高中

平面幾何教科書

（四版）

傅種孫 著

附中算學叢刻社

高中平面幾何

教科書

(四版)

高安傅種孫著

算學叢刻社印行

高中平面幾何教科書

定價國幣一元二角
外埠酌加郵費

著　者　高安傅種孫

印刷者　算學叢刻社

發行者　歙縣程仁厚　算學叢刻社

總售處　新華書店　西河沿185號　電南一八三五

民十四,北京師大附中初有三三制高中班,議訂課程之時,同人多主複習平面幾何. 穜孫方任教此科,因取曩日為新京學院補習幾何之講稿,稍加增輯,油印之而試教焉. 明年,又復增修,石印為講義. 其後附中雖沿用之,而未嘗訂正也. 去年教育部頒布各科課程標準,算學叢刻社認為此編對於教材之取舍,頗有與部令暗合之處,因囑重訂而印行之. 倉卒將事,于教材之詳略,章節之排次,習題之選擇,文字之潤色,猶皆有未能㥦意者. 迫于付印,不及斟酌矣.

教書以複習難教,編書亦以複習難編,本書之不易完善,此原因之屬于事者也;學欠貫通,文難達意,見聞未博,經驗不豐,此又原因之屬于人者也. 除此二因之外,尚有屬于書者,則湊集彌縫而成,體例形式,容難一貫. 訂正工作,惟有俟之他日耳.

至于操觚時着意之處,約有數端. 謹略陳于此,幸同好教正之.

(一). 幾何本極有系統之學. 今高中于平面幾何,半途起首,論證時究應何所根據耶? 故為設首篇,列舉基本義理,彙錄初步命題,以備徵引之用. 學者在初中時,所讀異書,所學異師;入高中後,難免各道其道. 故首篇之設,除備徵引外,尚有一視聽之意.

(二). 本書用無定義之名詞一,曰點;無定義之關係二,曰A點介乎B, C二點之間,曰(A, B)符合于(C, D). 其他一切之形,如線段,直線,…皆認爲點之集合. 一切關係,如角之符合,形之相似,…皆由上述二關係輾轉以界說之. 至于淺近名詞及關係,無關基本,又不複雜,其名甚通行,其義可想而見者,定義概從略焉.

(三). 幾何之務,不在知其然,而在知其所以然;不在知其所以然,而在何由以知其所以然? 讀定理,既知其然矣;又從而證之,以見其所以然. 若此所謂證者,僅口得而傳,心不得而求,則此流傳二千載,用遍五大洲之十三章經,亦特教員專利之秘方耳,曷足貴哉? 初中于平面幾何之教材,已講授不少,惟于方法之運用尚欠熟練耳;故高中宜特別偏重焉. 本書于第一篇汎論推證之法;而第二篇之于證定理,第四篇之于解作圖題,概以方法爲經,教材爲緯. 凡此種種,皆欲啓發學者,示以思維之道耳.

(四). 存在問題,在每門數學中皆極困難. 作圖能不能問題之在幾何亦然. 雖不足爲初學道其詳,要不可不使聞其略. 本書第四篇于作圖之時,特別注意交點之有無,解數之多少;且于代數分析法之後,略述能不能問題解决之概要. 亦欲進學者于有無能否之辨,而不以畫法技能自足耳.

(五). 線段相乘之基礎在比例,比例之基礎在平行. 學者苟明乎此,則代數學中之法理,多可舉而用之于幾何. 故本書第三篇于形數溝通之方,特加申說.

(六). 軌跡定理,本不難明. 學者所以不循規蹈矩而證之者,為憚煩耳. 若教科書不示以論證之規矩,教員不加以嚴厲之督責,則學者取法乎中,僅得其下矣. 此本書第五篇所以力加矯正也.

(七). 認軌跡為點之集合,各書之所同然. 本書既認任何形皆為點之集合,則某種點之軌跡為某形云者,不亦猶謂此集合即彼集合耶? 故于講軌跡之先,略論兩類全同之意,以為之引.

(八). 初等幾何範圍內,一切極限問題中之變數,但使以次代表一序貫之數值可耳. 不必涉及連續變化也. 故本書第六篇論極限,皆以繫之于序貫,而不空言變數.

(九). 極大極小問題,以初等方法解之,有易解者,有難解者,有絕不能解者. 本書第六篇于極大極小定理之易證者證之,其用初等方法難證及絕不能證者,則將題文變更,使內容微弱,至能證而止. 不敢稍存武斷欺騙之心.

(十). 教學之道,指示正規,與矯正錯誤,須兼施並用,其效始大. 本書除詔學者以須如此如此外,間又告

以不可如彼如彼. 蓋有鑑于中學生易犯之錯誤,而欲吾讀者免除之也.

(十一). 本書分量大約相當于新頒課程所定之時數. 複習課程,進度較速,故篇幅稍多. 次要之處,特別註明,教者可量爲取舍焉.

凡此等等,果是耶,非耶? 將心至而筆未至耶? 是則所厚望于博達君子之指正者,不勝盼禱之至!

此書之成,慫恿而督促之者爲程春台學長;迭經試教而指正之者,有韓問渠李宇涵二兄及魏庚人同學;屢共討論參閱者,則四君之外,尙有春台兄哲嗣京,及丁壽田傅超寰黃仲良諸君,與舊講義讀者諸生;而傅黃二君于校稿繪圖尤始終其事. 書此誌謝.

民國二十二年秋　　高安傅種孫序于北平師範大學

再　版　序

此次重印,章之移前者一(今第六篇之第一章),節之移後者二(今 §§ 106, 107),他皆補綴校訂而已,無他更革也.

編輯微意,尙有一事,爲前序漏列者,謹補述于此:—

(十二). 相似一名,自來敎科書皆無統一之定義.以至于多邊形,弓形,扇形,多面體,圓錐,圓柱,鼓形,球底錐,漏斗形,…之相似,一形一定義. 相似之定義十數見,而不爲貫通焉,謂之同,則有異義之說;謂之異,又有同名之雅. 此其不便一. 且各書之論相似多邊形者,靡不涉及對應點(不限于頂點),對應線(不限于邊),對應角(不限于頂角). 吾人試問之曰「何謂對應角?」必曰「對應線之交角也.」「何謂對應線?」必曰「對應點之聯線也.」「何謂對應點?」必又曰「對應線之交點也.」輾轉循環,無以自解. 此其不便二. 今本書視形爲點之類,而二形相似之第一要件爲二形之點能一一對應.——「二類類員一一對應」之觀念,乃各門數學之所通用而不可避免者. 吾人用之之時,但說明如何使之一一對應可耳. 至于「一一對應」之根本觀念,猶之「類」,「類員」,…,乃論理學之名詞,數學雖通用之而不加究詰也.——線,角,…本皆點之類,吾人指

對應點組成之線爲對應線,對應點組成之角爲對應角,乃極其自然. 二形之點一一對應之法既定,于是相似之義可以二法定之:—

(i) 每逢此形之A, B, C, D與彼形之A′,B′,C′,D′對應,則

$$AB : A'B' = CD : C'D';$$

(ii) 每逢A,B,C與A′,B′,C′對應,則

$$\angle ABC = \angle A'B'C'.$$

此二條件本互相隱含,定義中但舉其一可耳. 然前者須用比例,涉及亞幾默德公理. 故本書取後者. 相似之義,規定如此,不但可用之于多邊形,多面體,圓,球,圓錐,圓柱,弓形,鼓形,且可用之于任何度空間之任何形.

初版出後,同好多有教正之者,本版類皆採納. 其或見解各殊,未之從同,亦于爭議處稍加詮釋,以明原意. 刪削之未能,則以太費事也. 教者選擇而授焉可耳.

校勘之役,除前序所舉諸君外,則同學魏庚人趙慈庚趙楨三君費力尤多,理應誌謝.

廿三年夏傅種孫又識.

三版序

此版視再版稍有增刪修訂之處,然大體未變也. 印成勘誤,魯魚亥豕之處較少,皆同學趙慈庚,底鍾英二君讐校精細之力. 謹此致謝.

廿四年夏編者識.

記　　號

§	節	$=$	等于
p	面	$\neq$	不等于
$\because$	因	$>$	大于
$\therefore$	故	$<$	小于
$\angle$	角	$\geqq$	大于或等于
rt.$\angle$	直角	$\leqq$	小于或等于
$\frown$	弧	$\rightarrow$	逼近于
$\triangle$	三角形	lim	極限
$\perp$	垂直于	$\stackrel{\parallel}{=}$	平行且等于
$\parallel$	平行于	$\cong, \equiv$	符合于,全等于
$\sim$	相似于	$\odot$	圓
$\odot$O	以O爲心之圓	(A, B)	由A至B之距離
$\odot$BAC	過A,B,C三點之圓	{ABC}	B介乎A,C之間
$\odot$(O,r)	以O爲心而半徑等于r之圓		
$\supset$	隱含(謂右方乃左方必然之結果)		
$\supset\!\subset$	必須且但須(謂左右互爲因果)		
$\ni$	屬于(謂左類屬于右類)		

本書表$\triangle ABC$之

三角大小,用$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$;

三邊長,用a, b, c; 周用$2s$;

三高線長,用h_a, h_b, h_c;

三中線長,用m_a, m_b, m_c;

三角之平分線長(止于對邊),用t_a, t_b, t_c;

內切圓及三傍切圓之半徑,用r, r_1, r_2, r_3,

外接圓之半徑長,用R;

內心,用I, 三傍心,用I_1, I_2, I_3;

外心,用S(或O);

垂心,用H;

重心,用G;

九點圓心,用N;

面積用$\triangle$;

凡未加詮釋而竟用之之時,皆作如是解.

目　　錄

首篇　徵引錄

第一章　導言

第三章 初中平面幾何摘要

第一篇　推證通法

第一章　順證法及反證法

第二章　逆定理

第三章　綜合法與分析法

第四章　歸納法

第二篇　證題雜術

第一章　相等

第二章　垂直

第三章 平行

第四章 和差

第五章 代數證法

第六章 共線點與共點線

第七章 共圓點與共點圓

第八章 不等

第三篇　幾何計算

第一章　線段計算

第二章　相似形

第三章　多邊形之面積

第四篇　作圖

第一章　基礎

第二章　方法

第三章　代數分析法

第五篇　軌跡

第一章　釋類

第二章　軌跡之意義及軌跡定理之證法

第三章　描跡

第四章　軌跡問題

第五章　軌跡應用

第六篇　極大極小及極限

第一章　極大極小

第二章 極限

高中平面幾何教科書

首篇 徵引錄

第一章 導言

§1. **幾何論證之本源**. 稍習幾何者,莫不知幾何之論證,言皆有本義皆有源. 每見一定理必追求其所本之前提,而此所本之前題又必有其所本而後可. 雖然溯而上之,極其所至,始初之論,又何所本哉? 故必定一命題,或一羣命題,不求證明,以爲一切定理之基礎,而不再根究其理由,是爲公理 (axioms or postulates), 即不證明之命題 (unproved propositions) 也.

幾何重顯明貴固定,絕不許有模稜兩可之詞存乎其間,故正名尙焉. 每遇一名詞,必問"作何解?"而此解之之名詞,又必有解而後可. 如此遞推,終必有未解之名詞存於定義之中. 故必定一名詞,或一羣名詞,不加定義,以爲解釋一切名詞之本源. 是爲原名 (primary notions), 即不定義之名詞及關係 (undefined elements and relations) 也.

---

* 本篇之設,僅備徵引,不必講授.

原名既定,公理既立,然後以公理爲論據,用邏輯爲工具,推求餘論(定理)以緊其緒,轉立新名(定義)以約其辭.舉凡可以吾公理證驗之論,雖微必錄;于吾公理無徵驗者,雖愛必捨.其于一切名詞(或關係)之觀念亦然,可以吾之原名解釋者則用之,其不可者,口不道心不想也.

是故公理者,無說之論也,而衆說據焉;原名者,無義之名也,而萬義生焉.然則所謂幾何之爲學,言皆有本義皆有源者,不過謂本源于公理及原名耳,非能別有絕對之本源也.

§2. 公理,原名之選擇及幾何之派別.

如上所論,所謂公理者,原屬幾何家任意設定,使習此者同此根據而已.故亦有稱公理爲設理(assumptions)或約言(conventions)者.所謂設理者,假設其眞確之謂也.所謂約言者,治斯學者相約而承認之之謂也.

幾何之全部既建基于公理,而公理之選擇又可以人意爲之.故每選一羣公理,可建設一種幾何;別選一羣公理,亦可另成一幾何.公理之選擇千百其方,幾何之門類亦難以數計.中等學校所授之幾何,係幾何之一種,名曰歐几里得幾何(Euclidean geometry).于各種幾何中頗有簡單便利粗近宇宙現象之目.

§3. 歐几里得幾何.

『幾何之學,不知託始何國. 或云埃及,或云巴比倫. 博考之士稱其造自天竺(印度). 迄無定論. 今所傳最古者:周定王時他勒(Thales of Miletus, 640—546 B.C.)著是學於希臘,景王時閉達臥剌(Pythagoras, 580—500 B.C.)修明其術,元王時依卜加(Hippocrates of Chios, 約當 430 B. C.)造作諸題,始有成書,皆幾何法也. 顯王赧王時有歐几里得(Euclid, 約當 300 B. C.)者,不知何許人,傳是學于亞力山大(埃及城名),述樂律算數等書. 尤著名者曰幾何原本(Elements),較昔術尤精. 後人宗之,莫可訾議.』註1

此所謂「後人宗之莫可訾議」之傑作,擅思想之權威者垂二千年. 至近百年間,幾何之流派迭出,異說紛紜,各道其道. 蓋始初所提之公理不同,嗣後演變之定理自異,不足怪也. 雖然,因此益知一種幾何之全部本源盡在公理,公理失之毫釐,推論容或差以千里. 故基礎不可不愼也.

本著所由建設之基礎,約見次章註2 其能由此推

註1. 明儒徐光啓與西人利瑪竇合譯幾何原本(萬曆丁未 1607 出版)利序原文.

註2. 其綱要多從 Forder, The foundation of Euclidean geometry. 惟先直線公理,後平面公理,稍不同耳.

證之定理,而學者于初中已習者,則別行彙錄,另爲一章.各名詞之定義,苟非初中教科書之所不備,或備而不妥善,或雖妥善而名義不甚通行一致者,概從略焉.

第二章 基本理義

§4. 點. 有物焉,不加定義,名之曰點(points),表之以A, B, C,….

二點A, B或同或否.

公理I. 最少必有二點不相同者.

§5. 一點對于二點間之關係及順序

公理. 一點B對于二點A, C容或有一關係焉,不加定義,名之曰B介乎A,C之間(B lies between A and C),或曰{ABC}之順序(order{ABC})成立,或簡單表示之爲{ABC}.

A B C

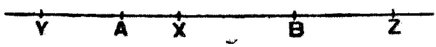
公理II. 若{ABC}成立,則三點各不相同.

公理III.[註] 若{ABC}成立,則{CBA}亦成立而{ACB},{BCA},{BAC},{CAB}皆不成立.

註. 俟直線與圓之意義規定後,吾人據此當知所謂直線者,非若圓之循環無端也.

§6. 直線及定線公理.

定義. 設A, B爲不同二點,舉凡與A, B二點成順序{AXB}之一切X點,成順序{YAB}之一切Y點,成順序{ABZ}之一切Z點,併A及B二點,合成一類,稱爲AB直線 (straight line AB). 屬于此直線之點,慣稱爲在AB線上,或曰AB線過該點等.



第 1 圖

公理IV. 二直線有二公共點者必完全一致.

故通稱「二點決定一直線」,又曰「二直線僅可有一交點」

§7. 延長線及延長公理.

定義. 設A,B爲不同二點,舉凡與A,B二點成順序{ABZ}之一切點Z,合成一類,稱爲AB之延長線 (prolongation of AB).

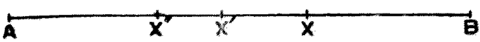
公理V. 設A,B爲二不同點,則AB之延長線上必有一點Z.

第 2 圖

AZ之延長線上自有一點Z′, AZ′之延長線上自亦有一點Z″,…. 故通稱「一直線可以無限延展」.

§8. 線段及密佈公理.

定義. 設A,B為不同二點,舉凡與A,B二點成{AXB}之一切點X,合為一類,稱為AB線段(line-segment AB), A,B稱為該線段之兩端. 線段不兼兩端;兼兩端則稱為線節(line-interval).



第 3 圖

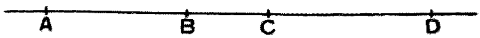
公理 VI. 設A,B為不同二點,則AB線段必有一點X.

夫AB線段既有一點X, AX線段自亦有一點X′, AX′線段自亦有一點X″,…. 故通稱曰「線段上之點無限之多,且散佈稠密」. 蓋謂無間而無點存焉也.

§9. 共線點之順序. 一點二點無所謂順序. 共線三點A, B, C之順序或為{ABC}(即{CBA})或為{ACB}(即{BCA}),或為{BAC}(即{CAB}),三者必居其一,且祇居其一,則§6之定義與§5之公理III既分別言之矣. 若夫共線四點,究有所謂順序否? 如其

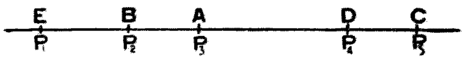
有之,其順序若何?　此中義理應另行標舉焉.

定義.　所謂A,B,C,D成{ABCD}之順序者,謂{BCD},{ACD},{ABD},{ABC}四順序皆成立也.



第 4 圖

定義.　所謂$P_1\ P_2\ P_3, \cdots, P_n$諸點成$\{P_1 P_2 P_3 \cdots P_n\}$之順序者,謂每當$i<j<k$時則$P_i, P_j, P_k$三點之順序均爲$\{P_i\ P_j\ P_k\}$也.



第 5 圖

公理 VII.　任意n個共線點A, B, C,…吾人必可易其名稱使成順序$\{P_1 P_2 P_3 \cdots P_n\}$.

§ 10.　符合及符合公理.　A, B二點對于C, D二點容或有一關係焉,不加定義,名之曰(A, B)符合于(C, D) (congruent),表之以(A, B) ≅ (C, D).

此即通常所謂「(A, B)之距離(distance)等于(C, D)之距離」也.

第 6 圖

公理 VIII.　若(A, B) ≅ (C, D), (C, D) ≅ (E, F);則(A, B) ≅ (E, F).

此即通常所謂「等于同長之長互等」也．至于「等于等長之長互等」但用此公理二次即可證之．

公理 IX． $(A, B) \cong (B, A)$, $(A, B) \cong (A, B)$.

前半猶云「二點間之距離不論方向」註 後半猶云「凡距離皆自等」．

§11．半線及遷線公理．

定義． 設 A, B 為不同二點，則 AB 線段上之一切點 X，AB 延長線上之一切點 Y，併 B 點，合成一類，稱為 AB 半線 (half line) 或曰射線 (ray)，以 A 為其端點 (end) 或曰源點 (origin)．

端點非半線之點．

AB 直線被 A 分為二半線，其一為 AB 半線，其一為 BA 之延長線，同以 A 為端點．

第 7 圖

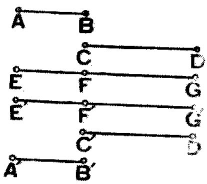
第 8 圖

公理 X． 設 C, D 為任意不同二點，則任意一 AB 半線上必有且惟一點 E 能使 $(A, E) \cong (C, D)$.

此猶云可將 CD 線段遷而置之 AB 半線之上，使一端 (C) 疊合于 A，且彼端 (D) 有一定着落 (于 E) 也．

註．本書除有特別聲明者外，大抵皆作如是觀．

§ 12. 距離之和及加法公理.



第 9 圖

定義. 若 $(A,B)\cong(E,F)$, $(C,D)\cong(F,G)$, 且 $\{E\,F\,G\}$ 之順序成立, 則稱 (E,G) 爲 (A,B), (C,D) 之和 (sum), 表之以 $(A,B)+(C,D)=(E,G)$, 讀之曰「(A,B) 加 (C,D) 等于 (E,G).」

公理 XI. 若 $(A,B)\cong(A',B')$, $(C,D)\cong(C',D')$, 則 $(A,B)+(C,D)=(A',B')+(C',D')$.

此猶云「等距離加等距離其和必等」也. 如 AB 即 A′B′, CD 即 C′D′, 則 EG = E′G′ 無異謂「距離之和惟一而已」.

定義. 當 $(A,B)+(C,D)=(E,G)$ 時, 又稱 (A,B) 爲 (E,G) 與 (C,D) 之差 (difference), 表之以 $(E,G)-(C,D)=(A,B)$.

「等距離減等距離其差必等」, 亦公理 XI 應有之義. 他如加法之交換律及結合律, 亦可用以上諸公理證明之. 皆無須認其爲公理, (如一般幾何書稱之爲普通公理者然), 徒增不證明之命題也.

§ 13. 直線上之方向.

定義. 共線 n 點排成順序 $\{P_1\,P_2\,P_3\cdots P_n\}$ 後吾人往往將距離 (P_i,P_j) 分爲二類:

當 $i<j$ 時之 (P_i, P_j) 屬于同一類,

當 $i>j$ 時之 (P_i, P_j) 屬于另一類,

于是稱同類之距離爲同向 (in the same sense), 異類之距離爲反向 (in opposite senses). 至于稱何類爲正 (positive) 何類爲負 (negative) 可聽人爲之.

如第5圖中之 (E, B), (E, A), (E, D), (E, C), (B, A),… 皆同向, (C, D), (C, A), (C, B), (C, E), (D, E), … 亦同向, 而彼此則反向.

§ 14. 形. 符合形.

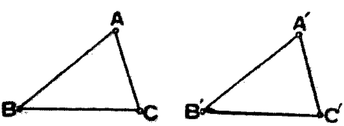
定義. 點之類亦名形 (figure). 若用 X 代表該形之任意一點,則該形可以 [X] 表之,示其爲此種點之集合也.

定義. 設 A, B, C 爲三點, A′, B′, C′ 爲三點,

$$(A, B) \cong (A', B'),$$

$$(B, C) \cong (B', C'),$$

$$(C, A) \cong (C', A'),$$



第 10 圖

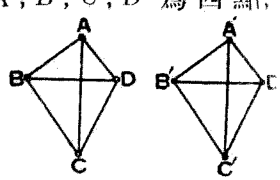
則稱三點形 (A, B, C) 符合于三點形 (A′, B′, C′), 表之以 $(A, B, C) \cong (A', B', C')$.

定義. 設 A, B, C, D 爲四點, A′, B′, C′, D′ 爲四點,

$$(A, B) \cong (A', B'),\quad (C, D) \cong (C', D'),$$

$$(A, C) \cong (A', C'),\quad (B, D) \cong (B', D'),$$

$$(A, D) \cong (A', D'),\quad (B, C) \cong (B', C'),$$



第 11 圖

則稱 $\{ A, B, C, D \} \cong \{ A', B', C', D' \}$.

以上係三點形與三點形符合,四點形與四點形符合之定義. 若形之點數較多,(不論有窮多或無窮多),其兩形符合之意義皆係做此規定者.

定義. 若一形[X]中之點與一形[Y]中之點有法使之一一對應,(即每逢[X]中有一點X,[Y]中即有惟一的一定的點Y與之對應,逆之亦然),且[X]中任意二點X_1, X_2與其對應點Y_1, Y_2之間常有$(X_1, X_2) \cong (Y_1, Y_2)$之關係,則稱兩形相符合 (congruent), 表之以$[X] \cong [Y]$.

據此,若[X]形$\cong$[Y]形, [Y]形$\cong$[Z]形,則[X]形$\cong$[Z]形,乃當然之結果.

通常所謂可以互相疊合 (superposable) 之兩形,其實何嘗眞移動而層疊之,亦不過謂其對應距離悉相等耳. 可見可疊合云者,特上定義所稱符合之別名耳.

§ 15. 直線形及其符合公理.

定義. 形中之點悉屬于同一直線者爲直線形 (linear figure).

第 12 圖

公理 XII. 形之符合於直線形者必爲直線形.

有此,而後 (A,B)≅(A′,B′) 無異于 AB 線段 ≅A′B′ 線段矣. 故以後或簡寫作 AB=A′B′.

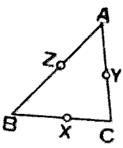
§ 16. 不共線點及其存在公理.

公理 XIII. 必有三點不共線者.

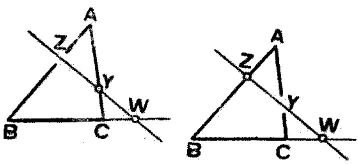
此猶云「吾人所論之點,不限在同一直線」也.

§ 17. 三角形及截割公理

定義. 設 A, B, C 爲不共線三點,則 BC 線段上之一切點 X, CA 線段上之一切點 Y, AB 線段上之一切點 Z, 併 A, B, C 三點,共成一類,稱爲 ABC 三角形 (triangle ABC), 簡或表之以 △ABC. BC, CA, AB 三線段各爲該三角形之一邊 (side), A, B, C 三點爲其頂點 (vertices).



第 13 圖



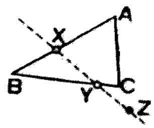
第 14 圖

公理 XIV.[註] (Pasch's axiom). 與三角形一邊之延長線及第二邊相交之直線,必與第三邊相交.

註. 此之謂截割公理 (transversal axiom). Pasch 首用之. Peano 修訂焉. 注意此所謂「邊」云者線段也,兩端不與焉.

§ 18. 平面及定面公理.

定義. 設 A, B, C 爲不共線三點,則凡與△ABC之二點 (X, Y) 共線之一切點 Z, 合成一類,稱爲 ABC 平面 (plane ABC).



第 15 圖

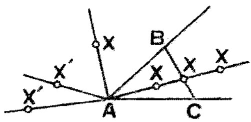
公理 XV. 二平面有三公共點不共線者必完全一致.

故通常謂「不共線三點決定一平面」.

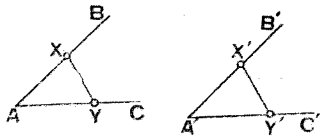
定義. 共面點所成之形爲平面形 (plane figure).

§ 19. 角及遷角公理.

定義. 設 AB 半線與 AC 半線不共線,則二半線上之點,併 A, 共成一類,稱爲 BAC 角 (angle), 以 ∠BAC 表之. 凡不屬于 ∠BAC 之一切點 X, AX 半線與 BC 線段相交者,合爲一類,稱爲 ∠BAC 之內部 (interior); 不相交者合爲一類,稱爲 ∠BAC 之外部 (exterior). AB 及 AC 二半線各稱爲 ∠BAC 之邊 (side). A 稱爲頂點 (vertex).



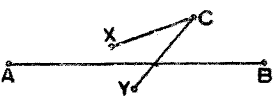
第 16 圖



第 17 圖

據此,則角亦形也. 故$\angle BAC \cong \angle B'A'C'$之必須且勝任之條件為: 每逢AB半線上有一點X, AC半線上有一點Y, 則A' B', A' C'上必有一定的對應點X', Y'能使$(A, X) \cong (A',X'),(A, Y) \cong (A',Y'), (X, Y) \cong (X',Y')$. 逆之亦眞.

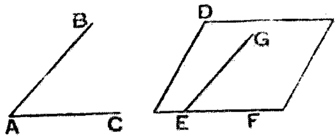
定義. 設A,B,C為不共線三點, X,Y為同平面上之點不在AB直線上,若CX線段與AB直線無公共點,則稱X與C在AB直線之同側;若CY線段與AB直線有公共點,則稱Y與C在AB直線之異側. 凡與C在AB直線同側之一切點X, 異側之一切點Y,各成一形,各稱為一半面(half-plane), 同以AB直線為邊(side).



第 18 圖

公理 XVI. 設$\angle BAC$為一角, D, E, F為不共線三點,則DFF平面上必僅有一半線EG與D在EF之同側,

能使$\angle BAC \cong \angle GEF$.

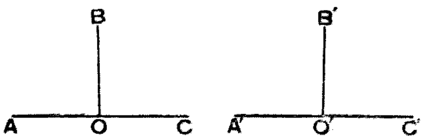


第 19 圖

此猶云「于一半線 EF 上,在其一定側,不可作二角等于一定角」也. 俗書謂「角之一部分不等于全體」亦近此意.

§ 20. 垂直線及直角公理.

定義. 若順序{AOC}成立,且$\angle AOB \cong \angle BOC$,則$\angle AOB$及$\angle BOC$各稱爲一直角 (right angle). 直角之二邊所在之直線稱爲互相垂直 (perpendicular).



第 20 圖

公理 XVII. 凡直角皆互相符合.[註]

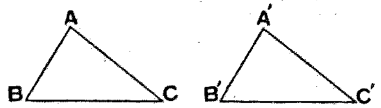
§ 21. 符合三角形公理.

公理 XVIII. 設 A, B, C 爲不共線三點, A′, B′, C′ 亦爲不共線三點,若

$(A, B) \cong (A', B')$, $(B, C) \cong (B', C')$, $(C, A) \cong (C', A')$,

註. 此即 Euclid 之 postulate 4. 俗書利用平角相等以證直角相等者皆別有其默認之公理,不足爲訓也.

則　$\angle BAC \cong \angle B'A'C'$
而以 B,A,C 爲 B′,A′,C′ 之對應點.



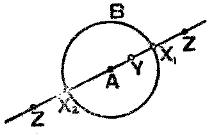
第 21 圖

此猶云「∠ BAC 可以 (B, A), (B, C), (C, A) 三距離縮緊而固定之」也.

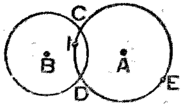
此時 $\triangle BAC \cong \triangle B'A'C'$ 甚易知也.

§ 22. 圓及交圓公理.

定義. 設 A,B 爲一平面上不同二點,舉凡此平面上之一切點 X, 能使 $(A, X) \cong (A, B)$ 者,合成一類 [X], 稱爲一圓 (circle), 表之以 ⊙A 或 ⊙(A, AB); A 稱爲圓心 (centre), 每 AX 線段稱爲一半徑 (radius). 若 AX_1 與 AX_2 爲共線二半徑,則 X_1X_2 線段稱爲一直徑 (diameter), 各直徑上之點 Y,合成一類 [Y],稱爲圓之內部(interior), 各直徑延長線上之點 Z,合成一類 [Z], 稱爲圓之外部 (exterior).



第 22 圖

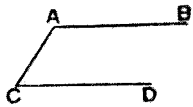


第 23 圖

公理 XIX. 同平面有二圓, ⊙A 及 ⊙B, 若此圓, ⊙A, 含有彼圓, ⊙B, 內部一點, I, 及外部一點, E, 則二圓必有二公共點, C,D.

§ 23. 平行線及平行公理.

定義. 同平面而無公共點之二直線謂之平行 (parallel). 當 AB, CD 二直線平行時,表之以 AB ∥ CD. 若 B, D 在 AC 之同側,則稱 AB 與 CD 爲同向平行;否則爲反向平行. 如圖,AB 與 CD 爲同向平行, AB 與 DC 爲反向平行.



第 24 圖

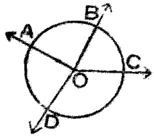
公理 XX.[註] 設 A, B, C 爲不共線三點,則必僅有一直線,含 C 點而平行于 AB 直線.

§ 24. 共圓點之順序及共點線之順序.

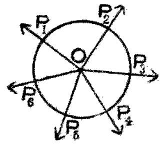
定義. 設 A,B 爲 ⊙O 上二點,則 ⊙O 上之其他點在 AB 直線之同側者,合成一類,稱爲一弧 (arc), 以 A,B 爲端點 (ends); 他側之點亦成一弧,兩弧共軛 (conjugate). 當 AB 爲直徑時,共軛兩弧各稱爲一半圓 (semicircle); 當 AB 非直徑時,則在 ∠AOB 之內部者爲劣弧 (minor arc), 在 ∠AOB 外部者爲優弧 (major arc). 含 C 點之一弧往往稱爲 ACB 弧, 表之以 $\overset{\frown}{ACB}$, 此不論其爲優爲劣或半圓也. 若但云 AB 弧或 $\overset{\frown}{AB}$, 則指劣弧言.

定義. 若 A, B, C, D 爲共圓四點,而 B,D 在 AC 直線之異側,則稱 A,C 與 B,D 互相隔離 (separate).

註. Euclid 平行公理見作圖篇第一章 §95.



第 25 圖



第 26 圖

定義. 設 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 爲同圓上之點,無一在 $\overset{\frown}{P_1P_2}$, $\overset{\frown}{P_2P_3}$, $\overset{\frown}{P_3P_4}, \cdots$, $\overset{\frown}{P_{n-1}P_n}$, 或「$\overset{\frown}{P_1P_2P_n}$ 之共軛弧」上者,而圓上之其他點則必在此 n 弧之一上,則稱此 n 點成 $P_1P_2\cdots P_n$ 之循環順序 (cyclic order).

任意 n 個共線點必可成立一種直線順序,則公理 VII 既言之矣. 任意 n 個共圓點必可成立一種循環順序,亦可用算學歸納法證之.

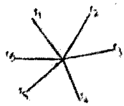
同平面共源點 O 之諸半線間之順序可用該平面上一⊙O 與諸半線相交之交點間之順序定之(第26圖).

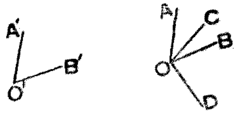
§ 25. 平面上之方向. 據上節所言,同平面上 n 個共源點之半線必列成一循環順序 $r_1 r_2 \cdots r_n$ (第27圖). 故同平面上共頂之角,可倣 § 13 之法分爲二類以定其同向抑異向. 同圓上諸弧之同向反向亦可用同法定之.

其不共頂之角,可藉作平行線之法以比較之. 于

是同平面上任意二角之同向及反向註可得而定矣.

如圖 $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$, 皆係同向平行,因認 $\angle A'O'B'$, $\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle COB$, $\angle AOD$, $\angle BOD$, $\angle COD$ 皆同向.

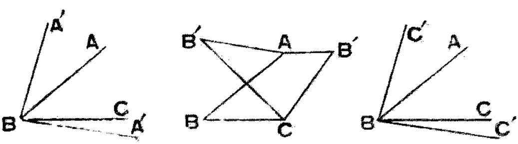




第 27 圖 第 28 圖

在此種分類法之下:—

$\angle ABC$ 與 $\angle A'BC$ 究爲同向抑反向,全視 A 與 A' 在 BC 之同側抑異側而定. $\angle ABC$ 與 $\angle AB'C$, $\angle ABC$ 與 $\angle ABC'$ 亦然.



第 29 圖

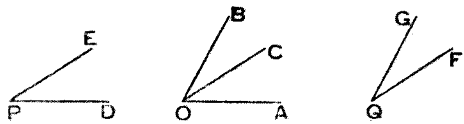
符合形之同向反向,則用其對應角之同向反向以定之. 不在一圓上二弧之同向反向則用其圓心角之同向反向以定之.

註. 本書除有特別聲明外,角皆不論方向,故 $\angle AOB = \angle BOA$.

§26. 角之大小加減.

定義. 若$\angle AOB$內部有一半線OC能令$\angle AOC\cong\angle DPE$, 則稱$\angle AOB$大于$\angle DPE$, 或曰$\angle DPE$小于$\angle AOB$, 表之以

$$\angle AOB>\angle DPE \text{ 或 } \angle DPE<\angle AOB.$$



第 30 圖

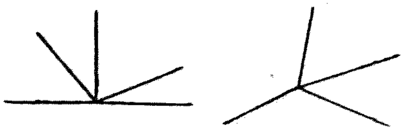
定義. 若$\angle AOB$內部有一半線OC能令$\angle AOC\cong\angle DPE$, $\angle COB\cong\angle FQG$, 則稱$\angle AOB$為$\angle DPE$與$\angle FQG$之和(sum), 表之以

$$\angle AOB=\angle DPE+\angle FQG \text{ 或 } \angle AOB-\angle DPE=\angle FQG.$$

定義. 角之大于直角者稱為鈍角(obtuse angle), 小于直角者稱為銳角(acute angle).

本書所謂角,除有特別聲明者外,皆限于銳角,直角,鈍角. 外此當于三角法中求其義. 惟應加法之需要有時亦須用較大之和. 如謂下列左圖各角之和為二直角或一平角(straight angle), 右圖各角之和為四直角

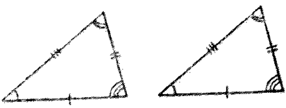
或一周角(perigon)是也.



第 31 圖

第三章 初中平面幾何[註]摘要

§27. **二三角形**具下列條件之一者必相符合.



第 32 圖

(i) 三邊彼此相等 (s.s.s.);

(ii) 二邊及夾角彼此相等 (s.a.s.);

(iii) 二角及夾邊彼此相等 (a.s.a.)

§28. **同平面上二圓之關係**共分五種:—

(i) 半徑和 < 連心線者,二圓互相在外;

(ii) 半徑和 = 連心線者,二圓互相外切;

(iii) 半徑和 > 連心線 > 半徑差者,二圓必相交于二點;

(iv) 連心線 = 半徑差者,小圓必內切于大圓;

(v) 連心線 < 半徑差者,小圓必全容于大圓內;

逆之亦眞.

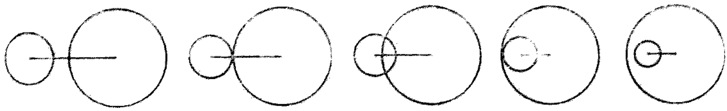
註. 吾人所論之點究限在一平面否? 如限在一平面內,即無異于承認—

公理. 一切點皆屬于同一平面.

否則無異于承認—

公理. 必有四點不屬于同一平面.

本著以後所論之點(或點之集合),遇發生疑義時,概作爲屬于同一平面.



第 33 圖

二圓相交時,其公弦被連心線(或其延長線)垂直平分.

二圓外切(內切)時,切點在連心線(延長線)上.過此點之公切線垂直于連心線.

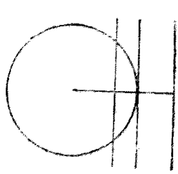
§29. **一直線與一圓之關係**共分三種:——

(i) 與圓心距離[註] < 半徑者交圓(于二點);

(ii) 與圓心距離 = 半徑者切圓(即惟一交點);

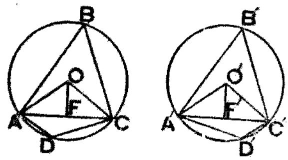
(iii) 與圓心距離 > 半徑者在圓外(即無交點);

逆之亦眞.



第 34 圖

註. 點與直線之距離,即由該點至該直線之垂線,其垂足稱爲該點在該線上之正射影.



第 35 圖

§30. 等圓(或同圓)上

二劣弧 $\overset{\frown}{ADC} \gtreqless \angle \overset{\frown}{A'D'C'}$

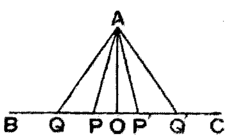
全視圓心角 $\angle AOC \gtreqless \angle A'O'C'$ 而定,

亦視弦 $AC \gtreqless A'C'$ 而定,

又視優弧 $\overset{\frown}{ABC} \gtreqless \overset{\frown}{A'B'C'}$ 而定;

凡此諸端皆可互相推斷者也.

§31. 一點 A 至一直線 BC

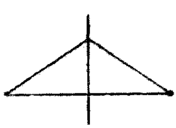


第 36 圖

(i) 必可作且僅可作一垂線 AO;

(ii) 所作諸線 AO, AP, AQ, … 中以 AO 爲最短.

§32. 一線段



第 37 圖

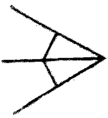
(i) 必有惟一之中點;

(ii) 必有惟一之垂直平分線;

(iii) 垂直平分線上之點,與兩端等距離

(iv) 兩端等距離之點,在垂直平分線上

§33. 一角



(i) 必有惟一之平分線;

(ii) 平分線上之點距兩邊等遠;

(iii) 距兩邊等遠之點,必在平分線上[註].

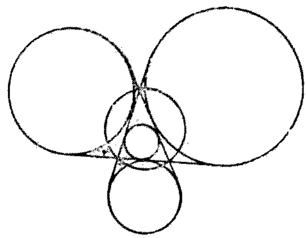
第 38 圖

§34. 一三角形 ABC

(i) 必有一外接圓,過三頂點,
　　其圓心稱爲外心;

(ii) 必有一內切圓,切于三邊,
　　其圓心稱爲內心;

(iii) 必有三傍切圓,每圓切于
　　一邊及他二邊之延長線,
　　其圓心稱爲傍心;



第 39 圖

(iv) $\angle B \gtreqless \angle C$ 全視 $AC \gtreqless AB$ 而定,逆之亦眞;

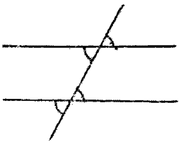
(v) $\angle A+\angle B+\angle C=2\text{rt.}\angle\text{s}$;

(vi) 外角等于二內對角之和,故大于每一對角;

(vii) $AB+BC>AC$.

註. 角之邊爲半線,由一點至邊之垂線足須落于邊上而不落于邊之延長線上. 若無此限制,則與相交二直線 AOB 及 COD 距離相等之點,可在 $\angle AOC$, $\angle COB$, $\angle BOD$, $\angle DOA$ 四角平分線中之任意一線上.

§35. 二平行線與一割線所成之



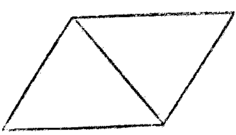
(i) 同位角相等,
(ii) 內錯角相等,
(iii) 外錯角相等,
(iv) 割線同側二內角相補,
(v) 割線同側二外角相補;

第 40 圖

逆之,二直線與一割線所成之角若有上列各情形之一,則二直線互相平行.

§36. 平行四邊形之

(i) 對邊平行(定義);
(ii) 對邊相等;
(iii) 對角相等;
(iv) 對角線互相平分;
(v) 鄰角互為補角.



第 41 圖

四邊形具下列條件之一者為平行四邊形:

(i) 每對邊均平行(定義);

(ii) 每對角均相等;

(iii) 每對邊均相等;

(iv) 一對對邊相等且平行;

(v) 對角線互相平分.

§37. n邊形之

(i) 內角和 $=(n-2)\cdot 2$rt.$\angle$s;

(ii) 外角和 $=4$rt.$\angle$s;

(iii) 每邊 $<$ 其餘各邊之和.

第 42 圖

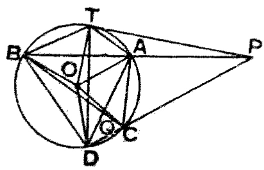
§38. 圓周角,圓內角,圓外角.

圓周角 $\angle BAD=\angle BCD=\frac{1}{2}\angle BOD$;

圓內角 $\angle BQD=\angle BCD+\angle CDA=\frac{1}{2}(\angle BOD+\angle COA)$;

圓外角 $\angle BPD=\angle BCD-\angle CBA=\frac{1}{2}(\angle BOD-\angle COA)$;

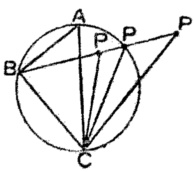
弦與切線間之角 $\angle ATP=\angle ABT=\frac{1}{2}\angle AOT$.



第 43 圖

§39. 一點P與一圓ABC之關係.

(i) P在圓內,圓上,或圓外,全視其與圓心之距離小于,等于,或大于半徑而定.



第 44 圖

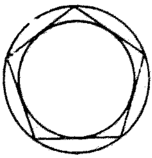
(ii) 當P,A在BC之同側,

若P在弓形BAC上,則 $\angle BPC=\angle BAC$;

若P在弓形BAC內,則 $\angle BPC>\angle BAC$;

若P在弓形BAC外,則 $\angle BPC<\angle BAC$.

§40. 正n邊形



第 45 圖

(i) 各角相等各邊相等(定義);

(ii) 可作外接圓;

(iii) 可作內切圓;

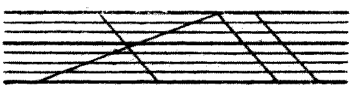
(iv) 每內角 $=(2-\frac{4}{n})$rt.$\angle$s;

(v) 每外角 $=\frac{4}{n}$rt.$\angle$s.

圓內接等邊多邊形 (equilateral polygon) 爲正多邊形 (regular polygon).

圓外切等角多邊形 (equiangular polygon) 爲正多邊形.

§41. (i) 諸平行線若將一割線均分,則必將任何割線均分;



第 46 圖

(ii) 一線段必可均分之爲任意若干等份;

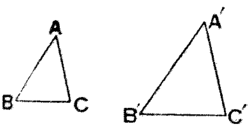
(iii) 平行線必將各割線截成比例線段;

(iv) 一線段必可分爲二段,令其比等于定比.

§42. **互等角三角形**, ABC 與 A'B'C' 中

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{CA}{C'A'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

逆言之,二三角形 ABC, A'B'C' 若具下列條件之一,則必互等角.



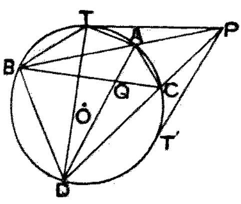
第 47 圖

(i) $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$(定義);

(ii) $\angle A=\angle A'$, $AB:A'B'=AC:A'C'$;

(iii) $BC:B'C'=CA:C'A'=AB:A'B'$.

§43. **由一點 P 至一 ⊙O**, 作切線 PT, PT', 割線 PAB, PCD, 則



第 48 圖

(i) $PT=PT'$;

(ii) △PAC 與 △PDB 互等角,

△PAD 與 △PCB 互等角;

(iii) △PAT 與 △PTB 互等角;

(iv) $PA\cdot PB=PC\cdot PD=PT^2=PT'^2$;

(v) $\angle ABD+\angle ACD=2$rt.$\angle$s.

二弦 AD,CB 交于圓內 Q 點時

(i) △QAC 與 △QBD 互等角, △QAB 與 △QCD 互等角;

(ii) $QA\cdot QD=QC\cdot QB$.

第一篇
推證通法

第一章 順證法及反證法

§44. 順證法及反證法之意義. 凡定理皆有題設題斷二部,而一定理之意義僅在

題設隱含[註]題斷,

以記號表之可寫作

題設 ⊃ 題斷.

然一部幾何之中,諸般定理悉以前此之公理及定理爲根據,故定理之意義實係

$$\left.\begin{array}{l}\text{本題題設}\\\text{前此公理}\\\text{前此定理}\end{array}\right\}\supset\text{題斷}.\qquad(1)$$

順證法 (direct method) 者由題設推及題斷者也.其形式有如

題設 ⊃ A, A ⊃ B, B ⊃ C, C ⊃ 題斷,

∴ 題設 ⊃ 題斷.

註. 英文 implies, 記號從 Russell.

(1) 式之意義又可寫作

$$\left.\begin{array}{l}\text{題斷反面}\\ \text{前此公理}\\ \text{前此定理}\\ \text{題設}\end{array}\right\}\supset \begin{array}{l}\text{一結果,為題設或前此公理}\\ \text{定理所不容者.}\end{array}\qquad(2)$$

換言之: 題斷一假,便會出錯,所以題斷不能假,那就是題斷真了. 此之謂反證法 (indirect method) 註. 其形式有如

題斷反面 $\supset$ A,　A $\supset$ B,　B $\supset$ C,

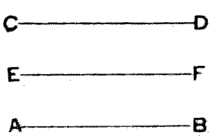
今 C 與事實不符,

故題斷反面不容成立,

即題斷成立.

§45. 反證法之方式. 欲知反證法之手續,請觀下例:

例 i. 若兩直線各與一直線平行,則兩直線互相平行.



題設: $AB \parallel EF$, $CD \parallel EF$.

題斷: $AB \parallel CD$.

證. 假定 AB 不平行于 CD,

第 49 圖

則 AB 與 CD 充分延長之後必相交

註. 亦名 reductio ad absurdum 意謂引出謬論也.

于一點P.

是AB及CD兩直線皆通過P而平行于EF也.

此實不合理: 因通過一點祗能作一直線平行于一定直線也.(公理XX)

故"AB不平行于CD"之假定不可通.

故　　$AB \parallel CD$.

由此可知反證法之手續約分四層:——

I. 假定"題斷不眞".

譬如題斷言$A=B$, 則假定$A \neq B$; 又如題斷言$AB \parallel CD$, 則假定AB不平行于CD.

II. 由此假定,依理推出誤謬之點.

如上題"兩直線通過同一點平行于同一直線"即係由暫時假定推出之謬論.

III. 因此判定此假定誤謬.

IV. 故題斷必眞,而定理證明矣.

習題1. 于AB直線之同側不得有C, D二點合于$AD=AC$, $BD=BC$兩條件者.

§46. 反證法中之分別反駁. 反證法既須從題斷之反面出發,而此反面又往往可分幾種情形,故宜分別反駁. 例如題斷言「相等」,反面爲「不相等」,可分爲「大于」及「小于」兩種,吾人必須將「大于」及

「小于」兩層皆分別駁斥其不合理,然後可斷言題斷之眞. 如

「不等于」 即 「大于或小于」

「不大于」 即 「等于或小于」

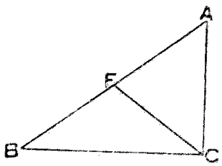
「不小于」 即 「等于或大于」

「不在圓內」即「在圓上或在圓外」

「不在圓上」即「在圓內或在圓外」

「不在圓外」即「在圓上或在圓內」

例 i. 直角三角形弦上之中線等于半弦.



第 50 圖

題設: $\angle ACB = rt.\angle$, F 爲 AB 之中點.

題斷: $CF = AF = BF$.

證. (i) 若 $CF > AF$, 則 $CF > BF$,

據 § 34 知 $\angle A > \angle ACF$, $\angle B > \angle BCF$,

相加得 $\angle A + \angle B > \angle ACB$.

是 $\angle ACB$ 爲銳角也,與題設不合.

(ii) 若 $CF < AF$, 則 $CF < BF$,

據 § 34 $\angle A < \angle ACF$, $\angle B < \angle BCF$,

相加得 $\angle A + \angle B < \angle ACB$.

