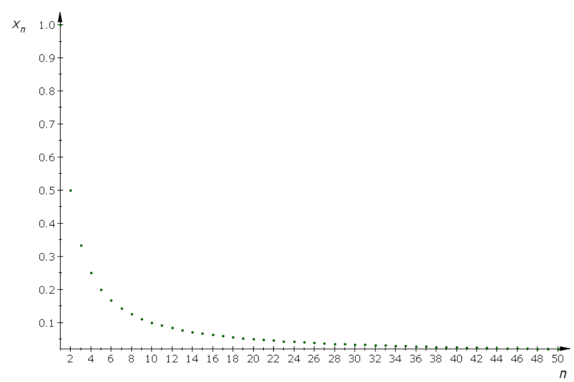
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Vorlesung 44

Beispiele für Folgen

Definition 44.1. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.



Beispiel 44.2. Eine *konstante Folge* $x_n = c$ ist stets konvergent mit dem Grenzwert c. Dies folgt direkt daraus, dass man für jedes $\epsilon > 0$ als Aufwandszahl $n_0 = 0$ nehmen kann. Es ist ja

$$|x_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \epsilon$$

für alle n.

Es sei nun K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann ist die Folge

$$x_n = \frac{1}{n}$$

konvergent mit dem Grenzwert 0. Es sei dazu ein beliebiges $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, vorgegeben. Aufgrund des Archimedes Axioms (siehe Lemma 25.8) gibt es ein n_0 mit

$$\frac{1}{n_0} \leq \epsilon.$$

Damit gilt für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$x_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon.$$

Beispiel 44.3. Wir betrachten die Folge mit den Folgengliedern

$$x_n = \frac{7n}{2^n}$$

in $\mathbb{Q}$. Die Anfangsglieder sind

$$0, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{21}{8}, \frac{7}{4}, \frac{35}{32}, \frac{21}{32}, \frac{49}{128}, \ldots .$$

In der Tat ist dies eine Nullfolge. Zu einem vorgegebenen $\epsilon > 0$ gibt es nämlich nach Satz 27.12 ein m derart, dass

$$2^n \geq n^2$$

für $n \geq m$ gilt. Für diese n ist somit

$$\frac{7n}{2^n} \leq \frac{7n}{n^2} = \frac{7}{n}.$$

Wenn zusätzlich noch $n \geq \frac{7}{\epsilon}$, so ist dies kleinergleich ϵ.

Bemerkung 44.4. Eine Dezimalbruchfolge in einem angeordneten Körper ist eine Folge der Form

$$x_n = \frac{a_n}{10^n} = \sum_{i=0}^{n} z_{-i} 10^{-i} = z_0, z_{-1} z_{-2} z_{-3} \ldots z_{-n}$$

mit $a_n \in \mathbb{Z}$ (bzw. mit Ziffern $z_{-i} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$) und mit

$$\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Eine solche Folge, also eine „Kommazahl“, muss im Allgemeinen nicht konvergieren. Wenn wir mit zwei positiven rationalen Zahlen a, b starten und den Divisionsalgorithmus $a : b$ durchführen, um die Ziffern z_{-i} zu erhalten, so konvergiert nach Korollar 28.11 die zugehörige Dezimalbruchfolge

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} z_{-i} 10^{-i}$$

gegen die rationale Zahl $\frac{a}{b}$.

Lemma 44.5. *Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K. Dann besitzt x_n maximal einen Grenzwert.*

Beweis. Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte x, y, $x \neq y$, gibt. Dann ist $d := |x - y| > 0$. Wir betrachten $\epsilon := d/3 > 0$. Wegen der Konvergenz gegen x gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

und wegen der Konvergenz gegen y gibt es ein n_0' mit

$$|x_n - y| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0' .$$

Beide Bedingungen gelten dann gleichermaßen für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$. Es sei n mindestens so groß wie dieses Maximum. Dann ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d = |x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq \epsilon + \epsilon = 2d/3.$$

$\square$

Definition 44.6. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K. Die Folge x_n heißt *beschränkt*, wenn es ein Element $B \in K$ mit

$$|x_n| \leq B \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gibt.

