クス」ガ少クトモ一ツ存在スル.

今 Σ ヲ稜ノ長サガ ε_n ヨリ小ナル様ナ「シンプレツクス」$\tau_k(k=1,\ldots\ldots,m)$ ＝ s 分割スレバ,上＝證明シタ様＝,$\{\tau_k\}$ ノ中＝少クトモ一ツ特殊「シンプレツクス」σ_n ガ存在スル. 今 $\varepsilon_n \to 0$ トスレバ σ_n ノ稜ハ 0 ＝收斂スルカラ, σ_n ノ中カラ適當＝部分列ヲ撰ンデ一點 P ＝收斂サセル時ハ, P ノ任意ノ近傍ハ $\mathfrak{M}_1,\ldots\ldots,\mathfrak{M}_{n+1}$ ノ各々ト交ル. 故＝ P ハ $\mathfrak{M}_1,\ldots\ldots,\mathfrak{M}_{n+1}$ ノ各々ノ集積點デアル. 然ル＝ $\mathfrak{M}_i$ ガ閉集合ナル故, P ハ $\mathfrak{M}_1,\ldots\ldots,\mathfrak{M}_{n+1}$ ＝屬スル. 故＝ Lebesgue ノ定理ハ證明サレタ.

5. 豫備定理

次元數ノ不變性ヲ證明スルタメ＝次ノ豫備定理ヲ證明スル.

豫備定理 1. **Σ ヲ n 次「シンプツクス」トスレバ,適當ニ $n+1$ 個ノ閉集合 $\mathfrak{M}_i(i=1,\ldots\ldots,n+1)$ ヲ作ツテ, Σ ノ點ハ $\mathfrak{M}_i$ ノドレカニ屬シ,又 $\mathfrak{M}_i$ ハ Σ ノ只一ツノ頂點ノミヲ含ミ,ソノ頂點ニ對スル面トハ共通點ヲ有セズ又スベテノ $\mathfrak{M}_i$ ニ共通ナ點ハ只一ツシカナイ様ニ出來ル.**

證明. $A_1, A_2\ldots\ldots, A_{n+1}$ ヲ Σ ノ項點トシ, s_i ヲ A_i ノ對面トスル. Σ ノ內部＝一點 P_0 ヲトリ,ソノ重心座標ヲ $(t_1{}^0,\ldots\ldots,t^0{}_{n+1})$ トスル.

Σ ノ任意ノ一點 P ノ重心座標ヲ $(t_1,\ldots\ldots,t_{n+1})$ トスレバ,

$$t_1{}^0+\ldots\ldots+t_{n+1}{}^0=1,\ t_1+\ldots\ldots+t_{n+1}=1\ (t_i\geqq 0,\ t_i{}^0\geqq 0). \tag{1}$$

今 $\mathfrak{M}_1,\ldots\ldots,\mathfrak{M}_{n+1}$ ヲ次ノ様＝定義スル.

$\mathfrak{M}_1$: $t_1\geqq t_1{}^0$,

$\mathfrak{M}_2$: $t_1\leqq t_1{}^0$, $t_2\geqq t_2{}^0$,

$\mathfrak{M}_3$: $t_1\leqq t_1{}^0$, $t_2\leqq t_2{}^0$, $t_3\geqq t_3{}^0$,

....

$\mathfrak{M}_{n+1}$: $t_1\leqq t_1{}^0$, $t_2\leqq t_2{}^0$, ... $t_n\leqq t_n{}^0$, $t_{n+1}\geqq t_{n+1}{}^0$.

コノ $\mathfrak{M}_1,\ldots\ldots,\mathfrak{M}_{n+1}$ ガ所要ノ條件ヲ滿足シ, P_0 ガスベテノ $\mathfrak{M}_i$ ＝共通ナ唯一ノ點デアルコトヲ證明ショウ.

先ヅ Σ ノ點ハドレカノ $\mathfrak{M}_i$ ノ中＝含マレルコトハ次ノ如クシテ分ル. (1) カラ

$$(t_1-t_1{}^0)+\ldots\ldots+(t_{n+1}-t^0{}_{n+1})=0. \tag{2}$$

故＝ $t_1-t_1{}^0\geqq 0$ ナラバ P ハ $\mathfrak{M}_1$ ＝屬スル. 若シ $t_1-t_1{}^0<0$, $t_2\geqq t_2{}^0$ ナラバ $\mathfrak{M}_2$ ＝屬スル. 以下同様＝シテ進ム. $t_i-t_i{}^0$ ノ和ガ 0 ナル故,全部 $t_i-t_i{}^0<0$ トイウコトハナイカラ上ノ方法デ P ガドレカノ $\mathfrak{M}_i$ ＝屬スルコトガ分ル.

全部ノ $\mathfrak{M}_i$ ＝共通ナ點ハ $t_1=t_1{}^0$, ... $t_n=t_n{}^0$, $t_{n+1}=t_{n+1}{}^0$ デナケレバナラナイコトモ容易＝分ルカラ P_0 ガスベテノ $\mathfrak{M}_i$ ＝共通ナ唯一ノ點デアル. 又 $\mathfrak{M}_i$ ハ $A_i(t_1=0,\ t_2=0,\ \ldots\ldots,\ t_{i-1}=0,\ t_i=1,\ t_{i+1}=0,\ \ldots\ldots,\ t_{n+1}=0)$ ヲ含ミ $s_i(t_i=0)$ ヲ含マナイ.

豫備定理 2. **任意ニ小サナ閉集合 $\mathfrak{M}_i(i=1,2,\ldots\ldots)$ ヲ作ツテ, n 次元ノ空間 R_n ノ各點ハ $\mathfrak{M}_i$ ノドレカニ屬シ,且如何ナル點モ $n+1$ 個ヨリ多クノ $\mathfrak{M}_i$ ニハ屬セズ又 R_n ノ任意ノ有限ナル部分ト點ヲ共有スル $\mathfrak{M}_i$ ハ有限個シカナイ様ニ出來ル.**

證明. $\varepsilon>0$ ヲ任意＝與ヘラレタ正數トスル時, R_n ヲ「シンプレツクス」Σ_k ＝ s 分割シ,各「シンプレツクス」ノ稜ノ長サヲ ε ヨリ小＝スル. 豫備定理 1 ＝ヨツテ,各「シンプレツクス」內ヲ $n+1$ 個ノ閉集合 $\{\mathfrak{M}\}$ ＝分チ,頂點トソノ對面トハ同ジ集

合ニ屬シナイ様ニスル. A ヲコノ一ツノ「シンプレックス」Σ_k ノ頂點トスレバ,コレハh個ノ「シンプレックス」$\Sigma_i\ (i=1,\ldots\ldots,h)$ ノ頂點デアル. A ヲ Σ_i ノ點トミレバ,コレハ Σ_i ヲ閉集合ニ分ケタ一ツノ閉集合 $\mathfrak{N}_i$ ニ含マレル. 今

$$\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2+\ldots\ldots+\mathfrak{N}_h=\mathfrak{M}_k$$

