

初中複習叢書

算

學

(12)

下 冊

陳嶽生編

改訂本

商務印書館發行

MG
G634.61
45

初中複習叢書
算 學
下 冊
陳 嶽 生 編



3 1773 7448 9

商務印書館發行

目 次

第三篇 初等平面幾何

第一章 通 論

I. 導言	1
II. 普通公理.....	2
III. 幾何公理.....	3
IV. 公設	5
V. 定理記憶法	5
VI. 切不可犯的錯誤	15

第二章 求 證

I. 證法的種類	17
II 推理的根據	21
III. 作補助線法	33
IV. 模範命題證法舉例	35

第三章 軌 跡

I. 導言	119
II. 基本軌跡.....	119
III. 軌跡的探求	120
IV. 軌跡的證明	121
V. 問題解法示例	122

第四章 作圖

I. 導言	128
II. 基本作圖方法	128
III. 作圖題的解法	130
IV. 解析的方法	130
V. 模範問題示例	131

第五章 計算

I. 導言	147
II. 問題解法示例	47

第四篇 數值三角

第一章 基本知識

I. 銳角三角函數定義.....	152
II. 餘角函數關係	152

III. 銳角三角函數的變化	153
IV. 同角三角函數的關係	153
V. 特殊角的三角函數	153
VI. 解直角三角形法	154

第二章 問題解法示例

I. 求三角函數問題	155
II. 證明簡易恆等式問題	160
III. 解方程式的問題	166
IV. 解三角形的問題	175

初中複習叢書

算 學

下 冊

第三篇 初等平面幾何

第一章 通 論

- I. 導言：——幾何學是研究圖形的科學，其內容的廣博，變化的繁複，決非本篇所能囊括而盡。本篇所述，無非用提綱挈領的方法，將初中程度的基本幾何知識，融合在一處，並將各種證題作圖等方法，擇要示例，使習過初中幾何的人，知道如何分類記憶定理，如何活用定理，如何取法以解決命題罷了。要知道幾何的證題作圖，實在沒有概括的方法，即使是初等平面幾何學，其內容已是五花八門，琳琅滿目。不過爲初學說法，自應略示方針，俾可有所遵循，不致歧路彷徨，進退失據。然而這也不過是方針罷了；要實行而有結果，全在乎多多練習；倘然熟能生巧，自然一切困難，都可迎刃而解，所謂臨機善變，一

觸即發便是神而明之，這是在乎讀者的努力了。讀者務須牢記，研究幾何學，決不能專靠什麼辭典的。

初等平面幾何學所研究的問題，可概括成四大類：(一)求證，(二)求軌跡，(三)作圖，(四)計算。本篇即按此四大類，分章講述。本書是複習性質，所以如此編制，其有前一類的問題，用到後一類者，那一定是讀者都已習過的。

幾何學上用以解決問題的工具，除已成立的定理外，尚有公理、公設，以及定義各種定義，俱見幾何教科書，本篇不再細述；茲將公理與公設列下，望讀者牢記：

II. 普通公理：——

1. 全量等於其所有部份的和。
2. 等於同量或等量的量相等。
3. 一量可將它的等量來代替。
4. 等量加等量，和相等。
5. 等量減等量，差相等。
6. 等量的同倍量相等。
7. 等量的同分量相等。
8. 全量大於它的分量。

9. $a > b, b \geq c$, 則 $a > c$.
10. 等量加不等量, 或不等量加等量, 所得的和不等. 原來大的一方面, 和還是大.
11. 大量加大量, 大於小量加小量.
12. $a > b, c = d$, 則 $a - c > b - d$.
13. $a = b, c > d$, 則 $a - c < b - d$.
14. 不等量的同倍量, 仍舊不等, 原來大的還是大.
15. 不等量的同分量, 仍舊不等, 原來大的還是大.
16. 有同類二量 a, b , 則

於 $a > b$,

$a = b$,

$a < b$,

三關係中, 可有一關係成立, 而且祇有一關係成立.

III. 幾何公理:—

1. 二點之間可有一直線, 而且祇有一直線.
2. 二線相交, 祇有一交點.
3. 二線有二點相合, 則兩線全合.
4. 二點之間的路徑, 直線最短.
5. 過一點的直線, 有無窮多.

6. 在一線上的點有無窮多.
7. 一直線上有二定點, 則此直線上, 必有一點在此二點間, 又必有一點在此二點外.
8. 過一點有二定直線, 則在此二直線間, 必有一直線過此點, 在此二直線外, 也必有一直線過此點.
9. 兩點在一直線兩旁, 則兩點的聯線, 必與此直線相交.
10. 幾何圖形, 可以不變其形狀大小, 隨意變動其位置.
11. 二圖形完全重合, 則其形狀大小, 完全相同.
12. 二圖形各與第三圖形合同, 則此二圖形也自相合同.
13. 過已知直線外已知點, 可有一線, 祇有一線, 平行於已知直線.
14. 同與第三直線平行的二直線, 也互相平行.
15. 同平面上平行二直線, 若公有一點, 則必合成一直線.
16. 二直線平行, 則與其一相交的直線, 也必與其二相交.

17. 二直線若不平行,必相交;若不相交,必平行.
18. 一點不在直線上,必在直線外;不在直線外,必在直線上.
19. 一點與一圓,此點或在圓外,或在圓上,或在圓內,三種情形,可有一種而祇有一種.
20. 一圓過他圓的內外二點,兩圓必相交.

IV. 公設:——

1. 過兩點可畫一直線.
2. 線份可隨意引長.
3. 可隨意取一點做圓心,用任意半徑畫一圓.
4. 過一點,可畫一線,平行於已知直線.

V. 定理記憶法:——解決幾何命題,首在熟記定理,可以隨意取用.但初學者每覺幾何定理之多,如觀繁星,如覽棋局,頗難盡行記憶.其實幾何定理,也各自有其類別,倘能分類得宜,善加選別,自然可以觸類而得,不勞窮搜苦索了.下列五種分類方法,可以幫助讀者記憶各種定理,不過讀者切勿誤會,以為幾何定理,可以完全包括在這五類之中.要知其餘不能納入的,為數也還不少,不過去掉了可以分類的,其餘記憶起來,當然容易了.

(A) 圖形分類：初等平面幾何學上的圖形，大概有下列數種：(一) 三角形，(二) 平行四邊形，(三) 梯形，(四) 四邊形，(五) 圓，(六) 圓內接形，(七) 圓外接形，(八) 任意多角形，(九) 正多角形。舉凡各種定理，可就此九種圖形，分門別類，作為各圖形的性質。茲舉三角形一例如下，望讀者能舉一反三。就其餘八種，把各定理彙聚起來。

三角形性質定理(關於一個三角形者)：

1. 等腰三角形底角相等，其逆亦真。
2. 三角形兩邊不等，對角也不等，大邊所對之角大，其逆亦真。
3. 等邊三角形，亦為等角三角形，其逆亦真。
4. 等腰三角形頂角之平分線，為底邊之中垂線；其逆亦真。
5. 三角形頂角之平分線，垂直底邊，則為等腰。
6. 三角形三內角之和，等於二直角。
7. 三角形之外角，等於內對角之和。(外角大於內對角。)
8. 三角形二邊和，大於第三邊；二邊差，小於第三邊。

9. 三角形兩邊中點之聯線, 平行於底邊, 而且等於底邊之半.
10. 過三角形一邊中點, 平行於底邊之線, 必平分第三邊.
11. 三角形之三中線交於一點(重心), 此點到頂點的距離, 等於到對邊中點的二倍.
12. 三角形之三高交於一點(垂心).
13. 三角形之三條分角線, 交於一點(內心).
14. 三角形之三邊中垂線, 交於一點(外心).
15. 正三角形之重心, 垂心, 內心, 外心合一.
16. 有一三角形, 可作其內接, 外接, 及旁接圓.
17. 與三角形底邊平行的一線, 必分他兩邊成比例線份. 其逆亦真.
18. 三角形的內角平分線, 將對邊內分成兩線份, 與其餘兩邊成比例.
19. 三角形的外角平分線, 將對邊外分成兩線份, 與其餘兩邊成比例.
20. 直角三角形斜邊上的高, 是斜邊被高所分兩線份的比例中項.
21. 直角三角形的一腰, 是斜邊上被高所分而與

此腰相鄰的線份,與斜邊的比例中項.

22. 直角三角形斜邊平方,等於兩腰平方和.
23. 任何三角形,對銳角一邊的平方,等於其餘二邊平方和,減去其中一邊與他邊在此邊上射影乘積的兩倍.
24. 任何三角形,對鈍角一邊的平方,等於其餘二邊平方和,加上其中一邊與他邊在此邊上射影乘積的兩倍.
25. 三角形二邊平方和,等於半底平方與底上中線平方和的二倍.
26. 三角形之面積,等於底乘高之半.
以上各定理,已將初中幾何學所講的一個三角形基本性質,包括無遺,茲再舉關於兩個三角形者如下:
27. 兩三角形有兩邊夾一角各各相等,兩三角形合同.
28. 兩三角形有兩角夾一邊各各相等,兩三角形合同.
29. 兩三角形有三邊各各相等,兩三角形合同.
30. 兩三角形有二角相等,第三角亦相等.

31. 兩直角三角形有一腰與斜邊各相等，兩三角形合同。
32. 兩三角形有兩角對邊各相等，兩三角形合同。
33. 兩三角形有兩邊對角各相等，若此角非銳角，兩三角形必合同。
34. 兩三角形有兩邊相等，第三邊不等，則等邊之夾角亦不等；第三邊大之三角形，其夾角亦大，其逆亦真。
35. 兩三角形三角相等，則三邊成比例，其逆亦真。
36. 兩三角形各與第三三角形相似，則彼此相似。
37. 兩三角形三邊平行，或垂直，則兩三角形相似。
38. 兩三角形有兩邊成比例，夾角相等，則相似。
39. 相似三角形的面積比，等於對應邊的平方比。
- 以上各定理，都是兩三角形相關性質的定理。初中幾何學關於兩三角形的定理，已包括無餘。

(B) 元素分類：平面幾何學上的元素，不外點，線，角三種。所以平面幾何定理，大概可分成下面四類：(一)關於線的，(二)關於角的，(三)關於點

與線的，(四)關於線與角的。(圓弧亦為線，面積亦屬線類，因為計算面積是根據線的長短的。)將各定理就圖形分類之後，再就元素分類，更易收聯想記憶的效驗。其有未能入於圖形分類的理，就可以照此法分類。例如：

(線類) 若干平行線，與一截線相截，若截得各線分相等，則此數平行線在第二任何截線上所截各線分，也相等。

(角類) 同角或等角的補角相等。

(點線類) 一直線的中垂線，其上各點離此直線兩端等遠。

(線角類) 兩直線相交，所成對頂角相等。

其餘定理尚多，讀者可在教科書中找得，列入各類。(A)中所舉各定理，照元素法分類，當如下：

線類： (8), (9), (10), (16), (17), (20), (21), (22), (23),
(24), (25), (26), (39).

角類： (6), (7), (30).

點線類： (11), (12), (13), (14), (15).

線角類： (1), (2), (3), (4), (5), (18), (19), (27), (28), (29),
(31), (32), (33), (34), (35), (36), (37), (38).

讀者試將與其餘八種圖形有關的定理彙聚之後，再按元素分類。(凡軌跡定理概屬於點線類。)

(C) 關係分類：幾何定理的結論，都是線與線，角與角，點與線的關係，所以幾何定理，又可以照關係分類記憶。此項分類法，最最重要，因為對於解決命題，大有裨益。茲將初等幾何學中所研究的各關係，分列於下：

線類： (一) 相等，(二) 平行，(三) 垂直，(四) 不等，(五) 成比例，(六) 等分，(七) 一線等於他線之兩倍，(八) 二線和等於第三線，(九) 等面積，(十) 面積和差，(十一) 相切。

角類： (一) 相等，(二) 互為餘角，(三) 互為補角，(四) 倍與分，(五) 大小，(六) 和與差。

點線類： (一) 點在線上，(二) 線過一點，(三) 三點共線，(四) 三線共點，(五) 四點共圓，(六) 距離相等。

線角類： (一) 合同，(二) 相似。

以上所舉關係，共二十種，本書限於篇幅，不能

將幾何定理，盡照此法分類，茲就復興教科書中所載角相等的定理，列舉於下，作為參考，其餘請讀者自己分類，列成表格，以便記憶。（以下頁數節數，根據初版。）

角相等之定理：75頁，71節，(一)，(二)；76頁，73節；
86頁，80節；88頁，82節；89頁，
83節；93頁，86節；101頁，98節；
122頁，114節；123頁，115節；128頁，
系二；136頁，124節，(二)；143頁，
129節，逆；152頁，137節；154頁，
系一；155頁，系；157頁，習題8，
9，10；159頁，系；194頁，169節；
195頁，170節。

(D) 集團：幾何學上有些定理，其所含元素相同，但其結論關係不同的，可以集成一團。於是祇須記得一個，其餘便可觸類旁通了。集團的方法，共有下列三種：

1. 本定理與逆定理：幾何學上的逆定理，大多數真確。凡是真確的逆定理，與本定理集成一團，就祇要記得一個定理好了。例如

二線被第三線所截,若所成內錯角相等,則此二線平行.

二線被第三線所截,若二線平行,則所成內錯角相等.

記得了前一個,後一個就不會忘記了.

2. 大小等之定理:幾何學中關於線,角大,小等的定理,往往可集成一團.例如

{ 等弦離心等遠,
{ 不等弦離心不等,大者較近.

{ 本書所舉(A) 29,
{ 本書所舉(A) 34.

此法與前法並用,則記得一定理,猶如記得三定理.

3. 元素的交換:幾何學上有些定理,係由交換假設與結論的一元素而成,此等定理,往往可集成一團.(惟有時須除去不真確者).例如

過一圓半徑端點,而與半徑垂直之線,是此圓的切線.這定理中實包含:切點,圓心,直角,切線四元素,有三元素,即可決定必有第四元素,於是推知之定理如下:

過切點之半徑,垂直於切線.

過切點而與切線垂直之線,必過圓心.

自圓心向切線引垂線,必過切點.

(E) 概括: 幾何學中有些定理,可以概括為一定理.例如本節(A)之(23), (24), 以及(22), 就可概括成餘弦定律.茲再舉兩例於下,以明概括的效用宏大.

例一. 圓周角定理,交弦角定理,弦切角定理,交割角定理,割切角定理,交切角定理,都可概括成下一定理:(各定理俱見復興幾何 152-157 頁.)

兩直線的交角,等於兩直線所夾弧度的代數和的一半.凡向角內凸的弧是負,向角外凸的弧是正.或命一線繞角頂依反鐘向旋轉,線在弧上之點,依反鐘向旋轉,則此弧是正;線在弧上之點,依順鐘向旋轉,則此弧是負.

例二. 交弦比例線份定理,交割比例線分定理,交切割比例線分定理,可以概括成下一定理:

相交兩線,與圓交於四點(切線可視為兩交點

合一), 則一線上從交點到兩交圓點之線份的乘積, 等於他線上從交點到兩交圓點之線份的乘積.

讀者能用此五法, 以記憶定理, 自然不覺其苦了.

VI. 切不可犯的錯誤:——初學幾何的人, 極易犯幾種通病, 切須戒掉. 下列各點, 務須注意:

1. 要作普通的圖. 初學的人, 看見題中有三角形, 就畫一個等腰三角形; 看見題中有四邊形, 就畫一個長方形; 這是絕大的錯誤. 圖形中的線, 往往因為形式的特殊, 而合併起來, 或者本不相等的, 變成相等, 以致誤認關係, 種下錯誤的根苗. 所以三角形必須畫成不等邊, 梯形切不可畫成等腰.
2. 作圖須正確. 初學的人, 往往因為作圖的不準確, 誤認圖中的線角關係. 所以必須照作圖的方法, 作出準確的圖形來, 再着手求解決的途徑. 例如證明“凡三角形都等腰”的謬理, 就是作錯了圖的結果. (參閱著者所譯摺紙幾何學).
3. 不可憑直觀. 作圖雖然正確, 有時圖中某線

份與某線份,或某角與某角,看去似乎相等,切不可遽爾斷定.

4. 語語須有根據. 證題的陳述,必須根據已知的條件,成立的定理,公理,公設,以及圖形的定義,切不可隨意杜撰,至要至要.
5. 正定理與逆定理須加區別. 逆定理是不一定真確的. 例如“二平行弦截等弧”是真的,但是“截等弧的弦必平行”就錯了. 所以該用逆定理證明的,必須引用逆定理;假使沒有逆定理可用,那一定是所證不合,切不可拿正定理來充數.
6. 一圖形與二圖形須加注意. 二圖形的相關性質,與一圖形的獨立性質,不可混用. 例如前節(A)(2)與(A)(34),切不可併為一談. 初學者很容易犯這種毛病,望留意為要.

第 二 章

求 證

I. 證法的種類：——證明幾何命題的方法，有下列五種：

(一) 理想疊合法 此法係從前章所舉幾何公理 (10), (11) 而來。通常所用的疊合手續，大概有下列四種：

(a) 使一圖形中的一直線，繞線上某點旋轉一定角度，而與他直線相合。

(b) 摺疊一平面，使摺痕過一定點，且使在摺痕兩旁與此定點等距離的二點相合。

(c) 將一圖形的一部份，圍繞某點而旋轉，使旋轉部份落在不旋轉部份上。

(d) 以一圖形移置別圖形上，使兩圖形的一雙直線相合，同時使此一雙直線上的一雙點疊合。

(二) 綜合法. 此法是證題最通用的方法. 其格式如下:

已知: $A=B$, 因為 $A=C$ (由定理), $C=D$ (由公理),
 $D=E$ (由公設, 與作圖), $E=F$ (由定義),
 $\therefore F=X$ (由定理, 公理, 或定義) (合證).

此舉所述, 不過是大概的格式; 至於引用定理, 公理的次序, 以及如何作補助線, 其次序當然不是呆板的. 總而言之, 此法是綜合已知事件, 證明未知事件.

(三) 解析法. 解析法的形式, 大致如下:

已知: A 是真的, 求證 X 是真的.

證: 假使要 X 是真的, 必須 D 是真的; 要 D 是真的, 必須 C 是真的; 要……, 必須 A 是真的;
 現在 A 是真的, 所以 X 是真的 (合證).

這一個方法所經過的各步, 當然也要根據定理, 公理等等, 不過次序和綜合法相反, 是由未知反推到已知的. 此法比綜合法來得繁瑣, 但是一題的證明, 往往可用此法發見, 所以可做綜合法的幫助. 一題到手, 先用解析法推得證明的線索, 再用綜合法順次把證明寫出來, 就

不致於無從下手了。

(四) 歸謬法。歸謬證法的形式，大致如下：

已知： A 是真的，求證 X 是真的。

證：假定 X 是不真的，那麼就有 D 是真的，因為 D 是真的， $\therefore A$ 是不真的，但現在 A 是真的， \therefore “假定 X 是不真的”是錯的， $\therefore X$ 是真的。

這是由假定的“非”，歸到與已知條件相矛盾。還有一種形式，是歸到與已知定理或公理相矛盾，因而證明假定的“非”不成立。總而言之，此法根據下列三原理而成：

- (a) 一理或為是，或為非，二者必居其一。例如二線或平行，或相交，二者必居其一。
- (b) 兩理矛盾，其中有一真，他一必謬。
- (c) 正確推理的結論為謬，則結論所從出的假設必謬。

(五) 窮舉法。窮舉法是歸謬法的推廣。在歸謬法裏面，我們所假定的“非”祇有一種；在窮舉法裏面，我們把一切可以假定的“非”，即與所證結論矛盾的一切可能的結論，都證明它們不成立。

因而決定原來的結論必定成立。此法的形式，大致如下：

已知： A 是真的，求證： $x=y$ 。

證： $x=y$ ， $x>y$ ， $x<y$ ，三者之中，必居其一。若
 $x>y$ ，則 A 不真；但 A 是真的， $\therefore x \not> y$ 。若
 $x<y$ ，則 A 不真；但 A 是真的， $\therefore x \not< y$ 。於
 是 $x=y$ 。

(六) 合一法。合一法是假定所證的某線或某角，不合結論的關係，另作一線或一角，合於結論的關係，再證明此線或此角，與原來的線或角相合。

以上六種證法，第一第二兩種是直接證法，第三種是發見綜合證法的開路先鋒，四，五，六是間接證法；間接證法常用於證明逆定理。六種證法之中，第二種最簡單，最整齊，最通用。間接證法以少用為是，於無可奈何的時候，方可姑且一用。理想疊合法，大都用於證明兩圖形的合同，以及證明基本定理，通常以不用為是。至於六種證法的例子，各種幾何教科書中都有，此處不贅。在以下各節中，遇有用到某法時，再

隨時表明。

II. 推理的根據：——推理的根據，當然是定理公理等等，而且各命題的證法，千變萬化，即使是一個命題，也往往不止一種證法，斷難有一條普遍的規則，可以遵守。不過若按欲證的關係分類，那麼也有若干方針，可以引導我們，如何利用已知定理，如何利用命題的假設，如何添作補助線，以顯圖形中各部分的關係。現在將初中幾何學上所常用的推理方法，分類敘述於下：

1. 證明線分相等，有下列各種推理方法：

- (a) 利用全等 \triangle (即合同 \triangle)，證其為兩全等 \triangle 之對應邊。
- (b) 利用等腰 \triangle 性質的逆定理，證其為一等腰 \triangle 中等角的對邊。
- (c) 證其同等於第三線。
- (d) 證其為平行四邊形的對邊。
- (e) 證其為同圓的半徑。
- (f) 利用“ \square 對角線互相平分”的定理。
- (g) 利用“過 \triangle 一邊中點而平行於底邊之線，必平分他邊”的定理。

- (h) 利用“一點到圓的兩切線相等”的定理。
 - (i) 若兩線分爲同圓或等圓之弦，可證其所張爲等弧，或距圓心等遠。
 - (j) 證其爲一角平分線上一點，到兩邊的距離。
 - (k) 證其爲一線分中垂線上一點，到線分兩端的距離。
 - (l) 利用相似 \triangle 定理，或三角形中比例線分定理，證其與另一對等線成比例。
 - (m) 利用“數平行線在一截線上截取等線分，必在他截線上截取等線分”定理。
 - (n) 利用“垂直於弦的半徑，平分該弦”的定理。
2. 證明弧相等，有下列各種推理方法：
- (a) 證其張相等中心角。
 - (b) 證其對等弦。
 - (c) 證其張相等圓周角。
 - (d) 證其爲平行弦所截的二弧。
 - (e) 利用“垂直於一弦，或過一弦中點之直徑，平分該弦所對之弧”的定理。
3. 證明角相等，有下列各種推理方法：
- (a) 證其爲全等 \triangle 的對應角。

- (b) 證其爲相似三角形的對應角.
- (c) 證其爲等腰三角形的底角.
- (d) 證其同等於第三角.
- (e) 證其爲 \square 的對角.
- (f) 利用“對頂角相等”的定理.
- (g) 證其爲二平行線與一截線所成的內錯角或同位角.
- (h) 證其爲同角或等角的餘角或補角.
- (i) 利用“兩 \triangle 有兩對應角相等,第三對應角必等”的定理.
- (j) 若所證之角,與圓有關係,則有下述各法:
 - (一) 可證其爲同圓或等圓中夾等弧之圓心角.
 - (二) 可證其爲同圓或等圓中夾等弧之圓周角.
 - (三) 利用“交弦角等於所夾兩弧度數半和”的定理以及(d).
 - (四) 利用“弦切角與圓周角等於所夾弧度數之半”的定理.
 - (五) 利用“交割角,割切角,交切角等於所夾

兩弧度數半差”的定理

(六) 利用“圓內接四邊形外角等於內對角”的定理

4. 證明線分不等, 有下述各法:

(a) 證其為一 \triangle 中對不等角之邊.

(b) 利用“兩 \triangle 中有二邊相等, 夾角不等, 則第三邊亦不等”的定理.

(c) 利用“兩點之間, 直線最短”的公理.

(d) 利用“全大於其分”的公理, 證明在大線分上, 可以截取一線分, 等於小者.

(e) 利用“自一點至直線所引各斜線距離該點至直線所引垂線足愈遠, 則愈大”的定理.

(f) 若兩線分為同圓或等圓之弦, 則可證其張不等弧, 或距心不等.

(g) 利用“ $a > b$, $b \geq c$, 則 $a > c$ ”的公理.

(h) 利用“圓內圓外之點到圓心的距離, 不等於半徑”的定理.

5. 證明弧不等, 有下述各法:

(a) 證其張不等中心角.

(b) 證其對不等弦.

(c) 證其張不等圓周角.

6. 證明角不等,有下述各法:

(a) 證其爲一 \triangle 中對不等邊之角.

(b) 利用“兩 \triangle 中有二邊相等,第三邊不等,則夾角亦不等”的定理.

(c) 利用“ \triangle 之外角,大於內對角”的定理.

(d) 利用“一弧所張之角,其頂點若在圓外或圓內,則不等於該弧所張之圓周角”的定理.

(e) 利用“全大於分”的公理.

(f) 利用“ $a > b, b \geq c$, 則 $a > c$ ”的公理.

(g) 若爲圓心角或圓周角,可證其夾不等弧.

7. 證明面積相等,有下述各法:

(a) 證三角形,平行四邊形,梯形之面積相等,可證其底與高相等,或底與高之乘積相等.

(b) 證長方形之面積相等,可證其兩鄰邊相等.

(c) 證正方形之面積相等,可證其邊相等.

(d) 利用“介於二平行線間,同底或等底之長方形,正方形,平行四邊形,梯形,三角形,面積相等”的定理.

(e) 證其等於第三形之倍或半.

(f) 證明 a, b 二線分所包的矩形(即 $a \times b$), 等於 c, d 二線分所包的矩形(即 $c \times d$), 可利用相似形定理, 證明 $a : c = d : b$.

8. 證明兩比相等, 有下述各法:

(a) 利用“三角形的兩邊, 被底邊的平行線截成比例線分”的定理.

(b) 利用“兩 \triangle 三角相等則相似”的定理.

(c) 利用“兩 \triangle 有兩邊成比例, 夾角相等, 則相似”的定理.

(d) 證明其同等於第三比.

(e) 利用“諸平行線截二直線, 其相當線段成比例”的定理.

(f) 利用“諸共點線截二平行線, 其相當線段成比例”的定理.

(g) 利用“ \triangle 內平分角線, 或外平分角線, 將對邊內分或外分, 與夾此角之二邊成比例”的定理.

(h) 若證 a 為 b, c 之比例中項, 則有下述二定理可用:

(一) 直角 \triangle 斜邊上的高, 是斜邊被高所分

二線段的比例中項.

(二) 直角 \triangle 的一腰,是斜邊與斜邊被高所分的鄰接線段的比例中項.

(i) 利用合比,分比,分合比定律

(j) 若欲證之線與圓有關係,則有下述定理可用:

(一) 圓內相交二弦,互相內分為比例線段,即一弦上兩線段的積,等於他弦上兩線段的積.

(二) 相交二割線之交點,將割線上之弦外分為比例線段.

(三) 相交之割線與切線,其切線長的平方,等於交點外分割線上之弦,所成兩線段的積.

(四) 圓周上一點到直徑的垂線,是直徑為垂線所分兩線段的比例中項.

