ルニ $x=\frac{1}{4}$ ハ適スレドモ $\frac{9}{4}$ ハ適セズ，故ニ所要ノ根ハ $\underset{\sim}{\frac{1}{4}}$ ナリ．

3. $6\sqrt{x^2-2x+6}=21+2x-x^2$ ヲ解ケ．

[34. 農．大．實.]

解 所題ノ方程式ヲ移項シテ

$$x^2-2x+6+6\sqrt{x^2-2x+6}-27=0,$$

左邊ヲ因數ニ分解シテ

$$(\sqrt{x^2-2x+6}-3)(\sqrt{x^2-2x+6}+9)=0,$$

故ニ $\sqrt{x^2-2x+6}=3$ ... ... (1)

或ハ $\sqrt{x^2-2x+6}=-9$ ... ... (2)

(1) ノ兩邊ヲ自乘シテ簡單ニスレバ

$$x^2-2x-3=0,$$

之ヲ解キテ $x=3$, 或ハ -1

ヲ得．而シテ x ノ是等ノ値ハ何レモ所題ノ方程式ニ適合ス．但 (2) ヨリハ根ヲ與ヘズ．

依リテ所要ノ根ハ次ノ如シ．

$$x=\underset{\sim}{3},\ \underset{\sim}{1}.$$

4. $\sqrt{x+4}-\sqrt{x}=2\sqrt{x+1}$ ヲ解ケ．

[38. 仙．醫．專.]

解 所題ノ方程式ヲ自乘シテ變化スレバ

$$x+\sqrt{x}\sqrt{x+4}=0,$$

即チ $\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+4})=0,$

之ヨリ $\sqrt{x}=0$, $\therefore$ $x=0$.

而シテ x ノ此ノ値ハ所題ノ方程式ニ適合ス．

然レドモ $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}$ ハ 0 トナルコトナシ．

故ニ所要ノ根ハ $\underset{\sim}{0}$ ナリ．

5. $x^2+\sqrt{x^2-7x+18}=24+7x$ ノ根ヲ求メヨ．

[41. 商船.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$x^2-7x+18+\sqrt{x^2-7x+18}-42=0,$$

或ハ $(\sqrt{x^2-7x+18}+7)(\sqrt{x^2-7x+18}-6)=0,$

故ニ $\sqrt{x^2-7x+18}=-7$ ... ...(1)

或ハ $\sqrt{x^2-7x+18}=6$ ... ...(2)

此ノ (1) ヨリハ根ヲ與ヘズ．

(2) ヲ自乘シテ簡單ニスレバ

$$x^2-7x-18=0,$$

$$\therefore x=9,\ 或ハ\ -2.$$

而シテ $x=9$, -2 ハ所題ノ方程式ニ適合ス．

故ニ所要ノ根ハ $\underset{\sim}{9}$, $\underset{\sim}{-2}$ ナリ．

6. $x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x-2}=6$ ヲ解ケ.

[36. 陸. 士.]

解 所題ノ方程式ヲ移項シテ

$$x^2+3x-2+3\sqrt{x^2+3x-2}-4=0,$$

之ヲ $\sqrt{x^2+3x-2}$ ノ二次方程式トシテ解ケバ

$$\sqrt{x^2+3x-2}=1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots(1)$$

及ビ

$$\sqrt{x^2+3x-2}=-1 \quad \dots \quad \dots(2)$$

(1) ヲ自乘シテ簡單ニスレバ

$$x^2+3x-3=0,$$

$$\therefore \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}.$$

而シテ此ノ値ハ皆所題ノ方程式ニ適合ス.

但 (2) ヨリハ根ヲ與ヘズ.

依リテ所要ノ根ハ次ノ如シ.

$$\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}.$$

7. $x^2-5x+\sqrt{x^2-5x+11}=19$ ヲ解ケ.

[36. 海. 兵.]

解 所題ノ方程式ヲ移項スレバ

$$x^2-5x+11+\sqrt{x^2-5x+11}-30=0,$$

之ヲ $\sqrt{x^2-5x+11}$ ノ二次方程式トシテ解ケバ

$$\sqrt{x^2-5x+11}=-6 \quad \dots \quad \dots(1)$$

或ハ

$$\sqrt{x^2-5x+11}=5 \quad \dots \quad \dots \quad \dots(2)$$

此ノ (1) ヨリハ根ヲ與ヘズ.

而シテ (2) ヨリ　$x^2-5x-14=0,$

$$\therefore \quad x=7, \text{ 或ハ } -2.$$

x ノ是等ノ値ハ皆所題ノ方程式ニ適合ス.

依リテ所要ノ根ハ次ノ如シ.

$$x=7, \quad -2.$$

8. $\sqrt{2x-5}-\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-3}=0$ ヲ解ケ.

[37. 海. 兵.]

解 所題ノ方程式ヲ移項シテ

$$\sqrt{2x-5}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4},$$

自乘シテ簡單ニスレバ

$$\sqrt{(2x-5)(x-3)}=6.$$

又自乘シテ簡單ニスレバ

$$2x^2-11x-21=0,$$

之ヲ解キテ $x=7$, 或ハ $-\frac{3}{2}$, 而シテ此ノ負値ハ所題ノ方程式ニ適合セズ. 依リテ所要ノ根ハ 7 ナリ.

9. $\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}-\sqrt{12x+1}=0$ ヲ解ケ.

[35. 海. 兵.]

解　所題ノ方程式ヲ移項シテ

$$\sqrt{x+5}=\sqrt{12x+1}-\sqrt{3x+4},$$

自乘シテ簡單ニスレバ

$$\sqrt{(12x+1)(3x+4)}=7x,$$

又自乘シテ簡單ニスレバ

$$13x^2-51x-4=0,$$

之ヲ解キテ　$x=4$, 或ハ $-\frac{1}{13}$.

而シテ x ノ始ノ値ハ所題ノ方程式ニ適合スレドモ後ノ値ハ適合セズ. 依リテ所要ノ根ハ 4 ナリ.

10.　$\sqrt{3ax-x^2}-\sqrt{x^2-3bx}=\sqrt{3}\sqrt{(a-b)x}$ ヲ解ケ.　[37. 一高.]

解　所題ノ方程式ヲ自乘シテ簡單ニスレバ

$$\sqrt{x(3a-x)x(x-3b)}=0,$$

又自乘スレバ　$x^2(3a-x)(x-3b)=0,$

之ヨリ $x=0$, $3a$, $3b$ ヲ得, 而シテ x ノ此ノ値ノ中 $3a$ ハ所題ノ方程式ニ適合セズ. 依リテ所要ノ根ハ 0, $3b$ ナリ.

11.　$\sqrt{x+\sqrt{2x+4}}-1=\sqrt{x-1}$ ヲ解ケ.

[30. 一高.]

解　所題ノ方程式ヲ移項シテ

$$\sqrt{x+\sqrt{2x+4}}=\sqrt{x-1}+1,$$

之ヲ自乘シテ簡單ニスレバ

$$\sqrt{2x+4}=2\sqrt{x-1},$$

又自乘シテ簡單ニスレバ, $2x=8$, ∴ $x=4$.

而シテ x ノ此ノ値ハ所題ノ方程式ニ適合ス.

12.　$(a+x)^{\frac{1}{3}}-(b+x)^{\frac{1}{3}}=(a-b)^{\frac{1}{3}}$ ヲ解ケ.

[30. 東.高.工.]

解　所題ノ方程式ノ兩邊ヲ立方スレバ

$$a+x-b-x-3(a+x)^{\frac{1}{3}}(b+x)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}=a-b,$$

卽チ　$-3(a+x)^{\frac{1}{3}}(b+x)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}=0,$

故ニ　$(a+x)^{\frac{1}{3}}(b+x)^{\frac{1}{3}}=0,$

或ハ　$(a+x)(b+x)=0.$

故ニ　$a+x=0$ ヨリ $x=-a,$

$b+x=0$ ヨリ $x=-b.$

而シテ x ノ是等ノ値ハ何レモ所題ノ方程式ニ適合ス.

13.　$\sqrt{x^2-5x+1}-4=\dfrac{5}{\sqrt{x^2-5x+1}}$ ヲ解ケ.

[35. 海.機.]

解 所題ノ方程式ノ分母ヲ拂ヒテ諸項ヲ一邊ニ集ムレバ $x^2-5x+1-4\sqrt{x^2-5x+1}-5=0$,

之ヲ $\sqrt{x^2-5x+1}$ ノ二次方程式トシテ解ケバ

$$\sqrt{x^2-5x+1}=5 \quad \dots \quad \dots \quad \dots(1)$$

或ハ
$$\sqrt{x^2-5x+1}=-1 \dots \quad \dots \quad \dots(2)$$

(1) ノ兩邊ヲ自乘シテ簡單ニスレバ

$$x^2-5x-24=0,$$

之ヲ解キテ　$x=8$, 或ハ　-3.

而シテ x ノ是等ノ値ハ皆所題ノ方程式ニ適合ス.

但 (2) ヨリハ根ヲ與ヘズ.

故ニ所要ノ根ハ 8, -3 ナリ.

14. $\dfrac{x+\sqrt{12a-x}}{x-\sqrt{12a-x}}=\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$ ヲ解ケ.

[35. 商船.]

解 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナルトキハ $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$, 故ニ

所題ノ方程式ヨリ $\dfrac{x}{\sqrt{12a-x}}=\sqrt{a}$,

分母ヲ拂ヒ且自乘シテ

$$x^2+ax-12a^2=0,$$

之ヲ解キテ　$x=3a$, 或ハ　$-4a$.

而シテ x ノ始ノ値ハ所題ノ方程式ニ適合スレド

モ後ノ値ハ適合セズ.

故ニ所要ノ根ハ $3a$ ナリ.

15. $\dfrac{x-\sqrt{3}+\sqrt{x^2-3}}{x-\sqrt{3}-\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{3x+\sqrt{3}}{x-5\sqrt{3}}$ ヲ解ケ.

[30. 海.兵.]

解 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナルトキハ $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$,

故ニ所題ノ方程式ヨリ

$$\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2(x-\sqrt{3})}{x+3\sqrt{3}},$$

故ニ
$$x-\sqrt{3}=0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots(1)$$

或ハ
$$\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2}{x+3\sqrt{3}} \dots \quad \dots \quad \dots(2)$$

(1) ヨリ　$x=\sqrt{3}$,

(2) ノ分母ヲ拂ヒ且自乘シテ簡約スレバ

$$x^2-2\sqrt{3}x-13=0, \quad \therefore \quad x=\sqrt{3}\pm 4.$$

而シテ $x=\sqrt{3}\pm 4$ ハ所題ノ方程式ニ適合スレドモ, $x=\sqrt{3}$ ハ適合セズ, 故ニ所要ノ根ハ

$x=\sqrt{3}\pm 4$ ナリ.

16. $\dfrac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}}=\dfrac{x}{2a}$ ヲ解ケ.

[36. 商船.]

解 I. 所題ノ方程式ノ左邊ノ分母ヲ有理ナラシ

メンガ爲ニ左邊ノ分子ト分母トニ

$$\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}$$

ヲ乘ズレバ $\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-4a^2}}{4a}=\dfrac{x}{2a}$,

即チ $x-\sqrt{x^2-4a^2}=x$,

即チ $\sqrt{x^2-4a^2}=0$,

故ニ $x^2-4a^2=0$,

$$\therefore\ x=\pm 2a.$$

而シテ x ノ是等ノ値ハ皆所題ノ方程式ニ適合ス.

故ニ所要ノ根ハ $2a$ 及ビ $-2a$ ナリ.

解 II. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナルトキハ $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$,

故ニ所題ノ方程式ヨリ

$$\frac{\sqrt{x+2a}}{\sqrt{x-2a}}=-\frac{x+2a}{x-2a},$$

即チ $\dfrac{x+2a}{x-2a}+\sqrt{\dfrac{x+2a}{x-2a}}=0$,

即チ $\sqrt{\dfrac{x+2a}{x-2a}}\left(\sqrt{\dfrac{x+2a}{x-2a}}+1\right)=0$,

故ニ $\sqrt{\dfrac{x+2a}{x-2a}}=0$,

$$\therefore\ x=-2a,$$

又此ノ分母ヲ 0 トシテ $x=2a$ ヲ得, 而シテ此

ノ二ツハ所題ノ方程式ニ適合スレドモ

$$\sqrt{\frac{x+2a}{x-2a}}+1=0$$

ヨリハ根ヲ與ヘズ. 故ニ所要ノ根ハ $2a$ 及ビ $-2a$ ナリ.

17. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$\frac{\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2+x^2}}=\frac{c}{d}.$$ [42. 水. 講.]

解 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナルトキハ $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$, 故ニ所題ノ方程式ヨリ $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}}=\dfrac{d+c}{d-c}$,

自乘シテ $\dfrac{a^2-x^2}{b^2+x^2}=\dfrac{(d+c)^2}{(d-c)^2}$,

或ハ $2(d^2+c^2)x^2=a^2(d-c)^2-b^2(d+c)^2$,

故ニ $x^2=\dfrac{a^2(d-c)^2-b^2(d+c)^2}{2(d^2+c^2)}$

故ニ $x=\pm\sqrt{\dfrac{a^2(d-c)^2-b^2(d+c)^2}{2(d^2+c^2)}}$.

而シテ x ノ此ノ値ハ所題ノ方程式ニ適合ス.

18. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ケ.

$$x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y}\quad\cdots\quad\cdots(1)$$

$$x^2+y^2=34\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots(2)$$

[33. 東. 高. 師.]

解 (1) ノ分母ヲ拂ヒテ

$$x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}-20=0,$$

之ヲ $\sqrt{x^2-y^2}$ ノ二次方程式トシテ解キ

$$\sqrt{x^2-y^2}=-5,\ \text{或ハ}\ 4.$$

ヲ得. 從ヒテ $x^2-y^2=16,$

但 $\sqrt{x^2-y^2}=-5$ ハ不能ナリ.

故ニ之ト (2) トニ依リ $x^2=25,$

及ビ $y^2=9.$

故ニ $x=\pm5,$

$$y=\pm3.$$

$x=\pm5,\ y=\pm3$ ハ所題ノ方程式ニ適合ス.

故ニ所要ノ根ハ次ノ如シ.

$$x=5,\quad y=3;$$

$$x=5,\quad y=-3.$$

19. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ケ. [37. 商船.]

$$x^2+xy+y^2=84\quad\dots\quad\dots\quad\dots(1)$$

$$x-\sqrt{xy}+y=6\quad\dots\quad\dots\quad\dots(2)$$

解 (1) ノ左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)=84,$$

之ト (2) ト邊々相除スレバ

$$x+\sqrt{xy}+y=14\quad\dots\quad\dots\quad\dots(3)$$

(2) ト (3) トヲ邊々相加ヘ, 又相減ジテ 2 ニテ

除スレバ $x+y=10,$

及ビ $\sqrt{xy}=4,$ 或ハ $xy=16,$

故ニ x, y ハ次ノ方程式ノ根ナリ.

$$X^2-10X+16=0.$$

故ニ $X=8,$ 或ハ $2.$

依リテ所要ノ根ハ次ノ如シ

$$x=8,\quad y=2;\quad x=2,\quad y=8.$$

20. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ケ. [36. 商船.]

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\quad\dots\quad\dots(1)$$

$$x^2+y^2=41\quad\dots\quad\dots\quad\dots(2)$$

解 (1) ヲ自乘シテ簡單ニスレバ

$$\sqrt{x^2-y^2}=8-x,$$

再ビ自乘シテ簡單ニスレバ

$$y^2=16x-64,$$

之ト (2) トヨリ $16x-64=41-x^2,$

或ハ $x^2+16x-105=0.$

故ニ $x=5,$ 或ハ -21

ヲ得, 從ヒテ $y=\pm4,$ 或ハ $y=\pm20i.$

而シテ $x=5,\ y=\pm 4$ ハ所題ノ方程式ニ適合スレドモ $x=-21,\ y=\pm 20i$ ハ適合セズ. 依リテ所要ノ根ハ次ノ如シ.

$$x=5,\ y=4;\quad x=5,\ y=-4.$$

21. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ケ. [37. 商船.]

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3}\ \dots\ \dots\ \dots(1)$$

$$x+y=10\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots(2)$$

解 (1) ヨリ $\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}=\dfrac{10}{3}$,

(2) ヲ參照シテ $\dfrac{10}{\sqrt{xy}}=\dfrac{10}{3}$,

故ニ $\qquad \sqrt{xy}=3$,

即チ $\qquad xy=9\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots(3)$

(2), (3) ニ依リテ $x,\ y$ ハ次ノ方程式ノ根ナリ.

$$X^2-10X+9=0,$$

故ニ $\qquad X=9$, 或ハ 1,

故ニ所要ノ根ハ次ノ如シ,

$$x=9,\ y=1;\quad x=1,\ y=9.$$

22. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ケ. [41. 七高.]

$$x+y+\sqrt{x+y}=12\ \dots\ \dots\ \dots(1)$$

$$x^3+y^3=189\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots(2)$$

解 (1) ヲ $\sqrt{x+y}$ ノ二次方程式トシテ解キ

$$\sqrt{x+y}=-4,\ \text{或ハ}\ 3.$$

從ヒテ $\qquad x+y=9$,

但 $\sqrt{x+y}=-4$ ハ不能ナリ.

(2) ヨリ $\quad (x+y)\{(x+y)^2-3xy\}=189$,

之ニ $x+y$ ノ値ヲ代入シテ

$$9(81-3xy)=189,$$

即チ $\qquad xy=20$,

故ニ $\qquad x+y=9,\ xy=20.$

即チ $x,\ y$ ハ $X^2-9X+20=0$

ノ根ナリ.

此ノ方程式ヨリ $X=5$, 或ハ 4.

而シテ斯クシテ得タル $x,\ y$ ノ値ハ所題ノ方程式ニ適合ス. 依リテ所要ノ根ハ次ノ如シ.

$$x=5,\ y=4;\quad x=4,\ y=5.$$

23. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ケ.

$$\sqrt{x^2+ay-a^2}=b-x\ \dots\ \dots(1)$$

$$\sqrt{y^2+cx}=x+y\ \dots\ \dots\ \dots(2)$$

[42. 東.高.商.]

解 (1) ヲ自乘シテ簡單ニスレバ

$$ay=a^2+b^2-2bx\ \dots\ \dots\ \dots(3)$$

同様ニ (2) ヨリ　$x(2y-c+x)=0$,

故ニ　$x=0$, 或ハ $y=\dfrac{c-x}{2}$,

$x=0$ ナルトキハ (3) ニ依リテ $y=\dfrac{a^2+b^2}{a}$,

次ニ $y=\dfrac{c-x}{2}$ ヲ (3) ニ代入シテ簡單ニスレバ

$$(4b-a)x=2(a^2+b^2)-ac,$$

故ニ　$x=\dfrac{2(a^2+b^2)-ac}{4b-a}$,

從ヒテ　$y=\dfrac{2bc-(a^2+b^2)}{4b-a}$,

依リテ所要ノ根ハ次ノ如シ.

$$x=0,\quad y=\frac{a^2+b^2}{a};$$

$$x=\frac{2(a^2+b^2)-ac}{4b-a},\quad y=\frac{2bc-(a^2+b^2)}{4b-a}.$$

I. 比　比例

1. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナルトキハ $\left(\dfrac{a+b}{c+d}\right)^2=\dfrac{b}{d}\times\dfrac{a}{c}$ ナルコトヲ證セヨ.　[41. 東.高.師.]

證　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, 故ニ $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}=\dfrac{a+b}{c+d}$,

依リテ　$\left(\dfrac{a+b}{c+d}\right)^2=\dfrac{a}{c}\times\dfrac{b}{d}$.

2. 若シ $m:n=p:q$ ナルトキハ

$$m^2+n^2:p^2+q^2=m^2:p^2$$

ナルコトヲ證セヨ.　[36. 海.兵.]

證　$m:n=p:q$,

故ニ　$m^2:n^2=p^2:q^2$,

故ニ　$m^2+n^2:m^2=p^2+q^2:p^2$,

依リテ　$m^2+n^2:p^2+q^2=m^2:p^2$.

3. 若シ $a:b=c:d$ ナルトキハ

$$a-c:b-d=\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}$$

ナルコトヲ證セヨ.　[37. 海.兵.]

