佛蘭西國學士院會員　ポアンカレー著
東京高等師範學校教授　理學士　林鶴一譯

科學と臆說

東京　大倉書店發行

原著者緒論

皮相の見を以てせば、科學的眞理は確乎として疑の及ぶ限りにあらず、科學の論理は動かすべからざるものなり、若し學者にして誤ることあらば、そは其學者が法則を辯知せざりしが爲めなり、數理上の眞理は誤失なき推理の連鎖に由りて、少數明白の命題より導き來るものにして、啻に吾人人類のみならず、又併せて自然其物にも存するなり、此等の命題は造物者を緊縛し、而して唯比較的少數なる若干の解法の中より選擇せられたりと言ふ可し、此故に造物者が如何なる選擇をなせしやを知らんが爲めには、二三の實驗を行ふを以て足れりとす、一々の實驗よりして、幾多の結論は、數學的演繹の系列に由りて出で來るべし、而して其結論は各人をして宇宙の一隅を窺はしむ。

上に擧げたるは即ち一般世人の、殊に初めて物理學の觀念を得たる中學生等の、科學上の確實性の本原となすものなり、これ即ち彼等がとりて實驗及び數學の本分となす所のものなり、今を距ること百年前、實驗より仰ぎし出來得る丈け僅少の材料を以て、一つの世界を構造せんと夢想したる許多の學者の解せし所も亦これに同じかりき。

人若し少しく思慮を回らさば、必ず臆說に支へられたる箇處を看出すべし、數學者はそのまゝこゝを過ぎ行く能はず、實驗者も亦然り。こゝに於て、人はこれ等一切の構造の基礎堅牢なりやを考究し、而して往々一噓の風に顚覆すべしと妄斷す、此種の懷疑は是れ亦皮相の見に過ぎず、悉く疑ひ又は悉く信ずるは、等しく都合よき二個の解釋なり、兩つながら吾人をして省思の羈絆を脫せしむ。

されば、吾人は簡單なる宣告を陳述するを止めて、臆說の本質を鄭寧に吟味するを要す、吾人は此事の啻に必要なるのみならず、又多くの場合に於て正當なるを認むるなり。臆說に許多の種類あり、其一は檢定し得べく、一度實驗に徵して驗證せらるる以上は、含蓄ある眞理と成るべし、又他の一種は、吾人を誤謬に陷らしむることなく、吾人の思想を定むるに當りて有用なるを得べく、又倘他の一種は唯外觀上のみの臆說にして、結局定義又は變裝の規約に歸するものなり。

此最後の臆說は、殊に數學及び之と關係を有する科學に於て遭遇する所のものなり。これ等の科學は正さしくその嚴密をばこの種の臆說に負へり。この規約は、その範圍内にては何等の障碍をも認むることなき、吾人の精神の自由活動の結果と謂ふべし、蓋し此場合吾人の精神は、自ら規定するが故に能く肯定することを得べければなり、然れども吾人は、この規定の、我等の科學に行はれ、これなくては科學は存在する能はざれども、自然界には此の規定の行はるゝとなきを了知すべきなり。さらばこの規定は隨意の者なりやと云へば決して然らず、若し之を然りとせば、此規定は何等の効果なきものとなるべし。經驗は吾人に選擇の自由を許すも、倘は吾人を助けて最も便宜なる道を識別せしめ、以て吾人を嚮導すべし、故に吾人の規定は恰も專制なれども聰明なる君主が國會に諮詢する命令と一般なり。

中には科學の或る基本原理中に認めらるる自由規約のこの特性に迷はさる

るより、法外の概括を望み、而して同時に自由が随意にあらざることを忘却し、或の爲めに名目論と稱せらるる所のものに達し、かくて學者が或は其定義のために欺かるることなきや、或は學者の發見せりと信ぜる世界は、單に其の一時の出來心の所造に過ぎざるなきかと問ふに至る者あらん。　この條件の下には、科學はなほ正確なりとせんも、而かも其の力をば奪はるるを免れざるべし。

若し斯の如くんば、科學は無能となるべし。　抑も吾人は日常、科學が吾人の眼前に働きをなせるを目撃す、若し科學が我等をして、實在に關し何物かを知らしむることなくんば、こはあり得べからざるなり。　されど、科學が到達し得る所は、素朴獨斷論者の考ふるが如く、事物其物にはあらず、或は單に事物の間に存する關係なり、この關係の外に認知し得べき實在はあらざるなり。

是れ即ち吾人の到達せし結論なり、されど此結論を得る爲めには、吾人は算術及び幾何學より、力學及び實驗的物理學に至るまでの諸科學を歷經するを要すべし。

抑も數學推理の本質は如何、或は通常人の信ずる如く實に演繹的なるが、更に深く分析すれば、我等は數學の推理の決して演繹的にあらず、歸納的推理のある程度まで之に與れることと、又之に與れるが爲めに或の推理が有功なることを知るべし。　然れども之に拘はらず、この推理は依然として其絕對的嚴密の特性を保存す、是れ吾人が先づ明かにせんとする所なり。

我等にして數學が其の探究者の手中に置ける此道具の一つを熟知せば、次ぎには更に他の基本觀念、即ち數學的量の觀念を分析するを要す。　吾人はこの觀念を自然界に看出すや、將た吾人自ら之を導出せるや、若し又後の場合をとる時は吾人は全然の虛僞に陷るの危きを賭せるにあらざるか、吾人の粗朴なる感覺の憑據と、數學者が量と名づくる極めて複雜にして細微なる概念とを比較すれば、吾人は兩者の區別を認めざるを得ず、吾人が一切を其中に收容せしめんと欲せる此の如き設計(量の概念の構成)は、即ち吾人の作りし所なり、唯吾人は輕卒に之を作りしにあらず、適切に之を言へば、吾人は之を尺度の上に作りしなり、吾人がここに事實をば、其根本的の性質を變ずることなくして收容し得るは、此を以てなり。

又吾人が世上に流布せしめたる他の一設計は、即ち空間なり、幾何學の第一原理は何處より來れるか、又は論理に由りて吾人に交付せられたるか、ロバチェヴスキー Lowatchevski は非ユークリッド幾何學を創設して、其の然らざるを證せり。空間は吾人の感覺に由りて顯はさるるか、否然らず、何となれば吾人の感覺が吾人に示し得べき空間は、幾何學上の空間とは絕對的に異なればなり、幾何學は經驗より導來せらるるや、一層深く撿索すれば、吾人はその然らざるを證すべし、故に吾人はこの第一原理が規約に過ぎざることを斷言すべし、されどこの規約は隨意にはあらず、而して之を他の一社會(余が非ユークリッド社會と名づくる者にして余が想像せんと欲するもの)に轉送すれば、吾人は爲めに之を他の規約に變形することに誘致せらるべし。

力學に於ても、吾人は同樣の終結に達すべし、この科學の原理は幾何學よりも一層直接に實驗に基づけど、而かも尙ほ幾何學公準の規約的特性の幾分を有せることを認むべし。此迄は名目論の勝利に歸せんとせり、されど吾人はここに力學に於て本來物的科學と呼ばるべきものに來れり、是に於て舞臺は一變せり、吾人は他種の臆說に出會ひ、其力の大なることを認めんとす、然れども疑ひもなく、最初には、理論は脆弱の觀あり、而して又物的科學の歷史は、此等の理論が一時的なることを證す、されど此等は全部滅亡するにあらず、その何れについても、幾分かは殘存する所あり、この幾分かは即ち判別を求むべきものなり、何となれば眞正の實在は專ら此等の中に存すればなり。

物的科學の方法は歸納法の上に置かる、この論法は吾人をして、一つの現象は、初めて之を發生せしめたる狀況が再び顯はるる時には、又反復せらるべきことを期待せしむ。若しこれ等總ての狀況が皆同時に再現し得らるるならば、この原理は忌憚なく適用し得られんも、其は決して信じ得べからず、これ等の狀況の中二三は常に欲如すべし。吾人は絕對的に狀況をば重要ならずと信ずるや、明かに然らず。歸納法は眞に近かるべし、而かも嚴密に確實なるにあらず、是に由て蓋然性の槪念は顯著なる任務を物的科學に於て演ずるなり、されど「確からしさ」の計算は、單に一つの骨牌遊戲の嚮導の如きものにあらず、吾人は深く其原理を探究するを要するなり、但しこれに關しては、余は甚だ不完全なる結果を揭ぐ

るに過ぎず、蓋し吾人をして蓋然的眞理を辨知せしむる漠然たる吾人の本能は、殆ど其の分析を拒めばなり。

物理學者が如何なる條件の下に焦慮研究したるかを說明したる後に、余は書籍に徵して其の研究の實際狀態を示すべき必要あることを信じたり、余が光學史及び電氣學史中より二三の例を擧げしは之が爲めなり、吾人はフレネル Fresnel の觀念、マクスウェル Maxwell の觀念は那邊より出づるか、アンペール Ampère 其他電力學の創立者が、無意識に如何なる臆說をなせしかを見んとす。

飜譯者序言

科學は萬能にあらずとするも、その力の偉大なるは何人も之を認めざるべからず、科學とは何ものなるか、その基礎は如何、その研究の方法は如何、現に得られたる研究の結果は如何、將來は如何なる方面に發達するか、此等の疑問は、今の世の修養ある人士が、輕忽に附すべからざるものにあらざるなきか。

科學は臆說の上に建設せらる、果して然らば何故に科學は信ずべきか、如何樣に科學は信ずべきか、科學的眞理とは抑も如何なるものか、臆說從つて科學の眞價値は如何、之に對する科學者の態度は如何、此等の疑問は科學者、哲學者、敎育者は勿論、如何なる階級の人士と雖も、解かざるべからざる所にあらざるなきか。

佛國學士院會員ポアンカレー君 M.H. Poincaré は、現代に於ける第一流の科學者にして科學哲學者なり、本書は西曆一千九百二年に同氏が、世

人に科學と臆說との關係を知らしめんが爲に、之を通俗的に說述したる名著にして、獨英西伊の四國語にも飜譯せられたるものなり。今著者及び出版者の許諾を經て我が邦語に飜譯するものは、亦我が學界の爲めに多少の利益あらんを思ひてなり。

本書を出版するに就きては、理學士某君及び文學士安倍能成君の甚大なる補助を要したり、余は此處に特記して謝意を表明す。

明治四十二年九月十一日

目次

科學と臆説

ポアンカレー著
林　鶴一譯

第一篇　數と量

第一章　數學的推理の性質

第一節

數學の可能は解く可からざる矛盾なるが如き觀あり、若しこの科學が唯外觀のみ演繹的のものならんには、何人も夢にだに疑を置かざる所の其完全なる嚴密は果して何處より來るべきか。若し之に反して、この科學の述ぶる總ての命題が、形式論理學の法則に由りて、一より他の抽出せられ居るものならんには、數學は如何にして、莫大なる飜覆法に歸著せざるか、吾人は、三段論法に由りて、更に何等根本的に新たなるものを了得することなし、而して萬事が皆同一の原理より出づべきものならば、萬事は皆この原理に歸らしむるを得べきなり、されば、多くの卷册を滿たせるこれ等總ての定理の陳述は、皆迂曲なる法式にて、單にAは

Aなりと云へるに過ぎざるを認定すべきか。

疑ひもなく、我等はこれ等總ての推理の源泉たる公理に溯るを得べし、若し其公理を矛盾の原理に歸せしむるを得ずとなし、又數學的必然性に關與し得べからざる實驗上の事實をも亦同じくこゝに認むることを欲せずとするも、しかも我等は尙其推理法をば先天的綜合的判斷の中に列するの一方法を保有す、然れどもこは困難を解決したるにあらずして單に之に命名したるのみ、而して綜合的判斷の本質が吾人に對して何等の神祕にあらずとも、矛盾は消滅することなく、唯退却をなしたるに過ぎざるべし。三段的推論は依然として與件に何事をも添加する能力なく、其與件は二三の公理に歸し、而して終結に於ては、更に他の何事をも看出すこと能はざるべし。

何れの定理も、新公理が其證明に參加することなくば決して新定理たることを得ざるべし、推理は、直覺より借り來りたる直接に明白なる眞理の外には、吾人に與ふる所なし、ろは介在寄食者たるに過ぎず、こゝに於てか我等は、三段論法機關は啻專ら吾人の借用物の態を變ずるの用に供せられたることなきやを、問ふ。

べき場合に在ることなきや。

若し夫れ吾人にして數學の一書を繙かば、此矛盾は一層甚しく吾人を驚かすべし、著者は每頁に旣知の命題を概括せんとする企望を述ぶるならん、さらば數學的方法は、果して能く特殊より一般に進むや、若し然りとせば、其方法は如何にして演繹的と稱するを得べきや。

然るに、若し數の學問が純然解析的にして、卽ち少數の綜合的判斷より解析的に出で來ることを得るとせば、十分に有力なる智能は、一見直ちにろの總ての眞理を發見し得べきが如し、余はこゝに現在に於ては、之を何と言ふべきかを知らざれども、他日此等の眞理を釋明するが爲めに、尋常の智力を以てしても、直ちに此等の眞理が明瞭となる程簡單なる言語の發明せられんこと、敢て望みなきにあらざるべしと信ず。

若し我等にしてこれ等の論結を認定するを拒まば、數學の推理が本來一種の創造力を有し、隨て其推理が三段論法と相異なることを特許するを要すべし。

又其相違は深奧ならざるべからず、例へば、吾人は同一の運算を相等しき二數

に行へば、其結果は同一なりと云ふが如き法則を屢々用ふるとも、此秘奥の鎖鑰を打ち破ることなからん。

これ等總ての推理法式は、本來の三段論法に歸すると否とに拘はらず、皆解析的の特性を保存し、而かも又之を保存するに由りて薄弱なり。

第二節

ここに逃べんとする議論は古き者なり、ライブニッツ Leibnitz は既に2と2とは4をなすの理を證明することを求めたり、今こゝに少しく其證明法を吟味せん。

余は、數1の定義及び1を或る所設の數 x に加ふることを示す式 $x+1$ の定義は、已に知られたるものと假定す。此等の定義は其の如何なるものたるを問はず、推理の連絡中には交はらざるものとす。

次に余は2、3及び4なる數の定義を次の方程式にて示す、

(1)　$1+1=2$.　(2)　$2+1=3$.　(3)　$3+1=4$.

同樣に、$x+2$ の演算は次の關係により定義す、

(4)　$x+2=(x+1)+1$.

斯くて吾人は次式を得

$2+2=(2+1)+1$,　（定義 4）

$(2+1)+1=3+1$,　（定義 2）

$3+1=4$.　（定義 3）

是に由りて

$2+2=4$.　（結論）

この推理が純然たる解析的にあらざることは、素より否認すること能はざるべし、されど、假令如何なる數學者に問ふとも、是は本來の證明法にあらずして撿定法なりと答へん、我等は純然たる規約的定義の一個と別の一個とを、彼此相近接せしむることのみを勉め、而して其合同を確めたり、而して更に何等の新なるものを了得することなかりき、撿定と眞正の證明とは正しく相異なれり、何となれば撿定は純然たる解析にして且つ何物をも齎らすことなければなり、實にこの法は結實なし、何となれば、其結論は前提を他語に飜譯したるものに過ぎざればなり、之に反して眞正の證明は結實あり、何物かを我等に與ふ、何となれば、其

結論は前提よりも一層廣き意味を具ふればなり。

方程式2+2＝4は、特殊的なるを以て撿定されたるに過ぎず、凡そ數學に於ける總ての特殊の陳述は、常に斯の如くに撿定し得らるゝ者なり、されど若し數學が結局かゝる撿定の系列に歸すべきものならんには、其は一科學たる資格を失ふことゝなるべし、蓋し、碁子を玩ぶ者が偶ま一回の勝を制したりとて、夫にて一の科學を發明せしにはあらず、一般性の科學の外には科學は存在せざればなり。

精確なる科學の目的とする所は、正に吾人をこの直接撿定法の範圍より脫せしむるにありと言ふも、敢て誣言にあらざるべし。

第三節

今こゝに著作に從へる數學者を目前に置き、而して其處置について攻擊を試みんとす、但し此事は容易ならず、徒らに其著書を開き而して手當り次第に其證明を分析するが如き事にては、決して十分ならず。

吾人は先づ、公準の任務即ち空間の概念の本質及び其起原に關する至難の問題について疑問の紛雜して解き難き幾何學をば除外すべし、又同樣の理由により、吾人は微積分學に立入ることをなさず、吾人は常に極めて純正を保てる所の數學思想即ち數の理論たる算術に就て、其攻擊を試みんと欲す、されど尙ほ玆に選擇の必要あり、數の理論の高等なる部分に於ては、初等の數學的概念は既に甚大なる變化を受けて、之を解析することは困難と成れり。

されば、吾人が所要の說明を看出すべき見込あるは、素より算術の發端にあり、然るに在來の教科書の作者が、確實と嚴密との最も乏しきを示したるは、最も初步の定理の證明中にあることは確かなる事實なり、されどこの事を以て其人の過失とは認むべからず、彼等は必要に服從せしのみ、蓋し初學者は眞正の數學的嚴密につきて準備を有せず、彼等は之によりては、無益にして煩雜なる細密の事項の外に、何物をも見ざりしならん、彼等にして此等を忽ちに一層精確になさんと欲すれば、徒に時を費すのみにて効なし、彼等は科學の創設者が徐々に經過せし行路をば、一擧に急進するの要ありしなり。

この完全なる嚴密に慣るゝがためには、何故に長き準備を必要とするか、此等の性質は、總ての健全なる智能には天然に具はれるらしきものにあらずや、是れ

即ち攻究に價すべき論理學的並びに心理學的問題なり。

されど、吾人は此問題に止まることをなさざるべし、蓋しこの問題は吾人の目的と相關せざればなり、余の支持せんと欲する總ては、最も初步の定理の證明を覺寧に反覆せんとするにあり、初學者を倦ましめざるが爲めにろのまゝになり居る粗雜の形式にあらずして、熟練なる數學者を滿足せしむべき形式をば、此等の證明の方法に附與せんとすと云ふに盡く。

加法の定義

余は豫め $x+1$ なる演算は定義を下されたるものと假定す、この演算は所設の數 x に 1 なる數を加ふるにあり、この定義は如何樣に述べらるゝとも、推理の連絡に何等の影響をも及ぼすことなし。

今こゝに $x+a$ なる演算を定義せんとす、この演算は所設の數 x に a なる數を加ふるにあり。

さて次の演算の定義を既知のものと假定せん、

$$x+(a-1)$$

然るときは演算 $x+a$ の定義は次の方程式にて與へらるべし、

$$x+a=[x+(a-1)]+1. \tag{1}$$

されば、$x+(a-1)$ の何たるかを知るときは、$x+a$ の何たるかを知るを得べし、而して余は、豫め $x+1$ の何たるかを知れりと假定せるを以て、逐次法に依り $x+2$, $x+3$, 等の演算の定義を作ることを得べし。

この定義は少しく留意を促す價値あり、この定義は純正論理的なる定義と區別すべき特質を具へ、如何にも方程式 (1) は無數の特殊の定義を包含せり、而かも其各の定義は自らに先き立てるものを知る時には、唯一つの意味を有するに過ぎず。

加法の性質

結合定則。　余は次のことを言明す、

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

如何にも此定理は $c=1$ につきて眞なり、何となればこのときには此等式は

$$a+(b+1)=(a+b)+1.$$

となりて唯記號の相違のみにて x の代りに a を書き、a の代りに $b+1$ を書きたれば、余が上に加法の定義として述べたる等式(1)に外ならず。

今此定理が $c=\gamma$ につきて眞なりと假定し、$c=\gamma+1$ につきても亦眞なることを證明せん。假定によりて

$$(a+b)+\gamma=a+(b+\gamma).$$

然らば明に

$$[(a+b)+\gamma]+1=[a+(b+\gamma)]+1.$$

故に之より定義(1)に基きて［即ち $a+(b+1)=(a+b)+1$ を度々重ね用ゐて］

$$(a+b)+(\gamma+1)=a+(b+\gamma+1)=a+[b+(\gamma+1)].$$

是れ純然たる解析的演繹法の系列に由りて定理が $\gamma+1$ につき眞なることを示すものなり。

既に $c=1$ につき眞なることを知らば、又逐次に $c=2$, $c=3$, 等につきても眞なることを見るべし。

交換定則。第一、余は次のことを明す、

$$a+1=1+a.$$

此定理は $a=1$ につきて明かに眞なり、次に純然たる解析的推理に由りて、其定理が $a=\gamma$ につきて眞ならば、$a=\gamma+1$ につきても亦眞なることを確定し得べし、然るに其定理は $a=1$ につきて眞なり、故に $a=2$, $a=3$ 等につきても亦然り、即ち、上述の命題は亦逐次法に由りて證明せらる。

第二、余は又次式あることを言明す、

$$a+b=b+a.$$

此定理は既に $b=1$ につきて證明せられたり、若し其定理が $b=\beta$ につきて眞ならば、$b=\beta+1$ につきても亦眞なることを解析的に確定し得べし。

故に此命題も亦逐次法に依りて證明せらる。

乘法の定義

吾人は乘法の定義を次の等式にて表す、

$$a\times1=a.$$

$$a\times b=[a\times(b-1)]+a. \qquad (2)$$

$2\times3=[2\times(3-1)]+2$

方程式(2)は方程式(1)に於けるが如く、無數の定義を包容せり、$a\times1$の定義によりて逐次に$a\times2$、$a\times3$、等の定義を得せしむるものなり。

乘法の性質

配分定則。余は次式あることを言明す、

$$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c).$$

此等式は$c=1$につきて眞なることを解析的に確定し得べし、次に若し此定理が$c=\gamma$につきて眞なるときは、$c=\gamma+1$につきても亦然り。

依りて此命題も亦尙ほ逐次法に由りて證明せらる。

交換定則。第一、余は次式ありと言ふ、

$$a\times1=1\times a.$$

此定理は$a=1$につきては明白なり、若し此の定理が$a=\alpha$につきて眞ならば、$a=\alpha+1$につきても亦眞なることを解析的に確定し得べし。

第二、余は次式ありと言ふ、

$$a\times b=b\times a.$$

此定理は$b=1$につきては既に證明せられたり、而して若し此定理が$b=\beta$につきて眞ならば、$b=\beta+1$につきて亦眞なることを解析的に確定し得べし。

第四節

余はこの單調なる推理の序列をば、是にて中止すべし、されどこの推理の單調なるは、吾人が常に絕へず遭遇する手順をば更に明かにするものなり。

この手順は即ち逐次法による證明なり、先づ$n=1$につきて一つの定理を證明し、次に若し其定理が$n-1$につきて眞ならば、nにつきても眞なることを證明す、之によりて其定理は、總ての整數につきて同樣に眞なることを論結す。

吾人は前に、加法及び乘法の法則を證明するため、如何に此手順の用ゐられしかを見たり、この手順は簡單なる三段論法よりも更に多く、種々なる結合に用ゐらるゝ變形の道具たり、然るにこは尙ほ純然たる解析的の一道具にして、何等の新たなる者を吾人に示すの能力なし。故に若し數學が何等か之と異なれる別の手順を有せずば、其發展は頓に阻止せらるゝ筈なり、されど數學は、尙ほこの手順即ち逐次推理法に由りて、順次新進路を見出し、爲め

に依然として前進を繼續し得べし、

若し能く細密に注視せば、吾人は吾人の數學中に、この推理の方法をば、或は上に述べしが如く簡單なる形式、或は多少變更せられたる形式に於て、每歩に之を看出すべし、是れ即ち特別に數學上の推理と云はるべきものなり、吾人は更に精細に之を吟味するを要す。

第五節

逐次法による推理の根本の特性は、其が無數の三段論法をば、單一の一公式中に、即ちいはゞ凝固せしめて、包含せしむるに在り。

この事を最も善く理會し得せしめんがため、余は恰も瀑布の如く(若しかゝる形容を用ふるを許さるれば)次ぎ〳〵に列れる、これ等の三段論法を逐次に陳述せんと欲す。

ろは無論假設的三段論法なり。

定理は數 1 につきて眞なり、

さて、若し定理が 1 につきて眞ならば、ろは 2 につきても眞なり、

故に定理は 2 につきて眞なり、

さて、若し定理が 2 につきて眞ならば、ろは 3 につきても眞なり、

故に定理は 3 につきて眞なり、

他は之に準す。

是に由りて觀れば、各三段論法の終結は次の者に於ける大前提の用をなす、且總ての三段論法の小前提は、單一の公式に誘致せらるゝことを得べし、即ち若し定理が $n-1$ につきて眞ならば、n につきても眞なりと。

故に逐次法による推理に於ては、第一三段論法の大前提、及び特殊の場合として總ての小前提を包含する一般公式を述ぶるを以て足れりとす。

依りて、この果てしなき三段論法の系列も、僅に數行の文句に縮約せらるべし。

さて、今一般に一定理の特段なる結論が、既に余の説明せしが如く、何故に純然たる解析的手段に由りて確めらるゝかを了解するは容易なり。

若し、吾人の定理が總ての數につきて眞なることを示す代りに、單に其定理が、例へば、6 につきて眞なることを示さんと欲せば、我等の瀑布に於ける首めの五

個の三段論法を設定するを以て足れりとすべし、若し又10につきて定理を證明せんと欲せば、九個の三段論法を要す、若し又更に大なる數につきて證明を行はんと欲せば、隨て多くの三段論法を取らざるべからず、されどこの數が如何程大なるとも、吾人は常に結局に到達すべく、解析的撿定は可能たるべし。

さりながら、斯の如くして如何なる程度まで進行するも、吾人は決して總ての數に適用すべき普徧的定理に達せざるべし、而かもかゝる定理にして始めて科學の目的たるを得べきなり。之に達するには、須らく無數の三段論法を要すべし、卽ち形式論理學を唯一の助けとせる解析者の忍耐力を以てしては、到底超ゆること能ざる深淵を超ねざるべからざるなり。

