萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

科學與假設

(一)

普恩街萊著
葉蘊理譯

商務印書館發行

科學與假設

(一)

普恩街萊著

葉蘊理譯

漢譯世界名著

譯者序言

法國算理家兼哲學家普恩街萊（Henri Poincaré）對於科學的哲理不特有深刻的評論，並且他所特創的學說久已被一般學者所推尊；而這是我們讀了下面他的四種名著就可知道的：

一、科學與假設（La Science et l'Hypothèse）；

二、科學之價值（La Valeur de la Science）；

三、科學與方法（Science et Méthode）；

四、最後的思想（Dernières Pensées）。

最後一種是在他去世後那位羣衆心理的著者黎朋先生代編的遺著。聽說這些書在日本與歐洲各國久已有了譯本，獨惜我國尚未完全譯出，所以我感有譯此書之必要。現在第一卷的翻譯差幸竣事，其餘的還待我繼續的努力。此外下面有幾樁事尚望讀者注意：

（一）這部書在法國大學中，是哲學生或科學生必需的讀品；牠的重要，自無疑義。獨惜這是一本會精聚采的讀品：研究科學者要有哲學的概念，或研究哲學者要有基本科學的訓練，方可有領略的機會。

（二）我們爲尊重著者起見，深以直譯此書才不致失去這位大學者的明晰的思想；有時我們圖讀者便於領會，不免參加意譯的辦法以爲補救，但畢竟這是我們有遺憾的事。

（三）有許多的術語在中國還沒有找到固定的位置，譯者爲明瞭起見，有時沿用，有時在拙譯的名詞下注以法文，可不失原文的眞諦。我們希望有較妥切的譯名來在再版時修正之。

（四）原文緊要處本以斜體字表明，今譯文則在相當處，加以小圈。

（五）凡一人名一次用了原文註在譯音下，下次概不重複，祈讀者留意，以免混亂。

最後，我要感謝我的朋友嚴濟慈君的熱烈的友誼：當他在巴黎大學研究正忙的時候，對於拙譯，多所指正；而我們的目的都是想把一種學說誠實的介紹在國內，因此我們這種的合作却是必需的了。做一位大學者有如普恩街萊的傳記，不是易舉的事，但嚴君也應承我做了，他這種的善意

和功勞我當讓讀者自己感受着。

一九二七年 Micarême 節，在法國，葉蘊理謹誌。

科學與假設目錄

第一册

第三册

第四部　自然界……一九

科學與假設

導言

大凡科學的眞理在一位膚淺的觀察者總覺無可懷疑；科學的論理是永固的，至於學者有時會自誤的原因，是在他們不知其中的規則。

一切算學的眞理，是用了一串連貫而準確的推理方法從少數明顯的命題(proposition)推演出來的；不單是我們不得不服從這些眞理，就連那自然界(la nature)本身亦復如是。牠們好似能支配「造物者」(le Créateur)，祇許他在比較上很少的解答中，能有所選擇。因此我們只要稍具經驗，便知道他所選的爲何。從每個經驗中，用一套連貫的數學演繹法便可得到許多的結果，也就是這樣從每個結果我們才認識宇宙之一隅。

這就是普通一般人，以及略知物理的中學生所想像的科學定理之來源。這是他們所認爲經

驗與算學之功用，這也是百年前許多學者所懂得的，那時候，他們夢想借用愈少愈妙的經驗中的材料，來說明世界的結構。

人們試略加思索，就可知假設（Phypothése）在科學中所占的位置；人們已知算學家捨此莫由，而實驗家亦復如是。因此就生出一個疑問：此種建築於假設上的學問是否堅固的，有人以爲經不起一陣小風便要傾倒的，作這樣的懷疑，還是膚淺的見解，懷疑一切，或信仰一切，都是很便利的兩種解答，因爲兩者都可以使我們不用思索。

我們對於假設先且不宜妄加責難，應該細心審察他的任務；這樣才能認定他不特是必需的東西；並且這往往是合法的了。我們將見假設可分幾種，有的是可以證實的，並且一經實驗證明，就成爲眞理的淵藪；有的不會欺誤我們，同時有堅定我們的思想之利益，有的外似假設，其實不過是一種遮了面目的定義，或公約（définition ou convention）而已。這最後的一種假設大半見於算學及其相關之科學。這些科學，適以此而愈形眞確；這些公約是我們精神上一種自由活動之作品，牠在這一種範圍裏是無障礙的。在這裏面我們的精神可以肯定，因爲牠能命令。但要知道，這些

命令僅可頒行於我們的科學中（科學非此卽無依據）；那自然界則不受牠們支配的。雖然，這些命令是否任意的？不；否則牠們將不生效力了。經驗固讓我們自由選擇，然同時又昭然示我人以最便利的路徑。所以我們的命令如同一聰明專制的君主要諮詢國會後才頒布的命令一樣。

有人對於有些科學的基本原則上，覺有一種自由規定的公約之色彩，引爲奇事。他們極力想就此擴充起來，而同時忘卻了自由非卽任意之謂。因此他們就成立了所謂唯名派學說 (nominalisme)。他們自問道，學者是否卽他所自造的定義之傀儡，而他所認爲發現的世界是否卽他的私意所創。在這種情形科學將或是確實的，但是缺少價值了。

果眞如此，則科學將必無能力了。但我們竟見其蒸蒸日上。牠如不能使我們知道些實在的東西，這樣是不可能的；但牠所能達到的，非有如老實的斷論家 (dogmatiste) 所想的物之本身，這不過是物與物間之關係而已；除這種關係以外，再沒有可知的實在 (la réalité) 了。

這就是我們將來的結論，然爲此我們必須從算術與幾何起一直談到機械學與實驗物理學。

數學推理（raisonnement mathématique）的性質是什麼？眞如我們普通所信爲演繹的

嗎？把牠仔細分析一下，可知大爲不然，他在某種範圍內卻帶着歸納推理的性質，其所以豐裕亦正在此。但牠還保存着不少的絕對精密的性質；這是我們在開始就要說明的。

等到既然明白算學推理所用的這種工具之後，那時我們還要討論另一基本觀念，此即數量(la grandeur mathématique)。這是我們可在自然界中覓得呢？抑或是我們所創造的呢？又，果眞是那最後的解答，則吾人不犯錯誤一切的危險嗎？試把我們感覺所得的麤鈍標準和那數學家理想中所運用的又靈巧又周密的數量來比較，其中勢必發生歧異；由此可見我們想收羅萬有的這張表格，原來是我們手創的；然而我們幷未偶然爲之，我們可說曾經按照尺寸去做的，所以我們能收羅一切事實，同時又能使他主要的東西不至錯誤。

我們對於世界所立的牠一表格就是空間(d'espace)。幾何的基本原理是從何而來？是論理學(la logique)給我們的嗎？陸把周夫斯基(Lobatchevsky)創立了非歐克里得幾何學(géométrie non euclidienne)以證明其不然。空間是否由感覺得來的？也不是，因爲我們器官所能感觸到的，絕對與幾何的空間不同。幾何學是否來自經驗？細細研究之後，可見不然。所以吾們

結論牠的原理不過是一種公約；但不是任意的公約，今如把牠轉運到別一世界，（我名之曰非歐克里得世界，我並想發明之，）則我們另當採用別的公約了。

在機械學中，我們勢必得同一的結論，並且我們將知道這種科學的原則，比較上雖直接根據於經驗，但終含有幾何定理（postulat）之公約性。一直談到此地，都還是唯名派占着勝利，現在我們且看眞正的物理學如何。這裏情形便大不同，我們遇見別種的假設，幷可見其何等的豐富。表面看來，物理的理論好像是很脆而易折的，其在科學史上，又每如曇花一現，新陳代謝似的，但是牠們也不能完全消滅，終有所殘留。這殘留的東西，正是應當分析的呵，因爲正是那兒而唯獨那兒，才是眞正的實在咧。

物理學的方法是建設在歸納上的，我們藉此可知在外界某種境況畢具時，某現象必可重新發生。如所有的這些境況可以如數重現，則此條原理，就可以放心應用了。但這是從來沒有的，其中總有些境況是缺少的呵。我們可以確信這是不重要的嗎？這顯然不是的。這也許似乎對的，但這不是確實一定的呵。由此見得或然性（la probabilité）的觀念在物理學上之功用，是何等的偉大

了。所以或然性的計算不是一種消遣及賭博者的引導，我們應當深究其原理才行咧。關於這層，我只能給點不完備的解答，因為至今那種空泛的，使我們分別形似的本能還不受分析學的制裁。

我以為把物理學家工作的情形研究之後，還要說明他們工作的成績。因此我就在光學與電學中舉了些例子。我們將知弗勒納耳(Fresnel)和馬克思威耳(Maxwell)之理論何來，以及安培(Ampère)與那些創造這動電學(électrodynamique)的學者怎樣引用的一些不自覺的假設。

第一部　數與量

第一章　數學推理之性質

一

數的科學之可能與否，好像已成為不可解決之矛盾論了。如果這種科學之為演繹不過是表面的，則牠所有的這種嚴密而無疑的正確性何由而來的呢？反之，若說牠的命題儘可用形式論理

學(logique formelle)互相引出，則算學豈不變成一種汎大的重複思想(tautologie)？三段論不能告人以眞正新穎的事物，且如所有必來自全等原則(principe d'identité)，則所有亦必能歸入其中；然則許多書中的定理，將不過是A即A的各種說法而已。

自然，所有的推理都可歸根到幾條公理(axiome)上，因這是所有推理的起點。假使有人判明這些推理不能縮為矛盾原理(principe de contradiction)。又如果有人不願看見那些不含數學需要性之經驗事實，則仍可把那些推理歸入先驗的綜合判斷(jugement synthétique a priori)之中。這樣并非解決困難，不過加以洗禮而已；即使到了綜合判斷的性質對於我們不再神祕的時候，然而這種矛盾仍不會消滅的，牠不過退了一步；三段論對於所有供給與牠的理由仍是無所增加的；這些理由不過是些公理，而在結論中人們決不能找到別的東西。

無論什麼定理，如其證明中不參加新的公理，則必不是新的，推理只能借用直接的直覺法(intuition)給我們明顯的眞理；牠好像只是一個暫時的中人，而人們要問不要問那所有三段論的工具是否單單用來遮蔽我們這借用品的？我們隨便展開一本數學書，便知道上說的矛盾令人

更爲可奇；著者處處想把已知的命題作一種推廣。故算學方法是否由特別而推及普遍，然則何以又名之爲演繹的呢？

最後，如數學是純粹分析的，或可由少數綜合判斷分析出來的，則聰明特殊的人一目就可看見所有的眞理；他將可想出一種簡單的言語，來敍述這些眞理；便常人亦能一目瞭然。

人們如不承認這些結果，就要知算學推理的本身有一種創造性，因此牠與三段論實有分別。

兩者之分別決不是浮面的。譬如將兩相等數作同樣的均一計算，便有相似的結果。我們實在不能解釋這條常用規則的奧妙。

所以這些推理的形式，不問其可否歸入實際的三段論，總保有分析性，而其力弱效薄，也正是這個緣故。

二

我們現在要討論的，已是很陳舊的問題了；賴布尼刺 (Leibnitz) 已經想證明二加二得四，我們試看他的證法如何。

我假定1數已有定義，又知 $x+1$ 之運算，即加一單位於與數 x。

這些定義，無論如何，與推理沒有關係。

其次我將2,3和4用下列式規定之：

(1) $1+1=2$,　　(2) $2+1=3$,　　(3) $3+1=4$,

同樣，我用下列式定明 $x+2$

(4) $x+2=(x+1)+1$

$2+2=(2+1)+1$　　（定義4）

$(2+1)+1=3+1$　　（定義2）

$3+1=4$　　（定義3）

所以：$2+2=4$　　（即所欲證）

我們不能否認這個推理純是分析的。但假使問於算學家，彼必答曰：『這不是眞的證明，這不過是一種對正而已。』人們僅將這兩種純粹公約性的定義做了一種比較，才知道是相等的；至於

新的東西，是一點沒有得到。對正（vérification）之所以不同於眞的證理，實因牠是純粹解析的，是毫無效果的。其所以無效果者，因其結論只是三段論的兩前提（prémisse）之一種譯語而已。反之眞正的證理是很充富的，以其結論的意義比較前提普遍。

因此 $2+2=4$ 這個等式之所以能被對正，只因牠是特例而已。所有算學中的特別定理都可用此法對正之。然而算學如竟成爲一串的對正，則亦將不成爲科學了。例如下棋的人並不見得因爲贏了一盤，就發明一種科學。那裏只有普通的科學。

人們竟可說這些正確的科學的目的，正在免去我們這種直接去對正之辛苦。

三

我們且看在工作時的幾何家，而細察牠們所用的方法。

這卻不是容易的事；單單任意翻開一本書而分析其中某條證理，這是不够的呵。

對於討論幾何學中一切定理的功用等複雜的難題，以及空間觀念之來源與性質問題，我們先當置之不理。爲同一理由，我們也不能談到微積分學。我們要揀最純粹的數學來談，這就是

算術。

此外還要選擇一下；因爲在高深的數論中，那原始的數學觀念，已受了極深的改進，所以比較不易分析。

所以要在算術的初部中，我們才可找到解釋，然正是在最根本的定理證明中，顯見得古法著者之缺少精密的態度。這是不可怪他們的；他們曾受一種必需的束縛。初學者還沒有十分算學精確性的訓練；他們在那裏只有見一些空虛的繁複；所以人們如在這上面苛求他們，那不過白費時間；他們將來還是要從新按步就班學過的，而這種程序也就是那些科學建設家所經過的。

爲何要這樣長的準備，才能習於這種精確性，而這好像是聰明人都當賦有的呢？這是一個論理與心理問題，大有討論之價值。

然這是我們題外的事，可不贅述，爲不失掉我們的目的，我們要把最根本的定理重新證明，且其形式當非爲免去那初學者𢙣與而淺近的可比，乃是能夠滿足已有成就的幾何家的。

加法之定義——我假定 $x+1$ 之運算，已有定義，即將 1 加於與 x 數是也。

且這個定義，無論爲何，對於下面的推理，是毫無關係的。

現在我要規定 $x+a$ 之運算，此卽將 a 數加於 x 數是也。

若將演算法規定爲：

$$x+(a-1)$$

則 $x+a$ 之算法可以下列式定之：

$$(1)\quad x+a=[x+(a-1)]+1$$

所以我們如果知道何爲$x+(a-1)$，便知道何爲 $x+a$，因爲我在起初已假定人們知道何爲 $x+1$，故 $x+2, x+3$ 演算法亦可用迴環法 (par récurrence) 規定了。

