Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 35

Winkeltreue Abbildungen

Definition 35.1. Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

zwischen euklidischen Vektorräumen V und W heißt *winkeltreu*, wenn für je zwei Vektoren $u, v \in V$ die Beziehung

$$\angle(\varphi(u), \varphi(v)) = \angle(u, v)$$

gilt.

Da Winkel nur für von 0 verschiedene Vektoren definiert sind, müssen winkeltreue Abbildungen injektiv sein. Eine Isometrie ist insbesondere winkeltreu, da ja sowohl die Norm als auch der Winkel unter Bezug auf das Skalarprodukt definiert werden und dieses sich bei einer Isometrie nicht ändert. Weitere Beispiele für winkeltreue Abbildungen sind Streckungen um einen von 0 verschiedenen Streckungsfaktor, siehe Aufgabe 35.1. Bei einer winkeltreuen Abbildung werden insbesondere zueinander orthogonale Vektoren auf orthogonale Vektoren abgebildet.

Beispiel 35.2. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, die durch die Multiplikation mit der komplexen Zahl

$$w = a + b\mathrm{i} \neq 0$$

gestiftet wird. Bezüglich der reellen Basis $1, \mathrm{i}$ von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ wird diese Abbildung durch die reelle 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

beschrieben. Diese schreiben wir als

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}.$$

Somit liegt die Hintereinanderschaltung von einer Isometrie (einer Drehung) und einer Streckung mit dem Streckungsfaktor

$$|w| = \sqrt{a^2+b^2}$$

und insbesondere eine winkeltreue Abbildung vor.

Satz 35.3. *Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine winkeltreue lineare Abbildung auf dem euklidischen Vektorraum V. *Dann gibt es eine Isometrie*

$$\psi\colon V \longrightarrow V$$

und eine Streckung

$$\sigma\colon V \longrightarrow V$$

mit

$$\varphi = \sigma \circ \psi.$$

Beweis. Es sei

$$r = \det \varphi$$

und es sei

$$s := \sqrt[n]{|r|},$$

wobei n die Dimension von V sei. Es sei σ die Streckung mit dem Faktor s und wir betrachten die Abbildung

$$\psi := \sigma^{-1} \circ \varphi.$$

Diese Abbildung ist nach wie vor winkeltreu und ihre Determinante ist 1 oder -1. Nach Aufgabe 33.17 ist ψ eine Isometrie. $\square$

Bemerkung 35.4. Bei einer winkeltreuen Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

zwischen euklidischen Vektorräumen V und W werden nicht nur die Winkel am Nullpunkt, sondern überhaupt alle Winkel erhalten. Für Punkte $P, Q, R \in V$ stimmt ja der Winkel des Dreiecks an Q wegen

$$\begin{aligned}
\angle(P, Q, R) &= \angle(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR}) \\
&= \angle(\varphi(\overrightarrow{QP}), \varphi(\overrightarrow{QR})) \\
&= \angle(\overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(P)}), \overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(R)}) \\
&= \angle(\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R))
\end{aligned}$$

mit dem Winkel an $\varphi(Q)$ des Bilddreiecks $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$ überein.

Abstände zwischen Mengen

Definition 35.5. Zu zwei nichtleeren Teilmengen $A, B \subseteq M$ in einem metrischen Raum M nennt man

$$d(A, B) := \inf\left(d(P, Q),\ P \in A,\ Q \in B\right)$$

den *Abstand der Teilmengen* A und B.

Speziell werden wir dieses Konzept auf normierte Vektorräume und auf euklidische Vektorräume anwenden. Zu zwei Punkten $P, Q \in V$ ist der Abstand zwischen den Mengen $\{P\}$ und $\{Q\}$ natürlich gleich $d(P,Q)$.

Wir werden uns hauptsächlich mit Situationen beschäftigen, in denen das Infimum angenommen wird, also ein Minimum ist. Für lineare Objekte ist dieses Verhalten typisch.

LEMMA 35.6. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $v \in V$. Dann ist $p_U(v)$ derjenige Punkt auf U, der unter allen Punkten auf U zu v den minimalen Abstand besitzt. Insbesondere ist*

$$d(v,U) \,=\, d(v, p_U(v)).$$

Beweis. Zu $u \in U$ ist nach dem Satz des Pythagoras

$$d(v,u)^2 \,=\, d(v,p_U(v))^2 + d(p_U(v),u)^2,$$

da ja $p_U(v) - u \in U$ und $v - p_U(v) \in U^{\perp}$ aufeinander senkrecht stehen. Der Ausdruck wird minimal genau dann, wenn $d(p_U(v),u) \,=\, 0$ ist, was genau bei

$$p_U(v) \,=\, u$$

der Fall ist. $\square$

In diesem Zusammenhang nennt man $p_U(v)$ auch den *Lotfußpunkt* von v auf U.