余は最初に、何が故に、一見直ちに一切の數學上の眞理を發見するに足る程の、有力なる智能を想像することを得ざるかを問へり。

今や之に答ふること容易なり、玆に棊子を弄する者ありとせば、彼は豫め四五回先きまでの進擊を假想し得べし、されどたとへ彼れいかに非常の人たりとも、決してある一定の回數以上に及ぶまで準備するを得ざるべし、若し彼れが其の能力を算術に適用するときは、之に關する一般的定理をば、直覺のみによりて發見するを得ず、極めて小なる定理に達するにも、逐次法による推理の援助に依賴せざるを得ず、何となれば、ろは有限より無限に轉ずることを得せしむる、唯一の道具なればなり。この道具は常に有用なり、何となれば、ろは我等をして、我等が望めるだけの行程を、一躍して飛び越さしめ、又忽ち實施し得べからざる者となる、冗長にして倦厭すべく且つ單調なる檢定より免れしむればなり、此道具は我等が一般的定理を求むるに於て、缺くべからざる者たり、而してこの定理の解析的撿定は、限りなく之に接近し得れども、而かも之に到達することを許さざるなり。

算術の範圍は無限解析論の境界を距ること甚だ遠しと雖も、既に前に言へる如く、數學上無限の觀念は、既に有力なる働きを演せり、而して是なくば科學は存在せず、何となれば、是なくば何等一般的のものが存在せざればなり。

第六節

逐次法による推理の基礎たる判斷は、之を他の形式にて表すことを得、例へば、相異なる整數の無限の集合中に於て、其他の任意の數より小なる一數ありと言

ひ得るが如し。

吾人は一の陳述より容易に他の陳述に轉ずることを得べく、又斯くして、逐次法による推理の正當なることを證明したりとの、謬見を抱くことあるべし、されど其時我等は常に中途に止めらるべく、常に一の證明すべからざる公理に出會ふべし、而かも其の公理たるや、現在證明せんとせる定理そのものを、他の語に飜譯せしものに過ぎざるなり。

故に逐次法による推理の法則は、矛盾の原理に歸すべからずと云ふ結論を免るべからず。

この法則は又實驗より來るを得ず、實驗が吾人に示す所は、例へば初めの十百の數につき法則が眞なるに在り、決して數の無限の連續には到達するを得ず、唯單にこの連續の中の(多少の差はあれど)常に有限なる一部分に過ぎず。

然るに、若し問題となる者が唯この一部分に止まらば、矛盾の原理は十分に事足らん、此原理は常に吾人が望むだけの三段論法を展開するを許すならん、されどこの原理の頓挫するは、無限の三段論法を、唯一の公式中に收めんと欲するときに於て起る、無限の前に臨みては實驗も亦等しく無力となれり。　この法則は、解析的證明にても實驗にても、近づくべからざるものにして、實に先天的綜合判斷の眞の摸範なり、又二三の幾何學公準に於けるが如く、これを一の規約なりと考ふることを得ず。

然らば何故に、この判斷が、疑ふべからざる明白を以て、吾人に賦與せられたるか、そは他なし、この判斷なるものは、一の行爲が一度可能なる以上は、又その同一の行爲の無限の反復を考へ得べしと自認せる、精神力の肯定に外ならざればなり、精神はこの能力につきて直覺を有す、而して實驗はこの能力に向つて之を用うるの機會、又之によりて此力を意識せしむるの機會となるに過ぎず。　されど人或は言はんとす、若し實驗によりて、逐次法による推理を確認すること能はずとせば、歸納法の援助に係る實驗も亦然るかと、吾人にして逐次に、一の定理が1につき、2につき、3につき、其他の數につきて眞なるを見ば、吾人は言はん、定律は明白なりと、而してそは、總ての物理學の定律が極めて多くの、されど數に於て限りある、觀察によりて支へらるると同じ理由に於てなり。

逐次法による推理が、歸納法の慣例の手順に酷似せるものあることは、認めざるを得ざるなり、されどその間に根本的の相違は固より存せり、物的科學に應用せらるる歸納法は常に不確實なり、何となれば、そは吾人以外に存在する宇宙の普遍的法則の信念を基礎とすればなり、之に反して數學的歸納法即ち逐次法による推理は、必然に吾人に賦與せらる、何となれば其は實に精神其物の性質の肯定に他ならざればなり。

第七節

余が前に述べし如く、數學者は常に其了得せし命題を概括することを努む、他の例を求むるまでもなく、吾人は前に次の等式を證明し

$$a+1=1+a$$

次に又之を用ゐて、更に一般的なる次の等式を得たり、

$$a+b=b+a$$

故に數學は、他の科學の如くに、特殊より一般に進行するを得。これ吾人には、この研究の發端より、了解すべからざるが如く見えしことなり。

されどこのことは、吾人が逐次推理法と尋常の歸納法との類似を知悉せし後には、吾人に對して何等の神秘をも有せざるものなり。

數學上の逐次推理と物理學上の歸納的推理とは、相異なる基礎の上に建てられたることを疑を容れず、されど其進行は彼此平行なり、兩者は同一方向に即ち特殊より一般に向ひて進む。

更に少しく注意して、細密に之を吟味せん、

$$a+2=2+a \qquad (1)$$

を證明するためには二回

$$a+1=1+a$$

なる法則を用ゐて

$$a+2=a+1+1=1+a+1=1+1+a=2+a \qquad (2)$$

とかけば足れり、然れども等式(1)より純正解析的方法によりて得られたる等式(2)は、簡單なる特殊の場合にあらず、そは全く別物なり。×

×歸納法ノ香ハマサリ
ニ法ニテハ共ノ同様ナリ

されば數學的推理の眞に解析的演繹的なる部分に於ては、普通の意味の詞に

ては、一般より特殊に進むとすらも言ふことを得ず。

等式(2)の兩邊は、單に等式(1)の兩邊より一層複雜なる結合なるのみ、而して解析はこの結合中に入れる元素を分ち、其關係を研究するの用をなすに過ぎず。故に數學者は「構造によりて進む」、即ち彼等は錯雜せる結合を「構造」す、次に彼等は此等の結合の解析に由りて、其元の元素に立戻り、而して此等元素の關係を求めんとす。

されば手順は純正解析的なり、さりながら、そは一般より特殊に移る手順にはあらず、何となれば集合は分明に、其元素に比して一層特殊なるものと看做すことを得ざればなり。

吾人がこの「構造」の過程に非常に重きを置くは正當なり、而して又この過程に於て、精密科學の進歩につきての、必要にして且つ十分なる條件を見んと欲せり。

必要は疑なし、されど十分とは云ふ可からず。

一つの構造が有利なるべきため、精神をして無益の勞を煩はさしめざるため、尚又之をして一層高きに昇る段階の用に供せしめんがためには、先づ其構造が、その元素の並列以上の事項たることを認知せらるゝに十分なる、一種の單一性を具ふることと必要なり。

尚一層正確に言へば、元素其物よりも、寧ろ構造を考ふるに於て、幾何かの利益を看出すを要す。

此利益とは何ぞ。

例へば常に三角形に分解し得べき一の多角形の性質は、其元素たる三角形の性質より得らるべきが如けれども、之を然かせずして、多角形そのものに就きて、直接に推理するの理如何。　そはそこに任意邊數の多角形に屬する性質ありて、直ちに之を或る特殊の多角形に適用し得るがためにして、多くの場合に於ては、三角形の性質を研究し、之に依りて多角形の性質を看出すは、一層大なる勞力を要するものなればなり、

若し四邊形が二個の三角形の並列以上のものとすれば、そは多角形の部類に屬すとしてのことなり。

構造は、同類中に屬する、他の之に類似せる構造と並列せらるゝ時の外は、興味

あることとなし。

尙又一類をなせる構造の性質をば、逐次に之に屬する各種につきて證明すべしと云ふ制裁を受くることなく、證明し得ることを要す。

斯くあるがためには、我等は必然一個若しくは數個の階梯を攀ぢ上りつゝ、特殊より一般に至らざるべからず。

「構造に由りて」の解析的手順は、吾人を下降せしめず、吾人を同水準に放置す。

吾人は數學的歸納法に由るにあらずば向上するを得ず、是れ吾人に新知識を授くる唯一の方法なり、物理學上の歸納法とは少しく異なるも、其多産の點に於ては之と同一なる、この歸納法の援助なくば、構造は數學を開設するの力無かるべし。

終りに、この歸納法は、同じ作用が限りなく反復せられ得るにあらずば、不可能なることに注目せん、彼の棊子の遊技に係る理論が、決して科學と成り得ざるは即ち之が爲めなり、何となれば同一部分の種々なる手は、互に同じからざればなり

第二章　數學上の大さ及び實驗

人若し數學者が連續なる語につき、如何なる解釋を下すかを知らんと欲するときは、特に幾何學に對して之を求むべきにあらず、幾何學者は常に多少ろの研究しつゝある圖形を表現せんと努むれども、其表現法は彼れが爲めには手段たるに過ぎず、彼れが幾何學に於て擴がり或は空間を用うるは、其研究に白墨を用ゆると同樣なり、白墨が白かりしと同樣に、其擴がり或は空間の連續なりしは、偶然の出來事なり、此の如き偶然の出來事に餘りに重きを置くは、注意して避けざる可からず。

然るに純正解析論者は、この暗礁を驚怖することとなし、彼は總ての圈外の元素より數學を脫却せしめ、以て吾人の次の疑問に答ふるを得べし、數學者がついて推理する所の連續とは如何なるものぞ、自己の技術について省思することを知れる所の彼等の多くは、既に之に答へたり、例へばタンヌリー氏 Tannery は、其著「一

個變數の函數論初步」Introduction à la théorie des Fonctions d'une variable に於てせり。

茲に整數列を取りて論究を始むべし、隣接せる二數の間に、一つ若しくは二つ以上の中間數を挿入し、又其新數の間に他の數を挿入すること前の如くし、以下之に準じ無限に至るべし、吾人は個樣にして無限數の項を得、是れ即ち分數有理數又は可度數と稱する數なり、然るに是れだけにては尙ほ不十分なり、既に無限數に達したるこれ等の項の間には、更に無理數又は不可度數と名づくる他の數を挿入するを要す。

更に之より進行をなすに先だち、豫備的注意を示さんとす、上述の如き解釋に據れば、連續なるものは、數に於て無限なる各個物を、或る順序に從ひ序列せるものの集合に外ならず、ろは眞なり、されど其の一員は他員と全く別物なるを以て、こは通常の解釋にはあらず、通常は連續の元素の間には、一つの全體を構成する一種の緊密なる聯繫ありと想像す、其聯繫に於て、點は線に先だちて存せず、線は點に先だちて存す、連續は重複に於ける單一なり、單一なくして重複のみ存するは不可なり、然るに解析家が連續をかくの如く定義するは、決して彼等の有する理由の少なきにはあらざるべし、ろは彼等が自から理論の嚴密を誇りてより以來、彼等の推理する所は、常に此の如き連續の定義の上に立つを見ても知らるべし、されど我等は、眞正の數學的連續が、物理學者又は形而上學者の所謂連續とは、全く別物なることを告ぐれば十分なり、蓋し或は言はん、この定義にて滿足する數學者は詞に欺かれたる者なり、宜しく精確にこれ等中間の各元素の何物なるか、又如何にして此等を挿入するを要するかを說明し、又其事の如何にして可能なるかを證明すること必要なるべしと、されどこの論も亦誤れり、此等の元素について、彼等の推理の中に入れらるべき唯一の性質は、一つの元素が他の元素の前にあるとゝ、後にあることとなり、故に此性質のみを定義中に入るれば不可なきなり。

されば、中間項の挿入せらるゝ仕方につきては、懸念せずして可なり、又一方に於て、數學者が用ふる可能なる語は、單に矛盾を脫すと云ふ意味なることを忘却せざる以上は、何人もこの挿入作用が可能にあらざることを疑ふ者はなかるべし。

さりながら吾人の用ふる定義は、尙ほ未だ完全ならず、依つて余はここに、之に關する冗長なる枝葉の論議を述べたる後、本論に立歸らんとす。

無理數ノ定義。 整數の外、他の材料を用ふることなくして、分數及び無理數の連續序列を作るに心を注ぎたる者は、ベルリン派の數學者にして、其中特にクロネッカー Kronecker を推すべし、其見地よりしては、數學的連續は純然たる精神の創造物にして、實驗は毫も其中に參加せざるべし。

有理數の觀念は、彼等に取りて何等の困難をも表はさざるが如し、彼等は專ら無理數の定義を下すことにのみ力を盡せり、されど、ここに彼等の定義を述ぶる前に當りて、余は一つの注意をなすを要す、是れ數學者の習慣に熟すること少き讀者に對し、この定義が必ず惹起すべき吃驚を豫防せんがためなり。

數學者の研究する所は、事物そのものにあらずして、事物の間に存する關係なり、されば、其關係の變せざる限りは、某の事物を他の事物にて置き換ふるも何等の痛痒なし、彼等に取りて實質は何の關係もなし、唯形式のみ興味を引くなり。

若しこのことを記せずんば、クロネッカーが、無理數なる名稱に由りて、一つの簡單なる記號、即ち測り得べく又殆ど觸知し得べき量に適合する觀念とは大に異なる、或物を表示することを理會し得ざるべし。

さて次ぎにクロネッカーの定義の何たるかを示さんとす。

有理數をば、無數の方法にて二組に區分することを得、其方法は、第一組の任意の一數が、第二組の任意の一數より大なりと云ふ條件に從ふものとす。

第一組の諸數の中に就きては、他の總ての數より小なる或る一數を看出し得べし、例へば若し第一組の中には、2及び2より大なる總ての數、第二組の中には、2より小なる總ての數を序列するときは、2は第一組の總ての數の中の最小數なること明かなり、かくて2なる數をば、この區分法の記號として選定することを得べし。

之に反して、第二組の諸數の中には、或る一數ありて、他の總ての數より大なりと看做すことを得、例へば第一組の中には2より大なる總ての數を含み、第二組の中には2及び2より小なる總ての數を含むときの如き是なり、この場合に於ても、2なる數をこの區分法の記號として選定し得べし。

されど之と異なりて、第一組に於ては、他の總ての數より小なる或る數なく、第二組に於ても、他の總ての數より大なる或る數なき場合もあり得べし、例へば、第

一組には平方が2より大なる總ての有理數を置き、第二組には平方が2より小なる者を置くと假定せん、吾人の知る如く、平方が正しく2に等しきが如き有理數は一つもなきなり、又第一組の中には、分明に、他の總ての數より小なる或る數のあることなし、何となれば假令ろの平方が2なる數に何程接近せる者ありとも、吾等は常に平方が尙は一層2に接近すべき有理數を看出し得べければなり。

クロネッカーの見解に於て、無理數

$\sqrt{2}$

は有理數區分法の特殊なるものの記號に外ならず、而して區分の各方法ごとに、記號の用をなすべき一つの有理數若しくは無理數の對應を見るべし。

されど、是にて滿足するは、この記號の本原を忘却するの甚しきものと謂ふべし、尙ほここに說明すべきは、如何にして我等が、此等の記號に一種の具體的存在を賦與するに至りしか、又他の一方に於ては、既に分數其物に對してすら困難を起すことなきか、吾人にして物質が無限に分解し得べきこと、即ち連續なることを知らずば、吾人は果してこの數の觀念を有すべきか。

物理學的連續。 是に於て數學的連續の觀念が、果して實驗より來れるものにあらざるかを問はんとす、若し然りとせば、吾人の感覺なる粗雜の與件は、測り得べきものたらざるべからず、人或は其が實に斯くの如きものなるべきを信せんとするを得べし、何となれば近世に至りて、學者はこの測定を努め、フェヒネルFechner の名の下に知らるゝ一の定律をさへ制定したり、其說に據れば感覺は刺戟力の對數に比例するなり。

されど、よりて以てこの定律を制定せんことを勉めたる實驗を精密に吟味せば、吾人は全く反對の結論に導かるべし、例へば十瓦の重さAと十一瓦の重さBとが同一の感覺を生じたること、又重さBが十二瓦の重さCと毫も區別せらるゝを得ざりしこと、然るに重さAと重さCとは容易に辨別し得られたるが如きことを觀察し得たり、依りて實驗の粗雜なる結果は次の關係式にて表示し得べし

$$A=B,\qquad B=C,\qquad A<C$$

是れ物理學的の連續の公式と看做すべきものなり。

ここに矛盾の原理と相容れざる不調和あり、この不調和を絕つの必要は、我等に迫るに數學的連續の發見を以てす。

故にこの槪念は、其の何れの部分も皆精神に由りて創造せられたりと雖も、之に機會を與ふるものは、即ち實驗なることを斷言せざるべからず。

吾人は同一量に等しき二量が、互に相等しからざることを信ずるを得ず、されば又吾人は、AがBと異なり、BがCと異なることを想像せざるを得ざるに至る、されど吾人の感覺の不完全は、吾人をして之を辨別するを得ざらしむるなり。

數學的連續の創造、第一段　吾人は實際に於ては、AとBとの間に、絕ねず別々なる少數の項を挿入するを以て足れりとすべし、今若し吾人の感覺の微弱を補ふために、或る器械に依賴し、例へば吾人が顯微鏡を使用するが如きことを許すとせば、如何なる結果に達すべきか、相互の區別判然せざること、上述のAとBとに於けるが如きものも、其のときには其區別分明とならん、されど、更にAとBとの間に、A若しくはBとは區別することを得ざる、一新項Dが挿入せらるべし、假令何程一層完全なる方法を用うるとも、我等の實驗の粗雜なる結果は、物理學的連續の特性をば、常に之に內在せる矛盾を以て現はすのみ。

吾人は、旣に判然區別の認めらるる二項の間には、絕ねず新項を挿入することによりて、この矛盾を脫せんとす、而してこの作用は、限りなく繼續せらるべきものなり、吾人は彼の望遠鏡が銀河を分解して星と爲したる如く、物理學的連續を分解して、辨別し得べき元素と爲すを得る程の、或る器械が現はれざる以上は、人が此作用を中止するに至るべしとは考ふるを得ず、然るに吾人は、斯かる器械の發見を想像する能はざるべし、如何にも吾人が器械を用うるは、常に我が五官を以てするなり、吾人が顯微鏡にて擴大せる像を觀察するは眼を以てするなり、されば此像は、常に視覺の特質、隨て物理學的連續の特質を存すべければなり。

直接に觀測したる長さと、二倍の顯微鏡にて擴大せる其長さの二分の一とを、區別する何物もあることなし、全體は部分と等質なり、是れ亦一の新たなる矛盾なり、或は寧ろ、項數を有限と假定せんには、茲に一つの矛盾ありと云ふをよしとせん、如何にも其のときには、部分は全體よりも少數の項を含むを以て、全體と合同なるを得ざること明かなればなり。

然れども、項數が無限と看做さるるに至れば、矛盾は止むべし、例へば整數の集合をば、其部分たるべき偶數の集合と相似なりと考ふるも、何等の故障なからん、而して事實に於て各整數には、其二倍に當る一の偶數の對應あり。

　されど精神が、無限項より成れる連續の概念を創造するに至れるは、單に實驗的與件の中に含まるる、この矛盾を避けんがためのみにはあらず。

　倘萬事は整數列によりて說き明かさる、吾人は一單位が若干の集合單位に加へ得らるることを、考ふるの能力を有す、吾人がこの能力を練習する機會を得、又この能力を意識するは、偏へに實驗の賚なり、是に由て吾人は、吾人のこの能力には際限なく、吾人は無限に計へ得と思へり、されど其實吾人は、未だ嘗て有限數の事物にあらざれば、計へ得しことあらざるなり。

　之と同樣に、吾人が一系列中の隣接せる二項の間に、中間項を挿入するに到りたる以上は、吾人はこの作用が、一切の制限を離れて繼續し得らるべく、詳言すれば、之を中止すべき理由の、毫も內存することなきを感ずべし。

　言語を省略するため、凡て有理數列と同じ定律に從つて形成せらるる、元素の集合を、第一次の數學的連續と稱することを得、次に若し無理數形成の定律に依りて、新元素を挿入する時は、ここに第二次の連續と稱すべきものを得べし。

第二段　吾人は尚ほ未だ第一步を進めたるに過ぎず、吾人は一次連續の本原を說明せりと雖も、更に、何故に夫にては尚ほ充分ならざるか、又何故に無理數を工夫するを要するかを、知るの必要あり。

　人若し一つの線を想像せんと欲せば、りは物理學的連續の特質を有するものにあらざれば能はざるべし、換言すれば、幾許かの幅を以てせざれば、之を表現することを得ず、然るときは二線は二個の帶の形に見ゆべく、若しこの粗造なる像を以て滿足するならば、二線が相交はるときは、其の二線は共通の一部分を有すべし。

　されど、純正幾何學者は、尚は其以上の事に力を效せり、彼は全然其感覺の幇助を拒むことなくして、幅なき線、大さなき點の概念に達せんことを望む、彼は線をば、帶形が次第に其幅を減ずるときの極限、又點をば、面の大さが次第に減少するときの極限と看做すにあらざれば、其目的を達するを得ず、又上述の二つの帶形

は、假令何程狹くとも、常に共通の面積を有すべく、其面積は、其線の幅の減少するに從つて愈々小に、其極限は、純正幾何學者が點と名くるものなるべし。

相交はる二線が、共通の一點を有すと云ふは、即ちこの理に由る、而してこの眞理は直覺的なるが如し。

されど、若し線を一次連續として考ふるときは、即ち若し幾何學者の引ける線の上に、座標として有理數を有する點の外存在し得ざるときは、この眞理は矛盾に歸すべし、例へば直線及び圓の存在を肯定したらんには、矛盾は自ら明白となるべし。

何となれば、座標の有理數なる點のみが、實在と看做さるるならば、一の正方形に内接する圓と、この正方形の對角線とは、相交はることなからん、何となれば、其交點の座標は無理數なればなり。

されどかくては、尙ほ未だ充分ならざるべし、何となれば我等は、ここに若干の無理數を有するのみにして、未だ總ての無理數を悉くさゞればなり。

今若し、二個の半直線(無限直線を一點にて分ちたるときの一部分)に分たれたる一直線を想像せよ、この半直線は、各人の想像には、幾許かの幅を有する一つの帶形の如き觀をなすべし、且つこの帶形は、其繼ぎ目に於て互に相蠶食すべし、何となれば、其帶形の間には、間隔の存在し得べからざればなり、而して其共通部分は、吾人が其帶形をば、次第次第に細くなると想像するときに、常に一點の如き觀をなして存すべし、かくの如くにして我等は、一直線が二個の半直線に分たるれば、これ等半直線の共通境界は、一つの點なりと云ふことの、直覺的眞理たるを許すなり、我等はかくして、無理數が有理數の二組の共通境界と見做さるゝ、クロネッカーの考案を承認すべし。

以上述ぶる所は、即ち本來の數學的連續たる、二次連續の起原なり。

摘要　要するに、精神は記號を創造する能力を有す、かくて精神は、記號の特殊なる體系に外ならざる、數學的連續を構造したり、精神の勢力は、あらゆる矛盾を避くるの必要以外には、制限せらるることなし、されど精神は、實驗が之に理由を供するにあらずば、決して働かざるなり。

吾人の從事せる現在の場合に於ては、この理由は、感官の粗雜なる與件より摘

出したる、物理學的連續の概念なり。然るにこの概念は、吾人が逐次に脱せざるべからざる幾多の矛盾に、吾人を導くべし、かくて吾人は、愈々益々錯雜せる記號の體系を、想像するの必要に迫らる。而して終に吾人が止まらんとする記號の體系は、啻に內的矛盾を脱せるのみならず、直覺的とよばれ、又多少の苦心によりて得られたる、實驗的の概念より摘出せる諸命題とも、最早矛盾することなきなり。

測り得べき大さ　吾人が是まで研究せし大さは、測り得べきものにあらず、吾人はこれ等の中のあるものは、他のものよりも大なりと言ふを得べきも、そが他の二倍又は三倍大なりとは、言ふことを得ず。

如何にも余は是まで、專ら項の排列せらるる順序につきて論せり、されどそは多くの應用に對して十分にあらず、宜しく任意の二項を別てる間隔を、比較することを論究せざるべからず、然らざれば、連續が測り得べき大さとなり、而して之に算術の演算を、適用し得ること能はず。

而てしそは、特別の新規約の幇助に由るにあらざれば、行はるゝ能はず、我等は、個樣個樣の場合に於て、A及びBなる二項の間に夾まれる間隔が、C及びDを別つ間隔に等しとの、規約を定むべし、例へばこの研究の發端に於て、吾人は整數列より立論し、而して隣接せる二元素の間に、n個の中間元素を挿入することを假定せり、然らば此等の新元素は、この新規約に由て、相互に等距離にありとす。

これ二個の大さの加法を定義する方法なり、何となれば、若し間隔 AB が、定義に由りて間隔 CD に等しきときは、間隔 AD は、定義に由りて間隔 AB 及び AC の和に等しければなり。

この定義は、甚だ大なる範圍に於て隨意的なり、されど全然に隨意的とは云ふべからず、この定義は或る條件、例へば交換及び結合の定則に從ふ、さりながら選まれたる定義が、この定則を滿足せしむるならば、選擇は何の關係もなく、之を明示するは無益なり。

各種の注意　吾人は幾多の緊要なる問題を提出するを得。

（第一）　精神の創造力は、數學的連續の創造に由りて終りたるか。

否、ヂュボア、レーモン Du Bois-Reymond の著作は、鮮かにその然らざるを示せり。

Du Bois-Reymond.