9. 證明和差關係,有下述各法:

(a) 欲證二線分或二角的和,等於第三線分或第三角,可作前二者之和,證其等於後者;或由後者減去前二者之一,證明所餘等於前

二者之又一；或將第三線分或角，分爲兩部分，證其各等於第一第二線分或角。

- (b) 欲證二線分或二角之差，等於第三線分或第三角，可歸於前一法。
- (c) 欲證面積之和差，等於第三者，可根據各面積的計算公式，就各相關線分，而行代數運算。
- (d) 欲證正方形之和差關係，有下列定理可用：
- (一) 畢達哥拉定理(即商高定理)。
 - (二) 畢達哥拉定理的推廣。
 - (三) 相似形面積的比等於對應邊平方比。
 - (四) \triangle 兩腰上平方和，等於半底平方與底上中線平方和的二倍。
- (e) 其他和差關係，可利用等量公理，或不等量公理證明之。

10. 證明倍分關係，有下述各法：

- (a) 欲證第一線分或角，爲第二線分或角之倍，可證第一線分或角之半，等於第二線分或角；或作第二線分或角之倍，證明其等於第一線分或角。

- (b) 利用 \triangle 兩邊中點之聯線,等於底邊之半.
 - (c) 利用 \triangle 重心定理.
 - (d) 利用“等腰 \triangle 頂點外角,等於內對角的兩倍”的定理.
 - (e) 利用第三線分或角爲居間.
 - (f) 證明一角爲他角之三倍,常由第一角減去第二角,再證餘下來的是第二角的二倍.
 - (g) 證明倍分和差混合的關係,利用等量公理.
 - (h) 利用相似形的比例定理.
11. 證明兩角互爲補角,或互爲餘角,有下述各法:
- (a) 利用“一直線爲外邊的二鄰角互補”的定理.
 - (b) 利用“平行線與截線所成同傍內角互爲補角”的定理.
 - (c) 利用“圓內接四邊形對角互爲補角”的定理.
 - (d) 欲證二角互爲餘角,可證其和等於已知直角.
 - (e) 欲證二角互爲餘角,可證其爲直角 \triangle 的二銳角.

(f) 欲證兩角互為補角,可證其和等於已知之平角.

12. 證明兩線平行,有下述各法:

(a) 證其與一截線所成的內錯角或同位角相等,或同旁內角互為補角.

(b) 利用“分 \triangle 兩腰成比例線段之線,平行於底邊”的定理.

(c) 證其為 \triangle 之底,與兩腰中點之聯線.

(d) 證其同平行於第三線.

(e) 證其各垂直於第三線.

(f) 利用“兩雙對邊相等,或兩雙對角相等,或一雙對邊相等且平行,或對角線互相平分的四邊形,是 \square ”的定理.

(g) 證其為梯形兩腰中點的聯線.

13. 證明兩線垂直,即證明其所夾的角是直角,其方法有下述數種:

(a) 證其等於已知直角.

(b) 證其等於鄰補角.

(c) 證其為半圓上的圓周角.

(d) 利用“等腰 \triangle 頂角平分線,垂直於底邊”的

定理

(e) 利用“切線垂直於過切點之半徑”的定理

(f) 利用“過一弦中點的半徑垂直於弦”的定理。

(g) 證其為 \triangle 中等於二角和的一角。

(h) 證其為鄰補角平分線所夾之角。

14. 證明相切關係, 有下述各法:

(a) 欲證一線與一圓相切, 可證明過公共點的半徑垂直該線; 或證明過公共點的該線垂線, 通過圓心。

(b) 利用“弦切角等於夾同弧的圓周角”的定理。

(c) 欲證兩圓相切, 可證明中心線通過公共點; 或證明兩圓心的距離, 等於半徑和或差。

15. 證明三線共點, 有下列各法:

(a) 證其中二線經過第三線上同一點。

(b) 若其中有一線段, 可證其兩端與其他兩線的交點共線。

(c) 在三線上各覓得一點, 聯成三角形, 然後利用 \triangle 重心, 垂心, 外心, 內心諸定理。

16. 證明三點共線,有下述各法:

- (a) 作兩兩的聯線,證明此兩線合一,或證明此兩線與通過其中一點之第三線,所成兩鄰角互補,或所成兩對頂角相等.
- (b) 作兩兩的聯線,證其與已知直線交成同向相等之角.
- (c) 作兩兩的聯線,證其各與已知直線平行.

17. 證明四點共圓,有下述各法:

- (a) 聯其中二點,證明此線在其同側二點所張之角相等,或在異側二點所張之角互為補角.
- (b) 聯四點,成一四邊形,證其對角互為補角,或證其一外角等於內對角.
- (c) 覓得與此四點等距離的一點.
- (d) 證諸點共圓,可先證四點共圓,再證其餘各點亦在同圓周上.

18. 證明相似與合同,可利用相似 \triangle 定理, \triangle 比例線段定理,及理想疊合法.

以上所述,祇能作為指導,決不能視為包羅萬象的要訣.察題構思,舉一反三,全在學者精求.

III. 作補助線法：——有時因為已知的圖形過於簡單，或欲證關係不甚明顯，致使圖形中的原有線角，或失之稀，或失之散，不能用以上所舉各法，直接應用於原圖。在這個時候，須作補助線，藉以輾轉求出已知線角的關係。然而所難者，即在於發見此補助線，因幾何圖形的關係，變化無窮，決不能立一普遍的定律，以馭此無窮的變化；所以作補助線雖極重要，亦無從詳述其法。惟對於初學者，實宜略示方針，以啓其思想之端，故從吳在淵著近世初等幾何學（商務印書館出版），摘錄作補助線的方法如下：

“作補助線之標準有三：（一）使欲證者與已知者發生密切之關係；（二）使已知者聚於一處，吾人可得下手之地；（三）使欲證者聚於一處（欲證者不止一事時），便於吾人之比較取用。無標準之線，不宜妄作，妄作則圖中紛如亂絲，吾人目爲之眩矣。

“作補助線之大要：（一）以欲證或已知之線，平行移動，令其一端至一已知點；（二）從已知點向已知線，或欲證線，引直線，使成一已知之角；（三）

有一角，則試作此角之等分線；(四)有一角及等分線，則從等分線上已知點，至角之二邊引垂線，或由邊上已知點，作等分線之垂線；(五)關於一已知點或線，作圖中一部份之對稱圖；(六)題設 \triangle 及一邊之中線，則就其重心觀察，或延長中線，使等於其本身；(七)題設線分之和或差者，試截長補短而比較之。

.....

“作補助線之標準，除前編中所言者外，恆藉圓之助，使已知角及未知角之間，發生關係。故用圓之定理作補助線者，大概在視察圓周角，切線角，及中心角等。

“由是作補助線之大要：(一)題設直線或直線形及圓，則從中心至直線，或至直線形之邊作垂線或作平行線；(二)直線或直線形與圓有公共點者，恆就此點作圓之切線，或聯此點及圓心，或從此點作平行於已知線之割線，而聯其與圓之交點及中心；(三)題設點及圓者，恆聯此點及中心，或從此點作圓之切線或割線；(四)題設四邊形者，恆就二對角線之交點，或就二對邊延長線之

交點，行(三)中之考察；(五)題設二圓者，作其中心線或公切線，過其公共點引弦；相交者，過一交點引弦，或作切線，作交點之半徑，作公共弦而從其上一點作切線；(六)題設圓及弦者，於弦端作切線；設二弦者，交互聯其各端；等。無論何種設題，已知諸點有共圓者，或作補助線後所得交點及已知點有共圓者，急宜畫出此圓為補助圓……。

“證比例題之法，……(第二)比例線分不能直接覓到，則宜覓出介紹二比相等之第三比，此時大都宜作某線之平行補助線；……”。

從以上各語看來，作補助線之目的，不外於補成或新作一三角形，平行四邊形，圓內外接形，等等，以得充分的已知元素，可以直接利用各種推理方法；而所加補助線無非為聯線，平行線，垂直線，中垂線，分角線，切線，弦，共點圓等等。惟吳氏有言：“寧招罣一漏萬之誚”，故讀者切不可宥於此寥寥數語，而不求精進也。

- IV. 模範命題證法舉例：——本書中所舉各例，都是可以利用基本定理(即見於教科書中的定理)證明的命題，所以會考或入學試題，其為基本定理

者,若本書也選以爲例,那麼就不詳述證法,祇註明其見何書,請讀者自去查閱——實在說起來,基本定理的證法,是應該牢記的.不過有時或加以解析,或說明其用何種推理方式(即直接法,間接法),或指出證中最重要的各步,以便研究,而利記憶.

(A) 線分相等的命題:

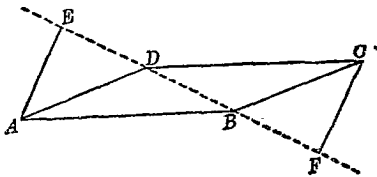
1. 設由平行四邊形 $ABCD$ 之 A, C 二角頂,作垂線 AE, CF 至對角線 BD (如下圖). 求證 $AE=CF$.

(河北 22)

[解] 已知: (1) $ABCD$ 是 \square .

(2) E, D, B, F , 在一直線上.

(3) $AE \perp ED, CF \perp FB$.



求證: $AE=CF$.

解析: $\angle AED = \angle R = \angle CFB$, 故若能證明 $\triangle AED$ 與 CFB , 有一角一邊, 或二邊相等, 則 AE 與 CF 就是合同三角形的

對應邊了。

證明： $ABCD$ 是 \square (已知)

$\therefore AD=BC$ (\square 對邊相等)

又 $AD \parallel BC$ (\square 定義)

$\angle ADB = \angle CBD$ (平行線與截線所成
內錯角相等)

E, D, B, F 在一直線上 (已知)

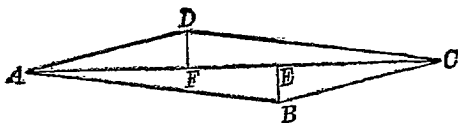
$\therefore \angle ADE = \angle CBF$ (等角的補角相等)

且 $\angle AED = \angle R = \angle CFB$ (已知)

於是 $\triangle AED \equiv \triangle CFB$ (二直角三角形,
有一角一邊相
等,則兩形全等)

$\therefore AE=CF$ (全等形的對應邊相等)

Q. E. D.



注意：如由 B, D 作 AC 的垂線 BE, DF , 則當
如上圖, 其證明略簡, 讀者可自求之
此題其實尚有一重要之點, 默認而未
加證明, 即: E 與 F 或同在形內, 或同

在形外,若對角線的二角是銳角, E 與
 F 即在形內,若對角線的二角是鈍角,
 E 與 F 即在形外.此點在初等幾何學
 內,也可以證明,茲舉其一款,用歸謬法
 證明如下,讀者試將其餘自證之.

若 E 在形內,試證 F 亦在形內.

證: E 在形內,則 BEC 是直角三角形,

$$\therefore \angle ECB < \angle R,$$

但 $\angle ECB = \angle EAD$, $\therefore \angle DAE < \angle R$.

設 F 點在形外 EA 之延長線上,

則 $\angle DAF > \angle R$. ($\angle DAF$ 爲 $\angle DAE$ 之
 補角)

而 $\angle DFA = \angle R$. ($DF \perp AF$)

則 $\triangle DAF$ 三角之和將大於二直角,是
 與定理悖.

故 F 點不能在形外,祇能在形內.

2. ABC 爲直角三角形, D 是斜邊 AB 的中點, 證明 AD, BD, CD 的長相等.

[解] 已知: (1) $\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = \angle R$.

(2) $AD = DB$.

求證: $CD = AD = BD$.

解析：欲證 CD 與 AD

相等，既不能利

用等腰三角形

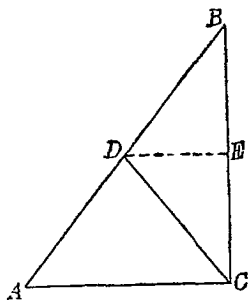
性質的逆定理，

又不能利用全

等三角形，故須

作補助線若過

D 作 AC 的平行線，祇須證明其為 BC 的中垂線，即可證明 $CD=BD=AD$ 。



證明：過 D 作 AC 之平行線。

(過已知點，可作一直線平行於已知線，且只可作一直線)

此線必與 BC 相交，命交點為 E 。

(與二平行線之一相交的直線，必與其他也相交。)

於是 $BE=EC$

(過 \triangle 一邊中點，平行於底之線，必平分他一邊。)

又因 $\angle DEB = \angle ACB$

(平行線與一截線所成同位角相等)

而 $\angle ACB = \angle R$ (已知)

$\therefore \angle DEB = \angle R$ (等於同量之量相等)

即 $DE \perp BC$ (垂線定義)

$\therefore BD = CD$ (一線分的中垂線, 距線分
兩端等遠.)

即 $CD = AD = BD$ (等於同量之量互等)

Q. E. D.

別證: 以 D 爲圓心, AB 爲直徑, 作一圓, 則因

$$\angle ACB = \angle R,$$

$\therefore C$ 亦在此圓周上.

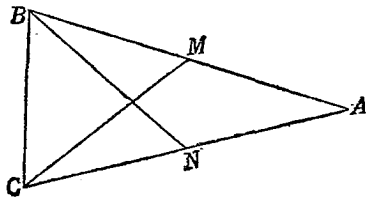
(直角之二邊, 過一線分的二端, 角頂
即在以此線分爲直徑的圓周上.)

$\therefore CD = AD = BD$. Q. E. D.

(同圓半徑相等.)

3. 等腰三角形兩腰上的中線相等. 試證之.

(湘三屆)



[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$.

$$(2) AM=BM,$$

$$AN=CN.$$

求證: $BN=CM$.

解析: 試證 $\triangle AMC$ 與 $\triangle ANB$ 爲全等形.

證明: $AB=AC$ (已知)

$$AN=\frac{1}{2}AC, AM=\frac{1}{2}AB \text{ (已知)}$$

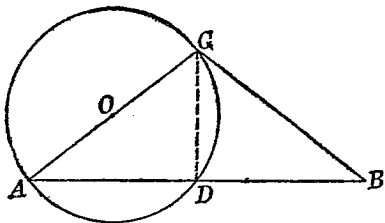
$$\therefore AN=AM \text{ (等量之半相等)}$$

$$\angle A = \angle A \text{ (同一角)}$$

$$\therefore \triangle AMC \equiv \triangle ANB \text{ (s. a. s. = s. a. s.)}$$

而 $BN=CM$ (全等形的對應邊) Q. E. D.

- 4 以等腰三角形之一腰爲直徑, 作一圓, 必平分其底. 求證. (湘四屆)



[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$.

(2) AC 爲 $\odot O$ 的直徑.

(3) $\odot O$ 與 AB 交於 D .

求證: $AD=BD$.

解析: 須作補助線 CD , 而證明 $\triangle ADC$ 與 BDC 全等.

證明: 聯結 CD . (過兩點可作一直線)

則 $\angle ADC = \angle R$ (半圓內的弓形角是
直角)

$\therefore \angle BDC = \angle R$ ($\because ADB$ 是一直線)

但 $AC = BC$ (已知), $CD = CD$ (同一)

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDC$ (s. a. s. = s. a. s.)

而 $AD = BD$ (全等形的對應部份)

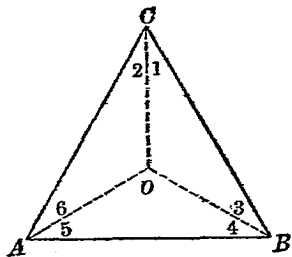
別證: $\angle ADC = \angle R$, 即 $CD \perp AB$,

且 $AC = BC$, $\therefore AD = BD$.

(等腰 \triangle 底邊上的高, 平分底邊)

5. 三角形之內切外接兩
圓同心, 則為等邊三角
形, 求證. (贛 23)

[解] 已知: $\triangle ABC$ 中, O
是外心, 又是
內心.



求證: $\triangle ABC$ 是等邊三角形.

解析: 欲證 $AB=BC=CA$, 須作補助線, 使其成爲全等三角形的對應邊; 試聯結 OA, OB , 與 OC 而察之.

證明: 聯結 OA, OB, OC (過二點可作一直線)
則因 O 爲外心 (已知)
 $\therefore OA=OB=OC$ (同圓的半徑相等),
而 $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 6$ (等腰 \triangle 底角相等)

又因 O 爲內心 (已知)

$\therefore OC$ 平分 $\angle C$, 而 $\angle 1=\angle 2$

(\triangle 形的內心, 在各角的平分線上)

於是 $\angle 3=\angle 6$ (等於等量之量互等)

$\therefore \angle AOC=\angle BOC$ (兩 \triangle 有二角等, 第三角亦等)

同樣可證 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA$.

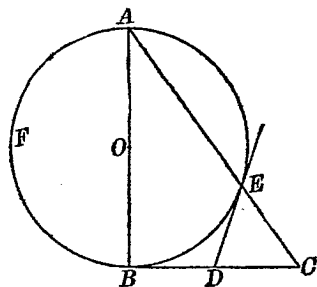
$\therefore \triangle AOB \cong \triangle BOC \cong \triangle COA$ (s.a.s. = s.a.s.)

於是 $AB=BC=CA$ (全等形的對應邊)

即 $\triangle ABC$ 是等邊三角形 (定義) Q. E. D.

6. 直角三角形 ABC 之 AB 邊, 爲一圓之直徑, 而

此圓與斜邊相交於
 E 點。如過 E 作此圓
 之切線，試證此切線
 必平分 BC 。



[解] 已知: (1) $\triangle ABC$
 中,
 $\angle B = \angle C$.

(2) $\odot O$ 之直徑為 AB .

(3) AC 再交 $\odot O$ 於 E 點, ED 切 $\odot O$ 於 E ,
 而與 BC 交於 D 點.

求證: $BD = DC$.

解析: 因 $BD = DE$, 故若能證明 $DE = DC$, 本
 題即可解決, 而欲證明 $DE = DC$, 可試
 證 $\angle DEC = \angle DCE$.

證明: $\angle DEC = \frac{1}{2} \widehat{AE}^\circ$ (弦切角等於所夾弧度
 數之半)

$$\angle DCE = \frac{1}{2} (\widehat{AFB}^\circ - \widehat{BE}^\circ)$$

(割切角等於所夾兩弧度數之半差)

但 AB 為直徑 (已知) $\therefore \widehat{AFB} = \widehat{AEB}$
 (半圓周)

$\therefore \angle DCE = \frac{1}{2}(\widehat{AEB}^\circ - \widehat{BE}^\circ)$ (一量可代以等量)

即 $\angle DCE = \frac{1}{2}\widehat{AE}^\circ = \angle DEC$ (等於同量之量互等)

$\therefore DC = DE$ (\triangle 中底角相等, 則兩腰亦等)

又因 $\angle ABC$ 為直角 (已知),

$\therefore BD$ 切 $\odot O$ 於 B

(半徑端點之垂線為切線)

於是 $BD = DE$ (圓外一點至圓之二切線相等)

$\therefore BD = DC$ (等於同量之量互等)

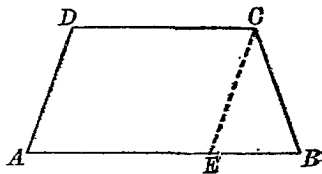
Q. E. D.

7. 證明梯形之底角相等, 則為等腰.

[解] 已知: 梯形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B$

求證: $AD = BC$

解析: 試用平行移動法, 將 AD 線的一



端, 移至 C 點, 而考察之. (使欲證者聚於一處.)

證明：過 C 點，作 $CE \parallel AD$ ，與 AB 交於 E 點。

(AD 與 AB 交，故 CE 與 AB 亦相交。)

於是 $CE = AD$ (\square 對邊相等)

$$\angle CEB = \angle A$$

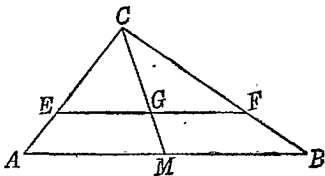
(平行線與截線所成同位角)

但 $\angle A = \angle B$ (已知)

$\therefore \angle CEB = \angle B$ 而 $CE = CB$ (何故?)

$\therefore AD = BC$ Q. E. D.

8. 平行於 \triangle 底邊的線，
必被底邊上中線平分，證之。



[解] 已知：(1) $\triangle ABC$

中， $AM = BM$ 。

(2) $EF \parallel AB$ ，與 CM 交於 G 。

求證： $EG = GF$ 。

解析：試證 $EG : GF = AM : MB$ 。

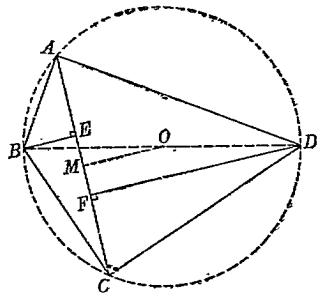
證明： $EG : AM = CG : CM$ } (兩 \triangle 三角相等，則
 $GF : MB = CG : CM$ } 相似)

$\therefore EG : AM = GF : MB$ (等於同量)

即 $EG : GF = AM : MB$ (交比定律)

但 $AM=MB$, $\therefore EG=GF$ Q. E. D.

9. 四邊形 $ABCD$ 中,
 $\angle A = \angle C = \angle R$, 由
 B, D 引 AC 的垂線,
 其垂足爲 E, F . 證明
 $AE=CF$.



[解] 已知: (1) 四邊形
 $ABCD$

中, $\angle A = \angle R = \angle C$.

(2) $BE \perp AC, DF \perp AC$.

求證: $AE=CF$.

解析: 因 $\angle A + \angle C = 2\angle R$,

故 A, B, C, D 共圓, 試作補助圓考察
 之.

證明: 以 BD 爲直徑, 作一圓, 則 A, C 皆在此
 圓周上, 因 $\angle A = \angle R = \angle C$.

試從圓心 O , 作 $OM \perp AC$, 與 AC 交於 M
 則 $AM=MC$ (垂直於弦之直徑, 平分弦)
 但 $OM \parallel BE \parallel DF$ (同一線之垂線)

且 $BO=OD$, $\therefore EM=MF$.

(諸平行線截一線爲等線段,亦必截他線爲等線段.)

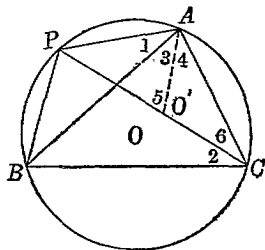
$\therefore AE=CF$ Q. E. D.

(等量減等量,差相等)

10. 三角形一角的平分線,與其外接圓交於一點,則此點必與三角形的其他二頂點,以及內切圓的圓心,距離相等.

[解] 已知: $\triangle ABC$ 中 $\angle C$

的平分線,與外接圓 O 交於 P ,
 O' 是 $\triangle ABC$ 的
 內切圓心.



求證: $PA=PO'=PB$.

解析: O' 在 PC 上, 又在 $\angle BAC$ 的平分線上, 試聯 $O'A$, 若能證明 $\angle PAO' = \angle PO'A$, 則本題就可解決.

證明: $\angle BCP = \angle ACP$,

$\therefore \widehat{PB} = \widehat{PA}$ (張相等圓周角)

$\therefore PB = PA$ (等弧所對的弦相等)

聯結 AO' , 則 $\angle 5 = \angle 4 + \angle 6$

(\triangle 外角 = 內對角和)

但 $\angle 4 = \angle 3$, $\angle 6 = \angle 2$

(內心在分角線上)

且 $\angle 2 = \angle 1$ (夾同弧的圓周角相等)

$\therefore \angle 6 = \angle 1$, 而 $\angle 5 = \angle 3 + \angle 1$

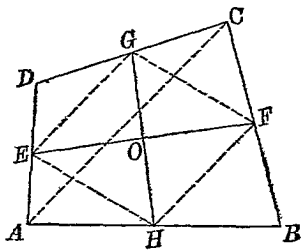
(等量替換)

即 $\angle PO'A = \angle PAO'$, $\therefore PA = PO'$,

故: $PA = PO' = PB$ *Q. E. D.*

11. 證明任意四邊形對
邊中點的聯線, 互相
平分.

[解] 已知: (1) E, F, G, H
是四邊形
 $ABCD$ 各
邊的中點,



(2) EF 與 GH 交於 O .

求證: $EO = OF, GO = OH$.

解析: 試順次聯 E, G, F, H , 若能證明 $EGFH$
為平行四邊形, 則本題即可解決.

證明: $EG \parallel AC, FH \parallel AC, \therefore EG \parallel FH$

$EG = \frac{1}{2}AC, FH = \frac{1}{2}AC, \therefore EG = FH$

(\triangle 兩邊中點聯線, 平行於第三邊, 且等於其半.)

故 $EGFH$ 為平行四邊形 (一雙對邊平行且相等)

而 $EO = OF, GO = OH$ (\square 對角線互相平分)

12. 求證平行四邊形之對角線, 互相平分.

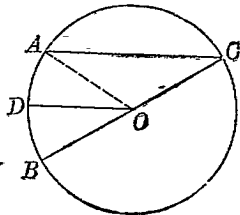
(湘五屆)

[解] 此係定理, 證明見各教科書, 解析見復興初中幾何 124 節. 注意兩對內錯角, 屬於同組平行線, 與兩截線.

(B) 弧相等的命題:

1. 在弧上一點 C , 作一弦 CA 與一直徑 CB , 求證平行於 CA 之半徑 OD , 平分弧 AB . (滬 23)

[解] 已知: (1) CB 為 O 圓的直徑, CA 為一弦.



(2) 半徑 $OD \parallel AC$.

求證: $\widehat{AD} = \widehat{DB}$.

解析: 試證 \widehat{AD} 與 \widehat{DB} 各張等中心角.

證明: 聯 AO , 則 $\angle AOD = \angle CAO$ ($\because AC \parallel OD$)

但 $\angle CAO = \angle ACO$ ($\because OA = OC$)

$\therefore \angle AOD = \angle ACO = \angle BOD$ (同位角)

$\therefore \widehat{AD} = \widehat{DB}$ (圓心角相等, 弧相等)

Q. E. D.

2. 一線切 O 圓於 T , 從任意直徑 AB 的一端 A , 引此切線的垂線, 與圓交於第二點 E , 則 $\widehat{TE} = \widehat{TB}$.

[解] 已知: (1) TD 切 O 圓於 T .

(2) $AD \perp TD$, 與 O 圓

再交於 E .

(3) AOB 為直徑.

求證: $\widehat{TE} = \widehat{TB}$

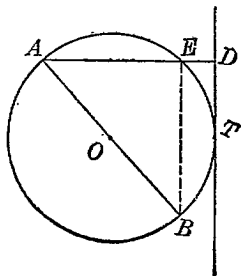
解析: 若聯 BE , 而證明

$BE \parallel TD$, 則本題即可證明.

證明: 聯 BE , 則 $\angle AEB = \angle R$

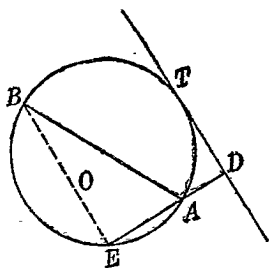
(半圓所張圓周角為直角)

$\therefore BE \parallel TD$ (\because 同垂直於 AD)



$$\widehat{TE} = \widehat{TB} \text{ (二平行線間所截弧相等)}$$

若 AD 之延長線與圓再交, 如右圖, 其證明與前相同.



(C) 角相等的命題:

1. 自弦之兩端, 引兩切線, 此兩切線與弦所成之角相等, 試證之.