KOROLLAR 35.7. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $v \in V$. Es sei $u_1, \ldots, u_m$ eine Orthonormalbasis von U. Dann ist*

$$d(v,U)^2 \,= ||\, v\, ||^2 - \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle^2 .$$

Beweis. Nach Lemma 35.6 ist

$$d(v,U) \,=\, d(v, p_U(v))$$

und nach Lemma 32.14 ist

$$p_U(v) \,=\, \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle\, u_i.$$

Wir ergänzen die Orthonormalbasis zu einer Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_n$ von V. Also ist unter Verwendung des Satzes des Pythagoras

$$\begin{aligned} d(v,U)^2 &= d\left(v, \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle\, u_i\right)^2 \\ &= d\left(\sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle\, u_i, \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle\, u_i\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \; \Big|\Big| \sum_{i=m+1}^{n} \langle v, u_i \rangle \, u_i \Big|\Big|^2 \\ &= \; ||\, v \,||^2 - \Big|\Big| \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle \, u_i \Big|\Big|^2 \\ &= \; ||\, v \,||^2 - \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle^2 . \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 35.8. Es sei $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und $U = \langle e_i, \, i \in J \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ der von dieser Auswahl an Standardvektoren aufgespannte Achsenunterraum. Sei

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} .$$

Dann ist der Abstand von v zu U gleich

$$d(v, U) = \sqrt{\sum_{i \notin J} v_i^2} .$$

Der Lotfußpunkt von v auf U ist

$$p_U(v) = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

mit

$$w_i = \begin{cases} v_i, & \text{falls } i \in J, \\ 0, & \text{falls } i \notin J \, . \end{cases}$$

KOROLLAR 35.9. *Es sei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $||\, a \,|| = 1$ und*

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n |\, a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\} = (\mathbb{R} a)^{\perp}$$

der durch a als Normalenvektor definierte Untervektorraum. Dann ist für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ der Abstand zu U gleich

$$d(U, v) = |\langle a, v \rangle| \, .$$

Beweis. Sei $a, u_2, \ldots, u_n$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ und

$$v = \lambda a + \sum_{i=2}^{n} c_i u_i .$$

Dann ist

$$p_U(v) = \sum_{i=2}^{n} c_i u_i$$

und nach Lemma 35.6 ist

$$d(U, v) = ||\, v - p_U(v) \,|| = ||\, \lambda a \,|| = |\lambda| \; ||\, a \,|| = |\lambda| \, ,$$

was in Verbindung mit

$$\langle a, v \rangle = \left\langle a, \lambda a + \sum_{i=2}^{n} c_i u_i \right\rangle = \langle a, \lambda a \rangle = \lambda$$

das Resultat liefert. □

Die bisherigen Überlegungen übertragen sich direkt auf affine Unterräume.

Beispiel 35.10. Es sei E ein reeller affiner Raum über einem euklidischen Vektorraum V, $P \in E$ ein Punkt und $F \subseteq E$ ein affiner Unterraum. Bei $P \in F$ ist der Abstand von P zu F gleich 0. Im Allgemeinen schreibt man

$$F = Q + U$$

mit einem Aufpunkt $Q \in F$ und mit einem Untervektorraum $U \subseteq V$ und bestimmt das orthogonale Komplement $W = U^{\perp}$ von U in V. Wenn $u_1, \ldots, u_m$ eine Basis von U und $w_1, \ldots, w_k$ eine Basis von W ist, so gibt es eine eindeutige Darstellung

$$\overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{k} b_j w_j .$$

Es ist dann

$$L = P + \sum_{j=1}^{k} b_j w_j = Q - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$$

der Lotfußpunkt von P auf F und der Abstand von P zu L ist

$$d(P, F) = d(P, L) = \Big|\Big| \sum_{j=1}^{k} b_j w_j \Big|\Big| .$$

Wenn die w_j eine Orthonormalbasis von U bilden, so ist dies gleich $\sqrt{\sum_{j=1}^{k} b_j^2}$.