人の知る如く、數學者は無限小の諸階級を區別す、而して二次の無限小は、啻に

絕對的無限小なるのみならず、又一次の無限小に對しても無限小なり、分數又は更に無理數を次數とせる、無限小を想像するも難しとせず、而して吾人は前頁に論じたる數學的連續を、再びここにも看出すべし。

然かのみならず、此處には、一次の無限小にして、$1+\epsilon$次のに關しては無限大なる無限小あり、但しεは如何程小なるもよしとす、依りてここには、更に新しき項が、吾人の數列中に挿入せらる、而して若し余が上に使用せし語、即ち頗る便利なるも、常用には供せられざりし語を、再用するも妨げなくば、余は個樣にして、一種の第三次連續を創造したりと言ふを得べけん。

尙ほ其以上にも進行するは容易なれども、ろは徒らに精神を弄する事にして、應用すべからざる記號の想像に過ぎず、何人も之を顧みるものなからん、無限小の諸階級の考察によりて、導き來らしむる三次無限小と雖も、其自身に於ては、其應用極めて少なく、殆ど之を記する資格なき程なり、數學者は、唯之を單なる好奇心の結果と見るのみ、精神は、實驗が必要を訴ふる場合にあらざれば其創造的能力を使用せざるべし。

（第二）　既に數學的連續の概念を獲得したる以上は、此概念の起原となりたる矛盾と同樣なる、矛盾をば避け得たるか。

否、余は一例を擧げて之を示さんとす。

通例總ての曲線が、一の切線を有することは明白なりとす、如何にも、若しこの曲線と一の直線とを、二個の細き帶形と考ふるときは、吾等は常に其二帶形が互に横ぎることなくして、一の共通部を有するやうに之を排置し得べし、次に若しこの二帶形が、限りなく其幅を減少するときは、この共通部は常に留存すべく、極限に到れば、二線は相交はることなくして、一の共通點を有すべし、換言すれば、二線は互に相切觸すべし。

意識的又は無意識的に、かくの如く推理する幾何學者は、ここにも、相交はる二線が、共通の一點を有することを說明するため、行ひし者と同じ者の外、何事をもなし得ざるべし、而して其直覺は正當なりと見らるべけん。

さりながら其直覺は誤りあらん、若しこの曲線が、二次の解析的連續として定義せらるるときは、切線を有せざる曲線あることを證明し得るなり。

無論、吾人が上に研究せしものと同樣の技術は、此矛盾を除去することを得せしむべし、されど其矛盾には、極めて破格の場合にあらざれば遭遇することなきを以て、我等は之に心を用ゐざるべし、直覺と解析との和解を求むる代りに、二者の何れかを犠牲に供するを以て滿足せざるべからず、然るに解析法は、常に過失なかるべきを以て、落選に歸するものは直覺なり。

物理學的多次連續　余は前に我が感官の直接の與件、或はフェヒネルの實驗の粗雜なる結果より生ずる、物理學的連續を研究せり、而して余は其結果が矛盾公式

$$A=B, \quad B=C, \quad A<C$$

の中に約せらるることを示せり。

さて今此處には、如何にしてこの觀念が擴張せらるるか、及び如何にして、多次連續の概念が、ここに生ずるかを見るべし。

ここに感覺の任意の二集合を考察せん、吾人がこの二つの感覺を互に辨別し得るか、或は辨別し得ざるかは、フェヒネルの實驗に於て、十瓦の重さが、十二瓦の重さとは區別し得らるるも、十一瓦の重さとは區別し得られざると一般なり、多次の連續を構成するためには、余は更に他事を論ずる必要を見ず。

この感覺の集合の一を要素と名くべし、ろは幾分か數學者の所謂點と似たれども、全然同一物にはあらず、吾人は所謂要素が無擴度なりとは言ふを得ず、何となれば吾人は、之を其近傍の要素と區別するを得ず、ろは恰も一種の雲霧にて圍繞せられたるの觀あればなり、若し星學的比較にして許さるべくんば、吾人の所謂要素は星雲の如く、數學的點は星の如しと謂ひて可ならん。

斯く假言すれば、この要素の體系は、我等が任意の一より他の任意の一に移るを得るときに、前者より何時とはなしに連續的に、後者に到れるが如きものなり、故に此體系は一の連續を形成すべし、この線狀列の、數學者の線に於けるは、恰も孤立せる一要素の、點に於けるが如し。

論を進むるに先ち、須く截取なるものを說明するを要す、一の連續Cを視察し、而して吾人が暫くの間この連續に屬せずと認むる所の、要素の或るものを除去すべし、個樣に除去せる要素の集合を、一の截取と稱す、この截取によりて、Cは相

異なる許多の連續に細分せられ、殘る所の要素の集合は、唯一個の連續をなすことを止むべし。

然るときはCに於て、我等が相異なる二つの連續に屬するものと看做すべき、二要素A及びBの存在を認むべし、而してしか認むる理由は、要素の一が、截取中の要素の一と、識別し得ずとするにあらずば、Cの要素の線狀列(この要素は、之に隣れる他の者と識別し得べからず、一をAとし他をBとすべし)を看出すことを不可能なるにあり。

之に反して、所設の截取が、連續Cを細分するに不十分なることはあり得べし、物理學的連續を類別するには、吾人は之を細分するに必要なる截取の何たるかを、正確に吟味すべし。

若し悉く互に識別せらるべき、有限數の要素に約せらるる(隨て一の連續をも、許多の連續をも形成せざる)一の截取に由りて、一の物理學的連續Cを細分し得るときは、Cは一次連續なりと云ふ。

若し之に反してCが、其自身も亦連續なる截取に由らざれば、細分し得られざるときは、我等はCを多次なりと云ふ、若し一次連續なる截取にて充分なるときは、Cは二次なりと云ふ、若し又二次連續なる截取にて充分なるときは、Cは三次なりと云ふ、他は之に準ず。

斯くして、物理學的多次連續の觀念につき、定義を下すを得たり、是れ主として、感覺の二集合が識別し得べきか、又は識別し得べからざるかの、甚だ簡單なる事實によれるなり。

數學的多次連續　數學的n次連續の概念に、本章の首めに於て研究せし方法と、同樣の方法に由りて、全く自然に生じ來る、この連續に屬する一點は、人の知る如く、其座標と稱せらるる、相異なるn個の大さの一群によりて定義せらる。

この大さは常に測り得べきものたるを要せず、例へば幾何學の一部門に於ては、この大さの測度を抽出し、例へば、單に一曲線ABCの上に、點Bが點A及びCの間にあることを知るを旨とし、弧ABが弧BCに等しきか、又は前者が後者の二倍なるかを知るを要せざるものあり、是は位置解析Analysis Situsと稱せらるるものなり。この部門は幾何學者の注意を招きて、幾多の顯著なる定理を續出せしめ

たり、これ等の定理が、普通幾何學の定理と異なる所は、其定理が全く定質的にして、拙劣なる描者によりて一の圖形が寫され、甚しく比例を失ひ、直線に代ふるに、多少屈曲せる線を以てするが如きことありても、尙は其定理の眞なるに在り。

吾人が定義を下したる連續の中へ、測度を導き入れんと欲するときは、この連續は空間と爲り、而して幾何學は發生し來る、されど余はこの研究を、第二編のために暫く保留し置くべし。

第二編　空間

第三章　非ユークリッド幾何學

總ての結論は前提を假定す、この前提は、或は本來明白にして證明を要せざるか、或は他の命題に依らざれば存立し得ず、然れども斯の如くに、無限に溯ることを得ざるは勿論なるを以て、總て演繹的科學、就中幾何學は、結局若干の不可證明の公理を基礎として、其上に建つるを要す、依りて總ての幾何學書は、この公理の陳述を以て其端を撥す、されど其公理の中には、一の區別の劃すべきものあり、二三の公理、例へば「同一の量に等しき二量は互に相等し」の如きものは、解析論の命題にして、幾何學の命題にはあらず、余は之を先天的解析判斷と看做し、ここに之に論及せず。

されど特に幾何學に屬する、他の公理あることを主張せざる可からず、多くの幾何學書は、次の三命題を明示す、即ち

（第一）　二點を過ぐる直線は唯一つに限る、

~~[illegible]~~ Lowatschewsky
匈牙利、Bolyai

（第二）　直線は二點間の最短距離なり、

（第三）　一點を過ぎ、一の直線に平行なる直線は、唯一つに限る。

我等は假令、この公理の第二を證明するを、必要とせずとはいへ、若し必要あらば、之を他の二公理、及び列示せられずして暗に認許せらるゝ、更に多數の公理より、演繹することを能はざるにあらざるべし、されど余はこの事に止まらざるべし。

古來世の學者は、ユークリッドの公準の名を以て知られたる第三の公理をも、齊しく證明せんとて、無益にも工夫を凝らせり、この空想的希望に向つて腦力を費せし事は、實に想像だも及ぶべからざる程なり、終に第十九世紀の初めに於て、殆同時に、二大家、一は露西亞人、他の一は匈牙利人、即ちロバチェヴスキー Lowatschewsky 及びボリアイ Bolyai は、抗論の出來ざる樣に、この證明の不可能なることを證明し得たり、彼等は吾人をして、殆ど無公準幾何學の發明者の羈絆を脱せしめたり、爾後佛國學士院にては、無公準幾何學の發明に關する論文を受理すること、甚だ稀となりたり。

されど其問題は、尙は未だ了れにて盡きざりき、幾ばくもなくして有名なるリーマン

Beltrami　~~Rieman, Ueber die~~
(Rieman) リーマン, Ueber die Hypothesen
Welche der Geometrie
zum Grunde liegen

Riemann が「幾何學の根本に横はれる臆説について」Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zum Grunde liegen と題する論文によりて、一大進轉を來せり、この小册子は、余が後に至りて引用すべき、近時の論文の過半を呼び來りたる効ありき、中に就き特に、ベルトラミー Beltrami 及びヘルムホルツ Helmholtz の事業を語らんとす。

ロバチェヴスキーの幾何學　若しユークリッドの公準を、他の公理より演繹することが可能ならば、公準を否認して、而かも一方に他の公理を認許しなば、我等が究極矛盾の結論に導かるるに至るは分明なり、故に一の體系をなせる幾何學を、斯の如き前提の上に支持するは不可能ならん。

然るにロバチェヴスキーがなせし所は、正しく此處にあり、彼は最初に次の命題を假定せり。

一點を過ぎ一の直線に出會はざる直線は、無數に多し。

而して彼はユークリッドの他の總ての公理を保存せり、彼はこの臆説より一聯の定理を演繹し、此等の定理の間には何等の矛盾をも起こすこと不可能にして、其の論理の過失なきこと、毫もユークリッド幾何學の論理に讓る所なき、一の幾何

學を構成せり。

此等の定理は無論、吾人が習熟せるものとは大に異なれり、而して初學者には、少しく紛らはしきを免れず、次に一二の例をあげん、

三角形の三角の和は、常に二直角より小にして、其和と二直角との差は、三角形の面積に比例す。

所設の一圖形と相似にして、之と大さの異なれる圖形を作る能はず。

若し圓周を n 個に等分し、其分點に於て切線を引くときは、其の n 個の切線は、圓の半徑の小なるとき、一の多角形を形成す、されど其の半徑が頗る大なるときは、切線は相會せず。

この種の例を尙は多く掲載するは無益ならん、ロバチェヴスキーの命題は、もとユークリッドの命題とは、何等の關係を有せずと雖も、又論理上には互に相關聯せり。

リーマンの幾何學　玆に厚さなき小動物のみ蕃息せる、一の世界を想像し、且つこの「無限に扁平」なる動物が、悉く同一の平面中に在りて、此處より出でずと假定せむ、然かのみならず、この世界は他の世界に對し、其影響を受けざる程、相當に隔離せるものと假定せむ、さて吾人が此等の假定を作りつゝある時に方りて、此等の動物に推理力を賦與し、又此等が幾何學を作るの能力ありと信ずるも不可なし、この場合に於て此等の動物が、空間に負はしむる次元の數は、確かに二にして、其空間は二次元なり。

されど、今この想像的動物が、厚さを缺ける球面上にありて、此處を離るるを得ずと假定せむ、其動物は果して如何なる幾何學を作り得べきか、先づ此等の動物が空間に負はしむる次元は、二次に限れること明かなり、此等の動物に取りて、直線の代用をなすものは、球面の上にて一點より他點に至る最短距離、即ち大圓の一弧なるべし、即ち要するに其幾何學は、所謂球面幾何學なるべし。

彼等の空間と稱するものは、彼等の其以外に出づる能はざる、而して其上に彼等が了得したる總ての現象の生ずる、この球面の事に外ならざるべし、依りて彼等の空間は無終なり、何となれば、球面の上に於て、常に止まることなく前進し得ればなり、しかもなほそは有限なるべし、何となれば我等はその端末を見出さざるも、回歸をなし得ればなり。

偖てリーマンの幾何學は、三次元の球面幾何學なり、之を構成するには、此の獨乙數學者は、啻にユークリッドの公準のみならず、又併せて第一公理、即ち二點を過ぎる直線は唯一つに限ると云ふことをも度外視せり。

球面の上の所設の二點の間には、一般に唯一の大圓(上に述べし吾人の想像動物のためには、直線の代用をなすもの)の外引くことを得ずと雖も、これには一の例外あり、即ち所設の二點が一つの直徑の兩端なる場合には、この二點を過ぎ、無限に多くの大圓を引くことを得べし。

之と同樣にリーマンの幾何學に於ては(少なくも其形式の一に於ては)、一般には、二點を過ぎる直線は唯一に限れり、されどこれに例外の場合ありて、二點の間に又、無數の直線を引くことを得べしとなす。

リーマンの幾何學とロバチェヴスキーの幾何學との間に、一種の反對あり、例へば

三角形の角の和は、

ユークリッドの幾何學にては、二直角に等し、

ロバチェヴスキーの幾何學にては、二直角より小なり、

リーマンの幾何學にては、二直角より大なり。

所設の一點より、所設の一直線に對して引くことを得べき、之れに出會はざる直線は、

ユークリッドの幾何學にては一、

リーマンの幾何學にては零、

ロバチェヴスキーの幾何學にては無限なり。

リーマンの空間は、吾人が上に與へたる意味に於て、無終にてありながら、又有限なることを再言し置くべし。

定曲率の表面　さりながら異論は依然として可能なり、ロバチェヴスキー及びリーマンの定理は、それぞれに於て何等の矛盾をも顯はさず、されどこの二人の幾何學者が、其假設より演繹したる結論が、如何程夥多なりとも、彼等は其の總てを盡す前に、早くも中止するを要すべし、何となれば、其數は無限なるべければなり、若し彼等が極めて遠く深く其演繹を進めんには、誰れか其の終に、或る矛盾に

遭遇せざるべきを斷言する者ぞ、但し若しリーマンの幾何學をば、二次元に制限するときは、この困難は存立せず、リーマンが二次元の幾何學は、吾人の既に知る如く、實に普通幾何學の一分科たる球面幾何學と異なるなきなり。

ベルトラミー Beltrami は同樣に、ロバチェヴスキーが二次元の幾何學を、普通幾何學の一分科に外ならずとなして、之に關する異論を齊しく排斥せり。

如何にして此に至りしかは、次に述ふる所を見て知らるべし、今一の表面の上に、任意の圖形を考ふべし、此圖形は一の表面上に置かれたる、屈撓すべくして延長す可からざる布の上に描かれ、若し布が移動し又は變形するときには、この圖形の種々の線は、長さを變ずることなくして形を變じ得と假定せよ、一般にはこの屈撓すべくして延長す可からざる圖形は、此表面を離るることなくして移動することと能はず、されど或る特殊の面につきては、斯の如き運動の可能なることあり、ろは即ち定曲率の表面なり。

若し吾人が上述の如き比喩を想像し、而して此表面の上に接息する厚さなき動物を假定するときは、此等の動物は、總ての線が定長を保存する所の圖形の運動を、可能と認むべし、之に反して斯の如き運動は、變曲率の表面の上に接息する、厚さなき動物に於ては、不條理と見ゆべし。

これ等の定曲率の表面に二種あり。

一は正曲率を有するものにして、球面上に置かるゝやうに變形し得べし、依りてこの表面の幾何學は、球面幾何學に歸す、是れ即ちリーマンの幾何學なり。

他の一種は負曲率の面なり、ベルトラミーは、この表面の幾何學は、ロバチェヴスキーの幾何學に外ならざることを示せり、依りてリーマン及びロバチェヴスキーの二次元の幾何學は、ユークリッド幾何學に連結せられたり。

非ユークリッド幾何學の解釋　個樣にして、二次元の幾何學に關する、事項につきての異論は消散せり。

ベルトラミーの推理を擴張して、三次元の幾何學に及ぼすことは容易ならむ、四次元空間を拒否せざる所の人々は、之に對して何等の困難をも認むることなからむ、然れどもろの人々は甚だ少數なり、故に余は別の手段を取るべし。

我等をして、余が基本平面と呼ばんとする或る平面を考へ、而して次の如き方

法に由りて、一種の辭書を編成せしめ、二行に記せる學語を兩々相對應せしむること、恰も通常の辭書に於て、意味の同じき語を相對應せしむると同じからしむ。

空間……………基本平面以上に位する空間の部分、

平面……………基本平面と直角に交はる球面、

直線……………基本平面と直角に交はる圓周、

球……………球、

圓……………圓、

角……………角、

二點間の距離……この二點、及び基本平面と、この二點を過ぎ、且つ此平面と直角に交はる圓との交點の非調和比の對數、

等。　　　　等。

次にロバチェヴスキーの定理を取り、之をこの辭書の幇助によりて譯述すること、恰も獨乙語の本文を、獨佛對譯辭書の幇助を以て飜譯する如くせむ、吾人は個様にして、普通幾何學の定理を得べし。

例へばロバチェヴスキーの定理「三角形の三角の和は、二直角より小なり」を、「若し一の曲線三角形が、延長せられたるとき基本平面と直角に交るべき、圓弧を邊とするときは、この曲線三角形の三角の和は、二直角より小なり」と譯す、されば、ロバチェヴスキーの臆說の結論を、何處まで追究しても、我等は決して何等の矛盾をも誘致することなかるべし、實に若しロバチェヴスキーの二定理が矛盾するならば、吾人の辭書に由りて記せる、其二定理の飜譯も亦、同様に矛盾するならむ、然るに此等の飜譯は、普通幾何學の定理にして、何人も普通幾何學が矛盾より脫せざるやを疑ふ者なし、何處よりこの確實性は來るか、其は果して能く是認せられたるか、是れ余が立ち入るを得ざる一の疑問なり、されどろは甚だ興味ある問題にして、余は之を解すべからざるものとは信せず。

故に、今は余が上に列擧したることについては、何等の異論も存することなし、されどこれだけにては未だ總てを盡さず、ロバチェヴスキーの幾何學は、具體的解釋を下し得べく、無用なる論理學の練習たるを止め、諸般の應用を容るるを得べし、但し余はここに其應用、及びクライン Klein と余とが、之を一次方程式の積分法

に利用したる事について、語るべき時間を有せず。

且つ又この飜譯の方法は、唯一種に止まらず、尙ほ上に揭げしものと同一なる、許多の辭書を編成することを得べし、其辭書なるものは、ロバチェヴスキーの定理を、簡單に普通幾何學の定理に變形せしむるものなり。

陰公理　書物の中に陽に陳述せらるる公理のみが、幾何學の基礎となるや、我等は此の如き公理を放棄したる後にも、尙ほユークリット、ロバチェヴスキー及びリーマンの幾何學に共通なる、若干の公理の存立するを認知するを得ん、此等の公理は、幾何學が陳述せずして認許する二三の前提たり、古來定型の證明より之を分離せむことを求むるは、興味ある事と謂ふべし。

スチュアート、ミル Stuart Mill は、總て定義は一の公理を含蓄することを主張せり、其故は、我等が定義を下すに方りては、陰に定義を下すべき事物の存在を是認すればなり、こは餘りに論じ過ぎたり、數學に於ては、定義すべき事物の存在の證明を經ずして、之に定義を下すことは稀なり、我等がその證明をなさゞる時は、一般に讀者が、容易に其の不足を補ふことを得る場合なり、玆に「存在」と云ふ語は、數學的本體を論ずる時、及び實在的物體を論ずる時に於ては、同義にあらざることを忘るべからず、一の數學的本體は、其定義が其自身に於て、或は認定されたる前の命題に依りて、矛盾を含まざる限りは存在す。

されど、スチュアート、ミルの觀察が、總ての定義に適用せられずとも、其中の或者に對して正しきは固よりなり、往々平面には、次の如く定義を下すことあり、

「平面は、其上の任意の二點を聯結する直線が、全く其上にある如き面なり」。

この定義は、明かに一の新公理を陰匿せり、之を公理に變更し得べきは言を待たず、又かくするが優れり、されど斯からんには、宜しく陽に公理を陳述せざるべからず。

他の定義も亦、等しく重要なる反省を起さしむるを得。

個様なる定義は、例へば、二つの圖形の相等に關する定義の如し、即ち「重なり合はすを得べき二つの圖形は相等し」と云ふ、されど之を重ね合はすには、二者の中の一をば他と全く相合するまで轉置するを要す、されど如何にして之を轉置するを得るか、若し吾人が個様なる問を出さば、人は之に答へて、圖形を變形せしめ

ざること、恰も不變形の固體に於けるが如くして、其轉置を行ふを得と言ふは論を待たず、されど是れ認諾すべからず。

事實に於てこの定義は、毫も定義の資格を存せず、若し夫れ流體のみある所の世界に捿息する者にとりては、此定義は何等の意味を有せざらむ、此定義が明瞭なるが如き觀あるは、吾人が其の大さと形とが總て不變なる、理想的固體の性質と大同小異なる、天然の固體の性質に慣れたるを以てなり。

この定義は、假令不完全なりとはいへ、一の公理を含蓄す。

一の不變圖形の運動の可能は、本來明白なる眞理にあらず、或は少くもユークリッドの公準の形を取らしむべきものなり、又先天的解析判斷が眞なる如くにもあらず。

然かのみならず、幾何學の諸定義及び諸證明法を研究するとき、我等は啻にこの運動の可能のみならず、併せて此運動の性質をも、證明なしに認諾するの已むを得ざることを認む。

こは最初に直線の定義に於て生ずる事なり、我等は直線に關しては、多くの缺點ある定義を與へ得たりと雖も、其眞正なる定義は、直線を參加せしむる總ての證明法中に、暗に含めらるゝものなり。

「一の圖形に屬する一線の總ての點が、この線外に位する總ての點の運動せる間、絕ゑず不動なるやうに、此圖形の運動する事はあり得べし、かゝる線を直線と稱す」

吾人は故らにこの陳述に於て、其中に含蓄せる公理より定義を分離せり。

三角形の相等しき場合、又は一點より一直線の上へ下せる一垂線の可能の場合の如き許多の證明は、陳述を省きたる諸命題を假定せり、何となれば其證明は、空間に於ける一圖形を、或る方法にて移すことの可能を認許すること、已むを得ざればなり。

第四幾何學、此等の陰公理の中に就きて、余が注意に價すと思ふものあり、そは、之を抛棄すれば、ユークリッド、ロバチェヴスキー及びリーマンの幾何學と等しく、體系ある第四幾何學を構成し得るものなり。

直線ABの一點Aより、常に之に一の垂線を立つるを得ることを、證明するため

Sophus Lieの主張

には、最初固定直線ABと合一し、點Aを周りて動くべき一直線ACを考へて、之をABの延長と合一するまで、點Aの周圍に回轉せしむべし。

斯くせばここに二つの命題を假定す、即ち初めには、個樣なる回轉が可能なることを假定し、次には其運動が、二直線の一が他の延長と合するまで連續することを假定す。

若し第一點を認許して第二點を排斥するときは、倘ロバチェヴスキー及びリーマンの定理と別種にして、而かも亦等しく矛盾を免るべき一聯の定理に導かる。

余は唯これ等の定理の一を示さん、而して其の内の最も奇異なるものを選ばん、一の實直線はそれ自身に垂直たることを得。

リーLieの定理　古來定型の證明法中に、陰に導き入れられたる公理の數は、極めて多く、中には不必要のものもあり、之を最小數に簡約するは有益ならむ、人は先づこの簡約法が可能なるか、必要公理の數、想像し得べき幾何學の數が、果して無限ならざるかを問ふことを得べし。

ソーフス、リー Sophus Lieの定理は、全くこの議論を支配するものにして、之を次の如く陳述することを得。

次の如き前提を認許すと假定せむ、

(第一)　空間はn次元を有す、

(第二)　一の不變圖形の運動は可能なり、

(第三)　空間に於ける、この圖形の位置を定むるためには、p個の條件を要す。

これ等の前提の下に立つ幾何學の數は有限なり。

且つ若しnが與へられたるときは、pには上限あることをも、示すことを得べし故に若し運動の可能を認許するときは、三次元の幾何學の有限數(餘り大ならざる)のみを看出すことを得。

リーマンの幾何學　されどこの結果は、リーマンの反抗を受くべしと思はる、何となればリーマンは、無數の相異なる幾何學を作れり、而して通例彼れの名を以て呼ばるる幾何學の如きは、唯特別の場合のものたるに過ぎざればなり。

彼れの言に曰く、總ては皆曲線の長さにつきての定義の、下し方に關するものなり、然るにこの長さの定義を下す方法は、無限に多く有りて、各新幾何學の起點

と成り得べしと。

ろは全く正確なる言なり、されどこれ等の定義は、概してリーの定理に於て假定する、不變圖形の運動と相容れず、リーマンの諸幾何學は、種々の理由の下に有益なれども、純然たる解析的にあらざれば決して成立せず、而してユークリッドのものと同樣なる、證明法には從ふことを得ざるべし。

