Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 2

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 2.1. Wie viele ganzzahlige Geldbeträge zwischen 1 und 100 Euro kann man mit maximal zwei Euromünzen bzw. Scheinen (ohne Rückgeld) begleichen.

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.2. Sie wollen im Unterricht in der Grundschule vermitteln, dass man nicht durch 0 teilen darf. Wie argumentieren Sie, wenn folgende Erfolgsquoten feststehen.

(1) Mit einem stichhaltigen mathematischen Argument bewirkt man, dass 80 Prozent der Schüler und Schülerinnen nicht durch 0 teilen.
(2) Mit dem Argument, dass die 0 ganz ganz traurig wird, wenn durch sie geteilt wird, bewirkt man, dass 90 Prozent der Schüler und Schülerinnen nicht durch 0 teilen.
(3) Mit dem Argument, dass die Schüler Gummibärchen bekommen, wenn sie nicht durch 0 teilen, bewirkt man, dass 100 Prozent der Schüler und Schülerinnen nicht durch 0 teilen.

Aufgabe 2.3. Aus der Schule ist bekannt, dass man nicht durch 0 dividieren darf. Warum eigentlich nicht?

Aufgabe 2.4. Gabi Hochster hat Mathematikunterricht (vierte Klasse), der von Frau Doris Maier-Sengupta (mit den Fächern Deutsch und buddhistische Philosophie) gehalten wird. Gummibärchen hin oder her, Gabi Hochster möchte sich nicht damit abfinden, dass man anscheinend nicht durch 0 teilen darf. Die Zahlen $1/0, 2/0$ u.s.w. würde es geben, ihr Gehalt sei nur etwas mysteriös, und sie möchte sich damit weiter beschäftigen. Man könne für diese Zahlen die Bruchrechenregeln nicht naiv anwenden, beispielsweise gelte nicht die Kürzungsregel

$$\frac{1}{0} \cdot 0 = 1.$$

Ansonsten könne man aber mit diesen neuen Zahlen ziemlich gut rechnen, es gelten die Kommutativgesetze, die Assoziativgesetze und das Distributivgesetz, und es gelte nach wie vor $0 \cdot a = 0$. für alle Zahlen a, auch für die neuen.

(1) Frau Maier-Sengupta weiß nicht so recht, wie sie darauf reagieren soll und wendet sich an Sie, da Sie die Fachleiter/In Mathematik an der Schule sind. Wie beurteilen Sie die Situation? Hat Gabi recht? Was ist Ihr Rat an die Kollegin?

(2) Gabi hat mittlerweile Spaß an ihren neuen Zahlen gefunden und bringt die ganze Klasse durcheinander, weil sie ständig sagt „man darf doch durch 0 teilen“. Frau Maier-Sengupta befürchtet, dass dies die anderen Schüler zu Fehlschlüssen verleitet und ermahnt Gabi, nicht mehr davon zu sprechen, das sei halt so, dass man nicht durch 0 teilen darf. Daraufhin sagt Gabi: „Frau Maier-Sengupta versteht gar nix von Mathe, noch nicht einmal, dass man durch 0 teilen darf“. Dies vermerkt Frau Maier-Sengupta im Klassenbuch als eine Beleidigung. Wie hätten Sie reagiert?

(3) Da es der dritte Vermerk war, kommt es zu einem Elterngespräch, zu dem neben Frau Maier-Sengupta, den Eltern, Melissa und Melvin Hochster, der Schulleitung auch Sie als Fachleiter/In teilnehmen sollen. Die Eltern beschweren sich, dass Frau Maier-Sengupta die kreativen Ansätze ihrer Tochter nicht positiv aufnehmen würde, sondern abblocke. Sie befürchten, dass ihre Tochter in der Schule geistig verarme. Was ist Ihre Position?

Gabi Hochster

Aufgabe 2.5. Ein Schwabe hält den Vorkurs. Ein Schwabe hält die Vorlesungen zum Grundkurs. Ein Schwabe hält die Übungen zum Grundkurs. Was bedeutet dies für die Tutorien des Grundkurses?

Aufgabe 2.6. Berechne den Geldbetrag, wenn man von jeder Cent-Münze und von jeder Euro-Münze genau ein Exemplar besitzt.

Aufgabe 2.7. Es sei vorausgesetzt, dass man einen konkreten Eurobetrag w mit k Eurozahlen begleichen kann. Zeige, dass man dann den Eurobetrag $w+1$ mit $k+1$ Eurozahlen begleichen kann.