證　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a-c}{b-d}$,

又　$\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{c^2}{d^2}=\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$,

故ニ　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+d^2}}$,

依リテ　$\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+d^2}}$.

4. $a:b=c:d$ ナルトキ

$$\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{ac+\frac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\frac{d^3}{b}}$$

ナルコトヲ證セヨ. [37. 商船.]

證 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, 故ニ $\dfrac{c}{a}=\dfrac{d}{b}$,

故ニ $\sqrt{ac+\dfrac{c^3}{a}} : \sqrt{bd+\dfrac{d^3}{b}}$

$$=\sqrt{(a^2+c^2)\frac{c}{a}} : \sqrt{(b^2+d^2)\frac{d}{b}}$$

$$=\sqrt{a^2+c^2} : \sqrt{b^2+d^2}.$$

5. $a:b=c:d$ ナルトキ

$a^2+ab+b^2 : c^2+cd+d^2=a^2-ab+b^2 : c^2-cd+d^2$

ナルコトヲ證セヨ. [40. 長.醫.專.]

證 $a:b=c:d$, 故ニ $a^3:b^3=c^3:d^3$,

故ニ $$\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}=\frac{c^3+d^3}{c^3-d^3},$$

又 $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},$$

故ニ $$\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\div\frac{a+b}{a-b}=\frac{c^3+d^3}{c^3-d^3}\div\frac{c+d}{c-d},$$

即チ $$\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}=\frac{c^2-cd+d^2}{c^2+cd+d^2},$$

即チ $a^2-ab+b^2 : c^2-cd+d^2$

$$=a^2+ab+b^2 : c^2+cd+d^2.$$

6. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ ナルトキハ

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$$

ナルコトヲ證セヨ. [38. 盛.高.農.]

證 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ ナルユヱ

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c},$$

故ニ $$\frac{x^3}{a^3}=\frac{y^3}{b^3}=\frac{z^3}{c^3}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3},$$

故ニ $$\frac{x^3}{a^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}\times a,$$

$$\frac{y^3}{b^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}\times b,$$

$$\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}\times c.$$

故ニ $$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}.$$

7. $a:b=c:d$ ナルトキ

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a} : \frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}=ab:cd$$

ナルコトヲ證セヨ. [39. 農.大.實.]

證 $a:b=c:d$ ... ... (1)

ナルユヱ $a^4:b^4=c^4:d^4$,

故ニ $a^4+b^4 : a^4=c^4+d^4 : c^4$,

即チ $a^4+b^4 : c^4+d^4=a^4 : c^4$ ... ... (2)

然ルニ (1) ヨリ $a^2 : c^2 = b^2 : d^2$,

又 $a^2 : c^2 = a^2 : c^2$,

故ニ $a^2 : c^2 = a^2b^2 : c^2d^2$,

之ト (2) トヨリ $a^4+b^4 : c^4+d^4 = a^2b^2 : c^2d^2$,

第一項ト第三項トヲ ab ニテ, 第二項ト第四項トヲ cd ニテ除スレバ

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a} : \frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c} = ab : cd.$$

8. $(a+b)^2 : (a-b)^2 = b+c : b-c$ ナルトキハ $a : b = \sqrt{2a-c} : \sqrt{c}$ ナルコトヲ證セヨ.

[34. 陸.士.]

證 $(a+b)^2 : (a-b)^2 = (b+c) : b-c$,

分合比ノ理ニ依リテ

$$(a+b)^2-(a-b)^2 : (a+b)^2+(a-b)^2$$
$$= b+c-b+c : b+c+b-c,$$

即チ $2ab : a^2+b^2 = c : b$,

故ニ $\sqrt{2a-c} : \sqrt{c} = \sqrt{2a-\frac{2ab^2}{a^2+b^2}} : \sqrt{\frac{2ab^2}{a^2+b^2}}$
$$= a : b.$$

9. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)$
$$= (a-b+c-d)(a+b-c-d)$$

ナルトキ $a : b = c : d$ ナルコトヲ證セヨ.

[35. 千.醫.專.]

證 所題ノ關係ヨリ $\dfrac{a+b+c+d}{a-b+c-d} = \dfrac{a+b-c-d}{a-b-c+d}$.

故ニ 分合比ノ理ニ依リテ $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$,

即チ $\dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{b+d}{b-d}$, 又分合比ノ理ニ依リテ

$$\frac{(a+c)+(a-c)}{(a+c)-(a-c)} = \frac{(b+d)+(b-d)}{(b+d)-(b-d)},$$

即チ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, 即チ $a : b = c : d$.

10. $(pa+qb+rc+sd)(pa-qb-rc+sd)$
$$= (pa-qb+rc-sd)(pa+qb-rc-sd)$$

ナルトキ $bc : ad = ps : qr$ ナルコトヲ證セヨ.

[41. 商船.]

證 $(pa+qb+rc+sd)(pa-qb-rc+sd)$
$$= (pa-qb+rc-sd)(pa+qb-rc-sd),$$

故ニ $(pa+sd)^2-(qb+rc)^2$
$$= (pa-sd)^2-(qb-rc)^2,$$

或ハ $(pa+sd)^2-(pa-sd)^2$
$$= (qb+rc)^2-(qb-rc)^2$$

故ニ $pasd = qbrc$,

故ニ $\frac{ps}{qr}=\frac{bc}{ad}$, 卽チ $bc:ad=ps:qr$.

11. x ト y トノ比ガ $x+z$ ト $y+z$ トノ比ノ二乘比ニ等シキトキハ z ハ x ト y トノ比例中項ナルコトヲ證セヨ．但 x ハ y ニ等シカラザルモノトス． [38. 東.高.商.]

證 題言ニ依リ $\frac{x}{y}=\frac{(x+z)^2}{(y+z)^2}$,

故ニ $x(y^2+2yz+z^2)=y(x^2+2zx+z^2)$,

故ニ $xy^2+xz^2=yx^2+yz^2$,

故ニ $xz^2-yz^2=yx^2-xy^2$,

卽チ $z^2(x-y)=xy(x-y)$,

然ルニ $x\neq y$ ナルユエ $z^2=xy$,

卽チ $\frac{x}{z}=\frac{z}{y}$.

12. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\dots\dots=2$ ナルトキ

$$\sqrt[n]{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\dots}{pb^n+qd^n+rf^n+\dots}}$$

ノ値ヲ求メヨ． [35. 東.高.工.]

解 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\dots\dots=2$,

故ニ $\frac{pa^n}{pb^n}=\frac{qc^n}{qd^n}=\frac{re^n}{rf^n}=\dots\dots$

$$=\frac{pa^n+qc^n+re^n+\dots\dots}{pb^n+qd^n+rf^n+\dots\dots}=2^n,$$

故ニ $\sqrt[n]{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\dots\dots}{pb^n+qd^n+rf^n+\dots\dots}}=2.$

13. 次ノ式ヨリ $\sqrt{x+y}:\sqrt{x-y}$ ヲ計算セヨ．

$\frac{3y-2x}{2x-4y}=2.$ [37. 東.高.工.]

解 所題ノ式ヨリ $\frac{3y-2x}{x-2y}=\frac{4}{1}$, 分母ノ 2 倍ヲ分子ニ加ヘ，又分子ノ 2 倍ヲ分母ノ 3 倍ニ加ヘテ $\frac{-y}{-x}=\frac{6}{11}$, 卽チ $\frac{y}{x}=\frac{6}{11}$,

故ニ $\frac{x+y}{x-y}=\frac{17}{5}=3.4$,

故ニ $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\sqrt{3.4}=1.843.$

14. $3x+5y-7z=0$, $11x-13y+12z=0$ ヨリ $x:y:z$ ヲ求メヨ． [38. 海.機.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$3\frac{x}{z}+5\frac{y}{z}-7=0$ ... ... (1)

$11\frac{x}{z}-13\frac{y}{z}+12=0$ ... ... (2)

(1) ト (2) トヲ聯立方程式トシテ $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ ノ値ヲ

求ムレバソレゾレ $\frac{31}{94}$, $\frac{113}{94}$ ヲ得. 依リテ所要ノ比ハ $x:y:z=31:113:94.$

15. $x^2+216y^2=35xy$ ナルトキハ x ノ y ニ於ケル比如何. [30. 海.兵.]

解 I. $x^2+216y^2=35xy,$

或ハ $x^2-35xy+216y^2=0,$

或ハ $(x-27y)(x-8y)=0,$

故ニ $x=27y,$ 或ハ $8y,$

即チ $x:y=27:1,$ 或ハ $8:1.$

解 II. 所題ノ方程式ノ各項ヲ遍ク y^2 ニテ除シ, 且移項スレバ $\frac{x^2}{y^2}-35\frac{x}{y}+216=0,$

之ヲ解キテ $\frac{x}{y}=27,$ 或ハ $8,$

即チ $x:y=27:1$ 或ハ $8:1.$

16. $\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}$ ナルトキハ此ノ式ノ値ハ亦 $\frac{ay-bx}{a-b}$ ニモ等シキコトヲ證セヨ.

[34. 郵.電.]

證 所題ノ式ヨリ $\frac{a(bz-cy)}{a(b-c)}=\frac{b(cx-az)}{b(c-a)}$

$$=\frac{a(bz-cy)+b(cx-az)}{a(b-c)+b(c-a)}$$

$$=\frac{bcx-acy}{bc-ca}=\frac{ay-bx}{a-b}.$$

17. $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ ナルトキハ

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$$

ナルコトヲ證セヨ. [33. 二高., 41. 盛.高.農.]

證 $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y),$

各項ヲ abc ニテ除スレバ

$$\frac{y+z}{bc}=\frac{z+x}{ca}=\frac{x+y}{ab},$$

從ヒテ $\frac{y-x}{bc-ca}=\frac{z-y}{ca-ab}=\frac{x-z}{ab-bc},$

即チ $\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$

18. $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ ナルトキ x, y, z ノ比如何. 又 $\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$ ヲ證セヨ. [40. 東.高.工.]

證 所題ノ等式ノ各項ヲ abc ニテ除スレバ

$$\frac{y+z}{bc}=\frac{z+x}{ca}=\frac{x+y}{ab} \quad \dots\dots\dots (1)$$

之ヨリ $\frac{x}{ca+ab-bc}=\frac{y}{ab+bc-ca}=\frac{z}{bc+ca-ab}.$

即チ $x:y:z$

$$=ca+ab-bc:ab+bc-ca:bc+ca-ab,$$

又 (1) ヨリ $\dfrac{y-z}{ab-ca}=\dfrac{z-x}{bc-ab}=\dfrac{x-y}{ca-bc},$

即チ $\dfrac{y-z}{a(b-c)}=\dfrac{z-x}{b(c-a)}=\dfrac{x-y}{c(a-b)}.$

19. $\dfrac{2b+2c-a}{x}=\dfrac{2c+2a-b}{y}=\dfrac{2a+2b-c}{z}$

ナルトキ $\dfrac{2y+2z-x}{a}=\dfrac{2z+2x-y}{b}=\dfrac{2x+2y-z}{c}$

ナルコトヲ證セヨ. [36. 商船.]

證 所題ノ式ヨリ

$$\frac{x}{2b+2c-a}=\frac{y}{2c+2a-b}=\frac{z}{2a+2b-c},$$

故ニ $\dfrac{2y+2z-x}{2(2c+2a-b)+2(2a+2b-c)-(2b+2c-a)}$

$$=\frac{2z+2x-y}{2(2a+2b-c)+2(2b+2c-a)-(2c+2a-b)}$$

$$=\frac{2x+2y-z}{2(2b+2c-a)+2(2c+2a-b)-(2a+2b-c)},$$

即チ $\dfrac{2y+2z-x}{9a}=\dfrac{2z+2x-y}{9b}=\dfrac{2x+2y-z}{9c},$

即チ $\dfrac{2y+2z-x}{a}=\dfrac{2z+2x-y}{b}=\dfrac{2x+2y-z}{c}.$

20. $\dfrac{l}{x^2-yz}=\dfrac{m}{y^2-zx}=\dfrac{n}{z^2-xy}$ ナレバ

$lx+my+nz=(l+m+n)(x+y+z)$ ナルコトヲ證セヨ. [30. 海.兵.]

證 所題ノ式ヨリ

$$\frac{lx}{x^3-xyz}=\frac{my}{y^3-xyz}=\frac{nz}{z^3-xyz}$$

$$=\frac{lx+my+nz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}\quad\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (1)$$

又所題ノ式ヨリ

$$\frac{l}{x^2-yz}=\frac{m}{y^2-zx}=\frac{n}{z^2-xy}$$

$$=\frac{l+m+n}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}$$

$$=\frac{(l+m+n)(x+y+z)}{x^3+y^3+z^3-3xyz}\quad\dots\ \dots\ \dots\ (2)$$

(1), (2) ヨリ $lx+my+nz=(l+m+n)(x+y+z).$

21. $\dfrac{ay-bx}{c}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{bz-cy}{a}$ ニシテ a, b, c ガ實數ナレバ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ ナルコトヲ證セヨ. [34. 商船.]

證 所題ノ式ヨリ

$$\frac{c(ay-bx)}{c^2}=\frac{b(cx-ay)}{b^2}=\frac{a(bz-cy)}{a^2}$$

$$=\frac{c(ay-bx)+b(cx-ay)+a(bz-cy)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\frac{0}{a^2+b^2+c^2}=0,$$

如何トナレバ a, b, c ハ實數ナルユエ

$a^2+b^2+c^2\neq 0$ ナレバナリ.

故ニ $$ay-bx=cx-az=bz-cy=0,$$

故ニ $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

22. $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ ナルトキハ $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$ ナルコトヲ證セヨ. [42. 農. 大. 實.]

證 所題ノ式ヨリ $$\frac{(b-c)x}{(b^2-c^2)-a(b-c)}$$

$$=\frac{(c-a)y}{(c^2-a^2)-b(c-a)}=\frac{(a-b)z}{(a^2-b^2)-c(a-b)}$$

$$=\frac{(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z}{\Sigma(b^2-c^2)-\Sigma a(b-c)}\quad\cdots\cdots(1)$$

然ルニ $$\Sigma(b^2-c^2)=(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)$$
$$=0,$$

及ビ $$\Sigma a(b-c)=(ab-ca)+(bc-ab)+(ca-bc)$$
$$=0,$$

故ニ $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

ナラザルベカラズ. 如何トナレバ

若シ $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

ナラザレバ (1) ノ最後ノ項ハ無窮大トナレバナリ.

23. $\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}$ ナルトキハ $x+y+z=0$ ナルコトヲ證シ且コノ各分數ハ

$$\sqrt[3]{\frac{xyz}{(a-b)(a-c)(b-c)}}$$

ニ等シキコトヲ證セヨ. [42. 各高等.]

證 $$\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}$$

$$=\frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{(b-c)+(c-a)+(a-b)}$$

$$=\frac{2(x+y+z)}{0},$$

故ニ $x+y+z=0$ ナラザルベカラズ.

而シテ又所題ノ式ヨリ

$$\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}$$

$$=\frac{(z+x)+(x+y)-(y+z)}{(c-a)+(a-b)-(b-c)}$$

$$=\frac{(x+y)+(y+z)-(z+x)}{(a-b)+(b-c)-(c-a)}$$

$$=\frac{(y+z)+(z+x)-(x+y)}{(b-c)+(c-a)-(a-b)},$$

即チ $$=\frac{x}{c-b}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{b-a}.$$

故ニ $$\frac{y+z}{b-c}\times\frac{z+x}{c-a}\times\frac{x+y}{a-b}$$

$$=\left(\frac{y+z}{b-c}\right)^3=\left(\frac{z+x}{c-a}\right)^3=\left(\frac{x+y}{a-b}\right)^3$$

$$=\frac{xyz}{(a-b)(a-c)(b-c)},$$

即チ $$\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{xyz}{(a-b)(a-c)(b-c)}}.$$

24. 一時間 10 哩ノ速サヲ以テ鐵道線路ニ沿ヒテ騎行スル人アリ,始メ一時間 50 哩ヲ走ル急行列車ニ追越サレ,其ノ後又一時間 40 哩ヲ走ル普通列車ニ出會ヒシニ,各列車ノ全長ガ此ノ人ノ傍ヲ通過スルニ要セシ時間ハ同一ナリト云フ. 各列車ノ長サノ比ヲ求メヨ.

[36. 東.高.商.]

解 急行列車,普通列車ノ長サヲソレゾレ x, y トスレバ題意ニ依リテ

$$\frac{x}{50-10}=\frac{y}{40-10},$$

故ニ $$\frac{x}{y}=\frac{50-10}{40-10}=\frac{40}{30}=\frac{4}{3},$$

故ニ所要ノ比ハ 4:3 ナリ.

25. 大小二枚ノ鐵板アリ,其ノ重サ 3800 斤ニシテ之ヲ比較スルニ長サハ 3 ト 2, 幅ハ 5 ト 4 トノ如ク,其ノ厚サハ大ハ小ノ二倍ナリ,然ラバ其ノ重サ各如何. [38. 商船.]

解 重サハ長サ,幅,厚サニ比例スルユヱ所要ノ重サヲ x 斤, y 斤トスレバ題意ニ依リテ

$$x+y=3800 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (1)$$

$$\frac{x}{y}=\frac{3\times5\times2}{2\times4\times1} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (2)$$

(2) ヨリ $x=\frac{15}{4}y$, x ノ此ノ値ヲ (1) ニ代入シテ $19y=3800\times4$, $\therefore\ y=800.$

從ヒテ $x=3000.$ 依リテ所要ノ重サハ大 3000 斤,小 800 斤ナリ.

26. 甲ト乙トノ一年間ノ所得ハ 5:3 ノ比ニ等シク,又其ノ支出ハ 7:4 ノ比ニ等シ. 而シテ各自毎年 300 圓ヲ貯蓄スト云フ,歳入各幾何ナルカ. [33. 東.高.師.]

解 甲ノ所得ヲ $5x$ 圓,支出ヲ $7y$ 圓トスレバ乙ノ所得ハ $3x$ 圓,支出ハ $4y$ 圓ナリ.

故ニ題意ニ依リテ

$$5x-7y=300 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (1)$$

$$3x-4y=300 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

(2)ノ7倍ヨリ(1)ノ4倍ヲ減ジテ

$$5x=4500, \quad 3x=2700,$$

依リテ甲ノ歳入ハ4500圓, 乙ノ歳入ハ2700圓ナリ.

J. 級數

1. 200及ビ400ノ間ニ於テ7ニテ整除シ得ベキ總テノ數ノ和ヲ求メヨ. [39. 盛.高.農.]

解 200及ビ400ノ間ニ於テ7ニテ整除シ得ベキ最小數ハ203, 最大數ハ399ナリ.

又 $$(399-203)\div 7+1=29$$

ナルユエ本題ハ初項203, 末項399, 項數29ナル等差級數ノ和Sヲ求ムルコトニ歸ス.

故ニ $$S=\frac{29}{2}\times(203+399)=8729.$$

2. 三桁ノ整數ニシテ9ニテ整除セラルル數ノ總和ヲ求メヨ. [42. 仙.高.工.]

解 三桁ノ整數ニシテ9ニテ整除セラルル最小數ハ108, 最大數ハ999ニシテ

$$(999-108)\div 9+1=100$$

ナルユエ本題ハ初項108, 末項999, 項數100ナル等差級數ノ總和Sヲ求ムルコトニ歸ス.

故ニ $$S=\frac{100}{2}\times(108+999)=55350.$$

3. 等差級數アリ, 第一項ハ $\frac{5a}{3+\sqrt{7}}$, 第四項ハ $\frac{4a}{2\sqrt{7}-5}$ ナリ, 第十項ヲ求メ且之ヲ最簡ニセヨ. [37. 東.高.商.]

解 公差 $$=\left(\frac{4a}{2\sqrt{7}-5}-\frac{5a}{3+\sqrt{7}}\right)\div(4-1)$$

$$=\left\{\frac{4a(2\sqrt{7}+5)}{3}-\frac{5a(3-\sqrt{7})}{2}\right\}\div 3$$

$$=\frac{31\sqrt{7}-5}{18}a,$$

故ニ 第十項 $$=\frac{5a}{3+\sqrt{7}}+9\times\frac{31\sqrt{7}-5}{18}a$$

$$=\left\{\frac{5(3-\sqrt{7})}{2}+\frac{31\sqrt{7}-5}{2}\right\}a$$

$$=\frac{10+26\sqrt{7}}{2}a=(5+13\sqrt{7})a.$$

4. 2ト30トノ間ニ等差級數トナルベキ樣ニ6個ノ內項ヲ挿入セヨ. [37. 海.兵.]