這個定義頗值得注意，牠有種特別的性質，且已有所別於純粹論理的定義；其實等式(1)包含無盡不同的定義，每一定義必待前者明白後才有意義。

加法之特性——可合性 (associativité) ——我說：

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

蓋如C爲則此定理是對的，因可寫爲：

$$a+(b+1)=(a+b)+1$$

即與剛才規定加法之(1)式相同。

今如 $c=\gamma$ 時此定理仍眞，則 $c=\gamma+1$ 時此定理亦眞。

蓋由 $(a+b)+\gamma=a+(b+\gamma)$

可得： $[(a+b)+\gamma]+1=[a+(b+\gamma)]+1$

又依定義(1)有：

$$(a+b)+(\gamma+1)=a+(b+\gamma+1)=a+[b+(\gamma+1)]$$

由此可見用了一串純粹分析的演繹法，證明此定理對於 $\gamma+1$ 亦眞。故 $c=1$ 時既眞，則 $c=2$, $c=3$時，亦復如是了。

通易性 (commutativité) ——(I)我說： $a+1=1+a$

今如 $a=1$，則此定理顯然是眞的，人們再可用純粹分析的推理來證明如 $a=\gamma$ 時爲眞，則

$a=\gamma+1$ 亦然；但 $a=1$ 時既如此，則令 $a=2$，$a=3$ 等等，亦因而如此；這就是命題用迴環法而證明。

（二）我說：

$$a+b=b+a$$

此定理於 $b=1$ 時已證明如上，人們再可用分析法證明如其 $b=\beta$ 時爲眞，則 $b=\beta+1$ 時亦必如是。因此命題因迴環法而成立。

乘法之定義——我們用下列等式來規定乘法：

$$a\times 1=a$$

$$(2)\qquad a\times b=[a\times(b-1)]+a$$

等式包含無數的定義；一如（1）式令 $a\times 1$ 既經規定，則此式亦可規定 $a\times 2, a\times 3$ 等等。

乘法之特性——可分性（distributivité）——我說：

$$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$$

如 $c=1$ 時人們可用分析法證明此式之眞；其次用同一方法亦可知如 $c=\gamma$ 時爲眞，則 $c=\gamma+1$ 時亦復如是。

這樣我們的命題又是用迴環法而證明了。

通易性——（一）我說：

$$a\times 1=1\times a$$

令 $a=1$ 時此乃顯然的定理。

人們可用分析法證明如 $a=a$ 時，此定理爲眞，則 $a=a+1$ 時亦然。

（二）我說：

$$a\times b=b\times a$$

於 $b=1$ 時，此定理已經證明。人們可用分析法證明如 $b=\beta$ 時爲眞，則 $b=\beta+1$ 時亦然。

四

我且把這一串單調的推理停止在這裏罷。但就是這種單調最能把那一致而又步步碰到的

方法，明白指示出來。

這就是迴環證明法。人們先於 $n=1$ 時證明其定理爲眞，然後證明是否 $n-1$ 時爲眞，n 時亦然，如是依次推之於任何整數，仍能不失其爲眞。

剛才我們已經見過用這方法怎樣證明加乘二法的規則，此即代數演算之規則；這種演算是轉變算式的工具，所得形式組合之複雜，遠非單純三段論可比擬；但這仍是純粹分析的工具，牠是不會有新結果的。故如數學此外再無別的工具，則行見其無發展之日；但是牠可以從新運用同樣的方法，就是所謂迴環推理法（raisonnement par récurrence），因此他仍可繼續前進了。

人們若能注意到，則可見其步步都是這樣的推理，而其形式或即如上文所說過簡單的，或則大同小異。這實在是最完善的數學推理，我們當仔細的去研究牠。

五

迴環推理法之重要特性是在能綜合無數的三段論，而納聚在唯一的公式中。欲明此理，且待我將這些三段論依次說明，牠們的排列有如瀑布直瀉下來。

這自然都是些假設的三段論。

今已知1數的定理爲眞。

但如果1爲眞時，則於2亦然。

故牠於2爲眞。

但假使於2爲眞，則於3亦然。

故牠於3爲眞，餘依次類推。

由此可見每一三段論之結論可做下三段論之小前提。

且所有三段論之大前提皆可化成唯一的公式。

此即如定理於 n−1 時爲眞，則於 n 時亦然。

可見在迴環推理法中，人們僅能說明第一三段論之小前提，及含得有像特例之大前題的普遍公式。

因此這一串無盡的三段論可縮短成爲幾行的語詞。

現在可容易明白，有如我已說過的，何故某定理的特別結論可用純粹分析的方法去對正。我們如不要證明那定理於任何數時爲眞，而只要於6時爲眞，只需證明其前五條的三段論之爲眞；但如我們要證明定理於10時爲眞，則需九條三段論；最大的數目，所需更多；然此數無論如何大，我們終可達到目的，而這樣分析的對正總是可能的。

雖然，我們無論走多遠，終究不能得到一適合於種種數目的普遍定理，——只有牠才能作爲科學的目的。爲此則非有無窮的三段論不成，這必須經過那分析家——他不得不依據形式的論理學——的忍耐力還永久塡不滿的深涯。

起初我曾問過，何以人們想不通竟有人能一眼看透算學中所有的眞理。

現在這個問題是很容易回答的了；奕者能做四步五步的預算，但是無論我們覺得他怎樣奇怪，他只能預備有限的數目；假使他將這種本事用在算術上，他就不能用直觀法看透那普遍的眞理；爲求到一最小的定理，他也必用迴環法推想出來，因爲這是從有限數到無窮數之推理的工具。這工具總是有益的，因其一方面能任我們的意思昇進數級，一方面又能省卻極無味而單調

的冗長的對正，並且這種對正在事實上尤非永遠能施行的呵。然而遇普遍定理時，這工具尤萬不可少的了，因爲其中的分析對正法，雖不能允許我們達到普遍定理，但能使我們不斷地接近牠。

有人必定以爲微積分學與我們現在所談的算術範圍相差尚遠，但是剛才我們已知算學的『無窮』觀念之重要，少了牠便無科學，因爲也沒有普遍的東西了。

六

迴環推理所依據的判斷可用別的方式表示之；例如在無窮個相異的整數中，我們可說必有一數較小於其牠各數。

人們可很易的由此一說明推及牠一說明，而自覺迴環推理之合法已經證明了。但照這樣做下去，終必見阻於一不可證明的公理，而且這公理實卽待證的命題之另一說法罷了。

所以迴環推理之規則，決不能變爲矛盾原理，這是誰也不能否認的結論。

這條規則又不是從經驗上得來的；經驗所能告訴我們的，不過說此規則於先十數或先百數

爲眞，但不能推之於無窮數；只能推之多少總是有限止的部分。

但是，如所有的問題，只是這點，則矛盾原理已足濟事。牠可使我們推演無論多少的三段論，然其所以失敗，只在人們想把無窮的三段論納入唯一的公式中，對於無窮就是經驗也無力量。這條規則，既非解析法所能證明，而又非經驗所能對正的，卻是先驗的綜合判斷之實例。人們又決不可在這裏好似對於少數幾何的定理認爲這是一種公約。

然則我們何故勢必服從這種判斷，有如金科玉律呢？原來這不過是表現精神力量之偉大，他能斷定苟某種動作一次可能，則推之無窮次亦無不可能。這種強大的精神力具有一種直接的直覺，而經驗不過是給他一種利用的機會，而因此能夠領會。

然有人說：如那粗率的經驗不能證明迴環推理之合法，則助以歸納法的經驗，仍是一樣嗎？我們試看某定理對1,2,3等數依次都真的時候，於是我們可說那定律已顯然成立，這也和那些根據大多數但有限的觀察之各種物理學定律一樣。

我們要認明其中有與通用的歸納法酷似之處。然而有大異之點存在。應用在物理科學中的

歸納法總是不確實的，因牠是建在宇宙有普遍的程序之信仰上，但這種程序是超人的。反之數學歸納法或即迴環證明法是我們一定要奉從的，因爲牠是精神主宰的肯定。

七

我已經說過數學家極力想把他們所得的命題推廣起來，我不必另找例子，就照剛才已證明的等式：

$$a+1=1+a$$

其次我又曾用以求得等式：

$$a+b=b+a$$

此式當然較爲普遍。

所以數學亦可如別的科學，由特別歸到普遍。

這件事在我們以前開始研究時，好像是不可了解的，然自剛才我們發現迴環證明法和通用的歸納法之相似點以後，我們就覺得其中沒有什麼神祕了。

無疑的，數理的迴環推理與物理的歸納推理，兩者的基礎雖各有不同，但牠兩者的進趨，卻是平行一致的，向一個方面走的，換一句話說，牠兩者都是由特別歸到普遍。

我們試再仔細的討論。

今欲證明等式：

(1)　$a+2=2+a$

我們只需應用二次下列規則：

$$a+1=1+a$$

且演式如下：

(2)　$a+2=a+1+1=1+a+1=1+1+a=2+a$

從(1)式用純粹分析的方法演繹出來的(2)式并不是一簡單的特例：牠是另一物事。

所以人們甚至不能說在數學推理之眞正解析與演繹的部分是照普通的字義說由特殊而進於普遍。

(2)式之兩段不過是(1)式之兩段較繁的組合，而解析之爲學只是分別其中的要素及研究其相互的關係。

所以數學家用『建築的方法』而『建築』那些逐漸繁複的組合。他們再用分析的方法，從這些組合歸還到其中所含的原素，他們乃知這些原素間的關係，而由此推想到這些組合的本身間之關係。

這卻是一種純粹的分析步驟，然這不是由特殊進於普遍，因那些組合當然不能認爲比較原素更爲特別。

人們對於這種『建築』的方法頗爲注意，這是很對的，人且以此爲數學進步之必需與充足的條件。

這個方法是必需的，不錯，若就以爲充足了，那還不見得咧。

如要一種建築是有益的，不是徒耗心血的，而且是可以助人向上的梯堦，則第一要有一種系統，使吾人不見其徒爲磚石之堆砌而已。

說一句正確的話，就是要使我們覺得這種建築品比較其各原素之本身爲有益。此益處何在？

例如何故總是拿着可以分成多數三角形的多角形來推想，而不向這些三角形去推理呢？此因任何邊之多角形有些特性是人們可以證明的，證明以後，人們便可應用此理於任何特別多角形。

反之若直接去研究那些由多角形分成的三角形中之關係，往往費了許多心力才能發現這些特性。然而我們如已知普遍的定理，則省力多了。

所以一建築之有益與否，是在其能否與其牠相似的建築並列，成爲同一類(genre)的東西。假使四角形不僅是兩個三角形之湊合物，正因牠是多角形中之一類。並且還要能夠證明此類之特性，而以後不必一一證明此類之各種。如要達到這步，則必須經過一級或多級的路程從特殊來到普遍。

這種『建築』的分析法，並不迫着我們從上面走下來，牠能使我們大家都站在同一的水平

線上。

我們如無數學的歸納法，便不能上進，因爲只牠才能告訴我們新鮮的事物。如無那種有別於物理歸納而一樣有效的數學歸納法之協助，則必無鞏固之建築去創造科學了。

最後，請注意此種歸納法之能成立，全在同一的事實可有無窮次的重現。故弈棋術決不能成爲一種科學，因先後各子之步法是不相同的。

第二章　數量與經驗

人們如要知道數學家之所謂連續物(un continuum)究作何解，這事不應向幾何學上尋問的。幾何家多少總要表現他所研究的圖形，然這只是他的工具而已；他研究幾何時，少不了面體(etendue)等，正如他用粉筆來表示；所以人們對於那粉筆的畫線所生出來的小彎曲之無足輕重，正如他所用的粉筆之爲白色一般。

至於純粹的分析家就不怕這個阻礙。他將數學從一切與牠無關係的原素中取出，故能回答

我們的問題。算學家所推想的那連續物，眞是什末呢？許多用心的數學家早已想解決此題；譬如丹勒利（J. Tannery）在他所著的『一個變數之倚數論導言』（Introduction à la théorie des Fonctions d'uno variable）一書中已可見得了。

我們先自整數排列法談起；今於二相續的整數中加入一個或多個的中間數，再於二相續的新數中加入中間數，如是依次類推以至無窮。由是乃得無窮的項數，此即所謂分數，有理數，或可約數。然此尚不足；在這些無窮的項數中，當再插入所謂無理數或不可約數。

在未申說以前，我們先要注意一事。就是這樣想出來的連續物，不過是按在一定順序列成的個體的集合，雖為無窮，然彼此不相侵犯。此處非如普通觀念，我們假設在連續個體之中有一種使成為一體的密切關係，此處不是點成立於線之先，卻是線反先於點。故從那著名之公律，則連續物者，乃集體中之合一也，人僅見集體而不見其合一耳。分析家照他們那樣規定連續亦有其理，因為他們一直是立在連續上推理的。然由此已可見眞正之數學的連續實與物理家及玄學家之連續有天壤之別了。

或曰數學家倘僅以此定義爲滿足則無異做字的傀儡了他們當詳細說明那中間數究爲何物，及其插入法，並且證明此可能性。然這樣便錯了，在推理中，這些中間數的唯一特性（註一）是在牠們的順序；所以唯這特性才可加入定義中。

因此人們可不必顧慮中間數項之加入法；更無人不信這是可能的，除非他忘卻可能這字在幾何家的口裏就是不相矛盾的意思。

雖然，我們的定義倘未完善，我將補說在這長段支言之後。

不可約數之定義——柏林派數學家，尤以龍勒克 (M. Kronecker) 先生爲最，他毫不借用別的什麼材料，只用整數來極力建設那分數及無理數的連續體。照這樣看來，算理的連續將不過是精神的純粹創造品，與經驗毫無關的了。

他們對於有理數的概念，似乎並無困難，他們極力討求不可約數的定義。然未把他們的定義說明以前，我當加一申明，以免那缺乏幾何學家的習慣者之駭異。

數學家所研究的不是物 (l'objet) 之本身，只是物與物間之關係而已；如其關係不變，則物雖

有易，仍與他們無礙。物質於他們是不重要的，唯獨物之形式要緊。

倘若人們不記得此義，則必不解杜德金 (Dedekind) 先生之稱不可約數只是一種符號，這與普通信爲可感觸而可測視的數量觀念，大不相同。

現在且看杜先生的定義若何：

大凡可約數都可依照無窮的方法分爲兩班，其原則便是凡第一班之任何數必較大於第二班之任何數。

有時第一班中有一數較小於其牠各數；例如將大於2及等於2之數歸入第一班，又把小於2之數歸入第二班，則2爲第一班中最小之數，此理甚明。所以2之數便可作爲此種配置之符號。

反之，也許在第二班中有一數大於其牠各數；例如將凡大於2之數歸入第一班，將2與小於2之數歸入第二班，則2在此地仍可作爲此種配置之符號。

然有時也許在第一班中，無一數小於其他各數，以及在第二班中無一數大於其他各數。例如將平方較大2於之可約數歸入第一班，將平方小於2之數歸入第二班，大家知道其中無一數之

平方適爲2者。在第一班中顯然無一數小於其他各數，因爲儘管某數之平方接近於2，人們總還可以找到別一個可約數，而其平方更接近於2的。

照杜先生的看法，不可約數$\sqrt{2}$不過是可約數分配法的特別樣式之符號而已；而在每一分配的方式中，必有一可約數或不可約數以做其符號。

但這就算滿足，未免太不顧及這些符號的來源了；此外尙須說明如何人們會給這些符號一種具體的存在性，又這難點非早已由那分數上發生了嗎？如在事前，我們觀念中沒有那物質之無窮的可分性（亦卽其連續性），則我們有無這些數的觀念？

物理的連續性——人們到此就要問算學連續的觀念，是否僅由於經驗而來的；果然，則經驗的粗疏結論——這就是我們的感覺——很可測量了。人將以爲這是對的，因爲近年來有人努力去測量，并得發明定律名曰費希勒（Fechner）定律，而根據此定律則感覺與刺激之對數成正比例。