Beispiel 35.11. Wir wollen in der euklidischen Ebene den Abstand des Punktes $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ zu der Geraden G, die durch $2x - 3y = 7$ gegeben ist, berechnen. Die Gerade hat die Form

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

und $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist ein zu G orthogonaler Vektor. Es ist

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -5 \end{pmatrix} = -\frac{23}{26} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{14}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Somit ist der Lotfußpunkt gleich

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{14}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{80}{13} \\ \frac{23}{13} \end{pmatrix}$$

und der Abstand ist

$$\frac{14}{13}\sqrt{13}\,.$$

LEMMA 35.12. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $E_1 = P_1+U_1$ und $E_2 = P_2+U_2$ nichtleere affine Unterräume mit den Untervektorräumen $U_1, U_2 \subseteq V$. Es sei*

$$P_1 - P_2 = u_1 + u_2 + u$$

mit $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ und $u \in (U_1+U_2)^\perp$. Dann ist der Abstand $d(E_1, E_2)$ gleich $\| u \|$ und wird in den Punkten $P_1 - u_1 \in E_1$ und $P_2 + u_2 \in E_2$ angenommen. Insbesondere steht der Verbindungsvektor zu Punkten, in denen der minimale Abstand angenommen wird, sowohl auf E als auch auf F senkrecht.

Beweis. Sei also $P - Q = u_1 + u_2 + u$ mit $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ und $u \in (U_1 + U_2)^\perp$, wobei es eine solche Zerlegung immer gibt, und wobei u_1, u_2 nicht eindeutig bestimmt sein müssen (falls $U_1 \cap U_2 \neq 0$ ist), aber u eindeutig bestimmt ist. Es ist dann

$$P_1 - u_1 = P_2 + u_2 + u$$

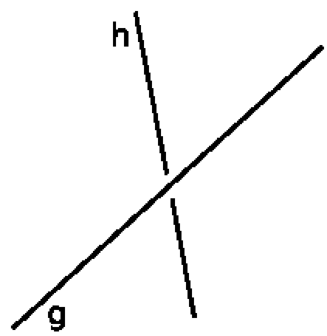
und dabei ist $Q_1 := P_1 - u_1 \in E_1$ und $Q_2 := P_2 + u_2 \in E_2$. Der Abstand zwischen Q_1 und Q_2 ist $\| u \|$. Für beliebige Punkte $R_1 = Q_1 + v_1 \in E_1$ und $R_2 = Q_2 + v_2 \in E_2$ mit $v_1 \in U_1$ und $v_2 \in U_2$ ist

$$\begin{aligned} d(R_1, R_2)^2 &= \| R_1 - R_2 \|^2 \\ &= \| v_1 - v_2 + u \|^2 \\ &= \langle v_1 - v_2 + u, v_1 - v_2 + u \rangle \\ &= \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle + \langle u, u \rangle \\ &\geq \langle u, u \rangle\,, \end{aligned}$$

d.h.

$$d(R_1, R_2) \geq \| u \|\,.$$

□



In der vorstehenden Aussage sind die Punkte, in denen das Minimum angenommen wird, nicht eindeutig bestimmt, man denke beispielsweise an zwei parallele Geraden in der Ebene. Eindeutigkeit liegt vor, wenn der Durchschnitt der zu E, F gehörenden Untervektorräume gleich 0 ist. Dies ist bei windschiefen Geraden der Fall.

Beispiel 35.13. Zwei (affine) Geraden $G, H \subseteq \mathbb{R}^3$ heißen *windschief*, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben und auch nicht parallel sind, ihre Richtungsvektoren also nicht linear abhängig sind. Dann erzeugen die Richtungsvektoren eine Ebene, und auf dieser Ebene steht ein (bis auf Streckung eindeutiger) Vektor u senkrecht. Einen solchen Vektor, den *Normalenvektor*, kann man mit dem Kreuzprodukt berechnen. Sei

$$G = P + \mathbb{R}v$$

und

$$H = Q + \mathbb{R}w.$$

Das lineare Gleichungssystem

$$P - Q = av + bw + cu$$

besitzt eine eindeutige Lösung $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Dabei sind $P - av \in G$ und $Q + bw \in H$ die Lotfußpunkte, in denen nach Lemma 35.12 der Abstand der Geraden angenommen wird. Dieser Abstand ist $|| cu ||$.