公理の本性につきて　多くの數學者は大概、ロバチェヴスキーの幾何學を、簡單なる論理的奇論と看做して顧みず、唯其中の二三の人だけは、少しく進んで觀察を下せり、許多の幾何學が可能なれば、此等が皆眞なることは確實なるか、實驗は無論、三角形の三角の和が二直角に等しきことを示すべし、されどろは、吾人が過小の三角形に限りて、測算する時の事なり、ロバチェヴスキーの說くところに據れば、三角形の三角の和と二直角との差は、三角形の面積に比例す、若し吾人が更に大なる三角形を取り扱ふとき、或は吾人の測算が更に精密に涉り得るときは、其差は知覺し得べきものと成るか、若し然らんには、ユークリッド幾何學は、一時的の幾何學たるに過ぎざらむなり。

この說を論議するには、吾人は先づ幾何學公理の何たるかを考究するを要す、カント Kant が言ひし如く、ろは果して先天的綜合判斷なるか。

若し然るときは、其判斷は、吾人がろの反對命題を考ふることも、又其上に一の理論的堂宇を築くことも、なし得ざる如き力を以て、吾人に與へられたるものならむ、從つてここには、非ユークリッド幾何學は存立せざる事とならむ。

此事につき確信を得るために、我等をして一の眞正なる先天的綜合判斷例へば第一章に於て重要なる任務を演じたる所の、次の判斷を取らしめよ。

一の定理が數1につきて眞にして、次に、若しnにつき眞なるときは、$n+1$につきても眞なることを證明し得たらば、其定理は總ての正の整數につきて眞なり。

次に他に於て、この命題を否認しつゝ、非ユークリッド幾何學が普通幾何學に對すると同樣なる、虛構の算術を建設することを試みむ、されど其目的は達し難からむ、而して最初よりこの判斷を解析的と看做すに至る程ならん。

又彼の厚さなき動物の假定を再考せんに、吾人はこの動物が、若し吾人の如き精神を具ふるならば、總ての經驗の反抗を受くるユークリッド幾何學を襲用すべ

しとは殆ど認むるを得ざるべし。

然らば吾人は、幾何學の公理を實驗上の眞理なりと、論結すべからざるかと云ふに、理想上の直線或は圓周の上には實驗を施し難し、實驗は實物の上にのみ施し得らるべきものなり、然らば幾何學の基礎として用ゐらるる實驗は、何の上に支へらるべきか、其答は容易なり。

既に前に述べし如く、吾人は常に幾何學的圖形が、固體と同じ様態にありとして推理するなり、故に幾何學が實驗に仰ぐ所は、其物體の性質に在りとす。

光の性質及び其直線的波及は、齊しく幾何學の二三命題、及び特に射影幾何學の諸命題を、生ずるの機會と成りたり、隨てこの見地に於て、數量幾何學は固體の研究にして、射影幾何學は光線の研究なりと言はんとするも可ならむ。

されどここに打ち勝つべからざる一の困難あり、若し幾何學が實驗科學ならば、之は精密科學にはあらざらむ、之は間斷なき改正を受けむ、此故に余は言はんとす、今日より以後に於て、幾何學は其誤りあることを確證せらるるの期あらむと、何となれば吾人は、嚴正に不變なる固體の存在せざることを知ればなり。

故に幾何學的公理は、先天的綜合判斷にあらず、實驗的事實にもあらず。

之は規約なり、總ての可能規約の中に就き、吾人の選擇は實驗的事實を嚮導となす、されど其選擇は自由にして、唯其間に矛盾を避くるの必要あるのみ、又其他に制限せらるることあるなし、されば公理は其選擇を決するに用ひたる實驗的定律が、近似的に過ぎざる時と雖も、依然として嚴正に眞なり。

換言すれば、幾何學公理(算術公理は茲に語らず)は假裝せる定義たるに過ぎず。

然る以上は、ユークリッド幾何學は眞なるかの問を何と思惟すべき、之は何の意味をも有せざるなり。

之は次の如く問ふに等し、若し「メートル」法が眞なれば、舊度量衡は虛僞なるか、若し軸式座標が眞なれば、極式座標は虛僞なるか、一の幾何學は他よりも眞なりと謂ふべからず、之は單に他よりも便宜なりと謂ふべきのみ。

さてユークリッド幾何學は、現在將來共に便宜なり。

(第一) 何となれば、其幾何學は最も簡單なればなり、之は單に吾人の精神作用の習慣に由るのみにあらず、又或は吾人がユークリッド的空間につき有すべきも

のより外に、如何なる直覺ありやを知らず、と云ふが如き理由に由るのみにもあらず其幾何學夫れ自身に於て簡單なること、恰も一次の多項式が二次の多項式より簡單なると同樣なるを以てなり。

（第二）何となれば、其幾何學は殆ど善く天然固體の性質と相和すればなり、此等の物體は、吾人の五官によりて比較せられ又測定せらるるを得べし。

第四章　空間と幾何學

先づ一の小奇論により端を發かん。

吾人と同樣の精神及び感覺を具ふるも、何等豫備の教育をも受けざる動物は、彼等をして適當に選ばしめたる一の外界より、ユークリッドのと別種なる一の幾何學を構成し、及びこの外界の現象を、非ユークリッド空間、或は更に又四次元空間の中に局定せしむるに至る如き印象を受くることを得ん。

現實の世界に於て教育されたる吾人にとりては、若し吾人が遽然この新世界に轉送せられるときも、其新世界の現象を、我がユークリッド空間のものに復歸せしむること、更に困難にはあらざるべし、若し又斯かる處に其生涯を捧ぐる人あらんには、或は第四の擴がり、第四次元の何たるかを想像し得るに到らむか。

幾何學的空間及び表現的空間　人は往々にして、外物の像が空間の中に局定せらるゝを云ふ、而して又この條件の下にあらざれば、此像は形成し得られずと

さへ言ふ、又人はかく專ら我等の感覺及び我等の表現に向つて備へられたる、一種の組枠の用をなせるこの空間は、幾何學者の空間と全く相同じく、その總ての性質を具有すと言ふ。

されど良好なる精神を以て之を考ふる人々にとりては、上の言句は甚だ異常と思はるべし、されど其精神も亦果して、或る迷想に罹り居ることなきやを疑ふをよしとす、但し其迷想は、更に立入りたる解析を用ひて消散し得べけん。

先づ本來の空間と呼ばるゝものの性質は如何、所謂空間とは幾何學の對象にして、余が幾何學的空間と名くるものなり、其諸性質中の最も緊要なるもの二三を擧ぐれば次の如し。

第一　連續なり、

第二　無限なり、

第三　三次元なり、

第四　「オモゲン」なり、換言すれば其の總ての點は彼此互に等勢の有様にあり、

第五　「イソトロップ」なり、即ち一點を過ぎる總ての直線が彼此互に等勢の有様にあり。

今之を、余が表現的空間と名くる、吾人の感覺及び吾人の表現の一種の組枠と比較せん。

視覺的空間　先づ網膜の底に於て形成せらるる像に屬する、純然たる視覺の印象を考ふべし。

簡略なる解析は、この像が連續的なることと、されど又唯二次元なることを示す、後者は先づ幾何學的空間より、我等が純正視覺的空間と稱するものを區別するものなり。

又他方に於てこの像は、有限區域内に包容せらる。

終りに尙ほ他の肝要なる差異あり、即ちこの純正視覺的空間なるものは「オモゲン」にあらず、網膜の總ての點は、ここに形成せられ得べき像を離れて、皆同一の働きを演せず、其黃色の斑點は、決して網膜の縁上の一點と「オモゲン」なりと看做さるるを得ず、實際同一の物象にても、ここには他より一層鮮明なる印象を生ず、且つ又有限なる全區域に於て、其中心の位置を占むる此點は、縁の一つに近き點

と「オモゲン」なりとは見ねざるべし。

尙は一層立入りたる解析は、無論視覺的空間の連續及び二次元なる事の、一の迷想に過ぎざることを示すべし、依りて其の解析は、この空間をば、一層多く幾何學的空間より遠ざからしむべし、されどこの注意は暫く不問に措かん。

さりながら、視覺は吾人をして距離を評定し、随て第三の擴がり、第三次元を了解せしむ、然るに何人も知る如く、この第三の擴がりの知覺は、一物象を明瞭に認むるに必要なる調攝作用及び兩眼の收斂作用に歸す。

是れ即ち筋覺にして、一次元及び二次元の概念を與へたる視覺とは全く異なるものなり、されば第三の擴がりが、他の二つの擴がりと同一の働きをなすとは見ねざるべし、故に完全視覺的空間と稱すべきものは、「イソトロップ」空間にあらず。

其空間が三次元を有すと云ふは眞實なり、其意は、吾人の視覺(少くも協力して、擴がりの概念を形成する所の視覺)の總ての要素は、其中の三個を知れるときに、充分に定められ、數學上の語を用うれば、そは三個の獨立變數の函數なりと云ふにあり。

されど、更に立入りて此事を吟味せんに、第三の擴がりは、相異なる二樣の方法、即ち眼の調攝作用と兩眼の收斂作用とに依りて表はさる。

無論この二作用は、常に相一致するものにして、其間には一定の關係あり、即ち數學の詞にていはば、この二つの筋覺を測定すべき二變數は、吾人には獨立と見ねざるなり、或は又吾人は既に精細に過ぎたるが如き觀ある故、數學上の觀念に訴ふることを避くるがため、前章の語法に立ち戻りて、同一の事實をば次の如く陳述するを得べし、若し收斂の二感覺A及びBが、分別し得べからざるときは、之に隨伴する調攝の二感覺A′及びB′も亦、分別し得べからざるべし。

されど、是れ正しく一の實驗上の事實なり、其反對を假定すればとて、先天的に何等の妨げあることなし、而して若し反對が成立するときは、即ち若しこの二つの筋覺が、相獨立して變ずるときは、吾人は更に今一の獨立變數を算入すべきなり、而してその時完全視覺的空間は、物理學的四次連續として我等に見ゆるに至るべし。

余は附言せんとす、こゝにも亦一の外的實驗の事實ありと、吾人の如き精神を

有し、吾人と同樣の感覺機關を具ふる者が複雜なる屈折を經たる後にあらざれば、光線が其の中に達せざる如き、一の世界にありと假定するも妨げなし、然らば、吾人の距離を評定するために供用せらるる二條件は、一定の關係にて聯結せらるることを中止すべく、かゝる世界の中にて、其感官の敎育を受くる者は、又無論完全視覺的空間に第四次元を賦與すべし。

觸覺的空間及び動作的空間　觸覺的空間は、視覺的空間よりも更に複雜にして、幾何學的空間に遠ざかること愈甚し、而して余が視覺につきてなせし議論をば、更に觸覺につきて反復するは無用なり。

されど、視覺及び觸覺の與件以外に、空間の概念の發生に於て、之に等しく或は又之に優りて貢献すべき他の感覺あり、こは誰人も知る如く、總て吾人の運動に伴生するものにして、通例之を筋覺と稱す。

之に對應する組枠は、動作的空間と稱すべきものなり。

各筋肉は增減し得べき特殊の感覺を生ず、かくて吾人の筋覺の集合は、吾人の有する筋肉の數だけの變數に應ずべし、この見地に於て動作的空間は、吾人の有する筋肉の數に等しき次數を有すべし。

余は、若し筋覺が空間の觀念を形作るに與かるとせば、こは吾人が各運動の方向の感を有すること、及び其感が此感覺の全部をなすことなりと、云はれたるを知る、果して然らば、若し一の筋覺が、この方向の幾何學的方向の感に伴はるゝにあらざれば、生ずることを得ずとせば、幾何學的空間は明かに、吾人の感性に與へらるる一形式なるべし。

然るに、こは余が感覺を解析するに方りては、全く發見せざりし事なり。

余の視たる所は、同方向の運動に對應する感覺が、余の精神に於て、簡單なる觀念の聯合によりて、聯結せらるゝこととこれなり、吾人が「方向の感」と稱するものの誘致せらるるは、この聯合にあり、故にこの感をば、單一なる感覺の中に看出すは難しとす。

この聯合は極めて錯雜せり、何となれば同一の筋肉の伸縮は、四肢の位置に從ひ、甚しく異なる方向の運動に對應し得ればなり。

且つ其聯合は明白に獲得せらる、こは總ての觀念の聯合の如く、習慣の結果な

り、この習慣其自身は又夥多の實驗より生ず、疑もなく、若し吾人の五官の敎育が、種々の異なる印象を受くべき、異なる媒質中に於てなされたらんには、ここに反對の習慣は生じ、而して吾人の筋覺は、他の定律に從て結合せられたるなるべし。

表現的空間の特性　されば表現的空間は、三重の形即ち視、觸及び動に區別せらるるものにして、幾何學的空間とは全く相異なれり。

其の空間は「オモゲン」にも「イソトロップ」にもあらず、且つ三次元なりと言ふを得ず、吾人は往々幾何學的空間の中に、吾人の外感の對象を「射影す」、又之を「局定す」と云ふことあり。

こは意味ありや、而して如何なる意味なりや。

こは吾人が、幾何學的空間の中に、外物を表現すと云ふ意味なるか。

吾人の表現は、吾人の感覺の再生に過ぎず、されば其表現は、自已と同じ組枠の中、即ち表現的空間の中にあらざれば、序列し得られざるなり。

されば幾何學的空間中に外物を表現するは、吾人に取りて不可能なり、恰も平板上に、三次元に於ける物體を描くことが、畵工に取りて不可能なると同じ。

表現的空間は、幾何學的空間の像、一種の透視畵法にて變形せられたる像たるに過ぎずして、吾人は物體をば、この透視畵法の定律に從はしむるにあらざれば、表現することを得ず。

故に吾人は幾何學的空間中に外物を表現せず、されど吾人はこの物體の上に推理すること、恰も其物體が幾何學的空間中に在るが如くにす。

次ぎに吾人が空間の一點に於て、一物體を局定すと言ふときに、そは如何なる意味にて云ふか。

其意味は、單に吾人がこの物體に達するため、爲すを要する總ての運動を表現するにあり、而してこの運動を表現するためには、之を空間中に射影するを要す、隨て空間の觀念が豫め存在するを要すと云ふ意味にあらず。

吾人がこの運動を表現すと言ふときには、余は單に、吾人は何等の幾何學的特性をも有せざる、隨て毫も空間の觀念の先在をも含蓄せざる所の、この運動に伴へる筋覺を表現す、との意味のみに於てなり。

狀態の變化及び位置の變化、　されども、若し幾何學的空間の觀念が、吾人の精神

に與へられざるとき、又或は吾人の何等の感覺も、吾人にこの觀念を供せざるときは、其觀念は如何にして生ずと云ふべきか。

こは玆に吾人の吟味すべき所にして、之が爲には幾何かの時を要す、されど余は、余の敷衍せんとする說明をば、二三の語に約することを得べし。

吾人の感覺は何れも、孤立しては吾人を空間の觀念に導くことを得ざるならむ、吾人は、單にこの感覺の依りて遞次に繼續する所の定律を研究して、空間の觀念に誘致せられたり。

吾人は先づ吾人の印象が變化することを見る、而して吾人の確證する變化に就き、區別をなすべきことを知る。

吾人は時として、印象の原因たる物體が狀態を變化したり、或は其物體が位置を變化したりと云ふ。

一の物體が狀態或は單に位置を變ずるときは、吾人は之を常に同樣に、印象の集合の變化に由りてと譯す。

然らば如何にして吾人は、此等を區別するを得るに至りたるか、若しここに單に位置の變化のみありとせば、吾人は印象の原集合を恢復し得べし、其方法は、我が身體を、再び同じ相對的地位に於て、可動の物體と對向せしむべき運動をなすに在り、吾人は個樣にして生じたる變化を矯正し、而して逆變化に由りて更に原狀態を再設し得べし。

例へば視覺に就いて、若し一物が我が目前に移動するときは、吾人は之を「目逐」し得べく、又其像を眼球の固有運動に由りて、網膜の同一點に支ふることを得べし。

吾人は、この運動が有意にして、又筋覺に伴隨せるが故に之を意識せり、されどこのことは、吾人が之を幾何學的空間の中に表現することを意味せず。

されば位置の變化の特質をなすもの、之を狀態の變化と區別するものは、位置の變化は、常にこの方法にて矯正せられ得ると云ふことなり。

依りて、印象の集合Aより集合Bに移るには、相異なる二法に由る、即ち(第一)不隨意にして筋覺を感ずることなし、こは轉位するものが物體なるとき生ずる所なり、(第二)有意にして筋覺を有す、こは物體が不動にして、恰も物體が我等に對し

相對的運動をなす樣に、我等自身が轉位するときなり。

果して然らば、集合Ａより集合Ｂへの經過は、位置の變化に外ならず。

是に由りて視覺及び觸覺は、筋覺の幇助なくしては、吾人には空間の觀念を與ふることを得ずと云ふ結果に達す。

この觀念は、啻に單一なる感覺より導き來るを得ずして、一聯の感覺より導き來らるるのみならず、而かも尚又運動することを得ざる生物は、決して獲得するを得ざるべし、何となれば、此の如き生物は、自己の運動に由りて、外物の位置の變化の結果を矯正し得ざるを以て、其變化を狀態の變化と區別すべき、何等の理由をも有せざればなり、又此の如き生物は、若し其運動が隨意にあらざるとき、即ち或る任意の感覺によりて伴隨せられざるときにも、又之を獲得し得ざらむ。

相償の條件　二つの變化、然かも交互獨立なる二つの變化が、かくの如く互に相矯正せらるる如き相償は、如何にして可能なるか。

既に幾何學を知れる人々は次の如く推理すべし。

相償を生ずるためには、明かに一方には外物の種々の部分、他方には我等の感覺の種々の機關が、二重の變化の後、同一の相對的位置に在るを要す、而してそのためには、外物の各部分が同一の相對的位置を保存するを要し、而して我等の身體の各部分も亦前後同一の狀況に在るを要す。

換言すれば、外物は、第一の變化に於て、恰も不變固體の如くに轉置せらるるを要し、而して我等の身體の全部が、第一變化を矯正する第二變化に於て、亦同一の狀況に在るを要す。

この條件の下に相償は行はるるなり。

されど、吾人は未だ幾何學を知らず、何となれば吾人には、未だ空間の觀念が形成せられざればなり、依りて吾人は斯の如く推理するを得ず、もし相償が可能なりとも、吾人は先天的に之を豫見するを得ず、然れども經驗は、此想像が時として可能なることを我等に示す、而して我等が狀態の變化と位置の變化とを區別せんが爲めに、其出發點となすは、此經驗的事實なり。

固體及び幾何學　吾人の周圍にある物體の中には、我等の身體の互關運動に由りて、斯く矯正せらるべき轉位を屢々受くるものあり、そは固體なり。

自餘の物體は、其形狀可變にして、この轉位(形狀の變化なき位置の變化)をば、例外の場合の外、受くることとなし、若し一物體が變形しつつ轉位するときは、吾人は、適當なる運動によりて、我等の感覺機關をば、この物體に關して同一の相對的位置に引戾すことを得ず、故に吾人はもはや原印象の集合を再設することを得ず。

吾人が、可變形の物體を、各固體と殆ど同一の定律に從て、轉位するやうなる小要素に分解することを學ぶは、其期未だ到らず、そは多くの新實驗を經たる後の事に屬す、吾人はかくの如くにして他の狀態の變化より變形を區別することあり、此等の變形に於ては、各要素は矯正せられ得る所の、簡單なる位置の變化を受く、されどその集合體の受けたる變形は更に大にして、到底互關運動に由りて矯正すべからざるなり。

斯の如き觀念は、既に甚だ錯雜せるものにして、比較的緩慢なる狀態に由るにあらざれば發現し得ざりき、且つ此觀念は、若し固體の觀察が先づ位置の變化を區別することを示さざりしならんには、生ずることを得ざりしならむ。

故に若し自然界に固體なかりせば、幾何學はあり得べからず。

次の一注意も亦少しく留心すべき價値あり、最初αなる位置を占め、次にβなる位置に移るべき一固體を假定せむ、其第一の位置に於ては、吾人にAなる印象の集合を發生せしめ、又其第二の位置に於ては、印象の集合Bを發生せしむ、又別に第一とは全然異なる性質(例へば色を異にする)を有する第二の固體ありとせむ、而してこのものは、我等に印象の集合A'を起さしむる位置αより、我等に印象の集合B'を起さしむる位置βに移ると假定せむ。

一般に集合Aは集合A'と何等の共通部分を有せず、集合Bと集合B'とに於ても亦然り、故に集合Aより集合Bへの經過と、集合A'より集合B'への經過とは、彼等自身に於ては、一般に何等の共通せる部分をも有せざる二變化なり。

然しながら、この二變化は何れも吾人が轉位と看做す所のもの、更に進んでは吾人が同一轉位と看做す所のものなり、そは如何にして此に到れるか。

こは單に此等の變化が、何れも我等の身體の同じ互關運動に由りて、矯正せられ得るに依る。

故に二現象の間に連絡を組成するものは、唯互關運動なり、之なくば、吾人は之

を接近せしむることを、夢想だもなし得ざるべし。

又他方に於て、吾人の身體は、其關節及び其筋肉の排置に依り、千差萬別の運動をなし得べし、されど其運動は、悉く外物の變化を矯正するに堪ふるものにはあらず、此等の運動は、唯我等の全身若しくは少なくも之に關與する我等の感覺機關の全部が、石塊の如くに、即ち其相對的位置に變動なくして、固體樣に轉位する場合のみに於て之に適す。

之を要するに

(第一)　吾人は先づ二種の現象の範疇を區別することに導かる、

一は不隨意にして、筋覺の隨伴なく、外物に賦與せらるるものにして、外的變化即ち是なり、

他は其特性反對にして、我等の身體の運動に賦與せらるるもの、內的變化即ち是なり。

(第二)　玆に注目すべきは、此の各範疇に屬する變化が、他範疇の互關變化に由りて、矯正せられ得る事是れなり。

(第三)　外的變化の中に就きて、吾人の特に注意すべきは、一の互關變化を他範疇の中に有するものにして、即ち之を轉位と稱す、又同樣に內的變化の中に就きて、互關變化を第一範疇の中に有するものを區別す。

斯の如く互關に依り、轉位と稱する特殊現象の定義を下したり、此の現象に關する定律は、即ち幾何學の對象をなす所のものなり。

「オモゲン」の定律　この定律の第一は即ち「オモゲン」の定律なり。

一の外的變化αに由りて、吾人は印象の集合Aより集合Bに移ること、次にこの變化αが隨意互關運動βに由りて矯正せられ、かくて吾人が集合Aに復歸するものと假定せむ。

今又他の外的變化α'が、吾人をして更に集合Aより集合Bに移らしむることを假定せむ。

實驗によれば、此の變化α'は、隨意互關運動β'に由りて矯正せられ得ることαの如く、而してこの運動β'は、αを矯正せし運動βと同一なる筋覺に對應す。

この事實をば、通例空間が「オモゲン」(成素等齊の意)にして「イソトロップ」(何れの方

向に就きても同一の性質を有するの意)なりと陳述す。

又一度生じたる運動は、其性質に變動なくして、第二回第三回更に回を追ふて反復せられ得と言ふことを得べし。

第一章に於て數學的推理の本性を研究するに方り、吾人は同一の作用を限りなく反復することの可能が、極めて重大なるを見たり。

數學的推理は、この反復によりて其効力を得るなり。

十全を欲すれば「オモゲン」の定律に附加するに、尚他の許多の定律を以てするを便利なりとすべし、但し其細目に至りては、余の深く立入ることを好まざる所なり、されど數學者は唯一語を以て之を約言す、曰く此等の轉位は一の「群」を成すと。

非ユークリッド世界、 若し幾何學的空間が、個々別々の表現の組枠ならば、この組枠なくして像を表現するは不可能ならむ、而して吾人は吾人の幾何學を變化し得ざらむ。

然るに、こは決して事實にあらず、幾何學はこれ等の像の、よりて相繼續する所の諸定律の約述に外ならず、故に總ての點に於ては我等の通常の表現法に類似するも、吾人の慣用する定律とは異なれる定律に從ひて繼續する像の一列を假定するも何等の妨げなし。

故に我等のと異なれる定律の行はるる周圍の中にて敎育せられたる者には、吾人の幾何學と、甚だ異なる、一の幾何學を有し得ることを了解すべし。

例へば一の大なる球の中に包容せられて、次の如き定律に從ふべき一の世界を假定せむ。

この世界に於て温度は齊一ならず、中心に於て最高度を示し、夫より遠ざかるに隨ひ次第に減小し、この世界を包容する球の表面に達するときは、其温度は絕對零度に歸す。

更にこの温度の變化する所の定律を、一層明確に示すには、Rを球の半徑、rを其內の任意の一點より球心に至る距離とすべし、然らばその一點に於ける絕對温度は、R^2-r^2に比例すべし。

余は又この世界に於て、總ての物體が同一の膨脹率を有し、任意の定木の長さ

は、其絶對温度に比例するものと假定す。

終りに余は、温度の異なる一點より他點に轉送せらるゝ一物が、一瞬時に新周圍との熱の釣合に達すと假定すべし。

この臆說に於て、何等の矛盾若しくは想像すべからざるものあるなし。此世界に於ては、一の動體は、球の表面に近づくに隨ひ、益々小さく成るべし。先づこの世界が、たとへ吾人の慣熟せる幾何學の見地に於て有限なりとも、其住民には無限と見ゆることに注目すべし。

何となれば、若し彼等が球の限界に近寄らんと欲せば、總てのものは放冷せられて次第に縮小するが故に、彼等がとる所の歩武も亦次第に減小するを以て、決して球の限界に達することを得ず。

若し、吾人にとりて、幾何學が不變固體の運動を主宰する定律の研究に過ぎざるときは、上に述べたる想像世界に於ては、幾何學は上述の如き温度の相違によりて變形する、固體の運動を支配する定律の研究たらん。