ト置ケバ,各「シンプレックス」Σ_k ノ頂點ニハ,ソレヲ含ム一ツノ閉集合 $\mathfrak{M}_k$ ガ對應スル. Σ_i ノ稜ノ長サハ ε ヨリ小ダカラ, Σ_i ノ直徑ハ ε ヨリ小,從ツテ $\mathfrak{N}_i$ ノ直徑ハ ε ヨリ小デアルカラ, $\mathfrak{M}_k$ ノ直徑ハ 2ε ヨリ小デアル. カクスレバ空間 R_n ノ點ハ少クトモ一ツノ $\mathfrak{M}_k$ ニ含マレ, R_n ノ任意ノ有限ナル部分ハ高々有限個ノ $\mathfrak{M}_k$ ト共通點ヲ有スルコトガ分ル. 次ニ空間 R_n ノ如何ナル點モ $n+1$ 個ヨリ多クノ $\mathfrak{M}_k$ ニハ屬シナイコトヲ證明シヨウ. 「シンプレックス」Σ_i ノ内部ノ點ハ明カニ $n+1$ 個ヨリ多クノ $\mathfrak{M}_k$ ニハ屬シナイ. 次ニ Σ_i ノ面上ノ點ハソノ面ニ屬スル頂點ヲ過ル $\mathfrak{M}_k$ ニ屬スルカラ高々 n 個ノ $\mathfrak{M}_k$ ニ屬スル. 故ニ R_n ノドノ點モ $n+1$ 個ヨリ多クノ $\mathfrak{M}_k$ ニハ屬シナイ.

6. 次元數ノ不變性ノ定理ノ證明

$\mathfrak{M}$ ヲ $n+h$ 次空間 $\mathrm{R}_{n+h}\ (h>0)$ ノ内點ヲ有スル點集合トシ, $\mathfrak{M}'$ ヲコレニ連續的ニ 1—1 對應スル n 次空間 R_n ノ點集合トスル.

$\mathfrak{M}$ ノ内ニ $(n+h)$ 次「シンプレックス」Σ ヲトル. コレハ $\mathfrak{M}$ ガ内點ヲ含ムカラ可能デアル. コノ Σ ハ有界ナ閉集合デアル. Σ ニ R_n デハ Σ' ガ對應スルトスレバ,對應ガ連續的ダカラ Σ' ハ有界ナ閉集合デアル. 今 R_n ヲ豫備定理 2 ニヨツテ「シンプレックス」ノ和ニ s 分割スル時ハ, Σ' ト共通點ヲ有スル「シンプレックス」ハ有限個デアル. コレヲ $\sigma_1,\ldots\ldots,\sigma_s$ トスル. σ_i ト Σ' トノ共通集合ヲ $\sigma_i\Sigma'=\mathfrak{M}_i'$ ト置ケバ,

$$\Sigma'=\mathfrak{M}_1'+\ldots\ldots+\mathfrak{M}_s'$$

デ $\mathfrak{M}_i'$ ハ有界ナル閉集合デアル. 假定ニヨリ Σ' ノ點ハ $n+1$ 個ヨリ多クノ $\mathfrak{M}_i'$ ニハ屬シナイ.

$\mathfrak{M}_i'$ ニハ R_{n+h} デハ $\mathfrak{M}_i$ ガ對應スルトスレバ, $\mathfrak{M}_i$ ハ明カニ有界ナ閉集合デ, σ_i ノ稜ノ長サヲ十分小ニスレバ, $\mathfrak{M}_i$ ハ十分小ニナル. 且

$$\Sigma=\mathfrak{M}_1+\ldots\ldots+\mathfrak{M}_s.$$

故ニ Σ ノ點ハ有限個ノ閉集合 $\mathfrak{M}_i(i=1,\ldots\ldots,s)$ ノドレカニ屬シ,且ドノ點モ $n+1$ 個ヨリ多クノ $\mathfrak{M}_i$ ニハ屬シナイ. コレハ $h>0$ ナラバ Lebesgue ノ定理ニ反スル. 故ニ $\mathfrak{M}$ ト $\mathfrak{M}'$ トハ連續的ニ 1—1 對應スルコトハ出來ナイ.

7. 領域ノ不變性ノ定理

Lebesgue ノ定理ノ應用トシテ次ノ重要ナル Schoenflies ノ定理ヲ證明シヨウ.

領域ノ不變性 (Gebietsinvarianz) ノ定理. ***n* 次空間 R_n ノ二ツノ集合 $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ ガ連續的ニ 1—1 對應スル時ハ, $\mathfrak{M}$ ノ内點ト $\mathfrak{M}'$ ノ内點トハ互ニ對應スル.**

從ツテ $\mathfrak{M}$ ノ境界點ト $\mathfrak{M}'$ ノ境界點トガ互ニ對應スル.

先ズ次ノ豫備定理ヲ證明シヨウ.

豫備定理. **$\mathfrak{M}$ ヲ *n* 次空間 R_n ノ有界ナル閉集合トシ, $\mathfrak{M}$ ノ各**

點ハ有限個ノ閉集合 $\mathfrak{M}_i$ ($\subset \mathfrak{M}$)($i=1, \ldots\ldots, s$) ノドレカニ含マレ又ドノ點モ $n+1$ 個ヨリ多クノ $\mathfrak{M}_i$ ニハ屬シナイ. 且 $n+1$ 個ノ $\mathfrak{M}_i$ ニ屬スル點ハ唯一點 P ノミデ且 P ガ $\mathfrak{M}$ ノ境界點トスレバ P ノ任意ノ近傍ダケ $\mathfrak{M}_i$ ノ分布ヲ變ズルコトニヨツテ, $\mathfrak{M}$ ノ各點ハ n 個ヨリ多クノ $\mathfrak{M}_i$ ニ屬シナイ様ニ出來ル.

證明. P ヲ内部ニ含ム任意ニ小サナ n 次「シンプレツクス」ヲ Σ トスル. Σ ノ表面ヲ $\mathfrak{O}$ トシ,

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{O}$$

トスル. 假定ニヨリ $\mathfrak{D}$ ハ特殊點* ヲ含マナイ. 故ニ $\mathfrak{O}$ ノ各點ヲ中心トシテ十分小サナ近傍 U ハ高々 n 個ノ $\mathfrak{M}_i$ ト交ル.

$\varepsilon>0$ ヲ適當ニ小ニトレバ, $\mathfrak{D}$ ノ各點ヲ中心トシテ半徑 ε ノ球内**(ε 近傍) ハ高々 n 個ノ $\mathfrak{M}_i$ ト交ル様ニ出來ル. 何トナレバ若シ然ラズトセバ, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \ldots\ldots > \varepsilon_n > \ldots\ldots \to 0$ ナル $\{\varepsilon_n\}$ ニ對シテ, $\mathfrak{D}$ ノ點 P_n ヲ求メ P_n ノ ε_n 近傍ハ少クトモ $n+1$ 個ノ $\mathfrak{M}_i$ ト交ル様ニ出來ルカラ, P_n ノ集積點 P_0 ハ少クトモ $n+1$ 個ノ $\mathfrak{M}_i$ ノ集積點トナル. $\mathfrak{M}_i$ ガ閉集合ナル故, P_0 ハ $n+1$ 個ノ $\mathfrak{M}_i$ ニ共通點トナツテ假定ニ反スル故デアル.