Korollar 35.14. *Es seien*

$$G = P + \mathbb{R}v$$

und

$$H = Q + \mathbb{R}w$$

windschiefe Geraden im $\mathbb{R}^3$ mit Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$. Es sei u ein normierter Vektor, der zu v und w senkrecht sei. Dann ist

$$d(G, H) = |\langle P - Q, u \rangle| .$$

Beweis. Wir gehen von Beispiel 35.13 aus und betrachten

$$P - Q = av + bw + cu,$$

Mit der Cramerschen Regel erhalten wir unter Verwendung von Satz 33.3 (5) und da u ein lineares Vielfaches von $v \times w$ ist

$$\begin{aligned} c &= \frac{\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & P_1 - Q_1 \\ v_2 & w_2 & P_2 - Q_2 \\ v_3 & w_3 & P_3 - Q_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & u_1 \\ v_2 & w_2 & u_2 \\ v_3 & w_3 & u_3 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{\langle v \times w, P - Q \rangle}{\langle v \times w, u \rangle} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\langle u, P-Q\rangle}{\langle u, u\rangle} \\
&= \langle u, P-Q\rangle .
\end{aligned}
$$

□

Beispiel 35.15. Es seien

$$G = P + \mathbb{R}v$$

und

$$H = Q + \mathbb{R}w$$

windschiefe Geraden. Wir wollen das Abstandsproblem zwischen den beiden Geraden als Extremalproblem im Sinne der höherdimensionalen Analysis verstehen. Sei

$$P = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

und

$$Q = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Das Quadrat des Abstandes zwischen zwei Punkten

$$P' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

und

$$Q' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

ist (mit $c_i = a_i - b_i$)

$$
\begin{aligned}
d(P', Q')^2 &= (c_1 + sv_1 - tw_1)^2 + (c_2 + sv_2 - tw_2)^2 + (c_3 + sv_3 - tw_3)^2 \\
&= c_1^2 + s^2 v_1^2 + t^2 w_1^2 + 2sc_1v_1 - 2tc_1w_1 - 2stv_1w_1 + \\
&\quad c_2^2 + s^2 v_2^2 + t^2 w_2^2 + 2sa_2v_2 - 2tc_2w_2 - 2stv_2w_2 + \\
&\quad c_3^2 + s^2 v_3^2 + t^2 w_3^2 + 2sc_3v_3 - 2tc_3w_3 - 2stv_3w_3 \\
&= c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + 2s\,(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) \\
&\quad -2t\,(c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3) + s^2\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) \\
&\quad +t^2\left(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2\right) - 2st\,(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) .
\end{aligned}
$$

Diesen Ausdruck kann man mit Mitteln der Analysis 2 interpretieren. Wir betrachten die durch die Geraden gegebenen Daten als fixierte Parameter, so dass ein reellwertiger funktionaler Ausdruck $f(s,t)$ in den beiden reellen Variablen s und t vorliegt, für den Extrema zu bestimmen sind. Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 2\,(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) + 2s\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) - 2t\,(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)$$

und
$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\left(c_1w_1+c_2w_2+c_3w_3\right)+2t\left(w_1^2+w_2^2+w_3^2\right)-2s\left(v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3\right).$$
Wenn wir diese gleich 0 setzen, so erhalten wir ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in den Variablen s und t. Mit der Cramerschen Regel erhält man
$$s = \frac{\det\begin{pmatrix} -c_1v_1-c_2v_2-c_3v_3 & -v_1w_1-v_2w_2-v_3w_3 \\ -c_1w_1-c_2w_2-c_3w_3 & w_1^2+w_2^2+w_3^2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} v_1^2+v_2^2+v_3^2 & -v_1w_1-v_2w_2-v_3w_3 \\ -v_1w_1-v_2w_2-v_3w_3 & w_1^2+w_2^2+w_3^2 \end{pmatrix}}$$
und
$$t = \frac{\det\begin{pmatrix} v_1^2+v_2^2+v_3^2 & -c_1v_1-c_2v_2-c_3v_3 \\ -v_1w_1-v_2w_2-v_3w_3 & -c_1w_1-c_2w_2-c_3w_3 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} v_1^2+v_2^2+v_3^2 & -v_1w_1-v_2w_2-v_3w_3 \\ -v_1w_1-v_2w_2-v_3w_3 & w_1^2+w_2^2+w_3^2 \end{pmatrix}}.$$
Wenn v und w normiert sind, so vereinfachen sich diese Ausdrücke zu
$$s = \frac{-\langle P-Q,v\rangle-\langle P-Q,w\rangle\langle v,w\rangle}{1-\langle v,w\rangle^2}$$
und
$$t = \frac{-\langle P-Q,w\rangle-\langle P-Q,v\rangle\langle v,w\rangle}{1-\langle v,w\rangle^2}.$$

Abbildungsverzeichnis