無論、吾人の世界に於ては、天然の固體は一樣に、温熱と寒冷とに起因する形狀と體積との變更を受く、されど幾何學の基礎を定むるに當りては、吾人はこの變更を省略すべし、何となれば其變更は、甚だ微弱なる上に不規則にして、從つて吾人には恰も偶發の如き觀をなせばなり、然れどもこの假設世界に於ては、之と趣を異にせり、而して其變更は、規則正しくして甚だ簡單なる定律に從ひ、この世界の居住者の身體を構成する各種の固體部分も亦、形狀及び體積の同一變更を受くべし。

余は尙他の臆說を取らん、余は光線が、種々の屈折係數を有する、而して其屈折率がR^2-r^2に反比例をなす如き、媒質を透過することを假定す、この條件の下には、光線の進路の、直線にあらずして圓狀なることを知るは容易なり。

以上述ぶる所を是認するには、外物の位置に偶生せる或る變化が、この想像世界に棲息する生物の互關運動に由りて、矯正せられべきことを證明すれば足れりとす、而してこは、この有感の生物の受けたる印象の原集合を恢復するやうにするにあり。

例へば一物體が不變固體の如くならずして、上の假定に於ける温度の定律に、

正しく適合する不等膨脹を感ずべき固體の如くに、轉位し又變形すると假定せむ、而して略言して、余は個樣なる運動を非ユークリッド轉位と稱せん。

若し一の有感の生物が近傍に存在するときは、其印象は物體の轉位に由て變化すべし、されど其者は自身に適當の運動をなして、其印象を恢復すべし、されば結局は、物體と其有感の生物との集合が、單一體を成す如くに看做され、余の非ユークリッド的と稱する、この特殊なる轉位の一を經驗し得たらば足れり、而してこは此等の動物の四肢が、彼等が住める世界の他物と、同じ定律に從て膨脹すと假定するときに於て可能なり。

吾人の慣熟せる幾何學の見地に於ては、物體がこの轉位に於て變形すれば、其種々の部分は、もはや全く同一の相對的位置に歸らざれども、ここには吾人は、この有感動物の印象が、同一情況に復することを見んとす。

如何にも、若し種々の交互の距離が變じ得るときと雖も、最初觸接せし諸部分は、更に又觸接に復すべし、故に觸覺的印象は變化せず。

又一方に於て、前に光線の屈折及び屈折率につきて述べし臆說に注目すれば、視覺的印象も、亦依然として同一狀態を存するを見るべし。

されば、この想像動物は、吾人がなす如くその觀察せる現象を類別し其中に就きて、隨意互關運動に由りて矯正せられ得べき「位置の變化」を區別すべし。

若し此等の動物が一の幾何學を創設するときは、そは我等の幾何學の如く、我等の不變固體の運動の研究にはあらず、そは其動物が斯く區別したる位置の變化の研究にして、其變化は「非ユークリッド轉位」に外ならず、是れ即ち非ユークリッド幾何學なり。

故に個樣なる世界に敎育を受けたる我等に似たる者は、我等と同一の幾何學を有せざるべし。

四次元世界　非ユークリッド世界と同樣に、四次元世界を表現することを得。

視覺は、一眼を以てすら、眼球の運動に關係する筋覺と相合し、吾人をして三次元空間を認めしむるに十分なるべし。

外物の像は、二次元の板面をなせる網膜の上に來りて畫像を表はす、是れ即ち寫影なり。

然るにこの外物は、可動なること我が眼と同様なるを以て、吾人は相異なる多數の位地に於ける同物體の、種々の寫影を逐次に認むることを得。

吾人は一の寫影より他の寫影への經過が、往々筋覺を隨伴せしむることを同時に確認す。

若し寫影Aより寫影Bへの經過、及び寫影A′より寫影B′への經過が、同じ筋覺を隨伴せしむるときは、吾人は之が聯絡を計ること、恰も同じ性質の作用に於けるが如くす。

次にこの作用の聯結せらるゝ諸定律を研究して、吾人は其作用が、不變固體の運動と同じ構造を有する、一群を成すことを知る、

而して吾人はこの群の性質より、幾何學的空間の觀念、及び三次元の觀念を摘出せしことを見たり。

斯の如くにして吾人は、三次元空間の觀念が、如何にして各二次元に過ぎざるこの寫影の觀察より生ずべきかを了解す、何となれば、此等の寫影は或る定律に從て相繼續し來ればなり。

然らば、之と同様に、三次元的圖形の寫影を平面上に作るが如く、四次元的圖形の寫影を三次(又は二次)元の組枠上に作ることを得べけん、こは幾何學にとりて、は唯見戲に過ぎず。

尚又同一の圖形につき、種々の見地より許多の寫影を取ることを得、而して吾人は容易に此等の寫影を表現することを得、何となれば其圖形は三次元なるに過ぎざればなり。

同一の物體の種々の寫影が、逐次に相繼續せりと想像し、又一より他への經過には、筋覺の隨伴ありと想像せむ。

この經過の中の二つが、同じ筋覺に隨伴せらるゝならば、其經過は恰も同じ性質の二作用の如く看做すべきことを論を待たず。

然るときは、この二作用は、吾人の欲する所の定律に從ひて、相結合せらるゝものとするを得、例へば四次元的不變固體の運動の群と、同じ構造を有する一群を形作りて、結合せらるゝものと想像するも妨げなし。

斯くして玆に吾人の表現し得ざるものは、一もあることなし、されどこの感覺

は、正しく二次元的網膜面を具へて、四次元の空間中に轉位し得べき動物が感得すべき感覺なり。

四次元を表現し得べしと言ふを得るは、即ちこの意味に於ての事なり。

結論　吾人は、實驗が幾何學の發生に於て缺くべからざる任務を有せることを見る、されど是に由て幾何學が、假令其一部分なりとも、實驗的科學なりと論結するは誤れり。

若し幾何學が實驗的ならば、そは近似的にして一時的たるに過ぎざらむ、而してそはいかに粗雜なる近似法なるぞや。

幾何學は固體の運動の研究に過ぎざらむ、されど其實幾何學は、天然固體を論究するにはあらずして、其對象は絕對的不變の或る理想的固體にして、大に單純化せられ、極めて實物に遠き像に外ならず。

これ等理想的物體の觀念は、全體に於て、我等の精神により構成せられたるものにして、實驗は吾人をして之に至らしむるための機會に外ならず。

此の如きは即ち幾何學の對象なり、そは一の特殊なる「群」の研究なり、而して群の一般的概念は、既に少くも潜在的に我が精神中に存せり、其概念は我が感性の形としてにはあらず、理智の形として吾人に與へらるるものなり。

而して唯、總ての可能群の中に就き、吾人が自然の現象を歸せしむる所の基本と爲るべきものを選定するを要す。

實驗は吾人にこの選定を與へざるも、然かも吾人をこの選定に導く、實驗は吾人をして何れが最も眞正なる幾何學なるかを知らしめず、されど最も便利なる幾何學を知らしむ。

玆に注目すべきは、余が普通幾何學の語を用ふるを廢せずして、上に想像したる虛構の世界を記し得たるの一事なり。

如何にも、若し吾人が其世界に轉置せられたらんとも、此の語を變ずるの要なからん。

其世界にて敎育されたる動物は、無論吾人のと異なる、彼等の印象に一層善く適合する所の、幾何學を創定するを一層便利と認むるならむ、然れども吾人にとりては、如何なる世界に轉置せらるゝとも、同印象に面しては、吾人の習慣を變換

せざるを便利とすることを勿論にあらずや。

第五章　實驗と幾何學

第一　前章に於て、余は既に、幾何學の原理は實驗上の事實にあらざること、及び特にユークリッドの公準が、實驗に由りて證明するを得ざることを說明するため、反覆數事に論究したり。

如何なる理由を以て余を說服せんとするも、余は余の見る所を固く執りて動かず、何となれば多くの人の心には、深く根ざせる迷謬の觀念あればなり。

第二　物質的の圓を實現し、其半徑及び周を測り、而してこの二つの長さの比が皆に等しきや否やを求むるときには、其前に我等は何をなすべきか、我等は先づこの圓きものを實現せる物質、及び其實測に用うる「メートル」器が作らるゝ所の物質の性質に就て、實驗を行ふべし。

第三　**幾何學と星學**　吾人は他の方法にて、同様の問題を提出すべし、若しロバチェヴスキーの幾何學が眞ならば、極めて遠き星の視差は有限なるべし、若し又リーマンの幾何學にして眞ならば、其視差は負なるべし、是れ實驗に於て近づき

得べきが如く見ゆる結果にして、星學上の觀測が、三つの幾何學の間に、眞僞の決定を與へ得んことは、人の冀望する所なりき。

然るに、星學に於ける直線と稱するものは、單に光線の徑路の事なり、されば、吾人にして不可能を冒して、負の視差を看出さんとするか、又は總ての視差が或る極限より大なることを證明せんとするときは、次の二つの結論の間に選擇を行ふこととならむ、吾人はユークリッド幾何學を否認するか、然らざれば光學の定律を變更して、光線が嚴正には直線的に進行せずと假定するかと。

世人は一般にこの解釋を便利とは看做さじ。

故にユークリッド幾何學は、何等の新實驗をも敢て恐るる所なし。

第四　我等は果して、ユークリッド空間に於て可能なる現象が、非ユークリッド幾何學に於て不可能となり、此等の現象を確認する實驗が、直ちに非ユークリッド臆說に矛盾すべしと主張し得るか、余は個樣なる問を眞面目に設くるを得ず、余の說に從へば、其問は全く次の問に等しく、其の不條理は誰が目にも明かなり、米突及粍にて表示し得るも、丈、尺及び寸にては計り得ざる長さありて、この長さの存立を確認する實驗は、十尺に分たれたる一丈ありと云ふ臆說に矛盾するかと。

今此問題をば、更に立ち入りて吟味せんとす、余は直線がユークリッド空間に於て、A及びBと名くる任意の二性質を有し、非ユークリッド空間に於ては、尙Aなる性質を有するも、Bなる性質を有せずと假定し、終りにユークリッド空間にても、非ユークリッド空間にても、Aなる性質を具ふる線は、唯直線のみに限ることを假定す。

若し斯の如くならんには、實驗はユークリッドの臆說とロバチェヴスキーの臆說との、是非を裁斷するを得べし、實驗を加へ得べき、例へば輳合せる光線の如き具體物が、Aなる性質を具ふることを確認し、是に由りて其物が直線的なることを論結し得べく、次に其物が性質Bを具ふるや否やを探究し得べし。

されど事實は斯の如くならず、この性質Aの如く、直線を認知し、而して之を總ての他の線と區別せしむる、絕對的判別條件となるべき性質は現存せず。

例へば「この性質は次の如くなるべし、直線は、之を一部分となせる一圖形が、之

に屬する點の交互の距離を變ずることなくして動き、而してこの線上にある總ての點のみが、依然として靜止する如き線なり」と言ふべきか。

是れ即ちユークリッド、若しくは非ユークリッド空間に於て、直線に屬し、而して唯直線にのみ屬する一の性質なり、されど如何にして、實驗に由り、此性質が或る具體物に屬することを認知すべきか、距離は測定するの要あり、而して、如何にして、余が物質的器械を以て測りたる具體的量が、善く抽象的距離を表現し得ることを知るべきか。

我等は唯困難を遠ざくる一法あるのみ。

實に、余の上に陳述せし性質は、單に直線の一性質たるのみにあらず、乃は直線及び距離の一性質たり、この性質が絕對的判別條件の用に供せらるべきためには、啻に其性質が、直線にあらざる他の線、及び距離に屬せざるのみならず、尙は又直線にあらざる他の線、及び距離にあらざる他の大さにも、屬せざることを證明することと必要ならむ、然るに其事は眞ならず。

若し人がこれ等の考察に由りて承服せずんば、ユークリッドの體系に於て解釋せらるるも、ロバチェヴスキーの體系に於ては解釋し得ざる具體的實驗を、余に示すを得んか。

余はこの挑戰が、決して應ぜられざることを熟知するを以て、次の如く論決し得べし。

如何なる實驗も、ユークリッド公準とは決して矛盾せざるべし、而して又其一方に如何なる實驗も、ロバチェヴスキーの公準と矛盾せざらむと。

第五　されど、ユークリッド又は非ユークリッド幾何學が、決して直接に實驗の反抗を受くることを得ず、と云ふ事にては十分ならず、理由充足の原理及び空間の相對性の原理を犯すにあらざれば、實驗と融和し得ざるが如き事あらざるか。

余は自ら之を說明せんとす、任意の物質的體系を考へ、一方に於てはこの體系の狀態(例へば溫度、電氣「ポテンシャル」等)を視察し、又他方に於ては空間に於ける其位置を視察せむ、而してこの位置を定むる條件の中に就き、吾人は物體の相對的位置を定むべき、これ等物體の交互の距離、及びこの體系の空間に於ける絕對的位置と方位とを定むる條件を區別すべし。

この體系の中に生ずる諸現象の定律は、ろの物體の狀態と其交互の距離とに關すべし、されど空間の相對性と其惰性との理由を以て、其定律は體系の絕對的位置及び方位には關せざるべし。

換言すれば、或る瞬間に於ける物體の狀態、及び其交互の距離は、單に最初の瞬間に於ける同物體の狀態、及び其交互の距離に關すべしと雖も、毫も、其體系の最初の絕對的位置、及び其最初の絕對的方位には關せざるべし、余はこのことを相對性の定律と略稱せん。

余は是れまでユークリッド幾何學者の資格を以て語れり、されど余は言明せり、實驗は、如何なるものにても、單にユークリッド臆說に於て解釋を充すのみならず、又併せて非ユークリッド臆說に於ても之を充すべしと、されば吾人は許多の實驗を行ひ、先づ之をユークリッド臆說に從つて解釋し、而して斯く解釋されたるこの實驗が「相對性の原理」を犯すことなきことを認知し、次に之を非ユークリッド臆說を以て解釋せんとするならば、こは常に可能なり、唯この新解釋に於ける諸物體の非ユークリッド的距離は、一般に最初の解釋に於けるユークリッド的距離とは同じからざるべし。

然らば、この新しき方法にて解釋せられたる吾人の實驗は、尙ほ我等の相對性の定律と一致すべきか、又この一致が存立せざるならば、我等は尙は實驗が非ユークリッド幾何學の虛妄を證明したることを、言明する權利なからんか。

この恐怖の無用なるは看易きの理なり、如何にも、嚴密に相對性の定律を適用し得るためには、之を全宇宙に適用するを要す、何となれば、若し單に宇宙の一部分を考へ、而して若しこの部分の絕對的位置が變動を來すときは、宇宙の他の物體に至る距離は齊しく變動し、隨て宇宙の該部分に於ける其影響は增減し得るならむ、而してここに生ずる現象の定律は變更せられむ。

然るに、若し吾人の考ふる體系が全宇宙なるときは、實驗は空間に於ける其絕對的位置及び方位につきて示すべき能力なし、吾人の器械が如何程完全なりとも、吾人に知らしむる所は、唯宇宙の種々の部分の狀態と其交互の距離とに在り。

是に由て我が相對性の定律は、次の如く陳述せられ得べし、

任意の瞬間に於て、吾人が吾人の器械の上に讀み得べき所のものは、單に最初

の瞬間に、この同じ器械の上に讀み得べかりしものにのみ關すべし。

然るに斯の如き陳述は、實驗の總ての解釋とは獨立なり、若し此定律がユークリッド解釋法に於て眞なれば、之は又非ユークリッド解釋法に於ても眞なるべし。

余は更にこの件に關し、少しく枝葉に渉りて述べんとす、余は上に、體系をなせる諸物體の位置を定むる所の、與件につきて論せり、余は又齊しく、其速度を定むる所の與件にも論及するを要す、是に於て一方に於ては、各種物體の交互距離が、よりて以て變化する所の速度、及び他方に於ては、體系の移動及び回轉の速度、即ちこの體系の絕對的位置、及び其絕對的方位の、よりて以て變せらるる所の速度を區別すべし。

このとき我等を十分滿足せしむるためには、相對性の定律が次の如く陳述せらるるを要すべし。

任意の瞬間に於ける物體の狀態及び其交互の距離は、この距離が、よりて以て變する所の、之の瞬間に於ける速度と共に、唯最初の瞬間に於けるこの物體の狀態、及び其交互の距離にのみ關す、されども之は體系の最初の絕對的位置にも、其最初の絕對的方位にも、又最初の瞬間に於ける、この絕對的位置及びこの絕對的方位が、よりて變ずる所の速度にも關せず。

然るに不幸にして、斯く陳述せられたる定律は、少なくも通常の解釋にては、實驗と一致せず。

人あり、天が間斷なく濃霧に覆はれて、毫も他星を窺ひ得ざるが如き、一の遊星の上に轉置せられたりと假定せむ、彼れは、恰も此星が空間に孤在せるものゝ如くに思ひて、此星の上に生活せん、されどこの人は其楕率を測定す(此測定は通例星學的觀測に依る、されど又純測地學的方法に基くも可なり)るか、或はフーコー Foucault の振子の實驗を行ひてか、何等かの方法によりて、この遊星の回轉を認知すべし、故にこの遊星の絕對的回轉は、明白に認めらるるを得べし。

偖て此處に哲學者の思想とは衝突すれども、物理學者の承認するを餘儀なくせらるる事實あり、之は人の知る如く、ニウトン Newton が絕對的空間の存在を決定したる事實なり、されども余は何等の方法によるも、この見方を採用するを得ず、

其理由は第三編に至りて說明すべければ、余は今はこの困難を不問に措かむ。

されば、余は相對性の定律の陳述に當りては、物體の狀態を定むる所の條件の中に、あらゆる種類の速度を混合することを斷念せざるべからず。

そは余の關する所にあらず、この困難はユークリッド幾何學及びロバチェヴスキー幾何學にとりては同一なるを以て、余はここに之に抛念せずして可なり、余は唯玆に其一端を漏らすの機會を採り置くのみ。

約言すれば、如何なる方法を以て反省するとも、幾何學的經驗派に條理ある意味を發見すること不可能なり。

第六　實驗は吾人に物體交互の關係のみを知らしむ、何等の實驗も、物體と空間との關係、或は空間の種々の部分の交互の關係の上に及ばず、又之に及ぶを得ず、讀者は之に答へて言はん、然り、唯一個の實驗にては不十分なり、何となれば其實驗は許多の未知數を含める唯一個の方程式の外には、與ふる所なければなり、されど若し十分に多くの實驗を行ふときは我等は總ての未知數を決定するに足る所の方程式を得べしと。

大檣の高さを知るとも、船長の年齡を計ふるに足らず、船體の總ての木片を十分に測定せば、十分に多數の方程式を得べきは勿論なるも、そは尙は未だこの年齡の計算には十分ならず、この木片の上に施せる總ての測定は、この木片に關係する事物の外には何事をも示し得ず、之と同樣に、實驗が何程夥多なるも、そが唯物體交互の關係にのみ及べるものならんには、空間の種々の部分の交互關係の上には、何事をも示すことなかるべし。

第七　讀者は言はん、若し實驗が物體の上に及べるときは、其實驗は少なくも物體の幾何學的性質に關係すべしと。

之に答ふる爲めに先づ讀者に問はん、所謂物體の幾何學的性質なるものの意味如何と、余は此疑問は物體と空間との關係に關するものと推測す、されば、この幾何學的性質は、物體交互の關係以外には及ぶ所なき實驗によりて、接近し得べからざるものなり、而して疑問となり得る所のものは、この性質にあらざることを示せば足らむ。

故に先づ、この語即ち物體の幾何學的性質の意味につき、吾人の解釋を述べむ。

余が物體は許多の部分より成ると云ふとき、余はその幾何學的性質を陳述せずと假定す、而して此事は、眼前にとれる物體の最小部分に、不適當なる點なる名稱を與ふるに同意したるときと雖も、尙ほ依然として眞なりとす。

余が或る物體の彼此の部分が、他の物體の彼此の部分と觸接すと云ふとき、余はこの二物體の交互の關係にのみ關し、而して其空間との關係には關することなき一の命題を陳述せるなり。

然らば余は、讀者が此等をその物體の幾何學的性質にあらずとなすに於て、余と一致するを想像す、余は少くも讀者が、この性質の數量的幾何學の全部と相關せずとすることにつきて、余と一致するを確信す。

之を許容したりとせよ、而して玆に同一の點Oに於て會せる、八個の細き鐵棒OA,OB,OC,OD,OE,OF,OG,OH より成れる一の固體ありと假定し、又他に第二の固體、例へば一の木片を有し、其上に三個の墨痕 α, β, γ を印したりとせむ、而して余は αβγ と AGO(余のかく云ふ意は α はA、又同時に β はG、而して γ はOと觸接するを云ふ)とを觸接せしめ、然る後 αβγ を逐次に BGO,CGO,DGO,EGO,FGO,次に AHO,BHO,CHO,DHO,EHO,FHO と觸接せしめ、次に αβ を逐次に AB,BC,CD,DE,EF,FA と觸接せしめ得るものと確認す。

然らば是れ即ち空間の形、若しくは數量的性質に關して、豫め何等の觀念をも有することなくて行ひ得べき確認なり、この確認は毫も「物體の幾何學的性質」に關係する所なし、又この確認は、實驗を施すべき物體が、ロバチェヴスキーの群と同じ構造の群に從つて(余のかく言ふは、ロバチェヴスキーの幾何學に於ける固體と同じ定律に從つての意なり)動かんには、不可能なるべし、されば此確認は此等の物體がユークリッドの群に從つて動くこと、或は少くともロバチェヴスキーの群に從つて動かざることを、證明するに十分なり。

この確認がユークリッドの群と相容るべきは、看易き理なり。何となれば、若し物體 αβγ が直角三角形の形を現はせる我等の普通幾何學の不變固體にして、點 A,B,C,D,E,F,G,H が ABCDEF を共通の底とし、一はGを、他はHを頂點とせる二個の普通幾何學に於ける正六角錐體の頂點なるときは、この確認をなし得べければなり。

次に上の確認の代りに、$\alpha\beta\gamma$ を逐次に AGO,BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, AHO,BHO, CHO, DHO, EHO, FHO の上に重ね、次に $\alpha\beta$(此度は γ にあらず)を逐次に AB, BC, CD, DE, EF, FA の上に重ね得ることを、我等が認めたりと假定せむ。

然らば是れ即ち二物體 $\alpha\beta\gamma$ 及び OABCDEFGH が不變固體なるとき、前者を直角三角形とし、後者を適當の大さを有する二重正六角錐とすれば、非ユークリッド幾何學に於て當さになし得べき確認なり。

故に若し物體がユーウクリッド群に從つて動くときは、この新確認は可能ならず、されど、物體がロバチェヴスキー群に從つて動くことを假定せば、其確認は可能となるべし。されば當面の物體がユークリッド群に從て動かぬことを證明するためには、この新確認をなすことにて十分ならむ。

故に空間の形及び性質の上、及び物體と空間との關係上に、何等の臆說をもなすことなく、物體には何等の幾何學的性質を賦與することなく、余は余をして、一の場合に於ては、實驗に供せらるる物體が、ユークリッド的構造の群に從つて動くこと、又他の場合に於ては、其物體がロバチェヴスキー的構造の群に從つて動くことを、證明せしむる所の確認を得たり。

而ゝも吾人は、この確認の第一は、空間がユークリッド的なるとを證する實驗、第二は、空間が非ユークリッド的なるとを證する實驗を、構成すとは言はざるなり。如何にも、物體が第二の確認を可能となすやうに、動くことを想像し得るならむ(余が想像し得と言ふに注意せよ)。そは新來の器械師も少しく心を勞せば、構成し得べき所のものなり、さりながら讀者は空間が非ユークリッド的なることを斷言し得ざるべし。

かくして、器械師が此の如き異種の物體を構成したる時にも、尋常の固體が依然として存立するとと同じく、空間は同時にユークリッド的にして、又非ユークリッド的なりと論決するを要するならむ。

例へば、ここに半徑Rの一大球を有し、その溫度は、余が非ユークリッド世界の記述に際して語りたる定律に從ひ、この球の中心より其表面に近づくに隨ひ、次第に減小するものと假定せむ。

吾人は、膨脹の無視せらるべき、尋常の不變固體の如く看做さるべき物體と共

に又一方には甚だ膨脹し易くして、非ユークリッド固體として看做さるべき物體とを有するを得む。吾人は二つの二重六角錐OABCDEFGH及びO'A'B'C'D'E'F'G'H'と、二つの三角形 αβγ 及び α'β'γ' とを有するを得む。二重六角錐の第一は直線形にして、第二は曲線形とせむ。三角形 αβγ は非膨脹の物質にて作られ、他の三角形 α'β'γ' は、極めて膨脹し易き物質にて作らるゝとせむ。

然るときは、二重六角錐 OAH 及び三角形 αβγ を以て、確認の第一を作り、二重六角錐 O'A'H' 及び三角形 α'β'γ' を以て、其第二を作ることを得む。而して實驗は先づユークリッド幾何學が眞なることを證し、次に其幾何學が僞なることを證するものの如くならむ。

故に實驗の及ぶ所は空間の上にあらずして唯物體の上にあり。

補遺

第八　若し十分を期せば、余は甚だ緻密にして且つ甚だ長き開陳を要する問題につきて語るを要す、されど玆には余が二つの雜誌「形而上學及び倫理學評論」Revue de Métaphysique et de Morale 及び雜誌「一元論者」Monist の中に說明せし事柄を約言するに止むべし。