然我們如細察那定律所根據的經驗，則結果必大爲不然。例如我們覺得10格蘭姆重的A物

與11格蘭拇重的B物，兩者生同一之感覺，而B物之重量，在感覺上又無別於12格蘭拇重的C物，但人們對於A與C之差別則頗易感覺。故經驗所得之粗疏的結果，可以下列式表示之：

$$A=B \qquad B=C \qquad A<C$$

此可認為物理的連續性之公式。

其中與矛盾的原理大有不合之處，我們認為有免除這困難之必要，乃想出算學的連續來。

故人們勢必結論說此種觀念是精神所創造的，不過這也是經驗所指示的。

我們不能相信等於第三物之兩相等物而不自相等，由此我們假定A別於B，B又別於C，惟因我們感官之不靈，故不能辨別之。

數理連續性之創造

第一層——至今為求事實上證明起見，我們可在A與B中任意加幾項數，但這還是間斷不相連續的；我們如利用一種工具來補助吾們薄弱的感官，例如顯微鏡，則剛才無別之A與B兩項，現在就可分別了；然在已經分別了的A與B中加入D項，我們又無法可別之於A與B了。無論什

麼精密的方法與工具，那由經驗得來的粗疏結果總有一種物理的連續性，及其相關的矛盾。

除非在已經辨別的數項中，不斷地加以新的數項，而且這個工作當永遠繼續進行於無窮才行，否則我們總是免不了這種的弊端。假使無極精密的儀器把物理的連續物分成散離的原子，如以天文鏡測視天河，分出無數的小星一樣，則這種工作還是不能停止。但我們不能理想到這個，因爲我們總是用感官作儀器，譬如用眼窺視顯微鏡放大的物像，故這種物像總含有一種視覺的性質，而因此有物理的連續性。

直接看到的一種長度，和經顯微鏡放大一倍的半長度是毫無分別的。故如全部的東西與其一部分相似，這是一種新的矛盾，倘若項數是定爲有限的；因一部分所含的項數較少於全部，故不能與之相似。

一待項數認爲無窮多，則矛盾立消；例如整數羣 (groupe) 儘可認爲與其中之偶整數羣相似；因每一整數可以一偶整數與之相當，此偶整數即該整數之二倍。

但這不僅是爲免去含在經驗結果中的矛盾，人們才用無限的項數來造成連續物之意念。

此中情形正與剛才整數中發生的一樣。我們能設想一單位可加入於一羣的單位中；這完全是經驗。才使我們有機會練習這種腦力，習而久之，就成自然了，成了自然以後，我們覺得我們的權力是無限，且可無窮的數下去，雖則我們所數的向來是有限的東西。

同樣，一待我們在相續的兩數中加入中間數，我們就覺得這種工作可以繼續至於無窮，且可說在牠本身上毫無理由足以使我們停止的。

爲簡便起見，且讓我規定凡是用如同可約數級的定律所組成的項數羣謂之第一級算理的連續物。今如按着不可約數之組成法的，再於其中加以新項，則我們可得所謂第二級算理的連續物。

第二層——我們只走了第一步；我們已經說明第一級連續物的來源；然現在要知道何以這還不足，而何以要發明不可約數來補充。

人們試想像一根線，牠便不得不含有物理的連續性的色彩，即是說須聯想到那根線的某種寬度。所以兩線就好像是兩條很窄的帶子，且如照這樣粗疏的想像，則兩線交叉時，必有公共占據

的一部分。

然而純粹幾何家的志願更大；他雖一方面不全然脫離感官的幫助，然他想達到一種無寬狹的線，與無大小的點之觀念。而說線乃漸形收窄的最後限度，點乃漸形縮小的最後限度，所以我們那兩條交叉的線，無論怎樣細而窄，總有一共同的部分，而其限度即幾何家所謂點是也。

因此之故，人們說兩線相交必有一共同點，而這個道理似乎是非常眞確的了。

然如人們把線看作第一級連續物，即如幾何家的線只是用有理數的座標（les coordonnées）之點集成的，則這個道理未免含有矛盾了，這個矛盾將更為明顯，如人們承認圓圈與直線之存在。

其實，如只認以可約數為座標之點是實在的，則內切於正方形之圓與此正方形之對角線將不能相交，因其相交點之座標非可約數。

這樣還不夠，因為這僅少數是不可約數，而非完全是不可約數。

今試分一直線為二半直線。每一半直線可試為某種寬的條子；則這兩條子互相侵越，因其間

並無間隙。牠們的共同部分可認爲一點，所以我們若想那條線愈縮愈細，以至把牠分作兩截時，牠們的共同交接點，仍只一點，這差不多是很明顯的道理；這裏我們就遇到龍勒克先生的觀念了；凡一不可約數可視爲兩班有理數之交界點。

此即第二級連續物之來源，牠是眞正的算理的連續物 (le continu mathématique)。

撮要——撮要言之，精神有創造符號之能力，此其所以能建設算理的連續物，而此實即符號之特別方法而已。只爲要免去一切矛盾，牠的權力才是有限止的；然精神如無經驗給牠以矛盾的理由，則亦不會亂用。

在此地，這種矛盾的理由就是從感官的粗燥結論中分出的物理連續性 (le continu physique)。但這觀念未免牽及許多矛盾，這是要依次免除的。因此我們勢必想出漸趨繁複的符號方法。將來我們要說的方法，不特無本身的矛盾——這已如上面我們所經過的各步程——且與那些所謂直覺的命題不生衝突，這些直覺的命題是從多少經過工作的實驗觀察中出來的。

可量的數量——直至此地，我們所研究的量都是不可測量的；我們固能說這量比那量或大

或小，然不能說到底大幾倍或小幾倍。

其實至今我只研究了數項排列之順序。然在應用上這是不够的。我們要學習來比較任何二項數（terme）間之相差。有了這個條件，連續物才變成可量的數量，算術的計算也隨即可應用上去了。

這事又非有一種新與特別的公約幫助不成。人們公認在AB兩項間之相差等於CD兩項間之相差。例如我們曾在上文以整數級為起點，又曾假定n的相續兩項之間夾以中間項，而這些新項照公約上將認為等距離的。

這是一種兩數量相加的定義方法；因為假使照定義AB間距離等於CD間距離，則AD間距離，即為AB加CD間距離之和。大概看起來這個定義是任意的。但也不盡然。因牠服從某種條件，例如牠服從加法之可合性與可易性的規則那樣。然只要所揀的定義合乎這些規則，則選擇本無甄別，而無庸去把牠十分確定的。

各種的注意——我們可以舉出幾條要緊的問題來討論。

（一）精神的創造力是否被算理的連續性之發現淘汰呢？不；布畦乃蒙(Du Bois-Reymond)先生的著作證明極清。

大家知道數學家能分別各級中的無窮小，第二級的無窮小(infiniment petit du 2^{e} ordre)不特是絕對的無窮小，且對於第一級無窮小亦為無窮小的。我們不難想像一種分數級甚或無理數級的無窮小，於是我們又尋得算理的連續，這正是我們在前幾頁所討論的。

但還有別的咧；有些無窮小對於第一級無窮小為無窮小，但對於第 $1+\varepsilon$ 級的無窮小，便是無窮大了，且這是不問 ε 小得如何。這就是我們在數級新插進的數項，且如照剛才我所用過的說法（雖是不大通行），我可說人們又創明一種第三級連續物了。

我們本可追求下去，但這是無謂的精神玩意；且想出來的符號，將無應用之可能，而無人要去注意的。今即就第三級連續物而言，其本身已少實用，而幾何學家直認為是一種簡單的好奇而已。人們的精神受經驗之逼迫，認為必要時，才一施其創造之技能咧。

（二）既有數理的連續性的觀念之後，人們即可免去有如產生此觀念之矛盾否？

否，試舉例以明之。

要是很通博的人才覺得凡是曲線不必顯然要有一切線：其實，如說曲線及直線是極細的兩條帶子，人們總可使牠們有一共同的小部分而不相交。然後我們再想像這兩條帶子縮小以至於無窮細，則二者共同的部分可以仍然存在，等到了可說是到某限度時，這兩條線只有一點的共同部分，於是兩線只是相觸而不相交了。

幾何家這樣的推想，不問其有心或無心，實與上面我們已證明兩線相交只得一點的道理相同，而他的直覺也似乎是很合法的。

但這也許就是騙他的。人們可以證明有些曲線幷無切線，倘若這線是屬於第二級分析的連續物（continu analytique de 2e ordre）。無疑的，用我們上面的巧法子，或亦可免除這些矛盾；但這種既然只能見之於特別情形，大家便不注意了。與其謀直覺與分析算理之調和，人們情願犧牲其一，而分析算學既是不可侵犯的學問，那自然是直覺法倒霉了。

多元的物理連續——在上面我們曾研究過由我們感官直接得來的或即費氏的經驗粗疏結

果所生出來的物理的連續性；我並已證明其結果是總括在矛盾的方式中。

$$A=B \qquad B=C \qquad A<C$$

且看這個觀念如何擴充，並如何能由此生出多元的連續物之觀念。

設有兩團相別的感覺，或者我們可辨別之，或不能辨別之，有如在費氏試驗中十二格蘭姆重量可別於十格蘭姆的重量，但不能別於十一格蘭姆的。我不必用別的東西來建設多元的連續性。

今試把各團的感覺叫作『元』(élément)。這與算學家的點相彷彿；但這也不是完全相同的東西。我們不能說這元是無大小的，因為我們不能別之於其鄰近的元。因此牠似乎被包圍在雲霧裏一般。拿天文學作比，我們的『元』就如星雲，而算學上的點子就如羣星一般了。

這個既已說明，今如由一任何元至於他一元中間經過一串相續的而前後不能辨別的元，則這些元就可形成一連續物。將這串的練子比算學家的線，正如其元比點子一般。

在未申說之前，先將所謂判數 (une coupure) 下一定義。設有一連續物C，試取出其中的若干元，而暫認為牠們不屬於此連續物。這些取出的元，即總而名之曰判數。有時C物藉此又重分為

許多不同的連續物，於是所餘的一團元子不復成爲唯一的連續物了。

於是C上有AB二元，我們當認之爲屬於二不相同的連續物，這所以能看出來，因爲決不能在C中找得一串從A到B相續的元，且每一元與前一元又不可辨別；除非此練中之某一元無異於判數中諸元之某一元，故亦當歸入這個判數裏面。

反之，也許那成立了的判數不足以重分C物。爲要區別物理的連續物，我們正得要去觀察何種判數才是合乎重分之用。

如物理的連續物C可用一種判數重分；這判數又是有限數而互相可別的元所成，（故既非連續物，又非許多的連續物），我們就說C是一元的連續物（un continuum à une dimension）。

反之，如C只能用那本身亦成連續物的判數重分之，我們就說C是多元的。倘用一元連續物之判數即可濟事，我們就說C是二元；倘用二元的判數即行的，我們就說C是三元，餘依次類推。

是以多元的物理連續物之觀念已經規定了，這全靠這件很簡明的事實，二團感覺有時可以辨別或有時不能。

多元的數理連續物——至於n元的數理的連續物之概念，自然也可用我們在本章開始已研究過的方法推引出來。大家知道，這種連續物中的一點，可用n個不同的數量規定之，此即所謂座標。

這些量不必盡是可測定的，例如有一部分的幾何學無需測定這些量，而僅研究如在ABC曲線上，是否B在A與C之間，而不問AB弧長等於BC弧長，或二倍之。這種算學名曰位置分析學(analyse situs)。

這是一門很充裕的學說，有許多幾何學家去研究，因而發明許多可注意的定理。其與平常幾何定理不同處，即在牠純粹是屬於性質的，且如這些圖形被一位不精巧的畫師將各部分大改變，甚至將直線畫成多少帶灣曲的線了，這也不妨，那些定理還是眞實的。

這是因爲人們想在我們剛才所定的連續物中作一種測量的計算，於是這種連續物就成爲空間，而幾何學始生；但這事且留在下章再談罷。

(註一)以及包含在特別公約中之特性，這些公約用以定明加法的，詳述在後。

第二部　空間

第三章　非歐克里得幾何學

凡一結論必先有前提；這些前提，或本身即明顯的，故不待證明之，或僅依別的命題才能成立，但我們既不能溯源至無窮，則凡演繹的科學，特別的是幾何學，必先建設在幾條不可證明的公理上才行。故凡幾何學的公式開始就是這些公理。然其中也有要分別的；有些如『等於第三量之兩相等數量必互相等』一公理並非幾何上的命題，而是分析學的命題。我認為牠是先驗的分析判斷，故我不去理牠，

然對於別的專屬於幾何的公理，我就要認眞的研究一下了，大概書中有三公理：

（一）經過二點只能作一直線；

（二）直線是兩點間最短的距離；

（三）自一點只能引一直線，和自己與直線平行。

雖然人們常省去證明那第二公理，但將牠自其牠二公理及許多默認的公理中演繹而出，是可能的，這且待以後再詳述之。人們久想證明那第三公理，即所謂歐克里得公理（postulatum d'enclide），然終是白費力。他們對於這種空幻希望的努力，眞是不可思議。及到十九世紀初葉有二大學者——差不多同時，——其一匈牙利人波而牙（Bolyai），其二俄羅斯人陸把周夫斯基(Lobatchevsky)，用一種不可否認的態度說這個證明是不可能的；他們差不多替我們擺脫了那些沒有公理的幾何發明家；從此法國科學院（Académie des Sciences）每年只接到一二種新的證明論文了。

雖然這個問題，尚未解決；不久就有李滿（Riemann）先生著名的論文，題爲幾何學之基本假設（Über die Hypothesen welche der Geometrie zum Grundeligen）。

這篇文字引起許多近代的著作，稍緩我將述及，其中以白耳太密(Beltrami)與愛兒母慈(Helmholtz) 尤當提出說明。

陸把周夫斯基幾何——倘若歐克里得公理可從別的公理導出，吾人不承認這公理，但又承認那些別的公理則人們必將得互相矛盾的結論了；所以必不能在這種前提上，建立一種自圓其說的幾何。

這正就是陸氏所做的。他始先假定：

人們可自一點引出許多直線和已與直線平行。

此外他仍舊保存其牠的歐氏公理。從這些假設他乃演繹出來許多的定理，不特其中無自相矛盾之點，且其創造之幾何學的穩固邏輯實與歐克里得的媲美。

這些定理，自然是與我們所習用的大爲不同，且乍看上去，還不能生些懷疑咧。

譬如三角形之三內角之和是小於二直角，其與二直角之差則與三角形之面積成正比例云。

要想畫一圖形與所與的圖形相似而相等，這是不可能的。又如分一圓周爲n等份，自各點引以切線，則此n切線形成一多角形，只需這圓的半徑不太大便行；如其太大，則彼此不能相交。

現在不必多舉這些例子罷；陸氏命題與歐氏命題是毫無關係，但論其各自互相聯絡之合理，

則無差別。

李滿幾何學——我們試假定有一無厚薄的萬物所生存之世界；又假定這些「無窮扁平」的動物都是在唯一的平面內，而不能走出來的。又設想此世界與別世界相距甚遠，以免受其影響。當我們正在做這些假設時，我們不妨再假定這些動物自能推想，並且有研究幾何之能力。這樣，他們對於空間一定看做是二元的了。