今 $\mathfrak{O}$ 上ニ直徑ガ ε ヨリ小ナル有限個ノ閉集合 $\mathfrak{N}_i$($i=1, \ldots\ldots, r$) ヲ分布セシメ, $\mathfrak{O}$ ノ各點ハ $\mathfrak{N}_i$ ノドレカニ含マレ又ドノ點モ n 個ヨリ多クノ $\mathfrak{N}_i$ ニハ屬セヌ様ニスル***. 然ル後ニコノ $\mathfrak{N}_i$ ヲ $\mathfrak{M}_i$

* 即チ $n+1$ 個ノ $\mathfrak{M}_i$ ニ屬スル點.

** ε ハ球ノ中心ニハ依存シナイ.

*** 豫備定理 1 ト證明ハ同様. $\mathfrak{O}$ ハ有限個ノ ($n-1$) 次「シンプレツクス」ノ和ナルコトニ注意.

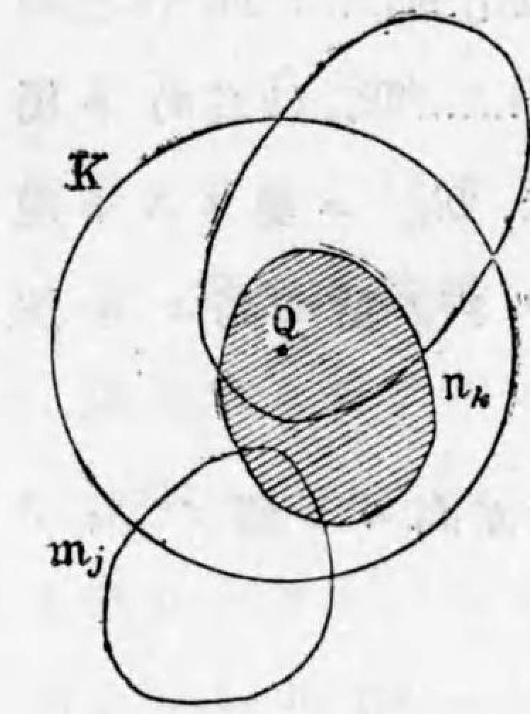
ノ中ニ次ノ方法ニヨツテ編入スル.

(1) 若シ $\mathfrak{N}_k$ ガ $\mathfrak{D}$ ノ點ヲ含マナケレバ, $\mathfrak{N}_k$ ハ任意ノ $\mathfrak{M}_i$ ニ編入スル.

(2) 若シ $\mathfrak{N}_k$ ガ $\mathfrak{D}$ ノ點ヲ含メバ, ソノ點ハ高々 n 個ノ $\mathfrak{M}_i$ ニ屬シテ居ルガ, $\mathfrak{N}_k$ ハソノ中ノ任意ノ $\mathfrak{M}_i$ ニ編入スル.

カクスレバ $\mathfrak{O}$ ノ點ハドレカノ $\mathfrak{M}_i$ ニ屬スル様ニナルガ, ソレデモ $\mathfrak{O}$ ノ點ハ n 個ヨリ多ノ $\mathfrak{M}_i$ ニハ屬スルモノガナイコトヲ證明シヨウ. $\mathfrak{O}$ ノ點デ $\mathfrak{D}$ ニ屬シナイモノハ高々 n 個ノ $\mathfrak{N}_i$ ニ屬スルカラ, 從ツテ高々 n 個ノ $\mathfrak{M}_i$ ニ屬スル.

次ニ Q ヲ $\mathfrak{D}$ ノ點トスル. Q ハ $\mathfrak{N}_k$ ヲ $\mathfrak{M}_i$ ニ編入スル以前ニハ高々 n 個ノ $\mathfrak{M}_i$ ニ屬スル. コレヲ



$$\mathfrak{M}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{M}_f \quad (f \leqq n) \qquad (1)$$

トスル. 又 Q ヲ含ム $\mathfrak{N}_k$ ヲ

$$\mathfrak{N}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{N}_g \qquad (2)$$

トスレバ明カニ $g \leqq n$ デアル.

コレ等ノ $\mathfrak{N}_k$ ($k \leqq g$) ハ直徑ガ ε ヨリ小ダカラ Q ノ ε 近傍ニアル. 編入前ニハ, コノ ε 近傍ト交ハル $\mathfrak{M}_i$ ハ高々 n 個シカナイ. コレヲ

$$\mathfrak{M}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{M}_h \quad (f \leqq h \leqq n) \qquad (3)$$

トスル. ($\mathfrak{M}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{M}_f$ ハ Q ヲ含ムカラ, コノ中ニアル).

サテ $\mathfrak{N}_k$ ヲ $\mathfrak{M}_i$ ニ編入後, 始メノ (1) ノ外ニ更ラニ Q ヲ含ム $\mathfrak{M}_j$ ガ現ハレルコトガアル. ソレハ $\mathfrak{N}_k$ ガ Q ヲ含ミ且 $\mathfrak{N}_k$ ト $\mathfrak{M}_j$ トガ Q 以外ノ點デ交ル時ニ, $\mathfrak{N}_k$ ヲ $\mathfrak{M}$ ニ編入スルカラ, コノ $\mathfrak{M}_i$

ガQヲ含ム様ニナルノデアル．然シ $\mathfrak{N}_k$ ハQノ ε 近傍ニアルシ，ε 近傍ト交ル $\mathfrak{M}_i$ ハ高々 n 個シカナイコトニ注目スレバ，ヤハリ編入後デモQヲ含ム $\mathfrak{M}_i$ ノ數ハ n ヲ超ヘナイコトガ分ル．

故ニ $\mathfrak{O}$ ノ點ハ高々 n 個ノ $\mathfrak{M}_i$ ニ屬スル．

サテPハ假定ニヨリ，$\mathfrak{M}$ ノ境界點ダカラ，Σ ノ内部ニPノ任意ノ近クニ $\mathfrak{M}$ ニ屬セヌ點Sガ存在スル．

Σ ノ中ニアツテ $\mathfrak{M}$ ニ屬スル點ノ集合ヲ $\mathfrak{K}$ トスル．卽チ

$$\mathfrak{K}=\Sigma\mathfrak{M}.$$

假定ニヨリ $\mathfrak{M}$ ノ點ハ有限個ノ閉集合 $\mathfrak{M}_1,\ldots\ldots,\mathfrak{M}_s$ ノドレカニ屬シテ居ルガ，今コノ Σ ノ内部ノ $\mathfrak{M}_i$ ノ分布ヲ次ノ様ニ變更スル．