空間が三次元を有すと云ふは、之を如何なる意味にか解釋すべき。

吾人は我が筋覺に由りて現はるゝ「內的變化」の重要なることを見たり、其變化は、我等の身體の種々の態度に、特性を附するの用をなし得べし、今起點として任意にこの態度の一つAを取らむ、若し吾人が、此原態度Aより他の任意の態度Bに移る時は、吾人は一列の筋覺Sを感得し、而してこの感覺列SはBを定むべし、而して吾人は往々、二つの感覺列S及びS'をば、同一の態度Bを定むるものと、看做すことあり、(何となれば、初と終との態度A及びBは、依然として不變にして、中間態度及び對應感覺は、相異なるを得ればなり、)吾人は如何にして、この二つの感覺列の相等を認知すべきか、そは此二列が同一の外的變化を償ふ用をなすべきを以てなり、或は尙は、一般に云はば、外的變化に對して、感覺列の一は、他にて置換へらるゝを得るを以てなり。

この感覺列の中に就き、吾人は特に外的變化を代償し得るものを取り、之を轉位と稱したり、吾人は極めて接近せる二轉位を辨別し得ざるを以て、この轉位の

集合は、物理學的連續の特性を表はす、經驗に據れば、こは物理學的六次連續の特性なり、されど吾人は尙ほ未だ空間其物の幾次なるかを知らず、故に吾人は先づ他の一問題を解釋するを要す。

空間の一點とは何ぞ、世人は皆之を知ると信ずと雖も、こは妄想なり、吾人が空間の一點を表現せんことを求むるとき、吾人の見る所の物は白紙上の黑點、或は黑板上の白點なり、こは常に實物なり、故に問題は次の如く解釋するを要す。

若し余が、物體Bが直ぐ前に物體Aが占めしと同じ點に在りと言ふ時、この意味果して如何、或は又如何なる判別條件が、余をして之を認めしむるや。

假令余は動かずとも是れ余の筋覺の示す所、余の第一指は前に物體Aに觸れて、今は物體Bに觸れつゝありと答へんと欲す、余は又他の判別條件、例へば他の指又は視覺を用うるを得む、されど第一の判別條件にて足れり、余はこの判別條件が然りと答ふれば、他の總ての條件も亦同じ答を與へんことを知る、余は之を實驗に由りて知る、余は之を先天的に知るを得ず、余が觸覺は距離を隔てて離れながら働かずと言ふも、之が爲めなり、こは同一の實驗的事實を陳述する別方法なり、之に反して、若し余が視覺は距離を隔てゝ働くと言ふときは、こは視覺に由りて供せられたる判別條件が然りと答ふるに、他の條件が否と答ふるの意なり。

約言すれば、余の身體の各態度に對し、余の第一指は一點を定む、空間の一點を定むるものは是なり、而して是のみに限る。

各態度には斯の如く一點の對應するあり、されど往々同一の點が、相異なる許多の態度に對應することあり、我指が動かずして、身體の殘部が動きたるが如きは、即ちこの場合に屬す。

故に吾人は、態度の變化の中に就き、特に指の動かざる變化を區別す、吾人は如何にしてここに導かるるか、こは往々吾人が、指と觸接する物體が、この變化に於て、この觸接を絕たざるを認むるに由る。

されば吾人が、斯く區別したる變化の一によりて、互に導き出さるゝ總ての態度を、同じ組の中に整列せんとす、然らば同じ組中の總ての態度に、空間の同一點が對應すべし、故に各組に對應する一點ありて、各點に對應する一組あり、されど我等の實驗の及ぶ所は點に在らず、こは此變化の組に在り、或は寧ろ之に對應す

る筋覺の組に在りと言ふを得べし。

かくて吾人が、空間は三次元を有すと言ふときは、吾人は單に、この組の集合が、物理學的三次連續の特性を以て、吾人の目に映ずと云ふ意味に、之を解釋せんとす。

若し空間の點を第一指の幇助に由りて定むる代りに例へば他の指を用うるときも、其結果は同一なるべきか、こは毫も先天的に明白なるにあらずと雖も、吾人が旣に見たる如く、實驗は我等の總ての判別條件が一致和合することを證明せり、是れ即ち吾人をして然りと答へしむる所以なり。

若し吾人にして、吾人が先きに轉位と名けたる、而して其集合は、吾人の知れる如く、一の群をなせる所の者に立ち歸るときは、吾人は指が動かざる時の變化を區別するに至るべし、上述せし所に由りて、空間の一點を定め得るものは、この轉位にして、其集合は吾人の所謂群の部分群を構成すべし、されば此の種の部分群には、空間の一點の對應あるべし。

吾人は、吾人をして空間の幾次元なるかを知らしむるものは、實驗なりと論決するを得ざるにあらず、然れども其實ここにも尙ほ、吾人の實驗の及ぶ所は、空間にあらずして、我等の身體及び近圍の物象との關係に在り、且つ其實驗は極めて粗漫なり。

吾人の精神の中には、元來若干數の群の潜伏觀念の先在するあり、是れ即ちリ――Lie の理論をなせる所のものなり、吾人がよりて以て自然現象を比較する所の、一種の基本單位を形作るには、何れを選ぶべきか、又この選ばれたる群の中に就き、何れをか、空間の一點を定むるために、我等が取る所の部分群と爲すべきか、實驗は我等の身體の性質に最も善く順應すべき選擇法を示し、以て吾人の嚮導をなす、但其任務は之に盡きて、嚮導以上に及ぶことなし。

第三編　力

第六章　在來の力學

英國人は力學をば、實驗上の一科學として教授す、大陸に於ては常に、之を多少演繹的及び先天的の科學として說明す、英國人の仕方が理に叶へることと勿論なり、されど、如何なれば斯くも久しき間、大陸の學者が舊慣を固守し得たるか、何故に先行者の習慣を脫するに汲々たりし大陸の學者が、多くは此の點に關してのみ、全く其餘弊を脫することを得ざりしか。

又他方に於て、若し力學の原理が、實驗の外に別の起因を有せざるならば、其原理は近似的及び一時的たるに過ぎざるか、何れの日にか、新實驗の吾人を導きて之を變更し、或は剩へ之を棄却し得ることとなきや。

是等は即ち自然に生ずべき疑問にして、其解釋の困難は、主として力學の著書が、實驗の何たるか、數學的推理の何たるか、規約の何たるか、臆說の何たるかを、甚だ明瞭に辨別せざるより來るものなり。

而して論議すべきは、未だ之にて盡きざるなり。

(第一)　絕對的空間なるものは現存せず、而して吾人は唯相對的運動をのみ理會す、されど人多くは、恰も絕對的空間ありて、力學的事實を之に憑據せしめ得るが如くに陳述す。

(第二)　絕對的時間なるものはなし、二つの時間が相等しと言ふは、本來何等の意味もなき斷言にして、其斷言は、唯規約に由りて一の意味を領得し得べきものなり。

(第三)　啻に吾人が、二つの時間の相等の直覺を有せざるのみならず、尙又吾人は、相異なる場所に生ずる二つの事象の、同時の直覺をすら有せず、ろは余が或る雜誌(Revue de Métaphysique et de morale)に於て「時間の測定」と題せる一論文にて、說明せし所の事なり。

(第四)　終りに、吾人のユークリッド幾何學其物は、言語の規約の一種に過ぎず、吾人は力學的事實をば、非ユークリッド空間に據りて陳述するを得ん、而して尋常の空間に據るよりは便利少しと雖も、而かも其陳述は、尋常の空間に據ると全く同

樣に正當ならん、其陳述は大に錯雜とならん、されど依然として可能ならむ。

故に絕對的空間、絕對的時間、尙又幾何學と雖も、力學の上に加へらるゝを要する條件にはあらず、此等總ての事項が、素より力學に先在せざるは、恰も論理上、佛語が佛語にて表はせる眞理に先在せずと、云ひ得ると一般なり。

力學の基本定律をば、これ等總ての規約と獨立なる語にて、陳述せんと力むるを得む、斯くしてこの定律其物の何たるかを、最も善く明かにし得ること疑なし、是れアンドラード Andrade が其著「物理力學敎程」Leçons de Mécanique physique に於て、少なくも一部分なりとも、成さんと試みし所なり。

この定律の陳述が一層複雜となるは、言を須たず、何となれば上述の總ての規約は、正~~さ~~しくこの陳述を省略し簡約するため、假定せられたるものなればなり。

余は今絕對的空間に關係する總ての困難をば、度外に措かむ、こは余の之を知らざるがためにあらざるは勿論にして、吾人が第一編及び第二編に於て、旣に十分に之を吟味したるが爲なり。

夫れ故余は暫らく一時的に絕對的時間及びユークリッド幾何學を認許することゝせん。

惰性の原理　何等の力の作用をも受けざる物體は、唯一樣なる直線運動をなし得るのみなり。

是れ先天的に精神上に顯はるる眞理なるか、若し果して然らば、何故に古代希臘人の知る所とならざりしか、何故に彼等は、之を起す原因の去るや否や、運動が中止すべしと信じ得たりしか、或は又總ての物體は、何等の障碍の起らざる限りは、何故に、總ての運動中最も高尙なる、圓運動をなすべしと信じたるか。

若し一物體の速度は、之を變化せしむる理由なければ、變化し得ずと、言ふを得るときは、之と全く同樣に、この物體の位置も變化し得ず、或は外的原因が來りて之を變化せしむることもなきときは、其徑路の曲率も亦、變化し得ずと主張し得るならん。

然らば惰性の原理は、先天的眞理にあらずして、實驗的事實なるか、力の作用を避けしめたる物體の上に、曾て實驗の施されしことありや、若し其事ありとするも、其物體が何等の力にも從はざりしことは、如何にして認知せられたるか、通例

人は、大理石卓上に甚だ長き時間を以て輾轉する、球の例を語ると雖も、何故に吾人は、其球が何等の力の作用をも受けずと言ふか、そは其球が他の總ての物體に遠ざかること甚しく、何等の感じ得る作用をも受けざるに由ることとなるか、されど球は空氣中に自由に拋擲せられたるときよりも、地球を距ること一層遠きにはあらず、されば何人も知る如く、この場合に於て、球は地球の引力の影響を受くるならむ。

力學の教師は通常、球の例をば輕々に通過す、唯彼等は附言して曰く、惰性の原理は、其結果に由りて間接に撿定せられたりと、されどこの言ひ方は拙劣なり、蓋し彼等の意は、種々の結果は、一層汎き一原理により撿定せられ得べく、惰性の原理は、其原理の特殊なる場合たるに過ぎざるを、明かに云はんとするにあらん。

余はこの一般原理に對し、次の如き陳述を提供すべし。

一物體の加速度は、この物體及び隣接せる諸物體の位置と其等の速度とにのみ關すと。

この陳述が、實に惰性の定律の自然的概括なることを了解せしめんが爲めに、余は讀者に一の想像を許されんことを要求す、余が上に言ひし如く、惰性の定律は、吾人に先天的に賦與せられたるものにあらず、他の諸定律も全く之と同樣に理由充足の原理に適合すべきものなり、故に一物體が何等の力の作用をも受けざるときは、其速度の變化せざることを假定する代りに、變化せざる者は、其位置若しくは又其加速度なることを假定すべし。

さて、暫くこの假設的二定律の一が自然の定律にして、我が惰性の定律に置換へらるるものと假定せむ、然らば其自然的概括は如何なるべきか、默考一分時にして能く之を知るを得む。

第一の場合に於ては、我等は一物體の速度が、唯其位置及び隣接諸物體の位置にのみ從ふこと、又第二の場合に於ては、一物體の加速度の變化は、唯此物體と隣接諸物體の位置、其速度及び其加速度にのみ從ふことを假定するを要すべし。

或は數學の語にて云はば、運動の微分方程式は、第一の場合には第一階、第二の場合には第三階なるべし。

次に余は余の假定を少しく變更せむ、余は我が太陽系統に類似せる一世界を

假定す、但しこの世界に於ては、特別の奇遇に由りて、總ての遊星の軌道が、離心性と傾斜とを有せざるものとす、且つ余は、この遊星の質量は極めて小にして、其交互間の錯亂影響（ペルチユバツシヨン）は感知し得られざる程なりと假定す、此等の遊星の一に住める星學者は、一の星の軌道は唯圓形にして、一の平面に平行なるを得るに過ぎずと論斷すべし、然るときは或る一瞬間に於ける一星の位置は、其速度と其軌道とを決定するに十分ならむ、彼等が採用する惰性の定律は、上に述べし二假設的定律中の第一たるべし。

今この系統が、或時一大速度を以て至遠の星座より來れる、質量莫大なる一天體にて横過せらると想像せむ、茲に於て總ての軌道は、大紊亂を來すべし、されど夫の星學者は、尚ほさまでに吃驚を來すことなく、この禍患の全體の罪を負ふべき者は、唯この新恆星のみなるを判決せん、而して又言はん、若し其恆星が我が太陽系統より遠ざからんには、秩序は自然に舊に復すべく、無論遊星と太陽との距離は、大變動前の舊には復せずと雖も、紊亂者たる恆星が全く飛び去りたるときは、諸遊星の軌道は再び圓形に復すべしと。

然しながら、紊亂を起したる天體が遠ざかりたるとき、軌道が圓形に復する代りに楕圓形と爲らば、この星學者は其迷謬を悟り、而して其力學全體の改造の必要を感ずるに至らむ。

余が斯の如き臆說を立つる所以は、吾人の所謂概括せられたる惰性の原理の、何たるかを了解するには、之を反對の臆說に對立せしむるにあらざれば、なし得ずと思へばなり。

さて茲にこの概括されたる惰性の原理は、實驗に由りて證明せられたるか、將た證明し得べきか、ニウトンが其著物理原論 Principia を書きたるとき、彼は能くこの眞理が實驗的に了得せられ、又證明せられたりと看做したり、この眞理がニウトンに由りて斯く認められたるは、啻に神人同形論的（アントロポモルフヒツク）概念（後に語らむ）に由るのみならず、又併せてガリレー Galilée の事業に由りてなり、又ケプレル Kepler の定律其物に由りてなり、實にこの定律に據れば、一遊星の軌道は、全く其原位置及び其原速度に由りて定めらる、是れ即ち吾人の所謂概括されたる惰性の原理が望む所のものなり。

この原理が、外觀に於てのみ眞なる爲め、或は余が上に之と對立せしめたると同樣なる原理の一にて、何時か置き換へらるる心配のなからんためには、吾人は、上述の星學者を迷謬に導きたる如き、或る意外の出來事により、誑かされ居らざるべからず。

されど斯くの如き臆說は、極めて不確實にして、意を留むるに足らず、何人と雖も、斯くの如き偶然の出來事のあり得るとは信ぜざるべし、無論二つの離心率が、觀測の誤差を捨て、共に0なる公算(確からしさ)は、一が0.1に等しく他が0.2に等しき公算よりも、決して小ならず、單獨事件の公算は、決して重複事件の公算よりも小ならず、されど前者が生じたるとき、吾人は之を偶發に歸せしむるを以て足れりとせず、吾人は自然が故らに、吾人を迷謬に陷らしむるものと信ずるを欲せず、この類の誤差につきての臆說が、拒否せられたるときに於て、吾人は、星學だけの範圍にては、吾人の定律が、實驗を以て證明せられたりと許すを得べし。

されど星學は物理學全體にはあらず。

他日或る新實驗が、物理學の或る部分に於て、この定律をば不完全に陷らしむることなきやの恐れなかるべきか、實驗上の定律は常に訂正を受くる者なり、吾人は常に、之が他の更に正確なる定律にて、置き換へらるるを見んことを期するを要す。

されど、吾人の現に語る所の定律が、曾て廢棄又は修正せらるべきやを、更に眞面目に疑ふ者はあることなし、其故如何、是れ、確かに決定的試査の下に置くことを得ざるが爲めなり。

先づ第一に、この試査か十分なるためには、宇宙間の總ての物體が、若干の歲月を經たる後、其原速度を以て其原位置に復歸することを要し、然る後之より、其曾て經由せし軌道を、其のまま更に辿り行くを見るべきなり。

されど此の試査は不可能なり、其は部分的に行ひ得るに過ぎず、假令之を爲したりとするも、中にはいつも其最初の位置に復せざる物體あらむ、されば定律に對する總ての抵觸は、容易に說明除去せらるべし。

尙ほここに論ずべき事あり、星學に於ては、吾人は、吾人がついて其運動を研究せる天體を觀る、而して吾人は往々其天體が、他の觀るべからざる天體の作用を、

受けずと假定することあり、この條件の下に吾人の定律は證明せらるるか、又は證明せられざるかを要す。

然るに物理學に於ては之と同じからず、若し物理學的現象が運動より起ることあらば、そは吾人の視るべからざる分子運動の事なり、故に吾人の視る物體の加速度が他の視られ得べき物體、又は豫めその存在を認許する樣に導かれたる視るべからざる分子の位置若しくは速度以外の、他の或物に關するが如く見ゆるときは、この他の或物なるものが、吾人の是まで現存すとは思はざりし他の分子の位置若しくは速度なりと假定するも妨げなかるべし、かくして定律はここに保護せらるべし。

余は全く同一の思想を他の形に於て表示するがため、數學の語を用ゐんとす、余はn個の分子を觀察し、而して其$3n$個の座標が$3n$個の第四階惰性の定律に依りて要する如く第二階にあらず微分方程式の一群を滿足せしむと假定す、吾人は$3n$個の補助變數を誘入して、この$3n$個の第四階方程式を、$6n$個の第二階方程式の一群に誘致し得べきことを知る、故に吾人がこの$3n$個の補助變數を、視るべからざるn個の分子の座標を表はすものと假定するときは、其結果は又惰性の定律に適合す。

約言すれば、二三の特殊なる場合に於て、實驗的に證明されたるこの定律は、~~掛~~懸念なく最も一般なる場合に擴張せらるべし、何となれば、吾人はこの一般の場合に於て、實驗がこの定律を是認することも、又之を否認することも、なし得ざることを知ればなり。

加速度の定律　一物體の加速度は、之に働く力を其質量にて除したる商に等し。

この定律は實驗に由りて檢定せられ得るか、之が爲めには、この陳述中に現はるる三個の大さ、即ち加速度、力及び質量を測定するを要すべし。

余は加速度が測り得らるることを認む、何となれば、余は時間の測定より來る困難を親過すればなり、されど力又は質量は、如何にして測定せらるべきか、吾人は實に此等の何者なるやをも知らざるなり。

質量とは何ぞや、ニウトンは之に答へて曰く、そは體積と密度との乘積なりと、

トムソン Thomson 及びテート Tait の答は、之よりも優れり、曰く密度は質量を體積にて除したる商なりと、力とは何ぞや、ラグランジュ Lagrange は答へて、そは一物體の運動を起し、或は之を起さんとする原因なりと言へりキルヒホッフ Kirchhoff は曰く、質量と加速度との乘積なりと、されど、若し斯く言明するならば、何故に、質量は力を加速度にて除したる商なりと言はざるか。

この困難は到底辨別すべからざるものなり。

力が運動の原因なりと言はば、即ち形而上學と爲る、而してこの定義は、若し吾人にして之に滿足すべくんば、絕對的に無益のものならむ、この定義が適用を見んためには、其定義が吾人に敎ふるに、力を測る事を以てするを要す、加之夫にて十分なり、其定義が、力とは本來如何なるものなるか、或はそは運動の原因なりや、又効果なりやを示すが如きは、毫も必要なし。

故に先づ、二力の相等の定義を下すことを要す、如何なる時に二力が相等しと云ふか、人は言はむ、そは其力が同一の質量に加はりて、之に同一の加速度を附與するとき、或は其二力が互に反向して働き、釣合をなすときなりと、この定義は一の幻書に過ぎず、吾人は他の列車に連結するため、機關車を引離すが如くに、他の物體に加ふるが爲めに、一物體に加へられたる一力を解き外づすことを得ず、されば、某の物體に加へられたる某の力が、若し其他の物體に加へらるるときは、之に如何なる加速度を附與すべきやを知るは不可能なり、正反對の向きにあらざる二力が、若し正反對の向きに變せらるるときは、如何になり行くかを知るも亦不可能なり。

測力器を用ひて力を測り、或は秤錘によりて力を釣合はしむるとき、我等はこの定義を實質的に下さんとす、鉛直にして下より上に向ふと假定(簡單を欲するため)する二力F及びF′が、夫々二物體C及びC′に加はるとし、余はPの重さある同一の物體を取りて、先づ之をCに、次にC′に懸く、若し二つの場合に於て釣合ありとするときは、余は二力F及びF′が相等しきことを斷ずべし、何となれば其二力は、同物體Pの重さに等しければなり。

されど物體Pが、第一物體より第二物體に轉送せらるる時、余は果してPが同一の重さを保存することを確信し得べきか否か、余は其反對を確信す、余は重力の

强さが一點より他點に赴くに隨つて變化し、例へば極に於ては赤道に於けるよりも强きことを知る、勿論其差は甚だ小にして、實際には之を算入せず、されど定義なる者は、須らく數學的嚴正を守るを要すべきものなるに、ここに其嚴正は存せず、余が重さにつきて述ぶるこの理論は、分明に測力器の撥條の力にも適用せらるべし。溫度、其他多くの事情が之を變化せしむるを得ればなり。

尙更に論ずべき事あり、我等は物體Pの重さが、物體Cに加はりて、直接に力Fと釣合ふと言ふことを得ず、物體Cに加へらるるものは、物體Cの上に於ける物體Pの作用Aの事なり、而して物體Pは、一方には重力の作用を受け、又他の一方には物體CのPに對する反作用Rを受く、故に釣合をなせる力Fと力Aとは必ず相等し、又作用と反作用とは相等しとの原理に依りて、力AはRに等し、而して釣合をなせる力RとPの重さとは相等し、この三相等より、吾人は結果として、力FとPの重さとの相等しきことを演繹す。

かくて吾人は二力相等の定義中へ、作用及び反作用相等の原理を、加入せしむるの止むを得ざるに至りたり、かく考ふれば、この原理は決して實驗上の定律とは認めらるるを得ず、唯之を定義として看做すのみ。

されば、二力の相等しきことを知る爲め、吾人は次の二法則を有す、即ち釣合をなす二力の相等、及び作用と反作用との相等是なり、されど、上にも見し如く、この二法則のみにては不十分なり、故に已むを得ず第三の法則に依賴し、或る力例へば物體の重さの如きは、大さ及び方向に於て不易なることを假定せざるべからず、されど余の既に言ひし如く、この第三の法則は、一の實驗上の定律なり、乃は近似的に眞なるのみ、乃は不良の定義なり。

故に吾人はキルヒホッフの定義に歸著す、力は質量に加速度を乘じたる積に等しと、しかしながら此ニウトンの定律は、之が爲め實驗的定律と看做さるべき資格を失ふ、乃は一の定義に過ぎざればなり、然るにこの定義も亦不十分なり、何となれば吾人は、質量が如何なるものかを知らざればなり、この定義が、相異なる時に同一の物體に加はる、二力の比を計算することを、吾人に許すは論なしと雖も、二個の異なる物體に加へらるる、二力の比については、何事をも敎ふることなし。

此缺陷を補ふためには、更にニウトンの第三定律（作用と反作用の相等）に依賴

するを要す、是をも亦實驗上の定律とは看做さずして、定義と看做さんとす、二物體A及びBは互に作用し、Aの加速度に其質量を乘じたる積は、Aの上に加へらるるBの作用に等し、同樣にBの加速度に其質量を乘じたる積は、Bの上に加へらるるAの反作用に等し、然るに定義に依り、作用は反作用に等しきを以て、A及びBの質量は、其二物體の加速度と反比例をなす、斯くして二質量の比の定義が下され、此の比の不易なることは實驗に依りて證明せらる。

若し二物體A及びBのみ現在して、自餘の世界の作用より離隔せられたらんには、上の如くにて宜しからむも、斯くの如き事は決してあることと無し、Aの加速度は、唯Bの作用のみに基くものにあらずして、他の許多の物體C、D、……の作用にも基くものなり、されば、上の法則を適用するためには、Aの加速度を數多の部分加速度に分解し、而してこの部分加速度の中、Bの作用に基くものは孰れなるかを辨別するを要す。

若しAに對するCの作用が單にAに對するBのそれに加へられ、而して物體Cの現在が、Aに對するBの作用を變ずることなく、或はBの現在がAに對するCの作用を變ずることなしと假定するときは、この分解は可能ならむ、故に若し任意の二物體が相引くこと、其交互作用が之を連結する直線の方向を取りて、唯其距離にのみ關することを要するに、中心力の臆說を許すときは、この分解は可能ならむ。

人の知る如く、天體の質量を定むるためには、全く別の一原理を用ふ、萬有引力の定律に據れば、二物體間の引力は其質量に比例す今、rを二物體の距離、m及びm'を其質量、kを定數とせば、其引力は

$$f=\frac{kmm'}{r^2}$$

なるべし。

故に茲に測定すべきものは、力の加速度に對する比たる質量にあらず、互に牽引する物體の質量なり、是は物體の惰性にあらずして、其牽引の力なり。

是れ一の間接手段にして、其用は理論上欠く可からざる者にあらず、引力は質量の乘積に比例することなく、距離の平方に反比例すと云ふを得ん、即ち引力は

$$\frac{f}{r^2}$$

に等しけれども、

$$f=kmm'$$

なりとはなさざるを得ん。

個様に假定するも、尚ほ天體の相對的運動の觀測に由りて、この物體の質量を測定し得む、

されど、吾人は中心力の臆說を認許する權利を有するか、この臆說は嚴正に確實なるか、この臆說が實驗の反抗を受けざることは確かなるか、誰か之を是認することを肯んずるや、若し吾人がこの臆說を拋棄するを要することあらば、斯く辛苦して建てたる堂宇は、忽ち崩頽せざるべからざるなり。

吾人はBの作用に基ける、Aの加速度の部分を談ずるの權を有せず、吾人は之をCの作用、或は他物體の作用に基くものと區別する所の、何等の方法をも有せず、さればこの法則は、質量の測定に向つて適用し得べからざるものとなる。

然らば作用と反作用との相等の原理につき、尚ほ此外に論ずべき事ありやと云ふに、若し中心力の臆說が拋棄せらるるときは、この原理は分明に、次の如く陳述せらるるを要すべし、總ての外的作用を絕ちたる體系の各種物體に加へられたる、總ての力の幾何學的合力は零なりと、或は、換言すれば、この體系の重心の運動は直線的にして齊一なりと。