現在且假定這些理想的動物雖是無厚薄的，但是圓球形的樣子，而不是平的，而這些球形的動物都生長在同一的球上，不能走出的。然則牠們將建立何種的幾何呢？第一，牠們自然還是看那空間是二元的。直線對於牠們實即球面上兩點最短之距離，此即大圓周的弧線，一言以蔽之，牠們的幾何將是球面幾何學。

他們所謂的空間，就是這永遠脫離不了的球面，在這上面遊行着他們可以看見的千萬象。他們的空間將是無邊界的。因他們在球面上可以一直向前走而不休止，但這空間將是有限的；因在那上面雖無端頭可尋，然可以打一個圈子。

這樣，李氏幾何學卻是三元的球面幾何。德國的算學大家為建立他那種幾何，不單走來便推倒了歐克里得公理，並連第一公理也丟去：從二點只能作唯一的直線。球面上之二點，普通僅可通過一大圓周（此即如我們方才所見的那些理想的動物所認識之直線）；然而也有個例外；如此二點是對徑的則由此二點，可通過無窮數的大圓圈。同樣，在李氏幾何中，（這至少是在李氏幾何各式中之一如是）由二點僅可通過唯一的直線，但有時亦可通過無窮的直線。

李氏幾何與陸氏幾何有一相反的地方。

例如三角形之三內角和是：

在歐氏幾何中等於二直角；

在陸氏幾何中則小於二直角；

在李氏幾何中則大於二直角。

由一點所可引與所與線相平行之線數是：

在歐氏幾何中等於一；

在李氏幾何中等於零；

在陸氏幾何中等於無窮。

此外，我們要加說一句：李氏的空間是有限的，雖然是無邊界的，這兩個名詞的意義與上面所說過的相同。

常曲度之表面——雖然，還有一個可能的異論。陸氏與李氏的定理是毫不矛盾的；但無論從他們的假設中所抽出的兩種定義所得的結果怎樣多，他們在未將所有的結果盡得以前，他們勢必停止下來，不然，則其數將爲無窮了；倘若他們再向前推演，何見得他們就不發生各種矛盾而後休呢？

這種困難在李氏幾何中是沒有的，只須人們以二元空間爲限；剛才我們已見過那李氏幾何無異於球面幾何，這幾何不過是普通幾何的一支部，當然毋庸討論。

白耳太密先生同樣把陸氏二元的幾何歸入只是普通幾何中之一支部，以反對所有相關這

個的異論。

且說他究竟如何做到的吧。假設在一表面上有一任何圖形。試想此圖形是畫在一種可屈折而不可伸縮的布上，而此布便緊貼在這表面上，假使此布移動而變形時，則此圖形上的各線亦隨而變形，但不改其長度。普通這個可屈折但不可伸縮的圖形是不能換位而不至脫離此表面的；但有一種特別的表面對於這種動作是可能的，此卽常曲度面。

今試再將我們先前的比喻來談，迴想那些無度的動物是生長在這一種的面上，於是他們以爲一圖形之運動而同時能保定其各線之長度，都是可能的事了。反之，這種的運動對於曲度可變的面上之無生物厚度的動物，便是無稽之談了。

這種常曲度面可別爲二：

一種是正曲度的，可變其形以緊貼於球面上。所以這種面上的幾何，變爲球面幾何，卽李氏幾何。

一種是負曲度的白耳太密先生已證明此種體面上的幾何，卽陸氏幾何。故李氏與陸氏之二

元幾何，仍與歐氏幾何相合。

非歐克里得幾何之釋義——由是一切關於二元幾何的反議都消滅了。我們亦不難把白耳太密先生的推理擴充於三元幾何。那對於四元幾何猶不生問題的人，對這自亦無何困難，但這種人是很少的。所以我另法來講吧。

設有我名之曰『基本平面』的平面，且製定一種字典，使每個有兩行的重複解釋，好像那有兩種語言的普通字典有兩種同義的字一樣形式。

空間……在基本平面以上的空間之部分。

平面……與基本平面相交成直角之球面。

直線……與基本平面相交成直角之圓圈。

球體……球體。

圓圈……圓圈。

角……角。

二點之距離……卽基本平面與經過此二點之正交圓之交點，及此二點之非調和比（le rapport anharmonique）之對數。

餘不贅述。

然後試將陸氏幾何的定理用此字典翻譯，有如用德法合璧字典翻譯一段德文一樣。如是我們就得普通幾何的各定理。

例如陸氏定理爲：『三角形之三角和小於二直角』可譯爲：『如一曲線的三角形之三邊是與基本平面相交成直角之圓弧線，則三角之和必小於二直角。』如是無論如何引申陸氏的設想之結果，人們終不致有何矛盾。其實如陸氏之二定理是互相矛盾的，則所借用我們的字典翻出來的二譯文勢必亦然，但這些譯文是普通幾何的定理，而沒有人疑惑普通幾何是不會有矛盾的，我們這個信仰是從何而來？並且是否已經認爲妥當？這個問題我是不去問牠，因爲問起來就要說長了。然則除了我上面所提出來的疑難外，再也沒有別的了。

這還不算完了。陸氏幾何能用具體的解釋，而非一種無益的論理的練習，牠有許多的應用。我

不單此地無暇談牠，並我與克朗 (Klein) 先生由此算出的一次微分方程式解法 (intégration des équations lineaires) 也不談及了。

況且，這種解釋不是唯一的，人們儘可編製許多同上的字典，只須經過簡單的『翻譯』就可將陸氏幾何的定理變爲普通幾何的定理。

內函的公理——試問那些幾何書中所清楚說明的公理是幾何學的唯一的基本嗎？人們試看在依次把牠們捨去之後，那與陸氏，歐氏，李氏理論有共同性的幾個命題還是成立，就知其不然了。這些命題必建設在幾何家不去說明而承認的前提上。將牠們從古法的證理上分出來，這是很有趣味的事。

密耳 (Stuart Mill) 氏以爲一切定義必內含一公理，因爲下定時，人們已不知不覺的承認那規定物 (l'objet défini) 之存在了。這樣就未免說得太過分了；在算學中人們下了一物之定義後，少不了再要證明牠的存在，所以省去這種手續，就是因普通一班讀者都能自去領略。我們不可忘記這『存在』一個字對於算學中的物與對於物質的物是有不同的意義。一個算學中的物

可以存在，只須牠的定義之本身或與先前認可之命題皆不發生矛盾。

密氏這個觀察雖不能應用在一切定義上，然對於一部分的定義是正確的。有時人們對於平面的定義是如下：

平面是一個表面(surface)；就是那聯結牠許多點中之某二點的直線能全在這表面上。

這定義顯然包含一新的公理；誠然，人們可把牠改換，那還好些，但爲此必要把公理明白的發表才行。

別的定義也足以引起重要的省思。

譬如那二形相等之問題；凡是可以疊起來則二形必相等；爲得要將兩形疊起來，則必先移動其一，其一直使牠能够接觸其二爲止。但應怎樣移動呢？假使我們發此疑問，人們一定答道，移動時要如那不變形的固體，不可將此圖形變易才行。由此仍顯然歸到原有的問題，這竟是轉圈子了(cercle vicieux)。

實際上這個定義沒有定出什末來；對於那只有流體的世界上的生物，牠是毫無意義的。假使

牠對於我們好像是很明白，那是因爲我們對於天然的固體是習見的，這天然的固體與那理想中四面不變的固體，沒有大別的。

雖然，這定義無論其怎樣不完美，總是含蓄一種公理。一個不變易的圖形運動之可能性，本身並不見得是明顯的眞理，即使牠有如歐克里得公理的顯明，但決不如先驗分析的判斷之顯明。

此外研究幾何定義及證理的時候，人們覺得勢必不特無證明的認可那種運動之可能性，且對於牠的幾種特性，也須認可才行。

第一這是在直線定義中就可看出的。人們先前所給與予的定義都是不成，然而那眞正的，就是那暗含在有直線參加的一切證明中的那一種。

有時一不變圖形之運動也許是這樣的：凡屬於此圖上某線的各點不動當在此線外之各點移動時。凡這種線就名之曰『直線』。我們在這條說明中早已有意把那定義與其內函的公理分開了。

有許多的證理，例如三角形之相等，由某點引一直線垂直於牠直線之可能，假定許多可省說明的命題，因爲牠們勢必認定在空間有用某法移動一圖形之可能。

第四種幾何學——在這些內函的公理中，有一條是很可値得注意的，因爲倘若把牠拋棄，人們還可構成第四種幾何，與陸氏李氏及歐氏的三幾何一樣合宜。

如要證明人們可由A點引一與直線AB相垂直之直線，人們設想有一繞A點而動且始與直線AB相重合的直線AC；於是人們將此線繞A點而轉，直至爲AB之引長線而止。故人們假設二個命題：第一這種旋轉是可能的，其次卽可轉到互相引長之直線而後止。如人們只承認第一命題，而否認第二者，便要得着比陸氏與李氏幾何更爲奇異的定理，但這也是不會互相矛盾的。

我且敍述那些定理中的一種，但我並不選擇那最奇異的：一眞正的直線可以自相垂直。

里(Lie)氏定理——暗地導入古來證理中的公理數目，是超過所需要的多，所以人們想把牠們減至最少數。易耳白(Hilbert)先生好像是曾解答這個問題了。人們可以直覺地問這種減

約是否可能假使那必需的公理及理想的幾何之數目是有限的。

蘇妃士里 (Sophus Lie) 的一個定理支配了各種討論我們可這樣的說明牠。

假定人們認可下列的前提：

（一）空間是 n 度的。

（二）不變易的圖形之運動是可能的。

（三）此圖形在空間的位置必需 p 個條件方可確定之。

由是合乎這些前提的幾何為數是有限的了。

我並要申說：如 n 是已定了，則人們可規定 p 之最高限（limite supérieure）。

所以人們倘認定運動之可能，則僅能發明有限的（且為數頗小）三元幾何。

李氏幾何——雖然，這個結果似乎是遭李氏駁議的，因其曾建立無數不同的幾何，而普通所謂的李氏幾何不過是特例而已。

他說：凡白都在人們對於一曲線之長度的定義是如何。但這種定義的樣式是多極了，而每一

個都可作爲一種新幾何之起點。

這是完全對的，不過大半這些定義與那在里氏定理中認爲可能的不變圖形之運動，是不能相合的。所以李氏幾何縱然有許多好地方，但永遠不過是純粹分析的，是不能有如歐氏幾何的可證明的。

易耳白之各種幾何——最後魏翁勒斯（Veronese）與易耳白先生曾想出更新奇的幾何，『名曰非阿希梅得幾何』（la géométrie non-archimédienne）。他們捨去阿希梅得公理，而建築那些新的幾何，這公理是凡以够大的整數乘某長度，則終必超過所先給的任何大的長度。

在一非阿氏直線上普通幾何的點子皆可存在，然尙有無窮的點子夾在其中，這樣所以那舊法幾何家認爲相鄰接的兩節線之交界間，現在就可插進無窮數的新點子。一言以蔽之，用前章的說法，非阿氏的空間並非二次的連續物，乃是三次的連續物。

公理之性質——大半算學家看陸氏幾何不過是一種簡單的論理的奇特；有些人更進一層，他們以爲既然有許多種幾何，則我們的幾何是眞確的嗎？誠然，經驗使我們知道三角形的三角之

和等於二直角；但這因我們可計算的三角形都太小的緣故；如照陸氏說，則其相差與三角之面積成正比例：然則當我們計算較大的三角形，或我們的儀器更精的時代，這種差數就可被我們感覺得了嗎？由此以觀，歐氏幾何只是暫用的幾何而已。

爲討論這個意見，我們先須問幾何公理（axiomes）的性質爲何。

是否有如康德所謂先驗綜合的判斷？

這種判斷既是用那樣的力量來征服我們，以致我們不能設想相反之命題，更不能在牠的上面建立一切理論。非歐氏幾何自亦不成立了。

爲得可以確信我們可舉一眞正的先驗綜合的判斷，例如我們在前章已見其位置重要的那一種：

如1之定理爲眞，又如n+1亦眞，只須於n爲眞，則此定理於任何正整數皆眞其次人們試離開這種推理，而否認這命題，以建立一種謬誤的算術，有如非歐氏幾何，——人們是不會達到目的，甚至在起始時，人們就會把這些判斷認爲分析的了。

況且，再把我們那無厚薄的動物的設想來談吧；倘若那些動物，具有我們的理性，我們決不能相信牠們竟採用與其經驗相反的歐克里得幾何。

然則我們應該結論幾何的公理就是經驗的眞理嗎？但那理想的直線和圓周是不可實驗的；所能的只有實在的物質。然則作幾何基礎的實驗將託於何處呢？這卻好回答。

我們在上面已經知道我們總是想像着，好比這些幾何的圖形與固體物同態。故幾何所借重於經驗者，實即固體之性質。

由光之性質及其直線的傳播，也引出許多幾何的命題，尤其是投影幾何，由此以觀，人們將想說：度量的幾何即固體之研究，而投影幾何即光之研究。

然這裏卻免不了一不能超過的困難。幾何學如是一種經驗的科學，則不成爲一精確的科學，而此後終需不斷的改良了。夫復何言？從今日起，牠的錯誤將會承認，因爲我們知道世上沒有嚴密不變的固體。

然則幾何的公理既非先驗綜合的判斷，亦非經驗的事實

這原來是些公約(conventions)；在這些可能的公約中，我們的選擇是受經驗的事實引導；但牠仍是自由的，牠爲免去一切的矛盾起見，才有所限制。所以那些決定公理之取捨的經驗定律雖是近似的，然那些公理則是極嚴密的眞確。

換句話說，幾何學的公理（我並不談算術的）其實卽戴着假面具的定義。

由是人們對於這個問題當作何感想：歐氏幾何是眞確的麼？

這個問題毫無意義。

這好比問『米突』度量衡（spstéme métrique）是對的，而舊制度是錯的；笛卡兒式的座標（coordonnées cartesiennes）是對的，而極樞座標（coordonnées polaires）是錯的了。這不是這種幾何比那種幾何眞；只有比較上便利不便利而已。

而歐氏幾何是並且永久是便利的幾何；

一、因爲牠是簡明的；這不單是因我們精神上的習慣關係，或因我們對於歐氏的空間有一種莫明其妙的直接的直覺；牠本身確是最簡明的，有如一次多項式是比二次多項式較簡，球面三角

之公式比平面三角之公式簡明，即使一位不明白這些幾何公式的意義的分析算學家看上去，也有如此的感想。

二、因爲牠與自然界之固體的性質頗能溶合，這些固體是我們的五官四肢所能感覺到的，而用此我們就製造測量的儀器。

第四章　空間與幾何

我們先以一小奇論開端。

今如有一種生物，具有我們同樣的精神與感官，但先前毫未受過教育，牠們在適當的外界中，將能得一種印象，比方這個可使牠們建設與歐氏幾何不同的幾何，且能把這外界的現象都放在非歐克里得的空間或竟四度的空間。

至於我們，則我們的教育都來自現今的世界，假使一旦置身在這新世界中，則我人不難把其中一切的現象都歸入我們的歐克里得空間。反而言之，今如這些生物都轉運到我們的世界中，則