是 $\angle ACB$ 爲鈍角也,與題設不合.

可知 CF 不得大于 AF, 亦不得小于 AF, 故 $CF = AF$.

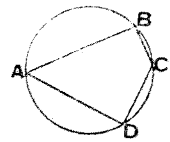
例 2. 四邊形對角之和為二直角者必可內接于一圓.

題設: ABCD四邊形之中

$\angle A+\angle C=2$rt.$\angle$s,

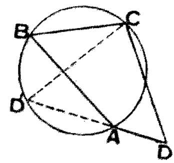
$\angle B+\angle D=2$rt.$\angle$s.

題斷: 過ABCD四點可作一圓.



第 51 圖

證. 過 A, B, C 三點必可作一圓(§34). 此圓與AD直線,除A外,必有第二交點D′(§29). 若D′即D, 則本定理證明矣. 如其非D, 則D′在AD直線上之位置不外下列四種(§6):—



第 52 圖

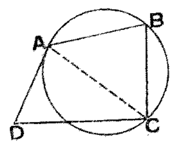
(I) D′在DA之延長線上.

如此則 $\angle CD'D=\angle ABC$

(同弧所含之角, §38).

據題設 $\angle ABC+\angle ADC=2$rt.$\angle$s,

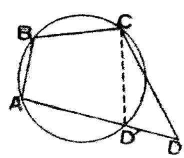
則是 $\angle CD'A+\angle ADC=2$rt.$\angle$s 也.



第 53 圖

此與三角形內二角之和小于二直角之理(§34)背謬.

(II) D′即A, 換言之即AD與圓相切于A.



第 54 圖

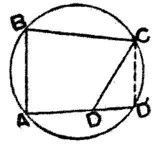
(III) D′在AD之間.

(IV)　D′在AD之延長線上.

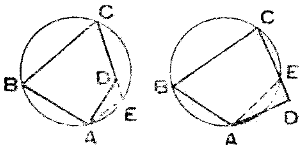
在此三種情形之下,用相似的方法,可導出同一荒謬之結果.

是以四種情形皆不可能.

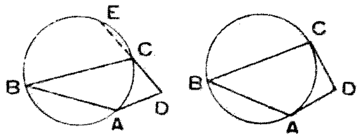
故惟一可能之情形厥爲AD與圓相交於D.



第55圖

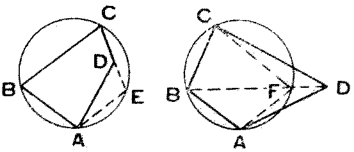


第56圖



第57圖

用分別反駁法時須將反面情形層層駁倒. 所駁苟有不周到之處,而遽爲結論者,皆不免疎忽之譏. 例如例2,習慣多就第56圖兩種情形反駁之,[註] 而不及第57圖之情形(D在⊙ABC外部,而CD, AD二線段皆不與圓相交)殊不得謂爲反駁周到也.



第58圖

必墨守此種傳統證法,則宜依左圖所示將證法略加修改,以免遺漏.

習題2. 三角形中對銳角之邊必小於其上中線

註　如 Godfrey—Siddons, Elementary Geometry, p.260; Young-Jackson, Plane Geometry, §257.

之二倍.

習題 3. 鈍角三角形中對鈍角之邊之半大于該邊上之中線.

第二章　逆定理

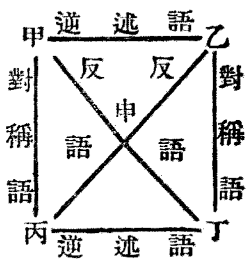
§47. **關係語.** 下列四語有密切關係,其相互之稱謂可以圖明之如下.

(甲)　若 'H', 則 'C';

(乙)　若 'C', 則 'H';

(丙)　若 'H' 假,則 'C' 假;

(丁)　若 'C' 假,則 'H' 假.



圖中聯兩語之線上之字即該兩語相互之稱謂也.

甲乙二者互爲逆述語 (converse statements) 可以並眞,可以同僞,亦可一眞一僞;丙丁亦然.

甲丙二者互爲對稱語 (opposite or contrapositive statements) 可以並眞,可以同僞,亦可一眞一僞;乙丁亦然.

甲丁二者互爲反中語 (the converse of the opposite) 眞則皆眞,僞則皆僞;乙丙亦然.

例如

甲. "若 $\angle ABC$ 與 $\angle A'B'C'$ 皆爲直角,則 $\angle ABC=\angle A'B'C'$" 之逆述語

乙. "若$\angle ABC=\angle A'B'C'$,則$\angle ABC$與$\angle A'B'C'$皆爲直角"不眞;其對稱語

丙. "若$\angle ABC$與$\angle A'B'C'$不皆爲直角,則$\angle ABC\neq A'B'C'$"不眞;其反申語

丁. "若$\angle ABC\neq\angle A'B'C'$,則$\angle ABC$與$\angle A'B'C'$不皆爲直角"則眞.

他如　甲. 若$AB=AC$,則$\angle ACB=\angle ABC$

之逆述語　乙. 若$\angle ACB=\angle ABC$,則$AB=AC$,

對稱語　丙. 若$AB\neq AC$,則$\angle ACB\neq\angle ABC$,

及反申語　丁. 若$\angle ACB\neq\angle ABC$,則$AB\neq AC$,

則皆成立.

可見一命題成立,其反申語必成立,然其逆述語[註]及對稱語則可眞可假.

§48. 逆定理及其製造法. 一定理之逆述語如果眞確,則此逆述語即稱爲該定理之逆定理(converse theorem). 一定理往往有許多逆述語,擇其眞者,往往可得許多逆定理.

例1. "等腰三角形底邊之垂直平分線必過頂點"可分析之爲:

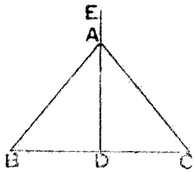
註. 平常譯 converse 爲「逆定理」,而復謂「一定理之逆定理未必眞」,殊爲不辭. 蓋既名之曰逆定理,即不得謂爲不眞;既不眞,即不得稱爲定理.

若　(1) $AB=AC$,

(2) $DB=DC$,

(3) $DE\perp BC$;

則　(4) DE 經過 A.



第 59 圖

將題設中任意一條件與題斷互換,各得一逆述語:

(i) 若 $AB=AC$, $DB=DC$, DE 經過 A, 則 $DE\perp BC$;

(ii) 若 $AB=AC$, $DE\perp BC$, DE 經過 A, 則 $BD=DC$;

(iii) 若 DE 經過 A, $DB=DC$, $DE\perp BC$, 則 $AB=AC$;

三語皆眞,各爲彼定理之逆定理.

例 2. 「二三角形若有三邊彼此相等,則三角亦彼此相等」即

(i) 「若 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$ 則 $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$」.

其逆述語凡一十有九,約之得五類:——

(ii) 若 $a=a'$, $b=b'$, $C=C'$, 則 $A=A'$, $B=B'$, $c=c'$;

(iii) 若 $a=a'$, $b=b'$, $A=A'$, 則 $B=B'$, $c=c'$, $C=C'$;

(iv) 若 $a=a'$, $B=B$, $C=C'$, 則 $A=A'$, $b=b'$, $c=c'$;

(v) 若 $a=a'$, $A=A'$, $B=B'$, 則 $C=C'$, $b=b'$, $c=c'$;

(vi) 若 $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$, 則 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$.

此五命題何者眞? 何者僞?

試寫出下列每定理之各種逆述語,並辨其眞僞.

習題 4. 二平行線爲一直線所割;則同位角相等,內錯角相等,外錯角相等,割線同側二內角互爲補角,割線同側二外角互爲補角.

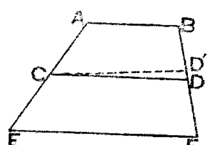
習題 5. 平行四邊形之對邊相等,對角相等,對角線互相平分.

習題 6. 矩形[註1]隣邊中點之聯結線圍成菱形[註2]或正方形.

§49. 逆定理之證法第一.

逆定理亦係定理. 凡可用以證明定理之方法,當然亦可用之以證逆定理. 然證逆定理時,有最通用之方法二,即反證法及還原法是也. 今先論反證法.

例 1. 一直線若將二平行線間之二線段分成比例,則該直線必平行于二平行線.



第 60 圖

題設: $AB \parallel EF$, 而 CD 與 AE 及 BF 交于 C 及 D, $AC:CE=BD:DF$.

題斷: $CD \parallel AB \parallel EF$.

證. 設 CD 不 $\parallel AB$, 可作 $CD' \parallel AB \parallel EF$, 交 BF 于 D'.

註 1. 四角爲直角之四邊形爲矩形 (rectangle).

註 2. 四邊相等之四邊形爲菱形 (rhombus).

于是 $AC:CE=BD':D'F,$

$\therefore \quad AC:AC+CE=BD':BD'+D'F.$

但題設 $AC:CE=BD:DF,$

$\therefore \quad AC:AC+CE=BD:BD+DF,$

$\therefore \quad BD':BD'+D'F=BD:BD+DF,$

$\therefore \quad BD=BD'.$

然 D, D′ 皆在 BF 之間,此與還線公理 (X) 不合.

故 $CD \parallel AB \parallel EF.$

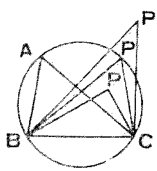
苟原定理之題設及題斷,類別面面周到且不重複,則逆述語必須眞確. 例如 § 39 之 (ii) 其題設將 P 之位置分爲在圓上,在圓內,在圓外三種;三種之外顯然不容有第四種,且此三種之間彼此又絕不相混. 其題斷將 $\angle BPC$ 之大小亦分 $=\angle BAC$, $>\angle BAC$, $<\angle BAC$ 三種,不漏不重. 此種定理之逆述語亦必眞確. 其證法如下:

例 2. 設 P 與 A 爲 BC 直線同側之點,

(1) 若 $\angle BPC=\angle BAC$, 則 P 在 ⊙ABC 上;

(2) 若 $\angle BPC>\angle BAC$, 則 P 在 ⊙ABC 內;

(3) 若 $\angle BPC<\angle BAC$, 則 P 在 ⊙ABC 外.



第 61 圖

證. (1) 若 P 不在圓上,則 P 在圓內或圓外.

設使 P 在圓內,則 $\angle BPC>\angle BAC$; § 39 之 (ii)

設使 P 在圓外,則 $\angle BPC<\angle BAC$; § 39 之 (ii)

皆與所設不合.

故P不得在圓內,亦不得在圓外,即必須在圓上.

(2) 若P不在圓內,則必在圓上或在圓外.

假令P在圓上,勢必$\angle BPC=\angle BAC$;　　§39之(ii)

假令P在圓外,勢必$\angle BPC<\angle BAC$;　　§39之(ii)

皆與所設不合.

故P不得不在圓內.

(3) 設使P不在圓外,則必在圓上,或在圓內.

P果在圓上,則$\angle BPC=\angle BAC$;　　§39之(ii)

P果在圓內,則$\angle BPC>\angle BAC$;　　§39之(ii)

皆與所設不合.

故P非在圓外不可.

此之謂窮舉證法. 原定理之題設及題斷各將可能情形道盡無遺,而又不重複者,其逆定理皆可用此法證其眞確.

認下列諸定理已經證明,試據之以證其逆定理:—

習題7. 由三角形一邊之中點作他邊之平行線必平分第三邊.

習題8. 由梯形[註]一腰之中點作線平行於底邊

註. 一對對邊平行之四邊形謂之梯形 (trapezoid), 平行二邊爲底 (base), 他二邊爲腰 (leg).

則必平分他腰.

習題 9. 等腰三角形頂角之平分線必平分底邊.

試就汝在初中所習幾何教科書,考察下列諸定理及其逆定理之證法,尋釋其間之線索.

習題 10. 弦之垂直平分線通過圓心.

習題 11. 圓與直線相切則過切點之半徑垂直于切線.

習題 12. 一直線平行于三角形之一邊必將他二邊分截成比例.

§50. 逆定理之證法第二. 原定理之證法中其各步如悉具可逆性,則逆定理之證明,僅顛倒原來各步之順序即得,是爲還原法.

例如: 原定理之證明設爲

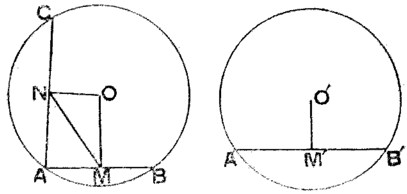
$\because A, \quad \therefore B, \quad \therefore C.$

若各步可逆[註]則逆定理之證明爲

$\because C, \quad \therefore B, \quad \therefore A.$

例 1. 左方爲原定理,右方爲逆定理. 左方「證「中各步可逆. 逆其順序而書之,則得右方證法.

註. 所謂「各步可逆」者謂「若 A, 則 B」之逆述語「若 B, A 成立,「若 B, 則 C」之逆述語「若 C, 則 B」亦成立也.



第 62 圖

在同圓或等圓之中，弦大者距圓心近.

題設: $\odot O$ 與 $\odot O'$ 相等,其中 $OM \perp AB$ 弦于 M, $O'M' \perp A'B'$ 弦于 M', $AB < A'B'$.

題斷: $OM > O'M'$.

證. 疊 $\odot O'$ 于 $\odot O$ 令 O', A' 落于 O, A, 而 B' 落于 C,與 B 在 OA 之異側, M' 落于 N.

$\because \quad AB < A'B'$,

即 $\quad AB < AC$.

$\therefore \quad AM < AN$.

$\therefore \angle ANM < \angle AMN$, (§34之iv)

$\therefore \angle ONM > \angle OMN$.

在同圓或等圓之中，距圓心較近之弦較大.

題設: $\odot O$ 與 $\odot O'$ 相等,其中 $OM \perp AB$ 弦于 M, $O'M' \perp A'B'$ 弦于 M', $OM > O'M'$

題斷: $AB < A'B'$.

證. 疊 $\odot O'$ 于 $\odot O$, 令 O', A' 落于 O, A, 而 B' 落于 C, 與 B 在 OA 之異側, M' 落于 N.

$\because \quad OM > O'M'$,

即 $\quad OM > ON$.

$\therefore \quad ONM > \angle OMN$, (§34之iv).

$\therefore \quad \angle ANM < \angle AMN$.

$\therefore \quad AM < AN$, (§34之iv).

∴ $OM>ON$(§34之iv),	∴ $AB<AC$,
即 $OM>O'M'$.	即 $AB<A'B'$.

下列各題先證左方,然後察其證法可逆否. 如其可逆,則逆之以證右方. 如其不可逆,另用他法以證右方.

習題13. (a). 平行四邊形之對角線互相平分.	習題13. (b). 四邊形之對角線若互相平分,對邊必平行.
習題14. (a). 菱形之對角線互相垂直平分.	習題14. (b). 四邊形之對角線互相垂直平分者,必爲菱形.
習題15. (a). 等腰三角形兩腰上之高線相等.	習題15. (b). 三角形有二高線相等者必等腰.
習題16. (a). 等腰三角形兩底角之平分線相等.	習題16. (b). 三角形有二角之平分線相等者必等腰.

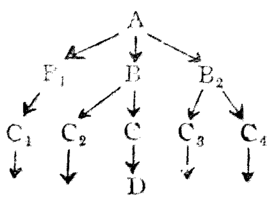
注意: 著者料定學者若無師承,必難于證明習題16. (b). 即學者自認有法證明,其方法亦難免錯誤. 此可利用爲矯正錯誤鍛煉思想之好例. 教者可令學生自出心裁各擬一證法,然後指正之.

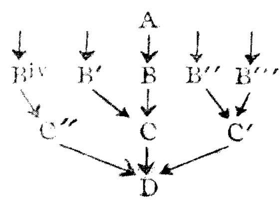
第三章　綜合法與分析法

§51. 綜合法與分析法. 綜合法 (synthetic method) 由因導果, 分析法 (analytic method) 執果索因. 請先以圖明之.

定理: "若 A, 則 D".

綜合法　　　　分析法





綜合法由因導果. 故從 A 下求, 以黎達 D 之道. 然由 A 所生之果或不止一端. 設 B, B_1, B_2 皆爲 A 之果, 此 B, B_1, B_2 等又各有其果, 設 B_1 生 C_1, B 生 C 及 C_2, B_2 生 C_3 及 C_4. 此種結果中有可生 D 者, 有不可者. 設 C 可生 D. 吾人因之由 A 推 B, 由 B 推 C, 由 C 推 D, 而理路得矣.

分析法執果索因. 故從 D 上溯, 以求其因. 孰可以推 D 者? 曰 C 也, C′ 也, C″ 也. 孰能生 C? 曰 B 能之, B′ 亦能之. 孰可以生 C′? 曰 B″, B‴ 皆可. 孰可推 C″? 曰 B^{iv} 是也. 凡此諸因皆可以生 D 固矣. 然孰爲 A 之果耶? 曰 B 是也. 由是知 D 由于 C, C 由于 B, B 由于 A.

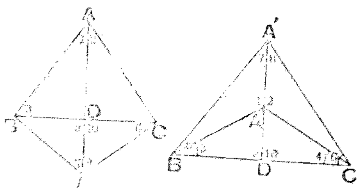
幾何之一切因由皆在公理,公理纔數十耳. 由此數十公理所緐衍之果,即一切定理是也,其數何止萬千! 是故就因求果,枝歧難窮;執果索因,尋根較易. 此幾何思想之所以重分析法也.

綜合法之思路可以下例明之.

例 1. 與一線段兩端等距離二點之連線必垂直于此線段.

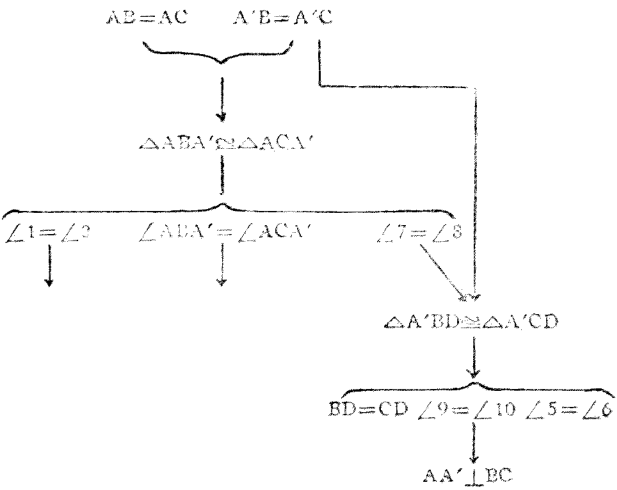
題設: A, A′ 兩點各與 B, C 等距離.

題斷: AA′ 垂直于 BC.



第 63 圖

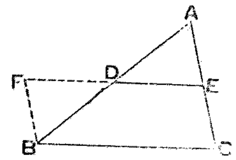
綜合法之思路如下:



圖中矢向投空之處,乃表示「此路不通」或「紆迴曲折」之意.

分析法進行之方向適與以上相反.

例2. 三角形二邊中點之聯結線必平行于第三邊且等于第三邊之半.



第64圖

此題用綜合法不易爲功.

分析法之思路如下:

(1) 通常證一線段(DE)等于他線段(BC)之半,往往延長小者臻于二倍,證其與大者等(見§61). 故吾人宜延長ED一倍至F,令EF=2ED,而

(2) 證EF=BC, EF∥BC.

證兩線相等之法甚多,證兩線平行之法亦甚多. 然欲兼證兩線平行而且相等,則惟有用平行四邊形已耳. 故吾人可試

(3) 證BCEF爲平行四邊形.

證一四邊形爲平行四邊形之法甚多,然吾人對于BC與FE, ∠C與∠F, 及∠B與∠E之關係尚毫無所知,故祇得從BF與CE上着想,即須

(4) 證(a) BF∥CE且(b) BF=CE.

(a) 證兩線平行之法甚多,而此處就便之法厥惟用內錯角相等. 故可試

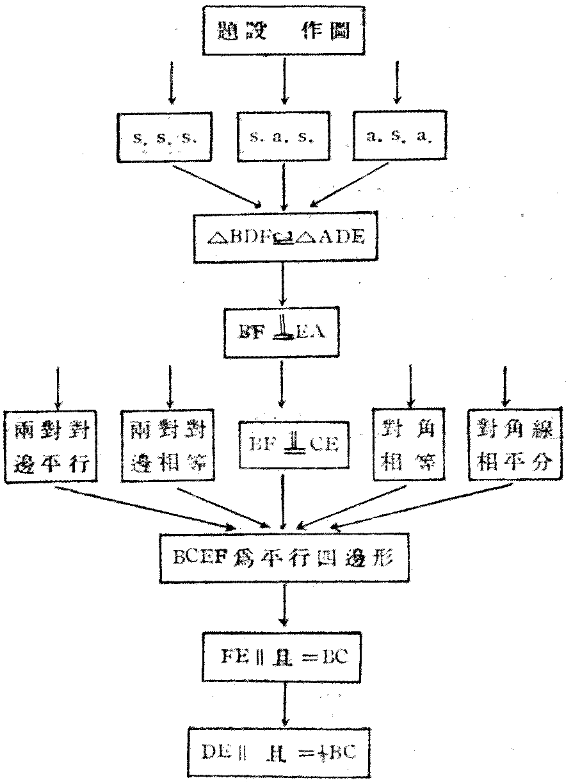
(5) 證∠A=∠DBF.

通常證兩角相等往往用兩全等三角形,故須試

(6) 證 $\triangle BDF \cong \triangle ADE$.

此固有題設及作圖足以直接證之者也. 是(a)解決,而(b)亦順便解決矣.

以圖示之如下: (注意: 由下往上看).



圖中有不明來路之矢,乃表示上溯不通之意.

分析法在一切方法中最屬重要. 習慣上以分析法爲「尋求證法」之道,名之曰分析(analysis);以綜合法爲陳述理由之文,名之曰證(proof). 于是分析可寫可不寫,而證則非寫不可. 分析雖可不寫,但不可不想,蓋非由此道難以想得證法也.

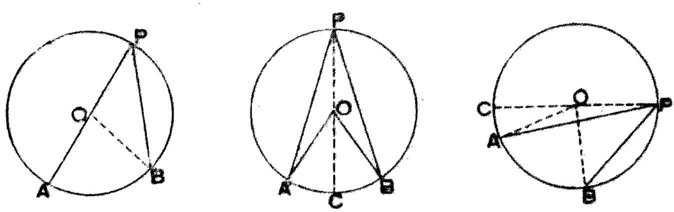
習題 17. 寫出§51 例 1 之分析.

習題 18. 寫出§51 例 2 之證.

第四章 歸納法

§ 52. **普通歸納法.** 證定理時,往往有因題設事件之本性及相互關係之不同,而理由隨之而異者. 故宜分別情形而證之. 各種情形既已證明,然後總括之成一普遍定理,是即普通所謂歸納法 (inductive method)也.

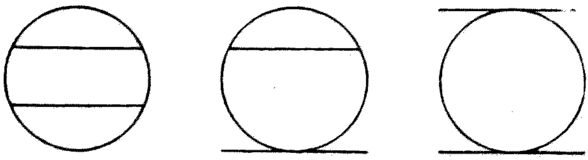
例 1. 圓內立于同弧上之圓周角等于圓心角之半.



第 65 圖

此題常分三類證之(1)圓心 O 在圓周角∠APB 之邊上,(2)圓心 O 在∠APB 之內部,(3)圓心 O 在∠APB 之外部.

例 2.　平行弦或切線間之兩弧相等.

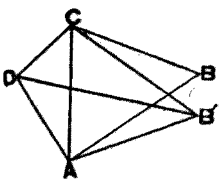


第 66 圖

此可分三類：(1)兩弦,(2)一弦一切線,(3)兩切線.

分類苟有遺漏而貿然斷定,是强以此類圖形之性質,加之彼類也.　此惡乎可!

例 3.　Schultze 所著之 The Teaching of Mathematics in Secondary Schools, p. 166[註] 載有一題「在 ABCD 四邊形中,若 $AB>CD$, 且 $BC>DA$, 則 $\angle D>\angle B$」.　其證若曰:



第 67 圖

作$\triangle AB'C\cong\triangle CBA$且令在AC之同側,

則　$AB'=CB>AD$,　$CB'=AB>CD$;

聯 DB' 成 $\triangle ADB'$ 及 $\triangle CDB'$,

則　$\angle ADB'>\angle AB'D$,

$\angle CDB'>\angle CB'D$;　(§34之iv)

相加得$\angle ADC>\angle AB'C$,

即　$\angle ADC>\angle ABC$.

註. 蘇笠夫譯(商務)中等學校算學教法 (p. 133.)

此種證法之缺點在不知辨別B'究竟在$\angle ADC$之內部,或邊上,抑或角外. 若B'在$\angle CDA$外部,則由$\angle ADB'$與$\angle CDB'$以得$\angle ADC$須用減法. 用減法,則兩大之差未必便大矣.

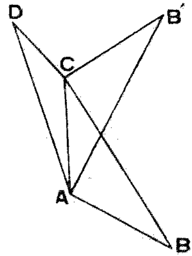
如右圖之ABCD爲一凸四邊形,

$$\left.\begin{array}{l} AD < AB' = CB \\ CD < CB' = AB \end{array}\right\}$$

(題設均合),

$$\angle ADC < \angle AB'C = \angle ABC$$

(題斷不合).



第 68 圖

夫加法之理,不必可用于減法,其理顯然.[註] 顧學者往往憚分別之煩. 憚煩則出錯,可不愼歟! 其他須類別周到而後歸納者,亦不可憚煩也.

分類之道要在不漏不重,重則白費,漏則出錯,不可不愼也. 且類別繁多者,往往分類甚難,而每類之證法則甚易,學者尤須知所輕重也.

習題19. 兩角之邊兩兩平行者,兩角必相等或相補.

此題可分三大類: (1)平行邊皆同向者,(2)平行邊皆反向者,(3)一同向一反向者.

註. Wentworth書之證§612, Wentworth-Smith書之證§525,皆淡視此理.

習題20. 兩角之邊兩兩垂直者,兩角必相等或相補.

習題21. 以三角形之兩腰爲直徑各作一圓,兩圓必交于底邊之直線上.

此題可分三大類: (1)一底角爲直角,(2)一底角爲鈍角,(3)兩底角皆銳角.

習題22. 兩圓相切,過切點作兩直線與兩圓相交,則聯此等交點之弦必互相平行.

此題可分二類: (1)兩圓外切,(2)一圓內切于他圓.

§ 53. 算學歸納法.* 在說明此法之先,請舉數例以爲譬: 設有甲,乙,丙,丁,戊,… 等人,按父子關係排列,乙爲甲之子,丙爲乙之子,…. 又設子,丑,寅,卯,辰 … 等人,按母女關係排列,丑爲子之女,寅爲丑之女,…. 苟知甲姓王,吾人即可斷定甲,乙,丙,… 等皆姓王;但若子姓王,吾人却不能謂子,丑,寅,… 等皆姓王. 此其故何也? 以姓氏之在父子關係有遺傳性,而在母女關係無遺傳性也. 又若吾人知甲有瘋癲疾,即可斷定甲,乙,丙,… 等皆有瘋癲疾;若吾人知子有瘋癲疾,亦可斷定子,丑,寅,… 等皆有瘋癲疾. 此其故何也? 以瘋癲疾之在父子關係及母女關係皆有遺傳性也.

* 欲急進者本節可略.

姓氏及瘋瘋之于父子關係雖皆有遺傳性,然亦有不同之點: 姓氏可由子推父,而瘋瘋則否. 故姓氏猶不足代表一般之遺傳性,今僅就瘋瘋而論. 甲,乙,丙,丁戊,… 按父子關係排列,苟吾人(1)知甲有瘋瘋疾,(2)知瘋瘋疾有遺傳性,——即若某人有是疾,其子必有是疾,則甲,乙,丙,… 以下諸人皆有是疾.

此爲算學歸納法之一例.

斷言一羣無窮多個的事物必有某公共性質,多用算學歸納法(mathematical induction). 其法曰:

一羣無窮多個的事物按一定關係列爲一序貫

A, B, C, D, E, F, …

(i) 若A有一性質 P,

(ii) 若P在上列序貫上有遺傳性(hereditary property)

——即若某項有是性,其次項必有是性;

則自 A以下皆有性質 P

例 1. n 邊形內角之和爲$(n-2)\cdot 2$rt.∠s (即 §37 之 i).

題設: $P_1P_2P_3\cdots P_n$ 爲 n 邊形.

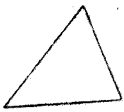
題斷: $\angle P_1+\angle P_2+\angle P_3+\cdots+\angle P_n=(n-2).2$rt.∠s.

證. 一切多邊形可按其邊數排次之成一序貫

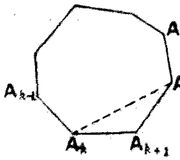
三邊形, 四邊形, 五邊形, …

(i) 當邊數爲 3 時本定理成立. 因

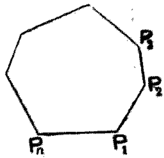
三邊形之內角和$=(3-2)\cdot 2$rt.∠s 也 (§34 之 v).



第 69 圖



第 70 圖



第 71 圖

(ii) 設邊數爲k時本定理成立,則邊數爲k+1時本定理亦成立. 此可證之如下.

設 $A_1, A_2, \cdots, A_k, A_{k+1}$ 爲任意一$(k+1)$邊形. 聯 A_1, A_k, 成三角形 $A_1A_kA_{k+1}$ 及 k 邊形 $A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k$. 則

$$\angle A_{k+1}A_1A_k+\angle A_{k+1}A_kA_1+\angle A_{k+1}=2\text{rt.}\angle s, \qquad \text{見 (i)}$$

$$\angle A_kA_1A_2+\angle A_2+\angle A_3+\cdots+\angle A_{k-1}+\angle A_{k-1}A_kA_1$$
$$=(k-2)\cdot 2\text{rt.}\angle s, \qquad \text{(ii) 之假設.}$$

相加得

$$\angle A_1+A_2+\angle A_3+\cdots+\angle A_{k-1}+\angle A_k+\angle A_{k+1}$$
$$=(\overline{k+1}-2)\cdot 2\text{rt.}\angle s.$$

由(i)知本定理當邊數爲3時成立. 故由(ii)知當邊數爲 4 時本定理亦成立. 當邊數爲 5,爲 6, … 時本定理亦無不成立.

由上可知例 1 之證明實無異於證(i)及(ii)兩定理.

例 2. 共底之二多邊形若一形在他形之內部,則內形之周必小于外形之周.

(i) 當內形爲三角形時本定理成立．證法如下．

題設：$P_1P_2\cdots P_n$ 爲一 n 邊形而 $\triangle P_1P_3'P_n$ 之頂點 P_3' 在其內部．

題斷：$P_1P_2\cdots P_n$ 之周 $>\triangle P_1P_3'P_n$ 之周．

證．延長 P_1P_3'，設與外形之 P_rP_{r+1} 邊交于 P，則

$P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_rP>P_1P_3'+P_3'P$，　§37 之 (iii)

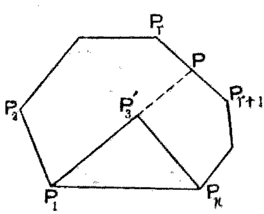
$P_3'P+PP_{r+1}+P_{r+1}P_{r+2}+\cdots+P_{n-1}P_n>P_3'P_n$，　§37 之 (iii)

相加後，去兩端之 PP_3' 且將 P_rP+PP_{r+1} 合爲 P_rP_{r+1} 則得

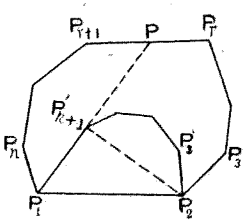
$P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_rP_{r+1}+\cdots+P_{n-1}P_n>P_1P_3'+P_3'P_n$.

$\therefore$ $P_1P_2P_3\cdots P_n$ 之周 $>\triangle P_1P_3'P_n$ 之周．

可見 (i) 眞．



第 72 圖



第 73 圖

(ii) 若內形邊數爲 k 時本定理成立，則當內形邊數爲 k+1 時本定理亦成立．證法如下．

題設：任何多邊形內所作共底 k 邊形之周小于原形之周．

題斷：任何多邊形內所作共底 k+1 邊形之周小

于原形之周.

證. 設 $P_1P_2P_3'P_4'\cdots P'_{k+1}$ 爲任意 n 邊形 $P_1P_2\cdots P_n$ 內所作之任意 k+1 邊形. 延長 $P_1P'_{k+1}$ 與外形之 P_rP_{r+1} 邊交于 P. 聯 $P_2P'_{k+1}$. 則因 $P_2P'_3P'_4\cdots P'_{k+1}$ 爲 k 邊形, 據 (ii) 之假設

$$P_2P_3+P_3P_4+\cdots+P_rP+PP'_{k+1}>P_2P_3'+P_3'P_4'+\cdots+P_k'P'_{k+1},$$

又據 § 37 (iii) $PP_{r+1}+P_{r+1}P_{r+2}+\cdots+P_nP_1>PP'_{k+1}+P'_{k+1}P_1$, 相加後,去兩端之 PP'_{k+1}, 且將左端之 P_rP+PP_{r+1} 合併爲 P_rP_{r+1}, 得

$$P_2P_3+P_3P_4+\cdots+P_rP_{r+1}+\cdots+P_nP_1,$$
$$>P_2P_3'+P_3'P_4'+\cdots+P'_{k+1}P_1.$$

可見 (ii) 眞.

由 (i) 及 (ii) 可見內形邊數無論爲 3, 爲 4, 爲 5, …, 本定理常眞.

雜　　題*

習題23. 設 x 爲一語,求證:——

(i)　x 之反申語之逆述語 = x 之逆述語之反申語.

(ii)　x 之逆述語之對稱語 = x 之對稱語之逆述語.

*本書各篇之末皆設有雜題若干,欲急進者均可略去.

習題24. 寫出「人是動物」之四種關係語.

(注意: 此語=「若x是人,則x是動物」).

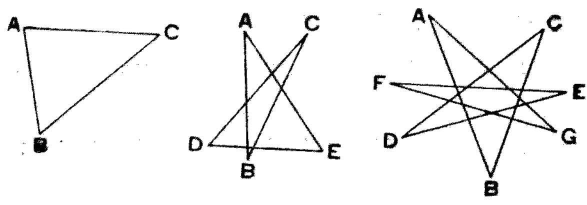
習題25. 兩圓相交于二點,過二交點各作一直線與兩圓相交,則聯此等交點之弦必互相平行.

設兩圓相交于A, B兩點,過A之直線與一圓交于P,他圓交于Q,過B之直線與前圓交于R,後圓交于S.則A, P, Q三點之順序有APQ, PAQ, AQP,及A,P相重,A,Q相重,P,Q相重六種. B, R, S三點亦然. 六六三十六種. 除去重複者,亦不下十數種. 學者試分別繪圖證明之.

習題26. n邊形之對角線之數爲$\frac{n(n-3)}{2}$.

習題27. 奇數星形(不必正星形)每頂角內部無他頂點居其間者,其各頂角之和爲180°.

示意: △是否合此定理? 七星形中若去AB, BC, CD,而聯AD,所成之形爲幾星形? 若AB與CD交于O,注意△AOD, △BOC之內角,以證遺傳性.



第74圖

第二篇
證題雜術

第一章　相　等

§ 54. 全等三角形.

定理. 在$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中

若　(1)　$AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CA=C'A'$,　(s. s. s.)

或　(2)　$AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $\angle B=\angle B'$,　(s. a. s.)

或　(3)　$AB=A'B'$, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$,　(a. s. a.)

或　(4)　$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $BC=B'C'$,　(a. a. s.)

則　$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

若　(5)　$\angle A=\angle A'$, $AB=A'B'$, $BC=B'C'$,　(s. s. a.)

則在下列任意一種情形之下兩形仍可全等;

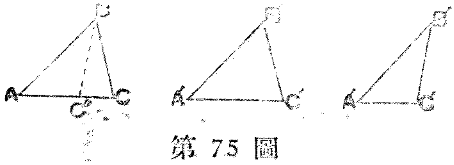
(i)　若$\angle C$與$\angle C'$不互爲補角,

(ii)　若$AB<BC$,　　(iii)　若$AB=BC$,

(iv)　若$\angle A$爲鈍角,　　(v)　若$\angle A$爲直角,

(vi)　其他可以推(i)者.

若無此類附帶條件,則兩形未必全等.



第 75 圖

證. (1),(2),(3),(4) 已見于初中教科書,茲不贅. (參考§27). 今僅證 (5).

于 AC 半線上取 $AC''=A'C'$. 則

$$\triangle ABC''\cong\triangle A'B'C'. \qquad (s.\ a.\ s.)$$

故 $BC''=B'C'$. 但 $B'C'=BC$. 故 $BC''=BC$. 由此可知 C'' 與 C 或同或否. (§29).

若 C'' 非 C, 則 $\angle BC''C=\angle BCC''$,

$\therefore\ \angle BC''A+\angle BCA=2rt.\angle s$,

即 $\angle B'C'A'+\angle BCA=2rt.\angle s$.

此與條件 (i) 矛盾. 故當條件 (i) 成立時, C'' 與 C 必為同一點. 于是 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

(ii)—(v) 皆可推證 (i), 故亦得同一結果.

由上述證法中已見

演理. 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中若

$$\angle A=\angle A', \quad \angle B=\angle B', \quad BC=B'C',$$

則 $\angle C=\angle C'$ 或 $\angle C+\angle C'=2rt.\angle s$ 二者必居其一.

§ 55. 用全等三角形證相等法.

證題術 I. 證二線段(或角)之相等,往往用兩全等三角形證之. 苟所欲證其相等之兩線段(或角),無

全等兩三角形以之爲相當部分,可試加作直線成兩三角形以之爲相當部分. 苟欲證相等之兩線段(或角)所屬之兩三角形之全等難以立決,可先證他兩三角形之全等以補足前兩三角形全等之條件.

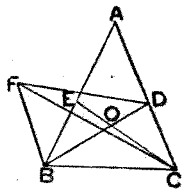
上節(1)－(4)各定理學者當已習于應用. 茲用(5)以證§50習題16之(b)以爲例.

例. 三角形有二角之平分線相等者必等腰.

題設: BD平分$\angle ABC$交AC于D, CE平分$\angle ACB$交AB于E, BD＝CE.

題斷: AB＝AC.

證. 作FD,與C處于BD之異側,



第 76 圖

且令 $\angle FDB=\angle BCE$, FD＝BC,

則 $$\triangle FDB\cong\triangle BCE. \qquad \text{(s. a. s.)}$$

$$\therefore \angle FBD=\angle BEC,$$

$$\therefore \angle FBC=\angle FBD+\angle DBC=\angle BEC+\angle DBA=\angle BOC,$$

此O爲CE與BD之交點. 又

$$\angle FDC=\angle FDB+\angle BDC=\angle DCO+\angle ODC=\angle BOC.$$

但 $\angle BOC=2\text{rt.}\angle s-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle C=\text{rt.}\angle+\frac{1}{2}\angle A>\text{rt.}\angle.$

故在$\triangle FBC$與$\triangle FDC$之中有

$$CB=FD, \qquad \text{(作圖)}$$

$$FC=CF,$$

$$\angle FBC=\angle CDF=\angle BOC>\text{rt.}\angle, \qquad \text{(上證)}$$

$\therefore \triangle FBC \cong \triangle CDF$. (s. s. 鈍角)

故 BCDF 爲平行四邊形.

故 $FD \parallel BC$, $\therefore \angle OBC = \angle ODF = \angle OCB$,

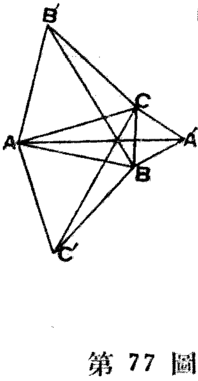
$\therefore \quad \angle ABC = \angle ACB$, (等角之二倍)

$AC = AB$.

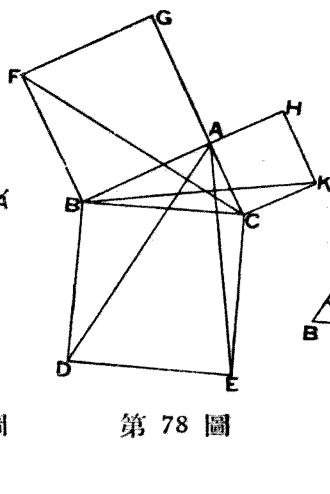
習題28. 于 $\triangle ABC$ 之各邊上各作正三角形 $A'BC$, $AB'C$, ABC', 立于原形之外,求證 $AA' = BB' = CC'$.(第 77 圖)

習題29. 于直角 $\triangle ABC$ 之各邊上各作正方形 ABFG, BCED, ACKH, 立于原形之外,求證 $AD = FC$, $AE = BK$. (第 78 圖)

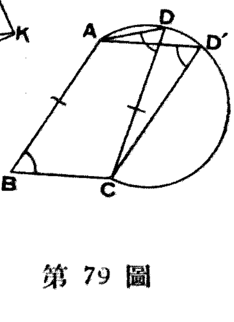
習題30. 有四邊形 ABCD,其對角 $\angle B = \angle D$,而對邊 $AB = DC$. 求證 ABCD 未必爲平行四邊形. (第 79 圖)



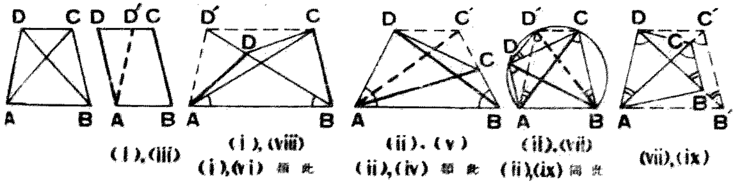
第 77 圖



第 78 圖



第 79 圖



第 80 圖

習題31. 上列左圖有九性質:

(i)	AD=BC,	(vi)	∠ACD=∠BDC,
(ii)	AC=BD,	(vii)	∠ACB=∠BDA,
(iii)	AB ∥ DC,	(viii)	∠DBA=∠CAB,
(iv)	∠ADC=∠BCD,	(ix)	∠DBC=∠CAD.
(v)	∠DAB=∠CBA,		

每取二性質爲題設,其餘七性質爲題斷,可作一命題.如此之命題凡三十有六. 其中以(i)與(iii),(i)與(viii),(i)與(vi),(ii)與(v),(ii)與(iv),(ii)與(vii),(ii)與(ix),(vii)與(ix)爲題設者不眞,事實具見上圖: 其餘二十八命題皆眞.可分配全班,每生證一題.

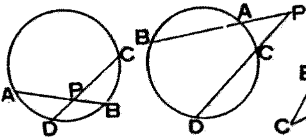
習題32. 同圓內二等弦(或其延長線)互截爲兩段,則二小段互等,二大段互等,(即第81圖中之PA=PC, PB=PD). 如何製造此定理之逆定理?

習題33. 第82圖之AC=AE,AD=AB,求證

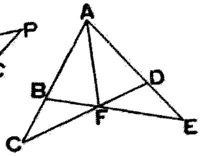
∠CAF=∠EAF.

習題34. 外接于正方形之矩形必爲正方形,內接

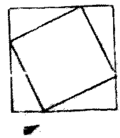
于正方形之矩形則不必爲正方形.（第83圖）



第81圖



第82圖



第83圖

§56. 疊合法.

證題術 II. 證兩線段,或兩角(或其他)相等,若二者分隸于兩全等形,往往用疊合法證之.

推證用疊合法不外根據下列疊合原理:——

(a) 兩形若可疊合,則相當部相等.

(b) 兩形若全等,則必可使之疊合.

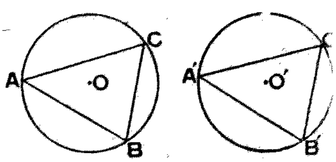
定理之題設中僅有"相等"字樣,故推證之首段必從相等推及疊合. 定理之題斷在"相等",故推證之末段必從疊合以推及相等. 換言之,用疊合法證"相等"最先必用(b)最後必用(a)也.

例1. 二全等三角形之外接圓相等.

題設: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

題斷: $\odot ABC \cong \odot A'B'C'$.

證. 將$\triangle ABC$移置于$\triangle A'B'C'$使之疊合(即A落于A',B落于B',C落於C').



第84圖

(疊合原理b)

故$\odot$ABC與$\odot$A′B′C′疊合. (過三點祇一圓)

故$\odot ABC \cong \odot A'B'C'$. (疊合原理 a)

證題術 III. 證兩線段或兩角(或其他)相等,若二者同隸于一對稱的圖形,可視一形爲兩形,翻疊以證之.

例 2. 下圖中 AG=BH, ∠1=∠2, 求證 CD=EF.

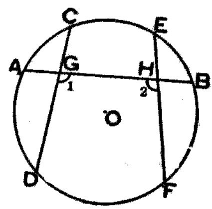
證. 將全圖摹下,加撇爲記,翻疊之使$\overparen{A'B'}$密合于$\overparen{BA}$; (疊理 b)

則 G′落于原 H 處, (∵A′G′=BH)

H′落于原 G 處. (同上)

今∠1′=∠2,

故 G′D′直線落于原 HF 直線處.



第 85 圖

故二直線截圓處亦相合, (因等圓已密合)

即 C′落于原 E 處, D′落于原 F 處.

∴ C′D′=EF, 即 CD=EF. (疊理 b)

證題術 IV. 證二線段(或二角)之相等,若二者同隸于二全等之圖形,而二形有對應點公共者,可繞此點旋轉以證之.

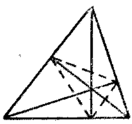
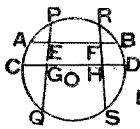
例 3. 習題 28 及 29 之證即可視爲用此法爲之者.

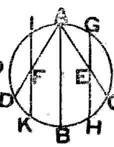
習題 35. 兩全等三角形之垂足三角形亦全等.

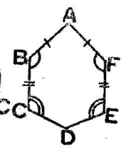
(一三角形之垂足三角形 (pedal triangle 亦曰 orthic triangle) 即三高線足聯成之三角形,第 86 圖).

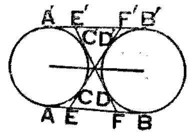
習題 36. 第 87 圖中之 AB ∥ CD, AE＝BF, GC＝HD, 求證 PQ＝RS. (翻疊時使垂直于 AB 之直徑自疊).

習題 37. 第 88 圖中 AC＝AD, AE＝AF, AB ∥ GH ∥ IK 而 AB 爲直徑,求證 GH＝IK (翻疊時使 A′B′ 疊于 AB).







第 86 圖　第 87 圖　第 88 圖　第 89 圖　第 90 圖

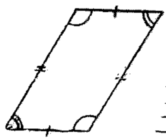
習題 38. ABCDEF 六邊形中若 AB＝AF, BC＝FE, ∠B＝∠F, ∠C＝∠E; 則 CD＝DE. (第 89 圖)

習題 39. 兩圓之兩外公切線介于兩內公切線之延長線間之兩段相等(即第 90 圖中之 EF＝E′F′). 兩內公切線若延長之,則其介于兩外公切線間之兩段相等(即圖中之 EF′＝E′F).

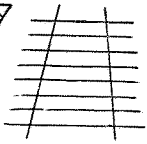
§ 57. 證相等之雜術.

證題術 V. 證兩線段或兩角(屬于一三角形者)相等,往往利用等腰三角形定理(§48 例 1),或等腰梯形定理(習題 31)證之.

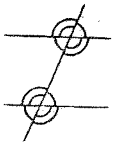
證題術 VI. 證兩線段(或角)之相等,若二者爲一四邊形之對邊(或對角),往往先證該四邊形爲平行四邊形(參考 §36 之(ii),(iii)).



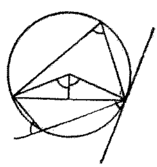
第91圖



第92圖



第93圖



第94圖

證題術 VII. 證一線段被等分爲數線段,多根據「數平行線既截一割線成等線段;則必截他割線成等線段」. (§41之(i)).

證題術 VIII. 證兩角相等,往往利用直線割平行線之定理以證之. (§35之(i),(ii),(iii)).

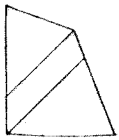
證題術 IX. 證二角相等,往往利用互等角三角形. (§42之(ii),(iii)).

證題術 X. 證兩角相等,往往利用圓內同弧各角之定理證之. (如第94圖標示各角皆相等者也. 見§38)

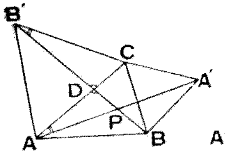
習題40. 四邊形中,二對角之平分線若平行,則他二對角必相等. (第95圖)

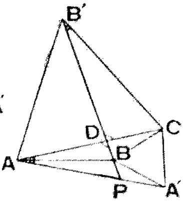
習題41. 三角形一外角之平分線平行于對邊者,必爲等腰三角形.

習題42. 三角形二腰中點之聯線與底邊上之中線互相平分.



第 95 圖





第 96 圖

習題 43. 習題 29 之 AA′, BB′ 交于 P, 則當 $\angle ABC < 120^\circ$ 時, $\angle A'PB = 60^\circ$; 當 $\angle ABC > 120^\circ$ 時, $\angle A'PB = 120^\circ$.(第 96 圖)

第二章 垂直

§ 58. **證題術 XI.** 證二直線互相垂直,即證一角爲直角,往往證其鄰補角相等(§ 20 定義). 翻摺以證之者,亦爲證鄰補角相等也.

如 §51 之例 1 是.

習題 44. ABCD 四邊形中,若 AB=BC, $\angle A = \angle C$, 則 $AC \perp BD$.

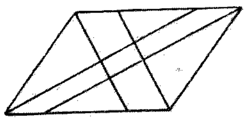
習題 45. 習題 37 之 AB⊥ 平分 HK.

習題 46. 習題 38 之 AD⊥ 平分 BF 及 CE.

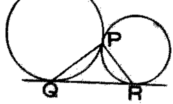
§ 59. **證題術 XII.** 證一角爲直角亦有時用直角三角形定理:「三角形一邊之中點若與三頂點等距離,則該邊之對角必爲直角」或「三角形之二角和若等于一直角,必爲直角三角形」.