解 所要ノ等差級數ノ公差ヲ d トスレバ

$$d=\frac{30-2}{7}=4,$$

故ニ所要ノ數ハ次ノ如シ.

$$6,\ 10,\ 14,\ 18,\ 22,\ 26.$$

5. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\ldots\ldots$ ナル級數ノ第八項マデノ和ヲ求メヨ. [35. 陸.士.]

解 所題ノ級數ハ

$$(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}+(\sqrt{2}+1)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ニ等シキユエ, 初項 $\sqrt{2}-1$, 公差 1 ナル等差級數ナリ. 故ニ第八項マデノ和ヲ S トスレバ

$$S=\frac{8}{2}\{2(\sqrt{2}-1)+7\times1\}$$

$$=8\sqrt{2}-8+28=20+8\sqrt{2}.$$

6. 連續奇數 1, 3, 5, 7, 等ヲ n 項ダケ加フレバ其ノ和如何. [34. 海.機.]

解 本題ハ初項 1, 末項 $2n-1$, 項數 n ナル等差級數ノ和 S ヲ求ムルコトニ歸ス.

故ニ $S=\frac{(1+2n-1)n}{2}=\frac{2n^2}{2}=n^2.$

7. 等差級數アリ, 其ノ第七項ハ 12, 第十二項ハ 7 ニシテ各項ノ和ハ 171 ナリ, 其ノ項數ヲ求メヨ. [38. 東.高.商.]

解 公差ヲ d トスレバ $d=\frac{7-12}{12-7}=-1,$

故ニ 初項 $=12+(-1)\times6=18,$

故ニ項數ヲ n トスレバ

$$\frac{n}{2}\{2\times18-(n-1)\times1\}=171,$$

或ハ $n^2-37n+342=0,$

故ニ $n=18$ 或ハ $19,$

ヲ得. 故ニ所要ノ項數ハ 18 ナリ. 但 $n=19$ ナルトキハ末項ハ 0 トナリ, 二ツノ級數ハ相同ジ.

8. 第 6 項ハ 49, 第 11 項ハ 51 ナル等差級數ノ第 17 項ハ何程ナルカ. 又其ノ初項ヨリ第何項マデノ總和ガ 800 トナルカ. [34. 一高.]

解 公差ヲ d トスレバ

$$d=\frac{51-49}{11-6}=\frac{2}{5},$$

故ニ 第十七項 $=51+(17-11)\times\frac{2}{5}=53\frac{2}{5}.$

又 初項 $=49-5\times\frac{2}{5}=47$

ナルユエ所要ノ項數ヲ n トスレバ

$$\frac{n}{2}\left\{2\times47+(n-1)\times\frac{2}{5}\right\}=800,$$

或ハ $n^2+234n-4000=0,$

之ヲ解キテ n ノ負値ヲ捨ツレバ $n=16$,

即チ 第十六項ナリ.

9. 8, a, b ガ等差級數ヲナシ a, b, 36 ガ等比級數ヲナストキ a, b ノ値ヲ求メヨ.

[35. 各高等.]

解 題意ニ依リテ

$$2a=b+8 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$b^2=36a \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

(1) ヨリ $b=2a-8$, b ノ此ノ値ヲ (2) ニ代入シテ

$$(2a-8)^2=36a,$$

或ハ $a^2-17a+16=0$,

故ニ $a=16$, 或ハ 1.

從ヒテ $b=24$, 或ハ -6,

依リテ所要ノ値ハ

$$a=16,\ b=24;\ a=1,\ b=-6.$$

10. 等差級數ヲ爲ス三數アリ, 其ノ和ハ 21, 其ノ積ハ 168 ナルトキハ三數各如何.

[37. 海. 機.]

解 三ツノ數ヲ $x-y$, x, $x+y$ トスレバ題意ニ依リテ $x-y+x+x+y=21$,

或ハ $3x=21 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$

及ビ $(x-y)x(x+y)=168 \quad \dots\dots\dots \quad (2)$

(1) ヨリ $x=7$,

x ノ此ノ値ヲ (2) ニ代入シテ簡單ニスレバ

$$y^2=25,\quad \therefore\ y=\pm5.$$

故ニ三ツノ數ハ 7 ∓ 5, 7, 7 ± 5,

即チ 2, 7, 12 ナリ.

注意 四ツノ數ガ等差級數ヲナストキハ之ヲ $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$ ト命ズベシ.

11. 直角三角形ノ三邊ガ順次ニ 3 寸ヅツ減ズルトキハ其ノ三邊各如何. [34. 海. 機.]

解 三邊ヲ $(x-3)$ 寸, x 寸, $(x+3)$ 寸トスルトキハ $(x+3)^2=x^2+(x-3)^2$,

即チ $x^2-12x=0$, 即チ $x(x-12)=0$,

故ニ $x=0$, 或ハ 12.

然ルニ $x=0$ ハ題意ニ適セザルコト明カナリ.

依リテ $x=12$ ヲ取リテ所要ノ三邊ハ $12-3$, 12, $12+3$, 即チ 9寸, 1尺2寸, 1尺5寸 ナリ.

12. 直角三角形ノ三邊ガ等差級數ヲナシ其ノ中ノ最モ短キ邊ノ長サガ 24 糎ナリト云フ, 他ノ二邊ノ長サ如何. [38. 名. 高. 工.]

解 公差ヲ x トスレバ三邊ハソレゾレ 24 糎, $(24+x)$ 糎, $(24+2x)$ 糎ナルユヱ直角三角形ノ性質ニ依リテ $(24+2x)^2=24^2+(24+x)^2$,

即チ $$x^2+16x-192=0,$$

故ニ $$x=8,\ 或ハ\ -24$$

ヲ得, 此ノ第二ノ値ハ題意ニ適セザルヲ以テ之ヲ捨ツレバ所要ノ二邊ハ 24+8, 24+16, 即チ 32 糎, 40 糎ナリ.

13. 甲乙二人ノ旅人アリ, 甲ハ第一日ニ 10 里ヲ歩ミ, 其ノ翌日ヨリハ毎日ノ行程ヲ遞次ニ 1 里ヅツ減ジタリ, 乙ハ甲ニ一日後レテ同所ヲ出發シ第一日ニハ 3 里四分ノ一ヲ歩ミ, 其ノ翌日ヨリハ毎日ノ行程ヲ半里ヅツ遞次ニ増シテ同ジ道ヲ追ハバ幾日ノ後甲ニ追付クベキカ, 又其ノ位置ヲ問フ. [42. 陸.士.]

解 所要ノ日數ヲ x トスレバ甲ガ歩ミタル日數ハ $(x+1)$ 日ナリ, 故ニ題意ニ依リテ

$$\frac{x+1}{2}(10\times2-x\times1)=\frac{x}{2}\left\{3\frac{1}{4}\times2+(x-1)\times\frac{1}{2}\right\},$$

即チ $$3x^2-26x-40=0,$$

故ニ $$x=10,\ 或ハ\ -\frac{4}{3}.$$

此ノ第二ノ値ハ題意ニ適セズ, 故ニ之ヲ捨テテ所要ノ日數ハ 10 日, 又其ノ時ノ位置ハ出發地ヨリ $\frac{10}{2}\times\left\{3\frac{1}{4}\times2+9\times\frac{1}{2}\right\}$, 即チ 55 里ノ所ナリ.

14. 70 本ノ杭ヲ 3 間置キニ並ベタルアリ, 今始ノ杭ヨリ 2 間手前ノ處ニ居ル人ガ總テノ杭ヲ此處ニ 1 本ヅツ運バントス, 運ビ終ルマデニ何程ノ道ヲ歩ムベキカ. [42. 農.大.實.]

解 最初ノ杭ヲ運ブニハ 2×2, 即チ 4 間ダケ歩ミ, 同樣ニ第二, 第三ノ杭ヲ運ブニハソレゾレ $(2+3)\times2$, 即チ 10 間, $(2+2\times3)\times2$, 即チ 16 間ダケ歩ム, 故ニ本題ハ初項 4, 公差 6, 項數 70 ナル等差級數ノ和ヲ求ムルコトニ歸ス. 故ニ所要ノ和ヲ S トスレバ

$$S=\frac{70}{2}\times\{2\times4+(70-1)\times6\}=14770,$$

即チ 14770 間, 或ハ 6 里 30 町 10 間ナリ.

15. 甲乙二人ノ旅客同所ヨリ同方向ニ向ヒテ旅行スルアリ, 甲ハ乙出發ノ後 5 日ヲ過ギテ出發ス, 乙ハ毎日同里程ヲ行キ甲ハ第一日ノ行程 16 里ニシテ毎日 $1里\frac{1}{2}$ ヅツ増シ甲出發ヨリ

10 日ノ後乙ニ追付キタリ，乙ノ毎日ノ行程幾何.

[33. 海. 兵.]

解　甲ガ乙ニ追付クマデニ歩ミタル里數 x ハ初項 16, 公差 $1\frac{1}{2}$, 項數 10 ナル等差級數ノ和ナルユエ $x=\frac{10}{2}\times\left(2\times16+9\times1\frac{1}{2}\right)=\frac{455}{2}$,

故ニ乙毎日ノ行程ハ $\frac{455}{2}\div(10+5)$, 即チ 15 里 6 町ナリ.

16. 次ノ級數ノ和ヲ求メヨ. [39. 農. 大. 實.]

$$\frac{a}{q^n}+\frac{a}{q^{2n}}+\frac{a}{q^{3n}}+\ldots\ldots 無窮ニ至ル.$$

解　所題ノ級數ハ初項 $\frac{a}{q^n}$, 公比 $\frac{1}{q^n}$ ナル無窮等比級數ナリ. 故ニ其ノ總和ヲ S トスレバ

$$S=\frac{a}{q^n}\div\left(1-\frac{1}{q^n}\right)=\frac{a}{q^n-1}.$$

17. 次ノ級數ノ n 項ノ和及ビ無窮項ノ和ヲ求メヨ. $2-1\frac{1}{3}+\frac{8}{9}-\ldots\ldots$ [39. 專. 入. 檢.]

解　所題ノ級數ハ初項 2, 公比 $-\frac{2}{3}$ ナル等比級數ナリ. 故ニ n 項ノ和ヲ S, 無窮項ノ和ヲ

S′ トスレバ $S=2\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}\div\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$

$$=2\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}\div\frac{5}{3}=\frac{6}{5}\left\{1+(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}.$$

又 $$S'=\frac{2}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{2}{1+\frac{2}{3}}=\frac{6}{5}.$$

18. 級數 $1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+$(無窮) ノ總和ヲ小數第三位マデ求メヨ. [35. 東. 高. 商.]

解　所題ノ級數ハ初項 1, 公比 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ナル無窮等比級數ナリ. 故ニ其ノ和ヲ S トスレバ

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\doteqdot\frac{3+1.732}{2}=2.366.$$

19. 下ノ無窮等比級數ノ總和ヲ求メ小數第三位マデ計算セヨ. [33. 商船.]

$$8\sqrt{2},\ 4\sqrt{6},\ 6\sqrt{2},\ \ldots\ldots$$

解　$\frac{4\sqrt{6}}{8\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故ニ所題ノ級數ハ初項 $8\sqrt{2}$, 公比 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ナル無窮等比級數ナリ. 故

ニ其ノ總和ヲ S トスレバ

$$S=\frac{8\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{16\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}=\frac{16\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{4-3}$$

$$=16(2\sqrt{2}+\sqrt{6})\fallingdotseq16(2\times1.4142+2.4494)$$

$$=84.444.$$

20. 第二項 2, 無限ニ至ル和 9 ナル等比級數ノ第四項ニ至ル和ヲ求メヨ.　[35. 海.機.]

解　所題ノ級數ノ初項ヲ a, 公比ヲ r トスレバ

$$\frac{a}{1-r}=9\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (1)$$

$$ar=2\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (2)$$

(2) ヨリ $a=\frac{2}{r}$, a ノ此ノ値ヲ (1) ニ代入シテ變化スレバ　$9r^2-9r+2=0$,

故ニ $r=\frac{2}{3}$, 或ハ $\frac{1}{3}$. 從ヒテ $a=3$, 或ハ 6,

依リテ所要ノ和ハ

$$3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^4\right\}\div\left(1-\frac{2}{3}\right),\ \text{卽チ}\ 7\frac{2}{9},$$

$$\text{或ハ}\ 6\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}\div\left(1-\frac{1}{3}\right),\ \text{卽チ}\ 8\frac{8}{9}.$$

21. 等比級數ヲナス四ツノ數アリ, 始ノ二項ノ和ハ 63 ニシテ終ノ二項ノ和ハ 112 ナリ, 四ツノ數各如何.　[30. 海.機.]

解　所要ノ四ツノ數ヲ x, xy, xy^2, xy^3 トスレバ題意ニ依リテ

$$x+xy=63\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (1)$$

$$xy^2+xy^3=112\ \dots\ \dots\ \dots\ (2)$$

(1), (2) ヲ邊々相除スレバ $y^2=\frac{16}{9}$, 或ハ $y=\pm\frac{4}{3}$.

y ノ此ノ値ヲ (1) ニ代入シテ $x=27$, 或ハ -189 ヲ得, 依リテ所要ノ數ハ

27, 36, 48, 64; 或ハ -189, 252, -336, 448.

22. 等比級數ノ最初ヨリ四項ノ和ハ 40 ニシテ最初ヨリ八項ノ和ハ 3280 ナリト云フ, 如何ナル級數ナルカ.　[34. 陸.士.]

解　所題ノ級數ノ初項ヲ x, 公比ヲ y トスレバ題意ニ依リテ　$x\frac{y^4-1}{y-1}=40\ \dots\ \dots\ \dots(1)$

$$x\frac{y^8-1}{y-1}=3280\ \dots\ \dots(2)$$

(1), (2) ヲ邊々相除スレバ　$y^4+1=82$,

故ニ　$y^4=81$, 故ニ $y=\pm3$,

y ノ此ノ値ヲ (1) ニ代入シテ $x=1$, 或ハ -2 ヲ得. 依リテ所要ノ級數ハ初項 1, 公比 3, 或ハ

初項 -2, 公比 -3 ナル級數ナリ.

23. 等比級數ヲナス四ツノ數アリ, 第一ト第四トノ和ハ 3.375, 第二ト第三トノ和ハ 2.25 ナリ, 四ツノ數ヲ求メヨ. [34. 東.高.工.]

解 四ツノ數ヲ $\frac{x^2}{y}$, x, y, $\frac{y^2}{x}$ トスレバ題意ニ依リ

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=3.375 \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

$$x+y=2.25 \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

x, y ハ何レモ零ナラザルコト明カナルヲ以テ (1) ノ兩邊ニ xy ヲ乘シ $x^3+y^3=3.375xy$,

卽チ $(x+y)(x^2-xy+y^2)=3.375xy$,

之ニ (2) ヨリ $x+y$ ノ値ヲ代入シテ變化スレバ

$$x^2-xy+y^2=1.5xy,$$

卽チ $(x+y)^2-3xy=1.5xy$,

之ニ (2) ヨリ $x+y$ ノ値ヲ代入シテ變化スレバ

$$xy=1.125 \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

(2), (3) トヨリ x, y ハ方程式

$$X^2-2.25X+1.125=0$$

ノ根ナリ. 而シテ之ヲ解キテ $X=1.5$, 或ハ .75,

故ニ $x=1.5$ トスレバ $y=.75$.

而シテ四ツノ數ハ 3, 1.5, .75, .375 ナリ.

又 $x=.75$ トスレバ $y=1.5$.

而シテ四ツノ數ハ .375, .75, 1.5, 3 トナリ, 前ト唯逆ノ順ニ顯ハルルノミニシテ何レニシテモ四ツノ數トシテ唯一組 3, 1.5, .75, .375 ヲ得ルノミ.

注意 若シ等比級數ヲナス三ツノ數アルトキハ之ヲ x^2, xy, y^2 ト命ズルヲ可トス.

24. 等比級數ノ連續セル項四個アリ, 第一第四項ノ和ハ 133 ニシテ, 第二第三項ノ和ハ 70 ナリト云フ, 此ノ等比級數如何. [42. 七高.]

解 前題ト同樣ニシテ四ツノ項 8, 20, 50, 125, 或ハ 125, 50, 20, 8 ヲ得.

注意 前題ハ單ニ四ツノ數ト云フユエ順序ニハ關係ナシ. 本題ハ等比級數ノ四ツノ項ト云フユエ遞昇ト遞降トノ二種トナル.

25. 正方形ノ四邊ノ中點ヲ順次ニ結ビテ正方形ヲ作リ, 又其ノ正方形ノ中點ヲ順次ニ結ビテ正方形ヲ作リ, 逐テ斯ノ如クニシテ無數ノ正方形ヲ作ルトキハ是等ノ諸正方形ノ積ノ總和如何. [35. 商船.]

解 元ノ正方形ノ面積ヲ a トスレバ順次ノ正

方形ノ面積ハ $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{4}a$, 等ナルコト明カナリ.

故ニ本題ハ初項 $\frac{1}{2}a$, 公比 $\frac{1}{2}$ ナル無窮等比級數ノ和 S ヲ求ムルコトニ歸ス.

故ニ $$S=\frac{\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{2}}=a.$$

故ニ所要ノ正方形ノ面積ノ和ハ元ノ正方形ノ面積ニ等シ.

26. 三角形 ABC ノ各邊ノ中點ヲ結ビ付ケテ三角形 DEF ヲ作リ, 其ノ各邊ノ中點ヲ結ビ付ケテ更ニ三角形 GHK ヲ作リ, 逐テ斯ノ如ク同ジ方法ヲ繰返ストキハ ABC, DEF, 等ノ總テノ三角形ノ面積ノ和ト三角形 ABC トノ比如何.

[38. 千. 醫. 專.]

解 三角形 ABC ノ面積ヲ a トスレバ次次ノ三角形ノ面積ハソレゾレ $\frac{1}{4}a$, $\frac{1}{16}a$, 等ナリ, 故ニ三角形 ABC, DEF, 等ノ面積ノ總和ハ初項 a, 公比 $\frac{1}{4}$ ナル無窮等比級數ノ和 S ヲ求ムルコトニ歸ス.

故ニ $$S=\frac{a}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}a,$$

故ニ所要ノ比ハ $\frac{4}{3}a:a=4:3$ ナリ.

27. 4 ト 12 トノ間ニ二項ヲ挿入シテ始ノ三項ヲシテ等比級數ヲ爲サシメ, 終ノ三項ヲシテ等差級數ヲ爲サシメヨ.

[38. 海. 機.]

解 所要ノ二項ヲ x, y トスレバ題意ニ依リテ

$$x^2=4y \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(1)$$

$$2y=12+x \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(2)$$

(2) ヨリ $4y=24+2x,$

故ニ $x^2=24+2x,$

或ハ $x^2-2x-24=0,$

故ニ $x=6$, 或ハ -4, 從ヒテ $y=9$, 或ハ 4.

依リテ所要ノ二項ハ 6, 9; 或ハ −4, 4 ナリ.

28. a, 10, c ノ三數ガ等差級數ヲナシ a, 8, c ハ等比級數ヲナストキハ a 及ビ c ノ値幾何ナルカ.

[39. 海. 兵.]

解 題意ニ依リテ

$$a+c=20 \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(1)$$

$$ac=64 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(2)$$

(1), (2) ニ依リテ a, c ハ次ノ方程式ノ根ナリ.

$$x^2-20x+64=0,$$

之ヲ解キテ　$x=16$,　或ハ　4

ヲ得. 故ニ所要ノ値ハ $a=16$, $c=4$, 或ハ $a=4$, $c=16$ ナリ.

29. 等差級數ヲナセル四ツノ數アリ, 是等ノ數ニ順次ニ 1, 1, 3, 9 ヲ加フレバ等比級數ヲナスト云フ, 各數如何.　[36. 東北農.大.]