牠們必把我們所有的現象歸入非歐克里得的空間。

我說我們少少努力便也可這樣做的。今如有人竭畢生之力去做，則必定能夠達到這第四度的想像。

幾何的空間與表示的空間——人家往往說外物的影像是存在空間的，並說要合乎這條件，那物才能形成。也有人說，這個作我們感覺與表示（la représentation）的周全格式(cadre)之空間，與幾何家所熟悉的空間是完全相同的。

前句話對於作如是觀的聰明人，必甚奇異。但要看，假使他們不受幻想的影響，則一個深奧的分析，可以免除。

第一那眞正的空間之特性是什麼？我想指那作成幾何學對象的空間，而我名之曰『幾何的空間』試擇要述之如下：

一、牠是連續的；

二、牠是無窮的；

三、牠是三度的；

四、牠是同質的 (homogéne)，卽是各點都是相同的；

五、牠是同位的（isotrope），卽是經過同一點之各線都相同。

現在我們試把牠和我們感覺的及表示的格式相比，則我便叫做表示的空間（les pace représentative）。

視覺的空間——先試設想一種純爲視覺的印象，這是由於眼膜（rétine）深處所形成之物像而來。

略一分解，卽知這個物像是連續的，但僅是二度的，此已有別於幾何的空間，此卽所謂純粹視覺的空間。

他方面這物像是放在有限格式中（cadre）的。

最後，還有一個亦是重要的區別：此純粹視覺的空間不是同質的眼膜上的各點，——能夠自形成的物像之抽象——沒有同一的作用。那黃斑點決不能認爲與眼膜邊部之一點相同。其實不

單是同一的對象在那上面可生更強大的印象，且在一切有限上的格式中，居中的點子與近邊的點子，是不相同的。

再深加分析，我們可知這視覺的空間之連續性與其爲二度的空間，亦無非一種幻覺；所以牠與幾何的空間相差更遠，我們對這且不多說，我們在第二章中已把這種的結果談的很夠了。

但視覺可以測物之距離，所以又能觀察第三度了。但是大家知道這種的觀察，實即配對光線所費力之感覺，和雙目所應作的曲度以明視一物之感覺。

這是一些筋肉的感覺，與給我們二度空間之概念的視覺大爲不同。故因此第三度對於我們，和其牠二度有不同的作用。故所謂完。。全。。視。。覺。。的空間不是同質之空間。

誠然，牠有三度：意即對於我們視覺的元素，（這至少是有助於面積之概念的，）知其三則其餘皆可完全規定；若照數理的話說，這是含三獨立變數的函數。

然而我們再過細審視一下，對於第三度我們有二種不同的樣子來發覺牠；即對光之費力與

雙目之曲度。

無疑的，這兩種指示總是嚙合的，其中有常定的關係，換數理話說，就是測量這二種筋肉感覺的變數，在我們看上去，並非各自獨立的，或者，爲省用那已很精細的算學概念起見，我們仍可回到第三章，而把同一的事實述之如下：

如A與B二曲度之感覺是不可辨別，則同時和牠相依的A^1與B^1二對光之感覺也將不能辨別了。

但這可說是一種經驗的事實；如要作反面的假定，先驗上是毫無妨礙的，又如有這相反的假定，如這二筋肉的感覺有各不相依的變動，那末我們將要多注意一個獨立的變數，而對於『完全視覺的空間，』我們將認爲四元的物理的連續物了。

我還要加說一句，這就是外部的經驗的事實。我們儘管可以假定有一生物，具有與我們同一的精神和感官，是生於某世界中，那裏光線射到的身上時，必經過重複的折光體。於是供給我們視察距離的兩種指示，不再聯有常定的關係了。一個在這樣世界中受感官教育的生物，對於完全視

覺的空間必將認爲四度空間了。

觸覺的空間與動覺的空間——『觸覺的空間』比視覺的空間更爲複雜，而與幾何的空間相差更遠了。因此對於觸覺用不着去重複那對於視覺的討論。

然在視覺與觸覺的結論之外，尚有別的感覺，其輔助於空間概念之萌芽更大。這是大家統知道的，這種感覺是隨着我們所有的動作而生的，這就是普通所稱的筋肉感覺。

與此相連的格式就成爲所謂『動覺的空間』(l'espace moteur)。每一筋肉生出一種特別的可增可減的感覺，因此我們全體筋肉的感覺所依之變數當等於我們所有的筋肉數。因此我人有若干筋那動覺的空間便有若干度了。

我知道有人將說，筋肉的感覺足以助成空間之概念，這是因在我們對於每一運動的方向都有一種感想，而這也就是感覺中之一部分。如果這是眞的，如果某筋肉的感覺要有方向之幾何的感覺作伴才得發生，則幾何的空間眞就是支配我們感覺的一種形式。

但當我自己分析我的感覺時，我並不覺得是如此的。

我所見得的，就是關於同方向運動的感覺，是被許多觀念的簡單聯合聯結在我腦中。我們所謂『方向之感想，』卽是由這種聯合而來。所以這種感想決不是在唯一的感覺中可找得的啊。

這種聯合是很繁複的。因為根據四肢的位置，同一筋肉之收縮能與多種不同方向之運動相合。

這個聚合是顯然已具有的了；有如其牠各種的觀念之集合，牠是一種習慣的結果；此結果本身也是由許多的經驗而來；絕無疑的，假使我們的感官教育是受之於另一世界，那裏我們受着不同印象，則必生出相反的習慣。且我們筋肉的感覺必隨其牠的定律以相聯了。

表現的空間之性質——綜上以觀，在視覺的，觸覺的，與動覺的三種形式之下的表現空間是純粹與幾何的空間不同的。

牠既非同位的又非同質的；人們且不能說牠是三度的。

人們往往說我們把外界所觀察的對象，『投影』於幾何的空間；或卽我們把牠『位置』(localiser)起來。

還有意義否，而有何意義？

這個意思就是說我們把外界的事物表現於幾何的空間嗎？

我們的表現，只是我們的感覺所傳遞出來的，所以只能和牠列入同一的格式中，即是說在表現的空間中。

我們之不能把外物表現於幾何的空間，有如畫師不能在一平面的圖上畫出物之長闊高三度來。

表現的空間只是幾何的空間之影像，這個影像經了一種透視就變其形狀，而我們只是按了透視學的道理才能表現物體。

所以我們並非把外物表現於幾何的空間，我們只是把這物體當作在幾何的空間而對牠推想。

他方面，當我們說把某某物件『位置』於空間之某某點，這是什麼意思？

這就是說，爲達到這物，我們把要做的動作表現出來；而不說爲表現這些動作，必將其本身投

影於空間，以及空間之概念當因此先存在。

當我說我們把這些動作表現出來，我只說我們把與之相伴的筋肉的感覺表現出來，這些筋肉感覺是毫無幾何的性質的，牠們因此毫不含蓄空間概念先在的意思。

狀態的變化與位置的變化。——但有人將說，如幾何的空間之觀念非我們精神上所必具的，又非任何感覺所能供給我們的，則此念又何自而生的呢？

這就是我們要研究的，而這要稍費時間才成，但我可把我所嘗試的解釋先簡括言之：

我們任何的感覺，單獨起來，決不能引起我們一種空間的觀念，我們只是把這些感覺發生的次序研究之後，才得到此念。

我們最初，是知道我們的印像是會變更的；但在我們所發見的變更中，我們馬上就可以有所區別。

我們有時說這些印像成因的對象，是變了狀態，時而說牠們是變了位置，或者牠們只是移動了。

不問一對象是變態或變位，對於我們總是同樣：即印。象。集。合。中。的。一。種。變。化。

然則我們如何能够去分別牠們哩？這是容易明白的，今如只是位置的變易，我們可以把原始的印象集合重新演過，做那些使我們恢復正對動物體原位在同一相對的地位中之動作。如此我們矯正。所發生的變化，而用相反的變化可使物歸原狀。

譬如是有關視覺的，有一物在目前行動，我們可『隨之以目，』而利用眼球之運動可使物像永落於眼膜之同一點。

這種動作是我們良知的，因這是有意的，而且有筋肉感覺相伴的，但這不足以說我們把牠表現於幾何的空間。

是故變位之特性所別於變態者，乃在牠能用此術以矯正之。

人們因此有時可用二法，由A印象的全體至於B印象的全體：一、這是無意的而不受筋肉之感覺，這是當物體移動時有的情形；二、這是有意的而有筋肉之感覺的，這是物雖不動然我們對他有相對的運動時之情形。

果然如是，則由A集至B集之歷程只是位置上的變易。

由此可知視覺與觸覺，如無『筋肉的感官』之協助，決不能給我們空間之概念。不單是這個概念不能來自唯一的感覺，而是來自『一串的感覺』並且一不動的物體永不能有之，因爲牠既不能就自身之運動矯正外物易位之結果，則牠絕無理由去區別這個與態的變化不同，倘若牠的運動是無意的，或毫無感覺相伴，牠也不能得到這種概念。

對消之條件——有一種對消（compensation）能使兩不相關的變易互相矯正，像這種的對消怎樣是可能的？

今如有一已知幾何的人，他必這樣推想：

如要發生對消，當然要一方面外物之各部分，他方面我們的感官之名機關，經了這兩種變易之後，仍恢復其原有相對的位置。爲此，則外物之各部分亦必互相保存其相對的位置，且我們的感官之各部分互相亦須如是。

換句話說，在第一種的變易中，外物應如不變的固體之移動，而在矯正第一種變易之第二種

變易中，我們身體的全部亦須如是。

按照這種的條件，則對消可以發生。

但我們尙不知幾何學的人，因爲我們對於空間的概念尙未形成，所以我們不能做那般的推理，我們不能先驗的預測這種對消是否可能的。然由經驗知道這有時做得到的，而就是根據了這件經驗的事實，我們始能從位置的變化中辨別出狀態的變化。

固體與幾何——羅列在我們四周的萬物之中，有些常常受一種移動，而這種移動同時可受我們自身適當的動作之矯正，這就是固體。

其牠形狀可變的物件，除非例外，不能有這般的移動。（只有位置之變易，而無形狀之變易。）倘若物體移動同時變易其形狀，那末我們就是用適當動作，也不能把我門的感官之各機關移到與此物原始的相對的位置；因此我們不能重新建立原有的一切印象。這只是以後，屢經新試驗之後，我們才學得把變形的物體分爲若干較小的部分，那各部分都能按照固體的規則移動。如是我們對與變形（déformation）與其牠變態有所區別；在這些變形中，每一部分只是受可以矯正

的地位之變易，但全體所受的變動則較深切，且不能受一種相關運動之矯正了（movement corrélatif）。

如這種的概念已是很複雜的了，而其發現在比較上已是遲了；並且如果固體之觀察中不曾教我們辨別位置之變易，則這概念必不能產生。所以自然界中苟無固體，亦必無幾何學了。

還有一個解釋，亦頗有注意之價值。設有一固體始占位置α，其次來至位置β；在第一位置時，牠使我們感受印象全體A，而在第二位置時，則印像全體B。今設又有第二固體與其第一有不同之性質，例如有不同的顏色。我們也假定牠由α至β，在α時使我們感受印像全體A^1，至β時則為印像全體B^1。

普通A^1團與A團必無相同處，B團與B^1團亦然。所以由A團至B團與由A^1團至B^1團，這兩種的變易，論其本身，普通是毫無相同的。

雖然，對於這二種變易，我們皆認為是移動，或更好點，我們認為同一的移動。這是怎樣的一回

事？

這只是因為牠們可以被我們身體上同一相關的運動矯正。

所以這是『相關運動』才在這兩現象中成立唯一的聯絡否則我們永想不到把牠倆接近起來。

他方面，我們的身體，利賴骨接及筋肉，方可以做出無數的不同的動作；但牠們都不能『矯正』外物之變動；倘若這樣，那末我們全身，或至少我們感官的各部加入行動時，必定一致的行動，意即如固體之常保其各部之相對的位置而不變。

撮要

一、第一我們要區別兩種現象：

有些是無意的，又無筋肉之感覺隨伴的，我們認為來自外物；這是外界的變易；

有些，其性質適與上相反，而來自我們本身的動作，這是內部的變易。

二、我們注意着這每一種現象的變易可被牠種相關的變易所矯正。

三、在外界的變易中，我們分別那些在別種的變易中，有一與此相關的變易者，是謂移動；同樣，在內部的變易中，我們分別那些在第一種的變易中有與此相關的變易者。

由是利賴了這種相互的關係，我們乃下現象特別範圍的定義，謂之移動。就是這些現象的定律作成幾何的對象。

同質定律——這些定律中第一就是同質定律。

假定因外界變易α，我們由印象A團至於印象B團，其次被一有意的，而相關的運動β矯正α，使我們仍歸於A團。

今假定有外界的變易α，使我們重新由A到B。

於是經驗告訴我們，即此變易α'有如α可用有意而相關的動作β'矯正之，且此β'動作和矯正α之β動作適為同一之筋肉感覺。

有了這事實，所以人們平常說空間是同質的，且是同位的。

人們也可以說某動作發生之後，可再發生至二次，三次，如是類推，而不改其特性。

在第一章中我們曾研究過算學推理之性質，我們已知那同一計算重演至無窮次數之可能性之重要。

算學推理之功效全靠這種的重複性；所以這是利賴了同質定律牠才能建立在幾何的事實上。

同質定律之外，尚有無數相似的定律，我也不必贅述，但算學家可一言以蔽之，說許多的移動成爲『一羣』(un groupe)。

非歐克里得世界——假使幾何的空間是一強加於我們每個表現——單獨地估計——的格式，則人們將不能頃刻離開這表格來表示一影像，且我們絲毫不能變易我們的幾何學。但其實也不然，幾何不過是這些影像前後相繼續之定律的撮要。於是儘可想像一串的表現，與我們尋常的表現處處相似，但其相繼續之定律與我們已習用者不同。

於是人們可想到如有一種生物，牠的教育就是在這些定律遭變的環境中受的，則牠們必另有一種與我們不同的幾何學了。

譬如在一大圓球中的一世界而服從其中如下的定律：

其中的溫度是不統一的；中部最高，若距心漸遠，則溫度漸降，當我們到了圍住這世界的球面上乃為絕對零度。

我再把此溫度變動之定律中說一下。設有一限度的球其半徑為R；r為自某點至球心之距離。則該點之絕對的溫度將與 R^2-r^2 成正比例。

且我假定在這世界中，所有體皆具同一的澎漲率，是以某樣的一條尺，其長度的與絕對的溫度成比例。

最後，我假定一物由溫度不同之一點移至牠一點後，牠能立即與其新環境之溫度相同。

在這些設想中，絲毫沒有不可想像的或矛盾的。

凡是一物距球面愈近，則其形亦變得愈小了。

第一我們要知道，如在我們習用的幾何上看來，這世界是有界限的，而對於這上面的居民，實是無限的了。

蓋當牠們要走近那有限的球面時，牠們漸漸的降冷，因此縮小。牠們的脚步也漸漸的小，因此牠們永不能達到球上。

對於我們，幾何學不過是研究固體運動之定律；對於這些理想生物，便是剛才我說過那隨溫度而變形的固體運動之定律研究了。

無疑的，在我們的世界中，天然的固體受了寒熱之後，也發生形狀或體積之變化。但是我們建立幾何的基礎之時，竟把這種變化忽略去了，蓋因牠們既是很弱小的，又是不整齊的，所以我們認為是偶然的事。