習題 47. 不等邊平行四邊形各角之平分線圍成

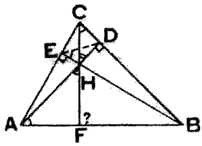
一矩形(等邊者何如? 第97圖).



第 97 圖



第 98 圖



第 99 圖

習題48. 習題29中之$AD \perp CF$, $AE \perp BK$.

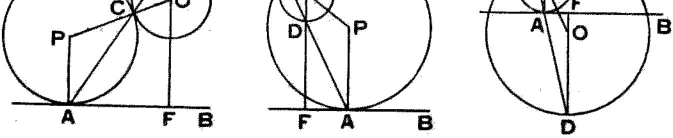
習題49. 兩圓相外切于P, 而與一外公切線相切于Q及R, 則$\angle QPR = rt. \angle$. (第98圖)

習題50. $\triangle ABC$之二高線AD與BE若交于H, 則$CH \perp AB$. (提示: 設法證第99圖中之$\angle DCH = \angle BED = \angle FAH$).

習題51. 對角線相等且垂直之四邊形是否必爲正方形? 該形各邊中點之聯線圍成何形?

習題52. 習題29之FG與KH之交點命爲A′, 求證$AA' \perp BC$.

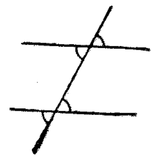
習題53. 直線AB與⊙O切⊙P于A, C, 而AC與⊙O交于D, 求證$OD \perp AB$. (第100圖)



第 100 圖

第三章 平行

§ 60. 證題術 XIII. 證兩線平行可



第 101 圖

(1) 先證內錯角相等;

或 (2) 先證外錯角相等;

或 (3) 先證同位角相等;

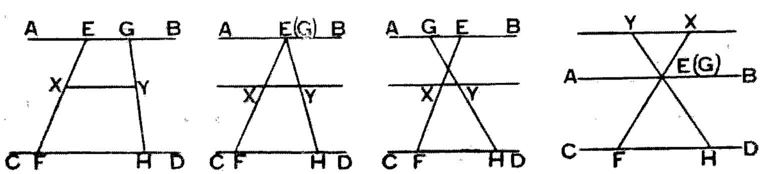
或 (4) 先證割線同側內角互為補角;

或 (5) 先證割線同側外角互為補角;

或 (6) 先證某四邊形(以該二線為對邊者)為平行四邊形;

或 (7) 根據『一直線若割(皆內割,或皆外割)二平行線間之兩線段于不同二點,且所割四線段成比例,則必與二平行線平行』,即:

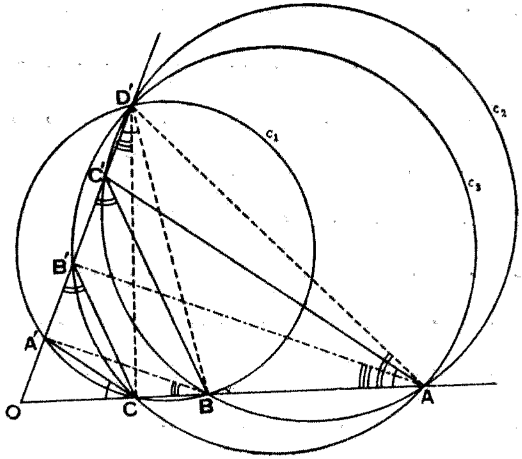
若 $AB \parallel CD$, 而 $EX : XF = GY : YH$, 則 $XY \parallel AB$ 及 CD.



第 102 圖

例. 設 A, B, C 三點共線, A′,B′,C′ 三點亦共線,二線相交于 O. 若 $AC' \parallel CA'$, $BC' \parallel CB'$, 則 $AB' \parallel BA'$.[註]

註. 此係 Pascal 定理之一特例, 其證法則錄諸 Hilbert 之幾何原理(傅種孫韓桂叢譯,商務印書館出版)者. 此證之妙在不用比例.



第 103 圖

證. 命⊙A'CB 與 OA' 之交點曰 D'.

則因 $\angle OCA' = \angle OD'B$, (?)

$\angle OCA' = \angle OAC'$, ($\because AC' \parallel CA'$)

$\therefore$ $\angle OAC' = \angle OD'B$.

故 A, B, C', D' 共圓,而

$\angle OC'B = \angle OAD'$.

但 $\angle OC'B = \angle OB'C$, ($\because BC' = CB'$)

$\therefore$ $\angle OAD' = \angle OB'C$.

故 A, C, B', D' 四點共圓,而

$\angle OD'C = \angle OAB'$.

但 $\angle OD'C = \angle OBA'$, ($\because$ A', C, B, D' 共圓)

$\therefore$ $\angle OAB' = \angle OBA'$.

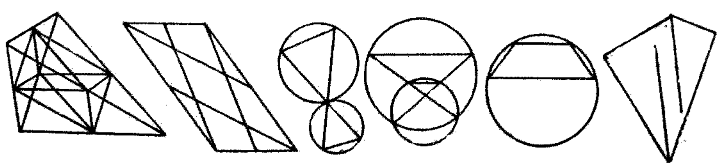
$\therefore$ $AB' \parallel BA'$.

習題54. 四邊形鄰邊中點之聯線,邊之中點與對角線中點之聯線,必圍成平行四邊形三.(第104圖)

習題55. 平行四邊形ABCD中若由A, B, C, D四頂點順次向BC, CD, DA, AB四邊之中點作直線,則四直線必圍成一平行四邊形.(第105圖)

習題56. 兩圓相切,過切點作兩割線,則聯割點之弦必互相平行.(作公切線. 內切者用同位角,外切者用內錯角,第106圖.)

習題57. 兩圓相交,過每交點各作一直線割兩圓則聯割點之弦必互相平行.(即習題25,第107圖)



第104圖 第105圖 第106圖 第107圖 第108圖 第109圖

習題58. 圓內接四邊形若有一對對邊相等必為等腰梯形.(第108圖)

習題59. 四邊形之一對對角若各為直角,則他兩對角之平分線必互相平行.(第109圖)

習題60. 求寫習題41之逆定理證之.

第四章　和差

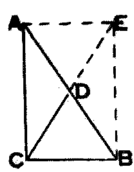
§ 61. **證題術 XIV.** 證一線段二倍于他線段往往延長小者至于二倍,證其與大者等;或平分大者取其半,證其與小者等. 角亦如之.

例 1. §51 之例 2 即用前法者也.

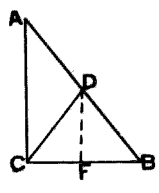
例 2. 直角三角形斜邊上之中線等於斜邊之半.

分析. 此題有兩法可嘗試,或延長 CD, 或平分 AB.

(a) 延長 CD 至 E, 令 CE=2CD. ∵AD=DB, CD=DE, 故 ACBE 爲一矩形. AB 與 CE 之相等遂不難由「矩形對角線相等」之理由,或直接用全等三角形法,以解決之矣.



第 110 圖



第 111 圖

(b) 因 D 本爲 AB 之中點,故但證 CD=DB 可也. 惟是兩線段之相等,有待乎兩全等三角形. 今無兩全等三角形,故臨時構造之: 取 CB 之中點 F 與 D 相聯. 如是,則 DF ∥ AC, 但 AC⊥BC, ∴DF⊥BC, 而 DB=CD 可立決.

習題 61. 三角形二中線之交點必正當各該中線三分二處.(或平分大段,或延長小段,試用兩法證之.)

習題62. 三角形底邊中點至一腰之垂線,等於該腰上高線之半.

習題63. 直角三角形之一銳角若爲30°則此角之對邊必等於半弦.

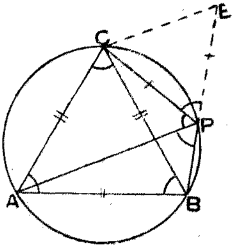
習題64. 梯形之下底若等于上底之二倍,則對角線之交點必正當各該線三分之二處.(平分兩大段,並聯其中點以證之.)

§62. 證題術XV. 證一線段a等于b,c二線段之和往往(i)先作出一線段=b+c,然後證此線段=a;或(ii)先作出一線段=a−b,後證此線段=c. 角及弧亦然.

例1. 若ABC爲等邊三角形,P爲其外接圓之BC弧上一點,則PA=PB+PC. (逆定理見習題135)

分析. 此題之證明,或(I)先作PB+PC,或(II)先作PA−PC皆可.

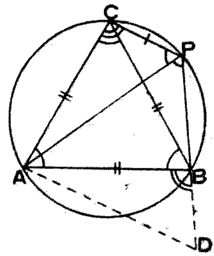
(I). PB+PC有兩種作法: (a).延長BP, (b).延長PB.



第112圖

(a). 延長BP至E,令PE=PC,而證AP與BE之相等. 將圖中等角,等線標號. BAC, ACB, ABC, APB, APC, CPE角各爲60°. PC=PE, ∴ ∠ECP=60°. ∴ CE=CP. AP與BE之相等有待乎兩全等三角形, CAP及CBE

是也,其全等甚易解決.



第113圖

(b). 延長 PB 至 D, 令 BD=CP, 而證 PA 之等于 PD. 將圖中之等線,等角 (60°)悉行標號. 今夫欲證其相等之 PA 與 PD 固無兩全等三角形以之爲相當邊也,特一三角形 PAD 之兩邊耳. 然則吾人惟有試證 ∠PAD=∠PDA (術 V) 耳. 今∠APD 既爲 60° 勢必使∠D 及∠PAD 各爲 60° 而後可. 二者皆使吾人注意及△ABD 與△ACP 是否全等?

此兩三角形之全等,其原因決不在∠D=∠APC, 因吾人不知∠D 是否 60° 也;亦不在∠CAP=∠BAD, 蓋此即適纔求解決而未能之問題也;尤不在 PA 與 DA; 蓋吾人苟知其相等,則△PAD 之等邊顯然立決,何待乞靈于△ACP 與△ABD 乎? 故吾人欲知此兩三角形全等,除已知 AC=AB, CP=BD 外,尚須靠∠ACP=∠ABD. 此則圓內接四邊形當然之理也. (§38.)

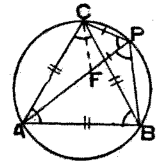
(II). PA 與 PC 之差之作法有二:

(a) 于 PA 上截去 PC, (b) 于 AP 上截去 PC.

(a) 于 PA 上截取 PF=PC, 而試證 AF=PB.

標出∠A=∠ABC=∠BCA=∠APC=∠BPA=60°.

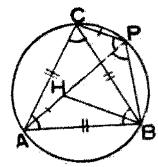
加以PC=PF，得∠PCF=∠PFC=60°. 由是 AF=PB 可由△AFC與△BPC解决之矣. (a. s. a.)



第114圖

(b) 于AP上截取AH=CP，而試證PH=PB.

因PH與PB非兩全等三角形之相當邊，故試證PBH爲等邊三角形，即求證BH=PB，此可藉△PBC與△HBA以證之.



第115圖

下列五題可溫習所習幾何書之證法，堂上口問口答可也.

習題65. 三角形每外角等于不相鄰二角之和.

習題66. 圓內兩相交弦之交角可以其間之兩弧之和之半度之.

習題67. 圓之兩割線在圓外所成之角可以其間之兩弧之差之半度之.

習題68. 圓之切線與割線所成之角可以其間之兩弧之差之半度之.

習題69. 圓之二切線所含之角可以其間之兩弧之差之半度之.

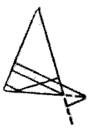
試證下列諸題.

習題70. 等腰三角形底邊上任意一點與兩腰距

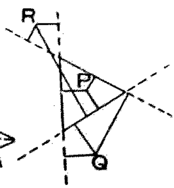
離之和等于腰上之高線.(第116圖)

習題71. 等腰三角形底邊之延長線上任意一點與兩腰距離之差等于腰上之高線.(第116圖)

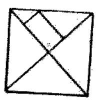
習題72. 等邊三角形內部任意一點P與三邊距離之和等於其高線. Q何如? R何如?(第117圖)



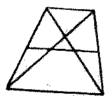
第116圖



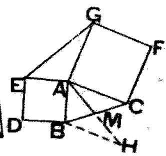
第117圖



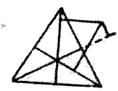
第118圖



第119圖



第120圖



第121圖

習題73. 正方形邊上任意一點與兩對角線距離之和等于一對角線之半.(第118圖)

習題74. 梯形兩腰(兩對角線)中點之聯結線等于兩底之和(差)之半.(第119圖)

習題75. 于△ABC之二邊上作ABDE與ACFG兩正方形于△ABC之外,則△ABC之中線AM必等于EG之半且垂直于EG. (依第120圖延長AM至H令AM=MH然後進行.)

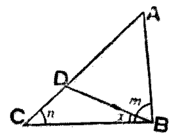
習題76. 由任意一點向正三角形之三高線作三垂直線,則三垂直線中之大者必等于其餘二者之和.(第121圖)

第五章 代數證法

§63. 證題術 XVI. 定理中之關係量太多者,用文字表示各量,用代數法計之較便.

例 1. D為△ABC之AC邊上之一點,AD=AB. 求證 $\angle DBC=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

證. 命 $\angle B=m^\circ$, $\angle C=n^\circ$, $\angle DBC=x^\circ$.



第 122 圖

則 $x^\circ+n^\circ=\angle ADB$, $m^\circ-x^\circ=\angle ABD$.

然 $\angle ABD=\angle ADB$.

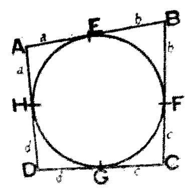
$\therefore$ $m^\circ-x^\circ=x^\circ+n^\circ$,

$\therefore$ $x^\circ=\frac{1}{2}(m^\circ-n^\circ)$.

此以題斷中三角之一為未知數x,餘二角為已知數m,n,其他各角悉以x,m,n,表之,利用關係 $m-x=x+n$ 以求x者也.

例 2. 圓外切四邊形對邊之和相等且等于半周.

證. 如圖,令



第 123 圖

$AH=AE=a$, $CF=CG=c$,

$BE=BF=b$, $DG=DH=d$.

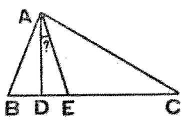
則 $AB+CD=a+b+c+d$,

$BC+DA=b+c+d+a$;

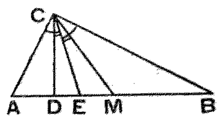
$\therefore$ $AB+CD=BC+DA=$ 半周.

較複雜之例,俟計算篇論之.

習題77.　△ABC之高線AD與頂角平分線AE所成之角$\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.(第124圖)



第124圖



第125圖

習題78.　直角三角形直角之平分線必平分同處中線與高線所成之角.(第125圖)

習題79.　圓外切六邊形ABCDEF中,間一邊相加,兩和必相等(謂$AB+CD+EF=BC+DE+FA$也).

習題80.　圓外切偶數多邊形,間一邊相加,兩和必相等.

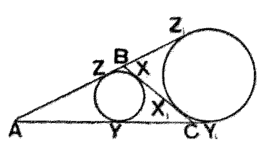
習題81.　圓內接六邊形,隔一角相加,兩和必相等(謂$A+C+E=B+D+F$也).圓內接偶數多邊形何如?

習題82.　第125圖中求證

(i) $AY_1=AZ_1=s$,(ii)$AY=AZ=s-a$,

(iii)$CX_1=CY_1=BX=BZ=s-b$,

(iv) $BX_1=BZ_1=CX=CY=s-c$.



第126圖

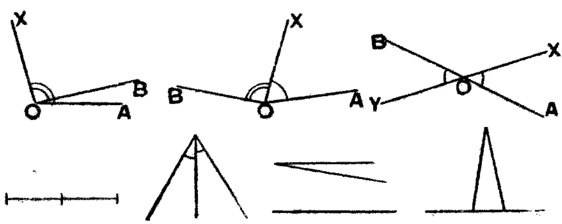
習題83.　試證第90圖之

$EF=E'F'=CD'=C'D$,　　$EF'=E'F=AB=A'B'$.

第六章　共線點與共點線

§64. **共線點與共點線.** 同在一直線之諸點稱為共線點 (collinear points). 同過一點之諸線稱為共點線 (concurrent lines). 證三點以上共線及三線以上共點多用一致法:

證題術 XVII. 證二直線OA與OB一致,往往另取一直線XOY,先證∠XOA=∠XOB,(若A,B在OX之同側)或先證∠XOA+∠XOB=2rt.∠s(若A,B在OX之異側);或先證∠XOA=∠YOB(若A,B在XOY之異側);或利用線段惟一中點,角惟一平分線,過一點惟一平行線,惟一垂線,各種惟一性.

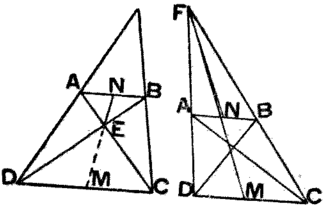


第127圖

例1. 梯形二底中點,對角線交點,二腰延長線之交點,四點共線.

題設: AB, CD 為梯形ABCD之二底,其中點為N,M, AC, BD二對角線交于E,DA, CB二腰之延長線交于F.

題斷: E,F,M,N,共線.[註]



第128圖

證. 連EM, EN.

$\because DE:BE=DC:BA,$

而　$DM=\frac{1}{2}DC,\quad BN=\frac{1}{2}BA,$

$\therefore DE:BE=DM:BN.$

又$\angle EDM=\angle EBN$,(內錯角)

$\therefore \triangle EDM$與$\triangle EBN$互等角,

$\therefore \angle DEM=\angle BEN.$

然M,N在DEB直線之異側,

故EM, EN二直線一致.

即E在MN直線上.

連FM, FN.

$\therefore CF:BF=CD:BA,$

而　$CM=\frac{1}{2}CD,\ BN=\frac{1}{2}BA,$

$\therefore CF:BF=CM:BN.$

又$\angle FCM=\angle FBN$,(同位角)

$\therefore \triangle FCM$與$\triangle FBN$互等角.

$\therefore \angle CFM=\angle CFN.$

然M,N在CF直線之同側,

故FM, FN二直線一致.

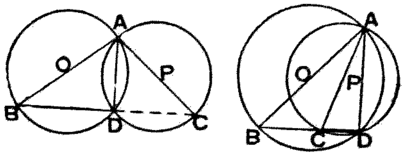
即F在MN直線上.

故E, F, M, N在同一直線上.

註. 凡證二線合一,繪圖時須注意毋使顯然合一. 如圖128左圖EN與EM一實一虛,右圖FN與FM方向微差,129右圖CD與BD一粗一細,皆所以防吾人于論證中途,尚未確知二線合一之時,誤認已知其一致也.

證術題 XVIII. 證一直線 l 通過一點 P,(即證 P 在 l 上),往往于 l 上取一適宜點 Q,先證 PQ 與 l 一致;或于 l 上取二點 Q, R, 先證 QP 與 RP 一致.

例 2. 以三角形之二邊為直徑作圓,二圓之第二交點必在第三邊或其延長線上.



第 129 圖

題設: $\triangle ABC$, $\odot O$ 以 AB 為直徑, $\odot P$ 以 AC 為直徑,二圓交于 D.

題斷: D 在 BC 直線上.

證. 聯 AD, BD, CD. 則

$$\angle ADB = rt.\angle, \quad \angle ADC = rt\angle.$$

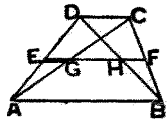
是 BD, CD 皆垂直於 AD 也,故當合為一直線.

推究. 當 $\angle ACB$ (或 $\angle ABC$) $>$ rt $\angle$ 時, D 在 BC (或 CB) 之延長線上. 當 $\angle ACB$ 及 $\angle ABC$ 皆為銳角時, D 在 BC 之間. 當 $\angle ACB$ (或 $\angle ABC$) = rt.$\angle$ 時, D 重於 C (或 B).

例 3. 梯形之中線必過其對角線之中點.

題設: ABCD 爲梯形(AB ∥ DC),

AD, BC, AC, BD 之中點爲 E, F, G, H.



第 130 圖

題斷: EF 直線通過 G, H.

證. 連 EG, 則 EG ∥ DC(§51 例 2),

但 EF 亦 ∥ DC (§60 之 7).

故 EG 與 EF 須合爲一直線(平行公理), 即 EF 過 G.

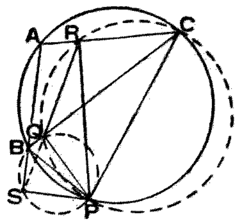
同理, EF 亦過 H.

證題術 XIX. 證三點 P, Q, R 在一直線上, 往往聯 PQ, QR 先證 PQ 與 QR 二直線一致.

例 4. 由三角形之外接圓上一點作三垂線至三邊, 則三垂足在一直線上. (此直線通稱爲 Simson's line 其實非 Simson 所發明, 所以歸美于 Simson 者, 實出于誤會.

題設: P 爲 ⊙ ABC 上一點,

PQ ⊥ BC 于 Q, PR ⊥ AC 于 R, PS ⊥ AB 于 S.



第 131 圖

題斷: Q, R, S 共線.

證. 聯 QR, QS. 又聯 PC, PB.

則　$\angle PQR + \angle PCA = 2\text{rt.}\angle s.$　(?)

$\angle PBS = \angle PCA,$　(?)

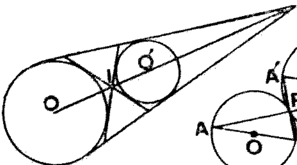
$\angle PBS = \angle PQS.$　(?)

$\therefore$　$\angle PQR + \angle PQS = 2\text{rt.}\angle s.$

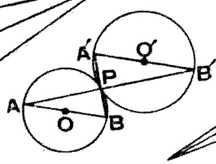
故 RQ 與 QS 二直線一致, 而 Q, R, S 共線.

習題84. 兩圓之兩內公切線(或兩外公切線)之交點I在聯心線上. (證第132圖之IO與IO′一致)

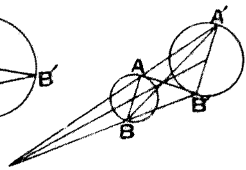
習題85. 兩圓外切于P,作AB及A′B′兩直徑互相平行,則AB′與A′B皆通過P點. 內切何如? (注意第133圖之OPO′爲一直線,聯PA,PB′,證∠OPA=∠O′PB′.)



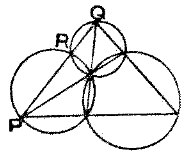
第132圖



第133圖



第134圖



第135圖

習題86. 于兩圓內作AB及A′B′兩直徑互相平行,則AB′與A′B之交點,AA′與BB′之交點皆在聯心線上.(第134圖)

習題87. 圓內接四邊形相對邊之延長線交于P及Q,其在圓外所成二三角形之兩外接圓交于R,則P,Q,R共線.(第135圖)

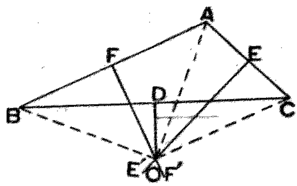
習題88. 習題29之A,K,F三點共線.

習題89. 設AB∥CD(同向或反向),P爲AC直線上一點,則ABP,CDP二圓相交之第二交點必在BD直線上.(此卽習題57之逆).

習題90. 直線AB及⊙O切⊙P于A,C而OF⊥AB于F,交AC于D. 求證D在⊙O上.(第100圖)

§65. **證題術** XX. 證三直線 a, b, c 會于一點,往往先證其中二直線 a, b 必相交于一點 P; 次于 c 上取一適宜點 Q 證 PQ 直線與 c 一致.

例 1. 三角形三邊之垂直平分線會于一點. (稱為該三角形之外心 circumcentre).



第 136 圖

題設: D,E,F 爲 △ABC 三邊之中點,DD′⊥BC(暫不畫 DD′),[註] EE′⊥CA,FF′⊥AB.

題斷: DD′, EE′, FF′會于一點.[註]

證. AB 與 AC 爲相交于 A 之二直線,故 EE′ 與 FF′ 必有一交點 O. 聯 OA, OB, OC 則

$$OA=OB,\quad OA=OC, \qquad (?)$$

$$\therefore\ OB=OC.$$

註. 證三線會于一點時,須守三誡:— 第一,戒稱共點之名. 如例 1 中之三線,若于題設中名之曰 OD, OE, OF 則大謬矣. 第二,戒設二線相交. 如例 1 中若無 A, B, C 不在一直線上之限制,而證時設 EE′ 與 FF′ 交于 O,則此 O 難免烏有矣. 第三,戒畫第三線. 第三線非萬不得已,暫不畫出(如例 1 是),即使畫出,亦不畫正,不畫滿(如例 3 是),防其亂目惑志也. 以後證諸圓共點時亦然.

聯 OD,則 OD⊥BC.　　(?)

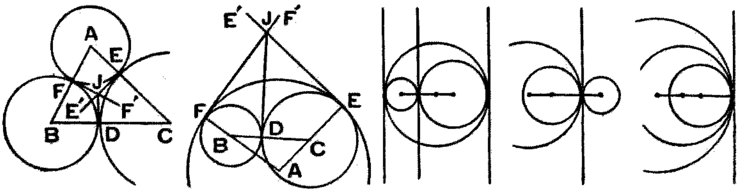
然 DD′ 亦係 ⊥BC 者,故與 OD 一致.

故 DD′, EE′, FF′ 會于一點 O.

例 2.　三圓互相切,則過切點之三切線必會于一點,或互相平行,或合而爲一.

題設: ⊙B 與 ⊙C 相切于 D,而與 ⊙A 相切于 F,E; DD′, EE′,FF′ 爲公切線.

題斷: DD′,EE′,FF′ 會于一點.



第 137 圖

證.　(1) 若三圓心不共線,則三切線必兩兩相交.

設 EE′與 FF′交于 J. 連 DJ.

假令 DJ 不⊥ BC.　設∠JDB > ∠JDC, 則

　　∠JDB>rt.∠,　　rt.∠>∠JDC;

∴　　∠JDB>∠JFB,　　∠JEC>∠JDC;

然　　∠BDF=∠BFD,　　∠CED=∠CDE;

相減得 ∠JDF>∠JFD,　　∠JED>∠JDE;

∴　　JF>JD,　　JD>∠JE.

此實與 JF=JE 不合.　故 DJ 不得不⊥ BC.

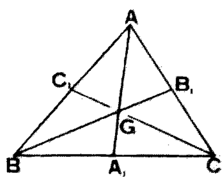
DJ $\perp$ BC,自必與DD′合一.

故EE′, FF′, DD′會于J.

(2)若三圓心共線,則三切線必互相平行或合而爲一.

證題術 XXI. 證a, b, c三線會於一點,往往先證a與b相交於a上之一特殊點P,然後證a與c亦應相交于a上之此特殊點P.

例3. 三角形之三中線會于一點. (此點稱爲該三角形之重心centre of gravity或centroid或median point或center of inertia).



第138圖

題設: AA_1, BB_1, CC_1爲$\triangle ABC$之中線.

題斷: AA_1, BB_1, CC_1會于一點.

證. 設BB_1與AA_1交于G,

則$AG=\frac{2}{3}AA_1$. (習題61)

故BB_1之交AA_1也,交于AA_1之三分之二處.

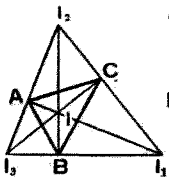
同理CC_1與AA_1相交,亦當交于AA_1之三分之二處.

故AA_1, BB_1, CC_1會于一點.

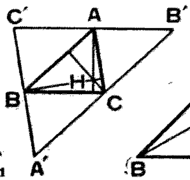
習題91. 三角形三角之平分線會于一點. (稱爲該三角形之內心incentre,第139圖)

習題92. 三角形一內角之平分線及餘二外角之平分線會于一點.(稱爲三角形之一傍心 (an excentre).一三角形之傍心凡三,第139圖).

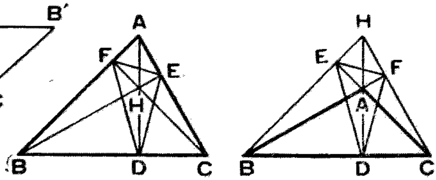
習題93. 三角形之三高線會于一點. (稱爲該三角形之垂心 (orthocentre). 據習題50證之,或過三頂點作三線平行于三邊另成一大三角形然後據例1證之.)



第139圖



第140圖



第141圖

習題94. 習題28之AA′, BB′, CC′會于一點. (先證AA′與BB′必相交于一點P,次聯PC及PC′,注意P處各角之度數以證PC與PC′合而爲一直線.)

習題95. 習題29之FG與KH若交于A′,則AA′, CF, BK會于一點. (根據習題48, 52及93證之可也.)

習題96. 習題29之AD, CF, GE會于一點.

習題97. 四邊形對邊中點之聯結線,對角線中點之聯結線,共凡三線,會于一點且互相平分. (參閱習題54).

習題98. 三角形之重心與各邊之距離必等于各該邊上高線之$\frac{1}{3}$.

習題99. △ABC之垂心若爲H,則△ABH之垂心爲C.(據習題93垂心之定義證之,第141圖).

習題100. 一三角形之內心爲聯結三傍心所成之三角形之垂心,而每傍心爲聯結餘二傍心及內心所成之三角形之垂心. (注意比較第139圖與第141圖)

習題101. 一三角形之垂心爲其垂足三角形之內心或傍心.(注意原三角形有直角或鈍角否,第141圖.)

習題102. 一三角形之重心即其中點三角形之重心.(中點三角形 (median triangle) 者聯三邊中點所成之三角形也. 如第140圖△ABC乃△A′B′C′之中點三角形).

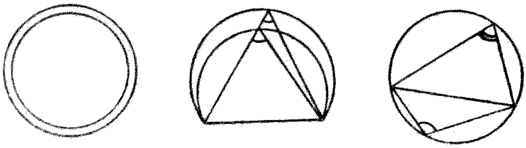
習題103. 一三角形之外心即其中點三角形之垂心. (注意140圖).

第七章　共圓點與共點圓

§66. **共圓點與共點圓.** 同在一圓周上之諸點稱爲共圓點 (concyclic points). 同過一點之諸圓稱爲共點圓 (concurrent circles).

§ 67. 二圓合一

證題術 XXII. 二圓具下列條件之一者必合而爲一; (a) 同心且等半徑, (b) 共直徑, (c) 共弦且同側之圓界角相等,或 (d) 共弦且異側之圓界角相補.

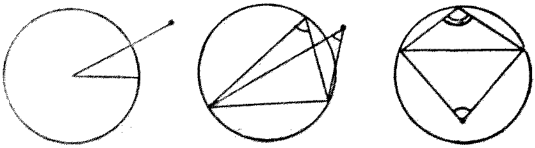


第 142 圖

§68. 一點在一圓上.

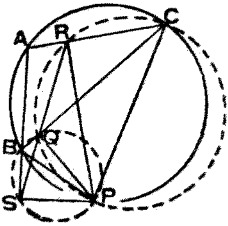
證題術 XXIII. 證一點在一圓上(即證此圓過該點),往往(a)證其與圓心之距離等於半徑,或(b)證其對于直徑成直角,或(c)證其對於某弦之角等於同側圓界角,或(d)證其對某弦之角與異側圓界角相補.

(見§46例2)



第 143 圖

例1. 由一點至三角形之三邊(或其延長線)作三垂線,若三垂足在一直線上,則該點必在外接圓上. (此為§64例4之逆).



第 144 圖

題設: ABC為一三角形.

PQ ⊥ BC 於 Q,

PR ⊥ CA 於 R,

PS ⊥ AB 於 S,

而 Q, R, S 共線.

題斷: P在⊙ABC上.

證. 聯PB, PC,

則　$\angle BPC=\angle BPQ+\angle QPC$;　(?)

$\angle BPQ=\angle BSQ$,　(?)

$\angle QPC=\angle ARQ$;　(?)

∴　$\angle BPC=\angle BSQ+\angle ARQ$.

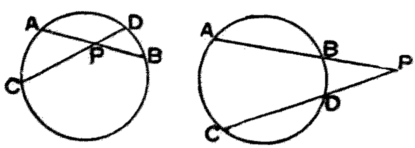
但　$\angle BAC+\angle BSQ+\angle ARQ=2\text{rt.}\angle s$,

∴　$\angle BAC+\angle BPC=2\text{rt.}\angle s$.

故P在⊙ABC上.　(證題術XXIII之d)

§69. 共圓點.

證題術 XXIV. 證四點A, B, C, D共圓,往往(a)先證$\angle ABC=\angle ADC$(若B與D在AC直線之同側),或(b)先證$\angle ABC+\angle ADC=2\text{rt.}\angle s$(若B, D在AC直線之異側),或(c)作ABC圓,證D在其上,或(d)聯AB及CD,證其必相交于二線段之內部(或證其必相交於二延長線上)一點P, $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

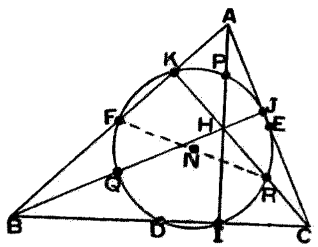


第145圖

例 1.　一三角形之三邊中點,三高線足,及由垂心至各頂點之線段之三中點,共凡九點,在一圓上.(稱爲該三角形之九點圓 nine-point circle).

題設:　D, E, F 爲 $\triangle ABC$ 之三邊中點, AI, BJ, CK 爲三高線, H 爲垂心, 而 P, Q, R 爲 HA, HB, HC 之中點.

題斷:　D, E, F; I, J, K; P, Q, R 九點在一圓上.



第 146 圖

分析.　$\angle RKF$ 爲直角. 果九點同在一圓上, 該圓自必以 FR 爲直徑,而其他六點對 FR 之角必皆爲直角.今即視察此六角是否直角可也.

證.　以 FR 爲直徑作一圓命其圓心爲 N.

因 $\angle FKR = rt.\angle$,故 K 在該圓上, (證題術 XXIII 之 b).

因 $FD \parallel AC$, $DR \parallel BH$, 而 $BH \perp AC$;

$$\therefore \quad \angle FDR = rt.\angle,$$

故 D 在 $\odot N$ 上, (證題術 XXIII 之 b).

E, P, Q 之在 $\odot N$ 上, 理亦同然.

因 $\angle RIC = \angle RCI$, $\angle FIB = \angle FBI$,

而 $$\angle FBI + \angle RCI = rt.\angle,$$

$$\therefore \quad \angle RIC + \angle FIB = rt.\angle,$$

$$\therefore \quad \angle FIR = rt.\angle,$$

故I點在⊙N上,(證題術XXIII之b).

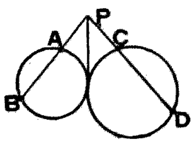
他如J點之在⊙N上,其理由亦類此.

故九點共圓.

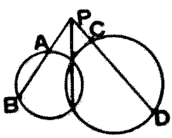
習題104. 等腰梯形之頂點共圓.

習題105. 兩圓相切,由過切點之公切線上一點P作一直線與一圓相交于A, B, 又作一直線與他圓相交于C, D, 則A, B, C, D在一圓上.(第147圖)

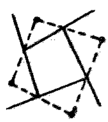
習題106. 兩圓相交,由其公弦或延長線上一點P作直線與一圓相交於A, B, 又作一直線與他圓相交于C, D, 則A, B, C, D四點共圓.(第148圖)



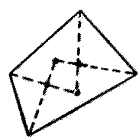
第147圖



第148圖



第149圖



第150圖

習題107. 四邊形四外角之平分線必圍成一圓內接四邊形.(第149圖)

習題108. 四邊形相鄰內角之平分線兩兩相交,凡四交點,必共圓,或竟爲一點.(第150圖)

習題109. §68例1圖中有三圓,其三圓心與P共圓.

§70. 共點圓.

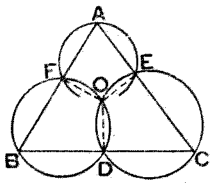
證題術XXV. 證三圓共點,往往先證其中二

圓必相交于一點;然後證此點在第三圓上.

例1.　于△ABC之三邊上任意指定D, E, F三點,則AEF, BFD, CDE三圓共點.（有稱之爲Pivot's theorem者,有稱爲Miquel's theorem者,亦有稱之爲point O theorem者.）

證.　設BFD, CDE二圓再相交于O.

(i) 若O在三角形內,



第151圖

則　$\angle OFB=\angle ODC$,

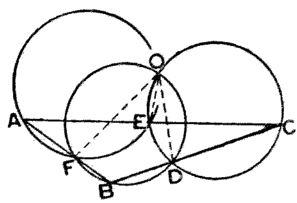
$\angle ODC=\angle OEA$,

$\therefore$　$\angle OFB=\angle OEA$,

即　$\angle OFA+\angle OEA=2rt.\angle s$,

故O與A,E,F在一圓上.

(ii) 若O在形外,但在∠B內,



第152圖

則　$\angle OFA=\angle ODB$,

$\angle OEC=\angle ODC$,

$\therefore \angle OFA+\angle OEC=2rt.\angle s$,

即　$\angle OFA=\angle OEA$,

故O與A,E,F在一圓上.

(iii) 若O在形外,但在∠A內,[註]

註. 讀者乍讀至此,必發疑問曰:「O在∠A內不猶在∠B內乎?」其實不然. 若吾人已知三圓會于O,則O之于∠A,誠有若于其于∠B或∠C者. 然吾人今但知O爲BFD與CDE二圓之交點耳.「謂O在∠C內,猶之在∠B內」可,「謂O在∠A內,猶之在∠B內」則不可. 故(ii),(iii)不爲重. 此甚可注意.

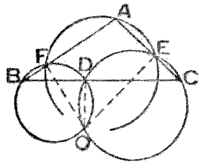
則 $\angle OEC=\angle ODC$,

$\angle OFB=\angle ODB$,

$\therefore\ \angle OEC+\angle OFB=2rt.\angle s.$

即 $\angle OEA+\angle OFA=2rt.\angle s$,

故O與A,E,F在一圓上.



第 153 圖

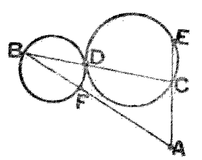
(指定三點時,不必限定在邊上,縱有一點,二點,或三點在其延長線上亦可. 未曾證畢之工作,留待學者完成之.)

下列各題可做上法獨立證明,毋以上例爲根據. 但須知110-113皆爲上例之一特例.

習題 110. △ABC之三高線爲AD, BE, CF則AEF, BFD, CDE三圓會于一點. 此點何名?

習題 111. △ABC之三邊中點若爲D, E, F, 則AEF, BFD, CDE三圓會于一點. 此點何名?

習題 112. △ABC之三邊上有三點D, E, F; AE=AF, BF=BD, CD=CE, 則AEF, BFD, CDE三圓會於一點. 此點何名? (D, E, F三點,可在邊上,延長線上,試根據習題82分別考究之.)

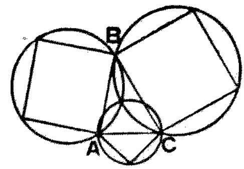


第 154 圖

習題 113. 兩圓相切于D,過切點作直線與兩圓相交于B, C, 過B點作AB與同圓相交于F, 又過C點作AC與同圓相交于E, 則A, E, D, F四點共圓.

習題 114. 第 77 圖三正三角形之外接圓會于一點.

習題 115. 于 △ABC 之 AB 邊及 BC 邊上各作一正方形,又以 AC 爲弦作一直角三角形,皆在原形外,則新成三形之外接圓必會于一點.(第 155 圖)



第 155 圖

第八章　不等

§71. 不等之根據. 初等幾何中可以比較大小之量凡四,曰兩線段,曰兩角,曰同圓或等圓上之兩弧,曰兩面積. 面積俟下篇論之. 茲先論前三者.

三者相類之根據爲

(i) 若 B 在 AC 線段上,則

$$AB+BC=AC, \qquad \text{而 } AC>AB;$$

(ii) 若 B′ 在 A′C′ 弧上,則

$$\overset{\frown}{A'B'}+\overset{\frown}{B'C'}=\overset{\frown}{A'C'}, \qquad \text{而 } \overset{\frown}{A'C'}>\overset{\frown}{A'B'};$$

(iii) 若 OB″ 半線在 ∠A″OC″ 間,則

$$\angle A''OB''+\angle B''OC''=\angle A''OC'', \text{ 而 } \angle A''OC''>\angle A''OB''.$$

此爲各該量大小之根本意義,即所謂「全大于分」者也.

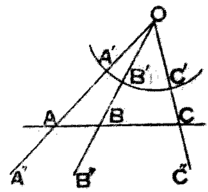
(iv) 若 OA″,OB″,OC″ 爲任意三半線與任意一⊙O

交于 A′,B′,C′, 又與任意一直線交于 A, B, C, 則

B 在 AC 線段上,

B′ 在 $\widehat{A'C'}$ 上,

OB″ 在 ∠A″OC″間,



第 156 圖

三語互爲因果. 此爲三者之基本關聯.

至于比較大小時常用之基本根據,

在線段爲:

(v) 三角形二邊之和大于其餘一邊;

在角爲:

(vi) 三角形之外角等于相對二內角之和, 故大于其任意一角;

在弧爲:

(vii) 同圓或等圓內, 弧之加減及大小可以其所對之圓心角計算之,或以所對之圓周角比較之.

§72. 不等腰三角形.

定理一. 一三角形內若有二邊不相等則對大邊之角較大.

題意: 若 AB>AC, 則 ∠C>∠B.

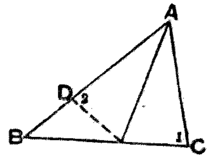
分析. (1) 角之大小根據何在?

答: 三角形之外角及相對內角.

(2) 如何能使∠C與∠B處于一三角形外角與相對內角之關係?

答: 褶∠A使AC褶疊于AD.

(3) 如此,則 $\angle 1=\angle 2>\angle B$.



第157圖

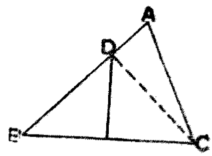
定理二. 一三角形內,若有二角不相等則對大角之邊較大.

題意: 若 $\angle B<\angle C$, 則 $AC<AB$.

分析 (1) 線段之大小根據何在?

答: 在△之二邊和與第三邊.

(2) 如何能使AB爲一△二邊之和而AC爲其第三邊?



第158圖

答: 褶∠B使疊于∠DCB.

(3) 如此則 $AB=AD+DB=AD+DC>AC$.

§73. 證題術 XXVI.

線段之不等式其題設不涉及角或弧之不等者,類能用§71之(v)證之. 角則用(vi).

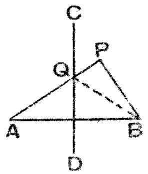
習題116. 同底兩三角形若一形在他形之內部,則外形二腰之和大於內形二腰之和,而內形之頂角大于外形之頂角.

習題117. 三角形中每中線必小於與之相鄰二邊之和之半,而大於差之半.

習題118. 三角形三中線之和小於該形之周,而大于形周之四分之三.

習題119. △ABC內心若爲I,則∠AIB必爲鈍角.

習題120. 一線段之垂直平分線以外之點與該線段兩端點距離不相等.



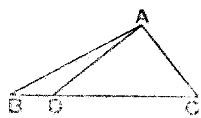
第 159 圖

如何能使PA成爲一三角形二邊之和而PB爲其第三邊?

前節之兩定理及上題之分析法甚有應用上之價值,學者務悉心揣摩之.

§ 74. **證題術** XVII. 欲證其不相等之兩線段(或兩角),若爲一三角形之二邊(或二角),可根據§72定理一(或定理二),即AB⋚AC⇄[註]∠ACB⋚∠ABC.

例1. 由△ABC之頂A至底BC上任意一點D之距離AD必小于二腰之一.



第 10 圖

證. 設令AD≮AB, 且 AD≮AC;

則 ∠ABD≮∠ADB, 且 ∠ACD≮∠ADC.

相加得 ∠ABD+∠ACD≮2rt.∠s

不合理(§34). 故AD必小于AB, AC二者之一.

註. 此記號表示左蘊含右,右亦蘊含左之意.

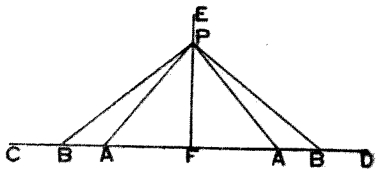
例 2. 由CD之垂直線EF內一點P作二直線PA, PB至CD, 則

FA ⪋ FB

又 PA ⪋ PB

又 ∠FPA ⪋ ∠FPB

又 ∠FAP ⪌ ∠FBP.

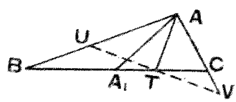


第 161 圖

習題121. 兩直角三角形之弦等,則勾大者股小;勾等,則弦大者股亦大.

習題122. 設D爲等腰△ABC底邊BC之中點, E爲△ABD內之一點,則∠AEB>∠AEC.

習題123. 不等腰三角形底邊上之中線必大於頂角之平分線(絕至底上). (第162圖)



第 162 圖

習題124. 三角形之角若不等,則角大者其頂點距垂心較近. 逆之亦眞.

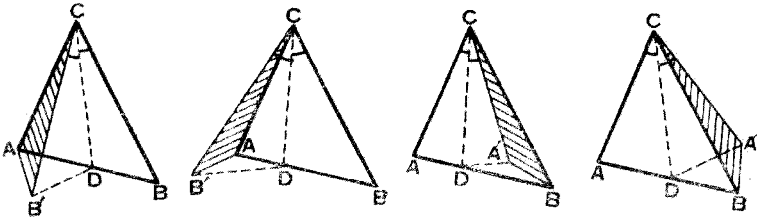
習題125. 三角形底邊之大于,等于,或小於該邊上之中線之二倍,全視頂角爲鈍角,直角,或銳角而定.

習題126. 非等腰三角形ABC頂點A處之外角平分線,或與BC之延長線相交,或與CB之延長線相交,全視AB>AC抑AC>AB而定.

§75. 有二邊互等之兩三角形.

定理一. 兩三角形中若有兩對邊彼此相等,而

夾角不等,則夾角大者第三邊亦大.



第 163 圖

分析: 今所欲證其不等之線段非一三角形之二邊,故宜移動一形聚于他形,使二線段成爲一三角形之二邊. 移法約有上圖所示四種;(1)小邊疊合,兩形相遮;(2)小邊疊合,兩形相鄰;(3)大邊疊合,兩形相遮;(4)大邊疊合兩形相鄰. 前二者在證明AB>AB′,後二者在證明AB>A′B,皆適用§72定理二及習題120之分析法.

定理二. 二三角形若有兩對邊彼此相等而第三邊不等,則邊大者對角必較大.

此定理若用順證法,則上定理之(2)(4)兩圖仍適用.

§76. 證題術 XXVIII. 欲證其不相等之兩線段(或兩角)若爲兩三角形之相當邊(或角),往往引用§75定理一(或定理二): 若AB=A′B′,AC=A′C′,則

$$\angle A \gtreqless \angle A' \quad 及 \quad BC \gtreqless B'C'.$$

習題127. 設AD爲△ABC之中線,則∠ADB之爲銳角,爲直角,抑爲鈍角,全視AB之小于,等于,或大于AC爲

轉移. 逆之亦眞.

習題128. 三角形之邊若不相等,則邊大者其上之中線必較小. 逆之亦眞.

習題129. 三角形之角若不相等,則角大者其頂點與重心之距離較近. 逆之亦眞.

習題130. 平行四邊形聯鈍角頂之對角線小于聯銳角頂之對角線. 逆之亦眞.

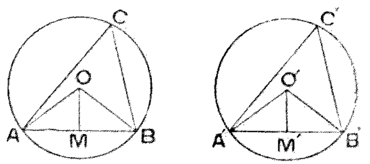
§77. 證題術XXIX. 等圓(或同圓)$\odot O$與$\odot O'$內,劣弧$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A'B'}$,及其所含之圓周角$\angle ACB$, $\angle A'C'B'$圓心角$\angle AOB$, $\angle A'O'B'$,弦AB, $A'B'$,弦與圓心之距離OM, $O'M'$,其大小可依下列關係推之:

$AB \gtreqless A'B'$

爻 $\angle AOB \gtreqless \angle A'O'B'$

爻 $\angle ACB \gtreqless \angle A'C'B'$

爻 $\overset{\frown}{AB} \gtreqless \overset{\frown}{A'B'}$ 爻 $OM \lesseqgtr O'M'$.



第164圖

習題131. 兩三角形ABC與$A'B'C'$中若$AB=A'B'$, $\angle C=\angle C'>$rt.$\angle$, $AC>A'C'$,則$BC<B'C'$.

習題132. 三角形中大邊上之高線必較小.

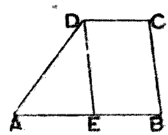
習題133. 三角形中大邊距重心較近.

§78. 證題術XXX. 若所欲比較大小之[illegible]線段(或角),其原位置不便比較,可遷移之使便于比較

移動之法約有三種:——

（一）平移.

例 1.　梯形ABCD中,若AB爲大底,而AD>BC,求證∠B>∠A.



第 165 圖

將CB平移至DE.

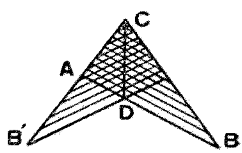
(爲使之與AD作一三角形之邊也).

則AD>DE,故∠DEA>∠A,即∠B>∠A.

（二）翻褶.

翻褶之特例有二,(1)以一線之垂直平分線爲軸,翻褶之使該線段自相疊合,如§72定理二是也.　(2)以一角之平分線爲軸,翻褶之,使該角自相疊置,如§72定理一是也.

例 2.　△ABC中,若BC>AC,而CD平分∠C,交AB于D,則DB>AD.



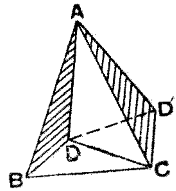
第166圖

將△CDB依CD翻褶而置之于△CDB′,如此,欲證DB′>AD,但比較∠B′及∠B′AD,或(因∠B′=∠B)比較∠B及∠B′AD可也.　∠B′AD爲△ABC之外角,故大于∠B.由此往前證之不難竣事矣.