解 所要ノ四ツノ數ヲ $x-y$, x, $x+y$, $x+2y$ トスレバ題意ニ依リテ

$$(x+1)^2=(x-y+1)(x+y+3) \quad \ldots \quad \ldots (1)$$

$$(x-y+1)(x+2y+9)=(x+1)(x+y+3) \quad \ldots (2)$$

(1) ヨリ $x=\dfrac{y^2+2y-2}{2}$, (2) ヨリ $x=\dfrac{y^2+4y-3}{3}$,

故ニ $$\frac{y^2+2y-2}{2}=\frac{y^2+4y-3}{3},$$

或ハ　$y(y-2)=0$,　故ニ　$y=2$,

從ヒテ $x=3$, 故ニ所要ノ數ハ

$$3-2,\quad 3,\quad 3+2,\quad 3+2\times 2,$$

即チ 1, 3, 5, 7 ナリ.

30. 二數ノ差ガ 8, 其ノ等差中項ト等比中項

トノ差ガ 2 ナラバ二數各如何.　[39. 商船.]

解 所要ノ二數ヲ x, y トスレバ題意ニ依リテ

$$x-y=8 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (1)$$

$$\frac{x+y}{2}\pm\sqrt{xy}=2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (2)$$

(2) ヨリ　$(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2=4$,

故ニ　$\sqrt{x}\pm\sqrt{y}=\pm 2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (3)$

(1) ヨリ　$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=8 \quad \ldots \quad \ldots (4)$

(3), (4) ヲ邊々相除スレバ

$$\sqrt{x}\mp\sqrt{y}=\pm 4 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (5)$$

(3), (5) ヲ邊々相加ヘ, 或ハ相減ジテ 2 ニテ除スレバソレゾレ　$\sqrt{x}=\pm 3$, $\sqrt{y}=\pm 1$,

故ニ　$x=9$, $y=1$.

依リテ所要ノ二數ハ 9, 1 ナリ.

31. 四ツノ數アリ, 始ノ三ツハ等比級數ヲナシ, 終ノ三ツハ等差級數ヲナス. 又第一ト第四トノ和ハ 14 ニシテ第二ト第三トノ和ハ 12 ナリ, 四ツノ數ノ各ヲ求メヨ.　[40. 東.高.工.]

解 所要ノ數ヲ x, y, z, u トスレバ題意ニ依リテ

$$y^2=xz \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (1)$$

$$2z=y+u \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (2)$$

$$x+u=14 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$y+z=12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(3), (4) ヲ邊々相加ヘ且 (2) ヲ參照シテ

$x+3z=26$, 故ニ $x=26-3z$,

(4) ヨリ $y=12-z$,

y ノ此ノ値ヲ (1) ニ代入シテ $x=\dfrac{(12-z)^2}{z}$,

故ニ $\dfrac{(12-z)^2}{z}=26-3z$,

或ハ $2z^2-25z+72=0$,

故ニ $z=8$, 或ハ $\dfrac{9}{2}$,

從ヒテ $y=4$, 或ハ $\dfrac{15}{2}$,

$x=2$, 或ハ $\dfrac{25}{2}$, $u=12$, 或ハ $\dfrac{3}{2}$

ヲ得ベシ. 故ニ所要ノ數ハ

$2, 4, 8, 12$, 或ハ $\dfrac{25}{2}, \dfrac{15}{2}, \dfrac{9}{2}, \dfrac{3}{2}$.

32. 四ツノ數アリ, 始ノ三ツハ等比級數ヲナシ, 其ノ和ハ 19 ニシテ, 後ノ三ツハ等差級數ヲナシ, 其ノ和ハ 12 ナリ. 此ノ四ツノ數各如何.

[42. 海. 機.]

解 所要ノ數ヲ x, y, z, u トスレバ題意ニ依リテ

$$y^2=xz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x+y+z=19 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$2z=y+u \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$y+z+u=12 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

(4) ヨリ $y+u=12-z$,

之ト (3) トヨリ $2z=12-z$, 故ニ $z=4$.

z ノ此ノ値ヲ (1), (2) ニ代入シテ

$y^2=4x$, $x+y=15$.

第二ノ式ヨリ y ノ値ヲ x ノ項ニテ求メ之ヲ第一ノ式ニ代入シテ $(15-x)^2=4x$,

或ハ $x^2-34x+225=0$,

故ニ $x=25$, 或ハ 9.

從ヒテ $y=-10$, 或ハ 6; $u=18$, 或ハ 2.

依リテ所要ノ數ハ

$25, -10, 4, 18$; 或ハ $9, 6, 4, 2$.

6 **33.** a, b, c ガ調和級數ヲナストキ $2s=a+b+c$ トセバ $(s-a)^2, (s-b)^2, (s-c)^2$ ハ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ. [42. 名. 高. 工.]

證 $(s-a)^2, (s-b)^2, (s-c)^2$ ガ等差級數ヲナストセバ $2(s-b)^2=(s-a)^2+(s-c)^2$,

括弧ヲ解キテ簡單ニスレバ

$$2b(b-2s)=a^2+c^2-2s(a+c),$$

或ハ $$-2b(a+c)=a^2+c^2-2s(a+c),$$

或ハ $$(2s-2b)(a+c)=a^2+c^2,$$

或ハ $$(a+c-b)(a+c)=a^2+c^2,$$

即チ $$2ac-b(a+c)=0,$$

故ニ $$b=\frac{2ac}{a+c},$$

然ルニ此ノ式ハ題意ニ依リテ眞ナリ.

故ニ $(s-a)^2, (s-b)^2, (s-c)^2$ ハ等差級數チナス.

34. 一ヨリ始マル n 個ノ奇數ノ總和ハ恒ニ完全ノ平方數ナルコトチ證セヨ.

[33. 農.大.實., 37. 神.高.商.]

證 $1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1)=S$ トス. 左邊ハ初項 1, 公差 2, 項數 n ナル等差級數ナルユエ

$$S=\frac{(1+2n-1)n}{2}=\frac{2n^2}{2}=n^2.$$

35. a ガ b ト c トノ等差中項ニシテ b ガ a ト c トノ等比中項ナルトキハ c ハ a ト b トノ調和中項ナルコトチ證セヨ. [39. 陸.士.]

證 題意ニ依リテ

$$2a=b+c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (1)$$

$$b^2=ac \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (2)$$

(1) ヨリ $c=2a-b$, (2) ヨリ $c=\frac{b^2}{a}$,

故ニ $$2a-b=\frac{b^2}{a},$$

故ニ $$\frac{2a-b}{b}=\frac{b}{a}=\frac{2a-b+b}{a+b}=\frac{2a}{a+b}.$$

故ニ $$\frac{b}{a}=\frac{2a}{a+b}, \quad 或ハ \quad \frac{b^2}{a}=\frac{2ab}{a+b},$$

(2) ニ於ケル b^2 ノ値チ代入シテ

$$\frac{ac}{a}=\frac{2ab}{a+b}, \quad 即チ \quad c=\frac{2ab}{a+b}.$$

故ニ c ハ a, b ノ調和中項ナリ.

36. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ガ等差級數チナストキハ $2a-b, b, 2c-b$ ハ等比級數チナスコトチ證セヨ.

[34. 仙.高.工.]

證 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$, 或ハ $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$,

或ハ $$2ac=(c+a)b,$$

或ハ $$4ac-2bc-2ab=0,$$

或ハ $$4ac-2bc-2ab+b^2=b^2,$$

即チ $$(2a-b)(2c-b)=b^2.$$

故ニ $2a-b, b\ 2c-b$ ハ等比級數チナス.

37. a, b, c ガ等比級數チナストキ a, b ノ

等差中項ヲ x トシ, b, c ノ等差中項ヲ y トセバ $\dfrac{a}{x}+\dfrac{c}{y}=2$ ナルコトヲ證セヨ.　[41. 商船.]

證　題意ニ依リテ　$b^2=ac$,

$$x=\frac{a+b}{2},\quad y=\frac{b+c}{2}.$$

故ニ

$$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=\frac{2a}{a+b}+\frac{2c}{b+c}$$
$$=\frac{2(ab+ac+bc+b^2)}{(a+b)(b+c)}$$
$$=2\frac{a(b+c)+b(b+c)}{(a+b)(b+c)}$$
$$=2\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}=2.$$

38.　a, b, c ハ等差級數ヲナス三數ニシテ a, b 及ビ b, c ノ等比中項ヲソレゾレ x, y トスレバ x^2, b^2, y^2 ハ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ.

[38. 商船.]

證　題意ニ依リテ　$2b=a+c$,

$$x^2=ab,\quad y^2=bc,$$

故ニ　$2b^2=b(a+c)=ab+bc=x^2+y^2$,

依リテ x^2, b^2, y^2 ハ等差級數ヲナス.

39.　初項 a, 公比 r ナル等比級數 n 項ノ積ハ幾何ナルカ, 又等比級數 n 項ノ積ハ初項ト末項トノ積ノ n 乘ノ平方根ニ等シキコトヲ證セヨ.

[38. 專.入.檢.]

解　所題ノ級數 n 項ノ積ヲ P トスレバ

$$\mathrm{P}=a\times ar\times ar^2\times\ldots\ldots\times ar^{n-1}$$
$$=a^n r^{1+2+3\cdots\cdots+(n-1)},$$

然ルニ　$1+2+3+\ldots\ldots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

故ニ

$$\mathrm{P}=a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

又所題ノ級數ノ第 n 項ハ ar^{n-1} ナリ.

故ニ n 項ノ積 $=\sqrt{(a\times ar^{n-1})^n}$

$$=\sqrt{\{a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}\}^2}=a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

40.　二ツノ數ノ等比中項ハ其ノ等差中項ト調和中項トノ比例中項ナルコトヲ證セヨ.

[30. 二高.]

證　二ツノ數ヲ a, b, 其ノ等比中項, 等差中項, 調和中項ヲソレゾレ x, y, z トスレバ $x^2=ab$,

$$y=\frac{a+b}{2},\quad z=\frac{2ab}{a+b},$$

故ニ

$$yz=\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{2ab}{a+b}\right)=ab=x^2,$$

卽チ　$x^2=yz$.

卽チ題言ノ如シ.

41. a, b, c, d ガ等比級數ヲナストキハ次ノ關係アルコトヲ證セヨ. [36. 商船.]

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2.$$

證 所題ノ等式ヲ一邊ニ集メテ

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2-(a-d)^2=0,$$

簡單ニシテ $2(b^2+c^2+ad)-2(bc+ca+bd)=0,$

卽チ $b^2+c^2+ad-bc-ca-bd=0\ldots\ \ldots(1)$

然ルニ a, b, c, d ガ等比級數ヲナスユヱ

$$b^2=ac,\quad c^2=bd,\quad ad=bc.$$

故ニ (1) ノ左邊ハ $ac+bd+bc-bc-ca-ab=0,$

依リテ所題ノ等式ハ成立ス.

42. a, b, c ガ等比級數ヲナシテ $a=nx$, $b=ny$, $c=nz$ ナレバ x, y, z ハ等比級數ヲナスコトヲ證セヨ. [36. 專.入.檢.]

證 a, b, c ガ等比級數ヲナスヲ以テ

$$b^2=ac\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots(1)$$

然ルニ $a=nx$, $b=ny$, $c=nz$ ナルユヱ (1) ハ

$$n^2y^2=nx\times nz=n^2xz,$$

卽チ $y^2=xz.$

故ニ x, y, z ハ等比級數ヲナス.

43. a, b, c ハ等比級數ヲナス三ツノ數ニシテ $x=\dfrac{a+b}{2}$, $y=\dfrac{b+c}{2}$ ナレバ $\dfrac{a}{x}+\dfrac{c}{y}=2$ ナルコトヲ證セヨ. [37. 千.醫.專.]

證 題意ニ依リテ $b^2=ac,$

又 $x=\dfrac{a+b}{2},\quad y=\dfrac{b+c}{2}$

ナルユヱ
$$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=\frac{2a}{a+b}+\frac{2c}{b+c}$$
$$=2\frac{a(b+c)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)}$$
$$=2\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}=2.$$

44. 若シ a, b, c ガ調和級數ヲナストキハ

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-b}=0$$

ナルコトヲ證セヨ. [33. 二高.]

證 題意ニ依リテ $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c},$

故ニ所題ノ式ノ左邊$=\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{c-b}$

$$=\frac{2ac-(c+a)b}{b(a-b)(c-b)}$$
$$=\frac{ac\left\{\dfrac{2}{b}-\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)\right\}}{(a-b)(c-b)}=0.$$

45. 連續セル奇數ヲ次ノ如ク若干組ニ分ツ，

即チ 1；3, 5；7, 9, 11；13, 15, 17, 19；.......

トスルトキハ第 n 組ニ於ケル諸數ノ和ハ n^3 ナルコトヲ證セヨ．　[34. 大.高.工.]

證　第 $n-1$ 組マデニ排列セラレタル奇數ノ數ハ

$$1+2+3+......+(n-1),\quad 即チ\quad \frac{n(n-1)}{2}$$

ナリ．故ニ第 n 組ニ於ケル最初ノ奇數ハ

$$\frac{n(n-1)}{2}\times 2+1,\quad 即チ\quad n^2-n+1,$$

從ヒテ最後ノ奇數ハ

$$n^2-n+1+2(n-1),\quad 即チ\quad n^2+n-1$$

ナリ，依リテ第 n 項ニ於ケル諸數ノ和 S ハ

$$S=\frac{(n^2-n+1+n^2+n-1)n}{2}$$

$$=\frac{2n^3}{2}=n^3.$$

46. $1^2+2^2+3^2+4^2+......$ ナル級數 n 項ノ和ヲ表ハス式ヲ作レ．　[37. 商船.]

解　$S=1^2+2^2+3^2+4^2+......+n^2$ トス．

恒等式　$(1+x)^3-x^3=1+3x+3x^2$

ニ於テ x ニ順次ニ 0 ヨリ n マデノ値ヲ代入シテ

$$1^3=1+0+0,$$

$$2^3-1^3=1+3.1+3.1^2,$$

$$3^3-2^3=1+3.2+3.2^2,$$

$$..........................$$

$$..........................$$

$$(n+1)^3-n^3=1+3.n+3.n^2$$

上ノ等式ヲ邊々相加フレバ

$$(n+1)^3=n+1+3(1+2+3+......+n)+3S$$

$$=n+1+\frac{3n(n+1)}{2}+3S,$$

故ニ　$$S=\frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

47. $a+2a^2+3a^3+4a^4+......$ ノ總和ヲ求メヨ．但 a ハ 1 ヨリ小ナリトス．[30. 東.高.工.]

解　$S=a+2a^2+3a^3+4a^4+......\ ...\ ...\ (1)$

トス．故ニ

$$aS=a^2+2a^3+3a^4+4a^5+......\ ...\ ...\ (2)$$

(1) ヨリ (2) ヲ減ズレバ

$$S(1-a)=a+a^2+a^3+a^4+......$$

此ノ右邊ハ初項 a, 公比 a ナル無窮等比級數ナリ．故ニ　$S(1-a)=\frac{a}{1-a}$　∴ $S=\frac{a}{(1-a)^2}$

48. 初項 a, 公差 r ナル等差級數ニ於テ第一項ヨリ第 n 項マデノ和ヲ S_n ニテ表ハストキハ

$$S_1+S_3+S_5+S_7+\ldots\ldots+S_{2n-1}$$

ノ和 S ハ如何. [42. 水. 講.]

解 所題ノ級數 m 項ノ和 S_m ハ次ノ如シ.

$$S_m=ma+\frac{m(m-1)}{2}r,$$

故ニ

$$S_1=a,$$

$$S_3=3a+3r,$$

$$S_5=5a+5.2r,$$

$$S_7=7a+7.3r,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{2n-1}=(2n-1)a+(2n-1)(n-1)r,$$

上ノ諸式ヲ邊々相加フレバ

$$\begin{aligned}S&=\{1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1)\}a\\&\quad+\{3+5.2+7.3+\ldots\ldots+(2n-1)(n-1)\}r\\&=\{1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1)\}a\\&\quad+\{1^2+2^2+3^2\ldots\ldots+(n-1)^2+1.2+2.3+\ldots\ldots+(n-1)n\}r\\&=n^2a+\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)\right\}r\\&=\frac{n}{6}\{4rn^2+3(2a-r)n-r\}.\end{aligned}$$

K. 列方(ナラベカタ) 組合(クミアハセ)

1. 甲乙丙等 6 人ヲ一列ニ並ブル方法ハ幾通リアルカ. 但甲ト乙トハ常ニ相隣レルモノトス. [38. 陸. 士.]

解 假ニ甲乙ヲ一人ト見做セバ $|\underline{5}$, 即チ 120 通リノ列方ヲ得ベク, 更ニ甲乙ノ位置ヲ取リ換フルコトニ依リテ所要ノ列方 $120\times|\underline{2}$, 即チ 240 通リヲ得ベシ.

2. Kogyogakko ナル綴リニ於テ文字ヲ出來得ル限リ入レ換フレバ幾何ノ相異ナル列方ヲ得ベキカ. [33. 東. 高. 工.]

解 Kogyogakko ナル 10 文字ノ中ニハ o, k ナル文字ハ各三ツ, g ナル文字ハ二ツ, 其ノ他ハ一ツヅツアルユエ其ノ列方ハ公式ニ依リテ

$$\frac{|\underline{10}}{|\underline{3}\,|\underline{3}\,|\underline{2}},$$ 即チ 50400 通リナリ.

3. 會員 50 人中ヨリ會長一名幹事二名ヲ選擧スルニ幾通リノ方法アルカ. [40. 海. 兵.]

解 會員 50 人中ヨリ會長一名ヲ選擧スル方

法ハ ${}_{50}C_1$, 即チ 50 通リアリ, 此ノ組合ノ一ツニ付キテ幹事 2 名ヲ選擧スル方法ハ ${}_{50-1}C_2$, 即チ 1176 通リアルユヱ所要ノ方法ハ 50×1176, 即チ 58800 通リアリ.

4. 會員 100 人ノ中ヨリ 10 人ノ評議員ヲ選ブ方法ハ幾通リアルカ, 又同ジク 100 人ノ中ヨリ議長 1 人幹事 3 人ヲ選ブ方法ハ幾通リアルカ.

[37. 商船.]

解 會員 100 人ノ中ヨリ 10 人ノ評議員ヲ選ブ方法ハ 100 人ヨリ 10 人ヅツ取リタル組合ノ數 $\frac{\underline{|100}}{\underline{|10}\ \underline{|90}}$, 即チ 17156757596440 通リナリ.

又 100 人中ヨリ議長 1 人ヲ選ブ方法ハ ${}_{100}C_1$, 即チ 100 通リアル中ノ一ツニ付キテ幹事 3 人ヲ選ブ方法ハ ${}_{99}C_3$, 即チ 156849 通リアルユヱ所要ノ數ハ 100×156849, 即チ 15684900 通リアリ.

5. 1 ヨリ 7 マデノ數字ヲ用ヒテ七位ノ奇數幾個ヲ作リ得ルカ.

[33. 陸. 士.]

解 先ヅ 1 ヨリ 7 マデノ數字ヲ用ヒテ七位ノ數ヲ作ル方法ハ $\underline{|7}$ 通リアル中ニテ末位ガ偶

數ナルモノハ取リ除ケザルベカラズ. 然ルニ 1 ヨリ 7 マデニハ 3 個ノ偶數アリ, 故ニ偶數ガ末位ニアルベキ列方ハ $3\times\underline{|6}$ 通リアリ, 故ニ所要ノ奇數ハ $\underline{|7}-3\underline{|6}$, 即チ 2880 個ナリ.

6. 0, 1, 2, 3, 4, 5 ノ數字ヲ種々ニ排列シテ六ツノ數字ヨリ成ル數幾ツヲ作リ得ベキカ.

[33. 海. 機.]

解 六ツノ數字ヲ用ヒテ作リ得ル六位ノ數ハ $\underline{|6}$ 個アリ, 然ルニ 0 ガ首位ニ來ルベキ列方ハ $\underline{|5}$ 通リアルユヱ所要ノ數ハ $\underline{|6}-\underline{|5}$, 即チ 600 個ナリ.

7. 0, 1, 2, 3, 4, 5 ナル六ツノ數字ヲ用ヒテ五桁ノ整數幾通リヲ作リ得ベキカ. 但何レノ數モ同一ノ數字ヲ繰返シ用フルコトヲ許サズ.

[37. 海. 機.]