(湘二屆)

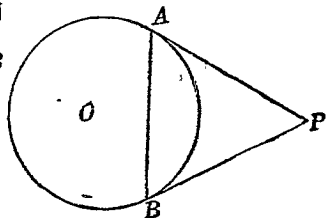
[解] 已知: PA 與 PB 切

於 O 圓, A, B

為切點.

求證: $\angle PAB$

$= \angle PBA$.



解析: 試利用等腰 \triangle 定理.

證明: $PA = PB$

(圓外一點至圓的二切線相等)

$\therefore \angle PAB = \angle PBA$ (等腰 \triangle 底角相等)

Q. E. D.

2. 以直角 $\triangle ABC$ 的斜邊 BC 為一邊, 作正方形 $BCDE$, 令對於 BC 不與三角形在同側. 若其對

角線交於 O , 證明 $\angle BAO = \angle CAO$.

[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中,

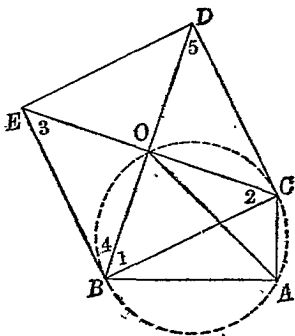
$$\angle A = \angle R.$$

(2) $BCDE$ 爲 E

正方形, 其

對角線交

於 O 點.



求證: $\angle BAO$
 $= \angle CAO$.

解析: 因 $\angle BOC = \angle R$, 故 B, A, C, O 共圓, 試作此補助圓考察之.

證明: $\because BC = CD, \therefore \angle 1 = \angle 5$.

(等腰 \triangle 底角)

但 $\angle 5 = \angle 4$, (內錯角) $\therefore \angle 1 = \angle 4$.

又因 $BC = BE, \therefore \angle 2 = \angle 3$.

(等腰 \triangle 底角)

於是 $\angle BOC = \angle BOE = \angle R$

$\therefore \angle BOC + \angle BAC = 2\angle R$,

而 B, A, C, O 四點共圓

(四邊形對角互相補, 則其頂點共圓)

今試作此圓，則因

$$\angle 1 = \angle 4 = \frac{1}{2} \angle R, \therefore \angle 2 = \frac{1}{2} \angle R$$

$$(\because \angle 1 + \angle 2 = \angle R)$$

$\therefore \angle 1 = \angle 2, \widehat{BO} = \widehat{CO}$ (張相等圓周角)

故 $\angle BAO = \angle CAO$ (夾相等之弧)

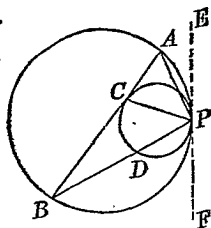
3. 二圓內切於 P ，外圓的弦 AB ，切內圓於 C 點，證明 PC 平分 $\angle APB$ 。

[解] 已知：(1) 兩圓內切於 P 。

(2) 外圓之弦 AB ，切內圓於 C 點。

求證： $\angle APC = \angle BPC$ 。

解析：試作公切線 EF ，利



用弦切角定理，則 $\angle APE = \angle ABP$ 。故

欲證明 $\angle APC = \angle BPC$ ，祇須證明

$$\angle CPE = \angle CBP + \angle CPB.$$

證明：作公切線 EF ，則

$$\angle CPE = \angle ACP \text{ (同夾內圓 } \widehat{CP} \text{)}$$

$$\angle APE = \angle CBP \text{ (外圓的弦切角)}$$

$$\text{但 } \angle ACP = \angle CBP + \angle CPB$$

(外角 = 內對角和)

$$\therefore \angle CPE = \angle CBP + \angle CPB$$

$$\text{即 } \angle APE + \angle APC = \angle CBP + \angle BPC$$

$$\therefore \angle APC = \angle BPC \quad (\text{等量減等量})$$

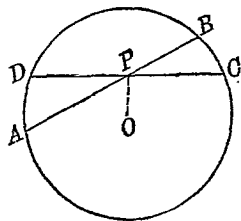
Q. E. D.

(D) 線不等的命題：

1. 一圓內非直徑之二弦，決不能互相等分，證明之。

[解] 已知： AB, CD 是 O 圓的二弦，相交於 P 。

求證： AB, CD 決不能互相等分。



解析： P 點可在 CD 之

中點上，祇須證其不為 AB 之中點。可用歸謬證法證之。

證明：(1) 若 P 點為 CD 之中點，假定 P 亦為 AB 之中點。則試聯 OP ，即有 $OP \perp CD, OP \perp AB$ 。

(圓心至弦中點之線，垂直於弦)

$\therefore CD \parallel AB$ (同一線的垂線)

但題設 CD 與 AB 相交，可知 $CD \nparallel AB$ 。

$\therefore P$ 不為 AB 之中點. *Q. E. D.*

(2) 若 P 點不為 CD 之中點, 則 P 雖為 AB 之中點, 亦不能互相平分.

Q. E. D.

2. 同圓中長弦離心較近, 短弦離心較遠.

(蘇女中)

[解] 此係定理, 證法見復與初中幾何 132 節. 其最重要的一步, 是利用“兩 \triangle 有兩邊相等, 夾角不等, 則第三邊亦不等”一定理, 然後再用“一 \triangle 不等邊對不等角”一定理. 惟尚有較簡的證明, 祇須利用後一定理即可. 讀者試過 A 點作 AE 弦等於 CD 弦, 而自證之.

3. 三角形小角的二等分線, 大於大角的二等分線.

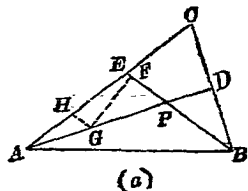
[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中,

$$\angle B > \angle A.$$

(2) AD, BE 是

$\angle A$ 與 $\angle B$

的平分線.



求證: $AD > BE$.

解析: $AP > PB$, 證之甚

易, 因 $\angle PAB$ 與

$\angle PBA$ 各為 $\angle A$

與 $\angle B$ 之半, 今

已知 $\angle CBA >$

$\angle CAB$, $\therefore \angle PBA > \angle PAB$, 而 $PA > PB$.

但 PD 與 PE , 却可有下述三關係中任

一關係, 即 $PD > PE$, $PD = PE$, 以及 PD

$< PE$ 便是. 若屬於前二種, 則由不等

量公理, 可證明本題結論; 若屬於第三

種, 則須利用平行移動法.

證明: $\angle PBA > \angle PAB$ (不等量之半)

$\therefore PA > PB$ (— \triangle 中, 大角所對之邊大)

假定 $PD \cong PE$, 則 $AD > BE$.

(大量加大量, 大於小量加小量; 不等量

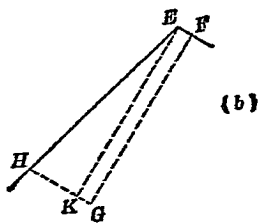
加等量, 大者仍大.)

假定 $PD < PE$, 則可在 PE 上截取 PF

$= PD$, 而在 PA 上截取 $PG = PB$. 聯 FG ,

並作 GH 平行於 PE , 與 AE 交於 H . 於是

$\triangle GPF \cong \triangle BPD$ (s. a. s. = s. a. s.)



$\therefore \angle GFP = \angle BDP$ (全等 \triangle 對應角)

又因 $\angle PAE + \angle PEA = \angle PBD + \angle BDP$

而 $\angle PAE < \angle PBD$

$\therefore \angle PEA > \angle BDP$

(等量減不等量, 減去小者, 所餘反大)

$\therefore \angle PEA > \angle GFP$

於是可在 $\angle PEA$ 內, 作 EK 線, 使 $\angle KEF = \angle GFP$.

則 $EK \parallel FG$ (\because 同位角相等)

$\therefore EK$ 必與 HG 相交, 且交點 K 必在 HG 線分之上. $\therefore HG > KG$ (全大於分)

但 $KG = EF$ (\square 對邊相等), $\therefore HG > EF$.

又 $\angle AHG = \angle AEP$, $\therefore \angle AHG > \angle GFP$,

$\therefore \angle AHG > \angle BDP$.

但 $\angle BDP > \angle CAD$

(\triangle 外角大於內對角)

$\therefore \angle AHG > \angle HAG$, 而 $AG > HG$.

於是 $AG > EF$. 因 $GD = BF$ (等量之和)

$\therefore AG + GD > EF + BF$, 即 $AD > BE$.

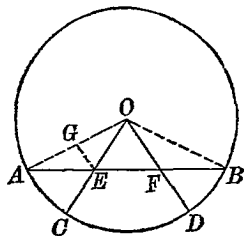
Q. E. D.

(E) 弧不等的命題：

1. 將弦三等分的半徑，其所截弧不相等，中間較大，試證明之。

[解] 已知：(1) AB 為 O 圓之弦。

(2) 半徑 OC, OD 交 AB 於 $E, F, AE = EF = FB$ 。



求證： $\widehat{AC} < \widehat{CD}$ 。

解析：欲證 $\widehat{AC} < \widehat{CD}$ ，可證 $\angle AOC < \angle COD$ 。

OE 為 $\triangle AOF$ 的中線，若能證明 $OF < OA$ ，則此題即等於“不等腰 \triangle 底邊上中線，與兩腰所夾之角不等，與小腰所夾者大”。

證明： $OF < OA$

(圓內一點至圓心距離，小於半徑)

過 E 作 $EG \parallel OF$ ，與 OA 交於 G 點。

則 $AG = GO, EG = \frac{1}{2}OF$ 。

(過 \triangle 一邊中點，平行於底之線，必過他邊中點，且在兩邊間的線分，等於底之

半.)

$\therefore EG < OG$ (不等量之半)

而 $\angle GOE < \angle GEO$

(\triangle 大邊所對之角大)

但 $\angle GEO = \angle EOF$ ($\because EG \parallel OF$)

$\therefore \angle AOC < \angle COD$

$\widehat{AC} < \widehat{CD}$

Q. E. D.

(此題亦可用歸謬法證明,讀者試自證之.)

2. 同圓中 AC 弦等於 AB 弦的二倍,證明 $\widehat{AB} < \widehat{BC}$.

[解] 已知: O 圓中, $AC = 2AB$.

求證: $\widehat{AB} < \widehat{BC}$.

解析: 試聯 BC 弦, 證明

$AB < BC$.

證明: 聯結 BC , 則

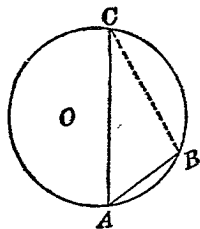
$AC < AB + BC$.

(兩點間距離, 直線最短).

但 $AC = 2AB$, $\therefore 2AB < AB + BC$.

即 $AB < BC \therefore \widehat{AB} < \widehat{BC}$ Q. E. D.

(不等弦所張之弧不等, 弦大者弧大.)



(F) 角不等的命題：

1. 不等腰 \triangle 底邊上中線，與兩腰所夾之角不等，與小腰所夾者大。

(此題之證法，已見弧不等命題例 1，但此處再示第二種證法，以供讀者研究。)

[解] 已知：(1) CM 為 $\triangle ABC$ 的中線。

(2) $AC < BC$ 。

求證： $\angle ACM > \angle BCM$ 。

解析：試利用平行移動法，將 CB 移至 AD 。

可證明 CMD 為一直線。故本題須作補助線 AD 。

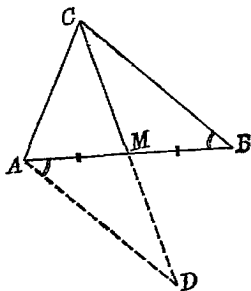
證明：作 $AD \parallel BC$ ，並與 CM 延長線交於 D ，則 $\triangle AMD \cong \triangle BMC$ (a. s. a = a. s. a.)

$\therefore AD = BC$ 而 $AC < AD$

於是 $\angle ACM > \angle ADC > \angle BCM$ Q. E. D.

2. 平行四邊形對角線，不平分對角，鄰短邊者較大，證明之。

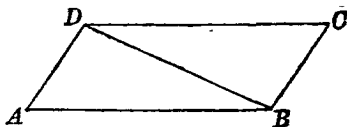
(初學者每誤以為 \square 對角線平分對角，故舉此



例.)

[解] 已知: (1) $ABCD$ 爲 \square .

(2) $AD < CD$.



求證: $\angle ADB > \angle CDB$.

解析: 可利用一 \triangle 不等邊角定理.

證明: $AD < CD$, 即 $AD < AB$ ($\because AB = CD$)

$\therefore \angle ADB > \angle ABD$

(一 \triangle 大邊所對之角大)

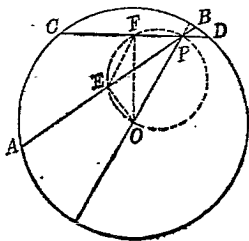
但 $\angle ABD = \angle CDB$ (內錯角)

$\therefore \angle ADB > \angle CDB$ Q. E. D.

3. 過圓內一點的兩不等弦, 與過同一點之直徑, 交成不等角, 短者與直徑交成大角.

[解] 已知: (1) P 爲 O 圓中直徑上之一點.

(2) AB, CD 爲過 P 的二弦.



(3) $AB > CD$.

求證： $\angle APO < \angle DPO$

解析：若自 O 作 AB, CD 之垂線 OE, OF , 則 O, P, E, F 共圓. 作出此圓, 試考察之.

證明：從 O 作垂線至 AB, CD , 其垂足為 E 與 F . 則 O, P, E, F 共圓 (因 OP 在 E, F 張等角) 作出此圓, 並聯 EF , 則

$$\angle APO = \angle EFO \quad (\text{夾同弧之圓周角})$$

$$\angle DPO = \angle OEF \quad (\text{圓內接四邊形外角} = \text{內對角})$$

但 $OE < OF$ (大弦離心較近)

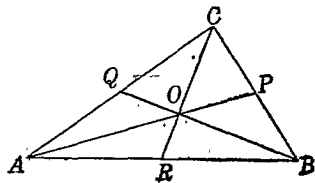
$\therefore \angle EFO < \angle OEF$ (一 \triangle 中大邊所對之角大)

即 $\angle APO < \angle DPO$ Q. E. D.

(G) 面積相等的命題：

1. 證明三角形三中線, 分原形為六個等積三角形.

[解] 已知： AP, BQ, CR
為 $\triangle ABC$ 之
三中線.



求證：三中線分原形爲六個等積三角形。

解析：因三中線交於一點，故可利用△重心定理，及△面積公式。

證明：AP, BQ, CR交於一點，命此點爲O。

則 $OA=2OP$, $OB=2OQ$, $OC=2OR$ 。

(三角形之三中線共點，各中線被此點分成兩線段，近頂點者，爲近中點者的2倍。)

今以三中線爲底，考察此六個三角形，

則 $\triangle AOR = \frac{1}{2}\triangle AOC$; $\triangle BOP = \frac{1}{2}\triangle AOB$;

$$\triangle COQ = \frac{1}{2}\triangle BOC$$

(高相同，底等於一半。)

但以三邊爲底，考察此六三角形，則

$$\left. \begin{aligned} \triangle AOR &= \triangle BOR = \frac{1}{2}\triangle AOB \\ \triangle BOP &= \triangle COP = \frac{1}{2}\triangle BOC \\ \triangle COQ &= \triangle AOQ = \frac{1}{2}\triangle AOC \end{aligned} \right\} \text{(等底等高)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle AOR &= \triangle BOR = \triangle BOP = \triangle COP \\ &= \triangle COQ = \triangle AOQ. \end{aligned}$$

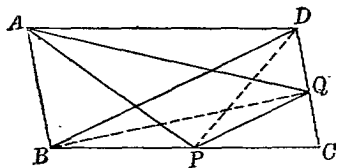
Q. E. D.

2. 平行四邊形 ABCD 中，平行於對角線 BD 之直

線,與 BC, CD 相遇於 P, Q . 證明 $\triangle ABP = \triangle ADQ$.

[解] 已知: (1) $ABCD$ 爲 \square .

(2) $PQ \parallel BD$, 遇 BC, CD 於 P, Q .



求證: $\triangle ABP = \triangle ADQ$

解析: 試利用二平行線間等積 \triangle 定理.

證明: 聯 BQ, PD , 則

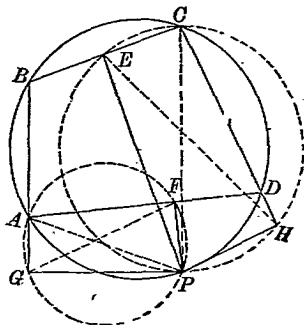
$$\triangle ABP = \triangle DBP \quad (\because AD \parallel BP)$$

$$\triangle ADQ = \triangle BDQ \quad (\because AB \parallel DQ)$$

$$\text{但 } \triangle DBP = \triangle BDQ \quad (\because PQ \parallel BD)$$

$$\therefore \triangle ABP = \triangle ADQ. \quad \text{Q. E. D.}$$

3. 從圓周的一點,至此
圓內接四邊形的兩
雙對邊,各作兩雙垂
線,則此兩雙垂線所
包的兩矩形相等.證
明之.



[解] 已知: (1) $ABCD$ 是圓內接四

邊形.

(2) P 是圓上一點.

(3) $PE \perp BC, PF \perp AD,$

$PG \perp AB, PH \perp CD.$

求證: PE 與 PF 所包 $\square = PG$ 與 PH 所包矩形.

解析: 因 P, E, C, H 共圓, P, G, A, F 亦共圓, 故

可作此二圓, 試觀察有無相似三角形的比例關係, 以證 $PE \times PF = PG \times PH$.

證明: $\angle PGA = \angle R = \angle PFA, \therefore P, G, A, F$ 共圓.

$\angle PEC = \angle R = \angle PHC, \therefore P, E, C, H$ 共圓.

今試作此二圓, 而聯結 $PA, GF, PC, EH,$

則 $\angle PGF = \angle PAF$ (同夾 \widehat{PF})

$\angle PEH = \angle PCH$ (同夾 \widehat{PH})

但 $\angle PAF = \angle PCH$ (同夾 \widehat{PD})

$\therefore \angle PGF = \angle PEH$

(等於等量之量互等)

又 $\angle PFG = \angle PAG$ (同夾 \widehat{PG})

$\angle PHE = \angle PCE$ (同夾 \widehat{PE})

但 $\angle PAG = \angle PCE$

(圓內接四邊形外角等於內對角)

$$\therefore \angle PFG = \angle PHE$$

故 $\triangle GPF \sim \triangle EPH$

$$\text{而 } PG : PE = PF : PH$$

(兩 \triangle 有二角等, 則相似)

$$\text{即 } PE \times PF = PG \times PH \quad (\text{比例定理})$$

故 PE 與 PF 所包 $\square = PG$ 與 PH 所包 \square .

(矩形面積定理)

Q. E. D.

(H) 兩比相等的命題:

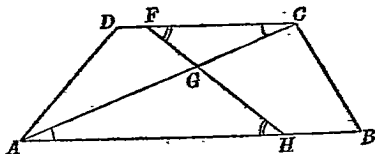
1. FH 橫截 $ABCD$ 梯形內 CA 對角線於 G , 試證:

$$FG : GH = CG : GA$$

(暨南附中)

【解】 已知: (1) $ABCD$ 為梯形.

(2) FH 交 AC 於 G .



求證: $FG : GH = CG : GA$

解析: 利用相似 \triangle 定理.

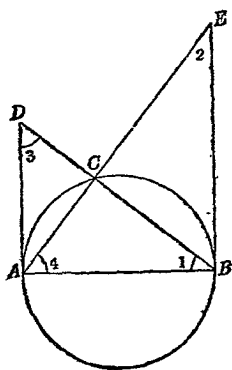
證明: $\angle GAH = \angle GCF$, $\angle GHA = \angle GFC$.

$$\therefore \triangle GAH \sim \triangle GCF$$

$$FG : GH = CG : GA$$

Q. E. D.

2. 如圖 AD, BE 切一圓於其直徑兩端, 倘 BD 與 AE 相遇於圓上 C 點, 試證 AB 是 AD, BE 間的比例中項. (敬業)



[解] 已知: 如題所述.

求證: $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BE}$.

解析: 試證 $\triangle ABD, ABE$ 相似.

證明: $\angle ACB = \angle R \therefore \angle 1 + \angle 4 = \angle R$

但 $\angle 2 + \angle 4 = \angle R$ ($\because BE$ 爲切線)

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ 同樣可證 $\angle 3 = \angle 4$

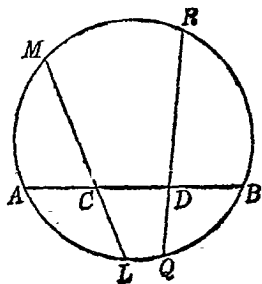
$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BEA, AD : AB = AB : BE$

即 $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BE}$ Q. E. D.

3. 過一弦之三等分點, 引任意二弦, 則此二弦被第一弦所分一側兩線段, 與他側兩線段成反比例; 證明之.

[解] 已知: (1) C, D 三等分 AB 弦.

(2) LM, QR 爲過



C 與 D 之任意二弦.

求證: $CL : DQ = DR : CM$

解析: 利用交弦比例線段定理.

$$\text{證明: } CL \times CM = AC \times CB = \frac{1}{3}AB \times \frac{2}{3}AB = \frac{2}{9}AB^2$$

$$DQ \times DR = DB \times AD = \frac{1}{3}AB \times \frac{2}{3}AB = \frac{2}{9}AB^2$$

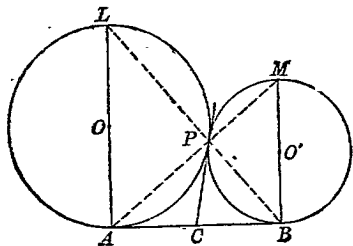
(交弦線段定理, $AC = CD = DB = \frac{1}{3}AB$)

$$\therefore CL \times CM = DQ \times DR$$

$$\text{即 } CL : DQ = DR : CM \quad Q, E. D.$$

4. 兩圓外切, 其外公切線長, 是兩圓直徑的比例中項.

[解] 已知: (1) O, O'
二圓



外切於 P 點.

(2) AL, BM 是直徑.

$$\text{求證: } \overline{AB}^2 = \overline{AL} \cdot \overline{BM}.$$

解析: 因 $\angle PAB = \angle L$, $\angle PBA = \angle M$, 故若能證明 AM 與 BL 交於 P 點, 即可證明 $\triangle ABM$ 與 $\triangle LAB$ 相似.

證明：聯 PA, PM, PB, PL ，並作公切線 PC ，與 AB 交於 C 點。則 $\angle APL = \angle R = \angle BPM$ 。

但 $AC = CP = CB$ ， $\therefore AB$ 為 $\triangle ABP$ 外接圓的直徑，而 $\angle APB = \angle R$ 。

於是 $\angle APL + \angle APB = 2\angle R$

$$\angle BPM + \angle APB = 2\angle R$$

$\therefore APM$ 與 BPL 都成一直線。

又因 $\angle PAB = \angle PLA$ (同夾 \widehat{AP})

$\angle PBA = \angle PMB$ (同夾 \widehat{BP})

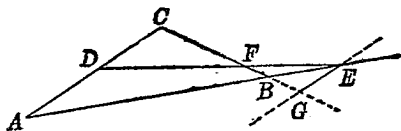
$\therefore \triangle ABM \sim \triangle LAB$, $BM : AB = AB : AL$

即 $\overline{AB}^2 = \overline{AL} \cdot \overline{BM}$ Q. E. D.

5. 在 $\triangle ABC$ 的邊 AC 上，取任意一點 D ，延長 AB 至 E ，使 $BE = CD$ ，若 DE 與 BC 相交於 F 點，則 $DF : FE = AB : AC$ 。證明之。

[解] 已知：如題所述。

求證：如題所述。



解析：須覓得另一對比例線分，作為媒介。

證明：過 E 點，作 $EG \parallel AC$ ，與 CB 延長線交於 G 。則 $\triangle DFC \sim \triangle EFG$ ，（ \because 三角相等）

$$\therefore DF : FE = CD : EG.$$

但 $CD = BE$ ，

$$\therefore DF : FE = BE : EG. \quad (\text{等量代替})$$

又因 $\triangle BAC \sim \triangle BEG$ ，（三角相等）

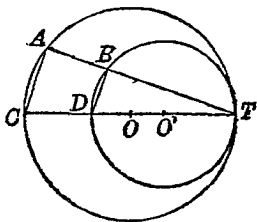
$$\therefore BE : EG = AB : AC,$$

$$\therefore DF : FE = AB : AC. \quad Q. E. D.$$

6. 兩圓內切，則大圓中過切點之弦，被小圓所分兩線段，成定比。試證明之。

[解] 已知：(1) O 圓與 O' 圓相切於 T 。

(2) TA 弦交 O' 圓於 B 。



求證： $TB : AB =$ 定比

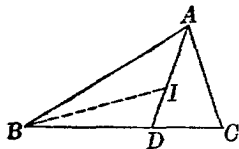
解析：題言定比，則必求定線，但除直徑外，無他定線，故作大圓之直徑，而考察其中有無比例線段。

證明：過 T 作大圓直徑 TC ，則 TC 必過小圓中心。若 TC 交小圓於 D ，則 TD 即為小圓之直徑。聯 AC ， BD ，則

$$\angle CAT = \angle R = \angle DBT, \therefore BD \parallel AC.$$

於是 $TB : AB = TD : DC =$ 定比.

7. 設 $\triangle ABC$ 的內心為 I , AI 與 BC 的交點為 D , 則 $AI : ID = (AB + AC) : BC$, 證之.



[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: I 在 $\angle A$ 與 $\angle B$ 的平分線上, 故可利用 \triangle 分角線比例定理.

證明: 聯 BI , 則 $\angle ABI = \angle DBI$, (因 I 為內心)

$$\therefore AI : ID = AB : BD.$$

(\triangle 頂角平分線分底邊為二線分, 與兩腰成比例.)

又因 $\angle BAI = \angle CAI$,

$$\therefore AB : AC = BD : DC. \quad (\text{同上})$$

$$(AB + AC) : AC = (BD + DC) : DC,$$

(合比定律)

$$\text{即 } (AB + AC) : BC = AC : DC. (\text{交比定律})$$

但 $AC : DC = AB : BD$, (交比定律)

$$\therefore AI : ID = (AB + AC) : BC. \quad Q. E. D.$$

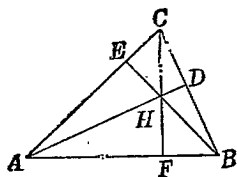
8. 三角形垂心所分三高之三雙線段, 積相等, 試證.

[解] 已知: (1) 三角形 ABC

的高為

AD, BE, CF .

(2) 垂心為 H .



求證: $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$.

解析: 可利用交弦線段定理.

證明: $\angle AEB = \angle R = \angle ADB$,

$\therefore A, E, D, B$ 共圓.

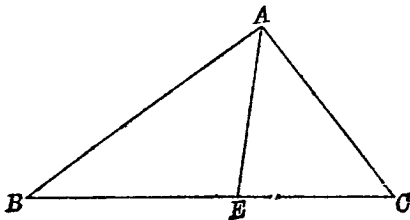
於是 $AH \cdot HD = BH \cdot HE$. (交弦線段)

同樣可證 $BH \cdot HE = CH \cdot HF$,

$\therefore AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$. Q. E. D.

(I) 和差倍分關係的命題:

1. ABC 為一任意三角形, $\angle A$ 之二等分線與 BC



相會於 E . 證 $\angle AEC = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$ (滬 23)

[解] 已知: $\triangle ABC$ 中, EA 平分 $\angle A$, 與 BC 相會於 E 點.

求證: $\angle AEC = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$.