Σ ノ表面 $\mathfrak{O}$ ニ $\mathfrak{N}_i$ ト $\mathfrak{M}_k$ トヲ用ヒテ，新シク $\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2,\ldots\ldots\mathfrak{M}_{s'}$ $(s'\leqq s)$ ヲ分布シタガ，今 $\mathfrak{O}$ ノ一點Rガコノ新 $\mathfrak{M}_{\nu_1},\ldots\ldots,\mathfrak{M}_{\nu_k}$ $(k\leqq n)$ ニ屬スル時ニ，線分 $\overline{\mathrm{SR}}$ ノS以外ノ點ハ $\mathfrak{M}_{\nu_1},\ldots\ldots,\mathfrak{M}_{\nu_k}$ ニ屬スルト規定スル．カクスレバ Σ ノ内部ノS以外ノドノ點モ高々 n 個ノ $\mathfrak{M}_k$ ニ屬スルコトガ分ル．

Sハ $\mathfrak{K}$ ノ上ニナイカラ $\mathfrak{K}$ ノスベテノ點ガ高々 n 個ノ $\mathfrak{M}_k$ ノ上ニアルコトトナリ定理ハ證明サレタ．

8. 領域ノ不變性ノ定理ノ證明

定理ヲ證明スルニハ次ノコトヲ證明スレバヨイ．

n 次空間 R_n 内ニ n 次「シンプレツクス」Σ ト點集合 $\mathfrak{M}$ トガ連續的ニ 1—1 對應スル時ハ，Σ ノ内點ニハ常ニ $\mathfrak{M}$ ノ内點ガ對應スル．

證明．Π ヲ Σ ノ内點トシ，コレニ $\mathfrak{M}$ ノ一點Pガ對應スル．184頁豫備定理1ニヨリ Σ ノ内部ニ $n+1$ 個ノ閉集合 $\mathfrak{M}_i(i=1,\ldots\ldots,n+1)$ ヲ分布シテ，各 $\mathfrak{M}_i$ ハ一ツノ頂點ノミヲ含ミ對面トハ共通點ノナイ様ニ，且 Π ガ $\mathfrak{M}_1,\ldots\ldots,\mathfrak{M}_{n+1}$ ニ共通ナ唯一ノ點ナル様ニスル．Π ガ Σ ノ内點ナル故，Lebesgue ノ定理ニヨリ，ドンナニ Π ノ近傍ノ $\mathfrak{M}_i$ ノ分布ヲ變更シテモ $n+1$ 個ノ $\mathfrak{M}_i$ ニ共通ナ點ガ現ハレル（181頁）．

對應ガ連續的ダカラ，$\mathfrak{M}_i$ ニハ $\mathfrak{M}$ ノ方デ $n+1$ 個ノ閉集合 $\mathfrak{M}_1',\ldots\ldots,\mathfrak{M}'_{n+1}$ ガ對應スル．Π ノ對應點Pハスベテノ $\mathfrak{M}_i'(i=1,\ldots\ldots,n+1)$ ニ共通ナ點デ，カヽル點ハP以外ニナイ．

今Pガ $\mathfrak{M}$ ノ境界點ト假定スレバ，前節豫備定理ニヨリPノ近傍ダケ $\mathfrak{M}_i'$ ノ分布ヲ變ズルコトニヨツテ，$\mathfrak{M}$ ノドノ點モ $n+1$ 個ノ $\mathfrak{M}_i'$ ニ共通點トナラヌ様ニ出來ル．シカシコレハ Σ ノ方カラ考ヘレバ，上ニ述ベタ様ニ不可能デアル．故ニPハ $\mathfrak{M}$ ノ内點デアル．依ツテ定理ハ證明サレタ．

9. Peano 曲線

第五章ニ於テ正方形ヲ滿タス連續曲線ノ存在ヲ證明シタ．

一般ニ $x_1=f_1(t),\ldots\ldots,x_n=f_n(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ ヲ n 個ノ連續函數トスレバ，コレハ n 次空間 R_n ニテ一ツノ連續曲線ヲ定義スル．若シコレガ R_n ノ一領域ヲ全部滿タス場合ニハ，カヽル曲線ノコトヲ一般ニ **Peano 曲線**ト呼ブコトニスル．

前ニ平面ノ場合 $(n=2)$ ハドンナ Peano 曲線モ無數ノ三重點ヲ有スルコトヲ述ベタガ，コヽデハ一般ニ次ノ定理ヲ Lebesgue ノ定理ヲ用ヒテ證明シヨウ．*

* H. Lebesgue: Sur les correspondences entre les points de deux espaces. (Fundamenta Mathematicae. II. (1921)).

定理. **一ツノ連續曲線 Γ ガ n 次空間 R_n ノ一ツノ領域 D ヲ全部滿タス時ニハ, D ノ中ニ任意ニドンナ小サナ n 次「シンプレツクス」ヲトツテモ,ソノ中ニ Γ ノ (少クトモ) $n+1$ 重點ガ存在スル.**

證明. Σ ヲ D ノ中ノ n 次「シンプレツクス」トスル. t ガ 0 カラ 1 マデ動ク時, Γ ハ Σ ノドノ點モ一回ハ必ズ通過スル.

今 $[0, 1]$ ヲ有限個ノ點 $0 < t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_s < 1$ デ分割スル*. $t_i (i = 1, \ldots\ldots, s)$ ヲ中心ニ含ム區間ヲ (τ_i, τ_i') トスル.

(τ_i, τ_i') ヲ次ノ條件ヲ滿足スル樣ニトル.

$$0 < \tau_1 < t_1 < \tau_1' < \tau_2 < t_2 < \tau_2' < \ldots\ldots < \tau_s < t_s < \tau_s' < 1$$

コノ時二ツノ場合ガ起ル.

(i) t ガ閉區間 $[0, \tau_1]$, $[\tau_1', 1]$ ヲ動イタダケデ曲線ガ Σ ヲ全部滿タス場合.

コノ場合ハ $[0, \tau_1]$, $[\tau_1', 1]$ ダケ考ヘ,コレニ對應スル Γ ノ弧ヲ Γ_1 トスル.

(ii) $[0, \tau_1]$, $[\tau_1', 1]$ ダケデハ曲線ガ Σ ヲ全部滿タサヌ場合.

コノ時ハ開區間 (τ_1, τ') ノ中ニ一點 t ガアリ,コノ t ニ對應スル Γ ノ點ハ $[0, \tau_1]$, $[\tau_1', 1]$ ニ對應スル Γ ノ弧ガ通過シナイ. カヽル t ノ一ツヲ θ_1 トスル. $[0, 1]$ ノ分割ヲ變更シテ, θ_1 ヲ更メテ t_1 トスル. コノ時ハ Γ 全體ヲ Γ_1 ト書ク.