解 六ツノ數字ヲ用ヒテ作リ得ル五桁ノ數ハ ${}_6P_5$ 通リアル中ニテ 0 ガ首位ニ來ルベキ列方ハ ${}_5P_4$ 通リアルユヱ所要ノ數ハ ${}_6P_5-{}_5P_4$, 即チ 600 通リナリ.

8. 相異ナル父音 21 字, 母音 5 字ヲ用ヒテ

父音 3 字, 母音 3 字ヨリ成レル語幾種ヲ得ルカ.

[40. 陸. 士.]

解 先ヅ父音 21 字, 母音 5 字ノ中ヨリ父音 3 字, 母音 3 字ヲ取リタル組合ノ數ハ ${}_{21}C_3\times{}_5C_3$ ナリ. 然ルニ此ノ組合ノ各ニ就キテ其ノ順序ヲ種々ニ列ベ換フルコトニ依リテ所要ノ語ヲ重複ナク又遺漏ナク得ベキガ故ニ所要ノ數ハ ${}_{21}C_3\times{}_5C_3\times\underline{|6}$, 即チ 9576000 通リナリ.

9. 漕手 12 人ヲ六挺艪ノ短艇 2 艘ニ分乘セシムル仕方ハ幾通リアルカ.

[37. 一高.]

解 所要ノ仕方ハ 12 人ヨリ 6 人ヅツ取リタル組合ノ數, 即チ $\dfrac{\underline{|12}}{\underline{|6}\,\underline{|6}}=924$ ナリ.

10. 太郎, 次郎, ..., 七郎 ノ 7 人ヲ一列ニ並ベントス. 次郎ト三郎トガ相隣ラザル列方ハ幾通リアルカ.

[38. 水. 講.]

解 今次郎ヲ取リ除キテ餘リノ 6 人ヲ一列ニ列ブル仕方ハ $\underline{|6}$ 通リアリ, 然ルニ此ノ列方ノ一ツニ就キテ次郎ノ入ルベキ場所ハ 5 通リアルユエ所要ノ列方ハ $5\times\underline{|6}$, 即チ 3600 通リナリ.

11. Ordinate ト云フ語ノ中ニアル四ツノ母音ト四ツノ父音トヲ一ツ置キニ配列スル仕方ハ幾種アルカ. 但首位ニハ必ズ母音ヲ用フベシ.

[33. 海. 機.]

解 先ヅ四ツノ母音ヲアラユル順序ニ配列スル仕方ハ ${}_4P_4$, 即チ $\underline{|4}$ 通リアリ. 然ルニ所要ノ列方ハ母父母父母父母父ナルユエ母音ノ列方一ツニ就キテ父音ノ列方ハ ${}_4P_4$, 即チ $\underline{|4}$ 通リアリ, 故ニ所要ノ列方ハ $\underline{|4}\times\underline{|4}$, 即チ 576 通リナリ.

注意 Ordinate ハ數學上ニテハ縱線 [解析幾何學ノ語] ノ義ナリ, 併シ列方ノ數ヲ問フニハ字義ハ勿論必要ナシ.

12. A, B, C, D, p, q, r ト云フ七文字ヲ殘ラズ用ヒタル列方ニ於テ首位ト末位トニ大文字ヲ有スル列方ハ幾種アルカ.

[34. 海. 機., 42. 東. 高. 商.]

解 大文字ノ中ヨリ相異ナル二ツヲ取リテ之ヲ首位ト末位トニ置ク列方ハ殘リノ大文字二ツト小文字三ツトヲ悉ク取リタル列方 $\underline{|5}$ ノ 2 倍, 即チ 240 通リアリ, 然ルニ大文字ノ中ヨリ相異ナル二ツヲ取ル方法ハ ${}_4C_2$, 即チ 6 通リアルユエ所要ノ列方ハ 240×6, 即チ 1440 通リナリ.

13. 10人ノ學生ヲ4人ト6人トノ二組ニ分ツトキハ其ノ分チ方ニ幾種アルカ. [36. 商船.]

解 所要ノ數ハ10人ヨリ4人ヅツ取リタル組合ノ數 $\dfrac{\underline{|10}}{\underline{|4}\,\underline{|6}}$, 即チ210種ナリ.

14. 某學校ニ於テ一年級ノ人員20人アリ, 今之ヲ10人ヅツノ二組ニ分チ, 然ル後各組ヨリ組長一人副組長一人ヲ選出セントス, 斯クシテ4人ノ正副組長ヲ選ビ得ル仕方ハ幾通リアルカ.

[40. 盛.高.農.]

解 20人ヲ10人ヅツノ二組ニ分ツ仕方ハ ${}_{20}C_{10}$ アリ, 次ニ各組ニ於テ組長一人ヲ選出スル仕方ハ ${}_{10}C_{1}$, 即チ10通リアリ, 副組長一人ヲ選出スル仕方ハ ${}_{9}C_{1}$, 即チ9通リアリ, 故ニ所要ノ仕方ハ ${}_{20}C_{10}\times(10\times9)^2$, 即チ1496523600通リナリ.

15. 10人ノ中ヨリ5人ヲ選ブニハ幾通リノ選ミ方アルカ. 但或2人ハ同時ニ選ニ入ルコト能ハザルモノトス. [35. 海.機.]

解 10人ノ中ヨリ特別ノ2人ヲ除キテ5人ヲ選ブ仕方ハ ${}_{8}C_{5}$ 通リアリ, 次ニ特別ノ二人ガ

選ニ入ル仕方ハ $2\times{}_{8}C_{4}$ 通リアルユヱ所要ノ數ハ ${}_{8}C_{5}+2\times{}_{8}C_{4}$, 即チ196通リアリ.

16. 16人ノ中ヨリ抽籤ニ依リテ5人ヲ選ミ出サントス, 其ノ選ミ方幾通リアルカ, 又同ジ一人ガ毎ニ當籤セラルベキ機會ハ幾回アルカ.

[36. 一高.]

解 16人ノ中ヨリ5人ヲ選出スル仕方ハ ${}_{16}C_{5}$, 即チ4368通リアリ. 又同ジ一人ガ毎ニ當籤セラルベキ仕方ハ ${}_{15}C_{4}$, 即チ1365通リアリ.

17. 12人ノ代議士中ヨリ3人ノ委員ヲ選出スル仕方ハ幾通リアルカ. [36. 海.兵.]

解 所要ノ仕方ハ ${}_{12}C_{3}$, 即チ220通リナリ.

18. 五色ノ旗ヲ一旒ヨリ五旒マデ排列シテ信號ヲナストキハ其ノ數如何. [35. 商船.]

解 所要ノ數ハ明カニ ${}_{5}P_{1}+{}_{5}P_{2}+{}_{5}P_{3}+{}_{5}P_{4}+{}_{5}P_{5}=5+20+60+120+120$, 即チ325ナリ.

19. 將校3名, 兵卒10名ノ中ヨリ9名ノ一隊ヲ選ブニハ幾通リノ方法アルカ. 但一隊ノ中ニハ少ナクモ將校二名含マルベキモノトス.

[42. 海.機.]

解 將校2名含マルベキ選ミ方ハ ${}_3C_2\times{}_{10}C_7$, 即チ 360 通リニシテ將校3名含マルベキ選ミ方ハ ${}_3C_3\times{}_{10}C_6$, 即チ 210 通リアリ.
故ニ所要ノ方法ハ $360+210$, 即チ 570 通リアリ.

20. 5人ノ男子ト4人ノ女子トヨリ3人ノ男子ト2人ノ女子トヨリ成ル組ヲ作リ此ノ組中ノモノヲアラユル順序ニ並ブルトキハ總テ幾通リヲ得ルカ. [42. 陸.士.]

解 男子5人ト女子3人トヨリ男子3人ト女子2人トヲ取リタル組合ノ數ハ ${}_5C_3\times{}_4C_2$ アリ, 今其ノ中ノ一ツニ就キテ考フルニ其ノ組中ノモノヲアラユル順序ニ列ブル仕方ハ $\underline{|5}$ アルユヱ所要ノ數ハ ${}_5C_3\times{}_4C_2\times\underline{|5}$, 即チ 7200 通リナリ.

21. 八ツノ點アリ; 其ノ何レノ三ツモ同一直線上ニアラズトス, 之ヲ直線ニテ結ビ付クレバ幾個ノ三角形ヲ得ベキカ. [30. 東.高.工.]

解 所要ノ三角形ノ數ハ八ツノ點ヲ三ツヅツ取リタル組合ノ數ニ等シク, 即チ $\frac{\underline{|8}}{\underline{|3}\,\underline{|5}}$, 即チ 56 個ナリ.

22. n 個ノ球ヲ入レタル嚢中ヨリ球ヲ取リ出スニ取リ出シタル球ノ數ガ偶數ナル場合幾通リアルカ. [38. 商船.]

解 第一 n ガ偶數ナルトキ所要ノ數ハ

$${}_nC_2+{}_nC_4+{}_nC_6+\ldots\ldots+{}_nC_{n-2}+{}_nC_n,$$

即チ $\underline{|n}\left\{\frac{1}{\underline{|2}\,\underline{|n-2}}+\frac{1}{\underline{|4}\,\underline{|n-4}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\underline{|n}}\right\}$.

第二 n ガ奇數ナルトキ所要ノ數ハ

$${}_nC_2+{}_nC_4+{}_nC_6+\ldots\ldots+{}_nC_{n-3}+{}_nC_{n-1},$$

即チ $\underline{|n}\left\{\frac{1}{\underline{|2}\,\underline{|n-2}}+\frac{1}{\underline{|4}\,\underline{|n-4}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\underline{|n-1}}\right\}$

ナルコト明カナリ.

L. 二項式定理

1. $(1+x)^{20}$ ノ第十五項ヲ記セ. [33. 海.兵.]

解 $(1+x)^{20}$ ノ第十五項ハ

$${}_{20}C_{14}x^{14}=38760x^{14}$$

ナリ.

2. $(2x-3y)^8$ ヲ展開セヨ. [35. 大.高.工.]

解 $(2x-3y)^8=(2x)^8-8(2x)^7(3y)+28(2x)^6(3y)^2$

$$-56(2x)^5(3y)^3+70(2x)^4(3y)^4$$
$$-56(2x)^3(3y)^5+28(2x)^2(3y)^6$$
$$-8(2x)(3y)^7+(3y)^8$$
$$=256x^8-3072x^7y+16128x^6y^2$$
$$-48384x^5y^3+90720x^4y^4$$
$$-108864x^3y^5+81648x^2y^6$$
$$-34992xy^7+6561y^8.$$

3. $(2a-3b)^{10}$ ノ展開式ニ於ケル第四項ヲ求メヨ。 [36. 商船.]

解 $(2a-3b)^{10}$ ノ展開式ニ於ケル第四項ハ

$$-{}_{10}C_3(2a)^7(3b)^3=-\frac{\lfloor 10}{\lfloor 3\,\lfloor 7}\times 2^7\times 3^3\times a^7b^3$$
$$=-414720a^7b^3.$$

4. $(1+x)^{20}$ ノ展開式ニ於ケル中央ノ項ヲ求メヨ。 [35. 商船.]

解 $(1+x)^{20}$ ノ展開式ニ於ケル項ノ數ハ 21 ナルユヱ中央ノ項ハ第 11 項ナリ。

故ニ $\quad {}_{20}C_{10}x^{10}=\frac{\lfloor 20}{\lfloor 10\,\lfloor 10}x^{10}=184756x^{10}.$

5. $(a+bx)^{10}$ ノ展開式ニ於テ x^3 ヲ含ム項ノ係數ト x^7 ヲ含ム項ノ係數トノ比ガ 1 : 16 ナレバ a, b ノ關係如何。 [39. 商船.]

解 所題ノ展開式ニ於テ x^3, 及ビ x^7 ヲ含ム項ノ係數ハソレゾレ ${}_{10}C_3a^7b^3$, ${}_{10}C_7a^3b^7$ ナルユヱ題意ニ依リテ $\frac{{}_{10}C_3a^7b^3}{{}_{10}C_7a^3b^7}=\frac{1}{16}$ … … … (1)

然ルニ ${}_{10}C_3={}_{10}C_7$ ナルユヱ (1) ハ次ノ如ク變ズ。

$$\frac{a^4}{b^4}=\frac{1}{16},$$

故ニ $\quad \frac{a}{b}=\pm\frac{1}{2},$

或ハ $\quad b=\pm 2a,$

コレ所要ノ關係ナリ。

6. $(3x+2y)^7$ ノ展開式ニ於ケル x^4y^3 ノ係數ヲ求メヨ。 [39. 海. 機.]

解 $(3x+2y)^7$ ノ展開式ニ於ケル x^4y^3 ノ係數ハ $\quad {}_7C_3\times3^4\times2^3=\frac{7\times6\times5}{2\times3}\times3^4\times2^3$

$$=22680.$$

7. $(x+1)^{m+n}$ ノ展開式ニ於テ x^m ト x^n トノ係數ハ相等シキコトヲ證セヨ。[38. 東. 高. 商.]

證 $(x+1)^{m+n}$ ノ展開式ニ於テ x^m ノ係數ハ ${}_mC_{m-n}$, x^n ノ係數ハ ${}_mC_n$ ナルコト明カナリ。

然ルニ $\quad {}_mC_{m-n}={}_mC_{m-(m-n)}={}_mC_n.$

故ニ題言ノ如シ.

8.* $(1+x)^8$ ノ展開式ニ於ケル中央ノ三項ガ等差級數ヲナスベキ x ノ數値ヲ求メヨ.

[41. 商船.]

解 $(1+x)^8$ ノ展開式ニ於ケル中央ノ三項ハ ${}_8C_3x^3$, ${}_8C_4x^4$, ${}_8C_5x^5$ ナリ. 依リテ

$$2\times{}_8C_4x^4={}_8C_3x^3+{}_8C_5x^5,$$

即チ $140x^4=56x^3+56x^5,$

或ハ $28x^3(2x^2-5x+2)=0,$

故ニ $2x^2-5x+2=0,$

故ニ $x=2$, 或ハ $\frac{1}{2}$.

○ 9.* $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ ノ展開式ニ於テ x^2 ヲ含ム項ヲ求メヨ.

[35. 一高.]

解 所題ノ展開式ニ於ケル x^2 ヲ含ム項ヲ第 $r+1$ 番目ノ項トスレバ所要ノ項ハ

$$\frac{\underline{|8}}{\underline{|r}\,\underline{|8-r}}x^{8-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\frac{\underline{|8}}{\underline{|r}\,\underline{|8-r}}x^{8-2r},$$

故ニ $8-2r=2$, 即チ $r=3$.

依リテ所要ノ項ハ次ノ如シ.

$$\frac{\underline{|8}}{\underline{|3}\,\underline{|5}}x^2, \text{ 即チ } 56x^2.$$

10.* $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{20}$ ノ展開式ニ於ケル x^4 ノ係數如何.

[37. 海.機.]

解 所題ノ展開式ニ於ケル x^4 ノ項ヲ第 $r+1$ 項トスレバ

$$\frac{\underline{|20}}{\underline{|r}\,\underline{|20-r}}(2x)^{20-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$=\frac{\underline{|20}}{\underline{|r}\,\underline{|20-r}}2^{20-r}x^{20-2r},$$

故ニ $20-2r=4$, 依リテ $r=8$,

即チ所要ノ係數ハ次ノ如シ.

$$\frac{\underline{|20}}{\underline{|8}\,\underline{|12}}\times2^{12}, \text{ 即チ } 522362880.$$

11.* $\left(x^2-\frac{a}{x}\right)^{20}$ ノ x^7 ハ第何項ニ當ルカ, 且其ノ項ヲ求メヨ.

[42. 東.高.商.]

解 所題ノ展開式ニ於ケル x^7 ノ項ヲ第 $r+1$ 項トスレバ

$$(-1)^r\frac{\underline{|20}}{\underline{|r}\,\underline{|20-r}}x^{2(20-r)}\left(\frac{a}{x}\right)^r$$

$$=(-1)^r\frac{\underline{|20}}{\underline{|r}\,\underline{|20-r}}a^rx^{40-3r},$$

故ニ $40-3r=7$, 即チ $r=11$.

故ニ所要ノ項ハ第 12 項ニシテ其ノ項ハ

$$-\frac{\underline{|20}}{\underline{|11}\,\underline{|9}}a^{11}x^7, \text{ 即チ } -167960a^{11}x^7 \text{ ナリ.}$$

12. 二項式定理ヲ適用シテ $(1.05)^{10}$ ヲ展開シ，然ル後小數第五位マデ精密ニ計算スベシ．

[39. 長.高.商.]

解 $(1.05)^{10}=(1+.05)^{10}$

$$=1+10(.05)+45(.05)^2+120(.05)^3$$
$$+210(.05)^4+252(.05)^5+210(.05)^6$$
$$+\dots\dots\dots\dots+(.05)^{10}$$
$$=1+.5+.1125+.015+.001312$$
$$+.0000787+.0000032+\dots\dots$$
$$\fallingdotseq 1.62889.$$

13. $\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)^{12}$ ノ展開式ニ於ケル x^6 ノ係數ヲ求メヨ．

[41. 海.機.]

解 所題ノ展開式ニ於ケル x^6 ノ項ヲ第 $r+1$ 項トスレバ

$$(-1)^r\frac{|\underline{12}}{|\underline{r}\,|\underline{12-r}}x^{3r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{12-r}$$
$$=(-1)^r\frac{|\underline{12}}{|\underline{r}\,|\underline{12-r}}x^{6r-36},$$

故ニ　$6r-36=6$,　卽チ　$r=7$.

依リテ所要ノ係數ハ

$$-\frac{|\underline{12}}{|\underline{7}\,|\underline{5}}=-792.$$

14. $(1+x)^{2n-1}$ ノ中央ノ二項ノ係數ノ和ハ $(1+x)^{2n}$ ノ中央ノ一項ノ係數ニ等シキコトヲ證セヨ．

[42. 商船.]

證 $(1+x)^{2n-1}$ ノ中央ノ二項ノ係數ハ

$$\frac{|\underline{2n-1}}{|\underline{n}\,|\underline{n-1}},\quad \frac{|\underline{2n-1}}{|\underline{n+1}\,|\underline{n-2}}$$

ナリ．サテ

$$\frac{|\underline{2n-1}}{|\underline{n}\,|\underline{n-1}}+\frac{|\underline{2n-1}}{|\underline{n+1}\,|\underline{n-2}}=\frac{|\underline{2n-1}(n+1+n-1)}{|\underline{n+1}\,|\underline{n-1}}$$
$$=\frac{|\underline{2n}}{|\underline{n+1}\,|\underline{n-1}},$$

然ルニ $(1+x)^{2n}$ ノ中央ノ一項ノ係數ハ

$\frac{|\underline{2n}}{|\underline{n+1}\,|\underline{n-1}}$ ナリ．故ニ題言ノ如シ．

M. 對數 複利 年金

1. $\log_{10}2=0.301030$ ヲ知リテ 80 ノ常用對數ヲ求メヨ．

[37. 海.兵.]

解 $\log_{10}80=\log 2^3\times10$

$$=3\log_{10}2+\log_{10}10=3\times0.301030+1$$

$=0.903090+1=1.903090.$

2. $\log_{10}2=0.301030$, $\log_{10}3=0.477121$ ヲ知リテ $\log_{10}180$ ヲ見出セ. [42. 商船.]

解 $\log_{10}180=\log_{10}2\times3^2\times10$

$=\log_{10}2+2\log_{10}3+\log_{10}10$

$=0.301030+2\times0.477121+1$

$=0.301030+0.954242+1$

$=2.255272.$

3. $\log_{10}2=0.301030$, $\log_{10}3=0.477121$ ヲ與ヘテ $\log_{10}14.4$ ヲ求メヨ. [38. 商船.]

解 $\log_{10}14.4=\log_{10}\dfrac{144}{10}=\log_{10}2^4\times3^2-\log_{10}10$

$=4\log_{10}2+2\log_{10}3-1$

$=4\times0.301030+2\times0.477121-1$

$=1.204120+0.954242-1$

$=1.158362.$

4. $\log_{10}1593$ ト $\log_{12}1593$ トノ指標ヲ求メヨ. [30. 一高.]