但在這假設的世界中，則大為不然，而這些變化有整齊的而極簡的定律。

他方面，這些居民身體上各部分也受同一的形狀與體積之變化。

我還作一設想；我假定光線經過不同的屈折環境時，其折光率與 R^2-r^2 成反比例。在這情形之下，顯見得光線不是直的而是圓的了。

為要把前說加以證實，我尚須說明在外物位置中的某種變易，則這理想世界上有知覺的生

物，亦可用相關運動矯正之；而這是爲的要恢復那有知覺生物所有的原始印像集合。

假定某物移動時，非如不變的固體之變形，而如一固體依照上面說過的溫度定律，受着不相等的澎漲而變形。

爲省便起見，請把這種的運動名曰非歐克里得的移動。

如一有知覺的生物在旁，則牠的印像將被該物之移動所改變，但牠如能有合式的動作，則這仍可還原的。這只需最後此物與那有知覺生物的總和（看作一體），能作這些特別移動的一種，如我剛才所謂的非歐克里得的移動。人們如假定這有知覺生物的四肢與其世界中的別物體受同一的定律澎漲，則這事就是可能的了。

在我們習用的幾何上，雖然這些物體移動時是變形的，且其各部分不復保存其相對的位置，但是我們將看見那有知覺生物的印象仍是一樣的。

蓋各部互相的距離雖能變更，然起初相抵觸的部分最後仍是相抵觸的。是故觸覺的印象並未變易。

他方面，如留心上文關於光線之拆光與曲度之設想，則視覺的印象亦將未有變易了。

所以這些理想的生物，有如我們要把牠們所經驗的現象類集起來，以及分別在牠們當中的『位置的變易，』可用有意的相關動作去矯正。

牠們如建設一種幾何，這將與我們的不同，我們是研究不變固體之運動的；牠們的幾何是牠們能區別的位置變易，而這就是『非歐克里得的移動，』這就是非歐克里得幾何。

是故和我們一樣的生物，但牠的教育是受在這種的世界裏，則其幾何學將與我們的不同了。

四元世界——人們既能表現非歐克里得世界，同樣也可表現四元世界（le monde à 4 dimensions）。

視覺，縱然用一隻眼，與眼球的筋肉運動之感覺相加，便足使我們知道三元的空間了。

外物的影像畫在我們的眼膜上，牠是二元空間之圖畫；這就是透視。

但因這些物件是動的，有如我們的眼睛，故我們把同一物體用各種相異的眼光，可依次看見許多的透視。

同時我們觀察得由一透視至於他一透視時常有筋肉的感覺相伴。

如果自透視A至透視B，與自透視A'至透視B'，這兩種經過都有同一筋肉的感覺相伴，我們把牠倆互相接近好比對於同性質的動作一樣。

其次再研究這些動作互相組合之定律，我們知道牠們形成一羣，而其構造與不變的固體之運動相同。

但我們已知這是從羣的特性，我們才得幾何的空間與三元空間之概念。

是故我們明白如何三元空間的意思會從這些透視的景物產出，雖然，其中每一個只是二元，因爲牠們按照某定律互相繼續下去。

好了，一如人們既能在一平面上作三元的圖形之透視，人們也可在三元（或二元）的圖畫上做四元的圖形之透視。這對於幾家不過是一種玩意而已。

人們甚至可用各種不同的眼光，把同一的圖形做許多的透視。

我們很容易表現這些透視，因爲牠們只有三元的緣故。

試設想同一物之透視依次相繼下去；而每一經過皆有筋肉的感覺相伴。

不必說，人們當認定其中兩個經過，如果都是同一的筋肉感覺的會合，爲同性的動作。

人們儘管可以想到這些動作按照我們任意的定律互相組合，例如使其形成一羣，而與四元不變的固體運動有同一的結構。

那裏面是絲毫沒有不能表現的，而這些感覺恰恰是那具有二元眼膜，又能在四元空間移動的一種生物所感受的。

就是在這種意義我們才敢說我們能夠表現第四元。

照這樣去表現我們在上章講過的易耳白(Hilbert)的空間，是不可能的，因爲這個空間已不是二次的連續物了；所以牠與我們尋常的空間，大有分別。

結論——人們可見經驗在幾何之萌芽上，有不可缺的地位；但因此就說幾何學是，或有一部分是，實驗的科學，那就錯了。

牠卽使是實驗的，但這也不過是暫時的，近似的。而此近似之程度又是何等的粗陋！

故幾何只是一種固體運動之研究；但其實牠是不管天然固體的，牠的對象乃是一種理想的固體，絕對不變的，這不過是一種簡化的，極遙遠的影像。

這些理想物的概念完全是來自我們的精神作用，經驗不過與我們此將牠從那裏提出來的機會。

幾何的對象，是在研究特別的一『羣』；但這『羣』之意念，在我們腦中至少已強有力的預先存在。牠之支配我們，非如我們感覺之形式，而是我們會意（l'entendement）之形式。

但是，在這些可能的『羣』中，應該選出那認爲標準，以統轄各天然現象的一種。

經驗引導我們作這個選擇，但不支配我們；牠告訴我們並不是某某幾何爲最眞確，卻是使我們知道某種爲最便利。

人們當注意到我能够描寫我在上面理想的空幻世界，用尋常幾何的語詞。

其實我們即使來到那裏面，我們還是不會改換這語詞的。

在那裏面受教育的生物，自然覺得以創造一種合乎牠們的印象，而有異於我們的幾何之幾

何爲便利。至於我們對着同一的印象，我們一定覺得以不改變我們的習慣爲最便利。

第五章　經驗與幾何

一、前文中，我已反復證明幾何原理幷不是經驗的事實，且特別說明歐克里得公理決非實驗可以證明的。

我所根據的理由無論如何堅實，我相信還須加以申說：因爲有一種根深蒂個的謬想存在許多人的腦海中咧。

二、設有一物質的圓圈，試量其周與徑，又試算此二數之比例爲π否，這卻是做什麼呢？人們所做的幷不是關於空間特性的試驗，而是有關那作成此圓之物質特性的試驗，以及那做成用以測量的密達尺物質特性的試驗。

三、幾何學與天文學——人們對於上面的問題，又有一種說法。倘若陸氏的幾何是眞的，則一顆遠星的視差(parallaxe)將是有限的了，再如李氏的幾何是眞的，這數就將是負的了。這些結

果好像是可供試驗的，所以人們希望天文的觀察可以在這三種幾何中有所採擇。

但在天文中所謂直線，簡直就是光線的路程。所以即使萬一有人發現了負數的視差，或證明一切視差皆大於某定限，人們對於下述的兩結論當有所選擇；我們或是捨棄歐克里得幾何，或是修改光學的定律；而認可光之傳達嚴密講起來，不是直線。

大家對於後面這個解答必認為更便利，這是不消說的。

所以歐克里得幾何對於任何新穎的試驗都是不怕的。

四、人們能否證明某種現象在歐克里得的空間是可能的，而在非歐克里得的空間就不可能，於是經驗審察這些現象時，就與非歐克里得的假設直接發生衝突麼？我看起來，這種問題實無存在的價值。我以為提出這個問題不啻說：有能用粎與籿計量，而不能用尺與寸計量的長度麼？這樣當經驗審察這長度時，就和那十寸為尺的設想，將直接發生衝突？這個問題之荒謬，大家一望而知。

我們且把這個問題再仔細一看。我假定在歐克里得的空間中有一直線含有二種特性，姑名之曰A與B；而在非歐氏的空間中牠含有A性，但無B性；最後我假定唯有直線既能在歐氏空間

中又能在非歐氏空間中含有A性。

果然如是，那麼經驗就可以在歐氏的設想與陸氏的設想中有所採決了。人們就可以見得某某可試驗的，而具體的物件（例如一道光線）含有特性A，由此可以結論光是直線的，然後再看牠有無特性B。

但其實。。。不然，因爲沒有一種特性如特性A的，可以作爲一種絕對的標準來認識直線，而辨別牠於其牠的線。

譬如有人將謂：「這個特性必是如此的：直線之爲物，即凡含有此線之圖形移動時，勢必變動此圖之各點相互的距離，且使此線之各點仍舊固定？」

其實，這就是在歐克里得或非歐克里得的空間中直線所有而唯牠獨有的一種特性。然而人們如何用經驗可以認識這種特性是屬於某某具體的物呢？因此勢必量其中的距離，但又何以見得用那物質儀器量得的具體數量，就可代表那抽象的距離呢？

對於這個難點，人們僅僅把牠打退了一步而已。

其實我剛才所說的特性，並非直線獨有的，所以這是直線與距離二者的特性。如要將牠做為絕對的標準，人們不特需要證明除了直線與距離之外，牠不屬於任何線，還要證明除了直線之外，牠不屬於任何線，又除了距離之外牠不屬於任何數量。但這是不確實的。

所以要想借一種具體的實驗能在歐氏幾何中解釋一切，而不能在陸氏幾何中解釋一切這是不可能的，因此我結論：

任何實驗與歐克里得公理永不會有所矛盾；即與陸氏公理亦永不會有所矛盾。

五，但只管歐氏幾何（或非歐氏幾何）與經驗不致直接生起衝突，這還是不够的。不能是這樣說麼：牠們所以與經驗發生矛盾，除非侵犯充足理由原則 (le principe de raison suffisante) 及空間相對原理吧？

請述之如下：設有一物質系統；一方面，我們要看那系統之各物體的『狀態』，（例如其溫度，其電位等等，）他方面要看牠們在空間的位置；而在這些允許規定此地位的理由中，我們還要分別那規定牠們相對位置的相互距離，以及那些規定系統的絕對位置與其在空間的絕對方向之

條件如何。

在這系統中所發生之現象的定律，與這些物體的狀態及其相互的距離是有關係的；然以空間之相對性及其被動性的關係，這些定律和這系統之絕對的位置，與絕對的方向是無關的。

換言之，在任何時刻，物之狀態及其相互距離，僅根據這些物體本身的狀態，及其初時的相互距離，而與此系統在初時絕對的位置及絕對的方向毫不相干。簡而言之，我可名之曰相對定律。

一直到此，我所說的有如一位歐克里得幾何家說的話。然我已申明，無論何種經驗可有一歐氏的設想之解釋，但同時也可有一非歐氏的設想之解釋。好了，我們已做了許多的試驗，我們已把他們在歐氏的設想中解釋，而我們已認識這些試驗是與相對定律不相矛盾的。

我們且來在非歐氏的設想中解釋之：這總是可能的；不過我們不同物體之非歐克里得距離在這新解釋中常與原來的解釋中的歐克里得的距離是不同的。

把我們的經驗用這新式的方法解釋，還可與『相對定律』脗合嗎？如其不然，人們沒有權利說經驗已證實非歐克里得幾何之謬誤嗎？

這眞是杞人憂天了；其實人們如要把這相對定律嚴密的應用起來，那就非應用到宇宙全體不可。蓋人們如僅認定宇宙之一部分，又假使這部分的絕對位置一變，則其與宇宙間各物之距離亦將變，牠們對於這局部的影響因此將能有所增減，也因此其中能够改變萬象的定律了。然我們的系統如是宇宙全體，則實驗勢必不能告訴我們牠在空間有什麼絕對的位置與方向。無論我們的儀器何等精巧，我們所能知道的，只是宇宙局部的情狀，及其相互的距離。

由是我們的相對定律可這樣說法：

我們在我們的儀器上所能測視的記數僅隨我們在初時所能測視的記數而定。

但這種的說法與任何實驗的解釋無關。所以如某定律對於歐氏的解釋爲眞，當然非歐氏的解釋也眞了。對於這個題目，請再讓我支離一回。我上面已經說過規定一系統中各物位置的理由；我還當說明規定牠們速度的標準；於是我將能分別那借以變動各物相互距離之速度；他方面，系統之旋轉的與運動的速度，即是說，借以變動絕對的方向與位置之速度。

爲使人家完全滿意起見，則相對定律宜這樣說法才好：

在任何時刻，物之情狀與其相互距離，一如同這時借以變動這些距離之速度，僅藉初時這些物體之相互距離與其情狀爲標準，一如那初時借以變動這些距離之速度，但這與系統初時之絕對的位置及方向既無關係，又與初時這絕對的位置與方向變動之速度無關。

不幸這樣說明的定律不合乎經驗，至少是與我們普通解釋的經驗不合。

今如有人遷居在一星球上，那裏的天空常是雲靄滿佈，以至永不能看見別的星球；則此人一定以爲生活在獨立空間的星球上。然此人當可覺得球的旋轉，或用量星球之扁平度的方法，（這就是我們普通藉天文觀察的辦法，但亦可用純粹地文學的方法，）或用傅哥爾（Foucault）擺之試驗。所以此星球之絕對的運動亦可顯明了。

這裏面有一件事實觸犯哲學家，但物理學家則非承認不可。

人們知道牛頓（Newton）藉此以結論絕對空間的存在；我對於這種見解，卻不能採用，我將在第三部中說明所以然。現在我尙無意來討論這個難點。

所以在相對定律說明中我必當免去混合各種速度在那些規定物體狀態的結論中。

雖然，這個困難對於歐氏幾何及對於陸氏幾何都是一樣的；所以我對此無何種不安，且我只是便中談及而已。

有關緊要的，就是結論：經驗對於陸氏幾何與歐氏幾何不能有所定奪。

總之，無論如何反復申辯，那實驗主義的幾何（empirisme géométrique）並無有理的意義。

六、經驗不過告知我們物與物間之關係（le rapport）；至於物與空間之關係，或空間各部之互相關係，都是經驗論不到，也是不能論到的事呵。

讀者對此必回答道：『不錯，唯一的經驗是不够的，因爲牠只給我們一個含有許多未知數的方程式；但我如能做許多的試驗，則我將得足够的方程式去計算未知數了。』

單單知道大桅杆的高度並不足以計算船長的年齡。就是把那船裏各種木塊統計了，人們將得許多的方程式，但還是不能知道他的年齡。所有關於那些木塊的測量而發現的東西，只是有關木塊的，除此以外，並無其牠。同樣，你的經驗無論如何多，如只能及於物與物間之關係，故絲毫不能

發現什麼空間各部分的相互之關係。

七、你們又將說麼？如果經驗及於物體，那麼至少及於物體之幾何的特性。那麼先請問物體之幾何的特性，究作何解？我假定這就是物體與空間之關係；所以這些特性是不可試驗的，因為試驗不過及於物與物間之關係而已。這樣已足見得此並非經驗不經驗的問題了。

然而我們先總要了解物之幾何的特性的意義。當我說一物含有許多部分，我假定在這裏我並不指明一種幾何的特性，即使我給我假設的最小部分一個不合的名辭，叫作點，這也還不是幾何之特性咧。

又如我說某物體之某部與另物體之某部相接觸，我所說的是二物間相互之關係的命題，而并不是物與空間之關係。

我假定讀者承認我剛才所說的并非幾何特性；我確信至少讀者承認我這些特性與一切數量的幾何毫無關係。

既然如此今設有一固體是用共同聯在O點的OA，OB，OC，OD，OE，OF，OG，OH八根小鐵條作成的。

此外另有第二個固體，比方是一木塊，上塗三墨跡名曰αβγ。其次我假定我們覺得我們能够使αβγ可與AGO相接觸（意即α與A，β與G，γ與O）皆同時接觸，因為人們可依次使αβγ與BGO，CGO，DGO，EGO，FGO接觸，其次與AHO，BHO，CHO，DHO，EHO，FHO，又其次αγ可依次與AB，BC，CD，DE，EF，FA接觸。