解析: 利用 \triangle 內角和定理與等量公理.

證明: $\angle AEC = \angle B + \angle BAE$,

(\triangle 外角 = 內對角和)

$2\angle AEC = 2\angle B + 2\angle BAE$, (等量之倍)

但 $2\angle BAE = \angle BAC$, (已知)

$\therefore 2\angle AEC = \angle BAC + \angle B + \angle B$,

(等量代替)

於是 $2\angle AEC + \angle C = \angle BAC + \angle B + \angle C$
 $+ \angle B$, (等量之和)

但 $\angle BAC + \angle B + \angle C = 180^\circ$,

(\triangle 內角和定理)

$\therefore 2\angle AEC + \angle C = 180^\circ + \angle B$,

即 $2\angle AEC = 180^\circ + \angle B - \angle C$.

$\therefore \angle AEC = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$. $Q. E. D.$

2. 直角三角形內切圓之直徑與斜邊之和, 等於

餘二邊之和。 (皖)

[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中,

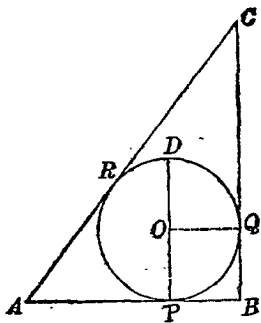
$$\angle B = \angle C.$$

(2) O 圓內切於

$\triangle ABC$, 其切

點為 P, Q, R .

(3) PD 為直徑.



求證: $AC + PD = AB + BC$.

解析: 試將 AC, PD, AB, BC 分成相等線分,
而證其和相等.

證明: $AR = AP, CR = CQ$, (一點至圓兩切線等)

$$\therefore AR + RC = AC = AP + CQ.$$

試作半徑 OQ , 則 $OQ \perp BQ$.

(過切點之半徑, 垂直於切線.)

$$\therefore OQ \parallel PB. \quad (\text{同為 } BQ \text{ 之垂線})$$

$$\text{又 } OP \perp PB, \quad QB \perp PB, \quad \therefore OP \parallel QB.$$

於是 $OPBQ$ 為正方形.

$$\text{而 } OP = QB, \quad OQ = PB,$$

$$\therefore OP + OQ = PB + QB.$$

$$\text{但 } OQ = OD, \quad (\text{半徑相等})$$

$$\therefore PD = PB + QB.$$

於是 $AC + PD = AP + CQ + PB + QB$,

$$\text{即 } AC + PD = AB + BC. \quad \text{Q. E. D.}$$

3. 於梯形不平行兩

邊中點聯 EF 線,

試證:

(1) G, H 爲 BC, AD

兩對角線中點.

$$(2) EF = \frac{1}{2}(AC + BD).$$

$$(3) GH = \frac{1}{2}(BD - AC).$$

(漢口)

[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 若能證明 $EF \parallel BD \parallel AC$, 即可利用△兩邊中點聯線的定理與逆定理.

證明: (1) 過 F 點, 作 $LM \parallel AB$, 與 AC, BD 交於 L 與 M .

(平行移動法)

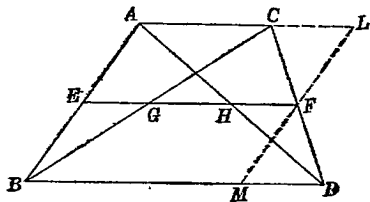
則因 $CF = FD, CL \parallel MD$, (已知)

$\therefore \triangle FMD \cong \triangle FLC. (a. s. a. = a. s. a.)$

而 $FL = FM = \frac{1}{2}LM$,

但 $LM = AB$,

(□對邊)



$$\therefore FL = \frac{1}{2} AB = AE.$$

故 $AEFL$ 爲 \square , 而 $EF \parallel AC \parallel BD$,

(都平行於第三線)

$\therefore G, H$ 爲 BC, AD 之中點. $Q. E. D.$

(過 \triangle 一邊中點, 平行底邊之線, 必過他邊中點.)

$$(2) \quad EH = \frac{1}{2} BD, \quad HF = \frac{1}{2} AC.$$

(\triangle 兩邊中點之聯線, 等於底邊之半.)

$$\therefore EH + HF = EF = \frac{1}{2}(AC + BD).$$

$Q. E. D.$

$$(3) \quad EH = \frac{1}{2} BD, \quad EG = \frac{1}{2} AC,$$

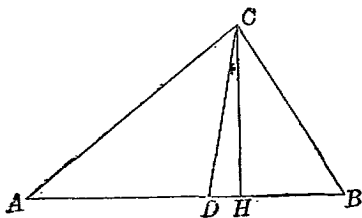
$$\therefore EH - EG = GH = \frac{1}{2}(BD - AC).$$

$Q. E. D.$

4. 於三角形之角頂, 作其角之平分線, 及至對邊之高, 則此二線所成之角, 等於兩底角差之半, 試證之. (續 22)

[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中, $CH \perp AB$.

(2) CD 平分 $\angle ACB$.



求證： $\angle DCH = \frac{1}{2}(\angle B - \angle A)$.

解析：利用 \triangle 內角和定理與等量公理，本題即可得證。

證明： $\angle DCH = \angle R - \angle CDH$. ($\because \angle DHC = \angle R$)

$$2\angle DCH = 2\angle R - 2\angle CDH.$$

但 $\angle A + \angle B + \angle ACB = 2\angle R$, (內角和)

$\angle CDH = \angle A + \angle ACD$, (外角)

$$\begin{aligned} \therefore 2\angle DCH &= \angle A + \angle B + \angle ACB \\ &\quad - 2\angle A - 2\angle ACD \\ &= \angle B - \angle A + \angle ACB - 2\angle ACD. \end{aligned}$$

但 $2\angle ACD = \angle ACB$, (已知)

$$\therefore 2\angle DCH = \angle B - \angle A,$$

$$\text{即 } \angle DCH = \frac{1}{2}(\angle B - \angle A). \quad \text{Q. E. D.}$$

5. 圓外切四邊形相對二邊之和，等於其他相對二邊之和。證明之。 (浙 22)

[解] 已知：四邊形 $ABCD$ 外切於 O 圓，其切點為

$P, Q, R, S.$

求證: $AB + CD = AD$

$+ BC.$

解析: 可利用「兩切線
相等」的定理.

證明: $AP = AS, BP = BQ,$

$\therefore AB = AS + BQ.$

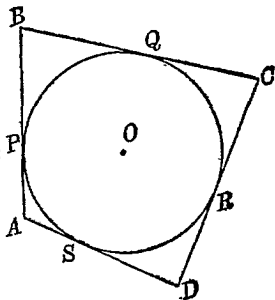
$DR = DS, CR = CQ,$

$\therefore CD = DS + CQ,$

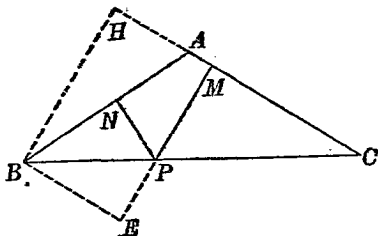
$\therefore AB + CD = AS + DS + BQ + CQ$

$= AD + BC.$

Q. E. D.



6. 在二等邊三角形之底取一點, 引二直線垂直於二等邊, 則二垂線之和等於其等邊上之高, 證明之. (省立上海中學)



【解】 已知: (1) $\triangle ABC$ 中 $AB = AC.$

(2) P 為 BC 上一點,

$$PM \perp AC, PN \perp AB.$$

(3) BH 爲 AC 上之高.

求證: $PM + PN = BH$.

解析: 若延長 MP 至 E , 使 $PE = PN$, 而能證明 $ME = BH$, 本題即可得證. 欲證 $ME = BH$, 可證 $MEBH$ 爲 \square , 故本題主要關鍵, 在於證明 $BE \parallel HM$.

證明: 延長 MP 至 E , 使 $PE = PN$, 聯 BE .

$$\therefore \angle NBP = \angle C, \angle BNP = \angle R = \angle PMC,$$

$$\therefore \angle NPB = \angle MPC = \angle EPB.$$

於是 $\triangle BNP \equiv \triangle BEP$, (s. a. s. = s. a. s.)

而 $\angle PBE = \angle PBN = \angle C$, $\therefore BE \parallel HM$.

但 $HB \parallel ME$, (同爲 AC 的垂線)

$\therefore MEBH$ 爲 \square , 而 $ME = BH$,

即 $PM + PN = BH$.

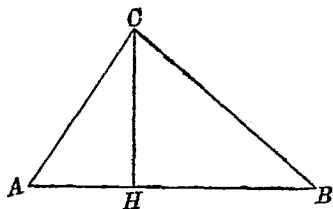
Q. E. D.

7. 三角形兩邊平方之差, 等於自頂角至第三邊作垂線所分第三邊二線分平方之差. (太倉中學)

[解] 已知: $\triangle ABC$ 中, $CH \perp AB$.

$$\text{求證: } \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BH}^2 - \overline{AH}^2$$

解析: 可用商高定理.



證明： $\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$, $\overline{AC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2$

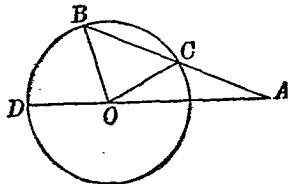
$\therefore \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BH}^2 - \overline{AH}^2$ Q. E. D

8. 證明：

若 $AC = OC$,

則 $\angle DOB = 3 \angle A$.

(之江附中)



【解】 已知：如題所述，求證：如題所述。

解析：因 $\angle DOB = \angle B + \angle A$ ，故祇須證明

$\angle B = 2 \angle A$.

證明： $\angle DOB = \angle B + \angle A$ ，

但 $\angle B = \angle OCB$, $\angle OCB = \angle A + \angle COA$,

$\therefore \angle DOB = 2 \angle A + \angle COA$.

但因 $AC = OC$, $\therefore \angle COA = \angle A$,

於是 $\angle DOB = 3 \angle A$. Q. E. D

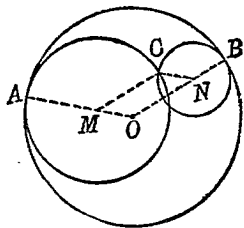
9. 相交二小圓 M, N 各與大圓 O 內切於 A, B ，其二

交點中接近 \widehat{AB} 之一點為 C . 若 $\odot M, N$ 半徑之和, 等於 $\odot O$ 之半徑, 則 $\widehat{AC} + \widehat{CB} = \widehat{AB}$. (大同附中)

[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 因三弧不在同圓上, 故須利用弧長公式以證之.



證明: 聯中心線 OM, ON , 並延長之, 必通過 A, B ; 再聯半徑 MC 與 NC . 則因

$$MA + NC = OA, MC + NB = OB, \quad (\text{已知})$$

$$\therefore NC = OM, MC = ON, \quad (\text{各減同量})$$

$\therefore OMCN$ 為 \square .

$$\text{而 } \angle AMC = \angle CNB = \angle AOB$$

若命此三角對於周角之比為 k 則

$$\widehat{AC} = 2k\pi \cdot \overline{MA}, \widehat{CB} = 2k\pi \cdot \overline{NB},$$

$$\widehat{AB} = 2k\pi \cdot \overline{OA},$$

$$\text{於是 } \widehat{AC} + \widehat{CB} = 2k\pi(\overline{MA} + \overline{NB}) = 2k\pi \cdot \overline{OA}$$

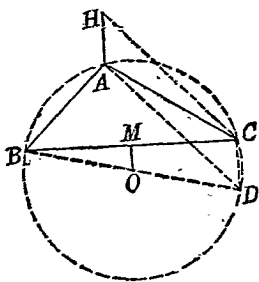
$$\text{即 } \widehat{AC} + \widehat{CB} = \widehat{AB}. \quad \text{Q. E. D.}$$

10. 三角形的垂心到頂點之距離, 等於外心到底邊中點距離的 2 倍.

[解] 已知: O 為 $\triangle ABC$ 的外
心, H 為其垂心,
 M 為 BC 中點.

求證: $HA = 2OM$.

解析: 若以 AH 平行移
動, 使 H 至 C , A 至



D , 則 D 在 \triangle 外接圓上. 故試作 $\triangle ABC$
的外接圓, 而考察 DC 與 OM 的關係.

證明: 作 $\triangle ABC$ 的外接圓, 而作直徑 BOD , 並
聯 CD, DA, CH .

$\angle BCD = \angle R$, $\therefore DC \parallel OM$ (同為 BC 之 \perp),
 $BO = OD, BM = MC, \therefore DC = 2OM$.

但 $\angle BAD = \angle R$,

$\therefore CH \parallel AD$. (同為 AB 之 \perp)

又 $AH \parallel OM$, (同為 BC 之 \perp)

$\therefore AH \parallel CD$. (都與 OM 平行)

於是 $AHCD$ 為 \square , 而 $AH = CD$

$\therefore HA = 2OM$. Q. E. D.

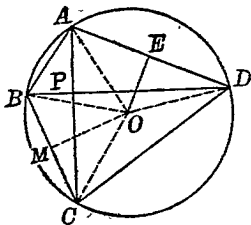
11. 圓內接四邊形對角線若互相正交, 則自圓心
到一邊的距離, 等於該邊對邊的一半

[解] 已知: (1) 四邊形

$ABCD$ 內接

於 O 圓.

(2) $OE \perp AD$.



求證: $OE = \frac{1}{2}BC$.

解析: 自 O 至 BC 中點 M 聯線, 則 $OM \perp BC$.

若可證明 $BM = OE$, 則可證明 $\triangle AOE \cong \triangle OBM$. 故本題在於證明此兩三角形全等.

證明: 取 BC 中點 M , 聯 OM , 並聯 OA . 則

$$\angle BMO = \angle R = \angle OEA, \text{ 又聯 } OC, OD.$$

$$\angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\widehat{BC}^\circ,$$

$$\angle AOE = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\widehat{AD}^\circ,$$

$$\text{但 } \angle BPC = \frac{1}{2}(\widehat{BC}^\circ + \widehat{AD}^\circ) = \angle R,$$

(交弦角等於所夾兩弧度數半和)

$$\therefore \angle BOM + \angle AOE = \angle R.$$

$$\text{因 } \angle AOE + \angle OAE = \angle R,$$

$$\therefore \angle BOM = \angle OAE.$$

$$\text{又 } OB = OA,$$

(半徑)

$$\therefore \triangle OBM \equiv \triangle AOE \quad (\text{s. a. a.} = \text{s. a. a.})$$

於是 $BM = OE$, 但 $BM = \frac{1}{2} BC$,

$$\therefore OE = \frac{1}{2} BC. \quad \text{Q. E. D.}$$

12. $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 2\angle B$ 時, 設 $\angle A$ 的二等分線, 與 BC 相交於 D 點, 則 $AB - AC = CD$. 證明之.

[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 延長 AC 至 E ,

使 $CE = CD$, 並

聯 ED . 若可證

明 $AB = AE$, 則 B

因 $\angle BAD = \angle CAD$, 故可證明 $\triangle BAD$

$\equiv \triangle EAD$. 於是本題歸至證明此兩三

角形是全等形.

證明: $\because CE = CD, \therefore \angle E = \angle CDE$.

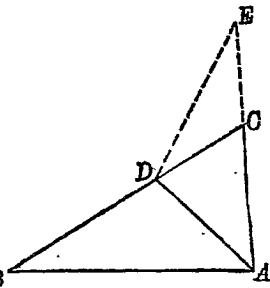
$$\therefore \angle ACD = 2\angle E, \text{ 但 } \angle ACD = 2\angle B,$$

$$\therefore \angle E = \angle B. \quad (\text{等量之半})$$

又 $\angle BAD = \angle EAD, AD = AD,$

故 $\triangle BAD \equiv \triangle EAD. \quad (\text{s. a. a.} = \text{s. a. a.})$

$\therefore AB = AE$, 即 $AB - AC = CD, \text{ Q. E. D.}$



13. 正 $\triangle ABC$ 內接於圓, P 爲 \widehat{BC} 上一點, 證明
 $PA = PB + PC$.

[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 在 PA 上截取

$PE = PC$. 若可證 $AE = BP$, 本題即解決

但 $AC = BC$, $\angle CAE = \angle CBP$, 故若

$AE = BP$, 則 $\triangle CAE \cong \triangle CBP$.

證明: 在 PA 上截取 $PE = PC$, 並聯 EC , 則

$$\angle PEC = \angle PCE.$$

但 $\angle EPC = \angle ABC$ (夾同弧 \widehat{AC})

而 $\angle ABC = \frac{2}{3}\angle R$, ($\because AB = BC = CA$)

$$\therefore \angle PEC = \angle PCE = \angle EPC = \frac{2}{3}\angle R.$$

於是 $\angle AEC = \frac{4}{3}\angle R$.

但 $\angle BPC + \angle BAC = 2\angle R$,

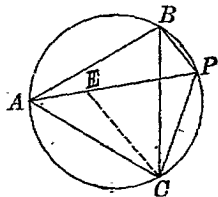
而 $\angle BAC = \frac{2}{3}\angle R$,

$$\therefore \angle BPC = \frac{4}{3}\angle R = \angle AEC.$$

又因 $\angle EAC = \angle PBC$, (夾同弧 \widehat{PC})

$AC = BC$, (已知)

$$\therefore \triangle CAE \cong \triangle CBP. \quad (s. a. a. = s. a. a.)$$



$$AE = PB, \therefore PE + AE = PC + PB,$$

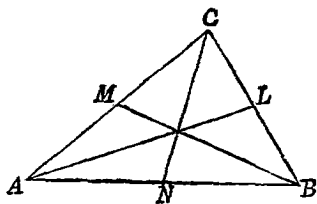
$$\text{即 } PA = PB + PC$$

Q. E. D.

14. 三角形各中線平方

和,等於各邊平方和
的四分之三,證明之.

[解] 已知: $\triangle ABC$ 之
三中線為



$AL, BM, CN.$

$$\text{求證: } \overline{AL}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \frac{3}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2).$$

解析: 利用「 \triangle 兩邊平方和等於底邊中線平方,與半底平方之和的2倍」一定理,
證明 $4(\overline{AL}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2) = 3(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2)$

$$\text{證明: } \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{CM}^2,$$

$$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 2\overline{CN}^2 + 2\overline{AN}^2,$$

$$\overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{AL}^2 + 2\overline{BL}^2,$$

$$\therefore 2(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2) = 2(\overline{AL}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2) + 2(\overline{AN}^2 + \overline{BL}^2 + \overline{CM}^2),$$

$$\text{即 } 4(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2) = 4(\overline{AL}^2$$

$$+ \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2) + 4(\overline{AN}^2 + \overline{BL}^2 + \overline{CM}^2),$$

$$\text{但 } 4(\overline{AN}^2 + \overline{BL}^2 + \overline{CM}^2) = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$$

$$\begin{aligned} \therefore 3(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2) \\ = 4(\overline{AL}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2), \\ \text{即 } \overline{AL}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \frac{3}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2) \end{aligned}$$

Q. E. D.

15. 在直角三角形三邊上, 各作一正 \triangle , 則斜邊上的正 \triangle , 等於兩股上的正 \triangle 和。

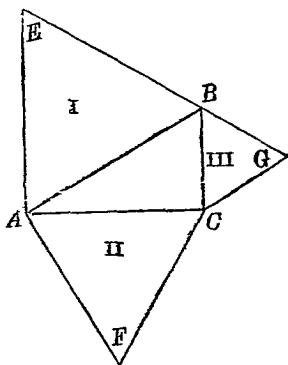
[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中,

$$\angle C = \angle R.$$

(2) $\triangle ABE,$

$\triangle ACF, \triangle BCG$

是正 \triangle .



求證: $\triangle I = \triangle II + \triangle III$.

解析: 三個 \triangle 是相似的, 故利用相似形面積比及商高定理可以得證。

證明: $\triangle I \sim \triangle II \sim \triangle III$,

(因為各角都等於 $\frac{2}{3}\angle R$)

$$\therefore \triangle II : \triangle I = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2,$$

$$\triangle III : \triangle I = \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2.$$

(相似 \triangle 面積比, 等於對應邊平方比)

$$\therefore (\triangle II + \triangle III) : \triangle I = (\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2) : \overline{AB}^2,$$

$$\text{但 } \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2, \quad (\text{商高定理})$$

$$\therefore (\triangle II + \triangle III) : \triangle I = 1,$$

$$\text{即 } \triangle I = \triangle II + \triangle III.$$

Q. E. D.

16. 在 $\triangle ABC$ 的

邊 AB, BC 上,

各作 $\square ABDE,$

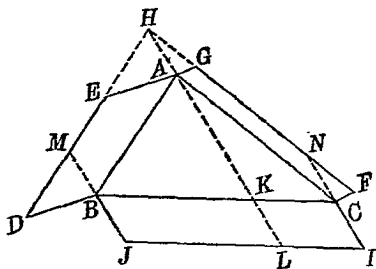
$ACFG$; 延長

DE 與 FG , 相交

於 H ; 聯結 $H,$

A , 再在 BC 上作 $\square BCIJ$, 使 $BJ = HA, BJ \parallel HA$,

則 $\square BCIJ = \square ABDE + \square ACFG$. 證明之.



【解】 已知：如題所述。

求證：如題所述。

解析：延長 HA , 交 BG, IJ 於 K, L , 則將 $\square BCIJ$ 分成兩平行四邊形。若能證此兩平行四邊形各等於 \triangle 邊上兩 \square , 本題就解決了。

證明：延長 JB , 與 DE 交於 M , 延長 IC , 與 FG 交於 N 。

則 $\square ABDE = \square ABMH$,

$\square ACFG = \square ACNH$.

(兩平行線間同底平行四邊形等積)

但因 $HA = BJ = KL$;

$\therefore \square ABMH = \square BKLJ, \square ACNH = \square KCIL$.

於是 $\square ABDE + \square ACFG = \square BKLJ$

$+ \square KCIL$,

即 $\square BCIJ = \square ABDE + \square ACFG$. Q. E. D.

17. 從梯形短底，引一腰的平行線，若將梯形分成等積的 \square 與 \triangle ，則長底為短底的三倍。試證之。

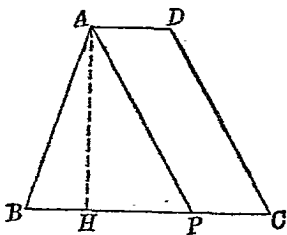
[解] 已知：(1) 梯形

$ABCD$ 中，

$AP \parallel DC$.

(2) $\triangle ABP =$

$\square APCD$.



求證： $BC = 3AD$

解析：試證 $BP = 2PC$ ，本題即可得證。

因為 $PC = AD$ 。

證明： $\triangle ABP$ 之高 AH ，則 AH 亦為 $\square APCD$ 之高。

於是 $\triangle ABP = \frac{1}{2} BP \cdot AH$

$$\square APCD = PC \cdot AH.$$

$$\therefore \triangle ABP = \square APCD,$$

$$\therefore \frac{1}{2} BP \cdot AH = PC \cdot AH, \text{ 即 } \frac{1}{2} BP = PC.$$

$$\therefore BP = 2PC = 2AD,$$

$$\therefore BC = 3AD. \quad \text{Q. E. D.}$$

18. 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 爲 CD 之中點, 則 $\triangle AEB$ 等於梯形面積之半. 證明之.

[證] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 試過 E , 作

$FG \parallel AB$,

成 $\square ABGF$,

以爲媒介而考察之.

證明: $\triangle AEB = \frac{1}{2} \square ABGF.$

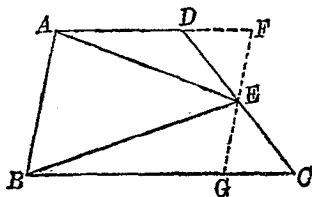
(\triangle 面積, 等於同底等高 \square 之半)

但 $\triangle EFD = \triangle EGC$, ($a. s. a. = a. s. a.$)

\therefore 梯形 $ABCD = ABGED + \triangle EGC$

$$= ABGED + \triangle EFD = \square ABGF$$

$\therefore \triangle AEB = \frac{1}{2} \square ABCD. \quad \text{Q. E. D.}$



19. 於任意三角形 ABC 各邊上, 取 $BA' = \frac{1}{3}BC$,

$CB' = \frac{1}{3}CA$, $AC' = \frac{1}{3}AB$, 則 $\triangle A'B'C' = \frac{1}{3}\triangle ABC$, 證明之.

[證] 已知: 如題所述.

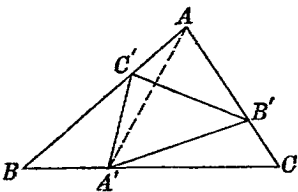
求證: 如題所述.

解析: 證明 $\triangle AB'C'$,

$BA'C'$, $CA'B'$

之和為 $\frac{2}{3}\triangle ABC$, 即可證明 $\triangle A'B'C'$

$= \frac{1}{3}\triangle ABC$.



證明: 聯結 AA' , 則因 $BA' = \frac{1}{3}BC$,

$$\therefore \triangle ABA' = \frac{1}{3}\triangle ABC. \quad (\text{高相同})$$

又因 $AC' = \frac{1}{3}AB$, 即 $BC' = \frac{2}{3}AB$,

$$\begin{aligned} \therefore \triangle BC'A' &= \frac{2}{3}\triangle ABA' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\triangle ABC\right) \\ &= \frac{2}{9}\triangle ABC. \end{aligned}$$

同理可證 $\triangle CA'B' = \frac{2}{9}\triangle ABC = \triangle AB'C'$,

於是 $\triangle AB'C' + \triangle BC'A' + \triangle CA'B'$

$$= \frac{2}{3}\triangle ABC,$$

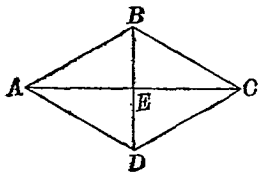
$$\therefore \triangle A'B'C' = \frac{1}{3}\triangle ABC. \quad Q. E. D.$$

20. 菱形面積之兩倍，等於兩對角線之乘積。

(滬 23)

[解] 已知: $ABCD$ 為菱形。

$$\begin{aligned} \text{求證: } 2\text{◇}ABCD \\ = \overline{AC} \cdot \overline{BD}. \end{aligned}$$



解析: 利用 \triangle 面積公式。

證明: $\triangle BEC \equiv \triangle DEC$, (s. a. s. = s. a. s.)

$$\therefore \angle BEC = \angle DEC = \angle R.$$

即 BE, DE 為 $\triangle ABC, ADC$ 之高。

$$\text{於是 } \triangle ABC = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BE},$$

$$\triangle ADC = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{DE},$$

(\triangle 面積等於高乘底之半)

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC + \triangle ADC &= \frac{1}{2} \overline{AC} (\overline{BE} + \overline{DE}) \\ &= \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BD}. \end{aligned}$$

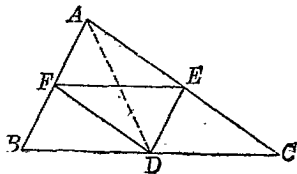
但 $\triangle ABC + \triangle ADC = \text{◇}ABCD$,

$$\therefore 2\text{◇}ABCD = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

21. 試證聯三角形三邊中

點所成之三角形，其面

積等於原形四分之一。



(北平)

[解] 已知: $\triangle ABC$ 三邊之中點為 D, E, F .

求證: $\triangle DEF = \frac{1}{4}\triangle ABC$

解析: 可利用 \triangle 面積原理, 證明 $\triangle BDF$, $\triangle CED$, $\triangle AFE$ 之和, 等於 $\frac{3}{4}\triangle ABC$.