Aufgabe 2.8. Wie viele volle Geldbeträge zwischen 1 und 100 Euro kann man mit genau $1, 2, 3, 4, 5, 6$ Euromünzen bzw. Scheinen (ohne Rückgeld) begleichen. Was ergibt die Summe dieser Zahlen?

Aufgabe 2.9. Wie viele volle Geldbeträge zwischen 1 und 100 Euro kann man mit genau $1, 2, 3, 4, 5, 6$ Euromünzen bzw. Scheinen (ohne Rückgeld) minimal begleichen.

Aufgabe 2.10. Wie kann man das Dezimalsystem für natürliche Zahlen mit einem Bargeldsystem wie in Satz 2.1 in Verbindung bringen? Wie beweist man in diesem Fall die Eindeutigkeit der Darstellung? Wäre das Dezimalsystem für den Geldverkehr sinnvoll?

Aufgabe 2.11. An welcher Stelle bricht der Eindeutigkeitsbeweis zu Satz 2.1 zusammen, wenn man mit den Zahlen $1, 3, 5, 10$, u.s.w. statt mit den Eurozahlen rechnet.

Aufgabe 2.12. Auf Ruggetong gibt es nur zwei Münzen. Es kann jeder volle Geldbetrag damit bezahlt werden. Zeige, dass dann die minimale Darstellung eines jedes Geldbetrages eindeutig ist. Wie kann man sie berechnen?

Aufgabe 2.13. Auf Riggatong gibt es k Münzen mit den Werten $1, 2, 3, \ldots,$ $k-1, k$. Ist die minimale Darstellung eines jedes Geldbetrages eindeutig? Ist die Darstellung, die so viele k-Münzen wie möglich verwendet und den Rest mit einer der anderen Münzen auffüllt, minimal?

Aufgabe 2.14. Ein Geldfälscher stellt 3- und 7-Euro-Scheine her.

(1) Zeige, dass es nur endlich viele Beträge gibt, die er nicht (exakt) begleichen kann. Was ist der höchste Betrag, den er nicht begleichen kann?
(2) Was ist der kleinste Betrag, den er auf zwei verschiedene Weisen begleichen kann?
(3) Beschreibe die Menge M der vollen Eurobeträge, die er mit seinen Scheinen begleichen kann.

Aufgabe 2.15. Wir erlauben, dass Geldbeträge auch mit Hilfe von Rückgeld (mit den üblichen Eurozahlen) beglichen werden. Eine Darstellung eines Betrages heißt minimal, wenn die Gesamtzahl der bewegten Münzen bzw. Scheine minimal ist.

(1) Für welche Geldbeträge $w \leq 20$ verringert sich die minimale Anzahl an Bargeldmitteln, die bewegt werden müssen.
(2) Für welche Geldbeträge $w \leq 20$ ist die minimale Darstellung eindeutig?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.16. (4 Punkte)

Auf wie viele Arten kann man mit den üblichen Münzen einen Betrag von 50 Cent begleichen?

Aufgabe 2.17. (2 Punkte)

Ein Land besitze Münzen im Nennwert von $1, 4, 5$ und 6 Talern. Zeige, dass es nicht unbedingt zu einer minimalen Anzahl von Münzen führt, wenn man einen Betrag sukzessive mit der größtmöglichen Münze begleicht.

Aufgabe 2.18. (3 Punkte)

Zu den Eurozahlen soll eine zusätzliche Münze mit dem ganzzahligen Wert $k < 10$ eingeführt werden. Für welche k ist die minimale Darstellung aller Geldbeträge eindeutig, für welche nicht?

Aufgabe 2.19. (4 (2+2) Punkte)

Auf den quadratischen Inseln, die wegen der annähernd quadratischen Gestalt der Inseln so heißen, sind die Nennwerte der Münzen und Geldscheine die Quadratzahlen $1, 4, 9, 16, \ldots$.

(1) Bestimme für $w \leq 20$ die minimale(n) Darstellung(en) von w.
(2) Ist die minimale Darstellung für alle (!) w eindeutig?

Aufgabe 2.20. (6 (2+2+2) Punkte)

Ein Geldfälscher stellt 4-, 9- und 11-Euro-Scheine her.

(1) Zeige, dass es nur endlich viele Beträge gibt, die er nicht (exakt) begleichen kann. Was ist der höchste Betrag, den er nicht begleichen kann?
(2) Was ist der kleinste Betrag, den er auf zwei verschiedene Weisen begleichen kann?
(3) Beschreibe explizit die Menge M der vollen Eurobeträge, die er mit seinen Scheinen begleichen kann.

Abbildungsverzeichnis