ diagonalisierbar ist, so kann man sofort annehmen, dass φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird. Die Diagonaleinträge dieser Matrix sind die Eigenwerte, und diese wiederholen sich gemäß ihrer geometrischen Vielfachheit. Das charakteristische Polynom lässt sich auch direkt aus dieser Diagonalmatrix ablesen, jeder Diagonaleintrag λ trägt als Linearfaktor $X - \lambda$ bei.

Für die Umkehrung seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte und

$$\mu_i := \mu_{\lambda_i}(\varphi) = \dim \left(\operatorname{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)\right)$$

seien die (geometrischen und algebraischen) Vielfachheiten. Da nach Voraussetzung das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, muss die Summe dieser Zahlen gleich $n = \dim(V)$ sein. Nach Lemma 22.6 ist die Summe der Eigenräume

$$\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}_{\lambda_k}(\varphi) \subseteq V$$

direkt. Nach Voraussetzung ist die Dimension links ebenfalls gleich n, so dass Gleichheit vorliegt. Nach Lemma 22.11 ist φ diagonalisierbar. $\square$