證明: $\triangle ABD = \frac{1}{2}\triangle ABC$,

(因 $BD = DC$, 而高相同)

$\triangle BDF = \frac{1}{2}\triangle ABD$, (同理)

$\therefore \triangle BDF = \frac{1}{4}\triangle ABC$,

同樣可證 $\triangle CED = \frac{1}{4}\triangle ABC$,

$\triangle AFE = \frac{1}{4}\triangle ABC$,

$\therefore \triangle BDF + \triangle CED + \triangle AFE = \frac{3}{4}\triangle ABC$,

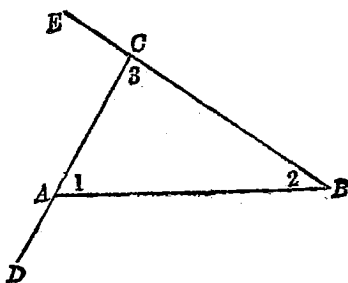
即 $\triangle DEF = \frac{1}{4}\triangle ABC$. Q. E. D.

22. 三角形三內角之和, 等於 180° , 試證之. (浙 22)

此係定理, 各教科書中都有其證法, 本書不復贅. 但此定理所根據的基礎, 是「二平行線與一截線所成之內錯角相等」, 而此一定理又根據公理「過已知線外一點, 祇能作一線平行於已知線」. 故 \triangle 內角和定理, 與平行公理, 有密切關係.

23. 三角形之任兩外角和, 大於二直角.

已知: $\triangle ABC$ 之兩外角為 $\angle BAD$ 與 $\angle ACE$.



求證： $\angle BAD + \angle ACE > 2\angle R$.

解析：可利用 \triangle 內角和定理。

證明： $\left. \begin{array}{l} \angle BAD = \angle 2 + \angle 3 \\ \angle ACE = \angle 1 + \angle 2 \end{array} \right\} (\triangle \text{外角} = \text{內對角和})$

$$\therefore \angle BAD + \angle ACE = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 2.$$

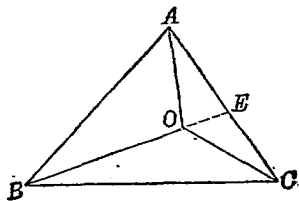
但 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2\angle R$, (\triangle 內角和 = $2\angle R$)

$$\therefore \angle BAD + \angle ACE = 2\angle R + \angle 2,$$

即 $\angle BAD + \angle ACE > 2\angle R$ Q. E. D.

(全量大於其分量)

24. O點為 $\triangle ABC$ 內任一點，則 $OA + OB + OC$ 小於周邊，而大於周邊的一半。



[解] 已知: O 爲 $\triangle ABC$ 內一點.

求證: (1) $OA+OB+OC < AB+BC+CA$.

$$(2) \quad OA+OB+OC > \frac{1}{2}(AB+BC+CA).$$

解析: 利用「 \triangle 二邊和大於第三邊」定理, 及不等量公理.

證明: (1) 延長 BO 與 AC 交於 E , 則

$$AB+AE > BE, \quad OE+EC > OC,$$

$$\therefore AB+AE+EC+OE > OB+OE+OC,$$

$$\text{即} \quad OB+OC < AB+AC.$$

(兩端各減 OE)

同理可證 $OC+OA < AB+BC$,

$$OA+OB < BC+CA,$$

$$\therefore 2(OA+OB+OC) < 2(AB+BC+CA),$$

$$\text{即} \quad OA+OB+OC < AB+BC+CA.$$

Q. E. D.

(2) $OA+OB > AB, \quad OB+OC > BC,$

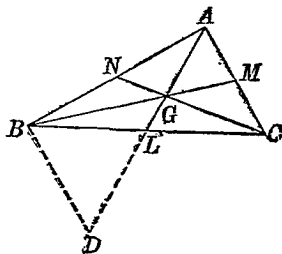
$$OC+OA > CA,$$

$$\therefore 2(OA+OB+OC) > AB+BC+CA,$$

$$\text{即} \quad OA+OB+OC > \frac{1}{2}(AB+BC+CA).$$

25. 三角形三中線的和,必
小於周界,證明之.

[解] 已知: $\triangle ABC$ 的三中
線, 爲 $AL, BM,$
 $CN.$



求證: $AL + BM + CN < AB + BC + CA.$

解析: 利用平行移動法, 將 AC 移至 BD 而考
察之.

證明: 作 $BD \parallel AC$, 聯 $LD.$

則 $\triangle BDL \cong \triangle CAL,$ (s.a.s. = s.a.s.)

$\therefore \angle BLD = \angle ALC,$ 故 ALD 爲一直線.

於是 $AD < AB + BD.$

但 $AD = 2AL$ ($\because AL = LD$), $BD = AC,$

$\therefore 2AL < AB + AC.$

同樣可證 $2BM < BC + AB,$

$2CN < AC + BC,$

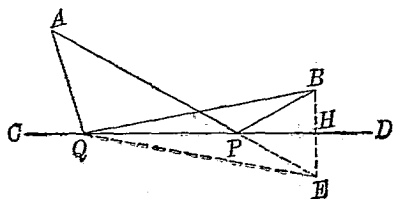
相加得

$$2(AL + BM + CN) < 2(AB + BC + CA),$$

即 $AL + BM + CN < AB + BC + CA.$

Q. E. D.

26. 定直線 CD 上任一點 P , 至定點 A, B 之聯線和 $PA+PB$, 當



$\angle CPA = \angle DPB$ 時為最小, 證之.

[解] 已知: (1) $\angle APC = \angle BPD$.

(2) $\angle AQC > \angle BQD$.

(3) Q, P 在定直線 CD 上.

(4) A, B 為定點.

求證: $AP + PB < AQ + QB$.

解析: 若能證明 $AP + PB$ 等於某定直線, 而證 AQ 與 QB 之和大於此直線, 本題即可解決. 此類證法, 大概利用對稱移動法.

證明: 作 $BH \perp CD$, 延長至 E , 使 $HE = HB$ (E 點即為 B 之軸對稱點), 並聯 PE ,

則 $\triangle BPH \cong \triangle EPH$,

$\therefore PE = PB, \quad \angle EPH = \angle BPH$

但 $\angle BPH = \angle APC$, (已知)

$\therefore \angle EPH = \angle APC$,

$\therefore AP, PE$ 為一直線, 即 $AP + PB = AE$.

又聯 QE , 則 $\triangle BQH \cong \triangle EQH$,

$\therefore QE = QB, \angle EQH = \angle BQH$.

但 $\angle BQH < \angle AQC$, (已知)

$\therefore \angle EQH < \angle AQC$.

$\therefore AQ, QE$ 不為一直線.

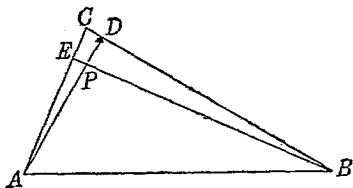
(若為一直線, 則 $\angle AQC = \angle EQH = \angle BQH$,
與假設矛盾.)

$\therefore AE < AQ + QE$,

即 $AP + PB < AQ + QB$. Q. E. D.

(J) 角相補相餘的命題:

1. 設從 $\triangle ABC$ 之底端, 作二線垂直於他二邊, 相交於 P 點, 則角 P 與角 C 相補. [愛國女中]



[解] 已知: $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC, BE \perp AC, AD$ 與 BE 交於 P 點.

求證: $\angle APB + \angle C = 2 \angle R$.

解析: 若能證明 P, E, C, D 共圓, 即可證明

$\angle APB + \angle ECD = 2 \angle R$.

證明： $\angle CEP + \angle CDP = 2\angle R$ (各等於 $\angle R$)

$\therefore PECD$ 為圓內接四邊形.

而 $\angle EPD + \angle C = 2\angle R$,

但 $\angle EPD = \angle APB$,

$\therefore \angle APB + \angle C = 2\angle R$. Q. E. D.

(註：此題利用多角形內角和定理，亦可證明.)

2. 圓的外切四邊形，其兩對邊對於中心的角，互成補角。證明之。

[解] 已知：四邊形 $ABCD$ 外切於 O 圓。

求證： $\angle AOB + \angle COD$
 $= 2\angle R$,

$\angle AOD + \angle BOC = 2\angle R$

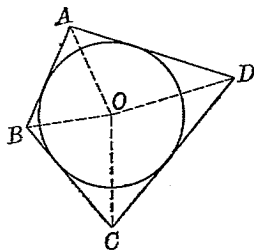
解析：若能證明 $\angle OAB + \angle OBA + \angle OCD + \angle ODC = 2\angle R$ ，本題即可得證。

證明： OA 平分 $\angle A$ ， OB 平分 $\angle B$ ， OC 平分 $\angle C$ ， OD 平分 $\angle D$ 。

(切線交點與圓心之聯線，平分交切角.)

$\therefore \angle OAB + \angle OBA + \angle OCD + \angle ODC$
 $= \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$.

但 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4\angle R$,



(多角形內角和定理)

$$\begin{aligned} \therefore \angle OAB + \angle OBA + \angle OCD + \angle ODC \\ = 2\angle R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \because \triangle AOB \text{ 之內角和} + \triangle COD \text{ 之內角和} \\ = 4\angle R \end{aligned}$$

$$\therefore \angle AOB + \angle COD = 2\angle R \text{ (等量減等量)}$$

$$\text{同樣可證 } \angle AOD + \angle BOC = 2\angle R$$

3. \triangle 底角之外角, 其二等分線所成的銳角, 與頂角之半互為餘角, 試證明之.

[解] 已知: AD, BD 各為 $\triangle ABC$

A, B 處外角平分
線, 相交於 D .

$$\begin{aligned} \text{求證: } \angle ADB + \frac{1}{2} \angle C = \\ \angle R. \end{aligned}$$

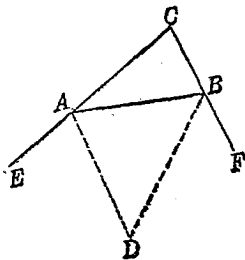
$$\begin{aligned} \text{解析: 可證明 } 2\angle ADB \\ + \angle C = 2\angle R. \end{aligned}$$

$$\text{證明: } \angle ADB + \angle DAB + \angle DBA = 2\angle R$$

(\triangle 內角和)

$$\therefore 2(\angle ADB + \angle DAB + \angle DBA) = 4\angle R$$

$$\text{但 } 2\angle DAB = \angle EAB; 2\angle DBA = \angle FBA$$



$$\text{而 } \angle EAB = \angle C + \angle CBA$$

$$\angle FBA = \angle C + \angle CAB$$

$$\therefore 2\angle ADB + \angle C + (\angle C + \angle CBA + \angle CAB) = 4\angle R$$

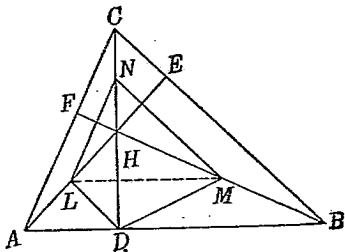
$$\text{又因 } \angle C + \angle CBA + \angle CAB = 2\angle R$$

(\triangle 內角和)

$$\therefore 2\angle ADB + \angle C = 2\angle R \quad (\text{各減 } 2\angle R)$$

$$\text{即 } \angle ADB + \frac{1}{2}\angle C = \angle R \quad \text{Q. E. D.}$$

4. 三角形的垂心為 H , HA, HB, HC 的中點為 L, M, N . 試證 $\angle LDM + \angle LNM = 2\angle R$.



[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 若此題可以成立, 則 L, D, M, N 必共圓.

設聯 LM , 倘可證明 $\angle DNL = \angle DML$, 本題即可解決.

證明: $\because LN \parallel AC$ (\triangle 兩腰中點聯線)

$$\therefore \angle DNL = \angle DCA$$

但 $\angle DCA = \angle ABF$ (同為 $\angle BAC$ 的餘角)

$$\therefore \angle DNL = \angle DBM$$

又因 $LM \parallel AB \therefore \angle DML = \angle MDB$

但 $MD = MB$

(直角 \triangle 斜邊中點, 至三頂點等遠)

$$\therefore \angle DBM = \angle MDB \text{ 於是 } \angle DNL = \angle DML$$

而 L, D, M, N 共圓

$$\text{故 } \angle LDM + \angle LNM = 2\angle R. \quad Q. E. D.$$

(K) 線平行的命題:

1. 引長兩等邊三角形之一腰過頂點, 所成外角之平分線, 與底邊平行 (浙 22)

[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中 $AB = AC$

(2) AD 平分 $\angle CAE$

求證: $AD \parallel BC$

解析: 試證 $\angle 1 = \angle 2$

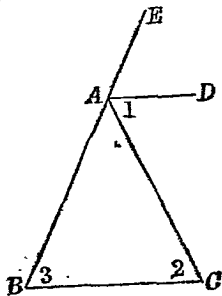
證明: $\because AB = AC$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3.$$

(等腰 \triangle 底角等)

$$\text{但 } \angle CAE = \angle 2 + \angle 3 = 2\angle 2 \quad (\text{外角})$$

$$\text{且 } \angle 1 = \frac{1}{2} \angle CAE \therefore \angle 1 = \angle 2$$



$\therefore AD \parallel BC$

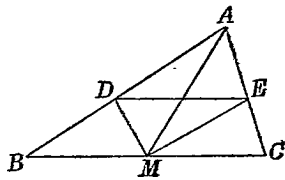
Q. E. D.

2. 三角形 ABC 底邊 BC 上之中線 AM 與底邊所成兩鄰角之平分線, 交兩腰於 D, E , 證明 DE 平行於 BC .

[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: D, E 雖不一定是 AB, AC 的中



點, 但 $AD/DB = AE/EC$ 則必然成立. 故若能證此兩比相等, 本題即可解決.

證明: DM 平分 $\angle BMA$, $\therefore AD : DB = AM : MB$

EM 平分 $\angle CMA$, $\therefore AE : EC = AM : MC$

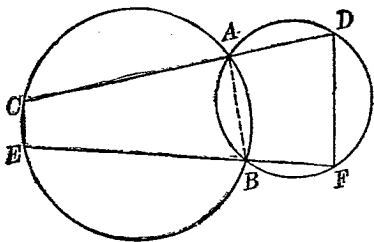
但 $MB = MC$, $\therefore AM : MB = AM : MC$
即 $AD : DB = AE : EC$ (等於同比)

$\therefore DE \parallel BC$ (Δ 比例線段逆定理)

Q. E. D.

3. 兩圓相交於 A, B 兩點, 順次過 A, B 作兩割線 CAD, EBF , 各與兩圓相交於 C, D 及 E, F 試證 CE 平行於 DF . (務本女中)

[解] 已知: 如題所述.



求證：如題所述。

解析：若可證明 $\angle C + \angle D = 2\angle R$ ，則本題即可解決。

證明：聯公共弦 AB ，則 $\angle C = \angle ABF$

但 $\angle ABF + \angle D = 2\angle R$

$\therefore \angle C + \angle D = 2\angle R$

$\therefore CE \parallel DF$ (同旁兩角互補，則平行)

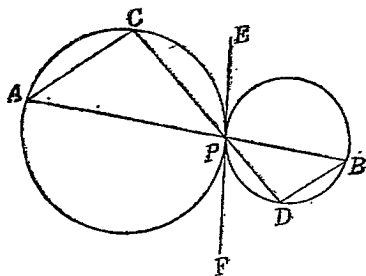
Q. E. D.

- 4 二圓外切於 P 點，過 P 點作 AB, CD 兩直線，與二圓各交於 A, C 及 B, D 四點，求證 AC 與 BD 平行 (蘇中)

[解] 已知：如題所述。

求證：如題所述。

解析：試作兩圓公切線，利用弦切角做媒介，



而證 $\angle PAC = \angle PBD$.

證明：作兩圓公切線 EF 則

$$\angle PAC = \angle EPC \quad (\text{同夾 } \widehat{PC})$$

$$\angle PBD = \angle FPD \quad (\text{同夾 } \widehat{PD})$$

$$\text{但 } \angle EPC = \angle FPD \quad (\text{對頂角相等})$$

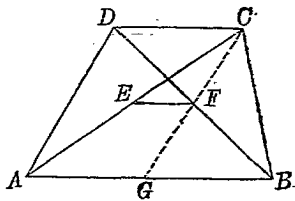
$$\therefore \angle PAC = \angle PBD \text{ 而 } AC \parallel BD \quad Q. E. D.$$

5. 梯形對角線中點的聯線，平行於底邊，證明之。

[解] 已知： $ABCD$ 為梯形， $AB \parallel CD$ ， E, F 為 AC, BD 之中點。

求證： $EF \parallel AB \parallel CD$

解析：因對角線相交，與梯形兩底成兩個 \triangle ，故不能直接



用 \triangle 兩邊中點聯線定理.若聯 CF , 延長之而遇 AB 於 G , 則如可證明 $CF = FG$, 本題即可解決了.

證明: $DF = FB$ (已知); $\angle DFC = \angle BFG$ (對頂角)

$\angle CDF = \angle GBF$ (內錯角) ($\because AB \parallel CD$)

$\therefore \triangle CFD \cong \triangle GFB$ (a. s. a. = a. s. a.)

於是 $CF = FG$ 且 $CE = EA$ (已知)

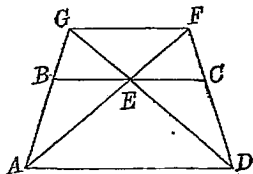
故 $EF \parallel AB \parallel CD$ Q. E. D.

6. 梯形 $ABCD$ 的上底為 BC , 其中點為 E , 引長 AE 及 DE , 遇 CD 與 AB 的延長線於 F 及 G , 證明 FG 平行於 AD .

[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 因 B, C 不是 AG



與 DF 的中點, 故須利用比例線段.

證明: $\triangle BEG \sim \triangle ADG$ (\because 三對應角相等)

$\therefore DG : EG = AD : BE$

又 $\triangle CEF \sim \triangle DAF$ (同理)

$\therefore AF : EF = AD : EC$

但 $BE = EC$

$\therefore DG : EG = AF : EF$ (等於同比)

$\therefore (DG - EG) : EG = (AF - EF) : EF$

(分比定理)

即 $DE : EG = AE : EF$

$\therefore \triangle EGF \sim \triangle EDA$ ($\because \angle GEF = \angle DEA$)

(兩 \triangle 二邊成比例, 夾角相等, 則相似)

於是 $\angle EGF = \angle EDA$ (相似 \triangle 對應角)

$\therefore FG \parallel AD \parallel BC$ Q. E. D.

(L) 線垂直的命題:

1. 兩圓外切於 C , 其公切線切兩圓於 A, B , 則 AC 垂直於 BC , 試證之.

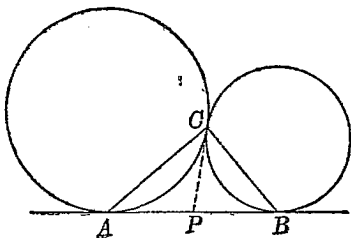
(同濟附中)

[解] 已知: 如題所

述.

求證: 如題所

述.



解析: $\angle ACB$ 是 $\triangle ACB$ 的一角, 若可證明 $\angle C = \angle A + \angle B$, 本題即解決.

證明: 作兩圓公切線, 交 AB 於 P , 則

$$\angle A = \angle ACP \quad (\text{同夾 } \widehat{AC})$$

$$\angle B = \angle BCP \quad (\text{同夾 } \widehat{BC})$$

$$\therefore \angle A + \angle B = \angle ACP + \angle BCP = \angle ACB$$

$$\text{即 } \angle A + \angle B + \angle ACB = 2\angle ACB = 2\angle R$$

(內角和)

$$\therefore \angle ACB = \angle R \text{ 而 } AC \perp BC \quad Q. E. D.$$

2. 兩個同底等腰三角形，其頂點聯線或延長線，必垂直於底邊。

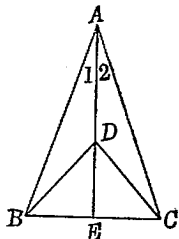
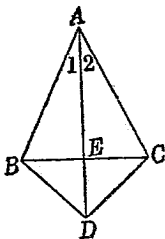
[解] 已知： $\triangle ABC$,

DBC 皆

為等腰，

其公共

底為 BC 。頂點聯線或延長線交 BC 於 E 。



求證： $AE \perp BC$ 。

解析：因有全等 \triangle 可以利用，故證鄰補角相等。

證明： $\because AB = AC, DB = DC, AD = AD$ 。

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD \quad (s. s. s. = s. s. s.)$$

$$\angle 1 = \angle 2; \triangle ABE \cong \triangle ACE \quad (s. a. s. = s. a. s.)$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AEC = \angle R$$

即 $AE \perp BC$ (垂線定義) Q. E. D.

3. 圓內接四邊形兩對對邊交角之平分線, 必相垂直, 證明之.

[解] 已知: 四邊形 $ABCD$ 內接於圓, BA, CD 交於 E 點, AD, BC 交於 F 點. $\angle AED$ 與 $\angle CFD$ 的平分線, 交於 P 點.

求證: $EP \perp FP$

解析: $\angle EPF$ 為交弦角, 故就 EP 與

圓之交點 M, N , 及 FP 與圓之交點 S, R , 考察各弧的關係.

證明: $\therefore \angle BEN = \angle CEN$ (已知)

$$\therefore \frac{1}{2}(\widehat{BN} - \widehat{AM}) = \frac{1}{2}(\widehat{CN} - \widehat{DM})$$

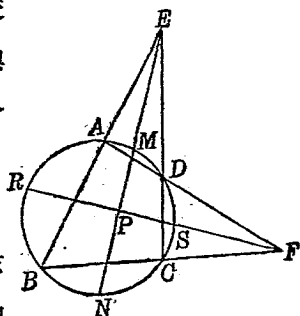
(交割角等於所夾兩弧度數差之半)

$$\text{即 } \widehat{BN} - \widehat{AM} = \widehat{CN} - \widehat{DM}$$

$$\text{同樣可證 } \widehat{BR} - \widehat{CS} = \widehat{AR} - \widehat{DS}$$

$$\text{二式相加 } \widehat{NR} - \widehat{AM} - \widehat{CS} = \widehat{AR} + \widehat{CN} - \widehat{SM}$$

$$\text{移項 } \widehat{RN} + \widehat{SM} = \widehat{MR} + \widehat{NS}.$$



$$\therefore \angle NPR = \angle MPR = \angle R$$

(交弦角等於所夾兩弧度數和之半)

即 $EP \perp FP$ Q. E. D.

4. 自 $\odot O$ 中直徑 AB 兩端, 作二切線, 與另一切線交於 C 及 D , 試證 $\angle COD = \angle R$.

[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 因 $\angle ATB = \angle R$,

故若證明 $\angle COD$

$= \angle ATB$, 本題也可以解決.

證明: 設 CD 切圓於 T , 聯 OT, AT, BT .

O, T, D, B 共圓 (因 $\angle OTD = \angle R = \angle OBD$)

$\therefore \angle ODC = \angle TBO$; 同理 $\angle OCD = \angle TAO$

$\therefore \angle COD = \angle ATB = \angle R$ Q. E. D.

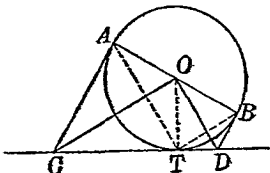
(兩 \triangle 有二角等, 則第三角亦等)

(M) 相切的命題:

1. 過等腰 $\triangle ABC$ 頂點 A 的直線, 與底邊 BC 交於 D , 與外接圓周交於 E , 則 AB 切於圓 BDE .

[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.



解析：聯 BE ，考察 $\angle ABD$ 是否等於 $\angle BED$ 。

證明： $\angle BED = \angle C$ (同夾 \widehat{AB})

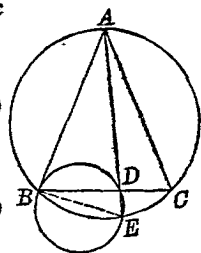
但 $\angle C = \angle ABD$

(等腰 \triangle 底角)

$\therefore \angle ABD = \angle BED$ 。

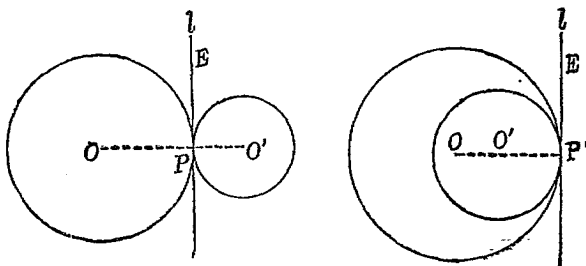
$\therefore AB$ 切於圓 BDE (弦切角逆定理)

Q. E. D.



2. 兩圓切於同一直線上的同點，則此兩圓相切，證明之。

[解] 已知： $\odot O$ 與 $\odot O'$ 切於直線 l 上的 P 點。



求證： $\odot O$ 與 $\odot O'$ 圓相切。

解析：證明 P 在中心線 OO' 上。

證明：(1) O 與 O' 在 l 異側，如左圖。

聯 $OP, O'P$, 則

$$\angle OPE = \angle R = \angle O'PE$$

(過切點半徑垂直於切線)

$\therefore \angle OPE + \angle O'PE = 2\angle R$ 而 OPO'
為直線

$\therefore O$ 圓與 O' 圓外切. *Q. E. D.*

(兩圓公共點在中心線上即相切).

(2) O 與 O' 在 l 的同側, 如右圖.

作半徑 $OP, O'P$, 則

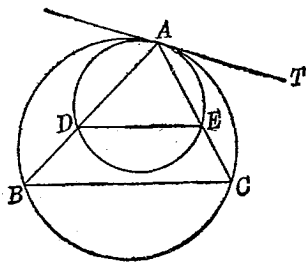
$$\angle OPE = \angle R = \angle O'PE$$

故 OP 與 $O'P$ 相重, 而 P 在 OO' 延線上.

$\therefore O, O'$ 兩圓內切 (理同上) *Q. E. D.*

注意: 此題亦為一定理, 頗有用處, 故舉一例
如下, 即用此定理證明.

3. 設與 $\triangle ABC$ 底邊 BC
平行, 作一線交 $AB,$
 AC 於 D, E , 則 $\triangle ABC,$
與 $\triangle ADE$ 的兩外接
圓, 內切於 A , 證之.



[解] 已知: 如題所述.

求證：如題所述。

解析：本題即可利用前題，作大圓之切線 AT ，證其亦為小圓之切線。

證明：過 A ，作 AT 切於 ABC 圓，則

$$\angle TAC = \angle ABC \quad (\text{弦切角定理})$$

$$\text{但 } \angle ABC = \angle ADE \quad (\because DE \parallel BC)$$

$$\therefore \angle TAE = \angle ADE, AT \text{ 亦切於 } ADE \text{ 圓.}$$

故兩圓內切於 A Q. E. D.