次ニ若シ Γ_1 カラ (τ_2, τ_2') ヲ除イテモ Σ ヲ全部滿タス時ニハ, Γ_1 カラ (τ_2, τ_2') ニ對應スル弧ヲ除キ去ツテ,コレヲ Γ_2 トスル.

---

* 以下 $[a, b]$ ハ閉區間 $a \leqq t \leqq b$ ヲ, (a, b) ハ開區間 $a < t < b$ ヲ表ハスモノトスル.

若シ (τ_2, τ_2') ナシデハ, Γ_1 ガ Σ ヲ全部滿タサナイ時ハ, Γ_1 全體ヲ Γ_2 トスル. 其時ハ (τ_2, τ_2') ノ中ニ一點 θ_2 ガ存在シ,コノ θ_2 ニ對應スル點ハ, Γ_1 カラ (τ_2, τ_2') ニ對應スル部分ヲ除イタ弧ハ通過シナイ. コノ θ_2 ヲ更メテ t_2 トスル. 以下 (τ_3, τ_3') ……, (τ_s, τ_s') ニツイテ同樣ノコトヲ行ヒ,コレニ對應シテ Γ ノ弧 Γ_1, $\Gamma_2, \ldots\ldots, \Gamma_s$ ヲ得. Γ_s ノコトヲ γ ト書ク. 即チ

$$\Gamma_s = \gamma$$

トスレバ, γ ハ Σ ノ點ヲ少クトモ一回通週スル. γ ニハ $[0, 1]$ 内ノ有限箇ノ閉區間ガ對應スル. コノ全體ヲ e トスレバ, e ハ明カニ閉集合デアル.

$[0, 1]$ ヲ閉區間 $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ……, $[t_s, 1]$ ニ區分スレバ,* e ハ有限個ノ閉集合 e_i ノ和ニ分割サルカラ,コレニ對應シテ γ ハ同數ノ閉集合 γ_i ニ分割サレル. γ_i ト Σ トノ共通集合ヲ Γ_i トスル. 即チ

$$\gamma_i \Sigma = \Gamma_i$$

ト置ケバ, Γ_i ハ閉集合デ Σ ハ有限箇ノ閉集合 Γ_i ノ和ニナル.

最初 $[0, 1]$ ヲ t_i デ分割スル時十分密ニ t_i ヲトツテ置ケバ, Γ_i ノ直徑ハ十分小ニナルカラ,從ツテ Lebesgue ノ定理ガ應用出來テ, Σ ノ中ニ少クトモ $n+1$ 個ノ Γ_i, 從ツテ γ_i ニ共通ナ點 A ガ存在スル.

A ハ $\gamma_\alpha, \gamma_\beta, \ldots\ldots, \gamma_\lambda$ ノ上ニアリトスレバ, A ニハ t ノ方デハ $e_\alpha, e_\beta, \ldots\ldots, e_\lambda$ ノ中ニアル $n+1$ 個ノ t ノ値ガ對應スル. コノ

---

* t_i ノ中ニハ θ_i ヲ更メテ t_i トシタモノモアル.

t ノ値ハ全部等シクナイコトヲ證明ショウ.

同ジ e_k ノ中ニアル二ツノ t ノ値ハ一致スルコトハナイカラ, 若シ e_α, e_β 内ノ t ノ二ツノ値 a_α, a_β ガ一致スル場合ハ, a_α, a_β ガ區間 e_α, e_β ノ境界點ニ一致スル時デアル. コノ時ハ前述ノ一ツノ θ ニ一致スル時デアル. 此時ハ θ ヲ中ニ含ム區間ヲ (τ, τ') トスレバ,コノ θ ニ對應スル點 A ニ對應スル t ノ値ハ (τ, τ') ノ外ニハナイ. 然ルニ $\gamma_\alpha, \ldots\ldots, \gamma_\lambda$ ノ數ハ少クトモ $n+1>2$ ダカラ, (τ, τ') ノ外ノ値ニモ A ガ對應スルコトニナリ不合理デアル. 故ニ A ニハ少クトモ $n+1$ 個ノ異ナル t ノ値ガ對應スル. 故ニ A ハ少クトモ $n+1$ 重點デアル. (證明終)

コノ結果ヲ更ラニ擴張スルタメニ先ヅ **p 次ノ集合體** (variété à p dimensions) ノ定義ヲスル.

n 次空間 R_n ノ點集合 M_p ノ點 $(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ ガ

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = f_1(u_1, \ldots\ldots, u_p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p = f_n(u_1, \ldots\ldots, u_p) \end{array}\right\} (0 \leqq u_1 \leqq 1, \ldots\ldots, 0 \leqq u_p \leqq 1)$$

デ表ハサレ, $f_1, \ldots\ldots, f_n$ ハ連續函數デ且 M_p ノ點ト p 次區間 $0 \leqq u_1 \leqq 1, \ldots\ldots, 0 \leqq u_p \leqq 1$ ト 1−1 對應スル時ニ, M_p ノコトヲ p 次ノ集合體トイウ. 上ノ定理ノ證明ト全ク同樣ニシテ $p \geqq 2$ ナラバ,ドンナ小サナ p 次集合體 M_p ノ上ニモ Peano 曲線ノ $p+1$ 重點ノアルコトガ分カル.

次ニ $p=1$ ノ時デモ同樣ノコトガ成立スルコトヲ示サウ.

卽チ任意ノ重複點ナキ連續曲線 C ノ上ニハ Peano 曲線 Γ ノ (少クトモ) 二重點ガ存在スルコトヲ證明ショウ. C, Γ ヲ夫々

$$\mathrm{C}: \ x_i = f_i(\tau) \quad (i = 1, \ldots\ldots, n) \quad (0 \leqq \tau \leqq 1)$$

$$\Gamma: \ x_i = F_i(t) \quad (i = 1, \ldots\ldots, n) \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

トシ, f_i, F_i ハ連續函數トスル. C ト Γ トノ交點デハ $f_i(\tau) = F_i(t)$ $(i = 1, \ldots\ldots, n)$ デアル.

若シ C ノ上ニ Peano 曲線 Γ ノ二重點ガナイトスレバ, t ハ τ ノ一價函數トナルカラ,コレヲ $t = t(\tau)$ トスレバ, $t(\tau)$ ハ τ ノ連續函數デアル. ソレヲ證明スルニハ, $\tau_1, \tau_2, \ldots\ldots, \tau_n \to \tau_0$ ニ對シテ, $t_n = t(\tau_n) \to t_0 = t(\tau_0)$ ヲ證明スレバヨイ. 若シ然ラズトスレバ, $\{\tau_n\}$ ノ中カラ部分列 $\{\tau_n'\}$ ヲ撰ンデ, $\tau_n' \to \tau_0$ デ且 $t_n' = t(\tau_n') \to t_0' (\neq t_0)$ ナラシメルコトガ出來ル.