Rechenregeln für Folgen

Lemma 44.7. *Es sei K ein angeordneter Körper. Wenn eine Folge in K konvergent ist, so ist sie auch beschränkt.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit dem Limes $x \in K$ und es sei ein $\epsilon > 0$ gewählt. Aufgrund der Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 .$$

Dann ist insbesondere

$$|x_n| \leq |x| + |x - x_n| \leq |x| + \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 .$$

Unterhalb von n_0 gibt es nur endlich viele Zahlen, so dass das Maximum

$$B := \max_{n < n_0}\{|x_n| , |x| + \epsilon\}$$

wohldefiniert ist. Daher ist B eine obere Schranke und $-B$ eine untere Schranke für $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Beispiel 44.8. Es sei K ein angeordneter Körper. Dann ist die *alternierende Folge*

$$x_n = (-1)^n$$

beschränkt, aber nicht konvergent. Die Beschränktheit ist klar, da ja nur die beiden Werte 1 und -1 vorkommen. Konvergenz liegt aber nicht vor. Nehmen wir an, dass $x \geq 0$ der Grenzwert sei. Dann gilt für positives $\epsilon < 1$ und jedes ungerade n die Beziehung

$$|x_n - x| = 1 + x \geq 1 > \epsilon,$$

so dass es Folgenwerte außerhalb dieser ϵ-Umgebung gibt. Analog kann man einen negativ angenommen Grenzwert zum Widerspruch führen.

Lemma 44.9. *Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in K. Dann ist auch das Produkt der beiden Folgen eine Nullfolge.*

Beweis. Es sei $B > 0$ eine Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es zu $\frac{\epsilon}{B}$ ein n_0 derart, dass für $n \geq n_0$ die Abschätzung $|x_n| \leq \frac{\epsilon}{B}$ gilt. Für diese Indizes ist dann auch

$$|x_n y_n| \leq |x_n| \cdot |y_n| \leq \frac{\epsilon}{B} \cdot B = \epsilon.$$

□

Wie bei einer Dezimalbruchfolge, die man ja (mit den Ziffern z_{-i}) als

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} z_{-i} 10^{-i}$$

schreiben kann, wird eine Folge oft als eine Summe in der Form

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

gegeben. Die Folgenglieder sind also die Teilsummen, die sich aus den einzelnen Summanden ergeben. Solche Folgen nennt man auch *Reihen* und die u_i nennt man die Reihenglieder. Wir betonen, dass sich alle Folgeneigenschaften auf die Folgenglieder beziehen. Man schreibt für solche Reihen auch kurz $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Nikolaus von Oresme (1330-1382) bewies, dass die harmonische Reihe divergiert.

Die sogenannte *harmonische Reihe* ist nicht beschränkt und konvergiert nicht.

Beispiel 44.10. Die *harmonische Reihe* ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Es geht also um die „unendliche Summe“ der Stammbrüche

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots .$$

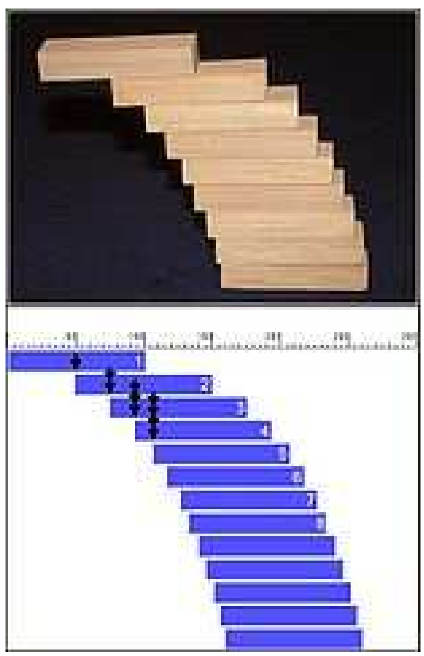
Diese Reihe divergiert: Für die 2^n Zahlen $k = 2^n+1, \ldots, 2^{n+1}$ ist

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \right) \geq 1 + (n+1)\frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und kann nach Lemma 44.7 nicht konvergent sein.



Aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgt, dass man einen beliebig weiten Überhang mit gleichförmigen Bauklötzen bauen kann.

Lemma 44.11. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Folge $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n \to \infty} x_n \right) + \left(\lim_{n \to \infty} y_n \right).$$

(2) *Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n \to \infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n \to \infty} x_n \right) \cdot \left(\lim_{n \to \infty} y_n \right).$$

(3) *Für $c \in K$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big).$$

(4) *Es sei* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ *und* $x_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}.$$

(5) *Es sei* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ *und* $x_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x}.$$

Beweis. (2). Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Lemma 44.7 insbesondere beschränkt und daher existiert ein $D > 0$ mit $|x_n| \leq D$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Wir setzen $C := \max\{D, |y|\}$. Aufgrund der Konvergenz gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_1 \text{ und } |y_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_2\,.$$

Diese Abschätzungen gelten dann auch für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$. Für diese Zahlen gilt daher

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n|\,|y_n - y| + |y|\,|x_n - x| \\ &\leq C\frac{\epsilon}{2C} + C\frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

(4). Da der Limes der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht 0 ist, gilt für $n \geq N_1$ die Bedingung $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$ und damit

$$\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}.$$

Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon\,|x|^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_2\,.$$

Dann gilt für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x_n - x}{x x_n}\right| = \frac{1}{|x|\,|x_n|}\,|x_n - x| \leq \frac{2}{|x|^2} \cdot \frac{\epsilon\,|x|^2}{2} = \epsilon.$$

$\square$

Die im vorstehenden Satz auftretenden Folgen nennt man die Summenfolge, die Produktfolge bzw. die Quotientenfolge. Sie sind jeweils gliedweise definiert.