(N) 共點，共線，共圓的命題：

1. 證明三角形之三中線交於一點。 (成都一屆)

此係 \triangle 重心定理，證法詳見復興初中幾何學，本書不贅。此外尚有其他證法，可參閱吳在淵氏著‘近世初等幾何學’。

在任意 $\triangle ABC$ 的三邊上，作正三角形 BCD, CAE, ABF ，則 AD, BE, CF 三線

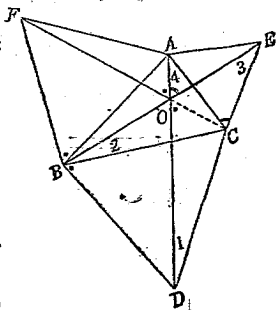
共點，證明之。

[解] 已知：如題所述。

求證：如題所述。

解析：設 AD, BE 交於

O 點，聯 OC, OF ，



而證其成一直線,本題即可解決.

$$\text{證明: } \because \angle ACE = \frac{2}{3}\angle R = \angle BCD$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ECB$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ECB \text{ (s.a.s. = s.a.s.)}$$

而 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, 於是 O, C, B, D 共

$$\text{圓, 而 } \angle COD = \angle CBD = \frac{2}{3}\angle R$$

$$O, C, A, E \text{ 共圓, 而 } \angle EOA = \angle ECA = \frac{2}{3}\angle R$$

$$\text{但 } \angle AFB = \frac{2}{3}\angle R = \angle EOA, \text{ 故}$$

$$O, A, F, B \text{ 共圓, 而 } \angle AOF = \angle ABF = \frac{2}{3}\angle R$$

$$\therefore \angle COD = \angle AOF \quad \left(\text{各等於 } \frac{2}{3}\angle R \right)$$

於是 FOC 成一直線, 而 AD, BE, CF 三線共點. Q. E. D

3. 試證 \triangle 的垂心, 外心, 重心在一直線上.

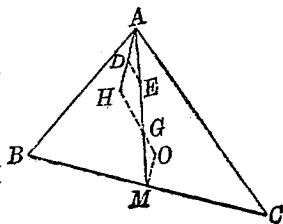
[解] 已知: $\triangle ABC$ 的

重心為 G , 垂心

為 H , 外心為 O .

求證: H, G, O 在一

直線上.



解析：聯 OG, GH , 證明兩線成一直線。

證明：聯 OM, AH , 則 $AH=2OM$

(\triangle 垂心至頂點距離, 等於外心至底邊距離的 2 倍)。

過 AH 中點 D, AG 中點 E , 作 DE 線。

$$\text{則 } AE = \frac{1}{2}AG = GM \quad (\triangle \text{ 重心定理})$$

$$AD = \frac{1}{2}AH = OM$$

$$\angle DAE = \angle OMG \quad (\because OM \parallel AD).$$

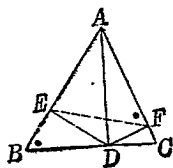
$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle OMG; \angle OGM = \angle AED$$

$$\therefore OG \parallel DE \quad (\text{外錯角相等})$$

$$\text{但 } DE \parallel HG \quad (\triangle \text{ 兩邊中點聯線})$$

$$\therefore OGH \text{ 成一直線} \quad Q. E. D.$$

4. 從 $\triangle ABC$ 的頂點 A , 至 BC 引垂線 AD , 從 D 至 AB, AC 各引垂線 DE, DF , 則 E, B, C, F 共圓, 證之。



[解] 已知：如題所述。

求證：如題所述。

解析：試證 $\angle AFE = \angle B$, 本題即可解決。

證明：A, E, D, F 共圓

$$(\because \angle DEA = \angle R = \angle DFA)$$

$$\therefore \angle AFE = \angle ADE.$$

但 $\angle ADE = \angle B$ (同為 $\angle EAD$ 的餘角)

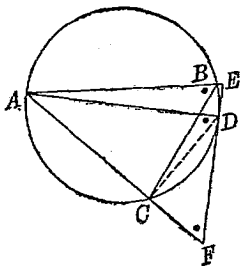
$$\therefore \angle AFE = \angle B \text{ 而 } E, B, C, F \text{ 共圓}$$

Q. E. D.

(四邊形之外角, 等於內對角, 則其頂點共圓).

(O) 相似合同的命題:

1. AB, AC 為由圓周上任一點 A 所作之兩弦, AD 為圓之直徑, 過 D 作切線, 交 AB, AC 於 E 及 F. 試證兩 $\triangle ABC$ 及 $\triangle AFE$ 為相似. (無錫中學)



[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述,

解析: 若證得 $\angle F = \angle ABC$, 本題即解決.

證明: 聯 DC, 則 $\angle ACD = \angle R$.

$$\therefore \angle F = \angle ADC \text{ (同為 } \angle DAC \text{ 的餘角)}$$

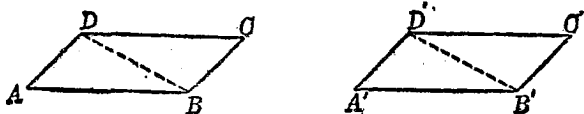
$$\text{但 } \angle ADC = \angle ABC \text{ (夾同弧 } \widehat{AC} \text{)}$$

$$\therefore \angle F = \angle ABC$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AEF \quad Q. E. D.$$

2. 兩平行四邊形的兩雙鄰邊及其夾角相等，則兩 \square 全等，證之。

[解] 已知：平行四邊形 $ABCD$ 與 $A'B'C'D'$ 中， $\angle A$



$$= \angle A', \quad AB = A'B', \quad AD = A'D'.$$

求證： $\square ABCD \equiv \square A'B'C'D'$ 。

解析：用理想重合法。

證明：作對角線 $BD, B'D'$ ，則 $\triangle ABD \equiv \triangle A'B'D'$ 。

故以 $\square ABCD$ 重合於 $\square A'B'C'D'$ 上，可使 A 落於 A' ， B 落於 B' ， D 落於 D' 。但因 $DC \parallel A'B'$ ，故 DC 合於 $D'C'$ (平行公理)。同理 BC 合於 $B'C'$ 。於是 C 落於 C' (二線祇有一交點)。

$$\therefore \square ABCD \equiv \square A'B'C'D' \quad Q. E. D.$$

第 三 章

軌 跡

- I. 導言：——幾何學上軌跡問題，有兩種：（一）說明合於某條件的點，其軌跡為何線，求證；（二）祇說條件，欲探求合於此條件的軌跡，並加證明。前者較諸普通命題的證法，尚無大難，而後者則比較難得多。非對於幾何學有深邃學識的人，往往一題到手，無法措置。不過初中幾何學上所講的軌跡問題，祇是一些基本問題，都很簡單，故本書亦祇講一些基本的淺近知識，以示軌跡問題解法的一斑。
- II. 基本軌跡：——初中幾何學上所論的軌跡問題，大概都可以歸於下列的基本軌跡：
1. 距二定點等遠之點，其軌跡為該二點聯線的中垂線
 2. 距相交二定直線等遠之點，其軌跡為該二線交角之平分線

3. 距一定直線有定距離之點，其軌跡爲與該直線有定距離之二平行線。
4. 距一定點有定距離之點，其軌跡爲以該點爲心，定距離爲半徑的圓。
5. 在定線分上張定角之點，其軌跡爲以此定線分爲弦，內含此定角的一雙對稱弓形弧。

以上五種重要軌跡，其證明見各教科書，此處不贅，惟望學者熟記。

III. 軌跡的探求：——初中平面幾何學上所論軌跡，大都爲圓或直線。直線有二點可以決定，圓有三點可以決定。故探求軌跡之第一步，在於作出合所設條件的三點，而察其是否在一直線上；若不在一直線上，大概可決定其爲圓。不過有時軌跡或爲相交二直線，或爲平行二直線，則三點不足以判明，故除多作數點，以期發見軌跡的形狀外，尚須賴軌跡的特殊點，以定軌跡的形狀與地位。所謂特殊點，便是軌跡與圖形中定線的交點，即軌跡所經圖形中的定點，亦即合於條件的圖形中某定點。此特殊點大概爲二定線之交點，與定直線有定距離之平行線，交另一定直線之點，自定

點至定直線所引垂線的垂足，定圓心，定點至定圓所作切線之切點，等等。特殊點決定之後，再用下列方法，察其是否可以歸於基本軌跡，或是否可以藉此求得合於條件的軌跡：

- (一) 過特殊點，作定直線之平行線，察其與某線交點，或其上任意點，是否合於條件。
- (二) 過特殊點，作定直線之垂線，行同前之考察。
- (三) 過特殊點，作與定直線成定角之二直線，或定角平分線，行同前之考察。
- (四) 聯二特殊點，或聯一特殊點至定點，察其距離是否等於定長。
- (五) 聯軌跡上任意點至二特殊點，察此二聯線是否成一定之角。

IV. 軌跡的證明：——證明軌跡，通常所用的方法，係同時證明下列二事：

- (一) 合於所設條件的點，盡在所求圖形上。
 - (二) 在所求圖形上的點，都合於所設條件。
- 有時爲便利起見，(一)可代以(三)。
- (三) 不在圖形上的點，不合條件。

若所求軌跡，能證明其對於定點或定直線，合於

基本軌跡所道的條件，則(一)，(二)中的‘在所求圖形上’，可換為‘合基本條件’。

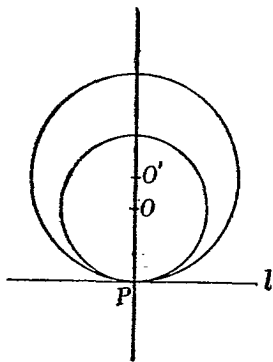
V. 問題解法示例：——茲舉淺近問題數則於下。

1. 一圓切一定直線於一定點，求此圓中心之軌跡。
(省立上中)

[解] 已知：定直線 l ，及其
上一點 P 。

欲求：切 l 於 P 點之圓
心之軌跡。

探求法：假定此圓之
半徑，漸漸縮
小，終至成爲



一點，則此點即 P 。故 P 爲特殊點。試
過 P 作 l 之垂線，而於其上任取一點
 O ，則以 OP 爲半徑之圓，必切於 l 。故
知此線爲軌跡。

證明：(1) 設 O 爲合於條件的點，則 $OP \perp l$ 。

(切點半徑垂直於切線)

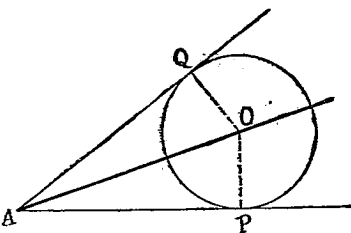
但過 P 之 l 之垂線，祇有一條，故 O
在此線上。

(2) 設 O' 爲在此線上之點, 則以 $O'P$ 爲半徑, O' 爲中心, 所作之圓, 切 l 於 P 點. (半徑端點之垂線, 切於圓).

2. 求切於定角二邊
諸圓之圓心的軌
跡.

[解] 已知: 定角 A .

欲求: 切於 $\angle A$



二邊之圓心之軌跡

探求法: 假定此圓漸縮漸小, 則漸近 A 點, 終至化爲一點而合於 A . 故 A 爲特殊點. 試作 $\angle A$ 的平分線, 則其上任意點至兩邊等距, 設以此線上之點爲圓心, 距離邊的長爲半徑, 作圓, 必切於 $\angle A$ 的二邊. 所以 $\angle A$ 的平分線是所求軌跡.

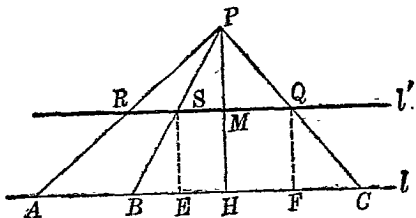
證明: (1) 若 O 爲合於條件之點, P, Q 爲切點, 則 $OP=OQ$, $OP \perp AP$, $OQ \perp AQ$, 而 AP 與 AQ 爲定線, 故知 O 點又合於‘至相交二直線等距’的條件.

(2) 若 O 為離 $\angle A$ 二邊等距離之點, 則以 O 為圓心, 等距離為半徑所作之圓, 必切於 $\angle A$ 的二邊.

故所求軌跡是 $\angle A$ 的平分線.

3. 求從定點 P 至定直線 l 所引線分中點的軌跡.

[解] 已知: P 為定點, l 為定直線.



欲求: 從 P 至 l 所引線分 PA, PB, \dots 等中點的軌跡.

探求法: 從 P 試作 $PH \perp l$, 則 PH 為定線分. PH 之中點 M , 是定點, 又是軌跡上的一點, 所以是特殊點. 過 M 作 $l' \parallel l$, 則由 P 至 l 所引任意線分, 必為 l' 平分 (Δ 兩邊中點聯線逆定理), 可知 l' 是所求軌跡.

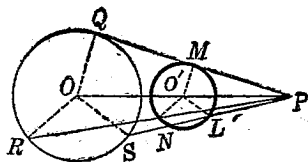
證明: (1) 設 S 為 PB 的中點, 作 $SE \perp l$, 則

$$SE = \frac{1}{2}PH = \text{定長.} \quad (\text{合基本條件})$$

- (2) 設 $QF = \frac{1}{2}PH$, $QF \perp l$, 作 PQ , 延長之, 交 l 於 C , 則 $\because QF \parallel PH$,
 $\therefore \triangle PMQ \cong \triangle QFC$ (a. s. a = a. s. a.)
 即 $PQ = QC$ (合所設條件)
 故所求軌跡, 是通過 PH 中點, 平行於 l 的直線.

4. 從圓外一定點, 至定圓周所引線分的中點, 其軌跡如何?

[解] 已知: O 爲定圓, P 爲圓外定點.
 欲求: 從 P 至 O 圓各



線分中點的軌跡.

探求法: 設自 P 作 O 圓之切線, 其切點爲 Q , 設 PQ 中點 M , 爲軌跡之特殊點. 設取 OP 之中點 O' , 而聯 MO' , 則 $MO' = \frac{1}{2}OQ = \text{定長}$, 且 O' 爲定點 ($\because P, O$ 爲定點), 故知所求軌跡是以 OP 中點爲圓心, 定圓半徑之半爲半徑的圓.

證明：(1) 設 N 為 PR 之中點，則 $NO' = \frac{1}{2}OR$ ，故

N 在 O' 圓上。 (距圓心等於半徑)

(2) 設 L 在 O' 圓上，作 $OS \parallel O'L$ ，與 PL 之

延長線交於 S ，則 $PL = LS$ ，且 OS

$= 2O'L$ 。 (\triangle 兩邊中點聯線逆定理)

故 S 在 O 圓上。

所以軌跡是上述的圓。

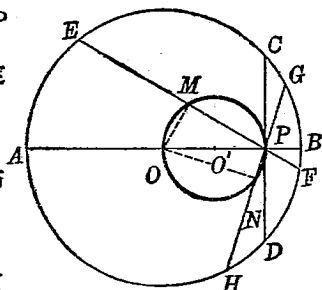
5. 過定圓內定點，所作各弦中點之軌跡如何？

[解] 已知： O 為定圓， P

為圓內一定
點。

欲求：過諸弦中點
的軌跡。

探求法：此弦為直



徑 AB 時，其中點為圓心 O ，故圓心
為特殊點。又此弦垂直於 OP 時， P 即
為其中點，故 P 亦為特殊點。再作一
弦 EF ，其中點為 M ，則 $OM \perp EF$ ，即
 $\angle OMP = \angle R = \text{定角}$ 。 O 為定點， P 亦
為定點，故 M 之軌跡，是以 OP 為直徑

的圓。

證明：(1) 設 M 為 EF 的中點，聯 OM ，則 $\angle OMP = \angle R$ (圓心至弦中點之線 \perp 半徑)。故 M 在此圓上(一弦所張之角，等於該弦在同側所張弓形角，則角頂在圓周上)。

(2) 設 N 為此圓上一點，作過 P 與 N 之弦，而聯 ON ，則 $\angle ONP = \angle R$ (半圓內之弓形角為直角)。

$\therefore N$ 為 GH 之中點。

故所求軌跡如上述。

已將軌跡說出，而求證明的問題，其證法與普通命題無異，不過同時須證兩方面而已。讀者可取教科書所載各題練習之，本書不復贅。

第 四 章

作 圖

- I. 導言：——作圖問題，是幾何學中很重要的一部份，但是比證題與求軌跡，還要難一些。不過讀者切勿因為它難於領悟，便輕易放過；正因為它的難，反而要多加一些研討的功夫纔好。初中幾何學上所包括的作圖問題，大概是作合於某條件的直線，作合於某條件的圓，作合於某條件的簡單有規則圖形，以及作等積形，平分一圖形等等，本章所敘述的，只是替讀者們把作圖的基本知識整理一下，並略示解法的例子罷了。還望讀者能夠舉一反三，且參考高等書籍，以求深造。
- II. 基本作圖方法：——以下所舉，都是作圖問題解法的基礎，讀者必須熟記。
1. 平分已知線段為二分。
 2. 等分已知線段為 n 分。

3. 分已知線段成定比 $n : m : l : \dots\dots$.
4. 將一直線分成黃金分割.
5. 求三線段的第四比例項.
6. 求二線段的比例中項.
7. 外分或內分已知線段爲二分, 成定比 $a : b$.
8. 等分已知角爲二分.
9. 等分定弧爲二分.
10. 過定直線上或定直線外一點, 作該線之垂線.
11. 過定直線上或線外一點, 作直線與定直線交成定角.
12. 過定直線外一點, 作一線平行於該定直線.
13. 過三定點作一圓.
14. 過圓上或圓外一點, 作該圓之切線.
15. 作內容定角的弓形弧.
16. 作二圓的內外公切線.
17. 已知二角夾一邊, 作三角形.
18. 已知二邊夾一角, 作三角形.
19. 已知三邊, 作三角形.
20. 化多角形爲等積三角形.
21. 已知直徑, 作一圓.

22. 已知一邊,作正方形.
23. 作一正方形,等於已知二正方之和.
24. 作一正方形,等於已知二正方之差. 以上各法,均見各種教科書,本書不復贅.

III. 作圖題的解法:——經過下列四大步驟,作圖問題的解法方算完全:

1. 解析:——推究所作圖形,與已知圖形或補助線有何關係.
2. 作法:——如何根據所得關係,連續應用基本作圖方法,以決定所作圖形的點子.
3. 證明:——根據已知圖形,所作圖形,而證明所作圖形合於所設條件.
4. 討論:——就已知圖形及所設條件,而研究問題可有幾個解答或沒有解答.

通常簡單的問題,一望而知其作法者,可以不必經解析之步驟;其實作圖題的主旨,在於作法及證明,惟繁複之作圖題,必須經過解析一步,始得其作法,故本書所舉各例,均示(1),(2)兩步,第三步從略,讀者可自行補出.

IV 解析的方法:——基本淺近的解析方法有下列四

種：

1. 假定法：——先鈎一草圖，假定其合於所設條件，然後根據已知的各元素，有時更藉補助線的關係，逐步例推，以期歸於基本作圖方法。作補助線的方法，與證題相同。
2. 交軌法：——作圖題雖有繁簡難易之不同，然而所欲畫者，無非是直線與圓，故所欲決定者，無非是點子。若問題中的這些點子，在合於甲條件的軌跡上，又在合於乙條件的軌跡上，則可作出此二軌跡，而得其交點，問題就解決了。
3. 相似法：——先作一圖，不完全與所設諸條件相合，然後利用平行移動法與相似形定理，將該圖放大或縮小，以合其餘之條件。
4. 代數法：——用已知元素及所設條件，列出所求線分的方程式，解此方程式而得其根，再根據幾何學而決定此根之作法。

V 模範問題示例：——

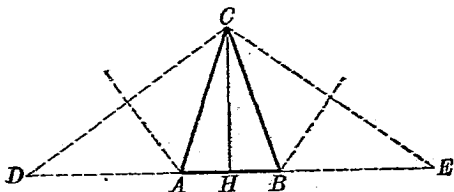
1. 求作一等腰三角形，使其周界成 p ，其高等於 h 。

(續 22)

[解] 已知 周界 p ，高 h 。

求作：等腰 \triangle

解析：假定 $\triangle ABC$ 為已作成的圖形， CH 為已知之高， AC, BC, AB 之和為 p 。若延長 HB 至 E ，使 $BE=BC$ ；延長 HA 至 D ，使



$AD=AC$ ，則 $HE=\frac{1}{2}p=HD$ ，故 H 為 DE 之中點。又因 $BE=BC, AD=AC$ ，故 B 在 CE 的中垂線上，而 A 在 CD 的中垂線上。於是得作法如下：

作法：作 $DE=p$ ，求其中點 H ，作 $CH=h$ 。聯 CE, CD ，作 CE, CD 之中垂線，與 DE 交於 B, A 。則 $\triangle ABC$ 即為所求之圖形。

證明：從略，讀者自補。

討論：在 $\triangle CHB$ （或 $\triangle CAB$ ）中， $CB+BH>CH$ ，故在

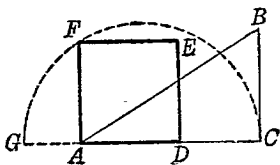
(1) $p>2h$ 時，本題有一解。

(2) $p\equiv 2h$ 時，本題無解。

2. 一直角三角形之底邊長 11 公分, 弦長 13 公分, 求作與三角形面積相等之正方形, 並證明作法. (河北)

【解】 已知: 直角 \triangle 底邊
= 11 公分, 弦
= 13 公分.

求作: 一正方形, 與
此 \triangle 等積.



解析: \triangle 之面積 = $\frac{1}{2}$ 底 \times 高 = $\frac{1}{2} 11 \times \sqrt{13^2 - 11^2}$
若 x 為正方形之一邊, 則 $x^2 = \frac{11\sqrt{13^2 - 11^2}}{2}$.

故 x 為此直角 \triangle 底邊及另一邊一半的比例中項.

作法: 作 $AC = 11$ 公分, 作 $BC \perp AC$, 以 A 為心 13 公分為半徑, 作弧交 BC 於 B . 延長 CA 至 G 使 $AG = \frac{1}{2} BC$. 以 GC 為直徑畫半圓作 $AF \perp GC$, 與半圓交於 F . 以 AF 為一邊, 作正方形, $ADEF$, 即合所求.

證明: 從略, 學者自行補出.

討論: 弦長當然須大於底邊長.

3. 已知 M, N 兩線段, 求作比例中項. (閩)

[解] 此係基本作圖題, 見復興初中幾何學 175 節及其他各教科書.

4. 求作一三角形, 與一已知之任意四角形等積.

(湘四屆)

[解] 此亦基本作圖題, 見復興初中幾何學 189 節及其他教科書.

5. 已知二對角線, 求作一斜方形. (省立蘇農)

[解] 已知: 如題.

求作: 如題.

解析: 此題利用菱形

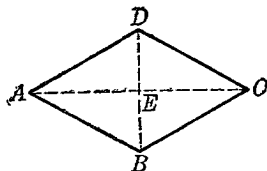
對角線互相垂

直, 且互相平分的關係, 即可得其作法

作法: 從略, 讀者自補.

證明: 讀者自補.

討論: 常可得一解.

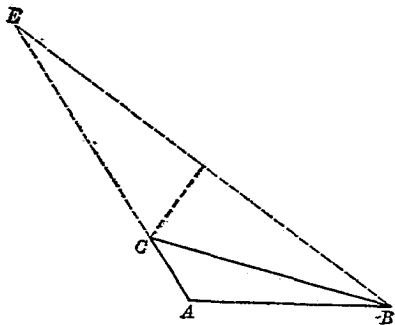


6 已給一邊, 一個鄰角, 同另外兩邊的和, 作一個三角形.

[解] 已知: 如題.

求作: 如題.

解析：設 $\triangle ABC$ 爲已作之圖形 $\angle A$ 等於已知



角, AB 等於已知底邊. 延長 AC 至 E , 使 $CE = CB$, 則 $AC + CE = AC + CB =$ 已知長
故本題可歸至已知二邊一夾角, 作 $\triangle EAB$.

作法：讀者試補出.

證明：同上.

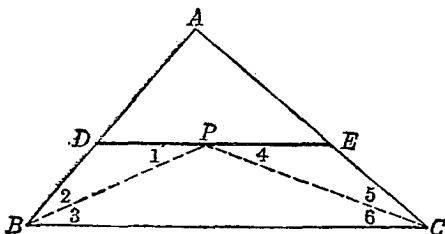
討論： $CA + CB > AB$, 有解；若 $CA + CB$ 等於或
小於 AB , 即無解.

7. 求在 $\triangle ABC$ 內, 作一線與底 BC 平行, 截 AB, AC
於 D 及 E 而 $DE = DB + EC$. (省立無錫中學)

[解] 已知：如題.

求作：如題.

解析：設圖已作成如下。若於 DE 上截取 DP



$= DB$, 則 $PE = EC$. 試聯 $P, B; P, C$.

$\because DE \parallel BC, \therefore \angle 1 = \angle 3, \angle 4 = \angle 6$.

$\because DP = DB, \therefore \angle 1 = \angle 2$.

又 $\because PE = EC, \therefore \angle 4 = \angle 5$.

於是 $\angle 2 = \angle 3, \angle 5 = \angle 6$

即 BP 與 CP 為 $\angle B$ 與 $\angle C$ 之平分線.

作法：作 $\angle B$ 與 $\angle C$ 之平分線，交於 P 點。過 P 作 BC 之平行線，即得。

證明：從略，讀者自行補足。

討論：常有一解。

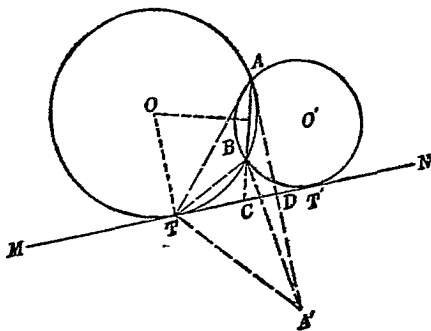
8. 求作一圓，過兩已知點，且與已知直線相切。

(務本女中)

[解] 已知： A, B 二定點與 MN 定直線。

求作：一圓，切於 MN ，且過 A, B 。

解析：若能決定切點，則圓心即可由交軌法



求得。今假定圖已作得，其圓心為 O ， T 為切點。聯 AB ，其延長線與 MN 交於 C ；並聯 AT ， BT 。再以 MN 為軸，取 A 之對稱點 A' ，聯 $A'T$ ， $A'B$ 。∵ A, B 為定點，故 $A'B$ 為定線段，如可證明 $\angle BTA'$ 為定角，則 T 亦可藉交軌法求得。

今知 $\angle BAT = \angle BTC$ (弦切角定理)

$$\angle CTA = \angle CTA'$$

(因 A 與 A' 為對稱點)

$$\therefore \angle BAT + \angle CTA = \angle BTA',$$

但 $\angle TAC + \angle CTA = \angle ACN = \text{定角}$

(外角)

$\therefore \angle BTA' = \text{定角} = \angle ACN.$

於是 T 在內容定角弓形弧上, 又在 MN 上, 因而可以決定. 所求之圓心, 在過 T 之 MN 垂線上, 又在 AB 中垂線上, 也可以決定了.

作法: 作 $AD \perp MN$, 延長至 A' , 使 $A'D = AD$. 聯 $A'B$. 以 $A'B$ 爲弦, 作內容 $\angle ACN$ 之弓形弧, 與 MN 交於 T . 作 TO 垂直於 MN , 作 AB 之中垂線, 與 TO 交於 O , O 卽爲所求圓心, OT 爲所求半徑.

取 B 之軸對稱點 B' , 聯 $B'A$. 以 $B'A$ 爲弦, 作內容 $\angle ACM$ 之弓形弧, 又可作得一圓 O' , 切 MN 於 T' 點.

證法: 從略, 學者自補.

討論: 當 AB 聯線平行於 MN 時, 祇有一圓可作.