$f_i(\tau)$, $F_i(t)$ ハ連續ダカラ

$$\lim_{n=\infty} f_i(\tau_n') = f_i(\tau_0), \quad \lim_{n=\infty} F_i(t_n') = F_i(t_0'),$$

$f_i(\tau_n') = F_i(t_n')$ ダカラ

$$f_i(\tau_0) = F_i(t_0').$$

然ルニ

$$f_i(\tau_0) = F_i(t_0),$$

故ニ

$$F_i(t_0) = F_i(t_0') \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

故ニ $x_i^0 = F_i(t_0) (i=1, \ldots\ldots, n)$ トスレバ, $(x_1^0, \ldots\ldots, x_n^0)$ ハ Γ ノ二重點トナリ假定ニ反スル. 故ニ $t = t(\tau)$ ハ τ ノ連續函數デアル.

C ト Γ ノ一部トガ 1−1 對應スルカラ, τ ハ t ノ一價函數デアル. コレヲ $\tau = \tau(t)$ ト置ク. 從ツテ $\tau(t)$ ハ t ノ連續函數デ區間 $a \leqq t \leqq b$ ト $0 \leqq \tau \leqq 1$ トガ, $t = t(\tau)$, $\tau = \tau(t)$ ニヨツテ連續的ニ 1−1 對應スル. 故ニ C ハ Γ ノ一部分 $a \leqq t \leqq b$ ト全ク一致スル.

假定ニヨリCハ重複點ナキ故,前定理デ空間ノ一部ヲ滿タスコトハ出來ナイ. 故ニ $P_0(t=t_0)$ ヲCノ(兩端トハチガウ)點トスレバ, P_0 ニ收斂スル點列, $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_m, \ldots\ldots$ ヲCノ外ニトレル. コレニ $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_m, \ldots\ldots$ ガ對應スルトスレバ,コレハ區間 $a \leqq t \leqq b$ ノ外ニアル. $t_1, \ldots\ldots, t_m, \ldots\ldots$ ノ中カラ適當ニ部分列, $t_1', t_2', \ldots\ldots, t_m', \ldots\ldots$ ヲ撰ンデ t_0' ニ收斂サス,

$$t_m' \to t_0'.$$

t_0' ハ $a \leqq t \leqq b$ ノ外ニアル故 $t_0 \neq t_0'$. 故ニコノ P_0 ニハ t_0, t_0' ガ對應シテ P_0 ガ Γ ノ二重點トナリ不合理デアル. 故ニ次ノ定理ヲ得.

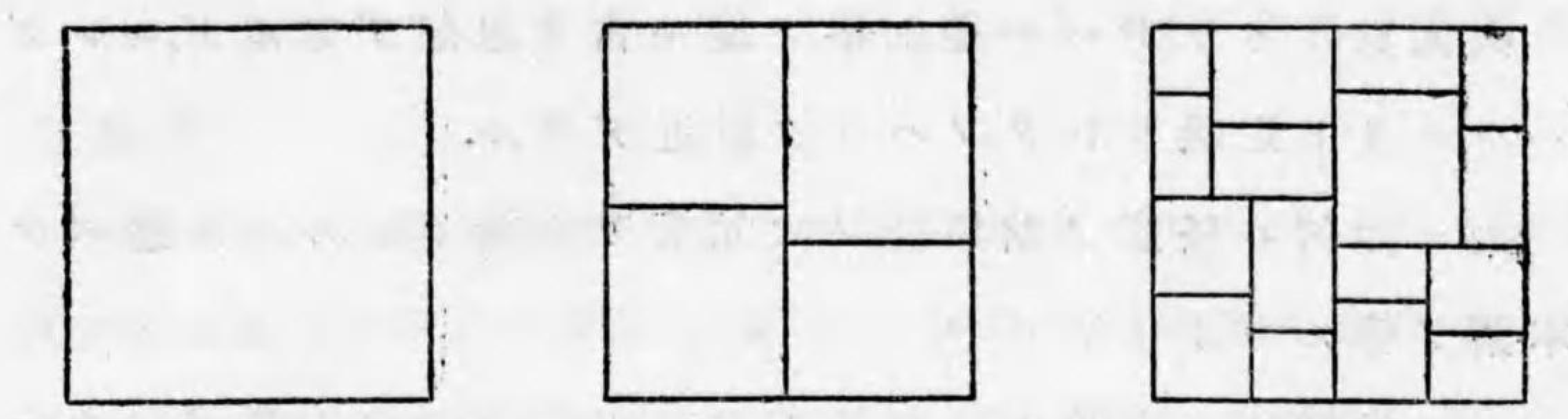
定理. 連續曲線 Γ ガ n 次空間ノ一ツノ領域 D ヲ全部滿タス時ハ, D ノ中ノ任意ノ p 次集合體 M_p $(p \geqq 1)$ ノ上ニ, Γ ノ(少クトモ) $p+1$ 重點ガ常ニ存在スル.

上ノ定理デ n 次空間ノ一ツノ領域ヲ全部滿タス Peano 曲線ハ少クモ $n+1$ 重點ガ存在スルコトガ證明サレタガ,次ニ起ル問題ハ $n+1$ 重點或ハソレ以下ノ重複點ノミヲ有スル Peano 曲線ガ實際存在スルカトイウコトデアル.

實際カヽル曲線ハ作ルコトガ出來ルノデ,次ニ $n=2$ ノ場合ヲ證明ショウ. 一般ノ場合モ全ク同樣デアル.

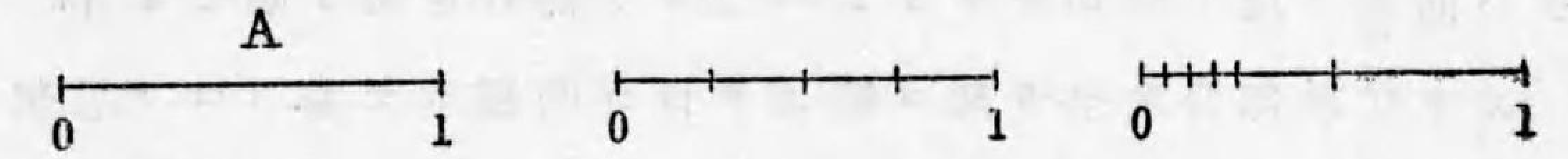
卽チ正方形ヲスベテ滿タシ,ドノ點モ三回以上通ラヌ樣ナ連續曲線ヲ作ツテミヨウ. ソレニハ 37 頁デ述ベタ Hilbert ノ方法ヲ少シク改良スレバヨイ.

正方形 B ヲ四等分スル代リニ少シ分割線ヲズラシテ次ノ圖ノ樣ニスレバ,ドノ點モ三個以上ノ小正形ニ共通ナ點ハナイ.