（三）旋轉.

例 3.　若於等腰△ABC (AB=AC)內部取一點D,使

$\angle ADB > \angle ADC$, 則 $DC > DB$.



第 167 圖

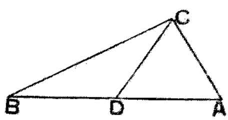
將 $\triangle ABD$ 繞 A 點旋轉至 $\triangle AD'C$, 則 $\angle AD'C > \angle ADC$. 然 $AD = AD'$, $\angle AD'D = \angle ADD'$, $\therefore \angle DD'C > \angle D'DC$.

$\therefore CD > CD'$, 即 $CD > DB$.

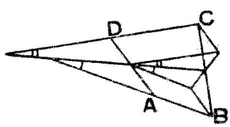
習題 134. 三角形頂角之平分線小于二腰和之半.

習題 135. 若 ABC 爲正三角形, D 非 ⊙ABC 上 BC 弧上之點, 求證 $DB + DC > DA$. (借用 167 圖, 此係 §62 例 1 之逆).

習題 136. $\triangle ABC$ 中 $BC > AC$, 而 CD 爲中線, (第 168 圖) 則 $\angle ACD > \angle BCD$.



第 168 圖



第 169 圖

習題 137. 四邊形 ABCD 中 $CD > AB$, 則 BC 與 AD 之中點聯結線與 AB 之交角大于其與 CD 之交角. (第 169 圖)

雜　題

習題 138. 試用習題 120 及 122 證 §78 例 3.

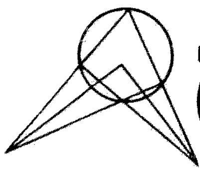
習題 139. 習題 94, $\triangle ABC$ 之三角, 若無一過 $120°$ 者, 則　$PA' = PB + PC$,　$PB' = PC + PA$,　$PC' = PA + PB$.

習題 140. 上題若 $\angle A > 120°$ 則

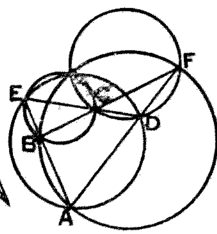
$$PA'=PB+PC,\quad PB'=PC-PA,\quad PC'=PB-PA.$$

習題141. 習題29中三正方形對角線交點若爲O, O′, O″, 則 (i) AD, CF, GE, BO′ 四線; (ii) AF, BK, DH, CO″ 四線; (iii) AO, BO′, CO″ 三線各會于一點.

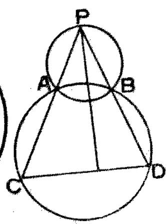
習題142. 習題29之AD與BK, AE與CF, BK與CF之交點命爲X, Y, Z, 則AZ⊥XY. (利用習題50或93證之)



第170圖



第171圖



第172圖

習題143. 圓內接四邊形相對邊之延長線若皆相交,則二交角之平分線互相垂直. (第170圖)

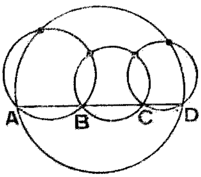
習題144. 延長ABCD四邊形之AB,DC交于E, BC, AD交于F,則ABF, BCE, CDF, DAE四圓會于一點.

此點稱爲Miquel's point. (第171圖)

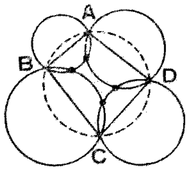
習題145. Miquel's point 對于ABF, BCE, CDF, DAE四三角形之四Simson's lines合而爲一.

習題146. 兩圓相交于A, B. 由一圓上一點P作PA及PB與他圓相交于C, D. 求證⊙ABP內過P之直徑垂直于CD (第172圖). 試說明習題53係本題之特例.

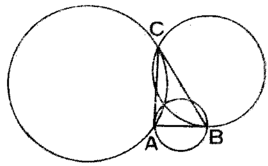
習題147. 設A, B, C, D爲共線四點. 以AB, BC, CD, DA爲弦每任意作一圓, 四圓輪迴相交, 凡四交點, 必共線或共圓. (第173圖)



第173圖



第174圖



第175圖

習題148. 以圓內接四邊形之各邊爲弦,任作四圓,鄰圓相交,凡四交點,必共線或共圓.(第174圖)

習題149. 以△ABC之BC邊爲弦,作一圓切于AB邊以CA邊爲弦,作一圓切于BC邊;以AB邊爲弦,作一圓切于CA邊;三圓共點. (此點稱爲△ABC之Brocard point 其實即§70例1之point O, 惟E重于A, F重于B, D重於C耳, 第175圖).

習題150. 聯三角形上二點之線必小于三邊之一(引用§74例1證之.)

習題151. 兩凸多邊形,若一形完全在他形之內則外形之周必較大. (注意與§53例2之區別.)

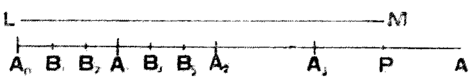
第三篇

幾何計算

第一章　線段計算

§79. **線段量法.** 欲計線段之長短,須預選一標準尺. 幾何中辦法如下:

選定一半線 A_0A. 于其上指一點 A_1. 于 A_0A_1 之延長線上取 $A_2, A_3, \cdots$ 等點,令 $A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots$. 於是稱 $A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, \cdots$ 各線段之量數 (measure) 爲 1, 2, 3, $\cdots$, A_0A_0 之量數爲 0. 均分 A_0A_1 爲 3 等份, 于 A_0A_1 半線上順次取與之相等之線段,即取 $A_0B_1 = B_1B_2 = B_2A_1 = A_1B_4 = B_4B_5 = B_5A_2 = \cdots$, 於是稱 $A_0B_1, A_0B_2, A_0A_1, A_0B_4, \cdots$ 之量數爲 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \cdots$. 均分 A_0A_1 爲 d 等份,于 A_0A_1 半線上取 $A_0C_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = \cdots\cdots$, (其 C_d 即 A_1, C_{2d} 即 $A_2, \cdots$), 於是稱 A_0C_n 之量數爲 $\frac{n}{d}$.



第 176 圖

凡 A_0A 半線上之線段 A_0P, 其量數爲整數或分數者,其量數之義概行規定之如此. 其量數爲無理數者俟末篇論極限時定之. 今姑假定:——

較量公理. A_0A 半線上之任意一線段 A_0P 各有一對應之量數 p, 或爲有理數,或爲無理數.[註]

欲定任意一線段 LM 之量數,可于 A_0A 半線上取一線段 A_0P=LM, 于是 A_0P 之量數 p 即稱爲 LM 之量數.

如上所用之標準尺,一經選定,即永遠沿用. 非有特別聲明,即係指此惟一之標準尺言. 蓋標準尺更換,則各線段之量數皆隨之而變,易滋感亂也. 標準尺上之重要點爲 A_1. A_0A_1 爲單位,亦曰幺率 (unity). A_1 點變動則單位 A_0A_1 變,而各線段之量數亦變矣.

§80. 線段計算.

幾何中關於線段之計算,爲義不一. 本書以後一概指量數之計算言. 例如吾人謂「勾方加股方等于弦方」乃指「勾之量數之平方,加股之量數之平方,等于弦之量數之平方」. 譬如勾 3, 股 4, 弦 5 之直角三角形 ABC 中, $BC^2+CA^2=AB^2$ 乃指 $3^2+4^2=5^2$ 而言. 既指量數言,故凡與 BC 量數相同之線段 B′C′, 皆可以之攙入含 BC 之計算式中而代替 BC. 因

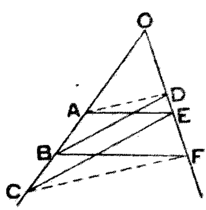
註. 注意: 吾人並未假定「每有一實數 p 即有一對應之線段 A_0P 以之爲量數」.

$BC^2+CA^2=AB^2$ 與 $B'C'^2+CA^2=AB^2$ 均係指 $3^2+4^2=5^2$ 也.

此即通常所謂代替原理(principle of substiution)者也.

§81. 關于線段計算之推證法. §60所引之Pascal's定理「若OABC與ODEF二直線交于O, 且AE ∥ BF, DB ∥ EC, 則AD ∥ CF」通常多證之如下:——

因	AE ∥ BF,	(甲)
故	OA : OB = OE : OF;	(乙)
因	DB ∥ EC,	(丙)
故	OB : OC = OD : OE.	(丁)
乙丁相乘得	OA : OC = OD : OF,	(戊)
故	AD ∥ CF.	(己)



第177圖

乙,丁,戊三語有計算意義,吾人姑謂之爲計長語;甲,丙,己三語無計算意義,吾人姑謂之爲非計長語. 于是幾何之推證,大別之可分四種:——

第一種. 由一非計長語推論及一非計長語. 如謂「甲且丙 ⊃ 己」是也.

第二種. 由一非計長語推論及一計長語. 如謂「甲 ⊃ 乙」,「丙 ⊃ 丁」皆是也.

第三種. 由一計長語推論及一非計長語. 如謂「戊 ⊃ 己」是也.

第四種. 乃由一計長語推論及一計長語. 如謂「乙且丁 ⊃ 戊」是也.

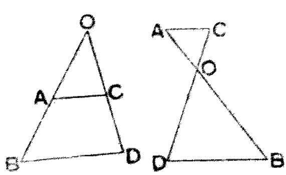
第一種爲純粹形的問題,必須於幾何書中求根據.第四種爲純粹數的問題,必須于代數中求根據.第二三兩種,所以由形推數,由數論形者也,必有可以溝通形數而貫穿其義者以爲推證之工具方可.是爲形數互譯之字典:——

§82. **線段計算之基本定理.** 關於線段計算,吾人先提出二定理以爲根據.至於第二定理之證明,其略已見初中教科書,其詳請俟之末篇.

定理一. 若B爲AC線段上之點,則AB+BC＝AC.逆之亦眞.

定理二. 若AB與CD二直線交于O,則AC ∥ BD之必須且勝任之條件爲OA:OB＝OC:OD.

第178圖



第179圖

凡由計長語推演非計長語,或由非計長語推演計長語悉可按此二定理及其演繹之理以譯之.玆略舉重要數則于次頁,其他學者可續塡之.

字　　典

(由左而右,或由右而左,均用之)

非計長語 (彼此互推據幾何)	計長語 (彼此互推據代數)
(i) A, B, C 三點不共線.	(i) BC, CA, AB 三者中二者之和大于其餘一者(或二者之差小于其餘一者).
(ii) B 在 AC 線段上.	(ii) $AB+BC=AC$. (或 $AC-AB=BC$).
(iii) BA 與 DC 二線段之延長線交于 O, $AC \parallel BD$, (或 $\angle OAC=\angle OBD$).	(iii) $OA+AB=OB$, $OC+CD=OD$, $OA:OB=OC:OD$, (或 $OA\cdot OD=OB\cdot OC$).
(iv) $AC\perp BC$.	(iv) $AC^2+BC^2=AB^2$.

習題 152.　若 A,B,C,D,E 爲共線之點,其順序爲 {ABCDE},則　$AB+BC+CD+DE=AE.$　【公式 I】

習題 153.　若 A,B,C,D 爲共線之點,其順序爲{ABCD}則　$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD.$　【公式 II】

提示.　$AC\cdot BD=AC(AD-AB),$

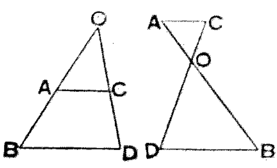
$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AB(AD-AC)+AD(AC-AB).$$

習題 154.　若 M 爲 AB 之中點, P 爲 AB 直線上一點,則當 P 在 BA 之延長線上時, $PA+PB=2\cdot PM,$ 當 P 在 BM 之間時, $PA-BP=2\cdot PM.$　【公式 III】

習題 155.　設 A, B, C, P 爲共線之點, $AB:BC=h:k,$

若順序爲{ABCP}則 $\dfrac{h\cdot CP+k\cdot AP}{h+k}=BP.$　【公式 IV】

習題 156.　若(第 180 圖)



第 180 圖

$OA:OB=OC:OD;$　【公式 V】

則 $OA\cdot OD=OB\cdot OC,$　【公式 VI】

$OA:OC=OB:OD,$　【公式 VII】

$OB:OA=OD:OC,$　【公式 VIII】

$\dfrac{OA+OB}{OB}=\dfrac{OC+OD}{OD}$, (在右圖即 $\dfrac{AB}{OB}=\dfrac{CD}{OD}$)　【公式 IX】

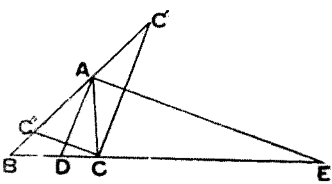
$\dfrac{OB-OA}{OB}=\dfrac{OD-OC}{OD}$, (在左圖即 $\dfrac{AB}{OB}=\dfrac{CD}{OD}$)　【公式 X】

$\dfrac{OB+OA}{OB-OA}=\dfrac{OD+OC}{OD-OC}\cdot$　【公式 XI】

此七關係有一成立,則皆成立. 故七方程之成立各為上圖中 $AC \parallel BD$ 之必須且勝任之條件.

§ 83. **證題術 XXXI.** 欲證四線段成比例,(或二線段之積等于他二線段之積) 可將四線段遷移之,使便于利用§82之定理二(即公式 V-XI).

例 1. 三角形頂角(內角或外角)之平分線將底邊割(內分或外分)為兩段,其比等于二邊之比.



第 181 圖

題設: AD 平分$\angle BAC$,AE 平分 $\angle BAC$ 之鄰補角,交 BA 于 D, E.

題斷:

$$\left.\begin{aligned} BD:DC &= AB:AC, \\ BE:CE &= AB:AC. \end{aligned}\right\}$$ 【公式 XII】

證. 延長 BA 于C′ 令$AC' = AC$,于 AB 半線上取C″ 令 $AC'' = AC$. 則 $\angle ACC' = AC'C = \frac{1}{2}\angle BAC$, (因$AC' = AC$)

$\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC$, (題設)

$\therefore$ $\angle BAD = \angle BC'C$, $AD \parallel C'C$;

$AB:AC' = DB:DC$. (公式 X)

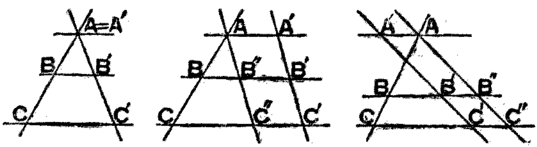
$\therefore$ $AB:AC = DB:DC$. (代替)

同理 $AB:AC = EB:EC$.

(此種證法無異將AC旋轉之至AC′使與BA,DC,BD列成第179圖各線段之形勢.)

【備考】 如此之D,E二點,一內分,一外分BC線成等比$BD:DC=BE:CE$者,稱爲將BC線段調和分割(dividing BC harmonically.)當$AB>AC$時,D近于C,E在BC之延長線上.當$AB<AC$時,D近于B,E在CB之延長線上.當$AB=AC$時,D爲BC之中點,E則烏有(因$\angle BAC$之外角平分線$\parallel BC$,無交點也.)

例2. 平行三直線必將與之相交之二直線割成比例.



第 182 圖

題設: $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, ABC與A'B'C'爲二直線.

題斷: $AB:BC=A'B':B'C'$. 【公式XIII】

證. 若二割線相交于三平行線之一,則題斷無異公式X. 否則作直線$\parallel A'B'$交三平行線于A,B'',C''.

則 $AB:BC=AB'':B''C''$, (公式X)

$\therefore$ $AB:BC=A'B':B'C'$. (代替)

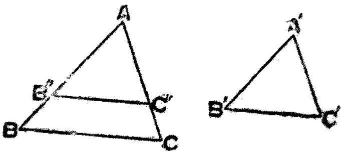
(此無異將A'C'平移之于AC'',使得利用定理二.)

例3.　互等角二三角形之相當邊成比例.

題設:　$\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=C'$.

題斷:　$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$ [註]　【公式 XIV】

證.　若 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$, 則題斷所云,實所當然. 否則可於AB半線上取 $AB''=A'B'$, 于AC半線上取 $AC''=A'C'$. 于是



第 183 圖

$\triangle AB''C''\cong\triangle A'B'C'$;　(s. a. s.)

而　$AB'':AB=AC'':AC$.　(§82定理二)

$\therefore$　$A'B':AB=A'C':AC$.　(代替)

同理　$B'C':BC=A'C':AC$.

故題斷云云.

此猶將 $\triangle A'B'C'$ 遷置于 $\triangle AB''C''$, 使 $A'B'$, $A'C'$, AB, AC四線段列成第179圖之形勢,以利用定理二也.

習題157. 試製例1之逆定理證之.

習證158. $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 若有下例三條件之一,必互等角.

註.　此種關係或寫作 $AB:BC:CA=A'B':B'C':C'A'$.

(i) $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$.

(ii) $\angle A=\angle A'$, $AB:A'B'=AC:A'C'$.

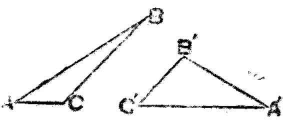
(iii) $AB:A'B'=BC:B'C'=CA:C'A'$.(先取$AB''=A'B'$,作$B''C''\parallel BC$. 次證$AB'':A'B'=B''C'':B'C'=C''A:C'A'$,繼證$\triangle AB''C''\cong\triangle A'B'C'$.)

習題159. $\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中若$AB:A'B'=BC:B'C'$, $\angle A=\angle A'$,則$\angle C=\angle C'$或$\angle C+\angle C'=2$rt. $\angle$s.

(參考§54之(5)及§100例1).

習題160. $\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中若$\angle C+\angle C'=2$rt. $\angle$s, $\angle A=\angle A'$,則$AB:A'B'=BC:B'C'$.

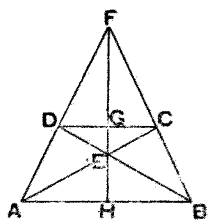
(與§54之(5)及§100例1比較之)



第184圖

注意: 據此以證公式XII無容加輔助線CC',CC'',AC',AC''.

習題161. 例2之中圖$CC'-AA':BB'-AA'=AC:AB$;其右圖則$CC'+AA':BB'+AA'=AC:AB$.



第185圖

習題162. 右圖中之$AB\parallel DC$

$AB=7$, $CD=4$,

求 $GE:EH$, $AD:DF$, $FG:GE$.

習題163. 右圖若$AE=5$, $CA=8$,

求 $DC:AB$, $FG:GH$.

習題164.　上圖祇須DC∥AB即可得CG=GD, AH=HB.

習題165.　求證上題之EG : GF=EH : FH.

§ 84. 互等角三角形法. 互等角三角形爲因形測數,就數論形,最通用之工具.

證題術XXXII.　凡證四線段成比例,(或證二角相等,)若四線段(或二角)爲二三角形之相當邊(或角),往往利用互等角三角形定理(§83例3,及習題158)證之.

例1.　若CF爲△ABC之高線,∠ACB=rt.∠,則

$AC^2=AF\cdot AB$, $BC^2=FB\cdot AB$　【公式XV】

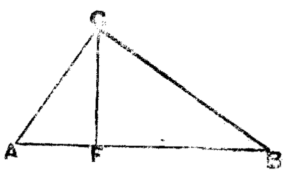
$CF^2=AF\cdot FB$　【公式XVI】

$AC^2+BC^2=AB^2$　【公式XVII】

$AC^2 : BC^2=AF : FB$【公式XVIII】

$AC^2 : CF^2=AB : FB$　【公式XIX】

$AC^2 : AB^2=AF : AB$　【公式XX】



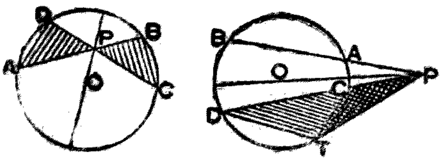
第186圖

且XV, XVI, XVII, XX皆爲使∠ACB=rt.∠之賸任條件.(XVIII, XIX之不足必∠ACB=rt.∠,見第六篇習題493, 494.)

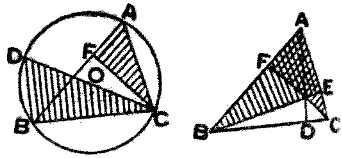
習題166. 由P點作二直線與⊙O交于A, B及C, D,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{若P在圓內,則} & AP\cdot PB = CP\cdot PD \\ \text{若P在圓外,則} & AP\cdot BP = CP\cdot DP = PT^2\end{array}\right\}\text{【公式 XXI】}$$

此中PT為切線,T為切點. 試證明之,並分別製其逆定理而證之.



第 187 圖

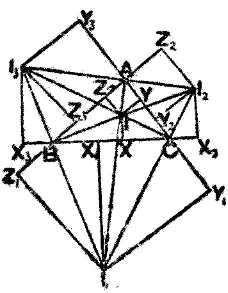


第 188 圖

習題167. $ah_a = bh_b = ch_c = \dfrac{abc}{2R}$　　【公式 XXII】

此中2R乃外接圓之直徑.

習題168. 據習題82證:



第 189 圖

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{r}{s-a} = \dfrac{r_1}{s} = \dfrac{s-c}{r_2} = \dfrac{s-b}{r_3} \\[2ex] \dfrac{r}{s-b} = \dfrac{r_2}{s} = \dfrac{s-a}{r_3} = \dfrac{s-c}{r_1} \\[2ex] \dfrac{r}{s-c} = \dfrac{r_3}{s} = \dfrac{s-b}{r_1} = \dfrac{s-a}{r_2}\end{array}\right\}\text{【公式 XXIII】}$$

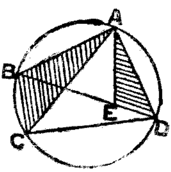
此數公式之證明甚易,僅用相似直角三角形足矣,而其用則甚廣,凡以三邊表△ABC其他各部之公式,蓋莫不可據此以證之.

§ 85. **多項式.** 以前各公式,多係言獨項與獨項相等者,故悉可用互等角三角形法證之.

證題術 XXXIII. 公式中若有多項式,可設法改爲獨項式之形狀以證之.

如證公式 XVII 時,將 AC^2+BC^2 改爲 $AF\cdot AB+FB\cdot AB=(AF+FB)\cdot AB$ 是其例也.

例 1. (Ptolemy's 定理). 圓內接四邊形對邊相乘之積之和等于對角線相乘之積.



第 190 圖

題設: ABCD 爲一圓內接四邊形.

題斷: $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

【公式 XXIV】

分析: 斷案苟眞,則 BD 必可分爲二段,BE, ED, 能使 $AC\cdot BE=AB\cdot CD$,

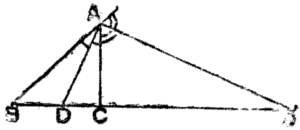
而 $AC\cdot ED=AD\cdot BC$.

證. 作直線 AE 交 BD 于 E,

令 $\angle CAB=\angle DAE$,	則 $\angle CAD=\angle BAE$.
$\because \angle ACB=\angle ADE$,	$\angle ACD=\angle ABE$ (同弧),
$\therefore \triangle ACB$ 與 $\triangle ADE$ 互等角;	$\triangle ACD$ 與 $\triangle ABE$ 互等角;
$\therefore AD\cdot BC=AC\cdot ED$.	$AB\cdot CD=AC\cdot BE$. (§83 例 3)

相加得 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC(BE+ED)=AC\cdot BD$.

例 2. 三角形之二腰之積,等于頂角內角(或外角)平分線內分(或外分)底邊上二段相乘之積,加(或減)該平分線(止于對邊)之平方.



第 191 圖

題設: AD 及 AD′ 平分 ∠BAC 及其鄰補角,交 BC 于 D 及 D′.

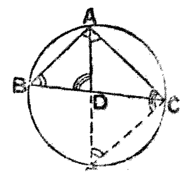
題斷: (i) $AB\cdot AC=BD\cdot DC+AD^2$

(ii) $AB\cdot AC=BD'\cdot CD'-AD'^2$ 】【公式 XXV】

分析: 右方爲多項式,可設法析出一因數 AD.

證 (i).

延長 AD 至 F 令 ∠AFC=∠ABD.



第 192 圖

則 △DBA 與 △DFC 互等角, (二角)

$\therefore$ $AD:BD=DC:DF$, (§83 例 3)

$\therefore$ $BD\cdot DC=AD\cdot DF$,

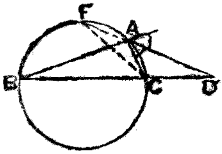
$BD\cdot DC+AD^2=AD(DF+AD)=AD\cdot AF$

又 △ABD 與 △AFC 互等角, (二角)

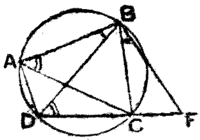
$\therefore$ $AB\cdot AC=AD\cdot AF$.

代入上式得 $AB\cdot AC=BD\cdot DC+AD^2$.

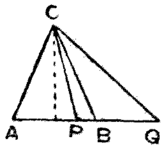
此法之由來,係見 (i) 之右方第二項有因數 AD, 而第一項 BD·DC 無之,故先將 BD·DC 變爲 AD·DF, 然後右方乃能變爲二線段 AD 及 (DF+AD) 之積.



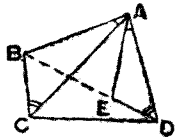
第 193 圖



第 194 圖



第 195 圖



第 196 圖

習題 169. 證公式 XXV 之第二公式.

習題 170. 公式 XXIV 又可將各項提出因數 AB 以證之.

(作 $\angle CBF=\angle ABD$.)

習題 171. 習題 166 中求證

$$\left.\begin{array}{l} AP\cdot PB=CP\cdot PD=OA^2-OP^2, \\ \text{或 } AP\cdot BP=CP\cdot DP=OP^2-OA^2. \end{array}\right\} \text{【公式 XXVI】}$$

(注意: $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$)

習題 172. P 爲等腰三角形 ABC 底邊 AB 上一點,則

$$AP\cdot PB=CA^2-CP^2. \qquad \text{【公式 XXVII】}$$

若 Q 爲 AB 延長線上之點,則

$$AQ\cdot BQ=CQ^2-CA^2. \qquad \text{【公式 XXVIII】}$$

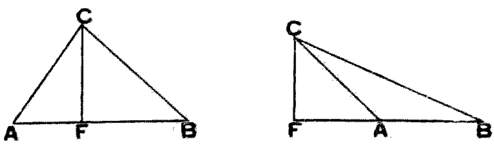
習題 173. 試製例 1 之逆定理證之.

§ 86. 代數證法.

證題術 XXXIV. 凡定理之題設爲非計長語而題斷爲計長語者,可將題設中各條件(用§82所指形數互譯之字典)盡譯爲方程,然後用代數學方法以誘導題斷. 逆之類是.

例 1. 設 CF 爲 △ABC 之高線,

若 $\angle A <$ rt. $\angle$, 則 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AF$,
若 $\angle A >$ rt. $\angle$, 則 $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\cdot AB\cdot FA$.
【公式XXIX】



第 197 圖

證. (i). $CF \perp AB$, 垂足 F 在 AB 半線上,其結果不過(1) $AC^2 = CF^2 + FA^2$, (2) $BC^2 = CF^2 + FB^2$, (3) $AB = AF + FB$ 或 $AF = AB + BF$. (故此後遂爲代數的變化.)

(2), (1) 相減得

$$BC^2 - AC^2 = FB^2 - FA^2$$

$$= (AB - AF)^2 - FA^2 \qquad \text{據 (3)}$$

$$= AB^2 - 2\cdot AB\cdot AF,$$

即 $$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AF.$$

第二方程之證法與此相類,學者可自證之.

【備考】. 公式 XVII 稱爲 Pythagoras' 定理,公式 XXIX 稱爲廣 Pythagoras' 定理. 合此三者,在三角術中稱爲餘弦定律 (law of cosine) : $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot \cos A$, 其說見三角術.

習題 174. (Apollonius' 定理). 在一三角形中.

$$2a^2+2b^2=c^2+4m_c^2.\qquad 【公式 XXX】$$

習題 175. 在一平行四邊形 ABCD 中,

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2.\ 【公式 XXXI】$$

習題 176. △ABC 之 a, b, c 已知,求證 AC 在 AB 上之正射影 $AF=\pm\dfrac{a^2-b^2-c^2}{2c}$,

故證 $h_c^2=\dfrac{(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2}{4c^2}$

$$=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}$$

$$=\frac{4}{c^2}\left\{s(s-a)(s-b)(s-c)\right\}\qquad 【公式 XXXII】$$

習題 177. △ABC 之 a=13, b=14, c=15.

(i) A, B, C 諸角各較直角何如?

(ii) AC 在 AB 上之正射影 AF=?

(iii) $h_c=?$ $h_a=?$ $h_b=?$

(iv) $m_c=?$ $m_a=?$ $m_b=?$

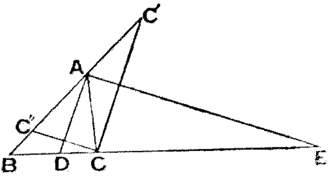
(v) R=?

習題178. $a=13$, $b=20$, $c=21$, 試計算上題各線段之長.

習題179. 求證§83例1圖中若$c>b$,則

$$BD=\frac{ac}{c+b},\quad BE=\frac{ac}{c-b},$$

$$DC=\frac{ab}{c+b},\quad CE=\frac{ab}{c-b}.$$



第 198 圖

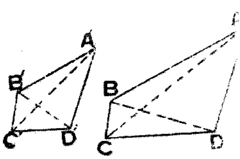
並就上二題所設之邊長,計算此四線段之長.

第二章 相似形

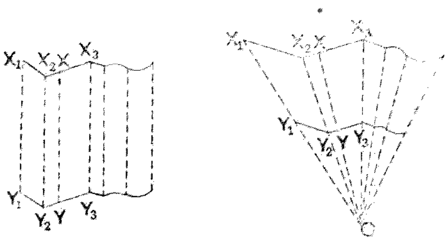
§87. 配景相似形.

定義. 二形[X]與[Y]中之點有一對一之對應,且對應線互相平行[註]且同向者(即每當[X]中之X_1, X_2二點與[Y]中之Y_1, Y_2二點對應,則$X_1X_2 \parallel Y_1Y_2$),謂之配景相似(homothetic),或簡稱配似.

註. 右二形,其邊雖兩兩平行,但不得謂之配景相似. 因若認A與A', B與B', C與C', D與D'為對應點,則AB與A'B', BC與B'C', CD與C'D', DA與D'A', AC與A'C', BD與B'D'為對應線,前四者雖互相平行,而後二者則否. 故不合定義.



第 199 圖



第 200 圖

定理一. 二形之點一一對應,對應點之聯線會于一定點且被此點外分爲定比者,二形必爲配景相似.

證. 設[X]與[Y]爲該二形,X_1, X_2 與 Y_1, Y_2 對應,O爲該定點. 則

O, X_1, Y_1 共線, O, X_2, Y_2 共線,　　(題設)

$OX_1 : OY_1 = OX_2 : OY_2$,　　(題設)

$\therefore X_1X_2 \parallel Y_1Y_2$.　　(§82 定理二)

故據上述定義,知[X]與[Y]二形配似.

【備考】 如此之O點,若以之加入第一形[X]中,則其在第二形[Y]之對應點亦爲O. 故O可認爲公于兩形,自相對應. 是故稱爲二形之二重點(double point). 吾人按配似辦法,據O點,由[Y]形以求[X]形,(或由[X]形以求[Y]形.)謂之放大(expansion), OX:OY稱爲放大比. 當放大時,每點Y皆放至另一點X,惟O則屹然不動 以是O又稱爲不變點(invariant point). 又配景相似乃平移或放大之結果也.

定理二.　定義.　配景相似形［X］與［Y］，此形中二點之聯線與彼形中對應點之聯線,爲對應線(如 X_1X_2 與 Y_1Y_2 是).　此形中一角與彼形中對應半線之交角爲對應角(如 $\angle X_1X_2X_3$ 與 $\angle Y_1Y_2Y_3$ 是).

(i) 對應角相等,(如 $\angle X_1X_2X_3=\angle Y_1Y_2Y_3$).

(ii) 對應線段之比爲定比,(如謂 $X_1X_2:Y_1Y_2=r$, 爲常數.)　此比稱爲相似比 (ratio of similitude).

(iii) 對應點之聯線(如謂 $X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3, \cdots$) 必互相平行,或會于一點.　其會于一點者,此點必外分各聯線爲相似比.(如謂 $OX_1:OY_1=r$).　此點O稱爲配似中心 (homothetic centre).

證.　(i) 設 $\angle X_1X_2X_3$ 與 $\angle Y_1Y_2Y_3$ 爲對應角, X_1, X_2, X_3 與 Y_1, Y_2, Y_3 對應,則據配景相似之定義,　$X_1X_2 \parallel Y_1Y_2$, $X_2X_3 \parallel Y_2Y_3$,

$$\therefore \quad \angle X_1X_2X_3=\angle Y_1Y_2Y_3.$$

(ii) 設 X_1, X_2 爲二定點, X, X' 爲任意二點,皆屬于［X］中,而 Y_1, Y_2, Y, Y' 爲［Y］中與之對應之點.　則

$\because$　$\triangle X_1X_2X$ 與 $\triangle Y_1Y_2Y$ 互等角,

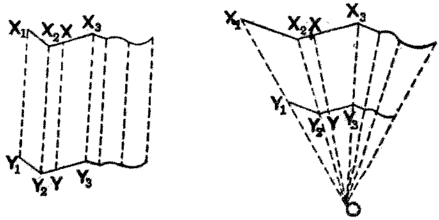
$$\therefore \quad X_1X:Y_1Y=X_1X_2:Y_1Y_2;$$

$\because$　$\triangle X_1XX'$ 與 $\triangle Y_1YY'$ 互等角,

$\therefore XX' : YY' = X_1X : Y_1Y$;

$\therefore XX' : YY' = X_1X_2 : Y_1Y_2$.

惟是X_1X_2,Y_1Y_2爲定線段,其比,命爲r,爲常數.故此方程無異謂任意二對應線段XX'與YY'之比$XX' : YY'$必等于此常數r.



第 200 圖

(iii) 當$r=1$時,二形必互相符合. $X_1X_2 \parallel$ 且 $=Y_1Y_2$,故$X_1Y_1Y_2X_2$爲平行四邊形,而$X_1Y_1 \parallel$ 且 $=X_2Y_2$.

當$r \neq 1$時,二形必不相符合. 若$X_1X_2 > Y_1Y_2$,則X_1Y_1與X_2Y_2兩延長線必相交于一點O, $OX_1 : OY_1 = OX_2 : OY_2 = X_1X_2 : Y_1Y_2$. 據(ii) $X_1X_2 : Y_1Y_2 = r$,爲常數.故聯對應點之線X_1Y_1, X_2Y_2,…必互相外割于同一點O, $OX_1 : OY_1 = OX_2 : OY_2 = \cdots$

$= X_1X_2 : Y_1Y_2 = \cdots = r$ (相似比). 【公式XXXIII】

<u>例1.</u>　若二三角形之邊兩兩同向平行,則二形配景相似.

【討論】. 學者必以爲知:——

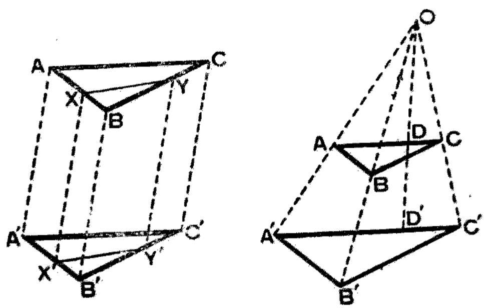
<u>題設</u>:　$AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$,

便可由配似之定義而謂:——

<u>題斷</u>:　$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$配似.

其實不然. 吾人據題設,僅可由配似之定義謂「A, B, C 三點形」與「A′, B′, C′ 三點形」配似而已. 然 △ABC 上之點不可勝數(§17), 豈止 A, B, C 三頂耶?惡得指「(A, B, C) 與 (A′,B′,C′) 配似」爲「△ABC 與 △A′B′C′ 配似」哉!

凡此皆因本書對于「形」及「相似形」皆有明確一貫之定義與他書用角相等邊成比例界說相似多邊形者不同.



第 201 圖

證. (i) 若 AB＝A′B′, 則 △ABC≅△A′B′C′.

準符合形對應法, △ABC 上之點 X, Y,… 各自有其在 △A′B′C′ 上之對應點 X′, Y′,… 如圖:

$\because$ BX $\stackrel{\parallel}{=}$ B′X′, $\therefore$ XX′ $\stackrel{\parallel}{=}$ BB′;

$\because$ BY $\stackrel{\parallel}{=}$ B′Y′, $\therefore$ YY′ $\stackrel{\parallel}{=}$ BL′;

$\therefore$ XX′ $\stackrel{\parallel}{=}$ YY′;

$\therefore$ XY $\stackrel{\parallel}{=}$ X′Y′.

故據定義, △ABC 與 △A′B′C′ 配似.

(ii) 若 $AB < A'B'$,則由題設

$$AB \parallel A'B',\quad BC \parallel B'C',\quad CA \parallel C'A'.$$

據定理二可知 $A'A$, $B'B$, $C'C$ 之延長線會于一點 O,

$$OA : OA' = OB : OB' = OC : OC' \ (=r).$$

設 D 為 $\triangle ABC$ 上任意一點,例如在 AC 邊上. 則 OD 半線必交 $A'C'$ 于一點 D'. 今即以 $\triangle A'B'C'$ 上之此點 D' 為與 $\triangle ABC$ 上之 D 相對應之點. 顯然

$$OD : OD' = r \quad (\S 80\ 定理二)$$

故據定理一,知 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 配似.

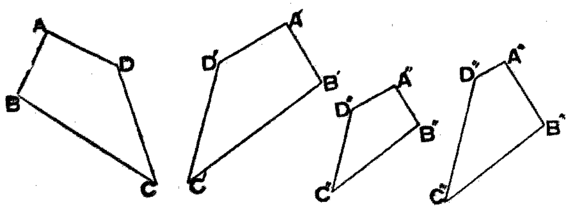
§ 88. 相似形.

定義. 二形 [X], [Y] 中之點有一對一之對應,且對應角相等者稱為相似 (similar),表之以

$$[X] \sim [Y].$$

對應角同向者為同序相似 (similar in the same order); 異向者為異序相似 (similar in reversed order).

例如符合二形 (如 ABCD 與 $A'B'C'D'$ 為異序相似). 或配似二形 (如 $A'B'C'D'$ 與 $A''B''C''D''$ 為同序相似),皆為相似形. 然下圖中之 $A''B''C''D''$ 與 $A'''B'''C'''D'''$ 則非相似形,其理由見§87之底註.



第 202 圖

定理一. 兩形皆相似于同一形者必互相似.

此乃上定義之直接結果.

定理二. 定義. 二相似形中對應線段之比為常數,稱為相似比 (ratio of similitude).

證. 設A,B為二定點, C,D為任意二點,皆屬于第一形,而 A', B', C', D' 為第二形中與之對應之點. 則據相似形之定義, $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 互等角,

$$故\ BC : B'C' = AB : A'B';\qquad (§83例3)$$

$\triangle BCD$ 與 $\triangle B'C'D'$ 互等角,

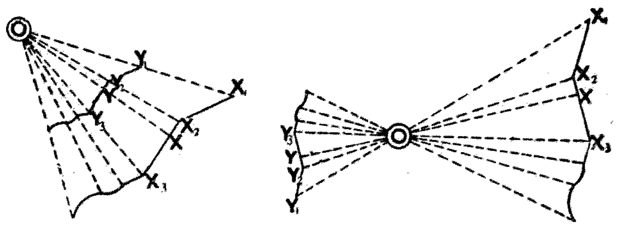
$$故\ CD : C'D' = BC : B'C';$$

$$\therefore\ CD : C'D' = AB : A'B'. \qquad (1)$$

因 AB 與 $A'B'$ 為定線段,故其比 $AB : A'B'$ 為常數. 由上列比例(1)可知二形中任意二對應線段CD與$C'D'$之比 $CD : C'D'$ 悉等于此常數 $AB : A'B'$.

定理三. 二形之點一一對應,且對應點之聯線會于一點且皆被此點內分(或外分)為一定比者,二形必相似.

證法與上節定理一之證法相類.



第 203 圖

證題術 XXXV. 凡證二形相似,往往另覓一形與第一形符合與第二形配似者以證之.

例1. 二多邊形角互等,邊成比例者必相似.

題設: ABCD, A′B′C′D′ 為二多邊形,

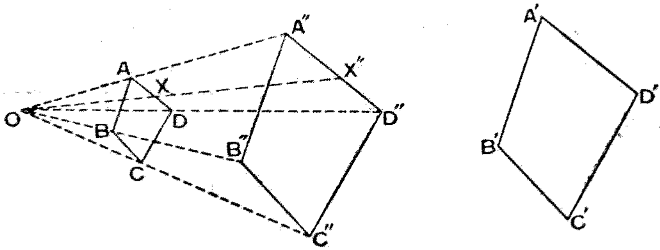
$\angle A=\angle A', \angle B=\angle B', \angle C=\angle C', \angle D=\angle D',$

$AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=DA:D'A'.$

題斷: $ABCD\sim A'B'C'D'.$

證. 取任意點O,于OA, OB,…半線上取A″, B″,…

令 $$\frac{OA}{OA''}=\frac{OB}{OB''}=\frac{OC}{OC''}=\frac{OD}{OD''}=\frac{AB}{A'B'}.$$



第 204 圖

則 $AB \parallel A''B''$, $BC \parallel B''C''$, $CD \parallel C''D''$, $DA \parallel D''A''$ (§82 定理二).

設 X 爲四邊形 ABCD 上任意一點,例如在 AD 上,作 OX 半線交 $A''D''$ 于 X'', 則 $\dfrac{OX}{OX''}=\dfrac{AB}{A'B'}$. (§83 例 3),

故 ABCD 與 $A''B''C''D''$ 配似, (§87 定理一)

故 $\dfrac{AB}{A''B''}=\dfrac{BC}{B''C''}=\dfrac{CD}{C''D''}=\dfrac{DA}{D''A''}=\dfrac{AB}{A'B'}$. (§87 定理二)

然 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DA}{D'A'}$, (題設)

故 $A''B''=A'B'$, $B''C''=B'C'$, ····. (1)

又 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, ····, (題設)

$\angle A=\angle A''$, $\angle B=\angle B''$, ····, (配似形定義)

$\therefore$ $\angle A'=\angle A''$, $\angle B'=\angle B''$, ····. (2)

由 (1) 及 (2) 知 $A'B'C'D' \cong A''B''C''D''$.

但 $ABCD \sim A''B''C''D''$, (配似)

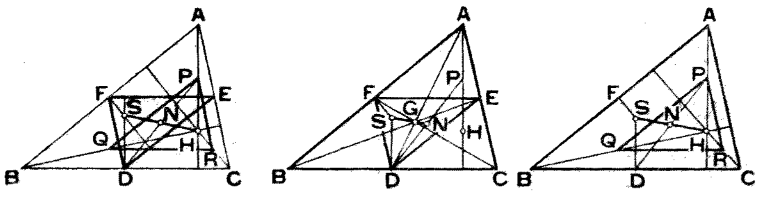
$\therefore$ $ABCD \sim A'B'C'D'$. (定理一)

習題180. 互等角三角形必相似.

習題181. 頂角相等之兩等腰三角形必相似,其對應之法有二.

例如ABC, A′B′C′爲二等腰三角形,其頂角∠BAC=∠B′A′C′,吾人可證△ABC∼△A′B′C′順序相同;且△ABC∼△A′C′B′順序相反.

習題182. 求作一形相似於一定多邊形,令相似比爲5:3.



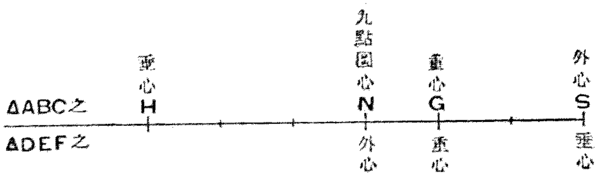
第 205 圖

習題183. △ABC三邊之中點命爲D, E, F,其垂心H至三頂之中點命爲P, Q, R,求證:—

(i) △DEF與△PQR同序相似,同以相似中心N爲外心,相似比爲1;二形垂心S, H之聯線被N平分.

(ii) △ABC與△DEF同序相似,同以相似中心G爲重心,相似比爲2:1;二形外心S, N之聯線被G內分爲SG:GN=2:1.

(iii) △ABC與△PQR配景相似,同以配似中心H爲垂心,相似比爲2:1;二形外心S, N之聯線被H外分爲SH:NH=2:1.



第 206 圖

習題 184. 一三角形之外心 S, 重心 G, 九點圓心N, 垂心 H 同在一直線(稱為 Euler's line) 上,其排列如上圖.

習題 185. A,B,C,D 四點中無三點在一直線上者. △BCD, △CDA, △DAB, △ABC 之重心為 A′, B′, C′, D′. 求證 AA′, BB′, CC′, DD′ 會于一點G, 內分諸聯線為3 : 1之比,稱為 A,B,C,D 四點之重心.

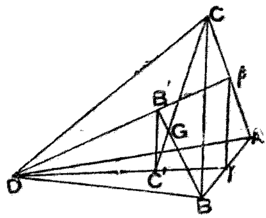
(注意:——$B'C' \parallel \beta\gamma \parallel BC$.

$\beta\gamma : B'C' = 3:2$,　$BC : \gamma\beta = 2:1$,

$BG : GB' = CG : GC'$

$= BC : B'C' = 3:1$,

故據例 1 證 $A'B'C'D' \sim ABCD$.)



第 207 圖

習題 186. 上題 BC, CA, AB, DA, BD, CD 之中點若為 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, 則 $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, 皆被 G 平分.

習題 187. 若 A, B, C, D 四點共圓,則 △ BCD, CDA, DAB, ABC 之重心亦共圓.

§ 89*. 同序相似形.

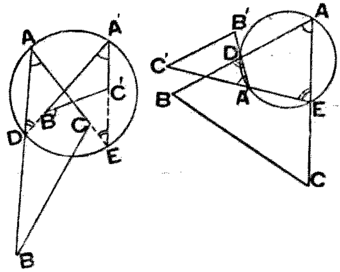
定理一. 同序相似二形若不配似,則對應線之交角相等且同向.

證. 設 AB 與 A′B′, AC 與 A′C′ 爲同序相似二形之對應線,其交點爲 D 及 E. 則因 $\angle BAC = \angle B'A'C'$ 且同向,故若 A 與 A′ 在 DE 之同側,則

$$\angle DAE = \angle DA'E;$$

若 A 與 A′ 在 DE 之反側,則

$$\angle EAD + \angle EA'D = 2\text{rt.}\angle s;$$



第 208 圖

二者皆足以斷定 A,A′,D,E 共圓.

前者使　$\angle ADA' = \angle AEA'$,

後者使　$\angle ADA' + \angle AEA' = 2\text{rt.}\angle s$,

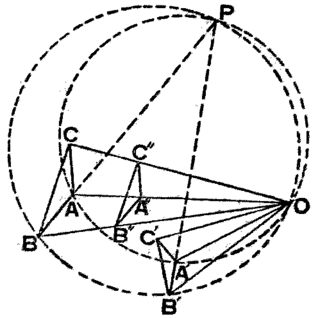
二者皆足以判斷 AB 與 A′B′ 之交角, AC 與 A′C′ 之交角,必相等且同向.

定理二. 同序相似二形若不配似,則必有一二重點.

---

* 欲急進者本節及其後習題可略.

證. 設 F 與 F′ 為同序相似之二形, A 與 A′, B 與 B′ 為其中之對應點.



第 209 圖

據題設, AB 與 A′B′ 不平行, 故必有一交點 P. ⊙AA′P 與 ⊙BB′P 二圓必另有一交點 O. 在 △OAB 與 △OA′B′ 中因 ∠OBA = ∠OB′A′, ∠OAB = ∠OA′B′,

故　　△OAB∼△OA′B′ 且同序.

故若以 O 加入 F 形, 則其在 F′ 形中之對應點仍為 O. 故 O 點稱為二形之二重點 (double point) 或曰不變點 (invariant point), 亦稱相似中心 (centre of similitude).

若以 O 為配似中心, 先將 F 形放大(或縮小)另造一形 F″ ≌ F′. 吾人顯然可將 F″ 形繞 O 點一旋轉而疊之于 F′. 故知

定理三. 若二形同序相似 (但非配似), 則必可就其二重點將一形放大然後旋轉 (或旋轉而後放大) 以得他形.

習題 188. 證題篇習題 29 圖中三正三角形之外心 O_1, O_2, O_3, 若聯結之必成一正三角形.

(注意: $\triangle ABB' \sim \triangle AO_3O_2$)

習題189.　上篇習題29圖中三正方形之外心命爲O, O′, O″, 求證 BO′=OO″, CO″=OO′.

(注意 $\triangle BCF \sim \triangle BOO''$, $\triangle ACF \sim \triangle AO'B$)

習題190.　§70 例 1 圖中若由 O 作 $OD_0 \perp BC$ 于 D_0, $OE_0 \perp CA$ 于 E_0, $OF_0 \perp AB$ 于 F_0, 求證 $\odot AE_0F_0$, $\odot BF_0D_0$, $\odot CD_0E_0$ 亦會于 O, 且 $\triangle DEF$ 與 $\triangle D_0E_0F_0$ 同序相似, 以 O 爲相似中心.