注意: 此係吳在淵氏發見之作法, 其佳處在於不必延長 AB 與 MN 相交, 亦可作得所求之圓, 因過 B 作線平行於 MN , 卽可得兩定角之大小也. 舊法利用交切

割線段比例定理求 $\overline{CT}^2 = \overline{CT'}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$

以得 T 與 T' , 似較簡單, 但遇 AB 幾與 MN 平行時, 即無從下手矣,

9. 已知底邊, 頂角, 及底邊上中線長, 求作三角形

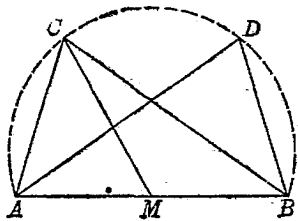
[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 此 \triangle 之底邊

既已固定, 則

所待決定者,



不過頂點的地位而已. 此點之軌跡, 既在以 AB 為弦, 內含頂角之弓形弧上, 又在以底邊中點為心, 已知中線長為半徑的圓周上, 故可用交軌法求得此點.

作法: 作 $AB =$ 已知底邊長. 以 AB 為弦, 作內含已知頂角之弓形弧 ACB . 以 AB 中點 M 為心, 已知中線長為半徑, 作一弧, 與 \widehat{ACB} 交於 C . 於是 $\triangle ACB$ 即為所求之圖形.

證明: 從略, 讀者自行補出.

討論： $MC \leq \frac{1}{2}AB$ 無解。

$MC =$ 弓形弧中點至 AB 之距離，一解。

$l > MC > \frac{1}{2}AB$ ，二解。

$MC > l$ ，無解。

10. 過 \triangle 底邊上一點，作一線，平分此 \triangle 爲二。

[解] 已知： $\triangle ABC$ 底邊

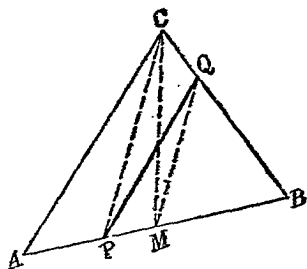
AB 上 P 點。

求作：過 P 點作一

線，平分此

$\triangle ABC$ 。

解析：假定 PQ 爲



已作之線。作中線 CM ，聯 M, Q ；並聯 $C,$

P 。則因 $\triangle PBQ = \frac{1}{2}\triangle ABC = \triangle MBC$ ，故 \triangle

$PMQ = \triangle CMQ$ ， $\therefore PC \parallel MQ$ ，而點可定。

作法：聯 C, P ；過 AB 中點 M ，作 $MQ \parallel CP$ ，與

BC 交於 Q 。則 PQ 卽所求之線。

證明：從略，讀者自行補出。

討論：恆可得一解。

11. 已知 $\triangle ABC$ ，試作一線平行於底邊 BC ，平分

此△爲二.

[解] 已知: 如題所述

求作: 如題所述.

解析: 設 PQ 爲已

作之線, 命

$$AP = x, AB = a.$$

$$\triangle APQ = \frac{1}{2} \triangle ABC,$$

$$\therefore \triangle APQ : \triangle ABC = 1 : 2$$

$$\text{但 } \triangle APQ : \triangle ABC = x^2 : a^2,$$

$$\therefore x^2 : a^2 = 1 : 2$$

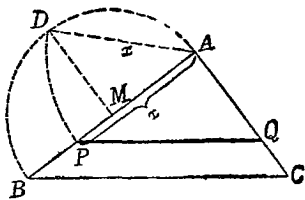
$$\text{於是得方程式 } x^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{a}{2} \times a$$

故知 x 爲 a 與 $\frac{a}{2}$ 之比例中項.

作法: 以 AB 爲直徑, 作半圓 ADB . 作 AB 之中垂線 MD , 與 \widehat{ADB} 交於 D . 在 AB 上截取 $AP = AD$, 過 P 作 $PQ \parallel BC$, PQ 卽爲所求.

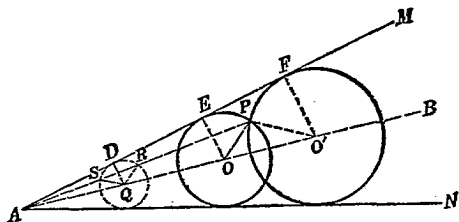
證明: 從略, 讀者自行補出.

討論: 恆可得一解.



12. 作一圓, 切於已知角的二邊, 並過角內一點.

【解】 已知： $\angle A$ ，其中一·點 P 。



求作：切於 $\angle A$ 之二邊，並過 P 點之圓。

解析：設 O 圓為所作之圓，其一切點為 E 。聯 AO ，則 AO 必為 $\angle A$ 之平分線。試任於 AO 擇一點 Q ，作 Q 圓，切 $\angle A$ 之二邊，其一切點為 D 。聯 QD, OE 。則因 QD 平行於 OE ，故

$$\triangle AQD \sim \triangle AOE, \quad QD : OE = AQ : AO$$

若聯 AP ，與 Q 圓交於 R, S ，並作半徑 OP, QR ，則因 $QR = QD, OE = OP$ ，

$\therefore QR : OP = AQ : AO$ 。於是 QR 若平行於 OP ，即可合此條件。故得下之作法。

作法：作 $\angle A$ 之平分線 AB 。在 AB 上任取一點 Q ，作 $QD \perp AM$ 。以 Q 為心， QD 為半徑，作一圓。聯 AP ，與 Q 圓交於 R, S 。

作 QR, QS 二半徑. 過 P , 作 $PO \parallel QR$, 與 AB 交於 O ; 作 $PO' \parallel QS$, 與 AB 交於 O' . 作 $OE \perp AM, O'F \perp AM$ 以 O, O' 爲圓心, OE, OF 爲半徑, 作二圓, 即合所求.

證明: $\because QR \parallel OP, \therefore QR : OP = AQ : AO$.

但 $AQ : AO = QD : OE$ (因 $QD \parallel OE$)

$\therefore QR : OP = QD : OE$ (等於同比)

即 $QR : QD = OP : OE$ (交比定律)

但 $QR = QD, \therefore OP = OE$.

即 O 圓必過 P 點, 同理可證 O' 圓亦過 P 點. 因 O, O' 均在 $\angle A$ 之平分線上, 而 $OE \perp AM$, 故切於 AM 與 AN .

討論: 恆可作得二圓.

13. 已給一邊, 一個鄰角, 同另外兩邊的差, 作一個三角形. (省立南京中學)

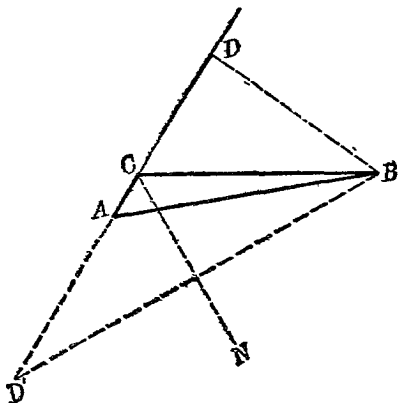
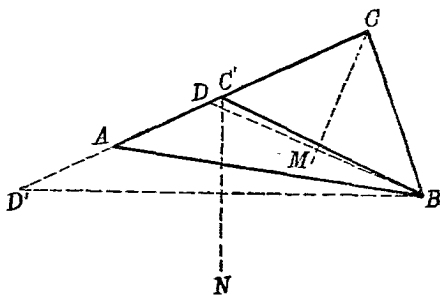
茲分別求其作法如下:

[解] 此題有兩種解法, 因所給之角, 可銳可鈍也.

a. 已知: 底邊 AB , 鄰角 $\angle A < \angle B$, 二邊差爲 d .

求作: 合此條件之 \triangle .

解法: 因 $\angle B$ 或大於 $\angle A$, 或小於 $\angle A$, 故有



兩個三角形可作。假定圖一之 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABC'$ 爲已作得之二 \triangle ；其中 $\angle ABC > \angle BAC$, $\angle ABC' < \angle BAC'$ 。

- (1) 就 $\triangle ABC$ 而論, $AC > BC$, 故可在 CA 上截取 $CD = CB$, 則 $AD = AC - BC = d$, 於是 $\triangle ADB$ 已知二邊夾

一角,且 C 在 DB 之中垂線上,即可歸於基本作圖題.

- (2) 就 $\triangle ABC'$ 而論, $AC' < BC'$, 故可延長 $C'A$ 至 D' , 使 $C'D' = C'B$, 則 $AD' = BC' - AC' = d$, 而 $\angle BAD' =$ 已知角之補角, 故 $\triangle AC'B$ 亦知其二邊一夾角, C' 則在 $D'B$ 之中垂線上. 於是得作法如下:

作法: (1) 作 $AB =$ 已知底邊長; 作 $\angle BAD =$ 已知角, 使 $AD =$ 二邊差; 聯 BD , 作其中垂線 MC , 與 AD 延長線交於 C . $\triangle ABC$ 即合所求.

- (2) 作 $AB =$ 已知底邊長; 作 $\angle BAD' =$ 已知角之補角; 聯 BD' , 作其中垂線 NC' , 與 $D'A$ 之延長線交於 C' . $\triangle ABC'$ 亦合所求.

證明: 讀者自補.

討論: $d > AB$ 時, 無解, $d = AB$, 亦無解.

$d < AB$, 而 $\angle ADB$ 為鈍角時, 二解.

$d < AB$, 而 $\angle ADB$ 為直角時, 一解.

$d < AB$, 而 $\angle ADB$ 爲銳角時, 一解 (見圖二).

- b. 已知: 底邊 AB , 鄰角 $\angle A = \angle R$, 二邊差爲 d .
求作: 三角形.

解析: 此題祇可以有一解, 其作法同 (a), (2).

作法, 證明, 討論, 皆從略, 讀者自補之.

- c. 已知: 底邊 AB , 鄰角 $\angle A > \angle R$, 二邊差爲 d .
求作: 三角形.

解析: 此題亦祇可以有一解, 其作法同 (a), (2).

作法, 證明, 討論, 皆從略, 讀者自補之.

第 五 章

計 算

- I. 導言：——幾何計算題，大概可分為三大類：(一)角的計算；(二)線的計算；(三)面積計算。此等問題的解法，不出於下列各步：(一)先就問題作圖；(二)看出圖形中已知元素與未知元素的關係，列成方程式；(三)圖形中的元素不充分，可作補助線；(四)解方程式，而解釋所得之根。間有先將答數說明，欲證其適合問題者，此亦不過代入與覆核之手續而已。
- II. 問題解法示例：——幾何計算題，更較散漫，故祇能略舉數例，以示一斑。其實祇須定理爛熟，不愁問題無解法也。

1. 兩弦相交於圓內，第一弦之兩段為 $x-1$ 與 $x+3$ ；
第二弦之兩段為 $x-2$ ，與 $x+5$ 。求兩弦之長。

(河北 22)

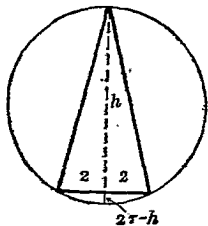
[解] 根據交弦線段定理，可得方程式如下(圖可省)：

$$(x-1)(x+3) = (x-2)(x+5)$$

解方程式，得 $x=7$ 兩弦之長為 16 與 17。

2. 以 4 公分之線段為底邊，作一內接等腰三角形於已知圓內。若圓之半徑為 6 公分，求三角形之高。
(河北 22)

【解】依題意可得右圖。因等腰 \triangle 之高，為底邊之中垂線，故通過圓心。若延長高，與圓相交，則延長之一段 $= 2r - h$ 。故得方程式如下：



$$h(2r-h) = h(12-h) = 4$$

解方程式，得 $h = 6 + \pm\sqrt{2}$ (有二解)。

3. 設甲三角形之三邊，各為 3 尺，4 尺，5 尺。乙三角形與甲三角形相似，其最長邊為 6 尺。求其他兩邊之長。
(湘二屆)

【解】設其他兩邊，為 a 尺與 b 尺，則由相似形定義，

$$\text{得} \quad \frac{a}{4} = \frac{6}{5}, \quad \therefore a = 4\frac{4}{5}$$

$$\frac{b}{3} = \frac{6}{5}, \quad \therefore b = 3\frac{3}{5}$$

4. 設 $ABCD$ 為圓之內接四邊形， $\hat{A} = 80^\circ$ ， $\hat{B} = 90^\circ$ 。求

\hat{C} 及 \hat{D} . (湘二屆)

[解] 因圓內接四邊形對角互補(圖可省),故得

$$\angle C = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ, \quad \angle D = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

5. 自圓外一點至圓引二割線,此二割線所夾之弧,一為 28° ,一為 54° ,問二割線之交角若干度?

(湘三屆)

[解] 此題亦不必作圖,由交割角定理,直接得

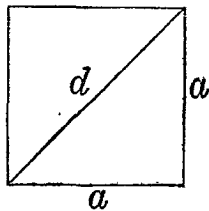
$$\angle P = \frac{1}{2}(54^\circ - 28^\circ) = 13^\circ.$$

6. 設正方形之一邊為 a ,則其對角線為 $a\sqrt{2}$. 試證明之. (湘三屆)

[解] 作正方形如圖,命其邊長為 a ,對角線為 d ,則由商高定理,

$$a^2 + a^2 = d^2, \text{ 即 } d^2 = 2a^2$$

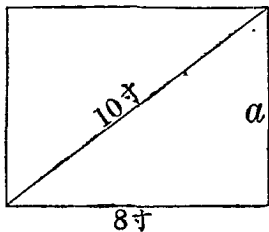
$$\therefore d = a\sqrt{2} \text{ (負根不用)}$$



7. 已知矩形一邊為8寸,對角線為10寸,求其面積.

(湘四屆)

[解] 作圖如右. 設命矩形之又一邊為 a ,



則 $a = \sqrt{100 - 64} = 6$

故 矩形面積 = $6 \times 8 = 48$ 方寸。

8. 某三角形與梯形等積，而三角形之高為 25 尺，其底為 12 尺，梯形之高為三角形之高之半，其一底為 10 尺，試求其他一底。 (贛 22)

[解] 三角形之面積 = $\frac{1}{2} \times 12 \times 25 = 150$ 方尺，命 $x =$ 梯形其他一底尺數，則得方程式

$$150 = \frac{1}{2} \times 25 \times \frac{1}{2} (10 + x)$$

解方程式，得 $x = 14$ 尺。

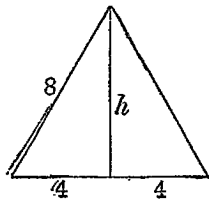
9. 等邊三角形一邊為 8 寸，求其面積。

[解] 作圖如右。試作高 h ，則將底邊平分為二。由商高定理，

$$h^2 = 64 - 16 = 48$$

$$\therefore h = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle \text{之面積} = 16\sqrt{3}$$



(注意：若每邊之長 = a ，則 $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ，而

$$\triangle \text{之面積} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.)$$

10. 有正方形每邊之長為一尺，今欲切其四隅，作

爲正八邊形，則此正八邊形每邊之長如何？

(鎮江中學)

[解] 作圖如右(此圖之作法，讀者試解析之). 命 $x =$ 每角截去寸數，則依題意，根據商高定理，得方程式

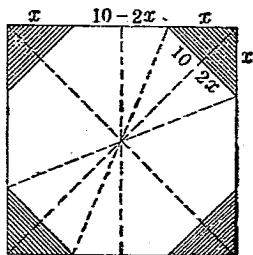
$$(10 - 2x)^2 = 2x^2$$

解之，得 $x = 10 - 5\sqrt{2}$. ($10 + 5\sqrt{2}$ 不合)

$$\therefore 10 - 2x = 10(\sqrt{2} - 1) = 10 \times (1.41 - 1)$$

$$= 4.1.$$

(答) 每邊長四寸一分.



第四篇 數值三角

第一章 基本知識

- I. 銳角三角函數定義：——直角三角形一銳角是 A ，其對邊 $= a$ ，鄰邊等於 b ，斜邊等於 c ，又一銳角 $= B$ ，

$$\text{則} \quad \sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b},$$

$$\cot A = \frac{b}{a}, \quad \sec A = \frac{c}{b}, \quad \csc A = \frac{c}{a};$$

$$\sin B = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}, \quad \tan B = \frac{b}{a},$$

$$\cot B = \frac{a}{b}, \quad \sec B = \frac{c}{a}, \quad \csc B = \frac{c}{b}.$$

- II. 餘角函數關係：——一角的正函數，等於其餘角的餘函數，用式子表示，如下所列：

$$(1) \quad \sin A = \cos(90^\circ - A)$$

$$(2) \quad \cos A = \sin(90^\circ - A)$$

$$(3) \quad \tan A = \cot(90^\circ - A)$$

$$(4) \quad \cot A = \tan(90^\circ - A)$$

$$(5) \quad \sec A = \csc(90^\circ - A)$$

$$(6) \quad \csc A = \sec(90^\circ - A)$$

III. 銳角三角函數的變化：——銳角 A 從 0° 增加，到 90° 為止，它的三角函數變化，各各不同：

$$\sin A \text{ 從 } 0 \text{ 增到 } 1, \quad \cos A \text{ 從 } 1 \text{ 減到 } 0,$$

$$\tan A \text{ 從 } 0 \text{ 增到 } \infty, \quad \cot A \text{ 從 } \infty \text{ 減到 } 0,$$

$$\sec A \text{ 從 } 1 \text{ 增到 } \infty, \quad \csc A \text{ 從 } \infty \text{ 減到 } 1.$$

IV. 同角三角函數的關係：——同角的各三角函數之間，有種種關係，最重要的如下：

$$(1) \quad \sin A \times \csc A = 1,$$

$$(2) \quad \cos A \times \sec A = 1,$$

$$(3) \quad \tan A \times \cot A = 1.$$

$$(4) \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

$$(5) \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

$$(\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}, \quad \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}).$$

$$(6) \quad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A.$$

$$(7) \quad 1 + \cot^2 A = \csc^2 A.$$

V. 特殊角的三角函數：—— 30° , 45° , 60° 的三角函數，其數值不必查表，即可算得，因為可用分數與根式表

示,現在列表於下:

	sin	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$

VI. 解直角三角形法:——可分下列四種:

1. 知斜邊 c 及一銳角 A , 可用下面的公式求 B, a, b :

$$B = 90^\circ - A, \quad a = c \sin A, \quad b = c \cos A.$$

2. 知斜邊 c 及一股 a , 可用下面公式求 A, B, b :

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad B = 90^\circ - A, \quad b = a \cot A,$$

$$\text{或 } b = c \cos A.$$

3. 知一股 a 及對角 A , 求 B, b, c ; 可用公式:

$$B = 90^\circ - A, \quad b = a \cot A, \quad c = a / \sin A.$$

知一股 a 及鄰角 B , 亦屬於此種, 因從

$$A = 90^\circ - B, \quad \text{即可知 } A.$$

4. 知兩股 a, b , 求 A, B, c ; 可用公式:

$$\tan A = \frac{a}{b}, \quad B = 90^\circ - A, \quad c = \frac{a}{\sin A},$$

$$\text{或 } c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

第二章

問題解法示例

I. 求三角函數問題：——解此類問題，祇須應用同角三角函數的關係：

1. 設 $\sin X = \frac{2}{3}$ ，求 $\cos X$, $\sec X$, $\tan X$, $\cot X$, $\csc X$ 諸函數之值。 (滬 23)

$$[\text{解}] \quad \cos X = \sqrt{1 - \sin^2 X} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{5}.$$

$$\sec X = 1/\cos X = 1 / \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}.$$

$$\tan X = \frac{\sin X}{\cos X} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

$$\cot X = \frac{1}{\tan X} = 1 / \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

$$\csc X = \frac{1}{\sin X} = 1 / \frac{2}{3} = \frac{3}{2}.$$

- 2 已知 $\cos X = \frac{b}{a}$ ，求 X 角其餘之各函數。 (湘三屆)

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \sin X &= \sqrt{1 - \cos^2 X} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan X &= \frac{\sin X}{\cos X} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \bigg/ \frac{b}{a} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \times \frac{a}{b} = \frac{1}{b} \sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

$$\cot X = \frac{1}{\tan X} = \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\sec X = \frac{1}{\cos X} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b}$$

$$\csc X = \frac{1}{\sin X} = \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

3. 已知 $2 \sin A = 1$, 求 $\tan A$.

(湘五屆)

$$\text{[解]} \quad \sin A = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

4. 已知 $\tan X = \frac{8}{15}$, 求 $\sin X$, $\cos X$, $\sec X$, $\csc X$.

(但 X 表銳角)

(成都一屆)

$$[\text{解}] \quad \sin^2 X = \tan^2 X \cos^2 X = \frac{\tan^2 X}{\sec^2 X} = \frac{\tan^2 X}{1 + \tan^2 X}$$

$$\therefore \sin X = \sqrt{\frac{\left(\frac{8}{15}\right)^2}{1 + \left(\frac{8}{15}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{8^2}{15^2}}{\frac{15^2 + 8^2}{15^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{8^2}{15^2 + 8^2}} = \sqrt{\frac{8^2}{289}} = \frac{8}{17}$$

$$\cos X = \sqrt{1 - \sin^2 X} = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{17^2 - 8^2}{17^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{225}{17^2}} = \frac{15}{17}$$

$$\sec X = \frac{1}{\cos X} = \frac{17}{15}$$

$$\csc X = \frac{1}{\sin X} = \frac{17}{8}$$

5. 求 $\tan^2 60^\circ + \cot^2 45^\circ$ 之值.

(浙 21 覆)

$$[\text{解}] \quad \tan^2 60^\circ + \cot^2 45^\circ = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 = 3 + 1 = 4.$$

6. 用 $\tan A$ 表示其他各函數.

$$[\text{解}] \quad \sin A = \tan A \cos A = \frac{\tan A}{\sec A} = \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$\sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A}$$

$$\csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A}$$

7. 用 $\sec A$ 表其他各函數.

$$[\text{解}] \quad \sin A = \tan A \cos A = \frac{\tan A}{\sec A} = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A}$$

$$\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$$

$$\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

$$\csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

8. $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, 求 $\cos 15^\circ$, $\tan 15^\circ$ 之值.

$$[\text{解}] \quad \cos^2 15^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{16}$$

$$= \frac{16 - 8 + 2\sqrt{12}}{16} = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{16}$$

$$\therefore \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{12}}}{4} = \frac{\sqrt{6 + \sqrt{2}}}{4}$$

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \bigg/ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2} \\ &= \frac{6-2\sqrt{12}+2}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = \underline{2-\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

9. 化簡 $(\csc A - \sin A)(\sec A - \cos A)(\tan A + \cot A)$.

$$\begin{aligned}\text{[解] 原式} &= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A\right) \left(\frac{1}{\cos A} - \cos A\right) \\ &\quad \times \left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}\right) \\ &= \frac{1 - \sin^2 A}{\sin A} \times \frac{1 - \cos^2 A}{\cos A} \times \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\sin A} \times \frac{\sin^2 A}{\cos A} \times \frac{1}{\cos A \sin A} = \underline{1}.\end{aligned}$$

10 已知 $\sin X + \cos X = \frac{5}{4}$, 求 $\sin^3 X + \cos^3 X$ 之值.

$$\begin{aligned}\text{[解] } (\sin X + \cos X)^2 &= \frac{25}{16} \\ \sin^2 X + 2 \cos X \sin X + \cos^2 X &= \frac{25}{16} \\ 1 + 2 \cos X \sin X &= \frac{25}{16} \\ \therefore \cos X \sin X &= \left(\frac{25}{16} - 1\right) \times \frac{1}{2} = \frac{9}{32}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^3 X + \cos^3 X &= (\sin X + \cos X) \\ &\quad \times (\sin^2 X - \sin X \cos X + \cos^2 X) \\ &= \frac{5}{4} \times \left(1 - \frac{9}{32}\right) = \frac{115}{128} \end{aligned}$$

II. 證明簡易恆等式問題：——證簡單三角函數恆等式，也利用基本關係；證法共有六種：

- a. 由左端順化到右端。
- b. 由右端逆化到左端。
- c. 將兩端化成同一式子。
- d. 證明兩邊之差是零。
- e. 從已知恆等式推出。
- f. 認原式真確，將其變形，使兩端化成同式。

今舉模範例題於下：

1. 試證 $\tan \theta + \cot \theta = \sec \theta \csc \theta$. (成都一屆)

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \tan \theta + \cot \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \sec \theta \cdot \csc \theta. \end{aligned}$$

$$2. \text{ 求證 } \sin^2 A \tan A + \cos^2 A \cot A + 2 \sin A \cos A \\ = \tan A + \cot A.$$

(贛 22)

$$\begin{aligned} \text{[解] 左端} &= \frac{\sin^3 A}{\cos A} + \frac{\cos^3 A}{\sin A} + \frac{2 \sin^2 A \cos^2 A}{\cos A \sin A} \\ &= \frac{\sin^4 A + 2 \sin^2 A \cos^2 A + \cos^4 A}{\cos A \sin A} \\ &= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A)^2}{\cos A \sin A} = \frac{1}{\cos A \sin A}. \\ \text{右端} &= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A} \\ &= \frac{1}{\cos A \sin A}. \end{aligned}$$

∴ 原式左右端相等.

$$3. \text{ 試證 } (1 - \cos^2 A) \cot^2 A = \cos^2 A. \quad (\text{浙 } 22)$$

$$\text{[解] 原式左端} = \sin^2 A \cot^2 A = \sin^2 A \times \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \cos^2 A.$$

4. 證明下二式:

$$(a) \tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A \sin^2 A.$$

$$(b) \sec^2 A + \csc^2 A = \sec^2 A \csc^2 A. \quad (\text{贛 } 23)$$

$$\begin{aligned} \text{[解] (a) } \tan^2 A - \sin^2 A &= \tan^2 A - \tan^2 \cos^2 A \\ &= \tan^2 A (1 - \cos^2 A) = \tan^2 A \sin^2 A. \end{aligned}$$

$$(b) \sec^2 A \csc^2 A = (1 + \tan^2 A)(1 + \cot^2 A)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \tan^2 A + \cot^2 A + \tan^2 A \cot^2 A \\
 &= 1 + \tan^2 A + 1 + \cot^2 A = \sec^2 A + \csc^2 A.
 \end{aligned}$$

5. 證明: $\sec A - \cos A = \sin A \tan A$.

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad \sec A - \cos A &= \frac{1}{\cos A} - \cos A = \frac{1 - \cos^2 A}{\cos A} \\
 &= \frac{\sin^2 A}{\cos A} = \sin A \tan A.
 \end{aligned}$$

6. 證明: $\cot^2 X - \cos^2 X = \cot^2 X \cos^2 X$.

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad \cot^2 X - \cos^2 X &= \cot^2 X - \cot^2 X \sin^2 X \\
 &= \cot^2 X(1 - \sin^2 X) = \cot^2 X \cos^2 X.
 \end{aligned}$$

7. 證明: $\csc A - \sin A = \cos A \cot A$.

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad \csc A - \sin A &= \frac{1}{\sin A} - \sin A = \frac{1 - \sin^2 A}{\sin A} \\
 &= \frac{\cos^2 A}{\sin A} = \cos A \cot A.
 \end{aligned}$$

8. 證明: $(1 + \tan A)^2 + (1 + \cot A)^2 = (\sec A + \csc A)^2$.

$$\text{[解]} \quad \text{右端} = \sec^2 A + 2 \sec A \csc A + \csc^2 A.$$

$$\text{左端} = 1 + 2 \tan A + \tan^2 A + 1 + 2 \cot A + \cot^2 A$$

$$= \sec^2 A + 2(\tan A + \cot A) + \csc^2 A$$

$$\text{但} \quad \tan A + \cot A = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A} = \frac{1}{\cos A \sin A} = \sec A \csc A$$

$$\therefore \text{左端} = \sec^2 A + 2 \sec A \csc A + \csc^2 A$$

故原式兩端相等。

9. 證明: $\frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} = \sin A + \cos A$.