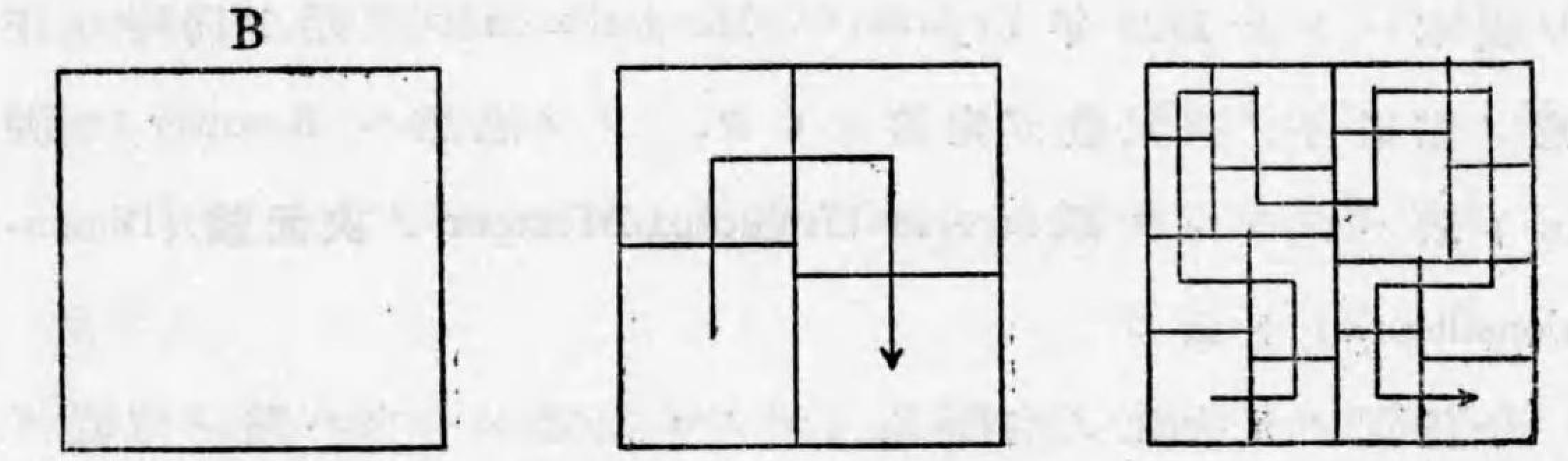


線分(01)ヲ等分シテ各小正方形ヲ小線分ニ對應セシメ Hilbert ノ方法ト全ク同樣ニシテ正方形ヲ全部滿タス連續曲線ガ得ラレル. コノ時ハドノ點モ三重點以上ニハナラナイコトモ容易ニ分カル.

A



B



注意. 故ニ 57 頁ノ平面上ノ Peano 曲線デハ任意ノ小サナ面分內ニ少クトモ三重點,任意ノ小サナ曲線上ニ少クトモ二重點ガ存在スル. 今特ニ正方形ノ一邊ニ平行ナ直線ヲトレバ,ソノ上ニ少クトモ二重點ガ存在スル. カヽル直線ノ集合ハかーぢなる數 c ヲ有スルカラ從ツテ重複點ノかーぢなる數ハ c デアル.

10. Brower-Urysohn-Menger ノ次元論

前ニ次元數ノ不變性ヲ證明シタガ,アノ時ノ定理ハ實ハ或ル特殊ナ點集合卽チ內點ヲ含ム集合ニツイテノコトデ,一般ノ點集合ノ次元數ハ何トモ定義シナカツタノデアル.

次元數トイフ考ヘハ幾何學ノ最モ古イ思想デアルガ,コレガハツキリト定義サレタノハゴク最近デアル.

次ニ如何ニ任意ノ點集合ノ次元數ガ定義サレルカヲ述ベテ本講ヲ終ルコトトシヨウ.

先ズ常識的ニ直線ガ一次元,正方形ガ二次元,立方體ガ三次元ト云ツテ居ルガ,ソノコトハ次ノコトガ根本ニナツテ居ル. 卽チ直線ヲ二ツノ部分ニ切リ離スニハ一點ヲ除ケバヨイ. 正方形デハ曲線ニ沿ツテ切レバ二ツノ部分ニ切リ離レル. 立方體デハ曲面ニ沿ツテ切ラナケレバ二ツノ部分ニ切リ離セナイ.

カクアル部分ヲ切リ離ス時切リ口ガ問題ニナル. コノ思想ヲ根本ニシテ 1922 年 Urysohn ト Menger ニヨツテ殆ド同時ニ任意ノ點集合ノ次元數ガ定義サレタ. ソノ思想ハ Brouwer ニ溯ルト云ハレ,コレヲ **Brouwer-Urysohn-Menger ノ次元論** (Dimensionstheorie) ト云ウ.

今任意ノ n 次元ノ空間 R_n (コノ n 次元トイウハ點ノ位置ガ普通ノ n 個ノ直交座標ガ表ハサレル意デアル) 内ノ點集合ヲ M トスル.

M ガ空集合卽チ點ヲ含マナイ時ハ, M ノ次元數ヲ (−1) ト定義スル.

若シ M ガ空集合デナケレバ, P ヲ M ノ一點トシ, P ヲ含ム任意ノ開集合 U ヲ P ノ近傍ト云ウ.

若シドンナニ小サク P ノ近傍 U ヲトツテモ, U ノ中ニ更ラニ近傍 U_1 ヲ見出シテ, U_1 ノ境界ト M トノ交リガ空集合卽チ (−1) 次元ノ集合ナル時ニ, M ハ P 點デ 0 次デアルト定義スル.

M ノ各點ガ 0 次元ナル時ニ, M ノコトヲ「0 次元ノ點集合」ト云ウ.

次ニ若シ P 點ノドンナ小サナ近傍 U ヲトルモ,ソノ中ニ近傍 U_1 ヲ見出シテ U_1 ノ境界ト M トノ交リガ 0 次元ノ集合ニナル樣ニ出來ルガ,シカシ如何ニ U_1 ヲトツテモ U_1 ノ境界ト M トノ交リガ (−1) 次元ノ集合ニナラヌ時ニ, M ハ P 點デ 1 次元デアルト定義スル.

M ノ各點ガ高々 1 次元デ,少クトモ一ツ 1 次元ノ點ヲ含ム時ニ, M ノコトヲ「1 次元ノ點集合」ト定義スル.

次ニ P 點ノ任意ノ小サナ近傍 U ノ中ニ更ラニ近傍 U_1 ヲ見出シテ, U_1 ノ境界ト M トノ交リガ 1 次元ノ集合ニナル樣ニ出來ルガ,シカシドンナニ U_1 ヲトツテモ, U_1 ノ境界ト M トノ交リガ 1 次元以下ニハナラナイ時ニ, M ハ P 點デ 2 次元デアルト定義スル.

M ノ各ガ高々 2 次元デ,少クトモ 2 次元ノ點ヲ一ツ含ム時ニ, M ノコトヲ「2 次元ノ點集合」ト云ウ. 以下順次 3 次元, 4 次元等ヲソレヨリ低イ次數ノ點集合デ定義スルコトガ出來ル.