是れ質量の定義を下す一法なるが如し、重心の位置は分明に質量に附せらるる値に關す、吾人はこの値をば、重心の運動が直線的にして、齊一なるやうに定むるを要す、若しニウトンの第三定律が眞ならば、この事は常に可能なるべし、而して一般に唯一通りに於てのみ可能なり。

然るに總ての外的作用を絕ちたる體系は存立せず、宇宙の總ての部分は、多少他の總ての部分の作用を受く、重心運動の定律は、之を宇宙全體に適用するときにあらざれば眞ならず。

されば質量の値を求むるには、宇宙全體の重心の運動を觀測するを要す、されどこの結論の不條理なるは明白なり、吾人は相對的運動にあらざれば知らず、宇宙の重心の運動は、吾人にとりては永久に知られざるべし。

依りて、今は何物も殘る所なし、吾人の勞力は水泡に歸す、吾人は終に無能の自

白に過ぎざる次の定義に感迫せらる、質量は計算の中へ誘入するを便利とする係數なりと。

吾人は種々の質量に夫々今迄とは相異なれる値を附し以て力學全體を再造するを得るならむ、而してこの新力學は實驗とも、又力學の一般原理(惰性の原理、力の質量及び加速度に對する比例、作用と反作用の相等、重心運動の直線的齊一運動面積の原理)とも矛盾することあらざらむ。

唯この新力學の方程式は簡單ならざるべし、勿論簡單の度の少きは單に其首めの部分のみなり、これ實驗が既に吾人に知らしめたる所にして、恐らくは、完全方程式は簡約を得ることもなく、又之を失ふこともなくして質量の少量は變更せられ得るならむ。

ヘルツ Hertz は、力學の原理が果して嚴正に眞なるや否やを考究せり、其言に曰く「多數の物理學者の說によれば實驗が背て力學の動かすべからざる原理を變じたりといふことは、考ふ可からざるものと思はる、されど實驗より出づる事項は、常に實驗に由りて矯正せらるるを得」と。

余が上に言ひし事によりて、此痛心は無用なるの觀あり、初め力學の原理は、實驗上の眞理の如く見えたれども、吾人は之を定義として用うるの止むを得ざるに至りたり、力が質量に加速度を乘じたる積に等しきは、即ち定義に依るなり、是れ即ち、未來に於ても實驗にて達するを得ざる一の原理なり、同樣に作用が反作用に等しと云ふことも亦、定義に依りてなり。

人或は言はむ、されど斯かる時には、この不可證明の原理は、總ての意味に於て絕對に空虛なり、實驗は之を拒否せざるも、其原理は吾人に何等の用をもなさざるべし、然らば力學を研究するは果して何の爲ぞと。

この宣告は早急に過ぎて不正當なり、完全に孤立し完全に總ての外作用を絕てる體系は、自然に於て存せずと雖も、殆ど孤立せる體系はなきにあらず。

若し個樣なる體系を觀察せば、當に其種々の部分の中、一の他に對する相對的運動を研究し得るのみならず、又併せて其重心の宇宙の他の部分に對する運動をも研究し得べし、然るときはこの重心の運動が、ニウトンの第三定律に適合して、殆ど直線的にして齊一なることを確認するを得。

是れ即ち實驗上の眞理なり、されどこの眞理は實驗に由りて取消さるべきものにあらず、實に一層精確なる實驗は、吾人に何事を示し得るかと云ふに、其實驗は定律が殆ど眞に近きことを示すのみ、そは吾人の既に知る所なり、我等は實驗が如何にして力學の原理の根柢として用ゐらるゝか、而かもそが決してこの原理に對し抗言することを得ざるかを說明せり。

神人同形說的力學、キルヒホッフは、名目論に對する數學者の、一般傾向に從ひたるに過ぎず、と云はるべし、其物理學者たる才能は、そのこゝに陷るを防がざりき、彼は力の定義を有することを望み、而して己が目前に來れる最初の命題をば、定義として取れり、されど吾人は力の定義を要せず、力の觀念は原始的觀念なり、不可約不可定義の觀念なり、吾人は其何たるかを知る、吾人は其直覺を有す、この直覺は、吾人が幼穉の時より慣熟せる所の、努力の觀念より來る。

されど、第一に、假令この直覺が、吾人をして力其物の眞性を知らしむと雖も、其本性は、力學を創設するには不十分に、且つ全然無益ならむ、其肝要なりとする所は、力の何物たるかを知るにあらずして、之を測定する方法如何に在り。

凡そ力を測定するに於て、吾人に示教する所なきものは、又力學にも無用なり、例へば熱學を研究する物理學者に對する、溫と冷との主觀的觀念の如し、この主觀的觀念は數にて表現するを得ず、故に何の用をもなさず、一人の學者ありて、其皮膚は熱の不良導體にして、隨て毫も寒冷の感覺をも溫暖の感覺をも起すことを得ずとせば、其人は一の寒暖計も他の寒暖計も、齊しく共に良好と看做すを得む、而して其人が熱の全理論を作成するには、夫にても十分ならむ。

さてこの努力の直接觀念は、吾人が力を測定するの用をなすを得ず、例へば余は、重荷を運ぶに慣れたる人よりは、五十瓩の重さを引揚ぐるに方りて、比較的多くの疲勞を感ずることは分明の事實なり。

然かのみならず、この努力の觀念は、吾人に力の眞性を知らしめず、この觀念は斷じて筋覺の追想に歸す、されど太陽が地球を引くとき、筋覺を感ずとは主張し得ざらむ。

總てこゝに要する所は記號なり、この記號は、幾何學者の使用せる矢(方向を示す矢のこと)に比すれば正確と便利とに於て共に劣りて、實在に遠ざかれるは即

ち同じ。

神人同形論は、力學の發生に於て顯著なる歷史的任務を盡せり、恐らく其論は、時として、或る人に於ては便利と見ゆる一の記號を供することあらん、されど其論は、眞に科學的特性又は哲學的特性を有する何事をも建設し得ざるなり。

絲學派　アンドラード Andrade は、其著「物理力學敎程」Leçons de mecanique physique の中に、神人同形論的力學を復興せり、彼はキルヒホッフの屬する力學の學派に對し、頗る奇異なる名稱なる絲學派を對立せしめたり。

この學派は、總ての場合に於て、次ぎの如き體系の考察を導入せんことを力む、ろは緊張の狀態にありと認められ、著大なる力を遠隔の物體に傳送するの力ある、或る無視し得べき程徵少なる質量の物質的體系にして、絲を以て其理想的模型とす。

任意の一力を傳送する絲は、この力の作用にて少しく伸長す、又絲の方向は、其伸長に由りて測定せらるる大さを有する、力の方向を示す。

然るときは、次の如き實驗を理會し得べし、物體Aを絲の一端に繫ぎ、其他端には任意の一力を作用せしめ、絲の伸長がαに達するとき起れる、物體Aの加速度を記す、次にAを取り外づして、物體Bを之に代らしめ、更に前の力又は他の力を作用せしめ、絲をして再び伸長αを起さしめ、是に由て物體Bの加速度を記す、次に物體Aと物體Bとを以て、絲の伸長がβと成るやうにして、同じ實驗を反復す、斯くして觀測されたる同樣の加速度は、互に比例をなすべし、是に於て前に陳述せし加速度の定律の、實驗上の驗證を得べし。

或は又一物體に、等しき張力の下にある、許多の絲の作用を、同時に受けしめ、而して實驗に依り、此物體が釣合を得て靜止するためには、この總ての絲の方向は何なるべきかを求む、然るときは、力の合成の法則の實驗上の驗證を得。

此等の驗證に於て、吾人が爲せし所のものは、絲の受くる所の變形に從つて、之に作用せる力の定義を下せることとなり、こは頗る合理的なり、されど次いで吾人は、若し一物體をこの絲に繫ぐときは、絲に由りて之に傳送せらるる力が、この物體がこの絲に及ぼす作用に等しきことを假定したり、要するに吾人は、作用と反作用との相等しき原理をば、啻に實驗上の眞理と看做すのみならず、又併せて之

を力の定義と看做して、用ひたり。

この定義は、キルヒホッフの定義と共に全く規約的なり、唯前者は、後者に比すれば甚だ狹きのみ。

總ての力は皆、絲に由りて傳送せらるるものにあらず(尙ほ之を比較するには、其力が悉く、全然同質の絲に由りて傳送せらるるを要すべし)、若し地球が、視るべからざる絲にて、太陽に結合せらるると假定せんには、少くとも吾人が、其伸長を測定すべき何等の方法をも、有せざること當然ならむ、

故に吾人の定義は、十中九までは不完全なり、之に何種の意味をも附することを得ず、而して又キルヒホッフの定義に立戻るを要すべし。

然らば何故に斯の如き迂路を取るか、そは或る特殊なる場合にあらざれば、意味を有せざる、力の或る定義を認定せんとするによる、この場合に於て其定義は、吾人を加速度の定律にまで導き行くことを、實驗に由りて證したり、さればこの實驗に憑據して、加速度の定律を、他の總ての場合に於ける力の定義と見ることを得るならむ。

加速度の定律を總ての場合に於ける定義と考へ、而してこの實驗をば、作用反作用の原理の驗證にあらずして、彈性的物體の變形が、唯この物體に加へらるる力にのみ關することの驗證と看做すは、一層簡單にはあらざるべきか。

この場合には、この定義の認許せらるべきための條件が、決して完全には滿足せしめられざること、絲は決して無質量にあらざること、絲は其兩端に繋がれたる物體の反作用の外、他の一般の力と全く絕つことを得ざること、等は算入せられざるなり。

アンドラードの觀念は、甚だ興味なしとせず、假令其觀念が、吾人の論理上の必要を滿足せしめずとするも、そは吾人をして、最もよく力學の基本的觀念の、歷史的發生を了解せしむ、其觀念が吾人に示唆する所の反省は、如何にして人の精神が、素朴なる神人同形論より、科學の現在の概念にまで發達せしかを示す。

吾人は出發點に於て、甚だ格段にして粗大なる實驗を見、到著點に於ては、全く一般的に、全く正確にして、絕對的確實と看做すべき定律を見る、その確實性なるものは、吾人が之を規約的と看做して、いはゞ自由に定律に授けたる性質なり。

然らば加速度の定律、力の合成の定律は、隨意の規約に過ぎざるか、規約は規約なり、然れども隨意にはあらず、我等が科學の創立者をして、この定律を採用するに至らしめたる實驗は、然かく不完全なるも、而かもこの定律を是認するに十分なる、實驗を見失ふに至りしときに於て、この規約は隨意とならむ、されば吾人は時々刻々、この規約的實驗的起原の上に、吾人の注意を致すを良しとす。

第七章　相對的運動及び絕對的運動

相對的運動の原理　時としては、加速度の定律を、更に一般的なる原理に結合せんと力むることあり、同一の固定軸、又は直線的齊一運動をなせる可動軸に關する、任意體系の運動は、同一の定律に從ふを要す、是れ即ち相對的運動の原理にして、二個の理由を以て吾人に與へらるるものなり、即ち先づ最も普通の實驗が之を確證する事、次に反對なる臆說は、主として吾人の精神に逆ふ事これなり。

されば、この原理を認許して、一力の作用を受くる一物體を考へむ、この物體の原速度に等しき、一樣の速度にて動く所の觀測者に對する、この物體の相對的運動は、若し靜止狀態より起りたらんには、絕對的運動なるべき者と同一なるを要すべし、是に於て我等は、其加速度が、其絕對的速度に關すべからざることを論決し、是に由て、完全なる加速度の定律を演繹することを求む。

久しき間、科學得業士試驗細目中に、この證明法の痕跡ありき、されどこの試驗は明かに無効なりき、加速度の定律の證明を妨ぐる障碍は、吾人が力の定義を有

せざる事なり、この障碍は全部存在す、何となれば、所要の原理は、我等に缺如する所の定義を供せざればなり。

相對的運動の原理は、甚だ興味あるものにして、其れ自身の爲めにも、之を研究すべき價値あり、故に先づ正確に之を陳述せんことを求むへし。

吾人は前に言へり、孤立せる體系の部分をなせる、種々の物體の加速度は、もし相對的運動の憑據せる可動軸が、直線的齊一運動をなすときに、唯其速度と相對的位置とにのみ關し、其絶對的速度及び位置に關せずと、或は更に完全に云はゞ、其加速度は、唯其速度の差と其座標の差とにのみ關し、この速度及びこの座標の絶對値に關せずと。

若しこの原理が、相對的加速度につきて、或は寧ろ加速度の差について眞なるときは、之と反作用の定律とを組合せて、之より其原理が、絶對的加速度につきても、眞なることを演繹し得べし。

されば今餘す所は、加速度が、唯速度及び座標の差にのみ關すること、或は數學的の語を以て云はば、この座標の差が、第二階の微分方程式を滿足せしむること

をば、如何にして證明し得るかを見るに在り。

この證明は、實驗若しくは先天的考察より演繹し得らるるか。

讀者は吾人が前に言ひし所を追想し、以て親しく之に答ふるを得む。

如何にも、斯く陳述すれば、相對的運動の原理は、主として余が前に「概括せられたる惰性の原理」と稱せしものに類似す、ろは全く同じものにはあらず、何となれば、其原理は座標の差に關し、座標其物に關せざればなり、故に新原理は舊原理よりも、一層多くの事項を示す、されど同一の吟味はここに適合し、而して同様の結論に導かるるならむ、故にここに之を繰り返すは無用なり。

ニウトンの立證 玆に吾人は甚だ緊要にして、而かも少しく困難なる問題に遭遇す、余は相對的運動の原理が、吾人には單に實驗の結果にあらざりしこと、及び先天的に總ての反對の臆說が、吾人の精神に逆ふならむと云ふことを言へり。

然らば何故にこの原理は、可動軸の運動が直線的齊一的ならざるときに眞なるか、若しこの運動が速さを變じ、或は少くとも齊一回轉運動となるとも、其原理

は同じ力を以て吾人に對すと見るを得るか否、この二つの場合に於ては、この原理は眞ならず。

余は、軸の運動が直線的なれど、齊一的ならざる場合の上には、永く止まるを要せず、ろは容易に解き得べければなり、若し余が列車の內に在りて、車體が或る障碍物に抵觸し、俄然停止するときは、假令余は直接に何等の力を受けずとも、反對の側にある腰掛の上に拋擲せらるべし而してこれには更に何等の不思議あることなし、余が外力の作用を受けざる時、外衝擊を感じたるものは、彼れ列車にして、二物體の一又は他が、一の外的原因に由りて變化を來すに方りて、其相對的運動が擾亂せらるゝときには、更に何等の異論も起ることなし。

余は、齊一的に回轉する軸に關する相對的運動の場合をば、比較的に永く論ずべし、若し天が絶えず雲にて覆はれ、星體を觀測すべき何等の方便をも有せずとするも、吾人は尙は地球の回轉することを斷言し得む、吾人は地球の扁平狀に由り、又はフーコーFoucaultの振子の實驗に由りて之を知らむ。

さりながら、この場合に於て、地球が回轉すと云ふは、何等かの意味ありや、若し絶對的空間あらずとせば、物は何物かに對して回轉することなくして、果して回轉するを得べきか、或は又他面に於て、吾人は如何にしてニウトンの結論を認許し、而して絶對的空間に信を置くことを得べきか。

されど、總ての可能なる解決が、皆等しく吾人に不快なりと、述ぶるのみにては十分なりとせず、吾人は原因の知識を得んことを欲する故に、須く其解決每に、吾人の厭忌の理由を解析するを要す、故に讀者は次の如き長き吟味を行ふことをも許さるるなるべし。

吾人をして假想を述べしめよ、密雲星と人との間に橫はり、人をして諸星を窺ふことを得ざらしめ、其存在を知ること能はざらしむ、然らば如何にして此等の人は、地球の回轉するを認知すべきか、疑もなく彼等は彼等を載する地をば、我等の祖先よりも尙は久しく、固定不動と看做すべく、彼等はコペルニックCopernicの來るを待つこと久しからむ、而してコペルニックは終に來らむ、如何にして來るべきか。

この世界の力學者は、先づ絶對的矛盾に抵觸することなからむ、相對的運動の理論に於て、人は實在せる力の外に、二個の想像的の力を見る、之を尋常遠心力及び

重複遠心力と稱す、吾人の假想せる學者は、この二力を實在の如く看做して、總てを說明し得ん、而して彼等はここに、概括せられたる惰性の原理との矛盾を見出すことなからむ、何となれば、これ等の力は、一は體系の種々の部分の相對的位置に關すること、眞の引力のときの如く、他は其相對的速度に關すること、眞の摩擦のときの如くなればなり。

されど、幾多の困難は、軈て彼等の注意を惹起するならむ、若し彼等が孤立せる一體系を實現する事に成功せしならば、この體系の重心は、殆ど直線的なる徑路を有することなからむ、この事實を說明するために、彼等は、彼等が實在と看做せる、而して疑無く物體の交互作用に歸せしむる所の、遠心力を引證するを得む、唯彼等は、此等の力が大距離に於て、即ち孤立が一層實現せらるゝに從つて、無に歸すると云ふことを見ざるべし、否更に其以上、遠心力は其實距離と共に限りなく增大す。

此の困難は已に、彼等にとりて頗る重大なり、されどろは彼等を永く阻止する能はざらん、彼等は直ちに我等の所謂「エーテル」に似て、極めて稀薄なる、おらゆる

物體が其中に浴し、此等の物體に拒斥作用を行ふ所の媒質を想像せん。

されど之だけにては尙ほ未だ盡きず、空間は對稱的なりと雖も、然~~れ~~ども運動の定律は對稱を表~~は~~さゞらむ、其定律は右と左とを區別するを要するならむ、例へば旋風は常に同じ方向に旋轉するを見む、然るに對稱の理に由りては、この氣象は、何れの方向にも差別なく、旋轉するを要するならむ、若し吾人の所謂學者が、勉勵の力に由りて、彼等の世界を完全に對稱的宇宙と成すに至りしときと雖も、假令對稱が或る方向に偏して亂さるべき何等表面の理由なしとするも、この對稱は存立することなからむ。

されば彼等は必ず此說を竄し、更に或る事を發明するならむ、ろはプトレメー Ptolémée の玻璃球の如き異常なるものならむ、斯くて複雜を極めたる末に、待構へたるコペルニックが出で來りて、地球が回轉することを認許するを、最も簡單なりとすと言ひて、一擧の下に一切の困難を打破るに至らん。

又我等のコペルニックが、吾人に向て「地球の回轉を假定するは一層便利なり、何となれば斯くして星學の定律は、一層簡單なる語をもて表され得べければなり」

と云ひたると同じく、彼は又斯く言はん、「地球の回轉を假定するは一層便利なり、何となれば、斯くして力學の定律を、一層簡單なる詞にて表示し得ればなり」と。

ろは、絕對的空間、即ち地球が果して回轉するや否やを知るために、地球の位置を定むるに要する原點が、何等の客觀的存在をも有せざることを妨げず、然る上はこの「地球は回轉す」なる是定は、何等の意味をも有せず、何となれば、何等の實驗も之を驗證することを許さざればなり、何となれば、個樣なる實驗は啻に實現せられず、最も勇猛なるジュール、ヴェルヌ Jules Verne によりてすら、夢想せらるゝを得ざるのみならず、更に又矛盾なくして理會せらるゝを得ず、或は寧ろこの二命題、即ち「地球は回轉す」と「地球が回轉することを假定するは一層便利なり」とは、同一の意味を有し、毫も其間に優劣あることなければなり。

恐らく人は、是だけにては尙ほ滿足せざらむ、本件につき、吾人の爲し得べき總ての臆說、或は寧ろ總ての規約の中に就き、他よりも更に便利なるものありと云ふことを許しとせむ。

されど人は、之を星學の定律に關しては、容易に認許しながら、何故に力學に關してはこれに反對するや。

吾人は、物體の座標が第二階の微分方程式にて定めらるゝこと、及びこの座標の差も亦同樣なることを見たり、是れ即ち吾人が概括せられたる惰性の原理、及び相對的運動の原理と稱せしものなり、若しこの物體の距離が、同樣に第二階の方程式にて定めらるるならば、人は全然滿足を得ることと思はる、如何なる度まで精神がこの滿足を得るか、又何故に之にて完全に滿足せざるか。

之を了解するためには、一の簡單なる例を取るに如かず、余は我が大陽系に類似せる一體系を假定す、但し此體系よりは、ろれ以外の恒星を窺ふことを得ず、隨て星學者は、唯遊星及び太陽の交互距離のみを觀測し得べく、遊星の絕對經度の如きは、測定し得ざるものとす、然らば吾人がニウトンの定律より、直接にこの距離の變化を定むべき、微分方程式を演繹するとき、ろの方程式は第二階にあらざるべし、余は若しニウトンの定律の外に、この距離とろの時間に關する微係數との原値を知るとも、ろは、後の或る瞬間に於けるこの同じ距離の値を定むるには、十分ならざることを言明せんと欲す、尙ほここに一の與件の缺くるあり、而して

この與件は、例へば星學家が面積の定數と稱するものたることを得べし。

されどここには、二樣の相異なる見地に立つことを得、吾人は二種の定數を區別することを得、物理學者の眼には、世界は、一方に於ては、唯出發の當初に於ける原始の現象に關し、又他方に於ては、後現象を前現象に連結する定律に關する、一列の現象に約せらる、故に若しこの時觀測が或る量の定量なることを示すときは、吾人は二樣の見方の間に選擇を行ふを要す。

或は吾人は、この量の値が今は變じ得られざるも、世界の創始に於ては、偶然に他の値よりも寧ろ其の値を取ることとなり、爾後この値を保有したることを求むる、一の定律ありと假定せむ、然らば此量は偶然的定量と呼ばれ得べし。

或は之に反して吾人は、茲にこの量に某の値を命じ、其の他の値をば命せざるべき、自然の一定律あることを假定せむ、然るときは吾人は本然的定量と稱すべきものを得。

例へばニウトンの定律に從つては、地球公轉の時間は定量なるを要す、されど若し其時間が三百六十五日と若干量に等しく、三百日にもあらず、四百日にもあらずとするときは、そは余等の知らざる最初の偶然の事實に起因す、されば之は偶然的定量なり、若し之に反して引力の表式中に現はるる距離の冪指數が、−2に等しくして、−3に等しからずとするときは、そは偶然にあらずしてニウトンの定律に依る、是れ本然的定量なり。

余は、この定量を偶然なりとすることが、本來果して正當なるか、又この區別が或は人工的にあらざるかを知らず、但し自然が祕密を有する以上は、其應用が甚だ隨意にして、常に不確定なることは少くも確かなり。

面積の定量に關する事に於ては、吾人は之を偶然的と看做すを常とす、吾人の假想的星學者も亦、斯くの如く爲すに相違なきやと云ふに、若し彼等が二個の相異なる太陽系統を比較し得ば、彼等はこの定量が相異なる許多の値を取り得ると云ふ觀念を有せむ、されど余は最初、其系統が孤立して、彼等が其系統外の如何なる星をも觀測し得ざることを假定せり、この條件の下には、彼等は絕對的不變値を有すべき唯一の定量の外、認むることを得ざらむ、而して彼等は無論、この定量を本然的定量と看做すならむ。

茲に異論を豫防せんが爲め、簡單に一言すべき事あり、この想像的世界の居住者は、面積の定量を吾人の如く觀測することも、又之を決定することも、爲し得ざらむ、何となれば絕對經度は、彼等の有せざる所なればなり、然れどもこの一事は、彼等が或る一種の定量を認むるに導かるゝを妨ぐることなからむ、而して其定量は素より彼等の方程式中に誘入せらるべきものにして、卽ち我等が面積の定量と呼べる者に外ならじ。

されど、斯かる時には、次ぎの如き事あるを見るべし、若し面積の定量が、本然的として、卽ち自然の定律に關するものと看做さるるときは、任意の瞬間に於ける遊星の距離を計算するためには、この距離及びその第一微係數の原値を知るを以て足れりとすべし、從つてこの新見地に於ては、この距離は、第二階の微分方程式によりて支配せらるべし。

されどそは、この星學者の精神を十分に滿足せしむべきか、余は之を信ぜず、先づ彼等は軈て其方程式を微分し、其階數を高め、この方程式が更に甚だ簡單と成ることを認むるならむ、殊に彼等は對稱より生ずる所の困難の打撃を蒙むるならむ、彼等は遊星の集合が、或る多面體の形を表はすか、又は寧ろ對稱多面體の形を表はすかに從ひて、異なる定律を假定するを要せむ、而して面積の定量を偶然的と看做すにあらざれば、終にこの結果を免れざらむ。

余は甚だ特殊なる一例を取りたり、何となれば余が假定せし星學者なるものは、全く地球の力學を硏究せず、又其視覺は太陽系統中に限られしものなればなり、されど吾人の結論は、總ての場合に適用せらる、吾人の宇宙は彼等の宇宙よりも一層廣し、何となれば吾人は諸々の恒星を有すればなり、されど世界は彼も此も共に等しく狹きものにして、吾人が宇宙全體の上に推理を行ふことは、恰もこの星學者が、單にその太陽系統の上に於てするが如し。

是に由りて之を觀れば、吾人は必ず、距離を定むる所の方程式が、第二階以上の階數を有することを論斷するに至るべし、然るに何故に吾人は之に反抗するや、何故に吾人は數多の現象の結果が、この距離の第一階微係數の原値に關することを、當然なりと認めながら、又一方には、この距離が第二階微係數の原値に關し得ると云ふことを、假定するに躊躇するをば、全く自然のことゝ認むるや、そは唯