習題191.　上題 O 點之地位僅與 $\triangle DEF$ 之形狀有關. 換言之, 若于 $\triangle ABC$ 之三邊上指定 D′, E′, F′ 三點又指定 D″, E″, F″ 三點, 苟 $\triangle D'E'F'$ 與 $\triangle D''E''F''$ 同序相似, 則 AE′F′,…, AE″F″,… 等六圓必會於同一點 O, 此點即 $\triangle D'E'F'$ 與 $\triangle D''E''F''$ 之相似中心,

$\angle BOC = \angle A + \angle D'$

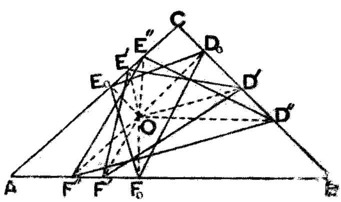
$\angle COA = \angle B + \angle E'$

$\angle AOB = \angle C + \angle F'$

且　$\angle BOC = \angle A + \angle D''$

$\angle COA = \angle B + \angle E''$

$\angle AOB = \angle C + \angle F''$.



第 210 圖

習題192.　一角相等之兩菱形必相似, 其對應之法有四; 同序者半, 逆序者半. (參閱習題181)

邊成比例之兩矩形何如?

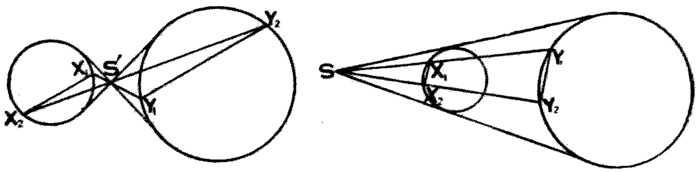
任意二正三角形何如?

任意二正方形何如?

任意二正n邊形何如?

任意二圓相似,可令此圓之任意一點與彼圓之任意一點爲對應點,故對應之法無窮之多.

習題193. 二圓之內公切線之交點S′可爲二圓之相似中心,外公切線之交點S亦然.



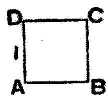
第 211 圖

第三章　多邊形之面積

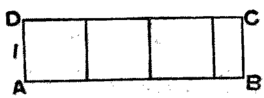
§ 90. 多邊形之面積.

定義. 正方形之邊長爲1者,其面積爲1.

定義. 長方形之一邊爲1者,其面積爲他邊之量數. 如圖ABCD之面積量數 = AB之量數 = 3.4⋯

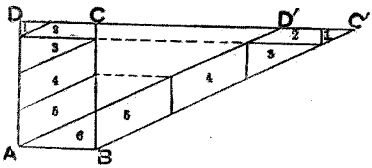


第 212 圖



第 213 圖

定義. 若二多邊形各可割分之爲若干多邊形,彼此兩兩符合,則二形之面積相等.



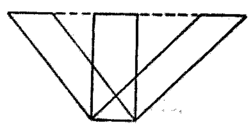
第 214 圖

如左圖矩形 ABCD 與平行四邊形 ABC′D′ 各可割分之爲六形,彼此兩兩符合. 吾人即以 ABCD 之面積爲 ABC′D′ 之面積.

做此,若 DC′÷DC 在整數 $n-1$ 與 n 之間,則 ABCD 與 ABC′D′ 各可分爲 $n+1$ 塊,彼此兩兩符合. 故得

定理一. 平行四邊形之面積等于與之等底等高之矩形之面積.

定理二. 等底等高之平行四邊形面積相等.



第 215 圖

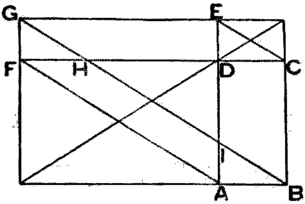
定理三. 矩形之面積等于底乘高.

題設: ABCD 爲矩形.

題斷: $ABCD=AB\cdot BC$.　【公式 XXXIV】

證. 于 AD 之延長線上取 $DE=1$. 作 $AF \parallel CE$ 交 CD 于 F. 作矩形 DEGF. 連 BG 交 CF 于 H,AD 于 I. 則

$$ABCD=ABHF$$ (定理一)



第 216 圖

ABHF＝AIGF （定理二）

AIGF＝DEGF （定理一）

∴ABCD＝DEGF.

但 DEGF 之量數＝DF 之量數

＝DF·DE,（因DE＝1）

而 DF·DE＝DA·DC;（因AF ∥ CE）

∴ABCD＝DA·DC.

習題 194. 平行四邊形之面積＝底乘高

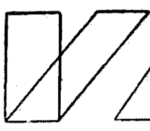
【公式 XXXV】

習題 195. 梯形之面積＝二底和乘高之半.

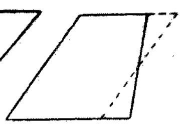
【公式 XXXVI】

習題 196. 箏形之面積＝二對角線之積之半.

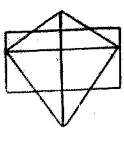
【公式 XXXVII】



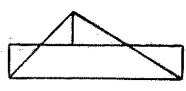
第 217 圖



第 218 圖



第 219 圖



第 220 圖

習題 197. 三角形之面積(參考公式 XXII 及 XXIII)

$\triangle ABC=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c=\frac{abc}{4R}$. 【公式 XXXVIII】

$\triangle ABC=rs=r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c)$.

【公式 XXXIX】

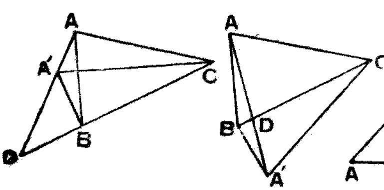
§ 91. 面積之比.

習題 198. 等底兩三角形面積之比等于高之比. 同高兩三角形面積之比等于底之比. 等底等高之兩三角形面積相等.

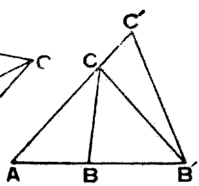
習題 199. 等底兩平行四邊形面積之比等于高之比. 同高兩平行四邊形面積之比等于底之比.

習題 200. $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'BC$ 共底,而 AA' 交 BC 邊于 D, 則

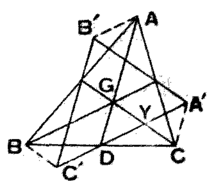
$$\triangle ABC : \triangle A'BC = AD : A'D.$$ 【公式 XL】



第 221 圖



第 222 圖



第 223 圖

習題 201. $\triangle ABC$ 與 $\triangle AB'C'$ 共一角,求證

$$\triangle ABC : \triangle AB'C' = AB \cdot AC : AB' \cdot AC'.$$

習題 202. $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 之 $\angle A = \angle D$, 求證

$$\triangle ABC : \triangle DEF = AB \cdot AC : DE \cdot DF.$$ 【公式 XLI】

習題 203. 二相似三角形面積之比等于對應邊平方之比. 任意二相似多邊形面積之比亦等于對應邊平方之比,即

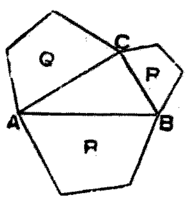
$$P : P' = s^2 : s'^2.$$ 【公式 XLII】

習題204. 就習題162求(i)$\triangle$DEC:$\triangle$BEA, (ii)$\triangle$CDE:$\triangle$CDF, (iii)$\triangle$EHB:$\triangle$DFG, (iv)$\triangle$CGE:$\triangle$AHE.

習題205. 就習題185求ABDC:A′B′D′C′.

習題206. 以$\triangle$ABC之三中線長為邊另作$\triangle$A′B′C′復以$\triangle$A′B′C′之三中線長另作$\triangle$A″B″C″. 求證$\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$相似比為$AB:A''B''=\triangle ABC:\triangle A'B'C'=\triangle A'B'C':\triangle A''B''C''=4:3$.

§ 92. **相似形加減法.** 以直角三角形之三邊為對應邊,作三相似形,則二腰上二形之和等于弦上之形.



第224圖

因 $$\frac{P}{R}=\frac{a^2}{c^2},$$

$$\frac{Q}{R}=\frac{b^2}{c^2},$$

相加 $$\frac{P+Q}{R}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1.$$

$$\therefore\quad P+Q=R.$$

本此,欲將二相似形P, Q加之,另作一相似形,但以P, Q之二對應邊為二腰作一直角三角形,然後以弦為對應之邊作一相似形可也. 減類是.

習題207. 作一正方形,令其面積二倍于一定正方形.

習題208. 作一正方形,令其面積等于三定正方形之和.

習題209. 作一正方形,等于二定正方形之差.

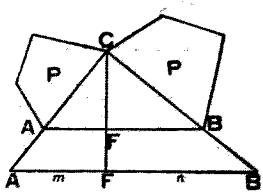
習題210. 作一等邊三角形,令其面積等于二定等邊三角形之差.

習題211. 作一三角形,令其面積四倍于一定三角形,且與之相似.

習題212. 作一三角形,令其面積九倍于一定三角形,且與之相似.

§93. **多邊形之就形變積.** 相似形P, P′,面積之比等于對應邊之平方比(習題203). 直角三角形二邊平方之比等于其在弦上正射影之比(公式XVIII). 可見右圖之P : P′=A′F′ : F′B′.

設P爲已知之形,求作一形P′～P且令P : P′=m : n(已知比). 可取A′F =m, FB = n. 作FC ⊥ AB, 與以AB爲直徑之圓交于C. 于CA半線上取CA′=「P形之一邊,」作A′B′ ∥ AB交CB半線于B′. 則CB′爲所求形P′中之對應邊.



第 225 圖

習題213. 有一正方形. 試二倍其積作一正方形

習題214. 作一正三角形,令其面積爲一定正三角形之$\frac{2}{3}$.

習題215. 作直線平行于底邊,平分三角形之面積

習題216. 作四直線平行于底邊,五等分一三角形之面積.

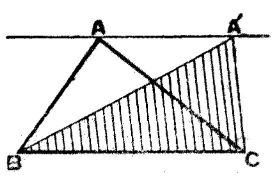
習題217. 作直線平行于底邊,平分梯形之面積. (注意二腰延長線之交點).

習題218. 作二直線平行于底邊,三等分一梯形之面積.

§94. 三角形之就積變形. 變一三角形之形狀毋變其面積,謂之就積變形. 就積變形之基本方法有二:—

甲、毋變其底.

既不變底,必不能變其高. 但使頂點在平行于底邊之直線上移動可也. 如第226圖中之△ABC=△A′BC, 因其共底等高也.



第 226 圖

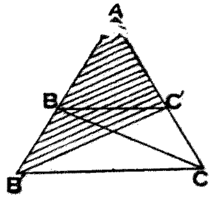
此法之用最廣,其理亦最明. 用此法時,須知

(1) 可使一底角(∠A′BC 或 ∠A′CB) 等于任意之角

(2) 可使一腰 (BA' 或 CA') 等于任意之長;

(3) 可使頂角 ($\angle A'$) 等于任意一角 K, (蓋可以 BC 為弦, 以 $\angle K$ 為內接角, 作弧以得 A' 點也).

乙. 毋變一角,

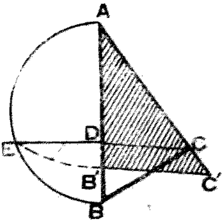


第 227 圖

既不變頂角, 必不能變二腰之積. 其法取 AB' 等于任意之長. 聯 $B'C$. 作 $BC' \parallel B'C$, 與 AC 交于 C'. 則 $\triangle AB'C' = \triangle ABC$.

此乃 (i) 使腰 (AB' 或 AC') 等于定長.

欲 (ii) 使底角 ($\angle AB'C'$ 或 $\angle AC'B'$) 等于定角則較難.



第 228 圖

其法先作 $\angle ACD = \angle K$ (定角). 作 $DE \perp AB$, 以 AB 為直徑, 作圓交 DE 于 E. 于 AB 半線上取 $AB' = AE$. 作 $B'C' \parallel DC$, 交 AC 於 C'. $\triangle AB'C'$ 即為所求.

蓋 $\triangle AB'C' : \triangle ADC = AB'^2 : AD^2$ (習題 203)

$AB'^2 : AD^2 = AE^2 : AD^2$

$AE^2 : AD^2 = AB : AD$ (§84 例 1)

$\triangle ABC : \triangle ADC = AB : AD$ (習題 198)

故 $\triangle AB'C' = \triangle ABC$ 也.

若欲 (iii) 使底 ($B'C'$) 之長一定, 事同甲之 (3), 不再論.

凡就積變形之題, 往往有二條件. 吾人可用甲法以滿足一條件, 然後用甲法或乙法以滿足第二條件.

習題219.　求作一三角形,一邊3公分,一邊5公分,面積等于一定三角形.

此語往往述說之曰:「試割補一定三角形爲另一三角形,一邊3公分,一邊5公分.」

試割補一定三角形爲另一三角形:—

習題220.　二邊已知.

習題221.　底邊及一底角已知.

習題222.　底邊及一頂角已知.

習題223.　二角已知.

習題224.　相似于另一三角形.

習題225.　爲一正三角形.

習題226.　知三角及面積[註]求作三角形.

習題227.　由三角形ABC之AB邊上一定點B′作直線與AC半線交于C′,令

(i)　$\triangle AB'C' = \triangle ABC$.　　(iii)　$\triangle AB'C' = \frac{1}{3}\triangle ABC$.

(ii)　$\angle AB'C' = \frac{1}{2}\triangle ABC$.　　(iv)　$\triangle AB'C' = \frac{1}{5}\triangle ABC$.

習題228.　由三角形周上一定點引一直線,平分該三角形爲二.　(注意此直線理應與何邊交).

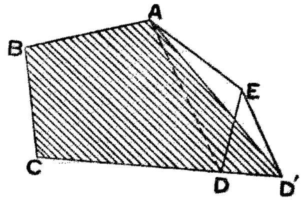
習題229.　由三角形周上一定點引四直線,將該三角形分爲五等積部分.

註. 凡言知面積者作一正方形代表之.

§95. 多邊形之就積變形. 就一定面積變更其形狀,亦有重要之實用. 馭此類題之根本方法有二.

一. 減少(或加多)邊數.

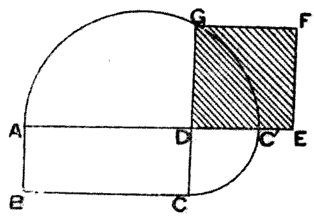
例如欲將五邊形割補爲四邊形: 可聯對角線 AD, 作 $ED' \parallel AD$. 則 $\triangle ADE = \triangle ADD'$ 割彼補此,則 ABCDE 五邊形變爲 $ABCD'$ 四邊形矣.



第 229 圖

二. 矩形變方.

公式 XV, XVI, XXI 皆可利用. 茲用 XVI. 延長 AD 至 C',令 $DC' = DC$. 以 AC' 爲直徑作圓,與 CD 交于 G. 以 DG 爲邊作正方形 DEFG, 即爲所求之形,蓋 $DG^2 = AD \cdot DC' = AD \cdot DC$ 也.



第 230 圖

習題230. 將一四邊形割補成一正方形.

習題231. 將一五邊形割補成一正三角形.

習題232. 將一三角形割補成一正方形.

習題233. 由矩形之周上一定點作二直線將該形分爲等積三份.

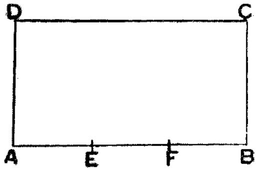
將 AB 均分爲三,$AE = EF = FB$. 試就

(i) 定點為 E (或F),

(ii) 定點在 AE (或 BF) 間,

(iii) 定點在 EF 間,

(iv) 定點為 A (或 B),



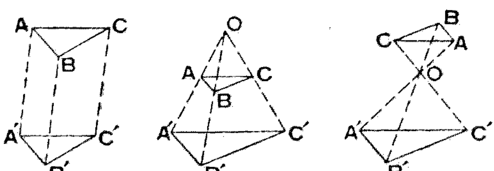
第 231 圖

分別研究第一線之作法. 第一線作出後再就各種情形分別決定第二線.

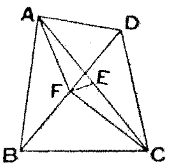
雜題

習題 234. Desargue's 定理. 兩三角形之邊若兩兩平行,則對應頂點之聯線必互相平行或會于一點.

(比較 §87 例 1 稍廣).



第 232 圖



第 233 圖

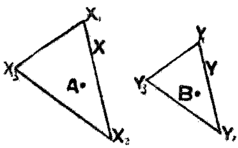
習題 235. 設四邊形 ABCD 對角線 AC 之中點為 E, BD 之中點為 F, 求證

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2$ 【公式 XLIII】

(用公式 XXX 以證之,證明後與 XXXI 比較).

習題 236. 據上題證習題 175 之逆定理.

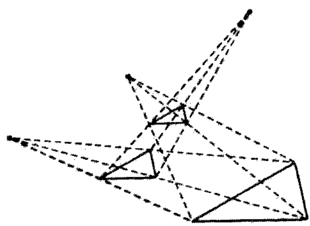
習題 237. [X]與[Y]二形相似. A點本不屬于[X]形. 今若將A點加入[X],成一新形[X, A].應如何求一點B使[X,A]與[Y,B]相似註?



第 234 圖

習題 238. 二相似三角形之內心與內心,外心與外心,⋯,各各對應.

習題 239. 與同形配似之形必互相配似.



第 235 圖

習題 240. 上題若三形無符合者,則三配似中心必同在一直線上. 有二形符合何如? 三形皆符合何如?

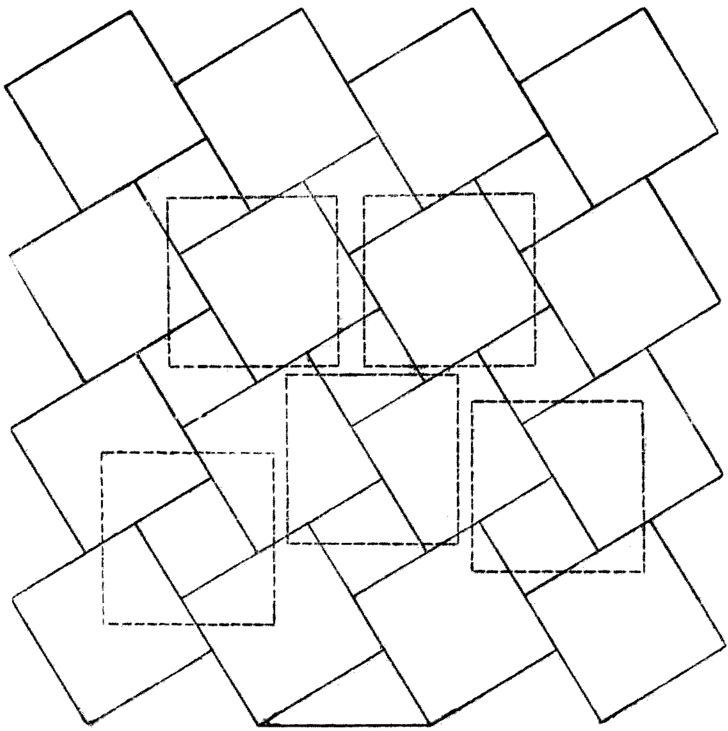
習題 241. 習題185中A,B,C,D四點若共圓,則四垂心A′,B′,C′,D′亦共圓,二圓相等. 四九點圓心何如?

習題 242. 試將習題185推廣至五點以上.

註. 例如「三角形」乃由三邊上之點及三頂組織而成,其外心原非形之一點. 而尋常談兩三角形 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ 相似者,必默認其外心 O_1 與 O_2 亦為兩形之對應點. 其實此種默認皆須要嚴格之證明,學者不可不知也.

習題243. 試由梯形之周上一定點作直線平分該形之面積.

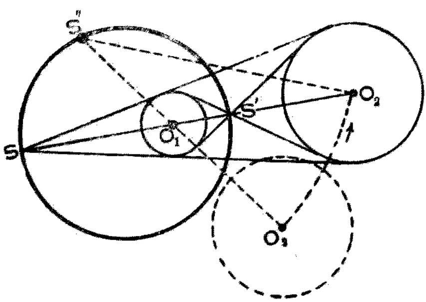
習題244. Pythagoras' 定理(公式XVII)可用實際割補法證之. 試就下圖指明勾上正方形(小方)加股上正



第 236 圖

方形(大方)割裂拚湊成弦上正方形(虛線方)之各種方法.其法註將弦方任意放置(但須一邊水平)圖紙上,則弦方中含有若干小塊,幾塊出自勾方,幾塊出自股方,出自勾方之幾塊平行移動之,可拚成一勾方出自股方者,亦可平移之拚成一股方.

習題245. 若二圓之圓心爲 O_1, O_2, 將 O_1O_2 內外分于 S', S 令其比等于半徑之比,則以 SS' 爲直徑之圓上任意一點 S'' 與二圓心距離之比必等於半徑之比.(參考§120例1 Apollonius' 圓及習題198.)



第 237 圖

習題246. 以 S'' 爲中心可否將 $\odot O_1$ 先放大而後旋轉以得 $\odot O_2$?

註. 此法于勾股弦方實際割補之術,可謂集其大成.簡便名法蓋莫不包括于此法之中. 其不爲此法所包括者,大抵不過割裂此中一法而成耳.

習題247. 二圓有多少相似中心? 此等相似中心排成何形? (將習題192,193,245,246聯合研究之)

習題248. 知△ABC之三邊a, b, c, 求證

(i) 高線 $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (據公式XXXII)

(ii) 面積 $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(據(i)及公式XXXVIII)

(iii) 內半徑 $r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

(據(ii)及公式XXXIX)

(iv) 傍半徑 $r_1=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$ (同理)

(v) 面積 $\triangle=\sqrt{rr_1r_2r_3}$ (據(ii), (iii), (iv))

(vi) 外半徑 $R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

習題249. 設a=13, b=37, c=40求上列各線段.

第四篇

作圖

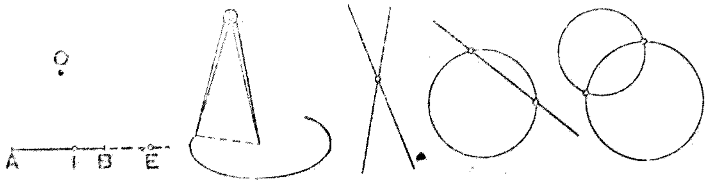
第一章　基礎

§96. **作圖題與存在定理.** 作圖題乃存在問題之變形. 明顯言之,存在定理者斷言某種圖形之存在者也;作圖者實證其存在之一種方法也. (例如「一三角形必有一外接圓」本係存在定理,而通常所用以實證「外接圓存在」之法,則係作圖法.) 是故作圖題者,研究某種圖形存在與否之問題也. 作圖題有無解者,即求作之圖能斷其不存在者也;有不能解者,即不能證其存在亦不能斷其不存在者也.

§97. **作圖器具及其能效.** 初等幾何僅論直線及圓,其他曲線不論也. 故其採用以作圖之器具以圓規及直尺二者為限.[註] 因是初等幾何之作圖又名

註. 作平行線,垂直線,30°, 45°, 60°的角,畫相似形,在既經研究得有成法之後,未始不可用平行尺,丁字規,三角板,放大尺以為輔助工具,然而可實用不宜明言也.

圓規直尺作圖法,(construction by ruler and compasses) 又名歐几里得作圖法 (Euclidean construction).



第 238 圖

此二器具欲其合用,則

直尺,須直且長;

圓規,須腿長,開閉自如.

此二器具吾人承認(亦祇承認)其有**三種功用**:—

第一,**定線**. 有二點 A,B, 可以之作 AB 直線(見 §6).

(附) (i) 有二點 A, B, 可以之求一點 E 在 AB 之延長線上者(見 §7);

(ii) 求一點 I 在 AB 線段上者(見 §8);

(iii) 求一點 O 不在 AB 直線上者(見 §16).

第二,**作圓**. 指定任意一點爲圓心,任意長爲半徑,可以之作圓.

第三,**求交點**. 二直線,二圓,或一直線與一圓之應相交者,可以之求其交點.

§98. **作圖之根據.** 作圖(即證存在定理)之根據有三,存在公理,存在定理及作圖成法是也.

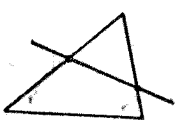
I. **存在公理**[註] (existence axioms). 通用者為:

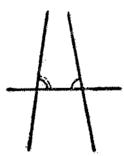
(子) Pasch's 公理. 同平面之直線與三角形若有一交點,但非頂點,則必有第二交點(參考§17).

(丑) 平行公理. 同平面之二直線為一直線所割,若割線同側二內角之和不等于二直角,則二直線必相交于內角和小于二直角者之側.(此即 Euclid's Elements 中之 Postulate 5, 世稱 Euclid's Parallel Postulate 者是也.)

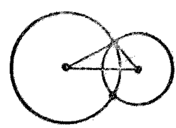
(寅) 遷線公理. AB 半線上必有一線段 AC 等于任意一指定之線段 DE. 此猶云⊙(A,DE)與 AB 半線必有一公共點也(參考§11).

(卯) 交圓公理. 兩圓心之距離若大于二半徑之差而小于共和,則二圓必相交于二點,居于連心線之兩側(參考§22及§28).


第 239 圖


第 240 圖


第 241 圖


第 242 圖

註. 此四公理與首篇所用形式雖不同,實質則無大分別. 為通俗及應用便利計故改易之耳.

II. 存在定理[註] (existence theorems). 通用者為:

(辰) 連一直線異側二點之線段(或折線)必與此直線相交(參考§19).

(巳) 連一角(多邊形,圓,弓形,扇形)之內部一點與外部一點之線段(或折線)必與此角(或形)相交.

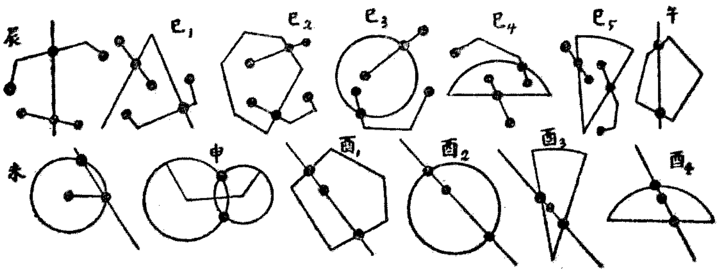
(午) 一直線若與一多邊形有一交點而非頂點,則必有第二交點.

(未) 一直線與一圓有一交點,而不與過交點之半徑垂直者,必與圓交于第二點.

(申) 二圓之交點若不在連心線上則必有第二交點.

(酉) 過凸多邊形(或圓,或扇形,或弓形)內部一點之直線必與該形交于二點.

(戌) 其他.



第 243 圖

註. 存在問題及順序公理皆為往時幾何學者所忽. 下列諸定理所論者為存在問題,所據者為順序公理,其證法晦澀,教本所可不備(俗書偶有備證者,皆謬妄不足為訓). 初學者目為公理,視為假設焉可也.

III. 作圖成法. (以有解情形為限). 本書所引用者僅下列十種,皆學者在初中時所已習者.

(甲) 以定半線為邊,作一角符合于一定角.

(乙)(i) 知三邊(限制:每二邊之和大于餘一邊);

(ii) 知二邊及夾角;

(iii) 知二角一邊(限制:二角之和小于二直角);

或 (iv) 知二邊及一非夾角(限制:見§100例1);

求作一三角形.

(丙) 過一定點作一直線垂直于一定直線.

(丁) 過一定點作一直線平行于一定直線.

(戊) 平分一角.

(己) 平分一弧.

(庚) 作定線段之垂直平分線.

(辛) 均分一線段為若干等份.

(壬) 作一三角形之內切圓,傍切圓,及外接圓.

(癸) 作正方形,正三角形.

§99. 作圖之規範. 作圖題解法分五股:——

第一. 設定(given data). 羅列題中設定之件,必全必備. 設定件除點,直線,半線有位置無大小外;他如線段,或僅設定其長,而不指明其位置,或兼指明其位置;角,或大小位置並皆指定,或僅設定大小;諸如此類,不一而足. 題文中縱未表明,吾人亦應揣想辨別之.

設定件之設定位置者,于作圖之始即須預先畫出,以後即就此上作圖,不許移易變更.

設定件之僅設定大小者,于作圖之先即須預先畫出一線段,或一角,…以代表其大小,但習慣不就此作圖.

設定面積者,作一正方形以代表之.

設定比者,作二線段,以其比代表設定之比.

第二. 求作 (required to construct). 言明題中求作之圖,須備具條件.

第三. 作法 (construction). 敘述作圖之方法. 其數設或動作之次序務須記載詳明.

作圖與證定理大有相類處:在證定理無根據不許開口;在作圖,無成法不許動手.

當作圖之時,每作出一點,一線,一角,即命之名. 不許有名(字母記號)而不定義,亦不許一名而再定義. 不定義之患,在有名而無指; 再定義之患,在名同而實異. 二者皆誤謬之來源,推理之大患,不可不愼也.

第四. 證明 (proof). 證明上述作法所得之圖形爲求作者. 蓋「作法」之末必有一語,言某圖即求作者,此語確否不可無證也.

第五. 推究 (discussion). 作圖題之有解,無解,能解,不能解,定解,不定解,一解,多解,悉繫夫設定件之大小,

位置及其互相之關係. 分別設定件之大小位置及其相互關係,以判定本題之有解,無解,能解,不能解,定解,不定解,一解,多解者謂之推究.

作圖題有絕對有惟一之解者,如「知兩邊及夾角,求作三角形」,如「三角形,求作內切圓」是也. 故推究一項亦可闕而不備.

然須要推究者實多. 如「知三邊,求作三角形」必須「所設三線段之中每二者之和大于其餘一者」,然後有解. 此有解無解之有待推究者也.

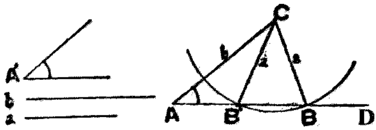
「三等分一角」,若此角爲平角,直角,半直角等,乃有解,其餘多不能解(見§110). 此能解不能解之有待推究者也.

不定解之題如「知三角,其和爲180°,求作三角形」是也. 此類題多因題中原定數量暗合其應有關係,故至解法不定. 如不能適合其應有關係,則不可解. 如$\angle A+\angle B+\angle C=2r$. $\angle s$乃三角形三角應有之關係,今求作之形,預定三角合此關係則其解不定,不合此關係則其解不可能.

「求作二定圓之公切線」因二圓關係之不同,有一解,二解,三解,四解及無解之別(第33圖),此解數多少之有待推究者也.

§100. 推究舉例. 推究最重分類明晰. 分類之道,要在不漏不重. 玆舉例明之.

例1. 知二邊及一邊之對角,求作三角形:



第 244 圖

設定: 線段a, b及角A′.

求作: 一三角形二邊等于a, b, a之對角等于∠A′

作法: 首作AC=b, 次作∠CAD=∠A′. 次以C爲圓心,取等于a之半徑作圓. 此圓若與AD半線交註1于B. 聯CB. △ABC即所求之形.

證. ∵(i)AC=b, (ii)∠CAB=∠A′, (iii)註2 CB=a (半徑) 故△ABC爲所求之形.

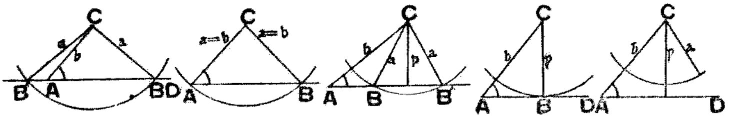
註1, 作圖題之有有解,無解,解多,解少之別,大抵皆繫乎「交」之一字. 蓋二直線有相交,不交,及相重之別 二圓有相交,相切,不交,及相重之分;一直線與一圓亦有相交者,有相切者,有不交者,各因情形而不同. 當吾人旋規爲圓,臥尺畫線,動曰「某與某之交點命曰某」,須知交與不交未必已知,交多交少未見可必. 不交而名之,是空有其名也;多交而少名,則失實;少交而多名,則亂名;皆不可也. 學者每當下筆寫「交」字時,即須特別愼重分辨有無多少之別. 能斷定則斷定之. 不能斷定則暫用「若」字以假定之. 俟「推究」中詳細討論.

註2. 求作之形旣經規定若干條件,作得後欲證其爲求作者,必須條條顧到,故「證」中須分別指明各條件皆合. 此例及§106例2之「證」皆標明(i), (ii), (iii)各條件,即爲此也.

推究. 若$\angle A'$爲銳角,則:——

(Ia) 若$a>b$,則$\odot(C,a)$必與AD直線交於二點.惟二點中僅一點B在AD半線,他點B'在DA之延長線,$\angle CAB'=2rt.\angle s-\angle A'$, $\triangle AB'C$不合用. 故$\triangle ABC$爲惟一之解.

(Ib) 若$a=b$, $\odot C$與AB雖有二交點,然二交點之一重于A,故$\triangle ABC$爲惟一解.



第 245 圖

(Ic) 若$a<b$,則$\odot C$與直線AD有無交點,全視C與AD之距離p何如:

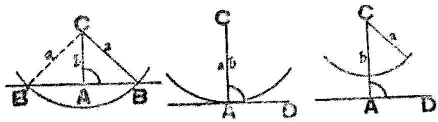
(1) 若$a>p$,必有二交點B,B'. 故$\triangle ABC$及$\triangle AB'C$爲合理之兩解.

(2) 若$a=p$,則$\odot C$與AD相切于B. 故$\triangle ABC$爲惟一之解.

(3) 若$a<p$則$\odot C$與AD不相交,此題爲無解.

(II) 若$\angle A'$爲直角,則據直角三角形斜邊最大之理,應該$a>b$,故——

(II) 若 $>b$則AD與$\odot C$相交于二點B, B'. 惟因$\triangle ABC\cong\triangle AB'C$,故認爲一解.

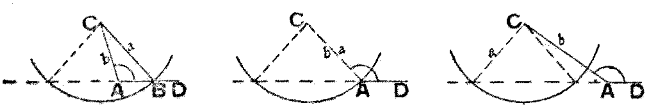


第 246 圖

(IIb)　若 a=b, 則 ⊙C 與 AD 相切于 A, 不得成三角形,故無解.

(IIc)　若 a<b, 則 ⊙C 與 AD 無交點,故亦無解.

(III)　若 ∠A′為鈍角,亦惟當 a>b 時有一解. 當 a = b 或 a<b 時, ⊙C 與 AD 直線雖有交點,然皆不合用,故無解.



第 247 圖

茲表列以上結果[註]于下:——

解數＼邊 ∠A′	a>b	a=b	a<b		
			a>p	a=p	a<p
銳角	一	一	二	一	無
直角	一	無	無		
鈍角	一	無	無		

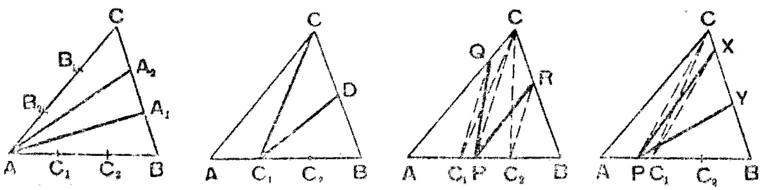
註. 試與§54之(5),習題 160, 及三角術中之 ambiguous case 比較觀之.

例2. 求由三角形上一定點作二直線,三等分該形.

設定: p為$\triangle ABC$上一定點.

求作: 過p之二直線,三等分$\triangle ABC$之面積.

作法. 三等分BC于A_1, A_2, CA于B_1, B_2, AB于C_1, C_2, 則p之位置不外四種:——



第 248 圖

甲 p為一頂點. 例如p即A.

AA_1, AA_2, 顯然均分$\triangle ABC$之面積為三.

乙. p為一分點. 例如p即C_1.

平分BC于D. 則C_1C, C_1D即所求之二直線.

丙. p在中段上. 例如p在C_1C_2線段上.

聯CP, 作$C_1Q \parallel CP$交AC于Q, 作$C_2R \parallel CP$交BC于R. 聯PQ, 即為所求之二直線.

丁. p在他段上. 例如p在AC_1線段上.

聯CP. 作$C_1X \parallel PC$, 交BC于X. 平分BX于Y. 聯PX, PY, 即為所求之二直線.

習題250. 求由三角形上一定點作二直線,分該形為三,令其比$=l:m:n$.

第二章 方法

§ 101. **馭作圖題之方法.** 有數種思索法可以導吾人作圖,茲列其淺易者如下:——

拼合法	造因法
三角形奠基法	遷移法
放大法	分析法
代數分析法	軌跡交點法

姑無論用何法,于正式作圖之先,必須

(1) 假定其圖既成,繪一草圖,備具設定件及求作件. (草圖所具之設定件不必爲眞設定件).

(2) 添繪有重要關係之點,線,等.

(3) 盡量考究圖中各件之大小,位置,及相互之關係,另筆之于圖旁. 其有位置既定者用特種顏色或標識記出;其有大小已知者別用特種顏色或標識記出;其餘逐漸推知或算得者逐漸標識之.[註]

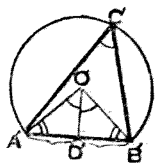
(4) 上項工作至求作件之大小位置全然決定而止;如猶未能決定,復添次要之輔助線,繼續考究.

此之謂分析(anal sis).

註. 「逐漸標識」關係於時間先後問題,印刷品不能辦到;學者在練習及教員在黑板上畫圖宜特別留心焉.

例1. 于定線段AB上作一圓弧,令其內接角等于定$\angle K$.

分析. (一)設$A'C'B'$弧為所求作者.



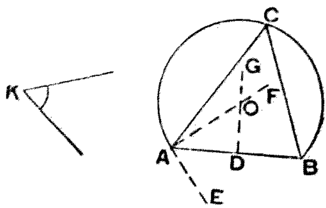
第 249 圖

(二)欲繪此弧,但得圓心O'可耳.與此弧有關者如圓周角C',圓心角$A'O'B'$,弦之中點D',及$O'D'$等,概繪出之.

(三)吾人已知$\angle C'(=\angle K)$, $\angle A'O'B'$ $(=2\angle K)$, $\angle A'O'D'=$ $D'O'B'(=\angle K)$.
$\angle O'D'A'=\angle O'D'B'(=rt.\angle)$. $A'D'=D'B'(=\frac{1}{2}AB)$.
$\angle O'A'B'=\angle O'B'A'(=rt.\angle-\angle K)$.

(四) $O'A'$ (令$\angle O'A'B'=rt.\angle-\angle K$) 及 $O'D'$ (令垂直平分$A'B'$)二直線繪出,則其交點O'定矣.

作法. 作AE,令$\angle BAE=\angle K$. 作$AF\perp AE$. 作AB之垂直平分線GD.則AF與GD二直線必相交于一點O.作$\odot(O,OA)$,其上ACB弧,與E在AB之異側者,即為所求作之弧也.



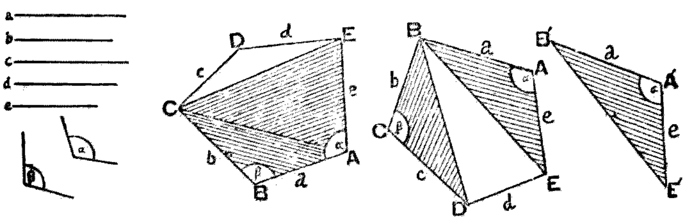
第 250 圖

證. 因OD垂直平分AB(作法),故$\odot(O,OA)$過B.因$OA\perp AE$(作法),故$\odot O$切AE于A.

$\therefore\angle BCA=\angle BAE=\angle K$. (§38)

§ 102. **拚合法.** 此法乃逐步將設定之件拚合之,其不易拚合者將全圖分部製造,然後拚合之. 用拚合法時須注意拚合之先後次序. 次序一亂,往往拚合不成. 譬諸造屋,礎柱椽瓦可分別製造而後拚合之. 然未有不先置礎而能豎柱,不先安椽而能承瓦者.

例. 知五邊及二角,求作五邊形.



第 251 圖

當二角相隣時,可如左圖先作△ABC(二邊夾角已知),次作△ACE(二邊夾角已知),後作△CED(三邊已知). 當二角不相隣時,可如右圖先作△A'B'E'(二邊夾角已知),次作△BCD(二邊夾角已知),次作△BDE(三邊已知)最後作△ABE≌△A'B'E',(學者試按§99正式演之).

習題 251. 求作一平行四邊形,二隣邊及一角之大小已知,

習題 252. 求作一六邊形,六邊及三角已知.

習題 253. 求作一梯形,知高,下底,中線及一腰

§ 103. **造因法.** 造因法乃馭作圖題各法中之最重要者。

例如,欲作平行線,吾人即(1)預先思索從前所學諸定理中,何者曾詔吾人曰「如何之兩直線互相平行,」苟想得一定理「如錯角相等,則兩線平行,」吾人乃(2)設法造成相等之錯角,以期種因收果,而成就平行線.普通教科書作平行線皆用此法. 又如作垂直線,利用「箏形對角線互相垂直,」則先造箏形(因)以成垂線(果);平分圓弧時,利用「弦之垂直平分線必平分所對之弧,」則先垂直平分其弦(造因),藉以平分其弧(收果).他如垂直平分一線段,均分一線段,平分一角,作圓之切線,作三角形之內切圓,外接圓,亦用造因法者也.

總之,造因法分二步,第一步,思索一既習定理,其題斷與本作圖題之求作吻合者;第二步,設法作圖成就該定理之題設,以期得題斷之結果,而達求作之目的.

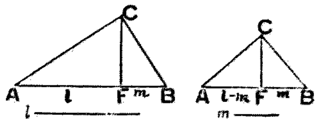
此類可為藍本之定理或不一而足,故作法亦往往甚多. 然此相當之定理,往往欲造其因尤難于得果,(如例2之分析所論即其一例),是則無益于吾人之作圖者,摒而不用可也

例 1. 求作二線段,令其平方比等于定線段之比.

分析. 據§84 例 1. 知直角△ABC 中

$AC^2 : BC^2 = AF : FB,$

$AC^2 : CF^2 = AB : FB.$

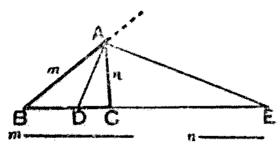


第 252 圖

故吾人但使 AF, FB 兩線段等于已知之長 (l, m), 而令 ∠ACB 爲直角,且 CF ⊥ AB, 則 AC 及BC 卽所求之線段註 或使 AB=l, FB=m, 則 AC 及 CF 亦爲所求. 惟後法須以 l, m 二者中之大者爲AB, 前法則無此限制.

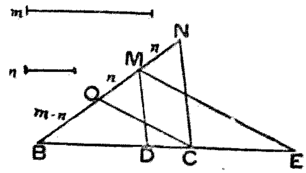
例 2. 求內分且外分一定線段BC等于定比, m:n.

分析. 吾人一見此題.甚易聯想及「三角形頂角之平分線及其外角之平分線將底邊內外分爲兩段,其比皆等于兩腰之比.」故吾人苟令二腰AB, AC等于定長 m, n, 而後平分∠BAC 及其隣補角,則此兩線與 BC 之交點 D, E 卽所求之點. 然若 m+n<BC, 則勢必用平行截割之法先求較大二線段 m′n′ 其比 m′ : n′=m:n 者,而後可用之以爲二腰. 似此則更費事矣. 然因此遂令吾人想及平行截割之法可用以解本題且更捷便.



第 253 圖

註. 此題所設者爲比.所求者亦爲比,故外雖有無限多線段偶, p, q, 其平方比 $p^2 : q^2 = l : m$, 然因其比 $p : q = AC : BC$, 吾人不視之別爲一解.



第 254 圖

作法: 作BM=m,(不在BC直線上.)于BM直線上取MN, MO等于n. 聯CN及CO. 由M作MD∥NC, ME∥OC交BC于D及E. 則D及E即爲所求之點.(證從略).

推究. 若m>n, 則O在BM之間, E在BC之延長線上;若m<n, 則O在MB之延長線上,而E在CB之延長線上;若m = n. 則O重于B, 而由M所作平行于CO(即CB)之直線遂與BC無交點矣.

下列各題係堂上問答題:

習題 254. 作三定線段之第四比例項.

習題 255. 作二定線段之第三比例項.

習題 256. 作二定線段之比例中項.

習題 257. 有不共線之三點, 求與三點等距離之點.(共線時何如?)

習題 258. 求與三直線等距離之點 (有幾點?)

習題 259, 有二正方形,求作一正方形令其面積等于前二形之和. 又作一正方形等于前二形之差

習題 260. 求作二線段令其比等于二定線段之平方比.

§ 104. 三角形奠基法. 此法在就草圖中選擇一三角形,先作成之,以奠全部作圖之基礎,故名. 今先舉一例,後述一般方法.

例 1. 知一邊及其上之高線,中線,求作一三角形

設定: a, m_a, h_a 三線段.

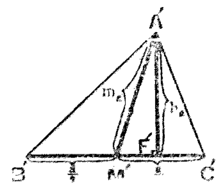
求作: $\triangle ABC$, 令 $BC=a$, 且以 m_a, h_a 爲 BC 邊上之中線及高線.

分析. (1) 設 $\triangle A'B'C'$ 爲所求之三角形.

(2) 然則吾人當知 $B'C'=a$,

$B'M'=M'C'=\frac{a}{2}$, $A'M'=m_a$, $A'F'=h_a$,

$\angle A'F'B'=\angle A'F'C'=rt.\angle$ 各用一種特別顏色或記號標識之.

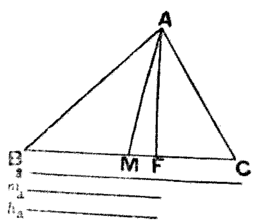


第 255 圖

(3) 細察圖中大小三角形凡六,其中知三件(有標識)而可作成者惟 $\triangle A'M'F'$ 一形耳.

(4) 先作 $\triangle A'M'F'$ 以奠全圖之基礎,則其餘部分可用拼合法完成之矣.

作法. 作 $\triangle AMF$ 令 $AM=m_a$, $AF=h_a$, $\angle AFM=rt.\angle$(§100 例 1 之 II), 次于 MF 半線上取 $MC=\frac{a}{2}$,于 CM 之延長線取 $MB=\frac{a}{2}$,聯 AB 及 AC. 則 $\triangle ABC$ 爲所求. (證從略.)



第 256 圖

推究. $m_a<h_a$ 時無解,否則一解.

上題分析即係三角形奠基法．此法步驟如下:—

(一) 作一草圖,與求作者相類,備具與設定件相當之件,但大小不必相同．

(二) 標識已知件,先標設定者,以次標識逐漸推定者．

(三) 求一可作之三角形,即其三邊及三角六者中有三件(其中最少須有一邊)具標識者．(參考§98 III之乙及§100例1之表)．

(四) 作此三角形,以奠全圖之基礎．然後求建設其餘部分之方法．

(五) 如基礎三角形遍覓不得,可設法添輔助線以爲尋覓之助(法詳§107)．

下列諸題吾人用a,b,c代表△ABC之三邊,A,B,C代表三角, m_a, m_b, m_c 代表三中線, h_a, h_b, h_c 代表三高線, t_a, t_b, t_c 代表三角平分線(止于對邊),R代表外接圓半徑, r, r_1, r_2, r_3 代表內切圓及三傍切圓半徑, G, H, I, I_1, I_2, I_3, O, N代表重心,垂心,內心,三傍心,外心,九點圓心之位置．以後仍沿用之．

求作△ABC, 已知

習題 261.　R, a, m_a.

習題 262.　b, h_a, R.

習題263. $\angle C, t_c, r$.

習題264. R, h_a, m_a.

習題265. a, m_b, m_c.

求作一直角三角形,已知

習題266. 一銳角及弦上之高線.

習題267. 弦上之高線及弦上(被高線分斷)二綫中之一.

求作一等腰三角形,已知

習題268. 底及一腰上之高線.

習題269. 頂角及底上之高線.

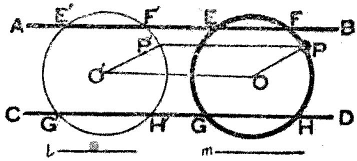
求作一平行四邊形,已知

習題270. 一邊及二對角線.

習題271. 高及二對角線.

§105. **遷移法.** 作圖題有一面限定位置一面限定大小者,可先于便宜處作成一全等之圖,然後遷移之,以就規定之位置. 遷移之法有三,曰平移,曰旋轉,曰翻褶,各有其特別效用;茲各以例明之.

例1. 求作一圓,使其通過定點,且在平行二定直線上割下定長之弦.



第 257 圖

<u>設定:</u> AB ∥ CD, 一點 P, 二線段 l 及 m.

<u>求作:</u> 一圓過 P, 且在 AB 及 CD 上割下 EF, GH 等于 l, m.

<u>作法:</u> 先任作一圓 O′ 使其在 AB, CD 上割下E′F′, G′H′ 等于 l, m (其方法可自思之). 作 PP′ ∥ AB 與 ⊙O′ 交于 P′. 作平行四邊形 OO′p′p. 以 O 爲圓心, Op 爲半徑作圓,則此圓必過 P 且在 AB, CD 上割下 EF, GH 等于 l, m, (證從略).

<u>推究.</u> 命 P 與 OO′ 之距離爲 p. 因 ⊙O′ 之作法一定. 故解數之爲二,爲一,或爲零,全視 p 小于,等于,或大于半徑 O′P′ 而定.

此法無異先作 ⊙O′ 在 AB, CD 上割下 E′F′,G′H′, 等于 l, m; 然後平移之至于 ⊙O 之位置,使其過 P, 此之謂<u>平移</u>(translation). 平移時宜注意:——

(1) 平移取何方向?

(2) 此點移至何處去矣?

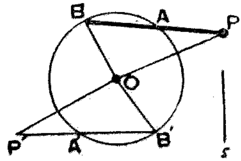
(2) 彼點何自移來?

(4) 任意二點 (如 O′, P′) 及其所移往之處(O, P)必成一平行四邊形 (OPP′O′)

例2. 由一點求作一直線使其嵌于一定圓內之弦等于一定線段.

設定: 線段 s, 點 P, 及 ⊙O,

求作: 過 P 之割線 PAB 使其在 ⊙O 內之弦 AB=s.



第 258 圖

作法: 以圓上任意一點 A′ 爲心,半徑長 s, 作圓交 ⊙O 于 B′. 以 O 爲心, OP 爲半徑作圓弧,設交 A′B′ 直線于 P′. 乃以 P 爲心,取半徑長 P′B′ 作圓弧,交 ⊙O 于 B, 則 PB 即爲所求作之割線. (證法從略).

