**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2019/2020**

# Bündel, Garben und Kohomologie

## Arbeitsblatt 9

Aufgabe 9.1. Bestimme diejenigen Unterringe von $\mathbb{Q}$, die als Schnittringe auf Spek $(\mathbb{Z})$ und diejenigen Unterringe, die als Halme in Spek $(\mathbb{Z})$ auftreten.

Aufgabe 9.2. Es sei $T \subseteq \mathbb{P}$ eine Teilmenge der Primzahlen. Zeige, dass die Menge

$$R_T = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \text{ lässt sich mit einem Nenner schreiben, in dem nur Primzahlen aus } T \text{ vorkommen}\}$$

ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist. Was ergibt sich bei $T = \emptyset$, $T = \{3\}$, $T = \{2, 5\}$, $T = \mathbb{P}$?

Aufgabe 9.3. Es sei $R = \mathbb{Z}[\frac{2}{3}]$ der von $\mathbb{Z}$ und $2/3$ erzeugte Unterring von $\mathbb{Q}$. Zeige, dass $R$ alle rationalen Zahlen enthält, die sich mit einer Potenz von 3 im Nenner schreiben lassen.

Aufgabe 9.4. Sei $R$ ein kommutativer Ring und sei $f \in R$ mit zugehöriger Nenneraufnahme $R_f$. Beweise die $R$-Algebraisomorphie

$$R_f \cong R[T]/(Tf - 1).$$

Aufgabe 9.5. Es sei $R$ ein kommutativer Ring und $f, g \in R$ Elemente. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Es ist $D(f) \subseteq D(g)$ (im Spektrum von $R$).
(2) Es ist $\operatorname{rad}((f)) \subseteq \operatorname{rad}((g))$.
(3) Es ist $f \in \operatorname{rad}((g))$.
(4) Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n \in (g)$
(5) Das Element $g$ teilt eine Potenz von $f$.
(6) Es ist $g$ eine Einheit in $R_f$.
(7) Es gibt einen $R$-Algebrahomomorphismus $R_g \to R_f$.

Aufgabe 9.6. Sei $R$ ein kommutativer Ring, $f \in R$ ein Element und $R_f$ die zugehörige Nenneraufnahme. Zeige, dass $f$ genau dann nilpotent ist, wenn $R_f$ der Nullring ist.

Aufgabe 9.7. Es sei $R$ ein Integritätsbereich und $U \subseteq X = \operatorname{Spek}(R)$ eine offene Teilmenge. Zeige

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{f \neq 0,\, D(f) \subseteq U} R_f,$$

wobei der Durchschnitt im Quotientenkörper $Q(R)$ genommen wird.

Aufgabe 9.8. Sei $R$ ein Hauptidealbereich mit Quotientenkörper $Q = Q(R)$. Zeige, dass jeder Zwischenring $S$, $R \subseteq S \subseteq Q$, eine Nenneraufnahme ist.

Aufgabe 9.9. Zeige, dass für die in Beispiel 9.6 betrachtete offene Menge $U = D(X + Y)$ gilt. Beschreibe die dort betrachtete Funktion mit dem Nenner $X + Y$.

Aufgabe 9.10. Es sei $R$ ein faktorieller Integritätsbereich und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal der Höhe $\geq 2$. Zeige, dass die Restriktionsabbildung

$$R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(X \setminus \{\mathfrak{m}\}, \mathcal{O}_X)$$

bijektiv ist.

Aufgabe 9.11. Finde zu $R = K[X, Y, Z]/(XY - Z^n)$ auf $U = D(X, Z) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$ definierte rationale Funktionen, die man nicht mit einem optimalen Nenner schreiben kann.

Aufgabe 9.12. Es sei $X = \operatorname{Spek}(R)$ das Spektrum eines kommutativen Ringes $R$ und $f \in R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass $D(f)$ mit der Invertierbarkeitsort $X_f$ übereinstimmt.

Aufgabe 9.13. Es sei $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen. Zeige, dass man die Spektrumsabbildung

$$\varphi^*\colon \operatorname{Spek}(S) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

in natürlicher Weise zu einem Morphismus lokal beringter Räume machen kann.

# Abbildungsverzeichnis