這就是人們可審察而得的，而事先並不必知道什麼空間的數量之特性及形式。這種審察是絲毫不及於『物體之幾何特性』的。倘若這些受試驗的物體是按照與陸把周夫斯基的羣（意即根據在陸氏幾何中之固體的一般定律）有同一構造的羣而運動，則這些觀察將為不可能的了。所以牠們足以證實這些物體是按照歐氏的羣行動的，或至少也不是依照陸氏的羣而運動的了。

這些審察與歐氏的羣相符合，這是容易見得的。

因為我們能够作這些觀察，假使物體αβγ是我們普通幾何中不變形的固體，而為直角三

角形，又如ABCDEFGH諸點爲一棱體之角尖，此棱體乃我們普通幾何的兩個正六面錐體（2 pyramides hexagonales irrégulierés）湊合而成，二者之公共底面爲ABCDEF，其錐尖一爲G，一爲H。

現在假定不用前面的審察，而如剛才依次把αβγ聯合在AGO，BGO，CGO，DGO，EGO，FGO，AHO，BHO，CHO，DHO，EHO，FHO諸形上，然後人們可將αβ（而不再是αγ了）依次聯合在AB，BC，CD，DE，EF及FA諸形上。

這將是人們所能做的審察，假使非歐氏幾何是眞的，只需αβγ與OABCDEFGH二體是不變的固體，假使第一體是直角三角形而第二體是大小合式的兩個相重的正六面錐體。

所以如果這些物體依照歐氏羣而運動，則這些審察將是不可能，但照陸氏羣而運動，牠們便可能了。所以牠們足以（如有人去做）證明這些物體不是依照歐克里得羣運動的。

是故我對於空間的形狀，性質及諸物與空間的關係，不必做任何假設，又不必支配某物有任何的幾何特性，但我已做了許多的審察，使我能夠說明在某種情形中這些試驗的物體依照歐克

里得羣而運動，在另一種情形中牠們依照陸把周夫斯基羣而運動。

但我願人們不要說那第一種爲證明空間是歐克里得試驗的審察，那第二種爲證明空間不是歐克里得試驗的審察。

其實人們可想像（我只說想像）有些物體運動有使第二種審察之可能。其證據卽在那一初來的機械匠苟能吃苦賣力，就可把牠造成。但你不要就此結論空間是非歐克里得的呵。

並且就是當那機械匠造成那些我方才說過的奇怪物體時，那些尋常的固體仍能存立，故必結論空間同時是歐克里得的與非歐克里得的了。

例如設有一半徑R極大之圓球，其溫度依照我討論非歐克里得世界時之定律，由球心漸降至於球面。

有一種澎漲率極微的物體，我們可認爲尋常不變的固體；他方面，有一種澎漲率極大的物體，則可認爲非歐克里得的個體。我們可有兩個雙重的錐體OABCDEFGH與O'A'B'C'D'E'F'G'H'又有兩三角形αβγ與α'β'γ'。第一雙重錐體將是直線形成的，第二錐體是曲線

形成的；三角形αβγ是用一種不可澎漲的物質製成，而α'、β'、γ'、是用一種極易澎漲的物質製成。用三角形αβγ與雙重錐體OAH就可得第一種審察，用三角形α'β'γ'與雙重錐體O'A'H'就可得第二種審察。於是經驗似乎起先證明歐克里得幾何是眞實的，然後證明這是謬誤的了。

所以經驗只及於物體，並不及於空間。

補充語

八、爲完全起見，我還當說到一個很難的問題，但是因爲太長的緣故，只能把我在玄學與道德雜誌及在一元雜誌中（Revue de Métaphysique et pe Morale; The Monist）的著作概括於下。現在要問，我們所謂的三元空間究作何解？

我們已知道被我們筋肉的感覺所發覺的『內部變動』之重要。牠們可以用爲確定我們身體上各種的態度。我們試任意認定態度A爲起點。當我們由態度A到態度B時，我們受得一些筋肉的感覺S，而這感覺S即可確定B。但我們總是要注意有時S與S'的兩種感覺可以確定同一態度B（因爲起初態度A與最後態度B既相同，其中經過的態度及相伴的感覺可以不同的。）

所以究竟用何法，我們認明S與S′有相等的價值哩？這是因為牠們可用以對消同一的外界的變易，或更擴而言之，在對消外界的變易之時，二感覺之中，其一可以其牠代替。

在這些感覺中，我們已區別那些自身能對消外界的變化，而名之曰『移動』。對於兩個很近的移動，我們既不能有所辨別，故這些移動的全體含有物理連續之特性；經驗告訴我們說：這就是六元的物理連續之特性；然空間自己到底有多少元，我們卻還不知，我們當另去解決一問題。

何為空間之一點？大家自信都知道的，其實這是幻想了。我們所見的，當我們盡力去表現的空間之一點，這就是白紙上之黑點，黑板上之白點，這總是一件東西。所以這個問題要如下文去解釋才行：

當我說B物現占之位置與剛才A物所占者為同一點，這是何意？或用何種標準，我可有此種認識？

我可說，雖然我未移動（這是我由筋肉感覺知道的），我的第一指方才觸了A點，現在觸着B點。我可用別的標準來說；譬如換一個指去指點，又或用眼光去觀視。然第一標準已足夠了，我知

道如第一標準回答對的，則其餘的亦必有同一的回答。這是由經驗我纔能知道的，但這是我不能先驗的知道的。這也是為了這個緣故，我才說觸覺不能及遠，這又是另一種方法說明同一的經驗事實。反之，如我說眼光可遠及於物，意即謂眼光所供給的標準可回答對的，而別的標準則回答不對的。

其實，一物雖離遠了，然其影像仍可留在眼膜之同一點。故視官回答對的；觸官之回答不對，因為我剛才接觸那物之手指，現在已和牠遠離了。如果經驗告訴我們說一指拇回答對的，同時牠一指拇回答不對的，我們仍是可以說觸覺作用可以及遠（le aoucher sèxerce à distance）。

總而言之，關於我的身上每一態度，我的第一手指確定一點，而唯牠能確定空間之一點。

由此每一態度即有一點相對應，但往往同一點可有許多不同的態度相對應。（就是在這種情形中我們才說我們的手指未動，所動者是其餘的體部。）所以在這些態度的變易中我們要分明那手指未移動的一種變易。我們怎會想到這步？此因我們常常注意到在這些變易中那接觸物體之手指幷未脫離。

所以我們可以把所有的態度列入同一班次，這些態度可由我們前面所分別的變易中之一彼此互相引出。故同班的各種態度，同以空間之某點相對應。所以每一班即有一點相對，每一點即有一班相對。但人們可以說，經驗所達到的並非點子，而是這些變易組成之班次，或更好些，是相關的筋肉的感覺之班次。

於是凡我人說空間是三元的，即是簡簡單單的說：這些班次的全體有如三元物理的連續之特性。

人們又可結論這是經驗告訴我們說空間是幾元的。但實際上，此地經驗不及於空間，而及於我們的身體，及其與鄰近物之關係。並且這些經驗是很粗陋的。

在我們頭腦中，早就存有一些羣之觀念，其理論已經李氏研究過了。我們到底揀那一羣作標準，以比較那些自然界的現象？這一羣選了之後，我們還要揀那一小羣，以確定空間之一點？經驗用指示我們那一種選擇最合我們的身體特性的方法引導我們。然而牠的功用亦僅限於此。

祖傳的經驗。

有人常說如個人的經驗未能創造幾何，祖傳的經驗則爲不然。但這是怎講呢？其意是否我們不能由經驗而證明歐克里得的公理，但我們的祖宗竟能做過？這絲毫不是的。人們的意思，卽用自然選擇法，我們的思想能與外界的情形適合，牠採用了最有利益的幾何；易言之，那最便利的這一層是與我們的結論完全相符合的，幾何學不是眞實的，但是有益的。

第三部　力

第六章　古法的機械學

英國人將機械學作實驗科學教授；在大陸的國家，人們就認爲一種演繹的和先驗的科學。不必說，這是英國人有道理；不過在習用的方法中，人們怎會忍耐這久？何以大陸的學者雖想脫離他們前輩的習慣，但總是不能完全逃出這個難關呢？

他方面，如果機械學原理之來源不過是些經驗，這是否就是暫時的，或近似的呢？將來新的試

驗不能使我們一旦修正這些原理，或竟推翻牠們麼？

這就是自然會有的疑問，而其解決之困難主因是在一般機械專書不能分明何爲經驗，又何爲算學的推理，何爲公約，又何爲假設。

這還不算數：

（一）絕對的空間是沒有的，我們所會意的不過是相對的運動而已；但是人們說明機械的事實時，總當空間是絕對的，而把牠們歸入其中。

（二）時間不是絕對的；所謂兩個歷時相等，只是一種身本無意義的斷語，而要得有一種意義亦必須公約。

（三）不特我們沒有兩個相等的時間的直覺，并且我們對於兩地所發生的兩件事端同時并現（La simultanéité）的直覺也是沒有；這就是我在時間之測量(La mésure du temps)（註）一文中已詳論過了。

（四）最後，我們的歐克里得幾何亦不過是一種公約的言語；我們可以把機械的事實歸入

非歐克里得的空間，這雖然是個比較不便利的標準，但與我們平常的空間是同一的合法；一切定理的說明雖似從簡入繁，但這還是可能的。

由是那絕對的空間，絕對的時間，甚至幾何學，幷非機械學所當服從的條件；這些東西之不先機械學而存在正如法文不必比那些用法文表現的眞理先存在。

人們可把機械學的基本定律用一種與這些公約毫不相干的言語說明；而人們將必更爲明白這些定律的本身是什麼；這就是安得那得（Andrade）先生在他的物理的機械學中所做過的部分的嘗試。

如此說明這些定律自然將較爲繁複，因爲正是爲要縮短而簡化這種說明，才想出來這些公約。

至於我呢，除了關於絕對的空間外，我把這些困難姑且放下；這決不是忽視牠們；因爲我們在前兩節文中已經充分討論過了。

所以我暫且承認那絕對的時間，及歐氏幾何。

惰性的原理——凡物不受外力只能作直線的等一的運動（mounement rectilique et uniforme）。

這是否我們必有的先驗的眞理？果眞如是，爲何希臘學者竟沒有知道？他們又怎能相信那發生運動的原因一停，則那運動亦即停止呢？又或凡物如不受外界阻力，則常繞圓旋轉，即所謂運動中之最高尙者（le plus noble）？

人們如說物之速度是不可變的，假使牠無變易之理由，則人們不是也可堅持說如物不受外界改變牠的原因，則此物之位置不易，或其軌道之曲度不變？

所以惰性原理既非先驗的眞理，是不是經驗的事實呢？但人們曾否試驗過毫不受外力之物體，如曾做過，則人們又何從知道這些物曾否已受了外力呢？人們常用下面的例：一彈子滾於一張大理石的平面上好久不停止；但我人何以說牠是毫不受外力呢？是否因爲牠遠離了他物，所以說牠是毫不受外力麼？今若任意擲之於空中，牠離地更遠；但大家知道在這種情形之下牠將受地心吸力的影響。一般機械學教授常是很快地通過這例；但他們加說惰性之原理爲其結果間接證實。

這是他們沒有好好的解釋，其實他們想說人們可以證實一更普遍的原則之各種結果，而惰性原理不過其中之一特例而已。

對於這條更普遍的原理，我想這樣說明：

某物之加速度僅恃此物之位置及其鄰近物之位置與速度。照算學家的說法，就是宇宙間各種物質分子運動皆根據二次微分方程式。

爲說明這實在是惰性原理之自然的推廣，我還要求讀者允許作一種幻想。我上面已說過，惰性原理幷不是我們先驗卽有的；別的定律，和牠一樣，也能與充足理由之原則相合。今有一不受外力之物，與其假定牠的速度不變，人們可以假定這是牠的位置或其加速度不當變易的。

好了，我們此刻暫把這兩個假想的定律之一認爲自然定律，而用以代替惰性定律。然則將有若何的自然推廣？稍一思索便可知道。

在第一項中，人們當假定物之速度僅依其位置與鄰近物體之位置而定；在第二項中，假設物體加速度之變易，僅依物之位置，鄰近之物體，牠們的速度及加速度而定。

換算學的術語說：就是運動之微分方程式在第一項中是第一級的，在第二項中是第三級的。

現在把我們的幻想修改一下。我假定有一與我們太陽系相似的世界，不過因一種特別的意外其中衆星的軌道沒有離心性及傾斜，我又假定星羣的物質太小，以致牠們相互擾亂的影響極弱。那麼在此種星球上的天文家必結論說，凡星球之軌道必爲圓形，並與某平面相平行；某星球在某時間的位置已足規定牠的速度與軌道了。牠們所採用的惰性定律必是我剛才說過的第一假設定律。

今試想這個系統有一天忽被來自遠方星座的一大堆物質極速地穿過。於是所有軌道必大爲擾亂。我們的天文家還不致十分驚訝；他們以爲這顆新星乃是唯一的禍物。他們說，當這大星遠離之後，秩序自然又可恢復；星球與日球的距離雖不能變成像肇禍以前的原狀，但一待搗亂的星去了之後，則各軌道仍爲圓狀是無疑的。

這一直要等那搗亂的東西遠離之後，而那些軌道不恢復圓形，卻變成橢圓的，只是這樣，這些天文家才知道他們的錯誤，以及有重做他們的機械學之必要。

我已把這些設想中說了一番；因爲好像人們不能大知道何爲普通的惰性定律，若不將牠與一個相反的設想對照。

現在卻好了，這個普通的惰性定律已由經驗對正否，并可否對證？當牛頓著原則論一書時，他以爲這是已得的眞理，並且已由試驗證實了。他這種的見解不特是惑於就人體論力之說（l' idole anthropomorphique），——我們以後再說罷——並且受蓋利烈（Galilée）工作的影響。他還受了克百烈（Képler）定律的本身影響；蓋根據這種定律，凡一星球之軌道可由其初時之位置與速度確定之，而這正是我們普通的惰性原則所要求的。

如要這種原則單是表面上的眞理，又如怕將來這個原則被有如我剛才與之相反的原則推而代之，那末除非我們被特別的意外所誤，有如我在上面所說的幻想中，已使我們理想的天文家走入迷途的意外一樣。

這樣的設想是太不相像，不值得在這裏停留。誰也不信有這種偶然的事；依照觀察準確的程度如何，那兩離心率（excentricite）適皆爲零的或然性（la probabilité）不是較小於一

個恰正是○・一，一個是○・二的或然性，這是無疑的。一件簡單的事體之或然性不必小於一件複雜的事體之或然性；然假使前者發生了，我們不能相信自然界有心騙我們。這種的誤會的假設既然免掉了，我們就可以認爲在天文學一方面，我們的定律確已被經驗證實了。