推究. s>直徑時無解,因 ⊙A′ 與 ⊙O 不相交也. s=直徑時一解. s<直徑時,解數爲二爲一或爲零,全視半徑$^2-(\frac{s}{2})^2$小于,等于或大于 OP^2 而定.

此法無異先作 A′B′ 弦=s, 然後以 O 爲中心,將 A′B′ 直線旋轉之至 AB, 使通過 P. 此之謂旋轉(rotation). 用旋轉法時吾人須注意:——

(1) O 爲旋轉中心(centre of rotation).

(2) A′,B′ 旋至 A, B 矣.

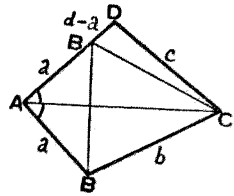
(3) P 點乃由 P′ 轉來者.

(4) OA=OA′, OB=OB′, OP=OP′.

(5) ∠AOA′=∠BOB′=∠POP′ 爲旋轉角 (angle of rotation).

例 3. 知四邊之長,且知一角為對角線平分,求作一四邊形.

分析: 設 ABCD 為所求四邊形,其四邊 AB, BC, CD, DA 之長 a, b, c, d 已知,且知 ∠BAC=∠CAD. 若將 △ABC 依 AC 翻褶之于 △AB′C 則 B′ 在 AD 半線上. 于是 △CB′D 之三邊 B′C, CD 及 DB′ 之長為 b,c 及 d−a (或為 a−d), 其形可作矣.

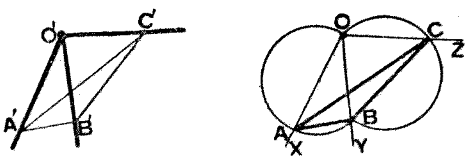


第 259 圖

此之謂翻褶 (reflexion).

除此三法之外,尚有其他之遷移法.

例 4. 求置三頂于共點三線,作一三角形,與一定三角形符合.



第 260 圖

分析. 設 △A′B′C′ 為定三角形, OX, OY, OZ 為三定線. 若三線上已得三點 A, B, C 能使 △ABC≌△A′B′C′ 則因 △ABC 之大小及形狀已知,且 ∠AOB 及 ∠BOC 已知, 吾人可就 △A′B′C′ 上作一全等之圖, (即令 ∠A′O′B′=∠XOY, ∠B′O′C′=∠YOZ),而後在 OX, OY, OZ 上作一圖與 O′A′B′C′ 全等.

此無異于將想像之圖作之于左,然後遷移之以就右,右圖即想像之圖而求作者也.

習題 272. 補例 3 之設定,求作,作法,證,推究.

習題 273. 補例 4 之設定,求作,作法,證,推究.

習題 274. 求作一直線使其嵌于二平行線間之線段等于定長,且切于一定圓. (平移)

習題 275. 求由一定點作相等二線至二定圓之周,令其夾角等于定角. (旋轉)

(可將一定圓繞定點向左或向右旋轉定角度,細察此時該二線何如矣).

習題 276. 于定直線上求一點,使其至一定圓之切線等于定長. (旋轉)

習題 277. 求置二端于二定圓圓周作一線段,平行且等于一定線段. (平移)

習題 278. A,B 爲 CD 直線異側二點. 試于 CD 直線上求一點 P, 令 $\angle APC=\angle BPC$. (翻褶)

習題 279. 試由一定圓圓周引一線段至他定圓圓周,令被一定直線垂直平分. (翻褶)

習題 280. 求過一定點作一圓令與平行二定直線相切. (平移)

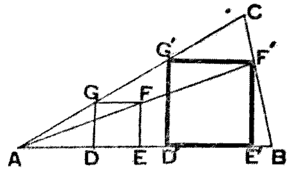
§ 106. **放大法.** 求作之圖若僅限定地位形狀而不拘大小,可于便宜處先作一相似之圖樣(須備具設定件),然後就指定地位依樣作正圖.

例1. 求于一定△ABC內接一正方形

設定: △ABC.

求作: 一正方形,置四頂于△ABC上.

分析. 若但求作一正方形DEFG, 使DE在AB上, G在AC上,自是不難. 然其時頂點F未見在BC上. 欲使此頂在BC上,可用AF與BC之交點F′爲頂,作D′E′F′G′與DEFG相似且處于相似位置.

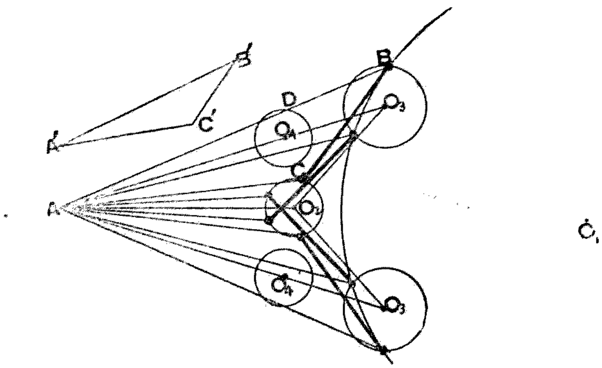


第261圖

推究. 若∠A爲鈍角,則D,D′皆在BA之延長線上而正方形不全在△ABC內. 故本題之有一解,二解,抑三解全視△ABC爲鈍角三角形,直角三角形,抑銳角三角形而定.

此法無異先製圖樣DEFG, 然後置光源于A,映射之以就指定之位置(內接于△ABC),如電影之就銀幕然. 是爲配景相似法.

例 2. 求置二頂于二定圓之周,一頂于定點作一三角形與一定三角形相似.



第 262 圖

設定: ⊙O_1, ⊙O_2, 點 A, △A′B′C′.

求作: △ABC ∼ △A′B′C′ 且令 B 點在 ⊙O_1 上, C 點在 ⊙O_2 上.

分析.[註] 若 A′B′≠A′C′, 則習題 280 所用旋轉之法尚有未足. 因將⊙O_2 繞 A 點旋轉 A′ 度,而至⊙O_4,其時⊙O_4 與 ⊙O_1縱有交點亦未必合用. 然若由 A 點將⊙O_4 映射之至 ⊙O_3, 令 $AO_4 : AO_3 = A'C' : A'B'$, 則 ⊙$O_3$ 與 ⊙O_1 之交點便是所求之 B.

註. 本例雖未分正草圖,然「作法」條內之文字可以直接「設定」「求作」二條並不承襲「分析」條,故無不便.

作法. 作$\triangle AO_2O_3\sim\triangle A'C'B'$. 作$\odot O_3$令其半徑與$\odot O_2$之半徑之比等于$AO_3:AO_2$. 此圓若與$\odot O_1$有一交點B, 作$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$, 且令與$\triangle AO_3O_2$同向,則此$\triangle ABC$即為所求三角形之一.

證. 因$\triangle ABC$ (i) 有一頂為A, (ii) 有一頂B在$\odot O_1$上,吾人欲知其為所求三角形之一,但證(iii)C在$\odot O_2$上可耳.

$\because$ $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'\sim\triangle AO_3O_2$, (作法)

故 $\triangle ABO_3\sim\triangle ACO_2$, (習題158之ii)

$CO_2:BO_3=AO_2:AO_3$; (§83例3)

然$\odot O_2$之半徑$:BO_3=AO_2:AO_3$, (作法)

$\therefore$ $O_2C=\odot O_2$之半徑,而C在$\odot O_2$上.

推究. 此種作法無異將$\odot O_2$繞A旋轉之至$\odot O_4$, (其時C至D),然後由A映射[註]之至$\odot O_3$,(其時D至B),以求B于$\odot O_1$之上. 惟是旋轉有左旋右旋之分,而$\odot O_3$與$\odot O_1$或交,或切,或不交. 故本題有四解,三解,二解,一解,無解各種情形之不同.

習題281. 求于一定三角形內接一定形狀之平行四邊形. (借用第261圖,且注意$\angle CAB$與$\angle GDE$孰大,$\angle CBA$與$\angle FED$孰大.)

註. 此用為旋轉中心及映射中心之A點稱為相似中心(§87,定理三).

習題282. 于定三角形內接一定形狀之四邊形.

習題283. 求作一圓切于二定直線且過一定點.

習題284. 求作一△DEF內接于一定△ABC令與一定△D′E′F′相似.

習題285. 符合.(參考習題191)

習題286. 求作一三角形與一定三角形相似且令一頂固定,一頂置一定直線上,一頂置他一定直線上.

習題287. 同上,令一頂固定,一頂置一定直線上,一頂置一定圓上.

習題288. 求置三頂于三平行定直線作一三角形,與一定三角形相似.

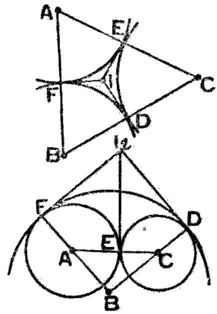
§107. **分析法與輔助線.** 分析之道,除以上諸節所論外,則輔助線之添設亦甚重要. 應添之輔助線因題而不同,是在學者之眼光決定之. 雖然,其大概有可得而言者,茲略言之,以爲分析之助.

第一; **有名線.** 如(i)二圓之聯心線,公弦,公割線,公切線;(ii)梯形之二腰之延長線,中線,兩底中點之聯結線;(iii)三角形之高線,角之平分線,中線,邊之垂直平分線;(iv)弦,弧,中垂線,圓心角,圓周角等,此皆因其重要,定有專名,作圖時須注意者也.

例 1. 求以三定點爲圓心,作三圓互相切.

設定: A, B, C 三點.

求作: ⊙A, ⊙B, ⊙C 互相切.



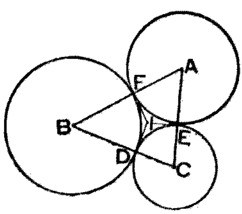
第 263 圖

分析: (一) 設三圓已成,相切于 D, E, F.

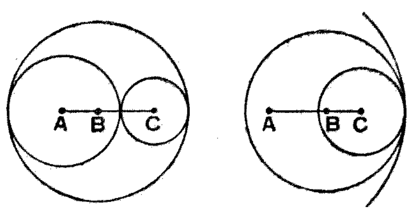
(二) 與相切圓最有關係者爲聯心線及公切線. 聯 AB, BC, CA; 添三公切線. 吾人行見三切線會于一點矣, (§65 例 2). 此交點 I 顯然與 AB, BC, CA 等距離(§43 之 i).

(三) 故△ABC之內心及三傍心皆可充任此交點.

作法: 作△ABC之內心 I (或傍心 I_1, I_2, I_3). (§98, III 之壬). 由 I 作 ID⊥BC 于 D, IE⊥CA 于 E, IF⊥AB 于 F, 以 A, B, C 爲圓心, AE(=AF), BF(=BD), CD(=CE) 爲半徑作圓, 則三圓必相切.



第 264 圖



第 265 圖

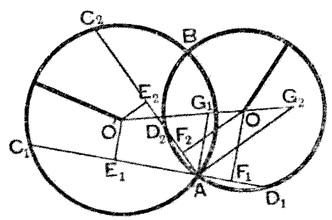
推究. 若 A, B, C 三點不共線, 則本題四解. 若 A, B, C 共線則僅一解;惟許切於同一點則可有無限多解.

例 2. 求過相交二定圓之一交點 A, 作一割線,割二圓于 C, D, 令 $AC:AD$ 等于一定比.

設定: $\odot O'$ 與 $\odot O$ 交于 A, B, 二線段 l, m.

求作: 過 A 一直線割二圓于 C, D 令 $AC:AD=l:m$.

分析: 設圖已成, $AC:AD=l:m$. 取 AC 之中點 E, AD 之中點 F, 則 $AE:AF=l:m$, $O'E \parallel OF$ (因皆 $\perp EF$). 在平行線間談比例,自然使吾人想及平行截割. 故若過 A 作 $AG \parallel O'E$, 交 OO' 于 G, 則 $O'G:OG=l:m$.



第 266 圖

作法: 內分 OO' 于 G_1, 外分于 G_2, 令 $O'G_1:G_1O=O'G_2:OG_2=l:m$. 聯 G_1A, G_2A, 過 A 作二直線分別 $\perp$ 于 G_1A 及 G_2A, 交二圓于 C_1, D_1 及 C_2 D_2, 二割線即為所求.

證. 作 $O'E_1$ 及 $OF_1 \perp C_1D_1$ 于 E_1 及 F_1,

$O'E_2$ 及 $OF_2 \perp C_2D_2$ 于 E_2 及 F_2.

則 $$C_1A:AD_1=E_1A:AF_1=O'G_1:G_1O=l:m,$$

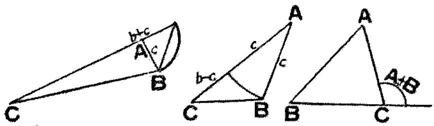
$$C_2A:AD_2=E_2A:AF_2=O'G_2:G_2O=l:m,$$

推究. 若 $l=m$, 則內分點 G_1 為 OO' 之中點, $C_1D_1 \perp G_1A$; 外分點 G_2 不存在,然若認 C_2, D_2 皆重于 B, 亦一解也.

第二: 無名線.

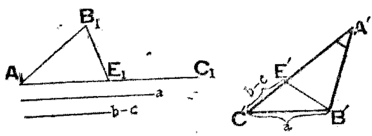
(A) 設定和差之題.

宜作出其和及差



第 267 圖

例 3　求作一三角形,知二邊之差,此二邊之夾角他一邊.



第 268 圖

設定: 一三角形之頂$\angle B_1A_1C_1$, 底邊a, 及他二邊之差 $b-c$.

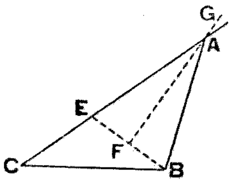
求作: 該三角形.

分析: (一)設$\triangle A'B'C'$爲所求作之三角形.

(二)于$A'C'$半線上取$A'E'=A'B'$, 則所知者爲$\angle A'$ $(=\angle A_1)$, $B'C'$ $(=a)$, $C'E'$ $(=b-c)$, $\angle A'B'C'=\angle A'E'B'$ $\left(=\dfrac{2\mathrm{rt}\angle s-\angle A_1}{2}\right)$, $\angle C'E'B'$ $\left(=\mathrm{rt}.\angle+\dfrac{\angle A_1}{2}\right)$.

(三)圖內諸三角形中,惟$\triangle B'C'E'$可作,即以此爲基礎三角形可也.

作法. 若 $A_1C_1 > A_1C_1$, 于 A_1C_1 上取 $A_1E_1 = A_1B_1$. 聯 B_1E_1 作 $\triangle BEC$, 令 $CE = b-c$, $\angle CEB = \angle C_1E_1B_1$, $BC = a$. 作 BE 之垂直平分線 FG, 必與 CE 之延長線交于一點 A, (Euclid 平行公理). 聯 BA, 成 $\triangle ABC$, 即所求之三角形. 證從略學者補之.



第 269 圖

推究. $b-c < a$ 時一解,否則無解 (§100 例 1).

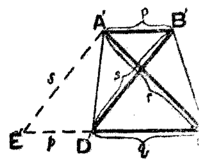
(B) **梯形題.** 宜由一定點作線平行且等于一腰,或一對角線 一般四邊形亦然.

例 4. 知二底 (p, q),二對角線 (r, s),求作梯形.

分析: (一) 設梯形 $A'B'C'D'$ 爲求作者

(二) 作 $A'E' \parallel B'D'$,則吾人所知者爲 $A'B' = p$, $D'C' = q$, $A'C' = r$, $B'D' = s$, $A'E' = s$, $D'E' = p$, $C'E' = p+q$.

(三) $\angle A'E'C'$ 可作.

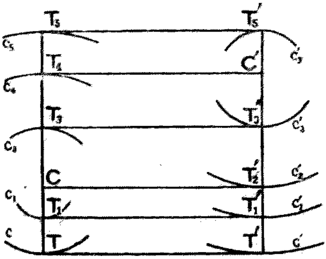


第 270 圖

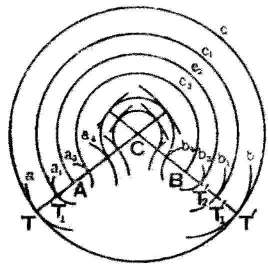
作法. 作 $\triangle ACE$ 令 $EC = p+q$, $AC = r$, $AE = s$, 作 AB ∥ EC 取 $AB = p$. 于 EC 上取 $ED = p$ 聯 AD; BC. ABCD 即爲所求之形.

推究. 當 $p+q$, r, s 三線中每線皆小于其餘二者之和則有惟一之解,否則無解.

(C) 公切題. 宜于草圖中選一定圓縮爲點,然後伸(或縮)其他各圓(如其有之)之半徑另作同心圓,其伸長(或縮短)之量以前圓半徑爲度,並作新圓切線平行于原切線. 此可稱之爲伸縮半徑法. (transiation)



第 271 圖



第 272 圖

設有⊙C與⊙C′在直線TT′之同側而與之相切于T, T′. 于半線TC及T′C′上順次取$T_1, T_2, T_3, \cdots$及$T'_1, T'_2, T'_3, \cdots$等點,令$TT_1=T'T'_1$, $T_1T_2=T_1'T_2'$, ….

以C爲心,過$T_1, T_2\cdots$作圓$c_1, c_2, \cdots$,以C′爲心,過$T_1', T_2', \cdots$作圓$c_1', c_2', \cdots$, 則c_1 c_1'同切于T_1T_1'; c_2 c_2'同切于T_2T_2'; …. 可知:—

(i) 二圓同切于一直線者,將二圓半徑伸縮同長作二新圓,必與一平行于前直線之直線相切. 二圓在公切線同側者半徑俱伸或俱縮,異側者一伸一縮. 一圓縮小成點之時,其于切線必正前後反側.

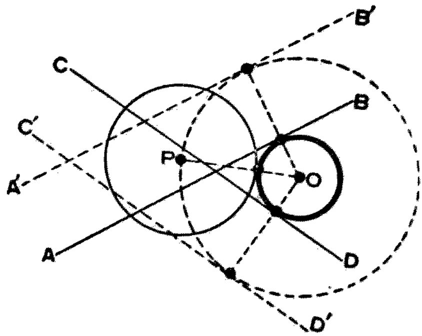
(ii) 二圓同切于一圓者理亦如之.

例5. 求作一圓切于二定直線及一定圓.

設定: ⊙P 及 AB,CD 二直線.

求作: 一圓切于⊙P 及 AB, CD 二直線.

分析: 假設定圓及二直線之位置如圖所示,而⊙O 爲所求之圓. 另作一圓與⊙O 同心,以二圓之半徑和爲半徑. 作新圓之切

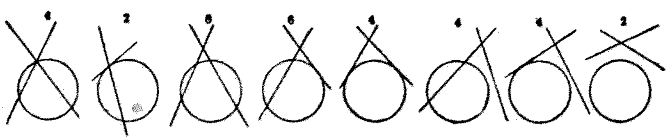


第 273 圖

線 A'B' ∥ AB, C'D' ∥ CD. 今 A'B' 與 C'D' 爲固定之直線,(以其與 AB,CD 之距離等于⊙P 之半徑也). 而此新圓切于 A'B' 及 C'D', 且通過 P, 依習題 283 可以作出.

惟當二直線相交時,將全平面分爲四區域. 若此交點在圓內,則每區域又被圓劃分爲二. 故共分爲八區域. 每一區域內顯然可作一圓,與二定直線及定圓相切. 上圖僅示八圓之一耳.

他種情形之解數有如下圖所示.

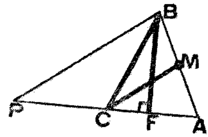


第 274 圖

(D) 三角形中線題. 宜由各頂點或各邊中點作線平行于各中線或各邊.

例 6. 知 a, h_b, m_c, 求作三角形.

分析: 任作一三角形 ABC 代表所求之三角形,作中線 CM,高線 BF 過 B 作 BP ∥ CM,與 AC 之延長線交于 P,則



第 275 圖

$CM=m_c$, $BP=2m_c$, $BF=h_b$, $\angle BFA=$rt$\angle$ $=\angle BFP$, 而$\triangle BPF$ 堪當奠基之選矣.

求作一三角形,已知:

習題 289. $a\ \angle A,\ b+c$　　習題 290. $a, \angle B,\ b+c$,

習題 291. $a,\ b,\ m_c$.　　習題 292. $m_a,\ m_b,\ m_c$.

習題 293. $\angle A, \angle C,\ b-c$.　　習題 294. $a+b+c,\ \angle B,\ \angle C$

習題 295. $a,\ m_c, \angle C$.　　習題 296. $m_a,\ m_b,\ h_b$.

習題 297. $a, \angle B-\angle C,\ b:c$.

求作一等腰三角形,已知:

習題 298. 頂角,及一腰與底之和.

習題 299. 周與底角.

求作一梯形,已知:

習題 300. 二底之和,一對角線,一底角,二對角線之交角.

習題 301. 二底及二底角.

習題 302. 四邊.

習題303. 一底,二對角線,及二對角線之夾角.

習題304. 二定圓互相在外,求作其公切線,(解法參觀例5).

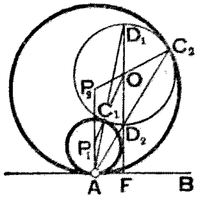
習題305. 上題之二圓若無互相在外之限制,試依作法定其解數之多寡,備繪各圖,與第33圖對證.

習題306. 求作一圓過一定點,且切一定直線于一定點. (注意過切點之半徑).

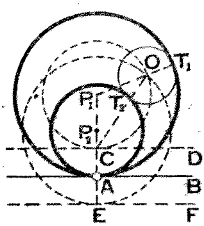
習題307. 求作一圓過一定點,且切一定圓于一定點(注意聯心線及二定點聯線之中點).

習題308. 求作一圓切一定直線AB于一定點A,且切于一定⊙O.

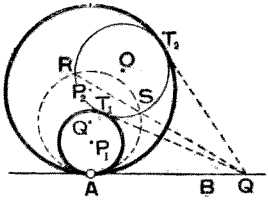
(解此題有三法:就第276圖,利用DO⊥AB爲之,其一也;依(C)條,利用上題成法,其二也;用第278圖,其三也.)



第 276 圖

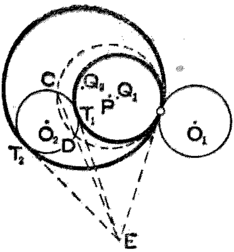


第 277 圖

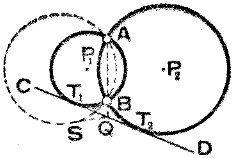


第 278 圖

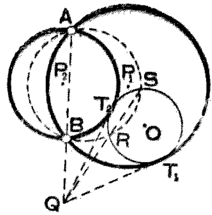
習題309. 求作一圓,切一定圓于一定點,且切于一定直線. (借用第276圖).



第 279 圖



第 280 圖



第 281 圖

習題 310. 求作一圓切一定圓于一定點,且切于他一定圓.（第 279 圖）

習題 311. 求過二點作一圓令與一定直線相切.

習題 312. 求過二點作一圓令與一定圓相切.

習題 313. 由一定點作一直線,令其與二定點 A,B 距離之和爲 4 公分.

(注意: (1) 此直線畫出或經過二點之間,或否,(2) AB 或等于或大于或小于 4 公分,宜分別推究,(3) 解法有一解,二解,三解,四解,或無解之不同.)

習題 314. 求由圓周上二點作二平行弦,令相等.

習題 315. 令其差一定.

習題 316. 令其和一定.(注意梯形之中線).

習題 317. 知垂足三角形,求作三角形.

習題 318. 知三傍心,求作三角形.

習題 319. 知內心,及二傍心,求作三角形.

第三章 代數分析法

§ 108. **線段作圖.** 下列各題中,a, b, c, d,…皆已知之線段,m, n 皆已知之正整數, x 爲求作之線段.

(320—337 係皆堂上問答題).

習題 320. $x=a+b$. (甲)

習題 321. $x=a-b$ (限定 $a>b$). (乙)

習題 322. $x=ma$. (丙)

習題 323. $x=\frac{a}{m}$. (丁)

習題 324. $x=\frac{ab}{c}$. (戊)

習題 325. $x=\sqrt{ab}$. (己)

習題 326. $x=\sqrt{a^2+b^2}$. (庚)

習題 327. $x=\sqrt{a^2-b^2}$ (限定 $a>b$). (辛)

之八法者,乃幾何學中線段作圖之基本方法 其餘較複雜之一次式,皆可用此等方法作之.

習題 328. $x=\frac{a^2}{b}$. (壬)

習題 329. $x=a\sqrt{2}$ (即 $\sqrt{a^2+a^2}$).

$x=a\sqrt{m}$ (即 $\sqrt{a\cdot ma}$). (癸)

習題 330.

(i) $x=\sqrt{3ab}$.　　(ii) $x=\sqrt{a^2+bc}$.

(iii) $x=\sqrt{a^2-bc}$.　　(iv) $x=\sqrt{ab+cd}$.

(v) $x=\dfrac{ab+cd}{e}$.　　(vi) $x=\dfrac{3abc}{de}$.

(vii) $x=\dfrac{a\sqrt{bc}}{d}$.　　(viii) $x=\sqrt{4a^2+b^2}$.

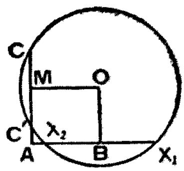
(ix) $x=a\sqrt[4]{5}$.

(x) $x=\sqrt[4]{abcd}=\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$.

(xi) $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}=\sqrt{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2+b^2}}$.

(xii) $x=\sqrt{a^4+b^4}=\sqrt{(a^2+b^2)^2-2a^2b^2}$.

(xiii) $x=\mp b\pm\sqrt{b^2-cc'}$.



第 282 圖

§ 109. **線段方程.** 含線段之方程,有幾何意義者,皆係線段之齊次方程 (homogeneous equation). 如公式 VII−XIV, 皆零次齊次方程, XV−XVI 皆二次齊次方程, 公式 I,III,IV 及上節甲至癸皆一次齊次方程.

線段之齊次方程若爲所含一切(已知及未知)線段之有理整方程,且所含未知線段不過二次者,其根皆可作圖. 如二次方程 $x^2-2bx+cc'=0$ 之二根即習題330之(xiii)之二線段.

習題 331. 解 $a:x=b:c$, 畫出其根.

習題 332. 解 $a:x=x:b$, 畫出其根.

習題 333. 解 $x^2+a^2=b^2$, 畫出其根.

習題 334. 解 $ax=bc$, 畫出其根.

習題 335. 解 $a^2:b^2=c:x$, 畫出其根.

習題 336. 解 $x^2:a^2=b:c$, 畫出其根.

習題 337. 內分定線段AB于C, 令 $AC:CB=m:n$.

習題 338. 外分定線段AB于D, 令 $AD:BD=m:n$.

第 283 圖

習題 339. 內分定線段AB爲兩段令其比 $=m^2:n^2$.

習題 340. 內分且外分定線段AB爲兩段,令其平方比 $=m:n$.

§110. **代數分析法.** 作圖題之解決其關係往往繫于一二線段之長. 此一二線段之長,可用代數學解方程之方法,先求出之,然後依§108所示線段作圖法,用圓規直尺作圖.

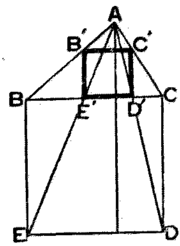
例 1. §106 之例 1.

分析: 此題解法之難在不知正方形之邊長 x. 若知 x, 則作圖易易耳. 就 $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ 觀之, 此二三角形高之比應等于底之比,

即 $h : h-x = a : x$.

故 $$x = \frac{ah}{a+h}.$$

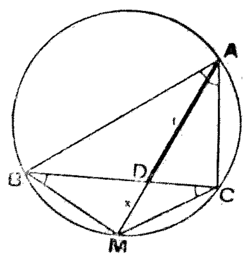
依此式以求 x, 則作法有如圖所示. 其實亦一映射法也.



第 284 圖

例 2. 知底邊 a, 頂角 α 及此角之平分線 t, 求作 $\triangle ABC$.

分析: 與 t 有關係者如右圖. 其中 M 為 $\overset{\frown}{BC}$ 之中點. 故 $BC = a$, $\angle MBC = \angle MCB = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ 皆已知, 而 $\triangle MBC$ 可作.



第 285 圖

吾人所難定者 MD 之長耳. MD 之長定, 則作圖甚易也. 設 $MD = x$, 則因

$$\triangle MDC \sim \triangle MCA, \quad \therefore \quad MD : MC = MC : MA,$$

即 $$x : MC = MC : x+t,$$

故 $$x^2 + xt = MC^2, \quad x = \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + MC^2} - \frac{t}{2}.$$

作法. 作 $\triangle MBC$ 令 $BC = a$, $\angle MBC = \angle MCB = \frac{1}{2}\alpha$.

作 $CE\perp MC$, 取 $CE=\frac{t}{2}$, 作 $\odot(E,EC)$ 交 ME 于 F, $\odot(M,MF)$ 交 BC 于 D. 延長 MD 于 A 令 $DA=t$. 則 $\triangle BCA$ 即為所求.

證. 據作法, (i) $BC=a$, (ii) $DA=t$ 皆合所求,今所宜證者 (iii) $\angle BAD=\angle DAC=\frac{1}{2}\alpha$ 耳. 據作法

$$MD=MF=ME-FE=ME-CE$$

$$=\sqrt{MC^2+CE^2}-CE=\sqrt{MC^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2}-\frac{t}{2},$$

$$\therefore \quad \left(MD+\frac{t}{2}\right)^2=MC^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2 \quad \therefore MD^2+t\cdot MD=MC^2,$$

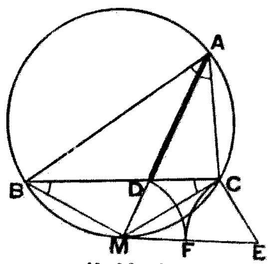
$\therefore$ $MD\cdot MA=MC^2$.

$\therefore$ $\triangle MAC\sim\triangle MCD$.

$\therefore$ $\angle MAC=\angle MCB$.

同理 $\angle MAB=\angle MBC$.

$\therefore$ $\angle MAC=\angle MAB=\frac{\alpha}{2}$.



第 286 圖

推究. $\sqrt{MC^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2}-\frac{t}{2}<\sqrt{MC^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ 時無解,等時一解,大時二解當一解.

例 3. 求由定 $\odot O$ 外一定點 P 作割線交圓于 Q. R 令 $PQ:QR=$ 定比 $m:n$.

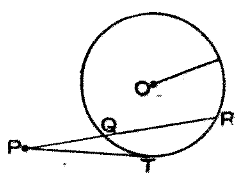
分析: 此題之難在求 PQ 之長.

作切線 PT. 則 $PQ\cdot PR=PT^2$ 已知.

而題意求使 $PQ:PR=m:m+n$,

相乘得 $PQ^2:PT^2=m:m+n$.

其中 PQ 可用 §103 例 1 之法作之.



第 287 圖

推究. 當 $PO-OT:PO+OT$ 小于 $m:m+n$ 時二解,等于時一解,大于時無解.

例 4. 知三高線之長 h_a, h_b, h_c, 求作 $\triangle ABC$.

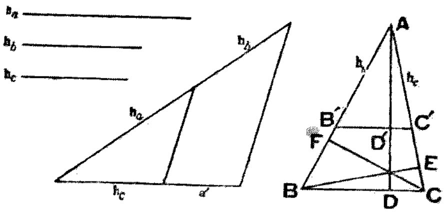
分析: $\triangle ABC$ 之三高線 h_a, h_b, h_c 與三邊之關係為

$$ah_a=bh_b=ch_c.$$

以 h_bh_c 除之得

$$\frac{a}{\frac{h_bh_c}{h_a}}=\frac{b}{h_c}=\frac{c}{h_b}.$$

專恃此關係,但能求得各邊之比,而不能得各邊之長,即能得其形狀而不能得其大小也. 然形狀既定,大小亦易矣.



第 288 圖

作法. 求 h_a, h_b, h_c 之第四比例項 a'. 作 $\triangle AB'C'$ 令 $AB'=h_b$, $AC'=h_c$, $B'C'=a'=h_bh_c/h_a$. 作 $AD'\perp B'C'$ 于 D'. 于 AD' 半線上取 $AD=h_a$. 過 D 作 $BC \parallel B'C'$ 交 AB' 及 AC' 二半線于 B,C. $\triangle ABC$ 即為所求.

證. 作 $\triangle ABC$ 之高線 BE, CF.

$$BE:AD=BC:AC, (?)$$

$$BC:AC=B'C':AC', (?)$$

$\therefore$　BE : AD = B′C′ : AC′, 即 $BE : h_a = (h_b h_c/h_a) : h_c$

$\therefore$　　$BE = h_b$.

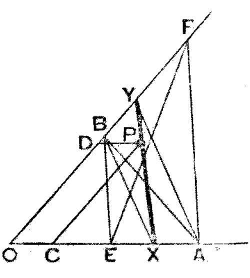
同理　　$CF = h_c$.

<u>推究</u>. $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ 三者中每二者之和大于其餘一者,(即 $h_b h_c/h_a$, h_b, h_c 三線段中每二者之和大于其餘一者)則本題有惟之一之解;否則無解.

<u>例 5.</u> 求過一定點 P 作一直線與一定∠AOB 相交成△XOY 等于一定面積.

<u>分析</u>: 先作一直線與∠AOB 相交成△AOB 等于定面積. 此未必即所求,因 AB 未必過 P 也. 作 PC ∥ OB 交 OA 于 C, PD ∥ OA 交 OB 于 D. 命 OA = a, OB = b, OC = c, OD = d, OX = x, OY = y, 則因 △YDP ∼ △YOX,

$\frac{y-d}{c} = \frac{y}{x}$, 即 $xy = dx + cy$. 又因 △OXY = △OAB, $xy = ab$. (習題 201)



第 289 圖

由此二方程消去 y 得

$$\left(x - \frac{ab}{2d}\right)^2 = \left(\frac{ab}{2d}\right)^2 - \frac{abc}{d}.$$

苟令 $e = \frac{ab}{2d}$, 則上方程變爲 $(x-e)^2 = e^2 - 2ce$,

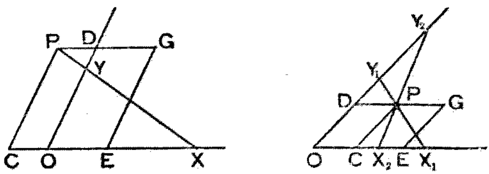
即　　$(x-e)^2 = (e-c)^2 - c^2$.

作法. 作$\triangle ABO$=所定面積. 過P作$PD \parallel AO$交OB于D. 于OD半線上取F令$OF=2OD$. 于OA上作E令$BE \parallel AF$. 于OE半線上取X令

$$XE^2=EC^2-OC^2.$$

聯PX交OB于Y, 則$\triangle OXY$即爲所求.

證從略,學者補之.



第 290 圖

推究. 若完成▱DOEG, 則

$$\triangle XOY=\triangle AOB=\triangle EOF=\square DOEG.$$

故(i)若P在$\angle AOB$之外部,則$CE>CO$, OE之延長線上必有一點X合于$XE^2=EC^2-OC^2$之條件. 故必有一解$\triangle OXY$. 此外于OX半線上任取一點X′,聯PX′交OY于Y′,則$\triangle OX'Y' \neq \triangle OXY$,故皆不合用. (ii)若P在$\angle AOB$之內部,則解數爲2, 爲1, 或爲0全視$CE>, =$,或$<OC$而定. 換言之,規定面積不及▱OCPD之二倍者無解(參考§126之例3), 等時一解,大時二解.

習題341. 試于定線段 AB 上求一點 P 令 $AP:PB=PB:AB$. AB 稱為被 P 分成外內比 (extreme and mean ratio).

習題342. 求作一線將一定矩形分為二相似矩形.

習題343. 求作一線將一定梯形分為二相似梯形.

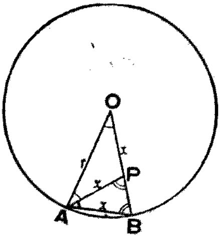
習題344. 例 2 之 t 若為 $\angle A$ 之外角之平分線,其作法如何? (注意 ⊙E 與 ME 之延長線之交點).

習題345. 試過一定點 A 作一直線交一定圓于 B, C 二點,令 $BA:AC$ 等于定比.

習題346. 知 s, $\triangle$, h_a, 求作 $\triangle ABC$.

§ 111. 正多邊形. 「正 n 邊形可否用圓規直尺作成?」此問題由來已久,至 Gauss (1777—1855) 始有定論. 其可作者亦自 Gauss 始有定法. 當 $n=3$ 或 4 時,其作法皆為讀者所知,玆論 $n=5$ 者.

例 1. 求于定 ⊙ (O,r) 內接正十邊形.



第 291 圖

分析: 設正十邊形已成,而 AB 為其一邊. 則在 $\triangle OAB$ 中

$$\angle AOB=36^\circ,\ \angle OAB=\angle OBA=72^\circ,$$

可見 $\angle OAB=2\angle AOB$. 若作直線平分 $\angle OAB$, 交 OB 于 P. 則

$$\triangle OAB \sim \triangle ABP,$$

$$OA : AB = AB : BP.$$

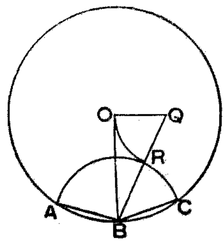
今 $OA = r$ 已知, $AB = x$ 未知, 而 $BP = OB - OP = OB - AP = OB - AB = r - x$, 代入上式得

$$r : x = x : (r - x).$$

$$\therefore \qquad x^2 + rx = r^2,$$

$$\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2,$$

$$x = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}.$$



第 292 圖

作法. 作半徑 BO. 作 $OQ \perp OB$, 取 $OQ = \frac{1}{2}BO$. 作 ⊙ (Q,QO) 交 BQ 線段于 R. 作⊙(B,BR) 交 ⊙O于A,C. 則 AB, BC 即爲 ⊙O 內接正十邊形之二邊 (證法從略,學者補之).

正十邊形成,則正五邊形易矣

例 2. 求作定 ⊙O 內接正十五邊形.

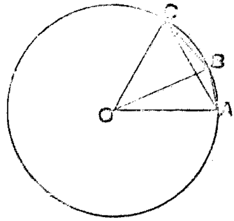
分析: 設正十五邊形已成.

AB 爲其一邊,則

$$\angle AOB = \frac{1}{15}.4rt.\angle s$$

$$= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)4rt.\angle s$$

$$= \frac{1}{6}.4rt\angle s - \frac{1}{10}4.rt\angle s.$$



第 293 圖

作法. 作弦 AC＝OA. 又作半徑 OB 于 $\angle AOC$ 之內, 令 $\angle BOC=\frac{1}{10}.4rt.\angle s$ (法見例1). AB 即為 ⊙O 內接正十五邊形之一邊.

習題347. 求于定圓內接正 4, 8, 16, 32, … 邊形.

習題348. 求于定圓外切正 3, 6, 12, 24, 48, … 邊形.

習題349. 知邊之長,求作正 5, 10, 20, 40, … 邊形.

習題350. 上列三題皆係求作正多邊形,惟一係知外接圓半徑,一係知內切圓半徑,一係知邊. 試說明此三法中但有一法成功,則餘二法亦可成功. 故作正多邊形之題,但說明邊數足矣,不必更及其他.

習題351. 求作正 15, 30, 60, 120,…邊形

§ 112 作圖不能問題*

作圖題之能用圓規直尺解之者少,而不能者多. 即以正多邊形而論,邊數 n 若不過 100, 能作者二十有四:

$n=4, 8, 16, 32, 64;$	$n=15, 30, 60;$
$n=3, 6, 12, 24, 48, 96;$	$n=51;$
$n=5, 10, 20, 40, 80;$	$n=85;$
$n=17, 34, 68;$	

* 此節但載近世研究之結果,備學者之查考而已. 其理由不可為初學道者,略而不論. 欲急進者,並此記載不讀,亦無不可.

而不能作者七十有四. 據 Gauss 研究之結果,舉凡正多邊形之可作者,

(i) 當邊數 n 爲質數時,其形狀必須(亦但須)爲

$$p = 2^{2^h} + 1 \qquad (A)$$

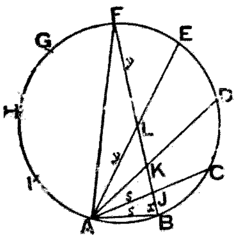
例如 $h=0$ 時, $p=3$; $h=1$ 時, $p=5$; $h=2$ 時, $p=17$; $h=3$ 時, $p=257$; $h=4$ 時, $p=65537$; 皆係質數,故正 3 邊形,正 5 邊形正 17 邊形,正 257 邊形,正 65537 邊形皆可作. 當 $h=5$ 時, $p=4294967297=641\times6700417$, 雖屬上述形狀之數,然非質數,故正4294967297 邊形不可作. 當 $n=7$ 時,雖係質數然非上述形狀者,故正 7 邊形不可作.

(ii) 當邊數 n 爲複數時,其形狀必須(亦但須)爲

$$c = 2^h p_1 p_2 \cdots \qquad (B)$$

其中各 p 皆係上述形狀之質數,彼此各不相同. 例如不含此種 p 時, $c=4, 8, 16, \cdots$; 僅含一 $p_1=3$ 時, $c=3, 6, 12, \cdots$; 含一 $p_1=5$ 時, $c=5, 10, 20, \cdots$; 含一 $p_1=17$ 時, $c=17, 34, 68, \cdots$; 此種邊數之正多邊形皆可作. 含一 $p_1=3$, 一 $p_2=5$ 時, $c=15, 30, 60, \cdots$, 此種邊數之正多邊形亦可作. 正九邊形則不可作,因 $9=3\times3$, 兩因數相同也.

正九邊形何故不可用圓規直尺作圖? 請言其略:



第 294 圖

設有正九邊形 ABCDEFGHI 命 FB 與 AC, AD, AE 之交點為 J, K, L. 則

$$\angle LFA = \angle LAF = \angle BAJ = 20^0,$$

$$\angle FAB = \angle FBA = 80^0,$$

$$\angle JAL = \angle JLA = 40^\circ.$$

命 $AB = AJ = JL = s,$

$$BJ = x,\ AL = LF = y.$$

因 AK 平分 $\angle JAL$, 故 $KJ = \dfrac{s^2}{s+y}$, $KL = \dfrac{sy}{s+y}$. (§83 公式XII)

又因 AK 平分 $\angle BAF$, 故 $KB : KF = AB : AF$, (§83 公式XII)

即 $\dfrac{s^2}{s+y} + x : \dfrac{sy}{s+y} + y = s : x+s+y.$

即 $$\frac{s^2+x(s+y)}{(s+y)^2-s^2} = \frac{s}{x+(s+y)}. \qquad (1)$$

今 $\triangle ABJ \sim \triangle FBA$, $x : s = s : x+s+y.$

即 $$s+y = \frac{s^2-x^2}{x}. \qquad (2)$$

由 (1) 及 (2) 消除 $(s+y)$ 得

$$x^4 + sx^3 - 3s^2x^2 - 2s^3x + s^4 = 0,$$

即 $$(x+s)(x^3 - 3s^2x + s^3) = 0,$$

$$\therefore \quad x^3 - 3s^2x + s^3 = 0. \qquad (3)$$

設邊長s已知,苟能以圓規直尺作成正九邊形,即能用圓規直尺作成線段x. 然x與s之關係既爲方程(3)所規定,而此方程之三根無一可僅用加,減,乘,除,開平方五法表之者,故此種線段x決不能用圓規直尺作圖. 因線段作圖僅限于加,減,乘,除,開平方五法也.

不但此例爲然,一作圖題之可否用圓規直尺解之,現已得有一

準則: 凡求作之圖,其中未知線段可以已知線段用有限個加,減,乘,除,開平方五法表出之者,此圖必可用圓規直尺作成. 凡求作之圖,其中有一必須作成之線段不可以已知線段用有限個加,減,乘,除,開平方五法表出之者,此圖必不可僅用圓規直尺作成.

上述方程(3)之三根,據方程式論研究,無一可避免開立方者.故此種線段x絕對不能用圓規直尺作出. x既不能作出,正九邊形自亦不能作出. 故知

> 正多邊形有不能用圓規直尺作成者,如正九邊形是.

正九邊形每邊所對之圓周角爲20^0, 即正三角形一角之三分之一. 正九邊形既不成, 20^0, 之角自亦不成, 而$60°$之角遂不克以圓規直尺三等分之矣. 故知

> 用圓規直尺不能三等分任意一角,如60^0是.

此爲幾何作圖三大問題之一 (trisection of an arbitrary angle). 其二爲「求作一正立方,令其體積等于已知正立方之二倍」(duplication of the cube). 設已知者邊長 s, 求作者邊長 x, 則二者之關係爲 $x^3=2s^3$. 將上述準則應用之于此題,吾人遂知

| 用圓規直尺不能作一正立方二倍于一定正立方. |

其三爲「求作一線段等于一定圓周之長」(quadrature of the circle). 極限篇中 (§146 末附註) 將提及

| 用圓規直尺不能將一圓周展爲直線. |

凡此諸題之作法,數皆千年疇人之所不能,而近世算學家之所可斷其必不能者[註]. 苟有言能之者,非愚則妄也. 不則圓規直尺之外,別有利器可資;是則非此科之初議,(§97 言明以圓規直尺爲限),本書付諸不論.

註. 關於作圖之能不能問題,學者如欲深究,可參考本社出版之

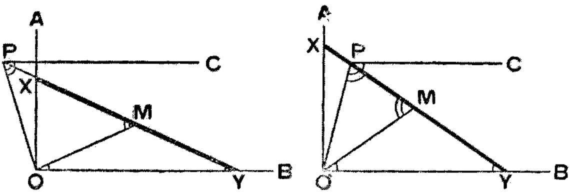
Klein, Famous Probiemst in Elementary Geometry (Translated by Beman and Smith).

Hudson, Ruler and Compasses.

Young, Monographs on Topics of Modern Mathematics (Constuctions With Ruler and Compasses, by Dickson; The History and Transeendence of π, by Smith.)

證題術 XXXVI. 凡欲證某圖不能用圓規直尺作成,可利用其他不可作之圖,用反證法證之.

例 1. 求過一定點 P 作一直線與一定 $\angle AOB$ 交于 X, Y 令 XY 等于定長.



第 295 圖

此題之不可以圓規直尺解之,可證之如下.

本題在一般情形之不可以圓規直尺解之,但就一特例論之可耳. 當 $\angle AOB = \text{rt.}\angle$, 定長 $= 2\cdot OP$, P 不在 $\angle AOB$ 之平分線上,本題之不可以圓規直尺解之,可以明之如下.

設 $\angle POB > \angle POA$.

如可用圓規直尺作 $XY = 2\cdot OP$, 平分 XY 于 M,則

$$OP = YM = OM.$$

$$\angle OPM \parallel \angle OMP = 2\cdot\angle MOY = 2\cdot\angle MYO.$$

作 $PC \parallel OB$, 則 $\angle CPY = \angle MYO = \frac{1}{3}\cdot\angle OPC$.

是 $\angle OPC$ 可用圓規直尺三等分之也. 但 $\angle POB$ 爲任意角,其補角 OPC 亦爲任意角,其不可以圓規直尺三等分之已如上述(第 203 面);故欲使 $XY = 2\cdot OP$,亦非圓規直尺所可爲功. 故本題通常不可以圓規直尺解之.

習題

習題352. 過一定點作一線段于一角之間使被該點分成定比.

習題353. 求作一圓令于三定直線上割取等弦.

習題354. 求作一圓過一定點切于一弓形.

習題355. 過一定點作一直線平行于一定直線.

習題356. 由一定點作一直線垂直于一定直線.

(上二題試盡汝所知之定理,製成各種不同之作法).

習題357. 求過一定點作一直線平分一定三角形之面積.

習題358. 有三定直線 l_1, l_2, l_3. 試由 l_1 作一線段至 l_2 被 l_3 垂直平分.

習題359. 試由一定圓圓周引一線段至一定直線被另一定直線垂直平分.

求作△ABC, 已知

習題360. $\angle C, t_c, r_1$.

習題361. $\angle A, \angle B, R$.

習題362. h_a, t_a, r.

習題363. a, m_a, m_b.

習題364. $m_a, h_a, \angle B$.

習題365, $a, \angle B, r_1$.

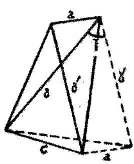
習題366. 求過二定圓之交點作一直線割二圓于P, Q, 令PQ等于定長.

習題 367. 二圓相交于 A, B, 求由 A 作一直線與二圓交于 C, D 令 $\angle ABC = \angle ABD$.

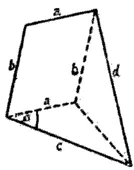
習題 368. 知兩對邊 (a, c) 及對角線 (δ, δ') 之長, 對角線相交之角 (γ), 求作四邊形. (第 296 圖).

習題 369. 知四邊 a, b, c, d 之長及兩對邊 (a, c) 延長時所成之角 (α), 求作四邊形. (第 297 圖).

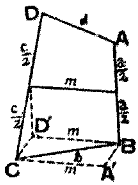
習題 370. 知四邊 a, b, c, d 及兩對邊 (a, c) 之中點聯結線 m 之長, 求作四邊形. (圖 298 之 $D'A' \parallel$ 且 $=DA$).



第 296 圖

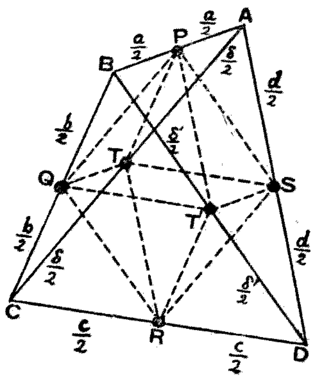


第 297 圖



第 298 圖

學者如惡上列各題一題一法之不易記憶, 則自 368 至 373 各題, 及其他同類問題, 皆可用 299 圖. 該圖中虛線十二, 兩兩平行且相等, 且平行等于 a, b, c, d, δ, δ' 之半. 十二虛線成平行四邊形凡三, 其對角線 PR, QS, TT′ 當然會于一點且互相平分.