Beispiel 44.12. Es sei $r \leq s$. Bei einer Folge der Form

$$x_n = \frac{a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_s n^s + b_{s-1} n^{s-1} + \cdots + b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$$

mit a_i, b_j in einem archimedisch angeordneten Körper und $a_r, b_s \neq 0$ kann man durch einen einfachen Standardtrick den Grenzwert bestimmen. Man multipliziert Zähler und Nenner mit n^{-s} und erhält somit die auf den ersten Blick kompliziertere Darstellung

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\frac{a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{n^s}}{\frac{b_s n^s + b_{s-1} n^{s-1} + \cdots + b_2 n^2 + b_1 n + b_0}{n^s}} \\ &= \frac{\frac{a_r n^r}{n^s} + \frac{a_{r-1} n^{r-1}}{n^s} + \cdots + \frac{a_2 n^2}{n^s} + \frac{a_1 n}{n^s} + \frac{a_0}{n^s}}{\frac{b_s n^s}{n^s} + \frac{b_{s-1} n^{s-1}}{n^s} + \cdots + \frac{b_2 n^2}{n^s} + \frac{b_1 n}{n^s} + \frac{b_0}{n^s}} \\ &= \frac{\frac{a_r}{n^{s-r}} + \frac{a_{r-1}}{n^{s-r-1}} + \cdots + \frac{a_2}{n^{s-2}} + \frac{a_1}{n^{s-1}} + \frac{a_0}{n^s}}{b_s + \frac{b_{s-1}}{n} + \cdots + \frac{b_2}{n^{s-2}} + \frac{b_1}{n^{s-1}} + \frac{b_0}{n^s}} . \end{aligned}$$

Nach Lemma 44.11 (1) konvergiert der Nenner gegen b_s. da die Summanden bis auf den ersten Summanden Nullfolgen sind. Der Zähler konvergiert bei $s > r$ gegen 0 und bei $s = r$ gegen a_r. Im ersten Fall liegt insgesamt eine Nullfolge vor, im zweiten Fall konvergiert die Folge geben $\frac{a_r}{b_r}$.

Beispiel 44.13. Zu jedem Element $x \in K$ in einem archimedisch angeordneten Körper K gibt es nach Korollar 28.10 eine eindeutig bestimmte Dezimalbruchfolge, die gegen x konvergiert. Zu zwei Elementen x und y muss dabei die Dezimalbruchfolge der Summe $x + y$ nicht die (gliedweise genommene) Summe der einzelnen Dezimalbruchfolgen sein. Beispielsweise ist die Dezimalbruchfolge zur rationalen Zahl $\frac{7}{9}$ gleich

$$\frac{7}{10}, \frac{77}{100}, \frac{777}{1000}, \frac{7777}{10000}, \frac{77777}{100000}, \ldots$$

und die Dezimalbruchfolge zur rationalen Zahl $\frac{8}{9}$ gleich

$$\frac{8}{10}, \frac{88}{100}, \frac{888}{1000}, \frac{8888}{10000}, \frac{88888}{100000}, \ldots .$$

Die Summe dieser beiden Folgen ist

$$\frac{15}{10}, \frac{165}{100}, \frac{1665}{1000}, \frac{16665}{10000}, \frac{166665}{100000}, \ldots .$$

Dagegen besitzt

$$\frac{7}{9} + \frac{8}{9} = \frac{15}{9}$$

die Dezimalbruchfolge

$$\frac{16}{10}, \frac{166}{100}, \frac{1666}{1000}, \frac{16666}{10000}, \frac{1666666}{100000}, \ldots .$$

Die oben angegebene Summenfolge konvergiert zwar gegen $\frac{15}{9}$, sie ist aber keine Dezimalbruchfolge.

Lemma 44.14. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\lim_{n \to \infty} x_n \geq \lim_{n \to \infty} y_n .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 44.17. □

Die folgende Aussage heißt *Quetschkriterium*.

Lemma 44.15. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien*

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}},\ (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ und } (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

drei Folgen in K. Es gelte

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a.

Beweis. Siehe Aufgabe 44.19. □

Abbildungsverzeichnis