解 $1000<1593<10000,$

故ニ $\log_{10}1000<\log_{10}1593<\log_{10}10000,$

或ハ $3<\log_{10}1593<4,$

故ニ $\log_{10}1593$ ノ指標ハ 3 ナリ.

又 $144<1593<1728,$

故ニ $\log_{12}144<\log_{12}1593<\log_{12}1728,$

或ハ $2<\log_{12}1593<3,$

故ニ $\log_{12}1593$ ノ指標ハ 2 ナリ.

5. $\log12.5$ ヲ求メヨ. 但 $\log2=0.30103$ トス. [42. 海.兵.]

解 $\log12.5=\log\dfrac{10^2}{2^3}$

$=2\log10-3\log2=2-3\times0.30103$

$=2-0.90309=1.09691.$

6. 2^{30} ハ幾桁ノ數ナルカ. 但 $\log2=0.301030$. [37. 商船.]

解 $\log2^{30}=30\log2$

$=30\times0.301030=9.03090,$

故ニ 2^{30} ハ $9+1$, 即チ 10 桁ノ數ナリ.

7. $\sqrt[3]{4}$ ヲ底トシタル 128 ノ對數如何. [34. 海.機.]

解 $\log_{\sqrt[3]{4}}128=\log_{\sqrt[3]{4}}(\sqrt[3]{4})^{\frac{21}{2}}$

$=\dfrac{21}{2}\log_{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{4}=\dfrac{21}{2}=10.5.$

8. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ. [38. 專.入.檢.]

$$\frac{1}{2}\log 20449+\log\frac{4}{7}-\log\frac{13}{35}+\log\frac{5}{11}.$$

但 log ハ常用對數ヲ表ハスモノトス.

解 所題ノ式$=\log\left(\sqrt{20449}\times\frac{4}{7}\div\frac{13}{35}\times\frac{5}{11}\right)$

$$=\log\left(143\times\frac{4}{7}\times\frac{35}{13}\times\frac{5}{11}\right)$$

$$=\log 100=2.$$

9. $\log(x^2y^3)=a$, $\log\frac{x}{y}=b$ ヨリ $\log x$, $\log y$ ヲ求メヨ. [39. 水. 講.]

解 $\log(x^2y^3)=a$ ... ... (1)

$\log\frac{x}{y}=b$ ... ... (2)

(1) ヨリ $2\log x+3\log y=a$ ... ... (3)

(2) ヨリ $\log x-\log y=b$ ... ... (4)

(4) ニ 3 ヲ乘シ (3) ニ加フレバ

$$5\log x=a+3b,$$

故ニ $\log x=\frac{a+3b}{5}$,

從ヒテ $\log y=\frac{a-2b}{5}$.

10. $3^x=5$ ニ適合スル x ノ値ヲ求メヨ. [33. 一高.]

解 $3^x=5$, 故ニ $x\log 3=\log 5$,

故ニ $x=\frac{\log 5}{\log 3}$.

11. $5^{7-3x}=2^{x+4}$ ヲ解ケ. 但 $\log 2=0.30103$ トス. [33. 海. 機.]

解 $5^{7-3x}=2^{x+4}$,

兩邊ノ對數ヲ取レバ

$$(7-3x)\log 5=(x+4)\log 2,$$

或ハ $(7-3x)\{\log 10-\log 2\}=(x+4)\log 2.$

故ニ $7-3x=(11-2x)\log 2$

$$=(11-2x)\times 0.30103,$$

或ハ $2.39794x=3.68867$,

故ニ $x=\frac{368867}{239794}$.

12. 次ノ方程式ノ根ヲ小數第二位マデ計算セヨ. [38. 大. 高. 工.]

$5^{x+1}=3^{x^2-1}$, 但 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$.

解 $5^{x+1}=3^{x^2-1}$,

兩邊ノ對數ヲ取リテ

$$(x+1)\log 5=(x^2-1)\log 3,$$

或ハ $(x+1)\{\log 10-\log 2\}=(x^2-1)\log 3,$

或ハ $(x+1)\{(x-1)\log 3+\log 2-1\}=0,$

或ハ　$(x+1)(0.47712x-1.17609)=0$,

故ニ　$x=-1$,　或ハ　$0.47712x-1.17609=0$,

卽チ　$x=2.46$.

13. $\log\sqrt{3x+4}+\frac{1}{2}\log(5x+1)=1+\log 3$ ヲ解ケ.　[36. 大.高.工.]

解 所題ノ方程式ハ

$$\log\sqrt{3x+4}+\log\sqrt{5x+1}=\log 10+\log 3,$$

或ハ　$\log\sqrt{(3x+4)(5x+1)}=\log 30$,

故ニ　$\sqrt{(3x+4)(5x+1)}=30$,

自乘シテ簡單ニスレバ

$$15x^2+23x-896=0,$$

故ニ　$x=7$,　或ハ　$-\frac{128}{15}$.

此ノ第二ノ値ヲ所題ノ方程式ニ代入スレバ

$$\log\sqrt{-\frac{108}{5}}+\log\sqrt{-\frac{125}{3}}=1+\log 3$$

トナリテ適合セズ. 故ニ所要ノ根ハ $x=7$ ナリ.

14. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$\log(2x^2-5x+2)+\log(3x^2+x-2)-\log(x^2-x-2)=0.$$

[42. 陸.士.]

解 所題ノ方程式ハ

$$\log\frac{(2x^2-5x+2)(3x^2+x-2)}{x^2-x-2}=0,$$

故ニ　$\frac{(2x^2-5x+2)(3x^2+x-2)}{x^2-x-2}=1$.

或ハ　$\frac{(x-2)(2x-1)(x+1)(3x-2)}{(x-2)(x+1)}=1$,

故ニ　$(2x-1)(3x-2)-1=0$,

故ニ　$6x^2-7x+1=0$,

故ニ　$x=1$,　或ハ　$\frac{1}{6}$.

15. 或數 x ノ常用對數ノ 2 倍ハ $x+\frac{11}{10}$ ナル數ノ常用對數ヨリ大ナルコト 1 ナリ, x ノ値ヲ求メヨ.　[39. 專.入.檢.]

解 題意ニ依リテ

$$2\log x=\log\left(x+\frac{11}{10}\right)+1,$$

故ニ　$\log x^2=\log\frac{10x+11}{10}+\log 10$,

$$=\log(10x+11)-\log 10+\log 10$$

$$=\log(10x+11),$$

故ニ　$x^2=10x+11$,　或ハ　$x^2-10x-11=0$,

故ニ　$x=11$,　或ハ　-1.

此ノ第二ノ値ハ題意ニ適合セズ. 如何トナレバ

$2\log x=2\log(-1)$ トナリテ負數ノ對數ヲ取ルコトトナレバナリ．故ニ所要ノ値ハ 11 ナリ．

16. 公比 $\frac{1}{m}$ ナル無窮等比級數 n 項ノ和ヲシテ其ノ總和ノ $\frac{9}{10}$ ヨリ大ナラシメンニハ $n>\frac{1}{\log_{10}m}$ ナラシメザルベカラザルコトヲ證セヨ．但 m ハ 1 ヨリ大ナルモノトス．

[38. 商船.]

證 公比 $\frac{1}{m}$ ナル無窮等比級數ノ初項ヲ a, 總和ヲ S, n 項ノ和ヲ S_n トスレバ

$$S=\frac{a}{1-\frac{1}{m}},\quad S_n=a\frac{1-\left(\frac{1}{m}\right)^n}{1-\frac{1}{m}},$$

故ニ $S_n>\frac{9}{10}S$ ナラシメンニハ

$$a\frac{1-\left(\frac{1}{m}\right)^n}{1-\frac{1}{m}}>\frac{9a}{10\left(1-\frac{1}{m}\right)},$$

即チ $$1-\frac{1}{m^n}>\frac{9}{10},$$

故ニ $m^n>10$, 故ニ $n\log m>\log 10$,

故ニ $$n>\frac{1}{\log m}$$

ナラザルベカラズ．

17. 明治 35 年末ノ統計ニ依レバ某市ノ人口 60000 ナリシガ同 39 年末ニハ 70192 トナレリ，毎年 100 人ニ付キ約幾人ヅツ増加スル割合トナルカ．但此ノ割合ハ毎年同樣ナリト假定ス．

[42. 海.兵.]

解 毎年ノ増加ノ割合ヲ x トスレバ

$$60000(1+x)^4=70192,$$

$$(1+x)^4=\frac{4387}{3750},$$

故ニ $$4\log(1+x)=\log 4387-\log 3750,$$

故ニ $$\log(1+x)=\frac{1}{4}\{3.64217-3.57403\}$$
$$=0.01703.$$

之ヨリ $1+x=1.04$. 故ニ $x=0.04$.

依リテ毎年 100 人ニ付キ 4 人ヅツ増加スル割合ナリ

18. 金若干圓ヲ年 8 分ノ利ニテ銀行ニ預入レ一年毎ニ利子ヲ元金ニ加算スルモノトシ元利合計ヲシテ元金ノ 2 倍ニ達セシメントス．幾ケ年以上之ヲ据エ置クベキカ．

[38. 商船.]

解 預ケ入レシ金高ヲ a 圓トシ所要ノ年數ヲ

x トスレバ　$a(1+0.08)^x=2a$,

故ニ　$(1+0.08)^x=2$,

故ニ　$x\log\frac{108}{100}=\log 2$,

或ハ　$x(\log 3^3\times 2^2-\log 100)=\log 2$,

或ハ　$x(3\log 3+2\log 2-2)=\log 2$,

故ニ　$x=\frac{\log 2}{3\log 3+2\log 2-2}$

$$=\frac{0.301030}{3\times 0.477121+2\times 0.301030-2}=9\frac{223}{33423}.$$

故ニ所要ノ年數ハ 10 年ナリ.

19. 人アリ, 若干圓ヲ年利率 p ノ複利ニテ借入レタリ, 而シテ其ノ年ヨリ x 圓ヅツ年賦ニテ返濟シテ n 年目ノ終ニ元利金ヲ皆濟セントス. 每年ノ返濟金額如何.　[40. 農. 大. 實.]

解 借入レタル金高ヲ A 圓トスレバ

$$A=\frac{x}{1+p}+\frac{x}{(1+p)^2}+\cdots\cdots+\frac{x}{(1+p)^n}$$

$$=x\frac{(1+p)^n-1}{p(1+p)^n}$$

ナルユヱ　$x=\frac{Ap(1+p)^n}{(1+p)^n-1}$.

20. 年利率ヲ i トスルトキ今後滿一年每ニ

金 a 圓ヅツ n 年間受取ルベキ定期年金ノ現價ヲ求メヨ.　[36. 東. 高. 商.]

解 1 年後ニ受取ルベキ金 a 圓ノ現價ハ $\frac{a}{1+i}$. 2 年後ニ受取ルベキ金 a 圓ノ現價ハ $\frac{a}{(1+i)^2}$, 同樣ニシテ n 年後ニ受取ルベキ金 a 圓ノ現價ハ $\frac{a}{(1+i)^n}$ ナリ. 依リテ所要ノ現價ハ

$$\frac{a}{1+i}+\frac{a}{(1+i)^2}+\cdots\cdots+\frac{a}{(1+i)^n}$$

$$=a\left\{\frac{1}{1+i}\times\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{1-\frac{1}{1+i}}\right\}=a\left\{\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right\}.$$

N. 雜題

1. $x=\frac{a}{b+c}$, $y=\frac{b}{c+a}$, $z=\frac{c}{a+b}$ ナルトキ $xy+yz+zx+2xyz$ ノ値ヲ求メヨ.

[38. 東. 高. 師.]

解 $xy+yz+zx+2xyz$

$$=\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b}{c+a}+\frac{b}{c+a}\cdot\frac{c}{a+b}+\frac{c}{a+b}\cdot\frac{a}{b+c}$$

$$+2\frac{abc}{(b+c)(c+a)(a+b)},$$

而シテ此ノ式ヲ通分スレバ分子ハ

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$$
$$=bc(b+c)+a(ab+b^2+c^2+ac+2bc)$$
$$=bc(b+c)+a\{a(b+c)+(b+c)^2\}$$
$$=(b+c)(bc+a^2+ab+ac)$$
$$=(b+c)(c+a)(a+b)$$

ナルユエ此ノ分數ノ値ハ 1 ニ等シ.

2. $(y-z)^3+(x-y)^3-3(x-y)(y-z)(z-x)$
$=(x-z)^3$ ヲ證セヨ. [37. 商船.]

證 $(y-z)+(z-x)+(x-y)=0$

ナルユエ

$$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$$
$$=3(x-y)(y-z)(z-x),$$

故ニ $(y-z)^3+(x-y)^3-3(x-y)(y-z)(z-x)$
$$=-(z-x)^3=(x-z)^3.$$

3. 若シ $x-\frac{1}{x}=1$ ナルトキハ $x^2+\frac{1}{x^2}=3$,

及ビ $x^3-\frac{1}{x^3}=4$ ナルコトヲ證セヨ. [38. 商船.]

證 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}=1,$

故ニ $\qquad x^2+\frac{1}{x^2}=3,$

從ヒテ又 $\qquad x^2+1+\frac{1}{x^2}=4,$

而シテ $\qquad x-\frac{1}{x}=1,$

故ニ $\qquad \left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=4,$

卽チ $\qquad x^3-\frac{1}{x^3}=4.$

4. $y=a-\frac{a^2}{x}$ ニシテ $z=a-\frac{a^2}{y}$ ナルトキ

$x=a-\frac{a^2}{z}$ ナルコトヲ證セヨ. [40. 長. 高. 商.]

證 $\qquad \frac{a^2}{x}=a-y$

故ニ $\qquad x=\frac{a^2}{a-y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$

又 $\qquad \frac{a^2}{y}=a-z, \qquad$ 故ニ $\quad y=\frac{a^2}{a-z},$

故ニ $\qquad a-y=a-\frac{a^2}{a-z}=\frac{-az}{a-z},$

故ニ之ヲ (1) ニ代入シ

$$x=a^2\times\frac{a-z}{-az}=\frac{a(z-a)}{z}$$
$$=a-\frac{a^2}{z}.$$

5. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ ナルト

キハ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

ナルコトヲ證セヨ. [37. 大.高.工]

證 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1,$

即チ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2xy}{ab}+\frac{2xz}{ac}+\frac{2yz}{bc}=1,$

即チ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2xyz}{abc}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=1,$

然ルニ $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$

ナルユヱ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

6. $A+B(x+2)+C(x+2)^2+D(x+2)^3$ ヲ簡單ニスルトキハ $1+x^3$ トナルト云フ, A, B, C, D ノ値各幾何ナルカ. 但 A, B, C, D ハ皆 x ヲ含マザルモノトス. [38. 海.機.]

解 I. 所題ノ式ヲ簡單ニシテ $1+x^3$ ニ等シト置ケバ

$$Dx^3+(C+6D)x^2+(B+4C+12D)x$$
$$+A+2B+4C+8D=1+x^3,$$

此ノ等式ガ x ノ値ニ關セズ成リ立ツ爲ニハ

$$D=1,\ C+6D=0,\ B+4C+12D=0,$$
$$A+2B+4C+8D=1$$

ナラザルベカラズ, 之ヲ解キテ

$A=-7,\ B=12,\ C=-6,\ D=1$ ヲ得.

解 II. $A+B(x+2)+C(x+2)^2+D(x+2)^3$
$$=1+x^3 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

ニ於テ $x=-2$ トスレバ $A=-7$ ヲ得.

故ニ (1) ハ $B(x+2)+C(x+2)^2+D(x+2)^3$
$$=x^3+8$$

トナル. 此ノ兩邊ヲ $x+2$ ニテ除スレバ

$$B+C(x+2)+D(x+2)^2=x^2-2x+4 \quad \cdots \quad (2)$$

是ニ於テ $x=-2$ トスレバ $B=12$ ヲ得.

故ニ (2) ハ $C(x+2)+D(x+2)^2$
$$=x^2-2x-8 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

トナル. 此ノ兩邊ヲ $x+2$ ニテ除スレバ

$$C+D(x+2)=x-4 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

是ニ於テ $x=-2$ トスレバ $C=-6$ ヲ得.

故ニ (4) ハ $D(x+2)=x+2$

トナル. 此ノ兩邊ヲ $x+2$ ニテ除スレバ $D=1$ ヲ得.

7. 代數式 $pX+2q$ ニ於テ X ヲ 5 及ビ 20 トスレバ其ノ値ソレゾレ 87, 12 トナルト云フ, 若シ X ヲ 3.5 トスレバ其ノ値如何. 又其ノ値

ヲ零ナラシムルニハ X ニ如何ナル値ヲ與フベキカ. [36. 各高等.]

解 題意ニ依リテ

$$5p+2q=87 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$20p+2q=12 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

(2) ヨリ (1) ヲ減ズレバ

$$15p=-75, \quad 故ニ \quad p=-5.$$

p ノ此ノ値ヲ (1) ニ代入シテ $q=56$,

故ニ所題ノ式ニ於テ $X=3.5$ ナルトキ其ノ式ノ値ハ $-5\times3.5+112=94.5.$

又所題ノ式ヲシテ 0 ナラシムル X ノ値ハ

$$-5X+112=0, \quad \therefore \quad X=22.4.$$

8. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ. [30. 一高.]

$$3x+2y-z=8 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$5x-y+2z=15 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$7x+4y-6z=2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

解 (1) ニ 2 ヲ乘ジ (2) ヲ加フレバ

$$11x+3y=31 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

(2) ニ 3 ヲ乘ジ (3) ヲ加フレバ

$$22x+y=47 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

(5) ニ 3 ヲ乘ジ (4) ヲ減ズレバ

$$55x=110, \quad \therefore \quad x=2.$$

從ヒテ $y=3$, $z=4$ ヲ得.

9. 矩形ノ土地アリ, 之ヲ測量セシニ縦ハ横ヨリ 9 尺長ク縦横倶ニ 3 尺ヲ増ストキハ面積ニ於テ 4 坪ノ増加ヲ來タスト云フ. 今此ノ土地ニ幅 1 尺長サ 3 尺ノ石ヲ以テ敷石トナサントス幾個ノ石ヲ要スルカ. [30. 農.大.實.]

解 横ノ長サヲ x 尺トスレバ縦ノ長サハ $(x+9)$ 尺ナリ, 故ニ題意ニ依リテ

$$x(x+9)=(x+3)(x+12)-36\times4,$$

簡單ニシテ $6x=108, \quad \therefore \quad x=18.$

依リテ所要ノ石ノ數ハ

$$18\times(18+9)\div(1\times3)=162,$$

即チ 162 個ナリ.

10. 寶石入 18 金ノ指輪アリ, 其ノ重量 15瓦.10 アリ, 之ヲ水中ニテ量レバ 13瓦.39 アリト云フ, 金及ビ寶石ノ重量ヲ求メヨ. 但十八金ノ比重ハ 16.75, 寶石ノ比重ハ 3.3 トス.

[40. 神.高.商.]

解 金,寶石ノ重量ヲソレゾレ x瓦, y瓦 トスレバ題意ニ依リテ

$$x+y=15.1 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\left(1-\frac{1}{16.75}\right)x+\left(1-\frac{1}{3.3}\right)y=13.39 \cdots \quad (2)$$

(1) ヨリ　$y=15.1-x,$

之ヲ (2) ニ代入シテ簡單ニスレバ

$$538x=6336.19,$$

故ニ　$x \doteqdot 11.777$

從ヒテ　$y \doteqdot 3.323$

ヲ得. 故ニ

金ノ重量ハ約11瓩.777, 寶石ノ重量ハ約3瓩.323ナリ.

11. 次ノ方程式ヲ解ケ.　[42. 陸. 士.]

(I)　$$\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{a-c}{x+a-c}+\frac{b+c}{x+b+c}.$$

(II)　$x^3-7x+6=0.$

解 (I) 所題ノ方程式ヲ移項シテ

$$\frac{a}{x+a}-\frac{a-c}{x+a-c}=\frac{b+c}{x+b+c}-\frac{b}{x+b},$$

兩邊ヲ簡單ニスレバ

$$\frac{cx}{(x+a)(x+a-c)}=\frac{cx}{(x+b)(x+b+c)},$$

故ニ　$x=0.$

及ビ　$(x+a)(x+a-c)=(x+b)(x+b+c),$

即チ　$2(a-b-c)x=-(a+b)(a-b-c),$

故ニ　$x=-\frac{1}{2}(a+b).$

(II) 左邊ハ $x=1$ ナルトキ 0 トナルコトニ注意シテ之ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x-2)(x-1)(x+3)=0,$$

故ニ　$x=2,\ 1,\ -3.$

12. $x(x-1)(x-2)=120$ ヲ解ケ.

