

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 14

Übungsaufgaben

AUFGABE 14.1. Skizziere das Steigungsdreieck und die Sekante zur Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

in den Punkten 1 und 3

AUFGABE 14.2.*

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

AUFGABE 14.3. Zeige, dass die reelle Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|,$$

im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

AUFGABE 14.4. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade Funktion, die im Punkt x differenzierbar sei. Zeige, dass f auch im Punkt $-x$ differenzierbar ist und dass die Beziehung

$$f'(-x) = -f'(x)$$

gilt.

Die folgende Aufgabe löse man sowohl direkt als auch mittels der Ableitungsregeln.

AUFGABE 14.5. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^n,$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

AUFGABE 14.6. Zeige, dass ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$ genau dann einen Grad $\leq d$ besitzt (oder $P = 0$ ist), wenn die $(d + 1)$ -te Ableitung von P das Nullpolynom ist.

AUFGABE 14.7. Bestimme zu einem Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

die lineare Approximation (einschließlich der Restfunktion $r(x)$) im Nullpunkt.

AUFGABE 14.8. Zeige über eine Betrachtung von Funktionslimiten, dass eine in einem Punkt $a \in D$ differenzierbare Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ in diesem Punkt insbesondere stetig ist.

AUFGABE 14.9.*

Beweise die Produktregel für differenzierbare Funktionen über die Funktionslimiten für die Differenzenquotienten.

AUFGABE 14.10. Zeige, dass die Exponentialfunktion $\exp x$ in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

Man verwende die Definition über den Funktionslimes der Differenzenquotienten. Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion hilft.

AUFGABE 14.11. Bestimme zur Exponentialfunktion $\exp x$ die lineare Approximation (einschließlich der Restfunktion $r(x)$) im Nullpunkt.

AUFGABE 14.12. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^n$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

AUFGABE 14.13. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3}.$$

AUFGABE 14.14. Zeige, dass die Ableitung einer rationalen Funktion wieder eine rationale Funktion ist.

AUFGABE 14.15.*

Es seien

$$g_1, g_2, \dots, g_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

differenzierbare Funktionen. Beweise durch Induktion über n die Beziehung

$$\left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \right)' = \frac{-1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \frac{g_n'}{g_n} \right).$$

AUFGABE 14.16. Es sei $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ und $g(y) = y^2 - y + 2$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

AUFGABE 14.17.*

Es seien

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x)).$$

- a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.
 b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2.$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

AUFGABE 14.18. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^{\frac{1}{n}},$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_+$.

AUFGABE 14.19.*

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine bijektive differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der Umkehrfunktion f^{-1} . Was ist an folgendem „Beweis“ für die Ableitung der Umkehrfunktion nicht korrekt?

Es ist

$$(f \circ f^{-1})(y) = y.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir durch beidseitiges Ableiten die Gleichung

$$(f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1.$$

Also ist

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f'(f^{-1}(y)))}.$$

AUFGABE 14.20.*

Man gebe ein Beispiel einer stetigen, nicht differenzierbaren Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass die Funktion $x \mapsto f(|x|)$ differenzierbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 14.21. (2 Punkte)

Bestimme die affin-lineare Abbildung

$$\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Graph durch die beiden Punkte $(-2, 3)$ und $(5, -7)$ verläuft.

AUFGABE 14.22. (2 Punkte)

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Ableitung f' gerade ist.

AUFGABE 14.23. (3 Punkte)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und seien

$$f_i: D \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n,$$

differenzierbare Funktionen. Beweise die Formel

$$\left(\prod_{i=1}^n f_i \right)' = \sum_{i=1}^n f_i' \cdot \prod_{j=1, j \neq i}^n f_j.$$

AUFGABE 14.24. (4 Punkte)

Bestimme die Tangenten an den Graphen zur Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, die parallel zu $y = x$ sind.

AUFGABE 14.25. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x + 2},$$

wobei D die Menge sei, auf der das Nennerpolynom nicht verschwindet.

AUFGABE 14.26. (4 Punkte)

Es sei $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x+1}$ und $g(y) = \frac{y-2}{y^2+3}$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Die Aufgabe zum Aufgeben

Lösungen zu der folgenden Aufgabe bis 16. Januar (unabhängig von Deckelregel).

AUFGABE 14.27. Zeige, dass es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine streng wachsende stetige Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass x die einzige Nullstelle von f ist und dass für jede rationale Zahl q auch $f(q)$ rational ist.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5