第 299 圖

習題 371. 知二對邊 (a, c), 二對角線 (δ, δ') 及二對角線之中點聯結線 l 之長,求作四邊形.

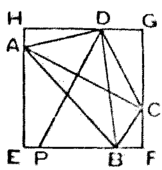
習題 372. 知四邊 a, b, c, d 及對角線中點之聯結線 l 之長,求作一四邊形.

習題 373. 知二對角線 (δ, δ'), 二對邊 (b, d) 及他二邊之中點聯結線 (n), 求作四邊形.

學者將 368—373 各題演過以後,當知此類作圖題可就第 299 圖觀察而任意創造之.

習題 374. 求于一定四邊形外接一正方形.

(注意: 右圖中若 $DP \perp AC$ 則 $DP = AC$.)



第 300 圖

習題 375. 求于一定四邊形外接一定形狀之矩形.

(注意: 若 $DP \perp AC$, 則 $DP : AC = HE : EF$.)

習題 376. 求于一定四邊形外接一定形狀之平行四邊形.

(注意: 如使 DP 與 AC 之交角 $= \angle G$ (或 $\angle H$), 仍可得 $DP : AC = HE : EF$.)

習題 377. 求于一定平行四邊形內接一定形狀之四邊形.

第五篇

軌跡

*第一章 釋類

§113. 類. 人有恒言,曰「人類」,曰「漢族」,曰「金屬」是皆類也. 類有類員,猶如會有會員,黨有黨員. 如奈端爲「人類」之類員,而非漢族之類員;鐵爲「金屬」之類員,而非「非金屬」之類員. 類之所以爲類者無他,在有法以判別孰爲共類員孰非共類員耳. 故曰

定義. 事物之類(a class of things)者,含一組事物者也: 任意選一事物,吾人有一定法則以判別其究屬于此組之中抑出乎此組之外.

其屬組中者稱爲該類之類員(a member of the class).

苟生物學家有法判別孰爲生物,孰非生物,則吾人承認「生物」爲一類. 苟倫理學家無一定法則以判別誰爲賢人誰非賢人,則吾人不承認「賢人」爲一類.

---

*欲急進者本章可略.

類之中有屬類焉,如黃種中之漢族是也. 各個漢人盡屬黃種,吾人故謂漢族爲黃種之屬類.

定義. 若甲類之類員皆爲乙類之類員,則稱甲類爲乙類之屬類(subclass).

按此定義,則凡類悉可認爲其本身之屬類,例如「人類」爲「人類」之屬類.

類有名異而實同者. 如「人類」與「理性動物」是. 人皆爲理性動物,而理性動物莫非人者,故人類與理性動物兩類之名雖異,而類員則盡同.

定義. 兩類全同(identical)云者,謂此類之類員皆屬于彼類,且彼類之類員皆屬于此類也.

§ 114. 關涉于類之語言文字及記號.

甲類爲乙類之屬類,可以記號表之爲

$$甲類 \; 3 \; 乙類^{註} \qquad (1)$$

讀之曰「甲類屬于乙類」. 例如

$$人類 \; 3 \; 動物,$$

$$白馬 \; 3 \; 馬.$$

甲類全同于乙類可以記號表之爲

$$甲類=乙類, \qquad (2)$$

註. 依 Dedekind 之記號.

讀之曰「甲類全同于乙類」. 例如

人類＝理性動物.

據全同類之定義,「甲類＝乙類」一語與聯立語

$$\left.\begin{array}{ll} \text{甲類} \supset \text{乙類} & \\ \text{且 乙類} \supset \text{甲類} & \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r}(3)\\(4)\end{array}$$

之意義相同.

吾人試不用此種記號及專門語言,而一以普通語言表之. 則「人類 $\supset$ 動物」將何以表明之? 是非通常之所謂「人是動物」耶? 「人類＝理性動物」將何以表明之? 明潔而且周到之答案不外四種:——

(i) 人是理性動物,理性動物是人.

(ii) 人是理性動物,人之外無所謂理性動物.

(iii) 理性動物是人,理性動物以外無所謂人.

(iv) 人之外無理性動物,理性動物之外無人.

之四語者,辭雖不同,其義則一,皆所以表示「人類＝理性動物」者也. 吾人任意用其中一語皆足以表「人類＝理性動物」之意;然無論用何語,必須順逆申說,二子句並立不闕,否則不足以盡二類全同之意.

習題 378. 引二事實以爲「等邊三角形＝等角三角形」之佐證.

習題 379. 引二事實以爲「等腰三角形＝二等角

三角形」之佐證.

習題380. 據一事實以為「等角四邊形不＝正方形」之證.

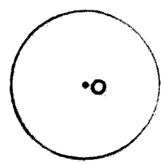
第二章　軌跡之意義及軌跡定理之證法

§ 115. **軌跡.** 點之類一名軌跡 (locus).

定義. 某種點之軌跡云者,某種點之全體所組成之類也;有某種性質之點之軌跡云者,有該性質之點之全體也;合于某條件之點之軌跡云者,合于該條件之點之全體也.

茲舉簡單實例數則于下.

例 1. (定義)與定點 O 距離三分之點之軌跡為一圓.註　此定義之意義乃言「與 O 距離三分之點之全體即此圓是也」. 換言之,此所謂圓者含有一切「距 O 三分」之點,且不含任何其他點.

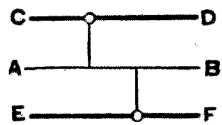


第 301 圖

例 2. (定理). 與一直線 AB 距離二分之點之軌跡為二直線 CD 及 EF,平行於 AB,與 AB 之距離各為二分

註. 俗書認此為定理者非是. (參考 §22).

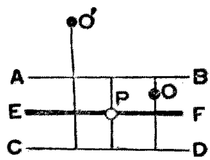
此定理之意義意在斷言二事:第一,CD或EF上之任意一點必與AB距離二分;第二,任意一點,苟距AB二分,則必在CD或EF上.此二事極淺顯,學者可自證之.



第 302 圖

例 3. (定理)與二平行線AB, CD等距離之點之軌跡爲一直線EF,與AB及CD平行且平分其間之公垂線.

欲斷此理眞確,須先證明二事:第一,EF上任意一點P與AB, CD等距離;第二,EF外任意一點O(或O′)與AB, CD不等距離.



第 303 圖

§ 116. 軌跡定理證法.

軌跡定理如

甲: 有C性質之點之軌跡爲L線

一語含有四義:—

子: L上任意一點必有C性質,

丑: 任意一有C性質之點必在L上,

寅: L以外任意一點必無C性質,

卯: 無C性質之點必不在L上,

故吾人可謂

甲=子且丑且寅且卯.

然子卯含義相同,丑寅內容無別,故謂

甲＝子且丑,

或　　甲＝子且寅,

或　　甲＝卯且寅,

或　　甲＝卯且丑,

皆屬至當. 從又一方面言之.

以子爲甲者謬.

以丑爲甲者亦謬,

以寅爲甲者不合理,

以卯爲甲者亦不合理.

由是吾人得一適宜的證軌跡定理之手續:——

第一步,于題設中明白規定L線及其他設定件且命之名.

第二步,于題斷中言甲.

第三步,證子註.

第四步,證丑.

第五步,斷言:「由子丑可知有C性質之點之軌跡爲L線」.

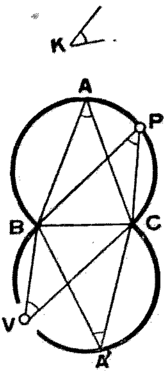
之五步者,不可或缺,敢有遺三或漏四註者,是爲不法.

註. 第三步中之子可以卯易之,第四步中之丑可以寅易之. 惟事實上初學者對於寅卯之措辭不易得當. 學者對于子丑之證明苟不見困難,不必以寅卯易之也.

例1.（定理）.三角形之底邊固定,頂角大小一定,則頂點之軌跡爲二圓弧,各以該邊爲弦以該角爲內接角.

題設: BC爲一定線段, ∠K爲一定角; BAC與BA′C爲在BC異側之兩弧,[註]其內接角∠BAC=∠BA′C=∠K.

題斷: 以BC爲底邊而頂角等于∠K之三角形之頂點之軌跡爲BAC與BA′C兩弧.



第304圖

證.（子）于兩弧之一, BAC上任取一點P. 聯PB, PC,則

$$\angle BPC=\angle BAC=\angle K, \qquad (?)$$

故P爲△BPC之頂點,此△以BC爲底,而頂角等于∠K.

（丑）設V爲任意一△BVC之頂,其頂角∠BVC=∠K.

若V與A在BC同側,則因∠BVC=∠BAC,可知V在BAC弧上. 若V與A在BC異側,則因∠BVC=∠BA′C,可知V必在BA′C弧上. 第三種情形V在BC直線上當可除外,因如此則不成三角形也.

故V必在BAC弧或BA′C弧上.

註. 當吾人作L線時,祇許利用靜點(固定點),不許涉及動點(任意點). 如在上例作兩弧(即L線)時,吾人用B, C, A, A′諸點(皆軌跡中之固定點),而不用動點P(即軌跡中之注意一點).

由子丑兩層可知以BC爲底邊而頂角等于∠K之三角形之頂點之軌跡爲BAC與BA′C兩弧.

推究: 若頂角爲直角,則軌跡爲一全圓.

例2. (定理). 與二定點距離平方之差等于常數之點之軌跡爲一直線,此直線垂直于二定點之連結線且與二定點距離平方之差等于該常數.

題設: A,B爲二定點,S爲常數,C爲AB直線上之點,$AC^2-BC^2=S$. XY爲一直線⊥AB于C.

題斷: 與A,B二點距離平方之差等于S之點之軌跡爲XY.

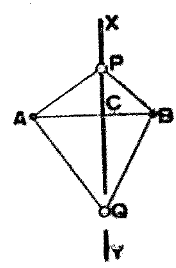
證: (子). 設P爲XY上任意一點. 則

$$PA^2=PC^2+AC^2,$$

$$PB^2=PC^2+BC^2;$$

相減得　$PA^2-PB^2=AC^2-BC^2,$

故據題設知　$PA^2-PB^2=S.$



第305圖

(丑). 設Q爲任意一點:

$$QA^2-QB^2=S.$$

作QC′⊥AB于C′. 則

$$QA^2=QC'^2+AC'^2,\qquad QB^2=QC'^2+BC'^2.$$

相減得　$AC'^2-BC'^2=S.$

然　$AC^2-BC^2=S.$　(題設)

$$\therefore\ AC'^2-BC'^2=AC^2-BC^2,$$

即　$(AC'+C'B)(AC'-C'B)=(AC+CB)(AC-CB)$,

故　$AB(AB-2\cdot C'B)=AB(AB-2\cdot CB)$,

即 C' 與 C 重合,而 Q 在 XY 上,

由(子)及(丑)可知

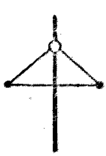
之點之軌跡為

推究: 當 $S=0$ 時, C 為 AB 之中點 M; 當 $0<S<AB^2$ 時 C 在 MB 之間;當 $S=AB^2$ 時,C 重于 B; 當 $S>AB^2$ 時, C 在 AB 之延長線上. 當 S 為負數時,可認 $PB^2-PA^2=-S$ 而研究之.

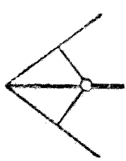
習題381. (定理). 與二點等距離之點之軌跡為二點聯結線之垂直平分線.

習題382. (定理). 與一角之二邊等距離之點之軌跡為該角之平分線.

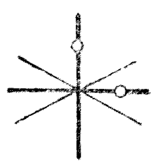
習題383. (定理). 與相交二直線等距離之點之軌跡為該二直線所成四角之二平分角線.



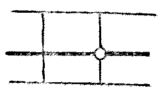
第 306 圖



第 307 圖



第 308 圖

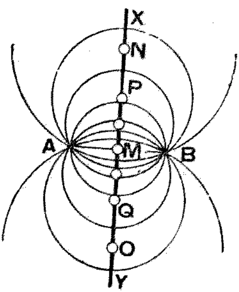


第 309 圖

習題384, 與二定平行線距離之比等於3:2之點之軌跡為二直線,平行於定直線且與二定線距離之比為3:2. (圖中僅畫出軌跡中之一線,其他一線為何?)

*§117. **軌跡定理證法(續).** 有許多軌跡定理明理不難,而措辭匪易. 演此類題,可謂知之非艱言之爲艱. 是不可不舉數例以資模仿.

例 1. 過二定點之圓之圓心之軌跡爲該二點聯結線之垂直平分線.



第 310 圖

題設: A, B 爲二定點, YY 直線 ⊥AB, 交於 AB 之中點 M.

題斷: 過 A, B 二點之圓之圓心之軌跡爲 XY 直線.

證. (子). 設 P 爲 XY 直線上任意一點.

吾人將證 P 可以爲一過 A, B 之圓之圓心. 蓋因

PA=PB. (習題 381 子)

吾人以 P 爲圓心,以 PA 爲半徑作一圓,必通過 A, B 二點也.

(丑) 設 ⊙O 爲任意一過 A, B 之圓. 吾人將證其圓心 O 在 XY 直線上, 蓋因兩半徑

OA=OB,

吾人據習題 381 丑,知 O 點在 XY 直線上也.

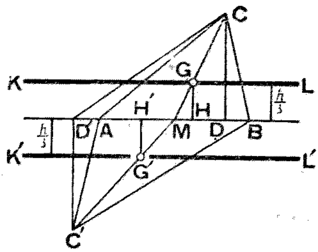
---

*欲急進者本節及其後之習題皆可略.

例 2. 共底等高之諸三角形,其重心之軌跡爲二直線,平行于公底,與公底之距離等於高線之三分之一.

題設 AB 爲定線段, h 爲定長. KL ∥ K'L' ∥ AB, 共與 AB 之距離皆爲 $\frac{h}{3}$.

題斷 以 AB 爲底,而高等于 h 之三角形之重心之軌跡爲 KL, K'L' 二直線.



第 311 圖

證. (子). 設 G 爲 KL (或 K'L') 直線上任意一點. 吾人將證 G 必爲彼類三角形之重心.

命 M 爲 AB 之中點,連 GM. 於 MG 半線上取 C 令 MC = 3·MG. 連 AC, BC. 作 CD, GH ⊥ AB 於 D, H. 則因 CD ∥ GH,

∴ CD : GH = CM : GM = 3 : 1,

∴ CD = 3 × GH = h, (因據 §115 例 2 (子), GH = $\frac{h}{3}$)

故 △ABC 之底爲 AB 而高等於 h. 今 CM 爲中線,而 G 又適當其 $\frac{2}{3}$ 處,故 G 爲 △ABC 之重心.

(丑). 設 △ABC' 之高線 C'D' = h, 吾人將證共重心 G' 在 K'L' (或 KL) 直線上.

作 G'H' ⊥ AB 於 H' 因 G' 在線 C'M 上,且 MC' = 3·MG', (§69 例 2),

∴ C'D' : G'H' = MC' : MG' = 3·1,

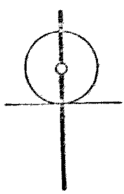
$$\therefore\quad G'H' = \frac{C'D'}{3} = \frac{h}{3}.$$

故 G′ 在 K′L′ (或 KL) 直線上. (§115 例 2 丑).

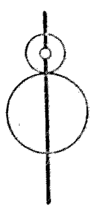
習題385. 切定直線於一定點之圓,其圓心之軌跡爲一直線垂直該定直線於該定點.

習題 386. 一定圓於一定點之圓之圓心之軌跡爲一直線,通過定點及定圓心.

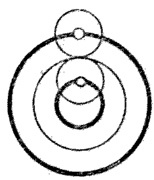
習題387. 切於一定圓,而半徑爲定長之圓,其圓心之軌跡爲二同心圓,半徑等於定圓半徑與定長之和及差.



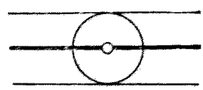
第 312 圖



第 313 圖



第 314 圖

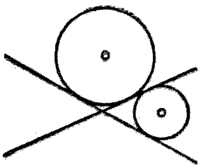


第 315 圖

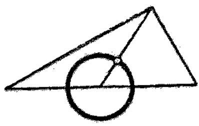
習題 388. 切於二定平行線之圓,其圓心之軌跡爲一平行線與二定直線等距離.

習題 389. 切於相交二直線之圓之圓心之軌跡爲何? 何故?

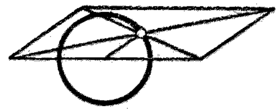
習題390. 直角三角形之弦固定,則其重心之軌跡爲一圓,以定弦中點爲圓心,定弦之 $\frac{1}{3}$ 爲直徑.



第 316 圖



第 317 圖



第 318 圖

習題 391. 一底邊固定而側邊定長之平行四邊形,對角線交點之軌跡為一圓,以公底之中點為圓心,以定長為直徑.

習題 392. 將 §64 例 4 及 §68 例 1 合併為一軌跡定理.

習題 393. 將 §62 例 1 及習題135 與併為一軌跡定理.

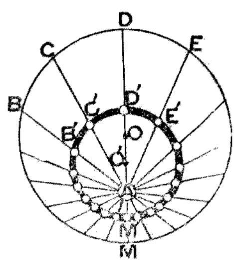
習題 394. 將 §85 例 1 及習題173合說為一軌跡定理.

第三章　描　跡

§ 118. **描跡.** 規定點之性質,欲求點之軌跡,必須經過描跡(location)手續. 以例說明之如下:——

例 1. 由定圓內一定點向圓周引線段,試求此線中點之軌跡.

設 A 為 ⊙O 內一點. 由 A 至圓周任意作 AB, AC, AD, … 線段, 標取其中點 B′,C′,D′,…



第 319 圖

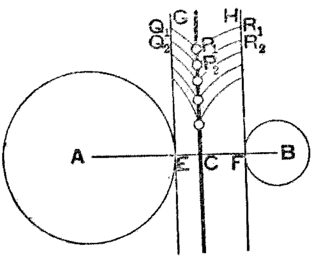
觀此 B′,C′,D′,… 諸點布例形勢似為一圓. 若仍不放心,于較稀鬆處再補數線,則迴環形勢愈顯明矣.

用筆依此等點之形勢徐徐聯

絡之.

此新圓之圓心何在? 直徑幾何? 亦爲完工時所必須注意者. 是不難以實測方法知之:圓心爲AO之中點,直徑等于定圓半徑.

例2. 試求對于不相交二定圓有相等切線段之點之軌跡.



第 320 圖

設⊙A與⊙B互相在外. 吾人欲求一點P使向⊙A所作之切線長爲t,向⊙B所作之切線其長亦爲t. 然吾人知當P繞A旋轉時,轉至任何位置,其對⊙A之切線長不變. 繞B旋轉時對⊙B之切線長亦不變, 故吾人可任意作二圓之切線,使其長相等,然後各繞其圓心旋轉使端點相重而止.

聯AB線段交二圓于E及F. 作EG及FH⊥AB. 于EG上取點Q_1, Q_2,…, 于FH上取點R_1, R_2,…, 令$EQ_1=FR_1$, $EQ_2=FR_2$…. 過Q_1, Q_2, …以A爲心作同心圓, 過R_1, R_2, …以B爲心作同心圓,命兩系相當圓之交點爲P_1, P_2, ….

則每點P向兩圓所作切線必相等,因一等于EQ,一

等于FR也. 吾人顯見于等交點列成一直線垂直于AB.

其垂足C自亦宜爲軌跡中一點,故若由C作二切線CT及CU于⊙A及⊙B,此二切線亦必相等,故

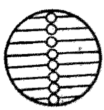
$$CA^2-AT^2=CT^2=CU^2=CB^2-BU^2.$$

演下列諸題,395-401,但求描跡手術精細,繪圖美觀,不務證明也.

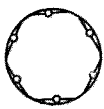
習題395. 試求圓內諸平行弦中點之軌跡.

習題396. 試求圓內諸等弦中點之軌跡.

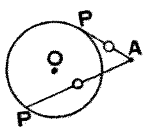
習題397. A爲⊙O外一定點. 由A至⊙O之圓周上任意一點P作AP線段. 求AP之中點之軌跡.



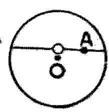
第321圖



第322圖



第323圖

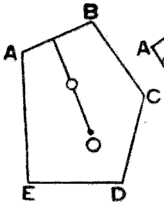


第324圖

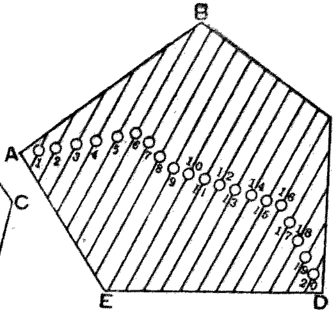
習題398. A爲⊙O內一定點. 求過A之弦之中點之軌跡.

習題399. ABCDE爲一多邊形. O爲一定點. 試求由O至形周所作線段之$\frac{5}{9}$處點之軌跡.

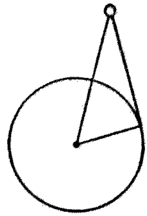
習題400. ABCDE爲一多邊形. 于形內作許多平行線段,抵于形周. 求此等平行線之中點之軌跡.



第 325 圖



第 326 圖



第 327 圖

習題 401. 求向定圓有定長之切線段之點之軌跡.

§ 119. 描跡時應注意之點. 描跡時有數事須特別注意:—

第一. **急遽變化.** 在普通的實例,吾人逐步所標軌跡中之點,類皆布列密邇,變化迂徐. 其有距離太遠或變化急遽者,宜多補點,以覘其變化之狀況. 例如習題 405 之圖,軌跡之自 1 至 6 也,徐徐而升,既而下降甚疾,10 以後降甚緩,至 16 復急降. 是知軌跡之變也,變化之中有變化焉. 6, 7 之間, 8, 9 之間, 16, 17 之間,皆急變之所,宜更多畫平行線,取中點,以察變化狀況. 又如下節 (§120) 例 1 之圖,諸點布列密于左,稀于右,近 D 之處可更補他點以實之.

第二. **對稱形勢.** 例如§115之例2,上下無差等,既上有一線CD.當然下有一線EF. §116之例1,其軌跡上下對等,左右相稱. §118之例1,以OA爲中,左右對稱. 習題387,動圓之與靜圓相切也,可外切,可內切,各有圓心之軌跡一枝. 若此之類,因上以知下,因左以知右,因外以知內,則誠然矣,但不可偏廢也.

第三. **臨界位置.** 臨界位置者,軌跡之所終始也. 軌跡之形,除循環無端(如圓)及一往無垠(如直線)者外,莫不有所終,有所始;始點終端,皆甚重要. 習題400之A及D,即軌跡之所始終也. §118例2之軌跡,則無始無始者也. §116之例1,上下兩枝皆以B, C爲終始之極端. 此題軌跡如未先知,則描跡之時無人必作許多BD及CE于BC之同側,令

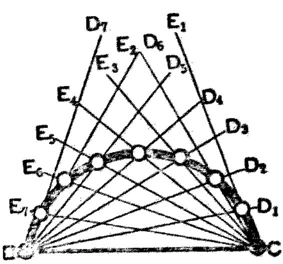
$\angle D_1BC=10°$, $\angle E_1CB=170°-\angle K$,

$\angle D_2BC=20°$, $\angle E_2CB=160°-\angle K$,

$\angle D_3BC=30°$, $\angle E_3CB=150°-\angle K$,

$\angle D_4BC=40°$, $\angle E_4CB=140°-\angle K$,

....



第328圖

以求BD與CE之交點A. $\angle B$愈大,則$\angle C$愈小. $\angle C$小而至于0°, $\angle B$大而至于$180°-\angle K$,于斯極矣. 當是之時,A蓋擠而至于B. 使$\angle B$小而$\angle C$大,則A又近

于C矣. 是故知B,C乃軌跡終始之端.

始終之端稍忽,甚易蹈§120例2後所指摘之錯誤.

第四. **特殊情形.** 列如習題400之軌跡,6 7二點之間起特別變化,遞變之點在過B之平行線上,故過B之平行線特別重要. 習題399過各頂之線亦各有其特別之重要. §118例1之OA直線,習題397之OA直線及由A所引之切線,皆特別重要者也.

第四章 軌跡問題

§120 求跡問題解法. 軌跡問題如

乙. 求某種點之軌跡

正當之解法宜分六步註:—

第一步,描跡.

第二步,定名,即審察描得軌跡之所在位置,而確定該線之名稱也.

第三步,置答,述一語如甲也.

第四步,證子.

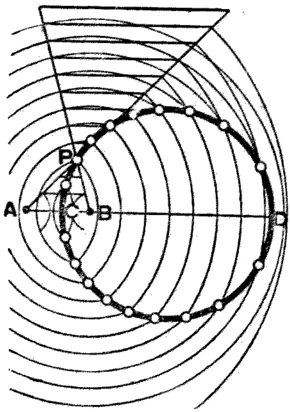
第五步,證丑.

第六步,結論,即重申答語也.

註. 比之作圖題解法,則第一步相當于分析,第二,三步相當于作圖,第四,五,六步相當于證.

例1. 求與二定點 A, B 距離之比等于定比 $\frac{m}{n}$ 之點之軌跡.

(1) (第 329 圖) 以 A 爲圓心, $m_1, m_2, \cdots$ 爲半徑作弧, 以 B 爲圓心, $n_1, n_2, \cdots$ 爲半徑作弧, 其中 $\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}=\cdots=\frac{m}{n}$. 相當之弧相交, 諸交點環列有如一圓. 此圓內分 AB 于 C, 外分 AB 于 D, $AC:BC=AD:BD=m:n$ (C, D 爲軌跡中較特別位置). 軌跡之于 CD, 上下對稱.



第 329 圖

(2) (第 330 圖) 將 AB 內分于 C 使 $AC:BC=m:n$; 外分于 D 使 $AD:BD=m:n$. 以 CD 爲直徑作 ⊙O.

(3) 所求之軌跡, 即 ⊙O 也.

[注意] (2) 步作 L 線時, 不承襲(1). 苟承襲(1), 則(2)中自「將 AB 內分」至「$AD:BD=m:n$」可略. 所以不略者, 因做(1)時係在試驗態度中, 其語句類雖嚴密, 而(2)以後則皆斷定口氣, 非嚴格不可. 且(1)步但在個人研究時必要耳, 若夫舉以告人, (如著作試卷之類), 非必需寫出者也. 故正式起頭, 應從(2)始. 圖亦另備, 不用描跡時所用之圖.

(4)　設 P 為 $\odot O$ 上任意一點. 吾人將先證 PC 平分 $\angle APB$ 而 PD 平分其外角,次證 $PA:PB=m:n$.

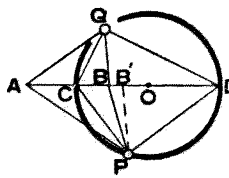
設使 $\angle APC \neq \angle CPB$, 可作 $\angle CPB'=\angle APC$, 其邊 PB' 交 AB 于 B'.

因 $\angle CPD=\text{rt.}\angle$, PD 顯然平分 $\angle APB'$ 之外角. 是故據 §83 例 1

$$AC:B'C=AP:B'P,$$

$$AD:B'D=AP:B'P;$$

$$\therefore AD:B'D=AC:B'C.$$



第 330 圖

外項互換得 $B'C:B'D=AC:AD$. (i)

但據 (2)　$AD:BD=AC:BC=m:n$

外項互換得 $BC:BD=AC:AD$. (ii)

由 (i) 及 (ii) 知 B' 與 B 必為一點. 但 $\angle APB'$ 原係被 CP 平分者. 故知即 CP 平分 $\angle APB$, 而

$$PA:PB=CA:CB=m:n.$$

(5)　設 Q 為任意一點: $QA:QB=m:n$,

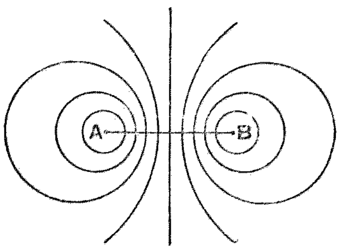
則　$QA:QB=CA:CB=DA:DB$,

QC 及 QD 必為 $\angle AQB$ 及其鄰補角之平分線,(習題 157).

故 $\angle CQD=\text{rt.}\angle$, 而 Q 在 $\odot O$ 上.

(6)　由以上各論證,可知與 A B 二點距離之比等于 $m:n$ 之點,其軌跡必為一圓.圓心 O 在 AB 直線上圓周內分且外分 AB 線成 $m:n$ 之比.

【備考】. 此種圓稱爲 Apollonius' circle, 其用甚廣. 當 $\frac{m}{n}>1$ 時,此圓在右方; 當 $\frac{m}{n}<1$ 時,此圓在左方; 當 $\frac{m}{n}=1$ 時,此軌跡不偏不倚,而爲一直線 $\perp$ AB 于其中點(參考習題 381).



第 331 圖

例 2. 求對二定圓有相等切線段之點之軌跡.

此題有用下法解之者.

【解法】. 設 ⊙A 與 ⊙B 爲二定圓, P 爲一點,其向二圓所作之切線 PQ, PR 相等.

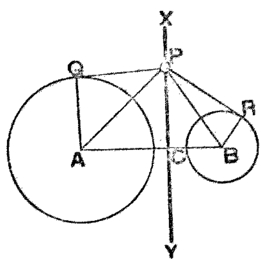
因 $$PA^2=PQ^2+AQ^2,$$

$$PB^2=PR^2+BR^2,$$

相減得 $PA^2-PB^2=AQ^2-BR^2$ (爲常數).

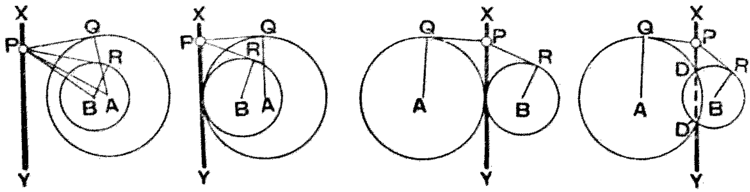
據 §116 例 2 知此種 P 點之軌跡爲一直線 XY $\perp$ AB 于一定點 C,

$$CA^2-CB^2=AQ^2-BR^2.$$



第 332 圖

此法僅在二圓不相交時可用,當二圓交于二點時,公弦DD′上之點,理應除外(因由此種點不能作切線于二圓)而上法未嘗注意. 若依吾人前定手續,循規蹈矩而爲之,則當描跡之時(見§118例2),在二圓相交之情形吾人自然見及軌跡不能入二圓之內;證予時益信.



第 333 圖　第 334 圖　第 335 圖　第 336 圖

定義1. PO^2-r^2一數稱爲P點對于⊙(O,r)之冪(power).

定義2. 對于二圓有等冪之點之軌跡稱爲二圓之等冪軸(radical axis).

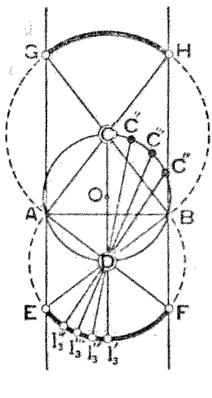
演理. ⊙(A,r), ⊙(B,r′)二圓之等冪軸,爲一直線⊥AB于C,

$$CA^2-CB^2=r^2-r'^2$$ 【公式XLIII】

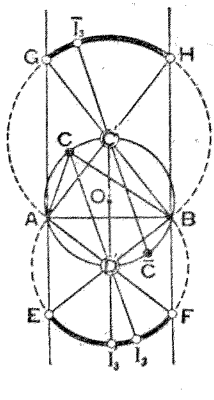
例3.* △ABC之底邊AB爲一定⊙O之固定弦,而頂點C爲圓上任意一點,試求△ABC之傍心I_3之軌跡.

*欲急進者,例3及習題404—406皆可略.

(1)　取AB優弧之中點C′,則△ABC′亦為該種三角形(惟較特別耳),其傍心I_3'自亦為軌跡中之一點(稍特殊者). 于C′B弧上順次取C″, C‴,…諸點,作出ABC″, ABC‴,…諸三角形之傍心I_3'', I_3''',…吾人將見此等點顯然佈列成一弧形. 當C趨近于B, ∠BAC變小, $\angle BAI_3$變大. 惟$\angle BAI_3$無論如何不得大至一直角,故I_3', I_3'', I_3''',…等點愈趨愈近于圖中之E,但終不能至. 更依左右對稱上下同例之理,則軌跡之為何線,顯而易見矣.



第 337 圖

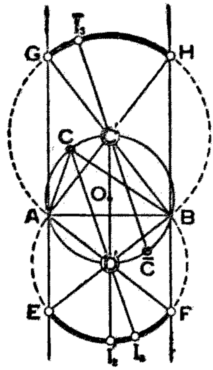


第 338 圖

(2)　平分AB優弧于C′,劣弧于D′. 作⊙(C′, C′A)及⊙(D′, D′A). 作直線GAE, HBF⊥AB交⊙C′于G, H, ⊙D′于E, F.

(3)　$\overset{\frown}{EF}$及$\overset{\frown}{GH}$即所求之軌跡.

(4) 于 EF, GH 二弧之一,如 EF 上,任取一點 I_3.作直線 I_3D' 與 $AC'B$ 弧交于 C, (因 $AD'F$ 與 $BD'E$ 為二直線, I_3D' 之延長線必在 $\angle AD'B$ 之間.) 則



第 338 圖

$\angle ACI_3 = \angle I_3CB$, (因 $\overparen{AD'} = \overparen{D'B}$)

故 CI_3 平分 $\angle ACB$. 又因

$\angle ABI_3 = \frac{1}{2}\angle AD'I_3$

$= \frac{1}{2}(2\text{rt.}\angle s - \angle AD'C)$

$= \frac{1}{2}(2\text{rt.}\angle s - \angle ABC)$

故 AI_3 平分 $\angle ABC$ 之外角.

故 I_3 為 $\triangle ABC$ 之傍心.

故凡 $\overparen{EF}$ 或 $\overparen{GH}$ 上之點,必為此類三角形之傍心.

(5) 設 C 為 ⊙O 上任意一點,假令在 AB 劣弧上.作 $\overline{CC'}$ 直線交 $\overparen{GH}$ 于 $\bar{I}_3$, (因 $AC'H$ 與 $BC'G$ 皆為直線, $\overline{CC'}$ 之延長線必在 $\angle GC'H$ 之間). 用同上之理,吾人可知 $\bar{I}_3$ 必為 $\triangle AB\bar{C}$ 之傍心. 即 $\triangle AB\bar{C}$ 之傍心在 GH 弧上也.

故凡此類三角形之傍心 I_3 必在 $\overparen{GH}$ 或 $\overparen{EF}$ 上.

(6) 由此可見 ______________________________

之傍心 I_3 之軌跡必為 ______________

此種題亦有解之如下者:——

$$\angle I_3AB=\tfrac{1}{2}(2\text{rt.}\angle s-\angle CAB),$$

$$\angle I_3BA=\tfrac{1}{2}(2\text{rt.}\angle s-\angle CBA),$$

$$\therefore\quad \angle I_3AB+\angle I_3BA=2\text{rt.}\angle s-\tfrac{1}{2}(\angle CAB+\angle CBA)$$

$$=2\text{rt.}\angle s-\tfrac{1}{2}(2\text{rt.}\angle s-\angle ACB),$$

$$\therefore\quad 2\text{rt.}\angle s-\angle AI_3B=2\text{rt.}\angle s-\tfrac{1}{2}(2\text{rt}\angle s-\angle ACB),$$

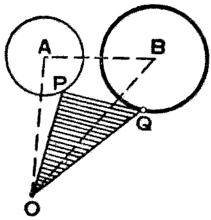
即 $$\angle AI_3B=\tfrac{1}{2}(2\text{rt.}\angle s-\angle ACB).$$

當 C 在優弧 AC′B 時, $\angle ACB$ 爲常數,故上式之右方亦爲常數,故據§114之例 1, I_3 之軌跡爲二弧,以 AB 爲公弦,而內接角各爲 rt.$\angle-\tfrac{1}{2}\angle AC'B$. 當 C 在劣弧 AD′B 時亦如之.

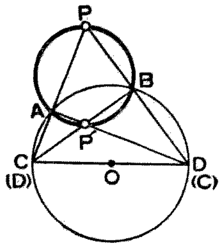
此種解法,利用旣知之軌跡定理定解軌跡問題,自是極其簡便. 然其蔽在于不注意極限位置,忽視存在問題,知丑不知子. 故其弊至于使局外點($\widehat{AG}$, $\widehat{BH}$, $\widehat{AE}$, $\widehat{BF}$ 上者)濫入于軌跡之中. 竊以爲不可爲初學法.

習題402. 三角形之形狀一定,一頂固定,第二頂在一圓上,求第三頂之軌跡.

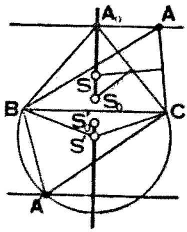
習題403. 試就例 1 求△ABP之重心之軌跡.



第 339 圖



第 340 圖



第 341 圖

習題404. A, B 爲⊙O上二定點. CD爲⊙O之任意一直徑. 試求AC與BD二直線之交點軌跡.

習題405. 共底等積之三角形,試求其外心之軌跡並詳細推究之.

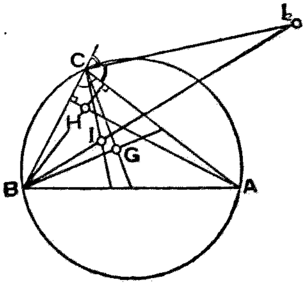
習題406. 試就例3求

垂心之軌跡;

重心之軌跡;

內心之軌跡;

傍心I_1之軌跡.



第 342 圖

§121. 軌跡定理別式. 軌跡定理有但言軌跡爲何種線,而不言究爲何線者,如

丙. 求證有C性質之點之軌跡爲一直線(線段,圓圓弧,或二直線,等等).

此種題雖係證題,但仍不能省描跡工夫．描跡時須知:——

(一)　言明軌跡爲直線者,求二點焉可也．

(二)　言明軌跡爲線段者。求二端焉可也．

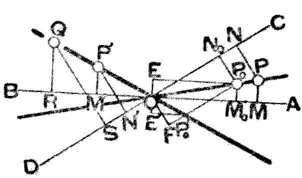
(三)　言明軌跡爲半線者,求端點與另一點可也．

(四)　言明軌跡爲圓者,求一直徑或三點焉可也．

(五)　明言軌跡爲弧者,求二端及另一點可也．

例 1.　(定理)與相交二定直線距離之比等于定比 m : n 之點之軌跡爲二直線．

(1)　設 AB, CD 二定直線相交于 O,而 m 及 n 爲二定線段, P 爲任意一點, PM ⊥ AB 于 M, PN ⊥ CD 于 N, PM : PN = m : n．　當 PM 甚小時, PN 亦必甚小．　由此可見 O 實爲軌跡兩枝中之公共點．據題言,軌跡旣爲兩直線,然則于每線中各另求一點,便可決定各該線矣．

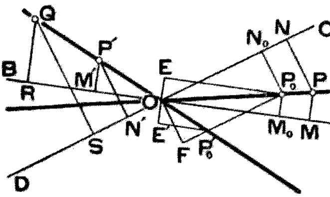


第 343 圖

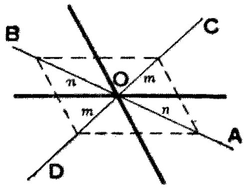
(2)註 作 EOE′⊥AB,取 OE = OE′= m．　作 OF⊥CD, 取 OF = n．　作 EP_0, $E'P_0'$ ∥ AB, 由 F 作線 ∥ CD, 交 EP_0, $E'P_0'$ 于 P_0, P_0'．　聯 P_0O, $P_0'O$．

(3)　P_0O, $P_0'O$ 二直線即所求之軌跡．

註．亦可用第 344 圖以作出軌跡．



第 343 圖



第 344 圖

(4) 于 OP_0 上(或 OP_0' 上)任意取一點 P. 作 $PM \perp AB$, 又作 $PN \perp CD$. 則

$$PM : P_0M_0 = OP : OP_0 = PN : P_0N_0,$$

$$\therefore \quad PM : PN = P_0M_0 : P_0N_0 = m : n.$$

(5) 設 Q 為任意一點,其至 AB, CD 二直線之垂線 $QR : QS = m : n$. 則 Q 必在 $\angle AOC$, $\angle COB$, $\angle BOD$, $\angle DOA$ 四角中一角之內. 假令 Q 在 $\angle COB$ 內. 于 $P_0'O$ 之延長線上取一點 P' 作 $P'M' \perp AB$ 于 M', $P'N' \perp CD$ 于 N', 則

$$P'M' : P'N' = m : n, \qquad \text{(見(4))}$$

$$\therefore \quad P'M' : P'N' = QR ; QS. \qquad \text{(因皆} = m : n)$$

然 $\quad \angle M'P'N' = \angle RQS, \qquad (?)$

$$\therefore \quad \triangle P'N'M' \sim \triangle QSR;$$

$$\therefore \quad \angle M'N'P' = \angle QSR.$$

然 $\quad \angle M'N'P' = \angle M'OP' \quad$ (因O,P,'M,'N' 共圓)

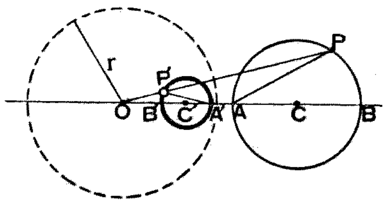
且 $\quad \angle QSR = \angle QOR. \quad$ (因 O, Q, R, S 共圓)

由此三方程得 $\angle M'OP' = \angle QOR$.

故 QO 與 P'O 重合,即 Q 在 OP_0' 上.

(6). 由 (4) 及 (5) 知: 與 AB, CD 兩直線距離之比等于 $m:n$ 之點軌跡必爲 OP_0 及 OP_0' 兩直線.

例 2.* 設 r 爲一定線段, O 爲定 ⊙C 外一定點. P 爲 ⊙C 上一點, P′ 爲 OP 半線上一點, $OP \cdot OP' = r^2$. 則 P′ 之軌跡爲一圓.



第 345 圖

(1). 作 OC 交 ⊙C 于 B, A. P 之軌跡上下對稱, 故知 P′之軌跡亦上下對稱. 先于 OC 上求 A′, B′ 二點, 令 $OA' \cdot OA = r^2$, $OB' \cdot OB = r^2$. 則 A′, B′ 亦爲軌跡中之點. 軌跡誠爲一圓, 其必以 A′B′ 爲直徑無疑.

(2). 作 OC 交 ⊙C 于 B, A; 于 OC 半線上求 A′, B′ 二點令 $OA' \cdot OA = OB' \cdot OB = r^2$. 以 A′C′ 爲直徑作 ⊙C′.

(3). 此 ⊙C′ 即所求之軌跡.

(4). 于 ⊙C′ 上任意取一點 P′. 于 OP′ 半線上取一點 P, 令 $OP \cdot OP' = r^2$. 則因 $OP \cdot OP' = r^2 = OA \cdot OA'$, 故

$$OA' : OP' = OP : OA, \quad \triangle OA'P' \sim \triangle OPA.$$

$$\therefore \quad \angle OP'A' = \angle OAP.$$

---

* 欲急進者, 此例及習題 407, 408 可略.

同理 $\angle OP'B'=\angle OBP$.

相減得 $\angle A'P'B'=\angle BPA=rt.\angle$.

故P在⊙C圓周上.

(5). 設Q為⊙C圓周上任意一點. 于OQ半線上取一點Q′令$OQ\cdot OQ'=r^2$,吾人用同法可以證Q′必為⊙C′圓周上一點.

(6). 由(4)與(5)吾人可斷定當P在⊙C圓周上變動時,P′之軌跡為⊙C′.

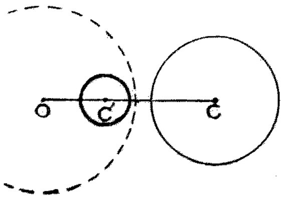
【備考】. 如此之P,P′兩點,$OP\cdot OP'=r^2$者,互稱為反象(inverse). O稱為反映中心(centre of inversion), r為反映半徑(radius of inversion), ⊙(O, r)為反映圓(circle of inversion).

凡反映圓內之點P,其反象P′必在圓外(因$OP<r$,則$OP'>r$也. 凡反映圓外之點P,其反象P′必在圓內(因$OP>r$,則$OP'<r$也. 凡反映圓周上之點P,其反象即為P,因$OP=r$. 則$OP'=r$也.

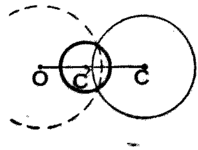
離反映中心O甚近之點其反象甚遠,故習慣謂O之反象在無限遠,而無限遠處之點,其反象則為O.

P與p′在互為反象關係之下,其變動所生之軌跡,亦互稱為反象(inverse). 例如上述⊙C′即⊙C之反象也.

C點之反象非C′, (C對于⊙O之反象,乃O對于⊙C′之反象).



第 346 圖



第 347 第

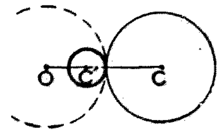


圖 348 圖

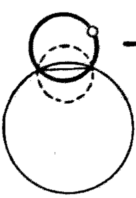
若 ⊙C 完全在 ⊙O 之外，則 ⊙C′ 完全在 ⊙O 之內. 若 ⊙C 與 ⊙O 交于兩點，則 ⊙C′ 亦與之會于此兩點. 若 ⊙C 與 ⊙O 相切，則 ⊙C′ 亦與之切于同一點. 無論在何種情形之下；O 爲 ⊙C 與 ⊙C′ 之相似中心，而三圓恆共一等羃軸.

習題407. 不通過反映中心之圓其反象爲一圓.

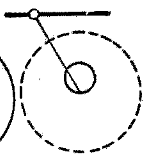
習題408. 通過反映中心之圓其反象爲一直線.

習題409. 與相交二直線距離之和等于定長之點之軌跡爲一矩形之周.

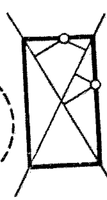
習題410. 與相交二直線距離之差等于定長之點之軌跡爲一矩形四邊之延長線(形周除外).



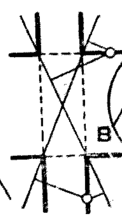
第 349 圖



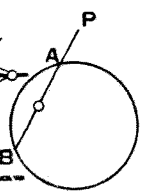
第 350 圖



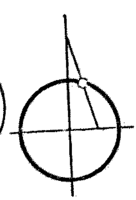
第 351 圖



第 352 圖



第 353 圖



第 354 圖

習題411. P 爲 ⊙O 外一定點. 由 P 任意作一直線，與 ⊙O 交于 A, B 二點. 求證 AB 線段之中點之軌跡爲一弧.

習題412. 嵌一寸長之線段于二垂直線,則線段中點之軌跡為一圓.

習題413. 同序相似之三角形,第一頂固定,第二頂在一定直線上,則第三頂之軌跡為一直線.

習題414. 同序相似之四邊形,三頂分在三定直線上,則第四頂之軌跡為一直線. (即第361圖之KL).

第五章 軌跡應用

§122. 軌跡定理之用法. 軌跡定理如

甲. 有C性質之點之軌跡為L線

本合

子. L即線上之點有C性質

及 丑. 有C性質之點在L線上

二定理而成. 故習一定理甲,即可得子丑兩方面之應用. 子丑二者本皆係普通形式之定理.其被引據以證他定理本無足異. 然軌跡定理甲最通用之處有三:—

(1) 用以證軌跡定理,

(1) 用以求有二性質之點,

(3) 用以解作圖題.

此三用處,皆子丑同時並用. 如§117例2之引用§115

例 2, 即用軌跡定理證軌跡定理,而子丑並得其用者也.

(2), (3) 兩種,分別論之于後.

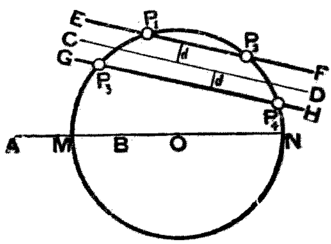
§ 123. **軌跡交點.** 欲求一點,或數點,合于 C_1, C_2 二條件,可先求合于第一條件 C_1 之點之軌跡 L_1,次求合于第二條件 C_2 之點之軌跡 L_2. 此 L_1 與 L_2 之交點,即係適合二條件之點(據子); 且除此等交點外,別無能合二條件者(據丑). 演題方式概遵演作圖題法.

例 1. 求一點,其與 A,B 二定點距離之比若 5:3, 而其與定直線 CD 之距離等于一如線段 d.

設定: A,B 二點, CD 直線,線段 d, 比 5:3.

求作: 一點,與A, B 距離之比若 5:3, 與 CD 之距離爲 d.

作法. 內分 AB 于 M,外分 AB 于 N, 使 AM : MB = AN : BN = 5 : 3. 以 MN 爲直徑作 ⊙O. 作 EF ∥ CD, 又作 GH ∥ CD, 令其與 CD 之距離皆爲 d, 則 EF 及 GH 與 ⊙O 之交點,(如其有之), 即爲所求之點.



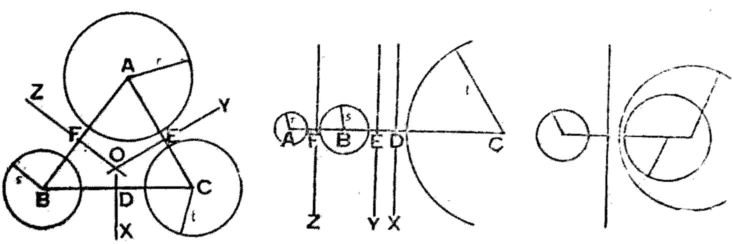
第 355 圖

證. 與 A, B 距離之比 = 5 : 3 之點之軌跡爲 ⊙O (§120 例 1).

