**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2016/2017**

# Zahlentheorie

## Arbeitsblatt 22

### Übungsaufgaben

Aufgabe 22.1. Sei $R$ ein Integritätsbereich und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass die Primideale in $R_S$ genau denjenigen Primidealen in $R$ entsprechen, die mit $S$ einen leeren Durchschnitt haben.

Aufgabe 22.2. Sei $R$ ein kommutativer Ring. Zeige, dass die Menge aller Nichtnullteiler in $R$ ein multiplikatives System bildet.

Aufgabe 22.3. Sei $R \subseteq S$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die zugehörige Erweiterung $R_F \subseteq S_F$ ganz ist.

Aufgabe 22.4. Sei $D \neq 0,1$ eine quadratfreie Zahl, sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ und sei $A_D$ der zugehörige Ganzheitsring. Zeige, dass nach Nenneraufnahme von 2 ein Ringisomorphismus

$$R_2 \longrightarrow (A_D)_2$$

vorliegt.

Aufgabe 22.5.*

Sei $\mathbb{Z}_n$ die Nenneraufnahme zu $n$ ($\mathbb{Z}_n$ besteht also aus allen rationalen Zahlen, die man mit einer Potenz von $n$ als Nenner schreiben kann). Zeige, dass es nur endlich viele Unterringe $R$ mit

$$\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Z}_n$$

gibt, und charakterisiere diese unter Verwendung der Primfaktorzerlegung von $n$.

Aufgabe 22.6.*

Es sei $R$ ein Zahlbereich und seien $f, g \in \mathbb{Z}$ teilerfremde Zahlen. Zeige, dass für den (im Quotientenkörper $Q(R)$ genommenen) Durchschnitt

$$R_f \cap R_g = R$$

gilt.

Aufgabe 22.7. Es sei $T \subseteq \mathbb{P}$ eine Teilmenge der Primzahlen. Zeige, dass die Menge

$$\begin{aligned} R_T = \{q \in \mathbb{Q} | \, q \ & \text{lässt sich mit einem Nenner schreiben,} \\ & \qquad \text{in dem nur Primzahlen aus } T \text{ vorkommen}\} \end{aligned}$$

ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist. Was ergibt sich bei $T = \emptyset$, $T = \{3\}$, $T = \{2, 5\}$, $T = \mathbb{P}$?

Aufgabe 22.8. Sei $R$ ein Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System, $0 \notin S$.

(1) Zeige, dass die Nenneraufnahme zu $S$, also $R_S$ mit
$$R_S := \left\{ \frac{f}{g} | \, f \in R, \, g \in S \right\} \subseteq Q(R)$$
ein Unterring von $Q(R)$ ist.
(2) Zeige, dass nicht jeder Unterring von $Q(R)$ eine Nenneraufnahme ist.

Aufgabe 22.9. Sei $R$ ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Man definiert die *Nenneraufnahme*

$$R_S$$

schrittweise wie folgt. Es sei zunächst $M$ die Menge der formalen Brüche mit Nenner in $S$, also

$$M = \left\{ \frac{r}{s} | \, r \in R, \, s \in S \right\}.$$

Zeige, dass durch

$$\frac{r}{s} \sim \frac{r'}{s'} \text{ genau dann, wenn es ein } t \in S \text{ mit } trs' = tr's \text{ gibt},$$

eine Äquivalenzrelation auf $M$ definiert ist. Wir bezeichnen mit $R_S$ die Menge der Äquivalenzklassen. Definiere auf $R_S$ eine Ringstruktur und definiere einen Ringhomomorphismus $R \to R_S$.

Aufgabe 22.10. Sei $R$ ein kommutativer Ring und sei $e \in R$ ein idempotentes Element. Zeige, dass es eine natürliche Ringisomorphie

$$R_e \cong R/(1-e)$$

gibt.

Aufgabe 22.11. Sei $R$ ein kommutativer Ring und $f \in R$. Zeige, dass $f$ genau dann nilpotent ist, wenn die Nenneraufnahme $R_f = 0$ ist.

Aufgabe 22.12. Sei $R$ ein kommutativer Ring, $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und $M$ ein $R$-Modul. Definiere die „Nenneraufnahme"

$$M_S$$

und zeige, dass sie ein $R_S$-Modul ist.

Aufgabe 22.13. Sei $R$ ein kommutativer Ring. Zeige, dass $R$ genau dann ein lokaler Ring ist, wenn $a+b$ nur dann eine Einheit ist, wenn $a$ oder $b$ eine Einheit ist.

Aufgabe 22.14. Sei $R$ ein Integritätsbereich. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) $R$ ist normal
(2) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ normal.
(3) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$ normal.

Aufgabe 22.15. Sei $R$ ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$. Es sei $R = \bigcap_{i \in I} R_i$, wobei die $R_i \subset K$, $i \in I$, alle diskrete Bewertungsringe seien. Zeige: $R$ ist normal.

Aufgabe 22.16.*

Sei $K$ ein Körper und sei

$$\nu\colon\ (K^\times, \cdot, 1) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, 0)$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\nu(f+g) \geq \min\{\nu(f), \nu(g)\}$ für alle $f, g \in K^\times$. Zeige, dass

$$R = \left\{ f \in K^\times \,|\, \nu(f) \geq 0 \right\} \cup \{0\}$$

ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 22.17. Sei $R$ ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper $Q$. Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen $R$ und $Q$ gibt.

Aufgabe 22.18. Sei $R$ ein diskreter Bewertungsring. Definiere zu einem Element $q \in Q(R)$, $q \neq 0$, die Ordnung

$$\operatorname{ord}(q) \in \mathbb{Z}\,.$$

Dabei soll die Definition mit der Ordnung für Elemente aus $R$ übereinstimmen und einen Gruppenhomomorphismus $Q(R) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ definieren. Was ist der Kern dieses Homomorphismus?

Aufgabe 22.19. Sei $K$ ein Körper und $K(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über $K$. Finde einen diskreten Bewertungsring $R \subset K(T)$ mit $Q(R) = K(T)$ und mit $R \cap K[T] = K$.

Aufgabe 22.20. Sei $R$ ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper $Q$. Charakterisiere die endlich erzeugten $R$-Untermoduln von $Q$. Auf welche Form kann man ein Erzeugendensystem bringen?

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.21. (3 Punkte)

Es seien $R$ und $A$ kommutative Ringe und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Es sei

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow A$$

ein Ringhomomorphismus derart, dass $\varphi(s)$ eine Einheit in $A$ ist für alle $s \in S$. Zeige: Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$\tilde{\varphi}\colon\ R_S \longrightarrow A,$$

der $\varphi$ fortsetzt.

Aufgabe 22.22. (4 Punkte)

Seien $n$ und $k$ teilerfremde Zahlen und sei $\mathbb{Z} \subseteq R$ ein kommutativer Ring. Zeige, dass es eine Ringisomorphie

$$R/(n) \cong (R_k)/(n)$$

gibt.

Aufgabe 22.23. (4 Punkte)

Sei $R$ ein normaler Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die Nenneraufnahme $R_S$ normal ist.

Aufgabe 22.24. (3 Punkte)

Sei $R$ ein Integritätsbereich, sei $f \in R$ und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Zeige, dass $f \in \mathfrak{a}$ genau dann ist, wenn für alle Lokalisierungen $R_{\mathfrak{p}}$ gilt, dass $f \in \mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}$ ist.

Aufgabe 22.25. (3 Punkte)

Beweise für einen diskreten Bewertungsring die Eigenschaften der Ordnung, die in Lemma 22.14 formuliert sind.