概括せられたる惰性の原理、及び其結果の不斷の研究によりて、吾人に造られたる精神の習慣に依るとより云ふの外なし。

任意の瞬間に於ける距離の値は、其原値、其第一階微係數の原値及び其他に關す、其他とは何ぞ。

若し我等にして、ろが單に第二階微係數の一なることを欲せずば、我等は臆說を選擇するの外なし通例の如く、この其他なるものは、空間に於ける宇宙の絕對的方位、又はこの方位の變ずるときの速さなりと假定せんに、ろは幾何學者にとりては、最も便利なる解決たるを得べし、又確かに其解決たり、されどろは哲學者にとりては最も十分ならず、何となればこの方位は存在せざればなり。

又この其他をば、視るべからざる或る物體の位置、又は其速度なりと假定するを得、或人は又之を未知物體「アルファ」αと名く、是れ吾人が其名の外に其體の何たるかを解せざるものなり、ろは余が惰性の原理の考察に供せし條の末に揭げし所と、全く同樣なる一の技巧なり。

されど要するに、困難は人工的なり、技巧的なり、吾人の器械の將來指示する所が、

其が曾て吾人に附與したる、或は附與し得べかりし指示にのみ關し得るならば、吾人の望む所は之に盡く、而してこの關係を以て、吾人は滿足して心を安んずるを得べし。

第八章　「エネルギー」と熱力學

「エ子ルギー」學　在來の力學より起る困難は、一部の人をして「エネルギー」學と稱する一新體系を選定せしむるに至れり。

「エネルギー」學は、「エネルギー」不滅の原理の發見に續ぎて起りしものにして、之に其定形を附與せし者は、即ちヘルムホルツ Helmholtz なり。

我等は、この理論に於て基本的任務を演ずる二量を定義する事によりて、其端を發かん、一つは運動の「エネルギー」又は活力にして、他は位置の「エネルギー」なり。偖て、自然の物體が受け得べき總ての變化は、次の二つの實驗的定律に由りて支配せらる。

第一　運動の「エネルギー」と位置の「エネルギー」との和は一定不易なり、是れ即ち「エネルギー」不滅の原理なり。

第二　若し物體の一體系が、時 t_0 に於て位置Ａにありたる後、次に時 t_1 に於て位置Ｂにあるときは、其物體は常に、二つの時 t_0 及び t_1 の間に於ける、二種の「エネルギー」の差の平均値が、出來得るだけ小なるが如き路によりて、第一の位置Ａより第二の位置Ｂに行く、是れ即ちハミルトン Hamilton の原理にして、所謂極小作用の原理の一形なり。

「エネルギー」學は、在來の理論よりも次の利便を有す。

第一　この理論は不十分なること少し、換言すれば「エネルギー」不滅の原理及びハミルトンの原理は、在來の理論の基本原理よりも、より以上を吾人に敎ふ、且つ自然が實現せしめずして、在來の理論とは合致する或る運動を除けり。

第二　この理論は吾人をして原子の臆說より遁れしむ、この臆說は、在來の理論を以てすれば、之を除くこと殆ど不可能なりき。

されど、この理論も亦新困難に遭遇す。

二種の「エネルギー」の定義は、在來の理論體系に於ける力及び質量の定義と、殆ど同等なる大困難を誘起するならむ、されど、この困難は、容易に之を遁るることを得べし、少くとも最も簡單なる場合に於ては然り。

茲に若干數の質點より成りて孤立せる一體系ありと假定し、この質點が、其相

對的位置と其交互の距離とにのみ關し、其速度には關せざる力の作用を受くるものと假定せむ、然らば「エネルギー」不滅の原理に據りて、力の一函數の存在することを要すべし。

この簡單なる場合に於て「エネルギー」不滅の原理の陳述は、極めて簡單なり、此の場合に於て、實驗により決定せらるる量の大さは、絕えず一定なるを要し、この量は二項の和にして、第一は唯質點の位置にのみ關し、其速度に關せず、第二はこの速度の平方に比例す、而してこの分解は、唯一樣の外には行はれざるものなり。

第一項は余のUと名くるものにして、是れ即ち位置の「エネルギー」なり、第二項はTと名く、是れ即ち運動の「エネルギー」なるべし。

若しT+Uが定量なるときは、T+Uの任意の函數

$$\varphi(T+U)$$

も亦然ることとは眞なり。

然るに、この函數$\varphi(T+U)$は、一は速度に對して獨立、他はこの速度の平方に比例する二項の和にはあらざるべし、定値を保持するこの函數の中にて、この性質を具ふるものは唯一あるのみ、乃はT+Uなり(或はT+Uの一次函數なれど、こは無用なり、何となれば、この一次函數は、常に單位と原點との變換に由りて、T+Uに歸せしむることを得ればなり)、是れ即ち吾人が「エネルギー」と稱するものにして、第一項は位置の「エネルギー」と稱し、第二項は運動の「エネルギー」と稱すべし、故に二種の「エネルギー」の定義には、何等の曖昧なく、吾人は之を確持することを得。

質量の定義につきても前と同樣なり、運動の「エネルギー」即ち活力は、質量と、總ての質點の其中の一に對する相對的速度とに依りて、甚だ簡單に表示せらる、此相對的速度は、觀測せらるゝを得べく、若し吾人がこの相對的速度の函數として、運動の「エネルギー」を表す公式を有するときは、この公式の係數は吾人に質量を供すべし。

されば、この簡單なる場合に於ては、基本的觀念をば困難なく定義することを得れど、一層錯雜せる場合に於ては、例へば若し力が唯距離のみに關せずして、併せて速度にも關するときは、困難は再び起るべし、ヴエーバー Weber は二個の電氣分子の相互作用が、啻に其距離に關するのみならず、併せて其速度及び其加速

度にも關することを假定す、若し諸質點が之と同樣の定律に從て相引くときは、Uは速度に關し、速度の平方に比例する一項を包含するを得ん。

斯の如き諸項の中に就き、如何にしてT又はUより來るものを辨別し得るか、隨て「エネルギー」の二部分を、如何にして區別し得るか。

尙又「エネルギー」其物は如何に定義すべきか、T+Uの二部分を區別せしむべき性質、即ち特殊なる形の二項の和たる性質が消失したるとき、吾人はもはや定義として、他の如何なるT+Uの函數よりもT+Uを採擇すべき、何等の理由を有せず。

しかも、之にては未だ盡くされず、更に又茲に算入するを要するものは、啻に在來の力學の「エネルギー」のみならず、尙他の形の「エネルギー」、即ち熱化學的「エネルギー」「電氣エネルギー」等も在り、而して「エネルギー」不滅の原理は、次の如く記するを要することゝなる、

$$T+U+Q=\text{定値}.$$

この式に於て、Tは感じ得べき運動の「エネルギー」、Uは只物體の位置のみに關する位置の「エネルギー」、Qは熱化學的、又は電氣の形に於ける內的分子的「エネルギー」を表はす。

若しこの三項が絕對的に區別し得べくして、Tが速度の平方に比例し、Uがこの速度と物體の狀態とに關せず、Qが物體の速度及び其位置に關せずして唯其內部の狀態にのみ關するときは、問然する所なからむ。

さて又「エネルギー」の表示式は、この形の三項に於て、唯一樣の外には分解せらるるを得ざるや。

否、之を分解することを得。例へば、發電せる物體を考ふるに、其交互作用に係る靜電氣的「エネルギー」は、分明に其發電量に、即ち其狀態に關すべし、而して其「エネルギー」は、又併せて物體の位置にも關すべし、若しこの物體が運動するときは、互に動電氣的に作用すべし、而して動電氣的「エネルギー」は、啻に其狀態と其位置とに關するのみならず、併せて其速度にも關するならむ。

故に吾人は、T、U及びQの部分をなせる項の選拔をなし、「エネルギー」の三部分を別つべき何等の方法をも有せず。

若しT+U+Qが定量なるときは、ろの任意の一函數

φ(T+U+Q)

も亦然り。

若しT+U+Qが、余が上に注意せし所の特殊の形を有するときは、曖昧は生せず、定値を有すべき函數φ(T+U+Q)の中に、この特殊なる形を有すべきものは、唯一あるのみにして、余は之を「エネルギー」と稱するを適當とせむ。

然るに余の既に言ひし如く、嚴密には斯の如き事なし、定値を有すべき函數の中には、嚴密にこの特殊なる形に置かるべきものはあらず、然らば其中より「エネルギー」と稱すべきものを、如何にして選出し得るか、吾人は吾人をこの選定に導き得る手段を毫も有せざるなり。

此故に唯餘す所のものは「エネルギー」不滅の原理につきての次の一陳述のみ、「ろ」に、絶ゑず、定値を有する或る物あり」と、されどこの形に於ては、此の原理は實驗の範圍外に拋擲せられて、一種の贅言に歸することゝなる、世界が定律にて統治せらるるときは、定値に止まるべき或る量あるは明かなり、ニウトンの法則と同樣の理由にて、實驗の上に樹てられたる「エネルギー」不滅の原理は、又實驗に由りて其勢力を失ふことあらず。

この吟味は、在來の體系より「エネルギー」學に移りたるは、我等が一段の進歩を實現せしものなるを示すと雖も、又同時にこの進歩が不十分なることをも示せり。

而して又余に取りて、尙一層重大なりと思はるる他の一異論あり、極小作用の原理は、逆行復舊し得べき現象に適用し得べしと雖も、逆行復舊し得べからざる現象に關係するものには、毫も十分ならず、之をこの類の現象にも擴張せんとする、ヘルムホルツの試嘗は成功せざりき、又成功し得ざりき、即ちこの方面に於て尙[illegible]なすべき者殘れり。

極小作用の原理の陳述其物が、既に反感を惹起す、何の力の作用をも受けずして一表面上に動き得る質點が、一點より他の一點に赴くには、必ず其最短線に沿ひてせむ。

この質點は、人が取らしめんと欲する點を知るが如く、又之に達せんがため某の路を取れば、幾許の時間を要するかを前知し、次に其最も便利なる路を選擇す

るが如くに見ゆべし、かゝる陳述は、質點をば、恰も一の活きたる、自由なる物の如くに表はせり、されどこの陳述は、之を、障礙少くして、哲學者の言を借れば、目的結果が生起原因に代入せられたりとは見えざる、他の陳述をもて置換ふるに如かざることと明かなり。

熱力學　自然哲學の總ての分科に於て、熱力學上の二個の基本原理の任務は、日を逐ふて益肝要なる者と成れり、分子說に阻礙されたる四十年來の空想的理論を拋棄し、吾人は、現今數學的物理學の完全なる堂宇を、熱力學の上に築かんことを力む、マイヤー Mayer 及びクラウジユース Clausius の二原理は、熱力學に對し、果して堅牢幾許歲月の長きを支ふるに足る所の建設を保證するや、人々はその之を支ふるを疑はず、吾人は那邊よりこの確信を得るか。

俊秀なる一人の物理學者あり、一日誤差の法則に關して余に語りて曰く、「世人は皆固く之を信ず、何となれば數學者は、そは觀察上の一事實なりと信じ、觀察者は、そは數學上の一定理なりと信ずればなり」と「エネルギー」不滅の原理につきても、從來は斯の如くなりしが、現今に至りては然らず、何人もそが實驗上の事實なることを知らざる者なし。

然らば、原理其物に、之を證明するの用に供せられたる實驗に向つてよりも、更に以上の一般性と正確とを附與する權利を、吾人に許す者は誰なるか、こは即ち吾人が日常行ふ所の、經驗上の與件を一般的にすることが、正當なるや否やを問ふものなり、而して余は、幾多の哲學者が、之を解決せんとて無益に焦思せし後に於て、此の問題を論ずるの狂愚をなさざるべし、されど唯茲に確實なる一事あり、若しこの能力が吾人より排斥せらるるときは、科學は存立するを得ざらむ、或は、少くとも、一種の目錄、孤立せる事實の確認に歸せむ、而して科學は吾人に取りて、何等の價値をも有せざらむといふことと是なり、何となれば、其科學は、吾人が秩序と調和との要求に、滿足を與ふることを得ず、又同時に先見の能力なからむ、されど或る一事實の前に現はれし狀況は、多くは決して悉く同時に再現し得ざるを以て、この狀況の少しなりとも變ずるとき、この事實が尙再び新たに發現するや否やを推測するため、先づ初に當りて概括することを必要とせざるや。

されど總ての命題は、無數の方法に於て一般的にせらるることを得、總ての可

能的概括の中に就きて、吾人は選定を行はざる可からず、而して吾人は唯、其最も簡單なるものの外は、之を選定するを得ず、されば吾人は、恰も簡單なる定律をば、其他の總ての事項は相等しくして、而かも複雜なる定律よりも、更に眞に近きが如くに看做して、處理する樣になるなり。

人がこの事を明瞭に自白し、而して自然は簡單を愛すと公言せしは、今を距ること半世紀以前の事なりき、されど自然は、多くの場合に於て、然らざるを示すを認むるに到り、現今にては、もはやこの傾向を自白せずして、唯其中に就き、科學が不可能と成らざるため、缺くべからざるものの外は保存せず。

故に吾人が、比較的少數にして、幾何かの異論を生ずべき實驗を經たる後、一般的に、簡單にして而かも正確なる形式的定律を規定するは、畢竟人心が免かるゝを得ざる所の必要に從ふに外ならざるなり。

されど茲に更に或る他の事項あり、是れ余が止まりて論せんとする所なり。

ニウトンの定律を出せる、而かも若し我が天體運動の錯亂を算入せば、唯略近的たるに過ぎざる、ケプレルの定律の後に、ニウトンの定律が出來せると同樣に、

マイヤーの原理は、この原理を抽出し來りたる、總ての特殊なる定律を保存するが爲に、呼び來られしにあらざるは、人々の疑はざる所なり。

何故にこの原理が、總ての物理學的定律の中に於て、斯く特權ある地位を占むるか、是には許多の小理由あり。

最初に吾人は、永久運動の可能を許すことなくして、この原理を拒むことも、又其の絕對的嚴正を疑ふことすらもなし得ざらん、吾人は斯の如き希望を抱く能はず、之を否定するよりも、寧ろ肯定するを以て無謀の度少からんと信ずるなり。

ろは恐らく全然精確にはあらざらん、永久運動の不可能は、逆行復舊し得らるべき現象の場合にあらざれば、「エネルギー」不滅を誘導せざればなり。

又マイヤーの原理の驚くべき簡單は、齊しく吾人の確信を肯定するの助けとなる、實驗より直接に誘出せられたる一定律、例へばマリヨット Mariotte の定律の如きものに於ては、この簡單は却て疑惑の一理由と見ゆるならむ、されど此場合は之と同じからず、吾人は一見して、個個別別なる成分が、意外の順序に排列せら

れ、而して一の調和體を成形するを見る、而して吾人はこの意外の調和が、單に偶然の結果たることを信ずるを得ず、吾人の獲取は、そが吾人の努力に償すること多きだけそれだけ貴く、或は吾人が自然より祕密を奪取するは、自然が吾人の奪掠を嫉む事多しと見ゆる程、益々確實なるが如し。

されど是れ小理由たるに止まる、マイヤーの定律を絶對原理に變更するには、更に愼重なる吟味を要するならむ、而して之を行はんと試むるときは、この絶對原理を陳述することすら、容易にあらざるを見るべし。

特殊の場合に於ては、「エネルギー」の何物たるかを見るを得、而して少くとも之に一時的の定義を附することを得、されど其一般なる定義を看出す事は不可能なり。

若し「エネルギー」不滅の原理を、全然一般的に、之を全宇宙に適用せらるゝが如く陳述せんと欲せば、その陳述は雲消霧散して、捕捉する所なきを見ん、而してその傡す所は唯次の一句に歸す「そこに絶えず定値を有する或る物あり」といふもの即ち是なり。

されど、此句果して意味ありや、定命論的臆説に於ては、宇宙の狀態は n 個の變數 $x_1\,x_2 \ldots\ldots x_n$ にて定められ、n は非常に大なり、任意の一瞬時に於て、この n 個の變數の値を知るときは、又併せて其時に於ける微係數を知り、隨てその前又は後の一瞬時に於ける、この變數の値をも計算することを得、換言すればこの n 個の變數は、n 個の第一階微分方程式に適合す。

故にこの方程式は、$n-1$ 個の積分を有す、隨て絶えず定値を有すべき $n-1$ 個の $x_1\,x_2 \ldots\ldots x_n$ の函數あり、若し吾人がこの時「そこに絶えず定値を有する或る物あり」と言ふは、唯、一の贅言を述ぶるに過ぎず、この總ての積分の中に就き「エネルギー」の名稱を存すべきものは何ぞと云はるれば、吾人は大に迷ふならん。

又マイヤーの原理が、有限なる體系に適用せらるゝときに、其原理を解釋するは、此意味にてにはあらず。

その時吾人の n 個の變數の中の p 個が、互に獨立に變化し、隨て吾人は n 個の變數と其微係數との間に、唯 $n-p$ 個の一次の關係を得ることを認定す。

陳述を簡單にするため、外力によりて成なされたる仕事の和と、外方へ放失せら

る熱量の和とが、共に零なりと假定せむ然るときは吾人の原理の意味は、次の如くならん。

左邊が合微分なる$n-p$個の關係の一結合ありて、この微分は、吾人の$n-p$個の關係に依りて零となる爲め、其積分は一の定數なり、而してこの積分を名けて「エネルギー」と云ふなりと。

されば、如何にして、獨立に變化をなすべき許多の變數の存在し得べきかろは外力の影響ある時に限りて成立し得るなり、(縱令我等は、簡單のために、この力の仕事の代數和が零なりと假定すとも)、若し體系が全く外的作用を受くることなくば、任意の一瞬時に於ける吾人のn個の變數の値は、後の任意の一瞬時に於ける體系の狀態を定むるに十分ならむ、但し吾人が定命論的臆說を固守することを假定す、故に吾人は再び前と同じ困難に陷るならむ。

若し此體系の將來の狀態が、其現在の狀態を以て全然推定し得ずとするときは、ろは其體系が更に系外の物體の狀態にも從ふが爲めなり、然らば此狀態を定むる所の變數xの間に、此外物の狀態と獨立せる、方程式の一組が存在すとする

は、果して眞に近きや、又若し或る二三の場合に於て、吾人が之を看出し得べしと信ずるとせば、ろは專ら吾人の無識の故、又はこの物體の影響が餘りに微弱にして、我等の實驗の、之を摘發し得ざるが故にあらざるか。

若し體系が完全に孤立と看做されずんば、其內部の「エネルギー」の嚴密に精確なる表示式が、外物の狀態に從ふを要する事は有り得べし、然かのみならず、余は上に外部の仕事の和が零なることを假定せり、この制限は稍不自然なり、されど若しこの制限より脫せんと欲せば、陳述は又一層困難と爲るべし。

故にマイヤーの原理に、絕對的の意味を附して之を規定するには、須らく之を全宇宙に擴展するを要す、而して吾人は復もや、吾人が避けんと力めたると同じ困難に、面する事とはなるなり。

要するに、尋常の語を用ふれば、「エネルギー」不滅の定律は、唯一の意味を有するに過ぎず、總ての可能的性質に共通なる一性質ある事これなり、然るに定命論に於ては唯一の可能の外なし、故にろの定律には何等の意味も存せず。

之に反して、非定命論に於ては、定律は一の意味を有す、之を其絕對的の意味に

解釋する時にも亦然り、定律は自由の上に置かれたる一の制限の如く見ゆべし。

されどこの語は、余の餘事に論及して、遂に數學及び物理學の範圍外に出でんとすることを示す、故に余はここに中止し、而してこの吟味全體につきて、唯一の印象の外は保有することを欲せず、乃はマイヤーの定律が、其形頗る自在にして、殆ど人の欲する一切の事項を含ましめ得ることなり、余はこの言に由りて、定律が何等の客觀的實在に對應せずとも、又定律が唯一の贅言に歸すとも言はんと欲するにあらず、何となれば各の特殊なる場合に於て、又絶對にまで推し擴むることを欲せざる上は、定律は全く明瞭なる意味を有すればなり。

この自在性は永年に亘りて信せらるべき理由なし、されど又他方に於て、乃は一層高き調和の中に溶解するためにあらざれば、消滅せざるを以て、吾人は晏然と之に依據して、動作することを得べく、且つ其動作は徒勞に歸せざることを確信し得べし。

以上述ぶる所は、殆ど全部クラウジユースの原理に適合す、其特徴と認めらるる所は、其原理が不等式にて表示せらるゝに在り、恐らく總ての物理學上の定律に於ても同様なりと言ふべきか、何となれば、其定律の確實なる事は、常に觀測上の誤差に由て制限せらるればなり、されど其定律は、少くも第一近似たるべき主張を示す、而して吾人は漸次に、愈確實なる定律を以て之に置換へんことを冀望す、若し之に反して、クラウジユースの原理が不等式に歸するときは、其原因たるものは、吾人の觀測の不完全にあらずして、問題の本性其物なり。

第三編の一般結論

重學の諸原理は、相異なる二樣の形狀に於て現はる、一方に於ては、實驗を基礎とし、而して殆ど孤立せる體系に關する事項に於て、甚だ近似的に驗證せらるべき眞理あり、又他方に於ては、宇宙の全集合體に適用し得べく、嚴正に眞なりと認めらるべき公準あり。

若し此等の公準が、其のよりて來る所の實驗上の眞理に缺けたる、一般性と確實性とを具ふる時は、其公準は終に吾人の作り得べき簡單なる規約となる、何となれば、吾人は如何なる實驗も、之に反抗せざることを最初より確認すればなり

されどこの規約は、絶對的に隨意なるものにあらず、乃は吾人の一時的發意よ

り生ずるものにあらず、吾人が之を採用するは、確實なる實驗が、吾人に其便利なることを示すを以てなり。

されば如何にして、實驗が力學の原理を設立するか、されど又何故に、實驗が之を顚覆せしめざるかは、容易に說明し得べし。

幾何學を以て比較を行はむ、幾何學の基本的命題、例へばユークリッドの公準の如きは、全く規約たるに過ぎず、而して其命題が果して眞なるか、或は果して僞なるかを求むることは、「メートル」法が眞なるか、將た虛なるかを問ふことゝ齊しく不條理なり。

唯この規約は便利なり、而して之を吾人に示すには、則ち確實なる實驗あり。

一瞥の下には類似は完全なり、實驗の任務又同一なるが如し、されば人は次の如く言ふに至るべし「力學は一實驗的科學と看做さる、然るときは幾何學も亦同樣なり然らざれば、之に反して、幾何學は一演繹的科學たり、然るときは力學も亦同樣なりと言ふことを得」と。

されど斯の如き結論は不正當ならむ、吾人をして、幾何學の基本的規約を、最も便利として採用せしめたる實驗は、幾何學にて研究する物件とは、何等の共通點をも存せざる物件の上に依據す、其實驗は固體の性質に依據す、光の直線的波及の上に依據す、是れ力學の實驗なり、光學の實驗なり、何等の名目にても、之を幾何學の實驗とは看做すことを得ず、又幾何學が我等に便利と見ゆる主要なる理由は、我等の身體の各部、我等の眼、我等の四肢等が、正しく固體の性質を有せるに在り、この理由に於て、我等の基本的實驗は、素より幾何學者の研究對象たる空間に就きてなすにはあらず、其身體即ち彼がこの研究に供用する道具の上に依據する、生理學的實驗なり。

之に反して、力學の基本的規約、及び吾人に其規約が便利なることを證明する實驗は、正に同一對象又は類似對象の上に依據す、乃の規約的一般的なる原理は、實驗的特殊的なる原理の自然的直接的概括なり。

余は個樣にして、この二科學の間に人工的境界を劃せり、若し余が一柵を以て、本來の幾何學と固體の研究とを區分し得るならば、實驗的力學と一般的原理の規約的力學との間にも、一柵を設くるを得む、實に余がこの二科學を區分して之

を交互分離せしめたること、及び規約的力學が孤立するときは、殘る所のものは極めて微々たるものにして、幾何學と稱する莊大なる學科とは、到底比すべくもあらざることは何人も認むる所なるべし。

されば吾人は、今何故に、力學の敎授が依然として實驗的たるべきかを了解せり、そはかくの如くにしてのみ、吾人に此科學の起源を了解せしめ得べきなり、こは此科學の完全なる知識を得るためには、缺くべからざる條件なり。

然かのみならず、力學を修むるは之を應用せんが爲めにして、この科學が客觀的なるにあらざれば、之を應用するを得ざるべし、然るに吾人が既に見たる如く、原理が一般性と確實性とに於て得る所のものは、確かに之を其客觀性に於て失ふ、而してこのことは就中、吾人が早く慣熟せざるべからざる原理の客觀的方面に於て特に然り、而してこは一般より特殊に赴かずして、特殊より一般に赴くが故に生じ得るなり。

原理は規約及び定義の假扮せる者なり、されど原理は實驗的定律より摘出せられ、此等の定律は、我等の精神が、絕對値を附與する原理に變更せられたりと謂ふべし。

二三の哲學者の所論は餘りに一般的なり、彼等は原理は科學の全體なり、隨て科學の全體は規約なりと信じたり。

この奇異なる學說は、名目論と稱せられし者にして、維持せらるる能はざりき、一の定律は如何にせば原理と成る可きか、定律は二つの實項AとBとの間に存する一の關係を表示せり、されどそは嚴密には眞ならずして、唯略近に過ぎざりし、吾人は隨意に多少假想的なる一中間項Cを導入す、而してCは定義に依り、Aと正しく定律に由りて表示せらるる關係を有するものなり。

然るときは、吾人の定律はAのCに對する關係を表示する、絕對的にして嚴密なる一原理と、CのBに對する關係を表示する、近似的にして修正せらるべき實驗的定律とに分解せらる、縱令この分解を追究すること何程遠きに到るとも、定律の常に存立することは分明なり。

吾人は今や本來の定律の範圍に入らんとす。