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & \frac{\cos A}{1 - \tan A} - \cos A + \frac{\sin A}{1 - \cot A} - \sin A \\ &= \frac{\cos A - \cos A + \cos A \tan A}{1 - \tan A} \\ & \quad + \frac{\sin A - \sin A + \sin A \cot A}{1 - \cot A} \\ &= \frac{\sin A}{1 - \tan A} + \frac{\cos A}{1 - \cot A} \\ &= \frac{\sin A - \cos A + \cos A - \sin A}{(1 - \tan A)(1 - \cot A)} = 0, \end{aligned}$$

故原式兩端相等。

10. 證明: $\frac{\sin X}{1 + \cos X} = \frac{1 - \cos X}{\sin X}$.

[解] 已知: $\sin^2 X + \cos^2 X = 1$

$$\therefore \sin^2 X = 1 - \cos^2 X$$

$$\sin^2 X = (1 - \cos X)(1 + \cos X)$$

兩邊各用 $\sin X(1 + \cos X)$ 除, 即得

$$\frac{\sin X}{1 + \cos X} = \frac{1 - \cos X}{\sin X}$$

11. 證明： $\sin^2 A \cos^2 B (1 + \cot^2 A)(1 + \tan^2 B) = 1$.

[解] 認原恆等式，真實不誤，而以 $\sin^2 A \cos^2 B$ 除其兩端，得

$$(1 + \cot^2 A)(1 + \tan^2 B) = \frac{1}{\sin^2 A \cos^2 B},$$

$$\text{即 } (1 + \cot^2 A)(1 + \tan^2 B) = \csc^2 A \sec^2 B,$$

$$\text{但 } 1 + \cot^2 A = \csc^2 A,$$

$$\text{而 } 1 + \tan^2 B = \sec^2 B,$$

$$\therefore \csc^2 A \sec^2 B = \csc^2 A \sec^2 B,$$

故知原恆等式，的確不誤。

12. 證明： $\frac{\sin X}{1 + \cos X} + \frac{1 + \cos X}{\sin X} = 2 \csc X$.

[解] 認原式為真確，而得

$$\frac{1 + \cos X}{\sin X} - \csc X = \csc X - \frac{\sin X}{1 + \cos X},$$

$$\frac{1 + \cos X}{\sin X} - \frac{1}{\sin X} = \frac{1}{\sin X} - \frac{\sin X}{1 + \cos X},$$

$$\frac{\cos X}{\sin X} = \frac{1 + \cos X - \sin^2 X}{\sin X + \sin X \cos X},$$

$$\frac{\cos X}{\sin X} = \frac{\cos X + \cos^2 X}{\sin X + \sin X \cos X},$$

$$\frac{\cos X}{\sin X} = \frac{\cos X(1 + \cos X)}{\sin X(1 + \cos X)},$$

$$\frac{\cos X}{\sin X} = \frac{\cos X}{\sin X}.$$

故知原恆等式為真確。

13. 證明: $\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = (\csc A - \cot A)^2.$

[解] 原式右端 $= \csc^2 A - 2 \csc A \cot A + \cot^2 A$

$$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{2 \cos A}{\sin^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$$

$$= \frac{1 - 2 \cos A + \cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{(1 - \cos A)^2}{\sin^2 A}$$

$$= \frac{(1 - \cos A)(1 - \cos A)}{1 - \cos^2 A}$$

$$= \frac{(1 - \cos A)(1 - \cos A)}{(1 - \cos A)(1 + \cos A)} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$$

故知原式是真實不錯。

14 證明: $\sin^2 X + \tan^2 X = \sec^2 X - \cos^2 X.$

[解] 因 $\sin^2 X + \cos^2 X = 1$

又因 $1 + \tan^2 X = \sec^2 X$

故兩式相加, 得

$$\sin^2 X + \cos^2 X + 1 + \tan^2 X = 1 + \sec^2 X,$$

兩端各減 $(\cos^2 X + 1)$, 即得

$$\sin^2 X + \tan^2 X = \sec^2 X - \cos^2 X,$$

故原恆等式可以證明無誤。

15. 證明: $\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} - \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = 4 \cot A \csc A$

[解] 原式左端 $= \frac{(1 + \cos A)^2 - (1 - \cos A)^2}{1 - \cos^2 A} = \frac{4 \cos A}{1 - \cos^2 A}$
 $= \frac{4 \cos A}{\sin^2 A} = 4 \cot A \csc A.$

III. 解方程式的問題:——解簡易三角方程式,祇須利用餘角函數關係,及同角函數關係,將式中不同的各三角函數,化成一種相同的三角函數,就可用代數方法,解方程式求根了.今舉模範例題於下:

(A) 利用餘角函數關係可解的方程式:

1. 設 $\tan(45^\circ + A) = \cot A$; 求 $A = ?$

[解] 因 $\cot A = \tan(90^\circ - A)$, 故原方程式可以寫成

$$\tan(45^\circ + A) = \tan(90^\circ - A),$$

兩角的同函數相等, 兩角也相等,

$$\therefore 45^\circ + A = 90^\circ - A$$

$$\therefore 2A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$$A = 22^\circ \frac{1}{2}.$$

2. 設 $\sin A = \cos 4A$, 試求 A 是幾度.

[解] $\cos 4A = \sin(90^\circ - 4A)$

$$\therefore \sin A = \sin(90^\circ - 4A)$$

$$\text{即} \quad A = 90^\circ - 4A$$

$$5A = 90^\circ, \quad \therefore A = 18^\circ$$

3. 設 $\cos A = \sin\left(45^\circ - \frac{1}{2}A\right)$; 試求 A 之度數.

$$[\text{解}] \quad \cos A = \sin(90^\circ - A),$$

故從原方程式, 可得

$$\sin(90^\circ - A) = \sin\left(45^\circ - \frac{1}{2}A\right)$$

$$90^\circ - A = 45^\circ - \frac{1}{2}A$$

$$\frac{1}{2}A = 45^\circ,$$

$$A = 90^\circ$$

(B) 利用同角函數關係可解的方程式:

1. 已知 $\tan \theta + \cot \theta = 2$, 求 θ . (湘二屆)

[解] 因 $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$, 故原方程式可寫成

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 2,$$

兩端用 $\tan \theta$ 乘, $\tan^2 \theta + 1 = 2 \tan \theta$,

$$\text{即} \quad \tan^2 \theta - 2 \tan \theta + 1 = 0,$$

$$(\tan \theta - 1)^2 = 0, \quad \therefore \tan \theta = 1,$$

從特殊角函數表, 知 $\theta = 45^\circ$.

2. $\sin^2 x = \frac{3}{2} \cos x$, 求 x .

[解] $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, 故從原方程式, 得

$$1 - \cos^2 x = \frac{3}{2} \cos x,$$

$$\cos^2 x + \frac{3}{2} \cos x - 1 = 0,$$

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0,$$

$$(2 \cos x - 1)(\cos x + 2) = 0,$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2}, \text{ 或 } -2,$$

但 $\cos x$ 決不能等於 -2 , $\therefore \cos x = \frac{1}{2}$,

故知 $x = 60^\circ$.

3. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$, 求 x .

[解] 因 $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, 故原方程式可改成

$$\sin x + \sqrt{3} \sqrt{1 - \sin^2 x} = 2,$$

即 $\sqrt{3 - 3 \sin^2 x} = 2 - \sin x$,

兩邊乘方, $3 - 3 \sin^2 x = 4 - 4 \sin x + \sin^2 x$,

移項整理, $4 \sin^2 x - 4 \sin x + 1 = 0$,

即 $(2 \sin x - 1)^2 = 0$,

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2}, x = 30^\circ.$$

4. $3 \tan \theta + \cot \theta = 5 \csc \theta$ 求 θ .

$$[\text{解}] \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

代入原方程式,

$$\frac{3 \sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{5}{\sin \theta},$$

$$\frac{3 \sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{5}{\sin \theta} = 0,$$

$$\frac{3 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 5 \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 0,$$

$$\therefore 3 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 5 \cos \theta = 0,$$

$$3(1 - \cos^2 \theta) + \cos^2 \theta - 5 \cos \theta = 0,$$

$$\text{即} \quad 2 \cos^2 \theta + 5 \cos \theta - 3 = 0,$$

$$(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 3) = 0,$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2}, \text{ 或 } -3 \text{ (不合理),}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ.$$

5. $\sqrt{2} \cos \theta = \cot \theta$, 求 θ .

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \text{ 代入原方程式,}$$

$$\sqrt{2} \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \sqrt{2} \cos \theta - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 0,$$

$$\cos \theta \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sin \theta} \right) = 0, \quad \therefore \cos \theta = 0, \quad \theta = 90^\circ;$$

$$\text{或} \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad \therefore \theta = 45^\circ.$$

6. $\sin^2 x - 2 \cos x + \frac{1}{4} = 0$, 求 x .

[解] $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, 代入原方程式,

$$1 - \cos^2 x - 2 \cos x + \frac{1}{4} = 0,$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x - \frac{5}{4} = 0,$$

$$\left(\cos x + \frac{5}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2}, \text{ 或 } -\frac{5}{2} \text{ (不合理)}$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

7. $\sin x + 2 \cos^2 x = 2$, 求 x .

[解] $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, 代入原方程式,

$$\sin x + 2(1 - \sin^2 x) = 2,$$

$$2 \sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\sin x(2 \sin x - 1) = 0,$$

$$\therefore \sin x = 0, \text{ 或 } \frac{1}{2}$$

故知 $x = 0^\circ$, 或 30°

8. $\tan x = 2 \sin x$, 求 x .

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 代入原方程式,

$$\frac{\sin x}{\cos x} - 2 \sin x = 0,$$

$$\frac{\sin x - 2 \sin x \cos x}{\cos x} = 0,$$

$$\sin x - 2 \sin x \cos x = 0,$$

$$\sin x(1 - 2 \cos x) = 0,$$

$$\sin x = 0, \quad x = 0^\circ;$$

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad x = 60^\circ.$$

9. $\sec^2 \theta = 2 \tan^2 \theta$, 求 θ .

[解] 以 $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 代入原方程式

$$1 + \tan^2 \theta = 2 \tan^2 \theta,$$

$$\tan^2 \theta - 1 = 0,$$

$$(\tan \theta - 1)(\tan \theta + 1) = 0,$$

$$\therefore \tan \theta = 1, \text{ 或 } -1.$$

此處 -1 並非不合理之根, 但照初中程度說, 所講的都是銳角三角函數, 銳角三角函數是沒有負數的, 所以負根暫時不取. 於是 $\tan \theta = 1$; 而 $\theta = 45^\circ$.

10. $\sin \theta + \cos \theta = 1$, 求 θ .

[解] 兩邊自乘,

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore 2 \sin \theta \cos \theta = 0,$$

$$\sin \theta = 0, \cos \theta = 0,$$

$$\therefore \theta = 0^\circ, \text{ 或 } 90^\circ.$$

11. $4 \sin^2 x - 2(\sqrt{3} + 1)\sin x + \sqrt{3} = 0$, 求 x .

[解] $(2 \sin x - 1)(2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$,

$$\therefore 2 \sin x - 1 = 0, \sin x = \frac{1}{2};$$

或 $2 \sin x - \sqrt{3} = 0, \sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3};$

故 $x = 30^\circ$, 或 60° .

12. $\cot \theta + \tan \theta = 2 \sec \theta$, 求 θ .

[解] $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{\cos \theta}$,

$$\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{2}{\cos \theta} = 0,$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{2}{\cos \theta} = 0$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} - 2 \right) = 0,$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \text{ 決不能等於零,}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin \theta} - 2 = 0, \sin \theta = \frac{1}{2}, \theta = 30^\circ.$$

13. $\csc^2 x + \cot^2 x = 3$, 求 x .

[解] $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$, 代入原方程式, 得

$$1 + 2 \cot^2 x = 3,$$

$$\cot^2 x = 1, \cot x = \pm 1,$$

-1 暫時不用, $\cot x = 1, \therefore x = 45^\circ$.

14. $3 \sec^4 \theta + 8 = 10 \sec^2 \theta$, 求 θ .

$$[\text{解}] \quad 3 \sec^4 \theta - 10 \sec^2 \theta + 8 = 0,$$

$$(3 \sec^2 \theta - 4)(\sec^2 \theta - 2) = 0,$$

$$\therefore \sec \theta = \pm \frac{2}{3} \sqrt{3}, \text{ 或 } \pm \sqrt{2},$$

$$\text{負根不用, } \therefore \sec \theta = \frac{2}{3} \sqrt{3}, \theta = 30^\circ,$$

$$\text{或 } \sec \theta = \sqrt{2}, \theta = 45^\circ$$

$$15. \quad 2 \cos \theta + 2\sqrt{2} = 3 \sec \theta, \text{ 求 } \theta.$$

$$[\text{解}] \quad \frac{2}{\sec \theta} + 2\sqrt{2} - 3 \sec \theta = 0,$$

$$3 \sec^2 \theta - 2\sqrt{2} \sec \theta - 2 = 0$$

$$(3 \sec \theta + \sqrt{2})(\sec \theta - \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore \sec \theta = \sqrt{2}, \text{ 或 } -\frac{1}{3} \sqrt{2} (\text{不用})$$

$$\therefore \theta = 45^\circ.$$

$$16. \quad 6 \tan \theta - 5\sqrt{3} \sec \theta + 12 \cot \theta = 0, \text{ 求 } \theta.$$

$$[\text{解}] \quad \frac{6 \sin \theta}{\cos \theta} - \frac{5\sqrt{3}}{\cos \theta} + \frac{12 \cos \theta}{\sin \theta} = 0$$

$$\frac{6 \sin^2 \theta - 5\sqrt{3} \sin \theta + 12 \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} = 0,$$

$$\therefore 6 \sin^2 \theta - 5\sqrt{3} \sin \theta + 12(1 - \sin^2 \theta) = 0$$

$$6 \sin^2 \theta + 5\sqrt{3} \sin \theta - 12 = 0$$

$$(3 \sin \theta + 4\sqrt{3})(2 \sin \theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{4}{3} \sqrt{3}, \text{ 或 } \frac{1}{2} \sqrt{3};$$

但 $\sin \theta$ 決不能等於 $-\frac{4}{3}\sqrt{3}$,

故 $\sin \theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\theta = 60^\circ$.

$$17. \begin{cases} \tan x \tan y = 1, \\ \tan^2 x + \tan^2 y = \frac{10}{3}, \end{cases} \text{ 求 } x \text{ 與 } y.$$

[解]

$$2 \tan x \tan y = 2,$$

$$\therefore \tan^2 x + 2 \tan x \tan y + \tan^2 y = \frac{16}{3},$$

$$\therefore \tan x + \tan y = \pm \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

但此處負根不能用, 因若取負根, 則因

$$\tan x \tan y = 1,$$

故兩函數必須同為負數, 出於銳角三角函數範圍以外.

$$\text{又 } \tan^2 x - 2 \tan x \tan y + \tan^2 y = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \tan x - \tan y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

此式負根可用, 因 $\tan y > \tan x$, 就可得負數.

$$\text{從 } \tan x + \tan y = \frac{4}{3}\sqrt{3}, \tan x - \tan y = \frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$\text{得 } \tan x = \sqrt{3}, \tan y = \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore x = 60^\circ, y = 30^\circ.$$

$$\text{從 } \tan x + \tan y = \frac{4}{3}\sqrt{3}, \tan x - \tan y = -\frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$\text{得 } \tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \tan y = \sqrt{3},$$

$$\therefore x = 30^\circ, y = 60^\circ.$$

IV. 解三角形的問題：——解直角三角形，祇須照三角函數定義，列式求值；在未列式以前，宜就題意，畫一草圖。現將模範問題解法，示例於下：

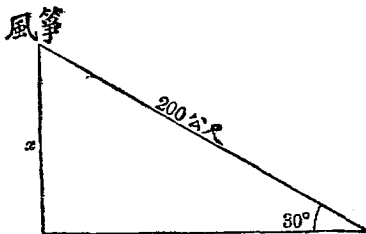
1. 風箏之線長 200

公尺，其仰角為

30° ，假設風箏之

線為直線，求風

箏之高。（滬 23）



【解】先依題意，作

直角三角形如上圖，

$$\sin 30^\circ = \frac{x}{200},$$

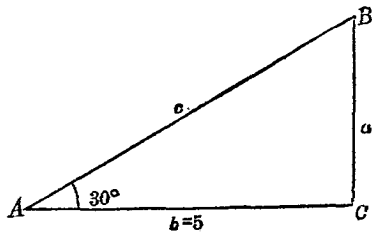
$$\therefore x = 200 \sin 30^\circ = 200 \times \frac{1}{2} = 100.$$

答：風箏高 100

公尺。

2. $C=90^\circ, A=30^\circ, b=5$;

求 B 及 a, c 。（閩）



【解】 $B=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

$$a = 5 \tan 30^\circ$$

$$= 5 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} = \frac{5}{\sqrt{3}} \sqrt{3}.$$

$$c = \frac{5}{\cos 30^\circ} = 5 / \frac{1}{2} \sqrt{3} = 5 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \sqrt{3}$$

$$\text{答: } B = 60^\circ, a = \frac{5}{\sqrt{3}} \sqrt{3}, c = \frac{10}{\sqrt{3}} \sqrt{3}.$$

3. 一石壁高出水面 800 尺，下視遠處一船的俯角，是 30° 。求此船離石壁的距離。

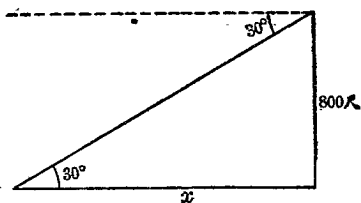
[解] 依題意得右

圖。

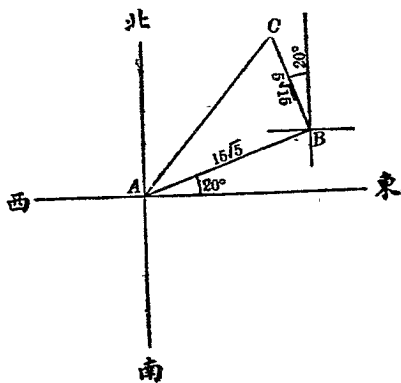
$$\frac{800}{x} = \tan 30^\circ,$$

$$\therefore x = \frac{800}{\tan 30^\circ} \text{ 船}$$

$$= 800 / \frac{1}{\sqrt{3}} = 800 \sqrt{3} \text{ 尺.}$$



4. 一船從 A 港出發，向北偏東 70° (即 $N 70^\circ E$) 駛行 $15\sqrt{5}$ 哩之後，又向北偏西 20° (即 $N 20^\circ W$) 駛行 $5\sqrt{15}$ 哩。問此



時船在 A 港的什麼方位? 離 A 幾浬?

[解] 依題意, 得上圖, $\triangle ABC$ 是直角三角形.

$$\text{於是 } \tan \hat{BAC} = \frac{5\sqrt{15}}{15\sqrt{5}} = \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore \hat{BAC} = 30^\circ, 90^\circ - (30^\circ + 20^\circ) = 40^\circ,$$

\therefore 船在 A 港的北偏 $\text{東 } 40^\circ$.

$$\text{又 } \overline{AC}^2 = (15\sqrt{5})^2 + (5\sqrt{15})^2 = 1125 + 375 = 1500,$$

$$\therefore \overline{AC} = 10\sqrt{15}$$

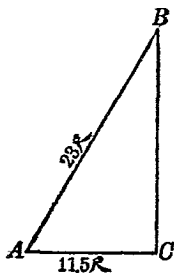
即 船離 A 港 $10\sqrt{15}$ 浬.

5. 在正午時, 以 23 尺之竿斜植於地, 影長 11.5 尺. 問竿與地面成角幾度?

[解] 依題意, 得直角三角形如右圖.

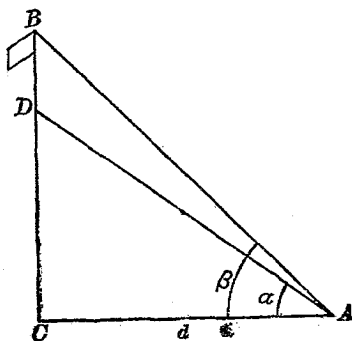
$$\therefore \cos A = \frac{11.5}{23} = \frac{1}{2}, A = 60^\circ.$$

答: 竿與地面適成 60° 之角.



6. 塔頂上有旗竿一根. 在離塔 d 尺處, 測得塔頂仰角是 α , 旗竿頂仰角是 β , 求旗竿長若干.

[解] 依題意得下圖.



$$CD = d \tan \alpha,$$

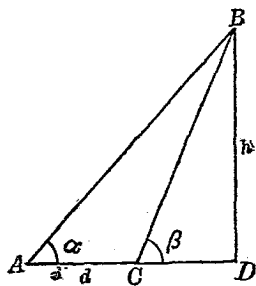
$$CB = d \tan \beta, \quad CB - CD = DB,$$

$$\therefore DB = d \tan \beta - d \tan \alpha = d(\tan \beta - \tan \alpha).$$

7. 在 A 點測某山頂，得仰角 α ，再前進 d 尺，在同平面上 C 點再測山頂，得仰角 β 。證明山高

$$h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}.$$

[解] 依題意得右圖。於是

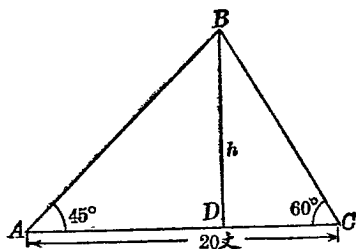


$$AD = h \cot \alpha, \quad CD = h \cot \beta,$$

$$AD - CD = h(\cot \alpha - \cot \beta) = d,$$

$$\therefore h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}.$$

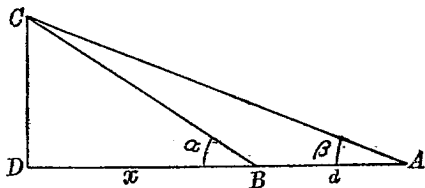
8. 在直線堤上,相離
20 丈的 A, C 兩點,
測對岸 B 點,得
 $\angle BAC = 45^\circ, \angle BCA$
 $= 60^\circ$. 求 B 到此堤
岸的距離.



- [解] 依題意,得上圖. B 到 AC 的距離,就是 AC 的
垂線 BD , 命 $BD = h$. 於是
 $AD = h \cot 45^\circ, DC = h \cot 60^\circ,$
 $AD + DC = 20 \text{ 丈} = h(\cot 45^\circ + \cot 60^\circ)$

$$\begin{aligned} \therefore h &= \frac{20}{\cot 45^\circ + \cot 60^\circ} = \frac{20}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{60}{3 + \sqrt{3}} = \frac{60(3 - \sqrt{3})}{9 - 3} = \frac{60(3 - \sqrt{3})}{6} \\ &= 10(3 - \sqrt{3}) = 10(3 - 1.732) \\ &= 10 \times 1.268 = \underline{\underline{12.68 \text{ 丈}}} \end{aligned}$$

9. 欲測江闊
 BD , 在岸上
 B 點,測得對
岸建築物屋
頂 C 仰角 α , 再



退後 d 尺, 在 A 處測得 C 的仰角 β ; 若 A, B, D 在同平面內求江寬幾尺.

[解] 依題意得上圖. 命江寬 $BD=x$, 則得

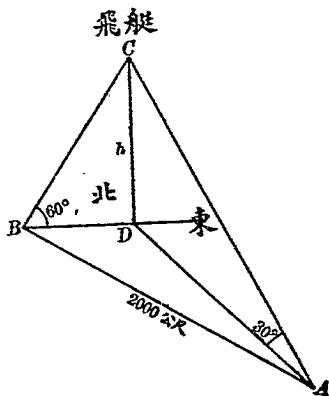
$$CD = x \tan \alpha, \quad CD = (d+x) \tan \beta,$$

$$\therefore x \tan \alpha = d \tan \beta + x \tan \beta,$$

$$x(\tan \alpha - \tan \beta) = d \tan \beta,$$

$$\therefore x = \frac{d \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}.$$

10. 同在水平面上 A, B 二點, 距離 2000 公尺, 在 A 點望見空中飛艇, 在正北方位, 測得仰角 30° ; 同時 B 處望見飛艇在正東方位, 測得仰角 60° ; 求飛艇離地之高. 計算到公尺為止, 尺以下四捨五入.



[解] 依題意, 作得上圖, h 為飛艇之高. $\triangle BDC$, $\triangle ADC$, $\triangle ADB$ 都是直角三角形. 於是

$$BD = h \cot 60^\circ, AD = h \cot 30^\circ,$$

$$\overline{BD}^2 = h^2 \cot^2 60^\circ, \overline{AD}^2 = h^2 \cot^2 30^\circ,$$

$$\text{但 } \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 = 2000^2,$$

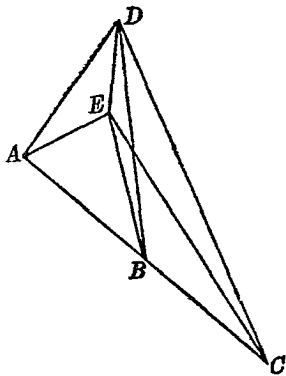
$$\therefore h^2 \cot^2 60^\circ + h^2 \cot^2 30^\circ = 2000^2,$$

$$\therefore h = \frac{2000}{\sqrt{\cot^2 60^\circ + \cot^2 30^\circ}} = \frac{2000}{\sqrt{\frac{1}{3} + 3}}$$

$$= \frac{2000}{\sqrt{\frac{10}{3}}} = \frac{2000}{\frac{1}{3}\sqrt{30}} = \frac{6000}{\sqrt{30}}$$

$$= \frac{6000}{30} \sqrt{30} = 200\sqrt{30} = 1095 \text{ 公尺.}$$

11. A, B, C 三人, 在平地一直線上, B 與 A 的距離, 等於 B 與 C 的距離, 都是 10 丈. 三人同時觀測空中氣球 D , 得仰角 $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$. 求氣球離地的高.



[解] 依題意, 得右圖, 圖中

$DE = h =$ 氣球之高.

$\angle DAE = 60^\circ, \angle DBE = 45^\circ, \angle DCE = 30^\circ.$

於是 $AE = h \cot 60^\circ$, $BE = h \cot 45^\circ$, $CE = h \cot 30^\circ$
依幾何定理,

$$\overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2)$$

(Δ 兩邊的平方和,等於第三邊上中線平方,
與第三邊一半的平方和之倍.)

$$\therefore h^2 \cot^2 60^\circ + h^2 \cot^2 30^\circ = 2(10^2 + h^2 \cot^2 45^\circ)$$

$$\text{即 } \frac{1}{3}h^2 + 3h^2 = 200 + 2h^2$$

$$4h^2 = 600, h^2 = 150$$

$$\therefore h = 5\sqrt{6} = 12.25 \text{ 丈.}$$

中華民國廿四年三月九日

收到



中華民國二十四年七月三初版

(58702B)

初中複習叢書算學二冊

下冊定價大洋肆角
外埠酌加運費匯費

編著者 陳 嶽 生

發行人 王 雲 五
上海河南路

印刷所 商 務 印 書 館
上海河南路

發行所 商 務 印 書 館
上海及各埠

* 有 所 權 版 *
* 究 必 印 翻 *

3

752922

(12)