然天文學不是物理學全體。

人們豈不想到一旦有些新的實驗來，使在物理學中某部分的定律不通行嗎？凡一實驗的定律都待修改的，人們常常希望某某定律將來可代以更精確的定律。

雖然竟無人眞正疑心我們所說的定律終亦被推翻或遭改正。何則？這正是因爲人們永不能把牠作一決定取捨的實驗。

如要這個實驗是完全的，第一要宇宙萬物經了某定時間仍舊歸還原地，恢復原始的速度。在那時候，人們就可見得牠們是否仍隨前次的軌路了。

但這種實驗是不可能的，人們最多只能做到一部分，而且無論怎樣做總有些物體是不能還原的；所以各種對於定律的抵觸，由此都可解釋了。

這還不算數；在天文學中我們看見我們所研究運動的星球，且我們承認牠們不受其牠不可見的物體之影響。在這種情形之下，我們的定律要麼可以對正要麼就不可對正。

但在物理學中，則不然，若說一切物理的現象都是由於運動，這就是其中的分子運動，我們不能見到。故如我們所見的某物之加速度，除與可見物及已知其存在而不可見物之分子的位置與速度有關，此外還與牠物有關，則我們何常不可假定這牠物。即其牠新分子之位置或速度，這些分子是我們從前所不疑其存在的。於是那條定律仍可保存。

且讓我用算學的術語把上面的意思換一個形式說明。我假定我們觀察 n 分子，且其 3n 座標可以滿足 3n 四次微分方程式（而非如惰性原則所要求為二次的）。我們知道如加入 3n 助變數則 3n 四次方程式可化為 6n 二次方程式。由是如假定這 3n 助變數用以表示 n 個不可見分子之座標，則結果又合乎惰性定律了。

總之，這個定律既在一些特別款項中可以用經驗對正，即可擴充於普遍的款項中，因為我們知道在這些普遍的款項中，經驗既不能把牠肯定也不能反對。

加速度定律——物之加速度等於質量除力之商數。這個定律可用經驗對正嗎？爲此必將此定義中之三量：加速度，力，質量，設法測定。

我承認人們可以測定加速度，因爲我暫把關於測量時間之困難，按下不提。但力與質量當如何測量呢？我們簡直不知道這是什麽？

何謂質量？(masse)牛頓說此卽體積乘密度。——湯姆生（Thomson）與代衣（Tait）都以爲這不如說密度乃體積除質量之商。——何爲力？賴克南希（Lagrange）說這是發生物之運動或引其傾向運動之原因。——紀哥夫（Kirchhoff）反說這是質量乘加速度之積。然則何以不說質量卽加速度除力之商？

這種困難眞是解不開的死結子呵。

當人們說力乃運動之起因，這不啻談玄學，人們如把這種定義認爲滿足，牠一定毫無效果。要想一定義有點功用，牠必能指示我們如何測力；僅此已足，我們並不希望牠告訴我們力之本質是什麽？更不必問牠是運動之因或果。

所以第一要定明二力相等之標準。如何二力才相等？人們說，凡相等之二力施於同一之質量上可發生同一之加速度，又或二者直接相反的時候，其勢力平均。這種定義不過騙騙眼目而已。我們決不能把加於此物之力換在牠物之上，有如把火車頭調換在別的一輛車子上的方便。所決不能知道施於某物之力如果換在牠一物時，其加速度如何。我們又無從知道曾為直接相反之二力在不直接相反時，牠們將為何物。

當人們用動力機測量力之大小或以牠重量使其平衡時，這簡直就是要把這定義變為物質化。設有自下向上二直向力F與F'各加於C與C'兩物體上；我又把一個重物P先掛在C物上，後在C'物上；如在這兩款中都得平衡，則我結論F與F'的力相等，因為牠倆都是等於P物之重量。

但我能確定當我由物體C將P物移到物體C'時其重量未易否？此大不然。我確信這是相反的；我知道重量之強弱，隨地而易，譬如在兩極的當比在赤道的為強。無疑的，這種差別是很微的，而在實用中我是不算牠的，但一條很完美的定義卻要有一種數理的精密性才行；這種精密是沒有的。我所說的重量，自可應用到動力機中發條的力，因為溫度以及許多的環境均能使其變動。

這還不算數：人們不能說P重量是施於C物上而直接與F力平衡。所施於C物者，乃P物加於C物之作用；P物一方則受有自己之重量，一方則受有C物加於P物之反力R。結果F力等A力，因此力使其平衡之故；A力等於R力，此說根據主動力與反動力之原理；結果，R力等於重量P，因此力使其平衡之故。由此三等式，我們方才結論F等於P。

所以在兩力相等之定義中，我們卽需藉主動力等於反動力之原則以立說；由是這個原則再不可認爲經驗之定律，而當認爲一種定義。

所以我們可有二法以認識兩力之相等；互相平衡之兩力相等；主動與反動力之相等。然我們上面已見過這兩種方法是不足的；我們勢必採用第三法則，且承認某種力，例如物之重量，其方向與量均爲常數。但是我已說過，這第三規則乃是實驗的定律，只是近似的眞實；這是不好的定義。

所以我們要來談紀哥夫的定義；力等於加速度乘質量之積。這條『牛頓定律』也不能看作實驗的定律，牠不過是一定義而已。但這定義還是不充足的，因爲我們不知質量之爲何物。自然我們可藉牠來計算在不同的時候加於同一物體的兩力之相比；至於加在兩不同物的兩力之比，則

非其所能了。

爲要補充這個定義，我們又須引用牛頓第三定律（主動力與反動力之相等），此不當認爲實驗的定律，而當認一種定義。今有互相抵觸之二物A與B；A之加速度乘其質量等於B施於A之主動力；同樣，B之加速度乘其質量等於A施於B之反動力。若下定義，主動力旣等於反動力，則A與B質量之比重當等於二者加速度之反比。兩質量之相比就是這樣定明；而要經驗去對正這個比是常數。

如果除了AB兩物之外，幷無世界上牠種物力參加，則此定義甚善。其實不然，A之加速度非特由於B，且由於別的CD等物。所以如要應用先前規則，必須將A之加速度分解，成若干支部，而在這些支部中認淸何支部是由於B的。

如我們承認C施於A之力，是簡單加在B施於A之力上，雖有C之參加，仍不變B施於A之力，或雖有B之參加，不改C施於A之力；是故如我們承認兩物相吸引，其吸引力之方面是在連接兩物之直線上，且此力只倚賴兩物之距離如何；一言以蔽之，如我們承認**向心力之**假設，則這種的

分解還是可能之事。

人們知道，如要定天空中星球之質量，人們所用的原則大爲不同。萬有引力律曰，兩體之吸引力與其質量成比例，今如 r 爲牠倆之距離，m 與 m' 乃其質量 K 代表常數，則此吸引力爲：

$$\frac{kmm'}{r^2}$$

但人們所測量的幷非質量，是卽力與加速度之比，而是有吸力的質量；並非物之惰性，而是牠吸引之能力。

這是一個間接的方法，理論上不一定是需要的。也許吸引力與距離平方成反比例，而不與質量成比例，此卽：

$$\frac{f}{r^2}$$

而非

$$f = k\,m\,m'$$

倘若是這樣的，人們因天體的相對運動之觀察，可以測定這些體的質量。

然我們有無承認向心力假設之權?這個假設是否嚴密的精確?牠永不會與經驗相矛盾?誰敢斷定呢?且如我們捨了這個假設,則此慘淡營造而成的大廈登時將傾覆了。

我們再無權可說A之加速度由於B力之支部。我們毫無方法別之於由C力或其牠之支部。那測定質量之規則,現在卻不能應用了。

然則主動力與反動力之原則中尙有何物存在?今如捨去向心力之假設,則此原則必當如是說明:凡在一系統中脫離任何外力之影響的物體,則加其上所有力之幾何總量將爲零。易言之,此系統之重心運動將爲直線的而等速的。

這樣才似乎是規定質量之一法;重心之位置自然是依據物的質量之值;故必整理此值,使其重心做直線而等速的運動;如牛頓第三定律是眞的,則那總是可能之事,而這可能之方法,普通唯有一種。

然世界上沒盡能脫離外力之系統;宇宙間各部分多少總受他部之力。故重心運動之定律,惟應用於宇宙全體才算嚴密的眞實咧。

是以知要從中知道各質量之値，必先觀察宇宙重心之運動。這個結果明明是荒謬之至；蓋我們僅知相對的運動，宇宙重心之運動是我們永世不能發覺的呵。

所以我們一無所有了，而我們的力量是白費了；不得已我們自認不中用，只好退讓到下面的定義：質量是一種係數，便於演算而已。

我們如把不同的價値支配到各質量，我們便可重新建立機械學。這個新的機械學既不會與經驗衝突，又無礙於動力學之普通原理。（惰性原則，力與質量及與加速度之比例，主動力與反動力之相等，重心在綫而等速的運動，而積原則。）

不過這些新機械學的方程式，將比較的不簡單。我們聽好：比較不簡單的便是第一部分的項數，是即經驗先已告知者；人們或者可把質量稍微改變，而不致使全部的方程式對於簡單有所增減。

黑子（Hertz）嘗問機械學的原則是否嚴密眞實的。他說：『照許多物理家的見解，若有關係很遠的實驗可使那不可動搖的機械學原理改變，這眞是不可思議的；然而由經驗中得來的東

西，總是可用經驗矯正的。」

照我們剛才所說的，這未免有點杞人憂天了。動力學原則，我們起初看上去，似乎是經驗的眞力；但我們已經不得已把牠當作定義了。這是依定義力才得等於質量加速度之積；這就是一種原則，以後永不受實驗之攻擊了。這也是依定義主動力才等於反動力。

但是人們要說哪，這些不可對正的原則，是絲毫沒有意義的；經驗不能有所衝突；但牠們不能告訴我們以有用的東西；於是硏究動力學有何好處呢？

這樣太快的判罪，未免太不公正了。自然界中沒有一種系統是完全孤立的，完全脫離外界一切影響的，但是有一種系統大約是孤立的。

人們如觀察這類的系統，人們不特可以硏究其中各部分之相對運動，且可硏究牠的重心對於宇宙間其他部分之相對的運動。人們就可見得這個重心運動大約是直線而等速的，正與牛頓第三定律相合。

這是經驗上的眞理，但決不會被經驗推翻的；其實一個比較更精確的經驗告訴我們什麼牠

告訴我們說定律不過大約是眞的；但這是我們早已知道的了。

現在人們可以了解經驗何以可做機械學原則之基礎，而永不會和牠發生衝突的。

人體力學（la mécanique anthropomorphique）——人們要說哪，紀哥夫只是隨同一般算學家而傾向於唯名派，他雖是能幹的物理家也免不了這一層。他想有一種力之定義，因此他就採取了首先遇到的命題；但是力之定義，我們卻不需要。力之觀念是最原始的概念，不可分析的，不可規定的；我們都知道牠是什麼，我們對牠有一種直接的直覺。這種直覺來自努力之概念，而這是我們自幼就已熟悉的了。

然而第一就是這直接的直覺可以使我們知道那力的本身之究竟，但這還不足以建立機械學；況且這也是完全無益的。緊要的，不是要知道力之爲何物，是要知道怎樣測量此力。

凡是不能測量的，對於機械學家也是無用的，正和物理學家對於冷或熱的主觀是一樣的情形。這種主觀的概念既不能用數目表出，所以是無用的；假如一位大學者，他的皮膚對於冷熱雖是麻木不仁的；但他將能與別人一樣視察溫度表，而這樣已足建設許多熱學的理論了。

但這種努力之直接的概念不能用以測力；例如平常人舉重時自比提慣包裹的人吃力。

還有一層，這種費力之概念不能使我們領會力之眞性質；最後牠不過留了些筋肉的感覺，人們決不相信太陽吸引拖球時，牠受有筋肉的感覺。

人們所能探覓的，只是一種符號（symbole）比較那幾何家所用的矢還要不正確及不便利些，然大家都離開實際尙遠咧。

這種以筋肉感覺說力的概念（l'anthropomorphisme），在機械學發生時代占了很大的勢力；將來牠也許供給一種符號，爲少數人所滿意；然而牠是不能建立什麼東西含有眞正的科學特性或哲學特性的。

線之學派（l'école du fil）安得拉得（Andrade）先生在他著的物理的機械學教程中，曾把古代的人體力學重立新說。他用他所奇怪稱謂的線之學派以對抗紀哥夫也在內的機械學家一派。

這派想『把一切都歸納於一些質量很輕微的物質系統中，這些系統要是在伸張情形之下，

且能把極大的努力傳達於遠處的物體，這種系統之理想的形式就是線。」

一條傳力的線，受了這種力量，立即輕微地伸張；由線之方向我們可以看出力之方向，此力之量則視線之伸張而測定。

於是人們可以意想下面的一個試驗了。有一A物繫於一線；在他端我們激動某一種力，我們使此力變動一直到使此線伸張爲α爲止，同時我們登記A之加速度；今去A易之以B，再重新激動此力，或其他一種力，我們又使牠變動一直到使此線伸長爲α爲止；同時登記B之加速度。人們用A與B重複試驗，但須使線伸長爲β。這四個觀察所得的加速度當成爲比例。於是上面所說明的加速定律就是經驗上的對正了。

換一試驗法，人們可繫一物於同樣的等張的許多線之同時動作之下，再由試驗去尋找這些線的方向怎樣才能使這物平衡。這樣人們就可經驗的證明力之綜合規則了。

不過到底我們所做的是甚麼？我們由線受力後之變形而定明此力，這還算合理；其後我們承認如有一物繫於一線，則此線所傳給牠的努力等於物體施於此線的動作；結果我們還是用着動

力與反動力相等的原則，但這並不是認此原則是經驗的眞理，而是認爲力之定義。

這個定義和紀哥夫所定的同一是公約性的，但牠比較的不普通些了。

所有的力不見得都被線傳達，（並且如要作此比較，則這些力須是被同樣的許多線傳達才行，）假使人們承認有一條不可見的線把地球繫在太陽上，至少人們應相信是無法可以測視此線之伸長的。

由是以觀，我們的定義，十有九是不對的；人們決不能與以任何意義，所以還是要回到紀哥夫的定義才行。

那末何必費了這個周折呢？你們承認了力之某種定義，而牠在某種情形之下才有意思。在這樣的情形中你們用經驗證實牠引出加速定律。得了這經驗之許可，然後你們再將加速定律作爲在任何情形下的力之定義。

今如將加速定律認爲在一切款項中之定義，又認這些經驗並非此定律之立證，而是反動力定律之立證，或做爲彈性物體之變形只靠加於此物之力的證明，這樣不是比較簡單些嗎？

至於你們的定義成立之條件永不會完全滿足的，一條線永不會沒有質量的，此線除受繫結物反動力外不受其牠外力，這都沒有算在內。

安得拉得先生的觀念頗饒興趣；雖對於我們論理上的要求，不能與以滿意，然能使我們對於機械學發生史更加瞭解。牠們所引起的思索能使我們看明人的思想如何從老實以筋肉感覺說之概念進到現代科學之意念。

我們於機械學之起原時，見得一種很奇特的，實即很粗陋的實驗；至終末時，則得一種很精確的很普遍的定律，而我們認此確實為絕對的了。這種確實性，可說原是我們認那種定律為一種公約我們才給與牠的。

然則加速定律與力之綜合規則，都不過是任意的公約了嗎？這是公約，不錯；任意的，就不是了；人們細看那些引導科學創造家採用公約之實驗，這些實驗無論如何不完美已足證明這些公約之合理而非任意的了。因此最好人們常常注意這些公約在實驗上的根源。

（註）玄學與道德雜誌第六卷一至十三頁（一八九八年正月）入參考科學之價值第三章。