[37. 農. 大. 實.]

解 I. 所題ノ方程式ヲ一邊ニ集メ左邊ヲ因數ニ分解スレバ　$(x-6)(x^2+3x+20)=0,$

故ニ　$x-6=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

或ハ　$x^2+3x+20=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

(1) ヨリ　$x=6,$

(2) ヨリ　$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-80}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{-71}}{2}.$$

解 II. 所題ノ方程式ヨリ

$$x(x-1)(x-2)=6.5.4,$$

故ニ $x=6$ ハ一根ナルコト明カナリ.

依リテ $x(x-1)(x-2)-120$ ヲ $x-6$ ニテ除シ

$$x^2+3x+20=0$$

ヲ得. 以下前解ニ同シ.

13. $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$ ヲ解ケ.

[38. 大.高.工.]

解 左邊ヲ x^2 ニテ除シ且項ノ順序ヲ變シテ

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0,$$

今 $$x+\frac{1}{x}=y$$

トスレバ $$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

ナルユヱ上ノ方程式ハ

$$6(y^2-2)+5y-38=0,$$

或ハ $$6y^2+5y-50=0$$

トナル, 之ヲ解キテ $y=\frac{5}{2}$, 或ハ $-\frac{10}{3}$.

故ニ $$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},$$

或ハ $$2x^2-5x+2=0$$

ヨリ $x=2$, 或ハ $\frac{1}{2}$.

及ビ $$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3},$$

或ハ $$3x^2+10x+3=0$$

ヨリ $x=-3$, 或ハ $-\frac{1}{3}$.

14. 次ノ方程式ヲ解ケ. [42. 海.兵.]

(I) $x=\sqrt{x}+1$. (II) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{29}{20}$, $xy=21$.

解 (I) $$x=\sqrt{x}+1,$$

移項シテ $$x-1=\sqrt{x},$$

自乘シテ移項スレバ $$x^2-3x+1=0,$$

故ニ …… $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, 或ハ $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

x ノ第一ノ値ハ所題ノ方程式ニ適合スレドモ第二ノ値ハ適合セズ.

(II) $$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{29}{20} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$xy=21 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) ヨリ $$\frac{x^2}{y^2}=\frac{29+20}{29-20}=\frac{49}{9},$$

故ニ $$\frac{x}{y}=\pm\frac{7}{3},$$

之ト (2) トヲ邊々相乘スレバ

$$x^2=\pm 7^2,$$

$$\therefore\ x=\pm 7,$$

從ヒテ $$y=\pm 3.$$

依リテ所要ノ x, y ノ値ハ

$x=7$, $y=3$; $x=-7$, $y=-3$.

15. $x^3+2x^2+9=0$, 及ビ $x^3-4x+15=0$ ニ共通ナル根ヲ求メヨ。 [36. 東.高.商.]

解
$$x^3+2x^2+9=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$x^3-4x+15=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) ヨリ (2) ヲ減ズレバ
$$2x^2+4x-6=0,$$
或ハ
$$(x-1)(x+3)=0 \cdots\cdots\cdots (3)$$
(1) ニ 5 ヲ乘ジ (2) ニ 3 ヲ乘ジテ邊々相減ズレバ
$$2x^3+10x^2+12x=0,$$
或ハ
$$x(x+2)(x+3)=0 \cdots\cdots\cdots (4)$$
(3), (4) ニ依リテ所要ノ共通根ハ $x=-3.$

16. 9 哩ノ道ヲ行ク人アリ, 若シ 3 哩ヲ行キシ後毎時ノ速サヲ 1 哩增サバ豫定ノ時間ヨリ一時間早ク到着スベシト云フ, 豫定ノ時間ヲ求メヨ。 [35. 東.高.商.]

解 旅人毎時ノ速サヲ x 哩トスレバ題意ニ依リテ
$$\frac{9}{x}-1=\frac{3}{x}+\frac{6}{x+1},$$
分母ヲ拂ヒ簡單ニシテ
$$x^2+x-6=0,$$
或ハ
$$(x-2)(x+3)=0.$$

x ノ負根ハ題意ニ適セザルユエ之ヲ捨テテ
$$x=2,$$
依リテ豫定ノ時間ハ $9\div2$, 即チ 4 時間半ナリ.

17. $2x^2+3x+4=0$ ノ二根ノ比ヲ $m:n$ トスレバ $9mn=8(m+n)^2$ ナルコトヲ證セヨ。 [41. 商船.]

證 二根ヲ $m\alpha$, $n\alpha$ トスレバ
$$(m+n)\alpha=-\frac{3}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$mn\alpha^2=\frac{4}{2}=2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
故ニ (2) ヨリ
$$9mn=\frac{18}{\alpha^2},$$
及ビ (1) ヨリ
$$8(m+n)^2=\frac{18}{\alpha^2}.$$
故ニ
$$9mn=8(m+n)^2.$$

18. $ax^2+by^2=1$, $y=cx+d$ ガ等根ヲ有ツ爲ニ要スル a, b, c, d ノ關係如何。 [35. 商船.]

解
$$ax^2+by^2=1 \cdots\cdots\cdots (1)$$
$$y=cx+d \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
(2) ニ於ケル y ノ値ヲ (1) ニ代入シテ變化スレバ
$$(a+bc^2)x^2-2bcdx+bd^2-1=0,$$
此ノ方程式ガ等根ヲ有スル爲ニハ

$$b^2c^2d^2-(a+bc^2)(bd^2-1)=0,$$

或ハ $a+bc^2-abd^2=0,$

或ハ $a+bc^2=abd^2$

コレ所要ノ要件ナリ.

19. $4^x+8=9\times2^x$ ヲ解ケ. [38. 千. 醫. 專.]

解 所題ノ方程式ハ

$$2^{2x}+8=9\times2^x \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

故ニ $2^x=X$ トスレバ (1) ハ

$$X^2-9X+8=0,$$

之ヲ解キテ $X=8$, 或ハ 1

ヲ得, 故ニ $2^x=8=2^3, \quad \therefore \ x=3.$

及ビ $2^x=1=2^0, \quad \therefore \ x=0.$

20. $2^x=8^{y+1}$, $9^y=3^{x-9}$ ヲ解ケ. [41. 商船.]

解

$$2^x=8^{y+1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$9^y=3^{x-9} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

(1), (2) ヲ書キ換ヘテ

$$2^x=2^{3(y+1)} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

$$3^{2y}=3^{x-9} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

依リテ

$$x=3y+3 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

$$2y=x-9 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

(5), (6) ヨリ $3y+3=2y+9,$

故ニ $y=6.$

從ヒテ $x=21.$

21. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$ ハ完全ノ平方ナルコトヲ證セヨ. [31. 千. 醫. 專.]

證 所題ノ式

$$=(x+a)(x+4a)(x+2a)(x+3a)+a^4$$

$$=(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)+a^4$$

$$=(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+4a^2+2a^2)+a^4$$

$$=(x^2+5ax+4a^2)^2+2a^2(x^2+5ax+4a^2)+a^4$$

$$=(x^2+5ax+4a^2+a^2)^2$$

$$=(x^2+5ax+5a^2)^2.$$

22. $xy>1$ ナルトキ $\left(x-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+y\right)$ ハ正ナルコトヲ證セヨ. [40. 女. 高. 師.]

證 $\left(x-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+y\right)=\left(\frac{xy-1}{y}\right)\left(\frac{xy+1}{x}\right)$

$$=\frac{(xy-1)(xy+1)}{xy}.$$

然ルニ $xy>1$, 故ニ $xy-1>0.$

故ニ此ノ値ハ正ナリ.

23. a, b ガ不等ニシテ且正ノ數ナラバ

$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ ナルコトヲ證セヨ. [39. 商船.]

證 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$, 卽チ $a+b-2\sqrt{ab}>0$,

故ニ $a+b>2\sqrt{ab}$, 故ニ $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

24. a, b, x ヲ何レモ正ナリトシ, $\frac{a}{b}$ ト $\frac{a+x}{b+x}$ トノ大小ヲ比較セヨ. [37. 五高.]

解 $\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}$

$$=\frac{ab+ax-ab-bx}{b(b+x)}=\frac{(a-b)x}{b(b+x)},$$

故ニ $a>b$ ナレバ $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$,

$a<b$ ナレバ $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$.

25. x ト a トノ和ノ三乘冪ヨリ x ノ三乘冪ヲ減ジタルモノガ λa^3 ニテ表ハサルベキ爲ニ要スル λ ノ値ノ限界如何. 但 x 及ビ a ハ何レモ實數ナルモノトス. [38. 商船.]

解 題意ニ依リテ

$$(x+a)^3-x^3=\lambda a^3,$$

或ハ $3x^2+3ax+a^2-\lambda a^2=0$,

故ニ x ガ實數ナル爲ニハ

$$9a^2-12(a^2-\lambda a^2)\geqq 0,$$

或ハ $4\lambda-1\geqq 0$,

故ニ $\lambda\geqq\frac{1}{4}$.

コレ所要ノ限界ナリ.

26. 方程式 $x^2+y^2+gx+fy+c=0$ ガ次ノ三組ノ値 $x=3,\ y=0$; $x=0,\ y=2$; $x=-1,\ y=1$ ニテ適合セラルル爲ニハ g, f, c ノ値如何. [41. 東.高.工.]

解 方程式 $x^2+y^2+gx+fy+c=0$ ノ x, y ニ所題ノ値ヲ代入スレバ次ノ一組ノ方程式ヲ得.

$9+3g+c=0$ ……… (1)

$4+2f+c=0$ ……… (2)

$2-g+f+c=0$ ……… (3)

依リテ此ノ一組ノ聯立方程式ヲ解キテ所要ノ値ヲ求メ得ベシ, 卽チ (1) ヨリ (2) ヲ減ジ

$$5+3g-2f=0,$$

故ニ $f=\frac{5+3g}{2}$,

又 (2) ヨリ (3) ヲ減ジ $2+f+g=0$,

故ニ $f=-2-g$,

故ニ $\frac{5+3g}{2}=-2-g,$

或ハ $5g=-9,$

故ニ $g=-\frac{9}{5}.$

從ヒテ $f=-\frac{1}{5},\quad c=-\frac{18}{5}.$

27. 聯立方程式 $3x^2+5y^2=15,\ y=mx$ ニ適合スル x, y ノ一組ノ値ヲ α, β トシ, 又聯立方程式

$$3x^2+5y^2=15,\quad y=\frac{3}{5m}x$$

ニ適合スル x, y ノ一組ノ値ヲ γ, δ トスレバ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ ハ m ノ値ノ如何ニ係ラズ恒ニ相同ジ, 其ノ値ヲ求メヨ. [38. 海. 機.]

解 題意ニ依リテ次ノ二組ノ方程式ヲ得, 即チ

$$\left.\begin{array}{l}3\alpha^2+5\beta^2=15\\ \beta=5\alpha\end{array}\right\}\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1)$$

及ビ

$$\left.\begin{array}{l}3\gamma^2+5\delta^2=15\\ \delta=\frac{3}{5m}\gamma\end{array}\right\}\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2)$$

(1) ヨリ $\alpha^2=\frac{15}{5m^2+3},\quad \beta^2=\frac{15m^2}{5m^2+3},$

(2) ヨリ $\gamma^2=\frac{25m^2}{5m^2+3},\quad \delta^2=\frac{9}{5m^2+3}$

ヲ得, 故ニ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\frac{15+15m^2+25m^2+9}{5m^2+3}$

$$=\frac{8(5m^2+3)}{(5m^2+3)}=8.$$

故ニ題言ノ如シ.

28. 某電車ノ乘車券ハ一枚ノ代價3錢ナリシトキハ平均一日ノ發賣數 n 枚ナリシト云フ, 然ルニ一枚4錢トナシタルニ依リ發賣數 a 枚ヲ減少シタリ, 而シテ切符發賣數ノ減少ハ代價ノ增加ニ比例ストシテ該電氣鐵道會社ノ收入額ヲ最大ナラシメンニハ一枚ノ代價ヲ幾何ニスレバ可ナルカ. [38. 神. 高. 商.]

解 所要ノ代價ヲ x 錢トスレバ會社ノ收入額ハ $\left\{n-a\left(\frac{x-3}{4-3}\right)\right\}x$ 錢, 即チ $\{n-a(x-3)\}x$ 錢ナリ.

故ニ $\{n-a(x-3)\}x=y\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1)$

ト置キ, y ノ最大値ニ對スル x ノ値ヲ求ムレバ可ナリ. (1) ヲ變化スレバ

$$ax^2-(3a+n)x+y=0,$$

而シテ此ノ x ガ實數ナル爲ノ要件ハ

$$(3a+n)^2-4ay\geqq 0,$$

或ハ $\frac{(3a+n)^2}{4a}\geqq y,$

故ニ y ノ最大値ハ $\frac{(3a+n)^2}{4a},$

從ヒテ　$x=\dfrac{3a+n}{2a}$,

故ニ所要ノ代價ハ $\dfrac{2a+n}{2a}$ 錢ナリ.

29. 二數ノ和ハ恒ニ 8 ナルトキ其ノ平方ノ和ノ最小値ヲ求メヨ.　[35. 千.醫.專.]

解　$x+y=8$ ... ... (1)

故ニ　$x^2+y^2=m$ ... ... (2)

ト置キ, m ノ最小値ヲ求メントス.

(1) ヨリ　$y=8-x$,

y ノ此ノ値ヲ (2) ニ代入シテ

$$2x^2-16x+64-m=0,$$

x ガ實數ナル爲ニハ $64-2(64-m)\geqq 0$,

或ハ　$m\geqq 32$.

故ニ所要ノ最小値ハ　$m=32$.

30. 相加ヘテ 121 ナル二ツノ整數ニテ其ノ乘積ノ最大ナルモノハ如何.　[34. 海.機.]

解　二ツノ整數ヲ x, y トスレバ

$$xy=\frac{1}{4}\{(x+y)^2-(x-y)^2\}$$

ニシテ且 $x+y=121$ ナルユエ xy ノ最大ナルハ $(x-y)^2$ ノ最小ナルトキ, 換言スレバ x, y ノ

差ガ最小ナルトキニアリ, 故ニ 121 ヲ其ノ差ガ最小ナル二ツノ整數ニ分チ 61 ト 60 トヲ得ベシ, コレ所要ノ値ナリ.

31. 二ツノ正ノ實數ノ和ガ不變數ナルトキハ其ノ積ハ其ノ各ノ數ガ相等シキトキ, 最大ナルコトヲ證セヨ.

無稅ニテ輸入スル物品アリ, 今之ニ p 割ノ稅ヲ課スルノ結果其ノ輸入額ニ於テ $5p$ 割ヲ減ズルモノトスレバ最多額ノ稅金ヲ得シニハ幾割ノ稅ヲ課スベキカ.　[42. 大.高.工.]

解　$x+y=s$

トス. 故ニ　$(x+y)^2=s^2$,

或ハ　$4xy+(x-y)^2=s^2$.

故ニ　$4xy=s^2-(x-y)^2$,

故ニ $x-y=0$ ナルトキ, 即チ $x=y$ ナルトキ $4xy$, 從ヒテ xy ハ最大ナリ.

次ニ輸入物品ノ高ヲ x トスレバ p 割ノ稅ヲ課スルトキハ輸入高ハ

$$x-\frac{5p}{10}x=x\left(1-\frac{p}{2}\right),$$

從ヒテ稅金高ハ $\dfrac{p}{10}x\left(1-\dfrac{p}{2}\right)$ ナリ.

故ニ此ノ最大値ヲ求メンニハ

$$\frac{p}{10}x\left(1-\frac{p}{2}\right)=\frac{x}{20}p(2-p)$$

ナルユヱ $p(2-p)$

ノ最大値ヲ求ムレバ可ナリ.

然ルニ $p+2-p=2$

ナルユヱ $p=2-p$, 卽チ $p=1$

ナルトキ最大ナリ. 依リテ所要ノ税率ハ1割ナリ.

32. 若シ $k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$

ナレバ $$k=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

ナルコトヲ證セヨ. [33. 海. 兵.]

證 $$k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

ナルユヱ $$k^n=\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}=\frac{e^n}{f^n}$$

$$=\frac{pa^n}{pb^n}=\frac{qc^n}{qd^n}=\frac{re^n}{rf^n}$$

$$=\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n},$$

故ニ $$k=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

33. $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots\dots\dots\dots \frac{a_n}{b_n}$ ナル分數ノ中ニテ $\frac{a_1}{b_1}$ ヲ最小トナシ, $\frac{a_n}{b_n}$ ヲ最大トナストキハ

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+a_3+\dots\dots\dots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\dots\dots\dots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}$$

ナルコトヲ證セヨ. 但 $b_1, b_2, \dots\dots\dots, b_n$ ハ皆正數ナリ. [33. 三高.]

證 $\frac{a_1}{b_1}=k$ トスレバ

$$\frac{a_2}{b_2}>k,\ \frac{a_3}{b_3}>k,\ \dots\dots\dots\dots$$

ナルユヱ $a_1=kb_1$, $a_2>kb_2$, $a_3>kb_3$, $\dots\dots\dots\dots$

故ニ $a_1+a_2+\dots\dots+a_n>k(b_1+b_2+\dots\dots+b_n)$,

故ニ $$\frac{a_1+a_2+\dots\dots\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots\dots\dots+b_n}>k, \text{ 卽チ } \frac{a_1}{b_1}.$$

同様ニ $$\frac{a_1+a_2+\dots\dots\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots\dots\dots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}.$$

34. y ハ甲乙二數ノ和ニシテ甲ハ x ニ正比例シ乙ハ x ニ反比例スト云フ. 而シテ $x=2$ ナルトキハ $y=7$ ニシテ $x=1$ ナルトキハ $y=-1$ ナリト云フ. 然ルトキハ $y=5x-\frac{6}{x}$ ナルコトヲ證セヨ. [30. 東. 高. 工.]

解　甲ヲ mx, 乙ヲ $\frac{n}{x}$ トスレバ

$$y=mx+\frac{n}{x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

サテ $x=2$ ナルトキハ $y=7$ ナルユヱ (1) ヨリ

$$7=2m+\frac{n}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

又 $x=1$ ナルトキハ $y=-1$ ナルユヱ

$$-1=m+n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

(2), (3) ヨリ　$9=\frac{n}{2}-2n,$

故ニ　$-\frac{3n}{2}=9, \quad \therefore \ n=-6.$

從ヒテ　$m=-n-1=6-1=5,$

故ニ　$y=5x-\frac{6}{x}.$

35.　二個ノ皿ヲ有スル秤ニ於テ五個ノ相異ナリタル分銅ヲ有スルトキハ幾種ノ重サヲ計リ得ベキカ.　[36. 商船.]

解　所要ノ仕方ハ 5 個ノ分銅ヲ 1, 2, 3, 4, 5 個ヅツ取リタル組合ノ數ノ和ナルベシ.

故ニ　$5+10+10+5+1,$

即チ　31 種ナリ.

補

A. 2.　次ノ如ク解クコトヲ得可シ.

$$(x+y)^7-x^7-y^7 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

ニ於テ $x=0$ トスレバ此ノ式ハ 0 トナル. 故ニ x ハ (1) 式ノ一因數ナリ.

同様ニ y モ亦 (1) 式ノ一因數ナリ.

又 $x+y=0$ トスレバ (1) 式ハ 0 トナル. 故ニ $x+y$ ハ (1) 式ノ一因數ナリ.

次ニ (1) ニ於テ $x=\omega y$ [但 ω ハ 1 ノ立方根ノ虚數ナルモノ] トスレバ

$$\{(1+\omega)^7-\omega^7-1\}y^7=\{(-\omega^2)^7-\omega^7-1\}y^7$$
$$=(-\omega^2-\omega-1)y^7=0.$$

故ニ $x-\omega y$ ハ (1) 式ノ一因數ナリ.

同様ニ $x-\omega^2 y$ モ亦 (1) 式ノ一因數ナリ.