コノ定義ニヨツテ直線,正方形,立方體ハ夫々一次元,二次,三次元ナルコトガ證明サレル.

定義カラ $N \subset M$ ナラバ N ノ次元數ハ M ノ次元數ヨリ大デナイコトガ分ル.

コヽデ注意スルコトハ P ガ R_n ノ中ニ含マレレバ $R_m (m>n)$ ノ中ニモ含マレルカラ,コノ時 P 點ノ近傍トイフコトガ R_n ノ時ト R_m ノ時トハチガフコトデアル. ソレニモ拘ラズ M ノ

次元數ハ同ジニナルコトガ云ヘル.

上ノ定義ニヨツテ任意ノ點集合ノ次元數ハ定義サレタ. 例ヘバ M ヲ平面上ノ座標 (x, y) ガ共ニ有理數ナル點ノ集合トスレバ,ソノ任意ノ點 $P(x, y)$ ヲ中心トシテ,一邊ノ長サガ無理數デ任意ニ小ナル正方形ハ P ノ近傍デ,ソノ境界ハ $x=\mathrm{const}=c_1$, $y=\mathrm{const}=c_2$ (c_1, c_2 ハ無理數) ダカラ, M トハ交ラナイ. 故ニ M ノ各點ハ 0 次元ノ點デアル. 故ニ M ハ 0 次元ノ點集合デアル.

二ツノ點集合 M ト N トヲ連續的ニ 1—1 對應セシメル時ハ, M ノ次元數ト N ノ次元數トハ同ジナルコトガ證明サレル. コレガ眞ノ意味ニ於ケル次元數ノ不變性デアル.

カクシテ最モ一般ナル意味ニ於テ**次元數ノ不變性**ガ確立サレタノデアル.

次元數ガ定義サレタカラ,コレカラ種々ノ問題ガ簇出シテ來ル. ソノ中デ著シイモノヲアゲレバ, m 次元ノ集合ト n 次元ノ集合ノ和ハ高々 $(m+n+1)$ 次元デアル. 又高々可附番個ノ n 次元ノ閉集合ノ和ハ n 次元デアル等ノ定理ガ證明サレル.

詳シクハ Menger ノ書: Dimensionstheorie (Teubner 1928) ヲ見ラレタイ.

終

索 引

ア 行

カ 行

サ 行

發行者寄贈

弊社ハ貼紙捺印等ニヨル
定價ノ改變ヲ致シマセン

共立出版
株式會社

集 合 論

定價 200圓
地方賣價 210圓

昭和9年4月15日 初版印刷
昭和9年4月18日 初版發行
昭和25年2月15日 七版印刷發行

著者 辻 正次

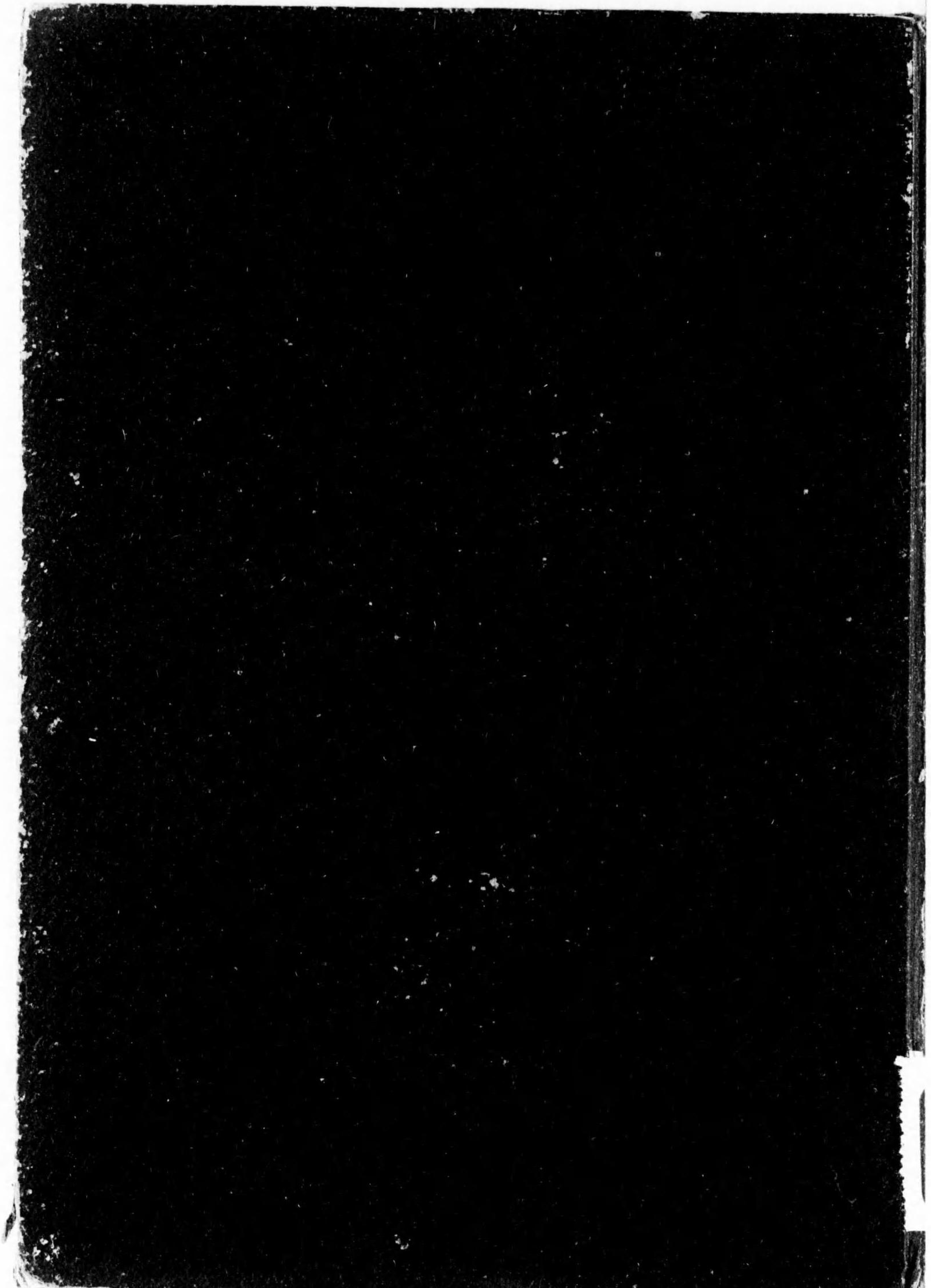
代表者
發行者 南條初五郎
東京都千代田區神田駿河臺3—9

印刷者 藤本 鞏
東京都文京區西江戸川町19

印刷所 藤本印刷株式會社
東京都文京區西江戸川町19

發行所 東京都千代田區神田駿河臺3—9
電話神田(25)1518・2624番
振替東京57035番
共立出版株式會社

小賣部 東京都千代田區神田神保町2—2
大阪店 大阪市北區曾根崎上3—8



終