Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 70

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 70.1. Es sei M ein Messraum mit einer Ausschöpfung $M_n \uparrow M$ und sei

$$f_n \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Folge von nichtnegativen messbaren Funktionen mit der Grenzfunktion

$$f \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

Zeige, dass $S^o(M_n; f_n)$ eine Ausschöpfung von $S^o(M; f)$ ist.

AUFGABE 70.2. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f_n = 1 - \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}_+)$. Es sei f die Grenzfunktion. Zeige die Beziehung

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} S(f_n) \,=\, S(f) \setminus \Gamma_f .$$

AUFGABE 70.3.*

Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ zwei endliche Maßräume und es seien

$$f \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

und

$$g \colon N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

integrierbare Funktionen. Zeige

$$\int_{M \times N} (f+g) d\mu \otimes \nu \,=\, \nu(N) \cdot \int_M f(x) d\mu(x) + \mu(M) \cdot \int_N g(y) d\nu(y).$$

AUFGABE 70.4. Wir betrachten die Funktion

$$f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welches $x \in [0,1]$ besitzt die zugehörige zweistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 70.5. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn

$$\liminf\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \limsup\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) .$$

Aufgabe 70.6.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge,

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Abbildung und $y_n = f(x_n)$ die Bildfolge. Es sei H die Menge der Häufungspunkte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und G die Menge der Häufungspunkte von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Zeige $f(H) \subseteq G$.

b) Zeige

$$f\left(\limsup\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right) \leq \limsup\left((y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

c) Zeige, dass die Abschätzung aus Teil b) echt sein kann.

Aufgabe 70.7. Es sei $f_n : [1,+\infty[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$, für $n \in \mathbb{Z}_+$, die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{falls } x \in [n,+\infty[\,, \\ 0, & \text{anderfalls}\ . \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to+\infty} f_n \text{ und } \lim_{n\to+\infty} \int_{[1,+\infty]} f_n d\lambda^1.$$

Aufgabe 70.8. Es sei $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$, für $n \in \mathbb{Z}_+$, die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{\exp(-nx)}{x+n}.$$

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to+\infty} f_n \text{ und } \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty]} f_n d\lambda^1.$$

Aufgabe 70.9. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ und sei

$$y_n := \inf\left(x_k,\, k \geq n\right) .$$

a) Zeige, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend ist.

b) Zeige, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\liminf\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ punktweise konvergiert.

AUFGABE 70.10. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und sei

$$f_n \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine Folge von messbaren Funktionen. Zeige, dass dann auch die Funktionen

$$\liminf \left((f_n)_{n \in \mathbb{N}} \right) \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, x \longmapsto \liminf \left((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \right),$$

und

$$\limsup \left((f_n)_{n \in \mathbb{N}} \right) \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, x \longmapsto \limsup \left((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \right),$$

messbar sind.

AUFGABE 70.11. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei

$$f_n \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

$(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen. Zeige, dass

$$\int_M \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \int_M f_n \, d\mu$$

gilt.

AUFGABE 70.12. Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x \mathrm{d}x.$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 70.13. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer integrierbaren Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die das Integral nicht das Supremum über alle Treppenintegrale zu unteren Treppenfunktionen ist.

AUFGABE 70.14. (5 (2+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f \colon [0,1] \longrightarrow [0,1],\, x \longmapsto x^2.$$

Berechne für $n = 1, 2, \ldots, 5$ das Supremum der Integrale zu den folgenden einfachen Funktionen.

a) Die Funktionen $g \leq f$, die auf den n Teilintervallen $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ (mit $k = 0, \ldots, n-1$) konstant sind.

b) Die Funktionen $h \leq f$, die nur die Werte $\frac{k}{n}$ annehmen.

Aufgabe 70.15. (4 Punkte)

Bestimme für die Funktionenfolge

$$f_n\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f_n(x) = x^n,$$

die zugehörigen Integrale, den Grenzwert der Integrale, die Grenzfunktion und das Integral der Grenzfunktion.

Aufgabe 70.16. (4 Punkte)

Bestimme die Häufungspunkte der Folge $x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$. Was ist der Limes inferior, was der Limes superior?

Aufgabe 70.17. (8 Punkte)

Bestimme den Limes inferior und den Limes superior der Funktionenfolge $f_n(x) = \sin(nx)$ auf $[0, \pi]$.

Aufgabe 70.18. (5 Punkte)

Zeige, dass der Satz von der majorisierten Konvergenz ohne die Voraussetzung über die Existenz einer Majorante $h \geq |f_n|$ nicht gilt.

Aufgabe 70.19. (3 Punkte)

Es sei $]a, b[$ ein (eventuell unbeschränktes) Intervall und es sei

$$f\colon\ ]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nichtnegative stetige Funktion. Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)dt$ gleich dem Lebesgue-Integral $\int_{]a,b[} f\, d\lambda$ (also gleich dem Flächeninhalt des Subgraphen) ist.