從ヒテ $(x-\omega y)(x-\omega^2 y)$, 即チ x^2+xy+y^2 ハ (1) 式ノ一因數ナリ. 依リテ

$$(x+y)^7-x^7-y^7$$
$$=xy(x+y)(x^2+xy+y^2)(Ax^2+Bxy+Ay^2),$$

今此ノ式ニ於テ $x=1$, $y=1$ ト置クトキハ

$$21=2\mathrm{A}+\mathrm{B},$$

又 $x=2,\ y=-1$ ト置クトキハ

$$21=5\mathrm{A}-2\mathrm{B},$$

依リテ $\qquad \mathrm{A}=7,\ \mathrm{B}=7.$

故ニ (1) 式 $=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$

トナル. 依リテ (1) 式ヲ x^2+xy+y^2 ニテ除シタル商ハ次ノ如シ.

$$7xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

B. 10. 次ノ如ク解クコトヲ得ベシ.

所題ノ三ツノ方程式ノ右邊ヲ何レモ

$$a+b+c-z$$

ナラシムレバ

$$a^3x+a(y+1)=b^3x+b(y+1)$$
$$=c^3x+c(y+1)$$

ヲ得. 今 x 及ビ $y+1$ ヲ未知數ト見做セバ是等ノ方程式ハ $\quad x=0,\ y+1=0$

ニテ適合セラルルコト明カナリ.

故ニ $\qquad x=0,\ \ y=-1,$

從ヒテ $\qquad z=a+b+c.$

C. 2. 次ノ如ク考フルモ可ナリ.

$$x^2+30x-1296=x^2+(54-24)x-54\times24$$

$$=(x+54)(x-24).$$

C. 3. 前ト同シク,次ノ如ク考フルモ可ナリ.

$$2x^2+7x-39=2x^2+(13-2\times3)x-13\times3$$
$$=(x-3)(2x+13).$$

C. 4. 次ノ如クスルモ可ナリ.

所題ノ式 $=b^2c-bc^2+c^2a-ca^2+ab(a-b)$

$$=c(b^2-a^2)+c^2(a-b)+ab(a-b)$$
$$=(a-b)(-bc-ac+c^2+ab)$$
$$=(a-b)\{-c(b-c)+a(b-c)\}$$
$$=(a-b)(b-c)(a-c)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

C. 5. 所題ノ式ハ $x,\ y,\ z$ ニ就キテ三次ノ輪換的對稱式ナリ. 依リテ

所題ノ式 $=\mathrm{L}(x+y+z)(yz+zx+xy),$

此ノ兩邊ノ xyz ノ係數ヲ比較シテ

$$3=3\mathrm{L},\quad 即チ\quad \mathrm{L}=1.$$

故ニ 所題ノ式 $=(x+y+z)(yz+zx+xy).$

C. 9. 所題ノ式ハ $b=c$ トスレバ 0 トナル.

故ニ $b-c$ ハ所題ノ式ノ一因數ナリ.

同樣ニシテ $c-a,\ a-b$ モ亦所題ノ式ノ因數ナリ.

而シテ所題ノ式ハ a,b,c ニ就キテ三次式ナリ.

故ニ　所題ノ式$=\mathrm{L}(b-c)(c-a)(a-b)$.

今此ノ兩邊ニ於ケル a^2b ノ係數ヲ比較シテ

$$\mathrm{L}=-1.$$

故ニ　所題ノ式$=-(b-c)(c-a)(a-b)$.

C. 10.　前題ト同樣ニ解キ得ベシ.

C. 22.　本文ノ解少シク不完全ナル所アルユヱ 48 頁末ヨリ三行目以下ヲ次ノ如ク改ム.

「ト置ケバ; P, Q ヲ同時ニ零ナラシムベキ x ノ値ハ P, Q ノ最大公約數ヲ零ニ等シト置キタル x ノ値ナリ.

然ルニ P, Q ノ最大公約數ハ Q ト

$$2\mathrm{P}-3\mathrm{Q}=11(3x^2-4x-2)$$

トノ最大公約數ニ同ジ.

今除法ニ依リテ $3x^2-4x-2$ ハ其ノ最大公約數ナルコトヲ知ル. 而シテ

$$3x^2-4x-2=\left(x-\frac{2+\sqrt{10}}{3}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{10}}{3}\right),$$

故ニ　所要ノ x ノ値ハ $\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}$ 及ビ $\dfrac{2-\sqrt{10}}{3}$ ナリ」.

注意　一般ニ次ノ定理アリ.

任意ノ二式 P 及ビ Q ノ或特別ノ文字, 例ヘバ x ニ於ケル最高次ノ公因數, 卽チ謂ハユル最大公約數ハ $p\mathrm{P}+q\mathrm{Q}$ 及ビ $r\mathrm{P}+s\mathrm{Q}$ ノ最大公約數ニ同ジ, 但コノ p, q, r, s ハ x ヲ含マザル正若シクハ負ノ任意ノ量ニシテ $sp-qr\neq 0$ ナリトス.

今之ヲ證明センニ, 先ヅ第一ニ P 及ビ Q ノ任意ノ公因數ハ又 $p\mathrm{P}+q\mathrm{Q}$ 及ビ $r\mathrm{P}+s\mathrm{Q}$ ノ一因數ナルコト明カナリ.

同樣ニ又 $p\mathrm{P}+q\mathrm{Q}$, 及ビ $r\mathrm{P}+s\mathrm{Q}$ ノ任意ノ公因數ハ $s(p\mathrm{P}+q\mathrm{Q})-q(r\mathrm{P}+s\mathrm{Q})$, 卽チ $(sp-qr)\mathrm{P}$ ノ一因數ナリ. 而シテ $sp-qr$ ハ x ヲ含マザルヲ以テ $p\mathrm{P}+q\mathrm{Q}$, 及ビ $r\mathrm{P}+s\mathrm{Q}$ ノ任意ノ公因數ハ P ノ一因數ナルベシ, 但 $sp-qr\neq 0$ トス.

同樣ニ $p\mathrm{P}+q\mathrm{Q}$, 及ビ $r\mathrm{P}+s\mathrm{Q}$ ノ任意ノ公因數ハ又 $r(p\mathrm{P}+q\mathrm{Q})-p(r\mathrm{P}+s\mathrm{Q})$, 卽チ $(rq-ps)\mathrm{Q}$ ノ一因數ナルベシ. 故ニ $sp-qr\neq 0$ ナルトキハ Q ノ一因數ナルベシ.

斯ノ如ク P 及ビ Q ノ各公因數ハ $p\mathrm{P}+q\mathrm{Q}$, 及ビ $r\mathrm{P}+s\mathrm{Q}$ ノ一因數ニシテ, 又 $sp-qr\neq 0$ ナレバ $p\mathrm{P}+q\mathrm{Q}$, 及ビ $r\mathrm{P}+s\mathrm{Q}$ ノ各公因數ハ P 及ビ Q ノ一因數ナルヲ以テ P 及ビ Q ノ最大公

約數ハ $sp-qr \neq 0$ ナレバ $pP+qQ$, 及ビ $rP+sQ$ ノ最大公約數ニ同ジキコトヲ知ル.

例ヘバ $2x^4+x^3-6x^2-2x+3$

及ビ $2x^4-3x^3+2x-3$

ノ最大公約數ヲ求メンニ, 此ノ二式ノ差ヲ取レバ $4x^3-6x^2-4x+6$ ... ... (1)

又與ヘラレタル二式ノ和ヲ取レバ

$$4x^4-2x^3-6x^2=2x^2(2x^2-x-3) \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

茲ニ $p=1, q=-1, r=1, s=1$ ナルヲ以テ $sp-qr \neq 0$. 依リテ所要ノ最大公約數ハ (1) ト (2) トノ最大公約數ナリ.

故ニ又 (1) ト $2x^2-x-3$ ... ... (3)

トノ最大公約數ナリ.

(3) ニ x ヲ乘ジテ (1) ヲ加フレバ

$$4x^3-2x^2-6x=2x(2x^2-x-3) \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

故ニ (3) ト (4) トノ最大公約數ハ所要ノ最大公約數ニシテ, 此ハ $2x^2-x-3$ ナルコト明カナリ.

D. 11. 所題ノ式

$$=\left(\frac{2}{x+1}+\frac{x-1}{x+3}\right)\left(\frac{4}{x+5}+\frac{x-5}{x+7}\right)$$

$$=\frac{2(x+3)+x^2-1}{(x+1)(x+3)}\times\frac{4(x+7)+x^2-25}{(x+5)(x+7)}$$

$$=\frac{(x+5)(x+7)}{(x+1)(x+3)}\times\frac{(x+1)(x+3)}{(x+5)(x+7)}=1.$$

D. 37. 次ノ如ク解スルモ亦可ナリ.

所題ノ方程式ヨリ筋違乘法 [Cross multiplication] ニ依リテ

$$\frac{x}{3\times7-4\times5}=\frac{y}{5\times2-7\times1}=\frac{z}{1\times4-2\times3},$$

或ハ
$$\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-2},$$

依リテ所題ノ分數式 $=\dfrac{1^2+3\times3^2+5\times(-2)^2}{2\times1^2+4\times3^2+7\times(-2)^2}$

$$=\frac{1+27+20}{2+36+28}$$

$$=\frac{48}{66}=\frac{8}{11}.$$

E. 3. 次ノ注意ヲ加フ.

注意 所題ノ方程式ヲ變化スルハ $x=a$ ガ一ツノ根ナルコトヲ先見セラルルヲ以テナリ.

E. 4. 次ノ如ク解スルモ亦可ナリ.

$x \neq 0$ ナルコト明カナルヲ以テ所題ノ方程式ノ兩邊ヲ ax ニテ除スレバ

$$x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a},$$

故ニ　　$x=a$, 或ハ $\frac{1}{a}$.

而シテ所題ノ方程式ハ二次ナルユヱ根ハ此ノ二ツニ限ル

E. 28. 次ノ如ク解スルモ亦可ナリ.

所題ノ方程式ニ於テ $\frac{x^2}{x+1}=y$

ト置ケバ所題ノ方程式ハ

$$y+\frac{1}{y}=1+\frac{1}{1}$$

トナル. 故ニ　$y=1$,

即チ　$\frac{x^2}{x+1}=1$,

或ハ　$x^2-x-1=0$.

之ヨリ　$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

E. 37. 或ハ次ノ如ク解スルモ亦可ナリ.

觀察ニ依リ $x+1=5$, 或ハ $x+4=-5$ ハ所題ノ方程式ニ適合ス. 故ニ 4, 及ビ -9 ハ其ノ二根ナリ.

今　$(x-4)(x+9)=x^2+5x-36=y$

ト置キテ所題ノ方程式, 即チ

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-1680=0$$

ヲ書キ換フレバ

$$(y+40)(y+42)-1680=0,$$

或ハ　$y^2+82y=0$,

y ニテ除シ　$y+82=0$,

即チ　$x^2+5x+46=0$.

之ヨリ　$x=\frac{-5\pm i\sqrt{159}}{2}$,

コレ他ノ二根ナリ.

E. 39. 次ノ如ク解スルモ亦可ナリ.

$$\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=y$$

ト置ケバ　$\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}=y^2+\frac{8}{3}$

ナルヲ以テ所題ノ方程式ハ

$$y^2+\frac{8}{3}=\frac{10}{3}y,$$

或ハ　$3y^2-10y+8=0$,

之ヨリ　$y=2$, 或ハ $\frac{4}{3}$.

依リテ　$\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2$ ……… (1)

或ハ　$\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3}$ ……… (2)

故ニ (1) ヨリ　$x=3\pm\sqrt{21}$.

(2) ヨリ $x=6$, 或ハ -2.

E. 45. 所題ノ方程式ハ次ノ如クナルコトヲ注意スベシ.

$$\frac{x+2a}{(x-3a)(x-4a)}+\frac{x+3a}{(x-2a)(x-4a)}$$
$$+\frac{x+4a}{(x-2a)(x-3a)}=\frac{29}{24a}.$$

E. 46. (1) ノ終ニ次ノ注意ヲ加フ.

注意 茲ニ得タル虚根ハ通例 ω, ω^2 ニテ表ハサル.

E. 55. 次ノ如ク解スルモ亦可ナリ.

$y=vx$ トスレバ

(1) ヨリ $x^2(1+2v)=16$ … … … (3)

(2) ヨリ $x^2v(1+2v)=24$ … … … (4)

(4) ヲ (3) ニテ除スレバ $v=\frac{3}{2}$.

v ノ此ノ値ヲ (3) ニ代入シ

$$x^2=4,\quad \therefore\ x=\pm 2.$$

從ヒテ $y=\pm 3$.

注意 x, y ヲ含ム二次方程式ニテ本解ノ如ク解キ得ルモノ夥多アレドモ成ルベク v ヲ用ヒズシテ解クヲ可トス. v ヲ用フルハ止ムヲ得ザ

ル場合ニ限ルト知ルベシ.

E. 61. 別解 所題ノ方程式ニ於テ $x=0$, $y=0$ ナル一組ノ解答アルコト明カナリ.

依リテ今其ノ他ノ解答ヲ求メンガ爲ニ $x\neq 0$, 及ビ $y\neq 0$ トシテ (1) ヨリ

$$\frac{y^2}{x}=a-1 \quad \dots\ \dots\ \dots\ \dots \quad (3)$$

(2) ヨリ $\frac{x^2}{y}=b-1$ … … … … (4)

(3), (4) ヲ邊々相乘ズレバ

$$xy=(a-1)(b-1) \quad \dots\ \dots\ \dots\ \dots \quad (5)$$

又邊々相除スレバ

$$\frac{y}{x}=\sqrt[3]{\frac{a-1}{b-1}} \quad \dots\ \dots\ \dots\ \dots \quad (6)$$

(5), (6) ヲ邊々相乘シ, 又相除スレバ

$$y^2=\sqrt[3]{(a-1)^4(b-1)^2},$$

及ビ $x^2=\sqrt[3]{(a-1)^2(b-1)^4}$,

故ニ $x=\pm\sqrt[3]{(a-1)(b-1)^2}$,

$$y=\pm\sqrt[3]{(a-1)^2(b-1)},$$

而シテ此ノ複符號ノ中, 負ヲ取レバ (3), (4) ニ適合セズ. 依リテ所要ノ x, y ノ値ハ

$$x=0,\quad y=0;$$

$x=\sqrt[3]{(a-1)(b-1)^2},\quad y=\sqrt[3]{(a-1)^2(b-1)}.$

注意 (6) ノ虚根ニ就キテハ前解ト同様ナリ.

E. 69. 次ノ如ク解スルトキハ一層佳ナリ.

(1) ヨリ $5x+2y=50$ ... ... (3)

(2) ヨリ $5x+2y=\frac{5}{6}xy$ ... ... (4)

(3) ヲ (4) ニ代入シテ $xy=60$,

依リテ $5x.2y=600$ ... ... (5)

故ニ (3) 及ビ (5) ヨリ $5x$ 及ビ $2y$ ハ方程式

$$X^2-50X+600=0$$

ノ根ナリ.

然ルニ $X=20$, 或ハ 30.

之ヨリ $5x=20$, 或ハ 30,

及ビ $2y=30$, 或ハ 20.

故ニ x, y ノ値ハ次ノ如シ.

$$x=4,\ y=15;\ x=6,\ y=10.$$

E. 76. 別解 所題ノ方程式ハ $x=y=z=0$ ニテ適合セラルルコト明カナリ.

今ソノ他ノ解答ヲ求メンガ為ニ x, y, z ヲ何レモ零ナラズトシテ所題ノ方程式ニソレゾレ x, y, z ヲ乘ズレバ $xyz=xy-2zx$ ... ... (4)

$xyz=6yz-xy$ ... ... (5)

$xyz=2x-yz$ ... ... (6)

(4), (5) ヲ邊々相加フレバ

$$2xyz=6yz-2zx,$$

之ヨリ (6) ノ 2 倍ヲ減ズレバ

$$8yz-4zx=0,$$

故ニ $2y-x=0$,

故ニ $x=2y$ ... ... (7)

之ヲ (3) ニ代入シテ $y=\frac{1}{2}$.

之ヲ (7) ニ代入スレバ $x=1$.

之ヲ (2) ニ代入シテ $z=\frac{1}{5}$.

故ニ x, y, z ノ値ハ $x=y=z=0$;

$$x=1,\ y=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{5}.$$

E. 77. 本題ハ次ノ如ク解スル方ガ一層佳ナリ.

所題ノ各方程式ノ兩邊ニ 1 ヲ加ヘテ左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$(x+1)(y+1)=20$ ... ... (4)

$(y+1)(z+1)=30$ ... ... (5)

$$(z+1)(x+1)=24 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

(4), (5), (6) ヲ邊々相乘シテ平方ニ開ケバ

$$(x+1)(y+1)(z+1)=\pm 120 \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

(7) ヲ別々ニ (5), (6), (4) ニテ除シソレゾレ

$$x+1=\pm 4,$$

$$y+1=\pm 5,$$

$$z+1=\pm 6$$

ヲ得. 故ニ　$x=3,\ y=4,\ z=5;$

或ハ　$x=-5,\ y=-6,\ z=-7.$

I. 14. 次ノ如ク解スルモ亦可ナリ.

筋違乘法ニ依リテ

$$\frac{x}{5\times 12-(-13)\times(-7)}=\frac{y}{(-7)\times 11-12\times 3}$$

$$=\frac{z}{3\times(-13)-11\times 5},$$

即チ　$$\frac{x}{-31}=\frac{y}{-113}=\frac{z}{-94},$$

故ニ　$x:y:z=31:113:94.$

K. 15. 本題ハ次ノ如ク解スルモ亦可ナリ.

10 人ノ中ヨリ 5 人ヲ選ブ仕方ハ ${}_{10}C_5$ 通リニシテ, 特別ノ二人ガ同時ニ選ニ入ル仕方ハ ${}_8C_3$ 通リナリ. 故ニ所要ノ數ハ ${}_{10}C_5-{}_8C_3=196$, 即チ

196 通リナリ.

M. 17. 本題ヲ對數ヲ用ヒズシテ解クトキハ次ノ如シ.

$$(1+x)^4=\frac{70192}{60000}=1.1698\dot{6},$$

故ニ　$(1+x)^2=\sqrt{1.1698\dot{6}}=1.081096\ldots\ldots\ldots$

故ニ　$1+x=\sqrt{1.081096}=1.039\ldots\ldots\ldots$

$$\fallingdotseq 1.04. \quad \therefore\ x=0.04.$$

即チ毎年 100 人ニ付キ約 4 人ノ増加ナリ.

N. 4. 別解　第一ノ式ノ y ノ値ヲ第二ノ式ニ代入スレバ　$z=a-a^2\Big/\left(a-\dfrac{a^2}{x}\right)$

$$=a-\frac{ax}{x-a}=\frac{-a^2}{x-a},$$

故ニ　$x-a=-\dfrac{a^2}{z}$, 即チ $x=a-\dfrac{a^2}{z}.$

N. 8. 別解　(1), (2), (3) ヲ邊々相加フレバ

$$15x+5y-5z=25,$$

即チ　$$3x+y-z=5 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(1), (2) ヲ邊々相減ズレバ

$$2x-3y+3z=7 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

(4) ニ 3 ヲ乘シ, (5) ニ加フレバ

$$11x=22,$$

$$\therefore\ x=2.$$

是ニ依リテ (4) ヨリ $y-z=-1$ …… (6)

又 (1), (2) ヲ邊々相加ヘテ

$$8x+y+z=23,$$

故ニ $y+z=7$ …… (7)

(6), (7) ヨリ $y=3,\ z=4.$

N. 14. 別解 (I) 移項スレバ

$$x-\sqrt{x}-1=0,$$

之ヨリ $\sqrt{x}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2},$

而シテ $\sqrt{x}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

ハ右邊ガ負ナルユヱ之ヲ捨ツレバ

$$\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \text{故ニ}\ x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

明治四十三年三月廿八日印刷
明治四十三年三月卅一日發行

【定價金五拾五錢】
（試驗問題代數學）

著作者 長澤龜之助
東京市小石川區小日向臺町三丁目五十三番地

發行者 川合晋
東京市京橋區尾張町二丁目二十六番地

印刷者 飯田三千太郎
東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

印刷所 株式會社秀英舍第一工場
東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

發行所 東海堂書店
東京市京橋區尾張町二丁目廿六番地
振替口座八六七電話新橋二〇一五及三四三五