與CD距離爲d之點之軌跡爲EF及GH(§115例2),故合于二條件之點,必並在⊙O與EF或GH上(據丑);且在⊙O上又在EF或GH上之點,皆足任其選(據子).換言之,所求之點,即⊙O與EF或GH之交點是也.

推究. 視EF, GH二直線與⊙O交點之有無多少,有一解,二解,三解,四解及無解之別.

例2. 不同心之三圓,兩兩有等冪軸,三軸必會于一點,或互相平行,或竟合而爲一.(其會于一點者此點稱爲等冪心(radical centre)).



第356圖

題設: ⊙(B, s)與⊙(C, t)之等冪軸爲DX,

⊙(C, t)與⊙(A, r)之等冪軸爲EY,

⊙(A, r)與⊙(B, s)之等冪軸爲FZ,

題斷: DX, EY, FZ 三軸必會于一點,或互相平行,或合而為一.

證 (i). 若 A, B, C 不共線,則因 EY $\perp$ AC, FZ $\perp$ AB (§120 例 2 演理),故 EY 與 FZ 必有一交點 O.

因 O 在 EY 上, $OA^2-r^2=OC^2-t^2$, (§120 例 2 演理(子))

因 O 在 FZ 上, $OA^2-r^2=OB^2-s^2$; (§ 120 例 2 演理(子))

$$\therefore \quad OC^2-t^2=OB^2-s^2,$$

故 O 在 DX 上 (§ 120 例 2 演理 (丑)).

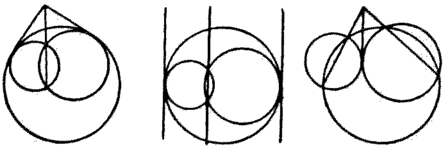
(ii). 若 A,B,C 共線,而 DX, EY, FZ 三軸無相合者,則因三軸皆須 $\perp$ 連心線,故彼此互相平行.

(iii). 若 A,B,C 共線,且 EY 與 FZ 合為一線,則此線上之任何點 O 皆須在 DX 上,理與 (i) 同. 故此時三軸合而為一.

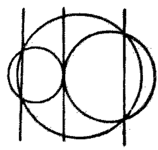
習題 415. 有不共點之三線,求與三線等距離之點. 共有幾點? 其名為何?

習題 416. 有不共線之三點,求與三點等距離之點. 此點何名?

習題 417. 試求至定 △ABC 三邊 BC, CA, AB 之比若三邊之反比 $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$ 之點. (用§121 例 1 求之). 共有幾點? 其名為何?



第 357 圖



第 358 圖

習題 418. A, B 二圓相交,又皆與 C 圓相切,則 A,B 二圓之公弦, A, C 二圓之公切線(過切點者),及 B, C 二圓之公切線(過切點者),必會于一點或皆相平行.

習題 419. A, B 二圓相切,又各與 C 圓相交,則 A, B 二圓之公切線(過切點者), A, C 二圓之公弦,及 B, C 二圓之公弦,必同會于一點,或皆相平行.

習題 420. 有 △ABC, 無一角過 120° 者,試求一點 P 令 ∠APB, ∠BPC 及 ∠CPA 各爲 120°. (用 §116 例 1 或習題 94 求之).

(此種點稱爲 △ABC 之 isogonic centre.)

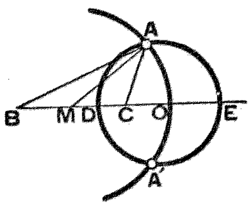
§ 124. **軌跡與作圖.** 軌跡定理又可用之于作圖. 甚言之,作圖之法幾無不利用軌跡相交者.

例 1. 知 a, m_a, $c:b$, 求作 △ABC.

設定: 線段 a, m_a 及比 $h:k$.

求作: △ABC 令 $BC=a$, 中線 $AM=m_a$, $AB:AC=h:k$.

作法: 作 $BC=a$, 平分之于 M. 內分 BC 于 D, 外分 BC 于 E, 令 $BD:DC=BE:CE=h:k$. 以 M 爲圓心, m_a 爲半徑, 作 ⊙M. 又以 DE 爲直徑作 ⊙O. 兩圓若相交于 A, 聯 AB, AC, 則 △ABC 卽爲所求.



第 359 圖

證. 與 B,C 距離之比若 $h:k$ 之點之軌跡爲 ⊙O, 而 A 在 ⊙O 上,

$\therefore$　$AB:AC=h:k$. (§120 例 1 子)

與 M 距離等于 m_a 之點之軌跡爲 ⊙M, 而 A 在 ⊙M 上,

$\therefore$　$MA=m_a$. (§115 例 1 子)

今 △ABC 之 (i) 底 $BC=a$, (ii) 中線 $MA=m_a$, (iii) 二腰之比 $AB:AC=h:k$; 故 △ABC 爲所求作者.

推究: 據習題 184 知

$$DO=\tfrac{1}{2}(BE-BD=\frac{hk}{h^2-k^2}a,$$

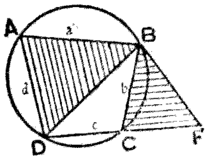
$$MO=DO+MD=DO+\tfrac{1}{2}(BD-DC)=\frac{h^2+k^2}{2(h^2-k^2)}a.$$

故據 §28, 欲二圓相交于二點, 必須(且祇須)連心線小于半徑和而大于半徑差, 故

$$\frac{hk}{h^2-k^2}a+m_a>\frac{h^2+k^2}{2(h^2-k^2)}a>\left|\frac{hka}{h^2-k^2}-m_a\right|$$

爲本題有惟一之解之必須且勝任之條件. 二交點 A, A′ 僅用其一者, 以 $\triangle ABC \cong \triangle A'BC$ 也.

例 2. 知四邊,求作圓內接四邊形.



第 360 圖

分析: 就第194圖觀之,

$$\triangle ABD \sim \triangle CBF.$$

故(左圖)　　$a:b=d:CF$.

CF之長定後由是可以定F之位置.

又 $BD:BF=a:b$,(B之軌跡爲何?)

　　$CB=b$; (B之軌跡爲何?)

故由此二條件可以定B.

例 3*. 求于一定四邊形內內接一定形狀之四邊形.

設定: ABCD, EFGH 二四邊形.

求作: 于ABCD內內接 $E'F'G'H' \sim EFGH$.

作法: (1) 置三頂于 AB, BC, CD 作 $\triangle E_1F_1G_1 \sim \triangle EFG$, (習題284).

(2) 作 $E_1F_1G_1H_1 \sim EFGH$.

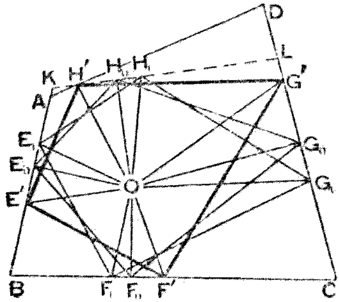
(3) 作 $\odot BE_1F_1$, $\odot CF_1G_1$ 交于O.

(4) 作 $OE_0 \perp AB$ 于 E_0,

$OF_0 \perp BC$ 于 F_0,

$OG_0 \perp CD$ 于 G_0.

(5) 作 $E_0F_0G_0H_0 \sim E_1F_1G_1H_1$.



第 361 圖

* 欲急進者此例可略.

(6)　設 H_0H_1 與 AD 交于 H'.

(7)　于各邊所在直線上取 E', F', G',

(i)　令 $\angle E_0OE'=\angle F_0OF'=\angle G_0OG'=\angle H_0OH'$.

(ii)　且令 E_0, E_1, E'; F_0, F_1, F'; G_0, G_1, G' 順序皆與 H_0, H_1, H' 之順序相若.

則　$E'F'G'H' \sim EFGH$.

推究: 據以上作法可知惟(6)中交點 H' 之有無不可知,多少不可必. 當 $H_0H_1 \parallel AD$ 時,本題無解,當 H_0H_1 合于 AD 時,本題有無限多解; (例如圖中之 $E_0F_0G_0H_0$, $E_1F_1G_1H_1$ 皆是也). 例如,當 EFGH 為正方形,若 AECD 為矩形而非正方形,則無解;若 ABCD 為正方形,則解數無限之多(習題 34).

習題 421. 知三邊之長,求作四邊形,使可有內切圓及外接圓,

習題 422. 補例 2 之設定,求作,作法,證,推究.

習題 423. 知二對邊及二對角線,求作一圓內接四邊形,(利用第 196 圖仿上題解之可也).

習題 424. 知 a, $\angle A$, $b:c$, 求作三角形.

習題 425. 知 R, $\angle A$, m_a, 求作三角形.

習題 426. 知 a, h_a, $b:c$, 求作三角形.

習題 427. 知 a, b^2-c^2, $b:c$, 求作三角形.

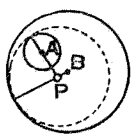
雜　題

描跡題：一

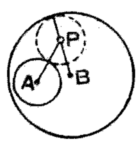
習題428.　⊙A與⊙B爲二定圓，⊙P與之相切.　試就下例各種情形描P點之軌跡.　(但求繪圖確精，不務證明).

(I)　⊙A在⊙B之內，

(i)　⊙A內切于⊙P;　(ii)　⊙A外切于⊙P.



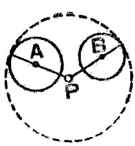
第 362 圖



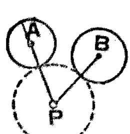
第 363 圖

(II)　⊙A與⊙B互相在外，

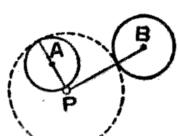
(i) 皆內切于⊙P;　(ii) 皆外切于⊙P;　(iii)⊙A內切于⊙P，而⊙B外切于⊙P;　(iv)　⊙A外切于OP，而⊙B內切于⊙P.



第 364 圖



第 365 圖

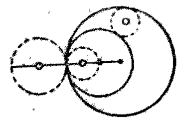


第 366 圖

(III) ⊙A 與 ⊙B 內切,

(i) 且切 ⊙P 于同一點;

(ii) 切 ⊙P 于不同二點.



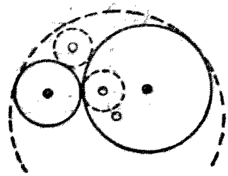
第 367 圖

(IV) ⊙A 與 ⊙B 外切,

(i) 且切 ⊙P 于同一點;

(ii) 皆外切于 ⊙P;

(iii) 皆內切于 ⊙P.



第 368 圖

(V) ⊙A ⊙B 與相交,

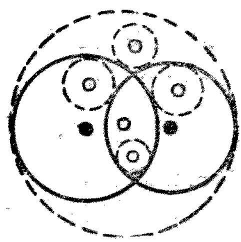
(i) ⊙P 內切于二圓;

(ii) ⊙P 外切于二圓;

(iii) ⊙P 內切于 ⊙B,外切于 ⊙A;

(iv) ⊙P 內切于 ⊙A,外切于 ⊙B;

(v) 二圓內切于 ⊙P.



第 369 圖

問答題:—

習題 429.

(i) 通過反映中心之直線,其反象爲何?

(ii) 不通過反映中心之直線,其反象爲何?

(iii) 通過反映中心之圓,其反象爲何?

(iv) 不通過反映中心之圓,其反象爲何?

習題430. 三角形之底邊固定,

(i) 面積一定,其頂點之軌跡為何?

(ii) 二腰之比一定,其頂點之軌跡為何?

(iii) 二腰平方之和一定,其頂點之軌跡為何?

(iv) 二腰平方之差一定,其頂點之軌跡為何?

(v) 二腰之和一定,其頂點之軌跡為何?

(vi) 二腰之差一定,其頂點之軌跡為何?

演習題:——

習題431. 三角形之底邊固定,二腰之平方和一定,則頂點之軌跡為一圓. (用習題174, Apollonius' 定理: $\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\frac{1}{4}c^2=m_c^2$, 且注意推究).

習題432. 試就§120例1, 求OA, OB, OC之長,以AB及m, n表之.

習題433. 試就§120例2, 求CA, CB之長,以兩圓半徑及AB之長表之.

習題434. 試就§121例2, 求C之反象,且證其非C'.

習題435. 求置三頂點于三同心圓周,作一三角形,與一定三角形相似.

習題436. 求置三頂點于三定直線,作一定形狀之三角形.

習題437. 知a, b+c, ∠A, 求作三角形.

習題438. 知a, b^2+c^2, b : c, 求作三角形.

習題439. 三角形之底邊固定,頂角等于一定銳角,試求

(i) 頂點A之軌跡,

(ii) 垂心H之軌跡,

(iii) 重心G之軌跡,(參考習題390),

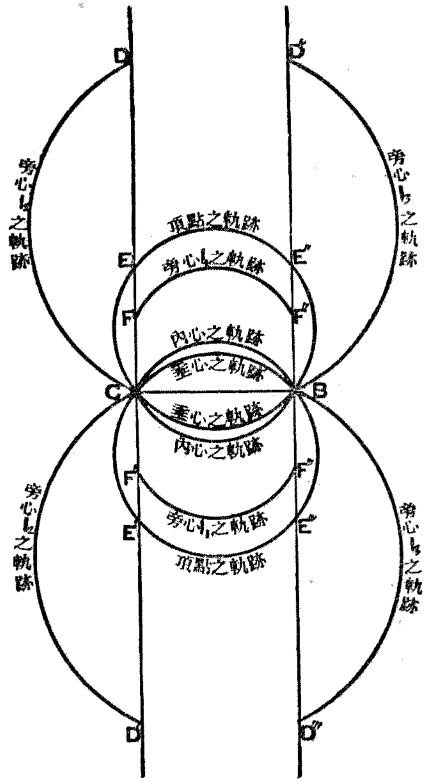
(iv) 內心I之軌跡,

(v) 九點圓心N之軌跡,

(vi) 傍切圓心I_1之軌跡,

(vii) 傍切圓心I_2之軌跡,

(viii) 傍切圓心I_3之軌跡,



第 370 圖

習題440. 上題,頂角若爲直角,諸點之軌跡各何如?

頂角若爲鈍角,諸點之軌跡各何如?

習題441. 于△ABC內求一點,與三邊距離之比等于相當邊之比者. (此點稱爲△ABC之 symmedian point, 亦曰 Lemoine point.)

習題442. 試求一點,令其至一定$\triangle ABC$三頂A,B,C之比若$a:b:c$.

習題443. 試求一點,令其至一定$\triangle ABC$三頂A,B,C之比若$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$.

(此二點稱爲$\triangle ABC$之isodynamic points.)

習題444. 有相等之定線段AB及A′B′,試求一點O令$\triangle ABO \cong \triangle A'B'O$. 有不相等之定線段AB及A′B′,試求一點O,令$\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$.

習題445. 同序相似二三角形,試求其相似中心.

習題446. 頂點A固定,底邊(BC直線)通過一定點A′之一切同序相似三角形ABC,其他二頂之軌跡必各爲一圓.

第六篇*

極大極小及極限

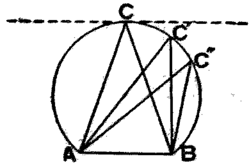
第一章　極大極小

§125. **定義.** 一羣同類量中之最大者稱爲該羣量之極大(maximum),其最小者稱爲極小(minimum).

羣中之量,若個數有限,自是有極大亦有極小. 若量之個數無限之多,則或有極大而無極小(如例1,例2),或有極小而無極大(如嵌于二平行線間之線段),或兼有之(如例3),或兩無焉(如共底諸三角形之面積).

例 1. 底邊公共,頂角相等之諸三角形中,以等腰者爲極大. 其不等腰者,則底角之差愈小,面積愈大.

如圖. ACC′C″B 爲一圓弧, AC＝BC, 則



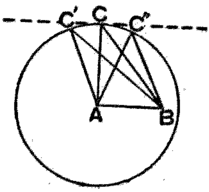
第 371 圖

$$\triangle ABC > \triangle ABC' > \triangle ABC''.$$

*欲急進者本篇可略.

此例及下二例之證法皆甚易,從略.

例 2.　二邊之長既定之諸三角形中,以夾角爲直角者爲極大.



第 372 圖

如圖 $AC=AC'=AC''$,

$\angle BAC=\text{rt.}\angle$,

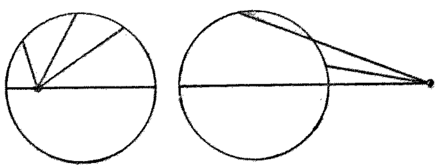
$\angle BAC'>\text{rt.}\angle$,

$\angle BAC''<\text{rt.}\angle$;

則　$\triangle BAC'<\triangle BAC$,

$\triangle BAC''<\triangle BAC$.

例 3.　由定點至定圓上之諸線段,以過圓心者爲極大,延長線過圓心者爲極小.



第 373 圖

§ 126. 直接比較法.

吾人欲證某羣量[X]中以某量X_0爲極大(或極小),最基本之法爲:

第一步,證此羣[X]中有一量X_0存在.

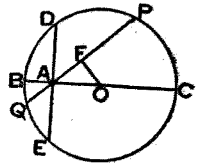
第二步,證此X_0較此羣[X]中任意一量X爲大(或小),最小(多)亦相等.

X_0之在苟非顯而易見,則第一步亦不可忽.

例1.　過定圓內定點之諸弦中,以過此點之直徑爲極大,垂直于此直徑者爲極小.

題設: A爲定$\odot$O內一定點: BC爲直徑, DE, PQ爲弦,皆過A: 且$DE \perp BC$.

題斷: $DE < PQ < BC$.



第374圖

證. 作$OF \perp PQ$于F. 則

$\because$　$OA > OF > 0$,

$\therefore$　$DE < PQ < BC$. (§50例1)

例2.　二線段之和一定,則差愈小者積愈大,而以相等時之積爲極大.

將二線段接爲一線段,則題意無異于:

題設: O爲AB線段之中點, P, P′爲AB上二點,

$$OP' < OP.$$

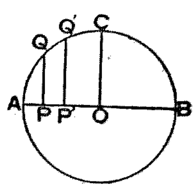
題斷: $AP \cdot PB < AP' \cdot P'B < AO \cdot OB$.

證. 以O爲圓心. OA爲半徑作圓. 于P, P′及O作直線$\perp AB$,交圓于Q, Q′及C. 則

$AP \cdot PB = PQ^2$, (公式XVI)

$AP' \cdot P'B = P'Q'^2$,

$AO \cdot OB = OC^2$.

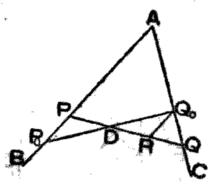


第375圖

但　$PQ < P'Q' < OC$, (習題121)

$\therefore$　$AP \cdot PB < AP' \cdot P'B < AO \cdot OB$.

例 3.　過一點而嵌于一定角間之線段,以被此點平分者所成三角形為最小.



第 376 圖

題設:　P_0Q_0 為嵌于 $\angle BAC$ 間之線段,被 D 點平分.

PDQ 為嵌于 $\angle BAC$ 間之其他任意線段.

題斷:　$\triangle AP_0Q_0 < \triangle APQ$.

證.　PQ 直線既與 $\triangle AP_0Q_0$ 之 P_0Q_0 邊交于 D,自必與另一邊相交 (Pasch 公理);換言之, P,Q 二點中必有一點在 $\triangle AP_0Q_0$ 上者.　假令 P 在 $\angle AP_0Q_0$ 上,即在 AP_0 線段上,則 $\triangle AP_0Q_0$ 之外角

$$\angle P_0Q_0Q > \angle Q_0P_0A.$$

故若于 PD 之延長線上取 $DR = PD$, 則因 $DQ_0 = P_0D$(題設)可知 $\triangle DQ_0R \cong \triangle DP_0P$.

$$\angle DQ_0R = \angle DP_0P < \angle DQ_0Q.$$

故知 Q_0R 在 $\angle DQ_0Q$ 之間,而 R 在 DQ 之間.

$$\therefore \qquad \triangle DP_0P = \triangle DQ_0R < \triangle DQ_0Q.$$

各加以四邊形 $APDQ_0$ 得

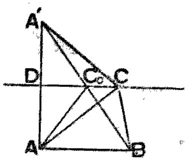
$$\triangle AP_0Q_0 = AQ_0RP < \triangle APQ.$$

例 4.　等底等積諸三角形中以等腰者周極小.

將諸三角形之底重合,且置于同側,則題意無異于:

題設: $\triangle ABC_0=\triangle ABC$, $AC_0=BC_0$, $AC\neq BC$.

題斷; $AB+BC_0+C_0A<AB+BC+CA$.



第 377 圖

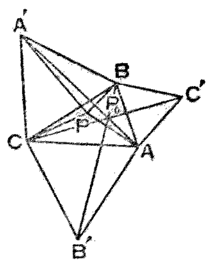
證. 據題設, $C_0C \parallel AB$. 作 $AD\perp CC_0$ 于 D. 延長 AD 至 A′ 令 $DA'=AD$. 再聯 $A'C$, $A'C_0$. 吾人甚易證 $A'C_0B$ 成一直線. 是故 $BC_0+C_0A'<BC+CA'$,

即 $BC_0+C_0A<BC+CA$.

例 5. 與一三角形(三角無過 120° 者)三頂距離之和最小之點爲何點? (Fermat's problem)

解. 設 $\triangle ABC$ 之三角無過 120° 者. 設 P 爲任意一點. 作正 $\triangle A'BC$ 與 A 處于BC之異側. 則通常皆

$PB+PC>PA'$; (習題140)



第 378 圖

惟當 P 在 ⊙A′BC 之 BC 弧上則

$PB+PC=PA'$; (§62 例 1)

合此二者得 $PB+PC\nless PA'$. (i)

又通常皆 $PA+PA'>AA'$; (§34 之 vii)

惟當 P 在 AA′線節上,則 $PA+PA'=AA'$; (§12)

合此二者得 $PA+PA'\nless AA'$. (ii)

由 (i),(ii) 可見 $PA+PB+PC\geqq AA'$.

若 P_0 爲 AA′ 直線與 BC 弧之交點,則

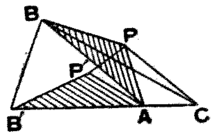
$$P_0A+P_0B+P_0C=AA'.\quad (§62\ 例1)$$

$$\therefore\quad PA+PB+PC\geqq P_0A+P_0B+P_0C.$$

故與A,B,C三頂距離之和最短之點P_0,為AA'線與⊙$A'BC$之交點,即習題94所稱AA', BB', CC'三線會合之處,其時$\angle AP_0B=\angle BP_0C=\angle CP_0A=120°$,而

$$P_0A+P_0B+P_0C=AA'=BB'=CC'.$$

習題447. 設例5之$\angle BAC\geqq 120°$,試研究同一問題.(第379圖).



第379圖

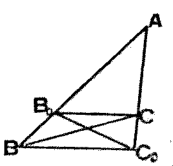
習題448. 二線段之積為常數,則差愈小者和愈小,而以相等時之和為極小.(用第374圖)

習題449. 將例1之定點改在圓外,研究同一問題.

習題450. 共底等積之三角形,腰(或底角)之差愈小者頂角愈大,腰(或底角)和愈小.

習題451. 例3中若更作$P'DQ'$嵌于$\angle BAC$之間,令成$\{P_0PP'\}$及$\{Q_0QQ'\}$之順序,則

$$\triangle AP_0Q_0<\triangle APQ<\angle AP'Q',\quad AP_0\cdot AQ_0<AP\cdot AQ<AP'\cdot AQ'.$$



第380圖

習題452 共頂角且等積之諸三角形中,腰(或底角)之差愈小,則底(周)愈小,高愈大,而以等腰三角形之底(周)為最小,高為最大.

§ 127. **極大極小問題之發生.** 一幾何圖形之決定,須賴若干量之既定. 苟此若干量中缺一不定,而僅定其他各量,則因形內某點之移動不居而生軌跡某量之大小不一而往往有極大極小或極限.

例如一三角形本可以底,周,積三者定之(見習題346). 然若僅底固定,積一定,則頂點移動不居,而其軌跡成二直線(見§115 例2);同時周之長短不齊而有極小(見上節例4). 又若底固定,周一定,則頂點亦移動不居,而其軌跡成一橢圓(見習題430之v);同時積之廣狹不同,而有極大(見下節例1).

圖形之完全決定,不藉作圖則用計算. 故作圖題,計算公式,軌跡,與極大極小,四種問題實相伴而生. 每因其中一問題而惹起其餘三問題.

§ 128. **間接比較法.** 別擇一第三者以為介紹.

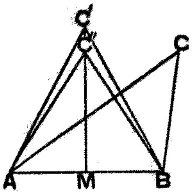
例 1. 共底等周之各三角形中以等腰者為極大.

題設: $\triangle ABC'$與$\triangle ABC$等周,而$AC'=BC'$,$AC\neq BC$.

題斷: $\triangle ABC'>\triangle ABC$.

證. 作$\triangle ABC''=\triangle ABC$且令$AC''=BC''$. 則$C'C''$直線垂直平分AB于一點M(§52). 由§126之例4知

$$\triangle ABC\text{之周}>\triangle ABC''\text{之周}.$$



第 381 圖

但據題設 $\triangle ABC_1$ 之周 $=\triangle ABC$ 之周,

$\therefore$ $\triangle ABC'$ 之周 $>\triangle ABC''$ 之周,

$\therefore$ $AC'>AC''$,

$\therefore$ $MC'>MC''$ (§74.例2)

$\therefore$ $\triangle ABC'>\triangle ABC''$,

即 $\triangle ABC'>\triangle ABC$.

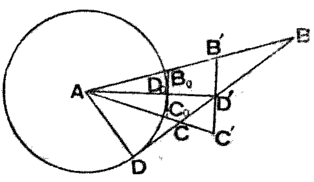
例 2. 頂角相等高相等之一切三角形中以等腰者面積極小.(將頂角重合,則題意無異于:)

題設: $\triangle AB_0C_0$ 與 $\triangle ABC$ 共頂角 A,高相等;

$AB_0=AC_0$, $AB\neq AC$.

題斷: $\triangle AB_0C_0<\triangle ABC$.

證. 以 A 為圓心,以二三角形共同之高為半徑作圓,切 B_0C_0 于 D_0, BC 于 D. 則 D_0 為 B_0C_0 之中點,而 D 則非 BC 之中點.



第 382 圖

BC 既為圓之切線,其上之點,除 D 外,莫不在圓外. 即 AD_0 與 BC 之交點 D′ 亦然. 過 D′ 作 $B'C'\parallel B_0C_0$ 交 AB_0 于 B′, AC_0 于 C′. 則

$$\triangle AB_0C_0<\triangle AB'C'.$$

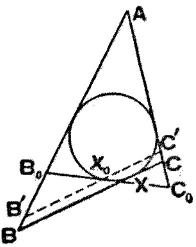
但 $$\triangle AB'C'<\triangle ABC.\qquad(\text{§126例 3})$$

$$\triangle AB_0C_0<\triangle ABC.$$

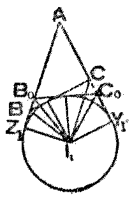
習題453. 試據習題452.以證例2.

習題454. 共頂角及內切圓之諸三角形,底角(或腰)之差愈小,則面積(周)愈小,而以等腰者爲最小.

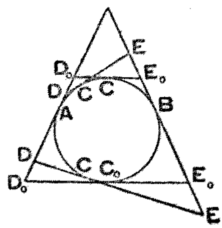
(用第383圖,倣例2之證法證之.)



第383圖



第384圖



第385圖

習題455. 共頂角且等周之一切三角形,底角(或腰之差愈小,則面積愈大,底愈小;而以等腰者之面積極大底極小. (據例2證第384圖中之$\triangle I_1B_0C_0 < \triangle I_1BC$).

習題456. 若C_0爲AB弧之中點,C爲弧上其他任意一點. A, B二處之切線與C處切線交于D, E,與C_0處切線交于D_0, E_0. 求證$ABED > ABE_0D_0$.

習題457. 定圓外切四邊形以正方形之面積(周)極小.

習題458. 定圓內接四邊形以正方形之面極(周)極大.

習題459. 等積四邊形以正方形之周爲最小.

習題460. 等周四邊形以正方形之積爲最大.

§129. **均數逐代法.** 欲顯此法之精神,請先觀下例.

例 1. 有正數n個$a_1, a_2, \cdots, a$,若共和一定,則以各數相等時連乘積最大.

命 $$a=\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n},$$

則題意無異謂

(1) $a^n \geqq a_1a_2\cdots a_n.$

當$a_1=a_2=\cdots=a_n$時,(1)顯然成立.

若$a_1,a_2,\cdots,a_n$諸數中有不相等者,則必有一大于a者,亦于有一小必a:者. 設$a_1>a>a_2$,則

$$a-a_1<o,\quad a-a_2>o,\quad (a-a_1)(a-a_2)<o.$$

$$\therefore\quad a(a_1+a_2-a)>a_1a_2,$$

$$a(a_1+a_2-a)a_3a_4\cdots a_n>a_1a_2a_3a_4\cdots a_n.$$

由此可見吾人新得之n個正數

(2) $a,\ a_1+a_2-a,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_n,$

其積較$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n$之積大,而和則相同.

若(2)中猶有不等于a者,吾入用同法又可另得n個正數,和同前,而積則更大.

由此以往,不過n－I次,便可得n個相等之數,共時積最大.

此爲均數逐代法,與尋常代數教科書所用均之又均之法截然不同:——

<table>
<tr>
<td>

第一,均之又均之法,

每見 $a_1>a_2$ 時,

即取 a_1, a_2 之平均數

$$\frac{a_1+a_2}{2}$$

以代 a_1 及 a_2;

第二,均之又均之法,容或永遠不能達到完全平均之時;註

</td>
<td>

均數逐代法,

每見 $a_1>\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}>a_2$ 時,

即取 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之平均數

$$a=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \text{ 及 } a_1+a_2-a$$

分別代 a_1 及 a_2.

均數逐代法,則最多不過 $n-1$ 步,便可將原設之 n 個數 $a_1, \cdots a_n$, 逐步用平均數 a 代替淨盡.

</td>
</tr>
</table>

計算手續苟至無限之多,則日力所不能窮,想像所不能究,智者難言之,而況初學乎! 此近日代數學及幾何學,所以捨均之又均之法,而取均數逐代法也.

例 2. 等積三角形中以等邊者周最小.

題設: $\triangle ABC=\triangle A_0B_0C_0$; $A_0B_0C_0$ 係等邊三角形,而 ABC 則否.

題斷: $\triangle A_0B_0C_0$ 之周 $<\triangle ABC$ 之周.

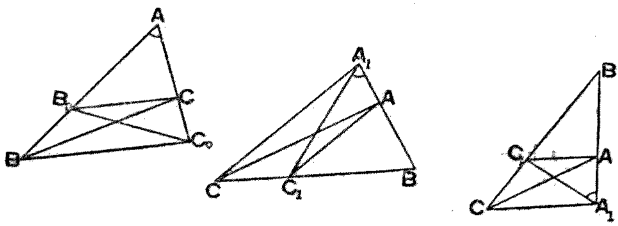
證. $\triangle ABC$ 三角之大小不外三種情形;——

(i) 一角為 $60°$, (下面左圖).

設 $\angle A=60°$. 則 $AB \neq AC$. 于 AB 及 AC 上取 B_0 及 C_0, 令 $AB_0=AC_0$, 且令 $\triangle AB_0C_0=\triangle ABC$ (習題 225).

則 正 $\triangle AB_0C_0$ 之周 $<\triangle ABC$ 之周 (習題 452).

註. 謂均之又均,終當至于皆等者妄也.



第 386 圖

(ii) 二角大于 60°,(中圖).

設 $\angle A, \angle B > 60^\circ$, 則 $\angle C < 60^\circ$. 于 BA 之延長線及 BC 上取 A_1 及 C_1, 令 $\angle BA_1C_1 = 60^\circ$, 且令 $\triangle A_1BC_1 = \triangle ABC$ (§94). 則因 $\angle B > 60^\circ$,

$\therefore\quad \angle BA_1C_1 + \angle BC_1A_1 = \angle BAC + \angle BCA < 120^\circ,$

$\therefore\quad \angle BA_1C_1 = 60^\circ > \angle BC_1A_1,$

$\therefore\quad \angle BAC > \angle BA_1C_1 > \angle BC_1A_1 > \angle BCA.$

$\therefore\quad \angle BAC - \angle BCA > \angle BA_1C_1 - \angle BC_1A_1 > 0.$

$\therefore\quad \triangle BAC$ 之周 $> \triangle BA_1C_1$ 之周. (習題 452)

故據 (i) $\triangle BAC$ 之周 $>$ 正 $\triangle B_0A_0C_0$ 之周.

(iii) 二角小于 60°, (右圖).

設 $\angle A > 60^\circ$: $\angle B, \angle C < 60^\circ$. 證法與(ii)相似.

習題 461. 等周三角形之中以等邊者爲極大.

用兩法證之: 第一法,效法例 2 根據習題 452 證之. 第二法,根據例 2 用間接法證之.

習題 462. 定圓內接三角形以等邊者積及周極大

習題 463. 定圓外切三角形以等邊者積及周極小

§130. 法證反. 上節之例2,歷來流行教科書多用反證法證之其法如下:—

> 設$\triangle A_0B_0C_0$爲一羣共底等積三角形中其周最小者,則$\triangle A_0B_0C_0$必爲等邊三角形.
>
> 如其不然,假令$A_0C_0 \neq B_0C_0$.
>
> 另作$\triangle A_0B_0C'$,令$C_0C' \parallel A_0B_0$'且令$A_0C' = B_0C'$.
>
> 則$\triangle A_0B_0C'$之周$<\triangle A_0B_0C_0$之周
>
> (§126例4)
>
> 此與原設「$\triangle A_0B_0C_0$之周極小」不合.
>
> 故$\triangle A_0B_0C_0$非爲等邊三角形不可.

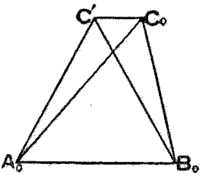


圖 387 第

1913年 Oskar Perron of Tübingen 謂此種證法如可用,則可倣之以證「正整數

$$1, 2, 3, 4, \cdots$$

中以1爲最大.」 其法如下:—

> 設n爲正整數中之最大者,則n必爲1.
> 假令$n \neq 1$,則另有一正整數$n^2 > n$;
> 此與原設「n爲正整數中最大者」不合.
> 故最大之正整數非爲1不可.

此種結論吾人當然不能承認. 然則其證法容有可議處. 惟此證法與前證法完全相同. 可見前證法實不可靠.

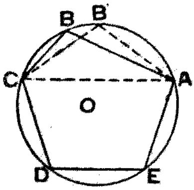
後例證法誤謬之源在于最大之n不存在. 因最大之n不存在,故「證」中語語落空,無所指,無意義,無是非之可言,是以不適用反證法. 譬如謂「孔子非中國人必爲外國人」可,謂『「無是公」非中國人必爲外國人』則不可.

故前例證法欲其合用,必須有法知:「其底等積之諸三角形中,有一形其周極小.」(此即§126之第一步.)

此種極小(或極大)之存在與否,往往甚難判斷. 本節諸例及習題,題文之措辭稍異于前者,正爲避免存在問題也.

例1. 定圓內接一切n邊形中,如有一形其積(或周)極大,此形爲正n邊形.

題設: ABCDE爲⊙O內接諸五邊形中面積(或周)極大者.



第 388 圖

題斷: ABCDE為正五邊形.

證　假令ABCDE非正五邊形則必有二鄰邊不等, 設 $AB \neq BC$.

取$\overparen{ABC}$中之點B′, 則

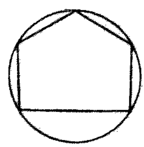
$\triangle AB'C$之面積 $>$ $\triangle ABC$之面積, (§125 例1)

$\therefore$, AB′CDE之面積 $>$ ABCDE之面積.

然則ABCDE之在⊙O內接各五邊形中,其面積並非極大矣,此與題設不合.

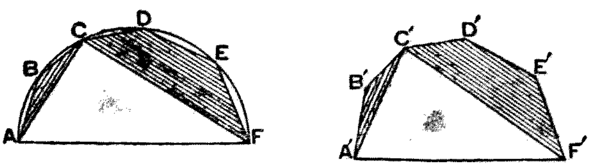
故ABCDE不得不為等邊五邊形. 故ABCDE為正五邊形(§40).

易面積為周,證法類是.


第 389 圖

演理. 以一定弓形之弦為一邊所能內接之一切n邊形中,如有一形其面積(或周)極大,此形之其他 $n-1$ 邊必相等.

例2. 知 $n-1$ 邊之長,如能作出一最大之n邊形,則此形必能內接于以未定邊為直徑之半圓.



第 390 圖

題設: s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 爲已知之線段. 順次以 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 爲五邊之一切六邊形中以ABCDEF爲最大.

題斷: ABCDEF必內接于以AF爲直徑之半圓.

證. 設B, C, D, E中有一點,例如C, 不在以AF爲直徑之半圓上, 則$\angle ACF$非直角.

作$\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$. 作$C'F' = CF$, 令$\angle A'C'F' = \text{rt.}\angle$. 又作四邊形C'D'E'F'$\cong$四邊形CDEF. 如此則

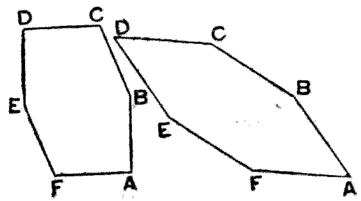
$\triangle A'C'F' > \triangle ACF$;　　(§125例2)

$\therefore$ A'B'C'D'E'F'>ABCDEF.

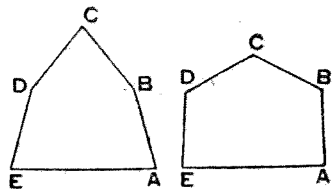
然A'B'C'D'E'F'亦爲以 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 爲五邊的六邊形之一,今大于ABCDEF,可見ABCDEF不得爲此類六邊形中之最大者;此與原設不合.

故ABCDEF之各頂無一不在以AF爲直徑之半圓者.

例3, 等積諸n形邊中如有一形其周極小,則此形必等邊.



第391圖

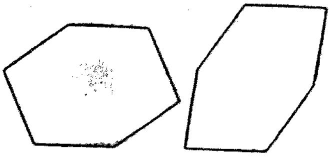


第392圖

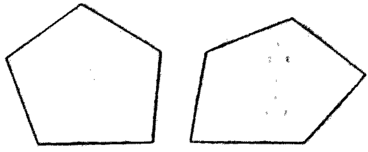
演理. 立於一定邊上之等積諸n邊形中,如有一形其周極小,則此形之其他n−1邊必相等.

此例(及演理)之證法與例1(及演理)及例2之證法相似(故從略),惟結論則不同.例1中,正n邊形惟一(全等者認爲同一),故周極大者亦惟一而已.例2中積極大者亦惟一而已.例3則不然.如圖所示兩六邊形各爲等邊的,且彼此等積.如此互相等積的等邊多邊形,其多實不可勝數.然則例3之意不過謂:「等積諸六邊形之具最小周者,苟其有之,則須于等邊諸形中求之」耳.究竟此等積而小周者爲誰何?有之否乎?一形耶?多形耶?題文及證法皆未之決也.即習題465亦僅知其有,亦不過一種,而不能必其果有也.

例4. 等周諸n邊形中,如有一形其面積極大.則此形必等邊.



第393圖



第394圖

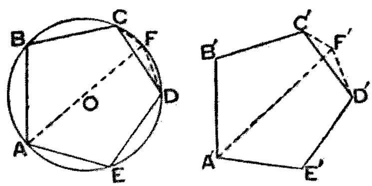
演理. 立于定邊上之等周諸n邊形中,如有一形面積極大,則此形之其他n−1邊必相等.

此例(及演理)與例3(及演理)結論之本意,及證明之方法皆相類.學者可自證之.

例 5. 互等邊之諸 n 邊形中,如有一極大者,則此形必能內容于一圓.

題設: ABCDE 與 A′B′C′D′E′ 互等邊, ABCDE 內容于一⊙O, A′B′C′D′E′ 不能內容于一圓.

題斷: ABCDE>A′B′C′D′E′.



第 395 圖

證. 過 A 作直徑再交⊙O 于 F. 假令此 F 在 DC 弧上. 聯 CF, DF. 作 $\triangle C'D'F' \cong \triangle CDF$. 則

$$ABCF \geqq A'B'C'F', \quad AEDF \geqq A'E'D'F'; \qquad (例 2)$$

$\therefore$ ABCFDE>A′B′C′F′D′E′.

$\therefore$ ABCDE>A′B′C′D′E′.

演理. 等周諸 n 邊形中,如有一極大者,此形必爲正 n 邊形.

因最大再必等邊(例 4)且能內容于一圓(例 5)也.

習題 464. 定圓外切諸 n 邊形中如有一形其面積(或周)極小,則此形必爲正 n 邊形.

習題465. 積積諸n邊形中,如有一形其周最小,則此形必爲正n邊形.

第二章　極限

§131. 引言. 莊子載惠施之言曰:「一尺之棰,日取其半,雖萬世不竭」. 蓋半取半餘,終未嘗盡取也,雖然,日復一日,則所餘日少,所取日多. 時間永逝不休,則所取日近乎一尺,而所餘日幾乎無有矣.

今若以t代日數,以R_t代第t日所餘尺數,S_t代首t日所取總尺數,則第3日所餘者僅$R_3=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$尺,所取者已$S_3=1-\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}$尺矣. 故當日數增長,即當t以次代

(1)　$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots$

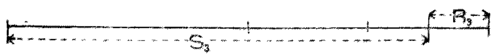
諸值;則所餘尺數日少,即R_t以次代

(2)　$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \cdots$

諸值;而所取尺數日多,即S_t以次代

(3)　$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \frac{127}{128}, \cdots$

諸值:



第 396 圖

就所餘尺數論,雖永無盡時,然久而久之,其小終至不可言狀. 所謂「不可言狀」者,吾人不能謂其小至一釐而已,蓋第十項$R_{10}=\frac{1}{1024}$尺,即較一釐(即$\frac{1}{1000}$尺)猶小也;亦不能謂其小至一毫而已.蓋第十四日之餘數爲$R_{14}=\frac{1}{16384}$尺.即較一毫(即$\frac{1}{10000}$尺)猶小也;擴而充之,任意指定一正數ε,不論其小何若,終有一第t日,其時(及以後)所餘之尺數R_t較ε猶小.

此種現象,吾人簡稱之曰「當日數t無限增加時,餘數R_t逼近于0,而以之爲極限」.

倣此,就所取總尺數而言,則「S_t逼近於1,而以之爲極限」.

§132. 序貫及其極限. 將無窮多之數,按一定次序蟬聯排列之,謂之序貫(sequence),或曰串. 如上節之(1),(2),(3)皆序貫也.

序貫中之數,雖無窮之多,然其中任意第幾項究爲何數,須有一定方法以決定之. 如(1)中第千項爲1000,(2)中第百項爲$\frac{1}{2^{100}}$,(3)中第十項爲$(1-\frac{1}{2^{10}})$,皆須有法決定一也.

序貫中之數既無窮之多,自無末項可言.故後來伊于胡底,類不可知.然極其勢之所趨,亦有可以限量者.如(2)之趨向于0,(3)之趨向于1是也.此種序貫稱爲正則序貫.然亦有并其趨勢亦不可限量者,如上節之(1)及跳躍序貫

(4)　　$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$

是也.此種序貫((1)及(4)之類)稱爲非正則序貫.

定義. 設

(5)　　$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad \cdots\cdots$

爲一序貫.若有一常數l存在,每逢指定一正數ε,不論其小何若,該序貫中必可尋得一項x_m,其與l之差不及ε,且自該項以後,每項與l之差皆不及ε,則該序貫稱爲正則序貫(regular sepuence),而l稱爲該序貫之極限(limit).若無此種常數l存在,則該序貫稱爲非正則序貫(irregular sequence).

故序貫之有極限者爲正則序貫,無極限者爲非正則序貫.

序貫(2)之極限爲0,序貫(3)之極限爲1,序貫

(6)　　$1,\ 1,\ 1,\ \cdots$

之極限爲1,皆爲正則序貫.而(1)及(4)則皆爲非正則序貫,以其無有極限也.

§ 133. **關于極限之術語及記號.** 正則序貫(5)中之數 x_n 與其極限 l 間之關係,可以上列各種記號表之.

$$\text{當 } n \to \infty \text{ 時}, x_n \to l;$$

$$\text{當 } n \doteq \infty \text{ 時}, x_n \doteq l;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \doteq l$$

其中 $n \to \infty$ (或 $n \doteq \infty$), 意謂 n 無限增大; $x_n \to l$ (或 $x_n \doteq l$) 意爲 x_n 逼近于 l. 故前兩種記法皆讀作「當 n 無限增大時, x_n 逼近于 l」. 第三種則讀作「當 n 無限增大時, x_n 之極限爲 l」.

例如就序貫(2)論,

$$\text{當 } t \to \infty \text{ 時}, R_t \to 0;$$

就序貫(3)言,

$$\lim_{t\to\infty} S_t = I;$$

就序貫

(7) $\qquad 2, \quad 2^2, \quad 2^3, \cdots, \quad 2^n, \quad \cdots$

言,則

$$\text{當 } n \to \infty \text{ 時}, 2^n \to \infty.$$

即

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

二者之意皆謂 2^n 之增長無有極限也.

§ 134. **升序貫及降序貫.** 序貫中之數有愈趨愈大者,如(1)及(3)是也,稱爲升序貫或升串(increasing sequence). 有愈趨愈小者,如(2)是也,稱爲降序貫或降串(decreasing sequence).

正則升序貫中之數,雖愈趨愈大,然永不及其極限之大. 如(3)中之數皆小于1,

$$\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<\frac{7}{8}<\cdots<1.$$

但每逢指定一數,如0.001,該序貫中必可尋得一項,如第十項$S_{10}=\frac{1023}{1024}$,自該項以後每項與1之差皆不及該指定數0.001之大,即

$$當\ n>10\ 時,\ 1-S_n<0.001;$$

又如指定一數0.0001,亦必可尋得一項,如第十四項$S_{14}=1-\frac{1}{2^{14}}=\frac{16383}{16384}$,自該項以後各項與1之差皆不及0.0001,即

$$當\ n>14\ 時,\ 1-S_n<0.0001.$$

推而廣之,任意指定一正數ε,不論其小何若,吾人必可尋得一第m項S_m,自該項以後,每項與1之差皆不及ε,即

$$當\ n>m\ 時,\ 1-S_n<\varepsilon.$$

此即「常數1為序貫(3)之極限」之必須且勝任之條件.

正則降序貫中之數雖愈趨愈小,然永不及其極限之小,如(2)中之數皆大于0,

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{4}>\frac{1}{8}>\cdots>0.$$

但任意指定一數 ε,不論其小何若,吾人必可于該序貫(2)中尋得一第m項 R_m,自該項以後,每項與0之差皆不及 ε,即

$$\text{當 } n>m \text{ 時, } R_n-0<\varepsilon.$$

此即0為序貫(2)之極限之必須且勝任之條件.

正則序貫中之各項,亦有雖不愈趨愈大,然在後之項無有小于在前之項者,謂之偏向升序貫(monotonic increasing sequence). 其在後之項無有大于在前之項者,謂之偏向降序貫(monotonic decreasing sequence).

例如用111除67時,商一位得0.6,商二位得0.60,商三位得0.603,逐步所得之商

(8) 0.6, 0.60, 0.603, 0.6036, 0.60360, 0.603603, …

成一偏向升序貫,其中第一項與第二項,第四項與第五項,兩兩相等,然在後之數無有小于在前之數者. 故其趨勢終亦可得而知. 因其第r項較 $\frac{67}{111}$ 雖小,然差不及 $\frac{1}{10^r}$,故其極限為 $\frac{67}{111}$.

若於1中減去上列各數,則所得之差

(9)　$0.4,\ 0.40\ 0.397,\ 0.3964,\ 0.39640,\ 0.396397,\ \cdots$

成一偏向降序貫,其中第一項與第二項,第四項與第五項,兩兩相等,然在後之數無有大于在前之數者.故其趨勢終亦可得而知.因其第r項較$\frac{44}{111}$雖大,然差不及$\frac{1}{10^r}$,故其極限爲$\frac{44}{111}$.

他如

(10)　$0.2,\ 0.29,\ 0.299,\ 0.2999,\ \cdots$

之極限爲0.3,

(11)　$0.2,\ 0.23,\ 0.239,\ 0.2399,\ 0.23999,\ \cdots$

之極限爲0.24,

(12)　$0.7,\ 0.76,\ 0.760,\ 0.7600,\ 0.76000,\ \cdots$

之極限爲0.76,其理亦同,皆偏向序貫之有極限者也.

正則序貫中之數亦有升降無定者,如

(13)　$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ -\frac{1}{32},\ \cdots$

此則非偏向序貫矣.

§135. 極限原理.

偏向升序貫

(5)　$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$

中之各項若皆小于一定數G,則該序貫必爲正則序貫,其極限$l \geqq G$.

偏向降序貫中之各項若皆大于一定數L，則該串必爲正則序貫，其極限$l \geq L$.

前者爲公理，不必求證明．後者雖可用前者證明之，然初學者不之問也．統而名之曰極限原理可耳．

§136. 關于極限之重要定理十則．

下列諸定理，極易證明，茲從略．

設a, b爲固定之數，而

(5) $x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5,\quad \cdots$

及

(14) $y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad y_4,\quad y_5,\quad \cdots$

爲任意序貫：

甲．若$x_n \to a$，　則$(x_n+b)\to(a+b)$.

乙．若$x_n \to a$，　則$(x_n-b)\to(a-b)$.

丙．若$x_n \to a$，　則$(b-x_n)\to(b-a)$.

丁．若$x_n \to a$，　則$bx_n \to ba$,

戊．若$x_n \to a$，　則$\dfrac{x_n}{b}\to\dfrac{a}{b}$，(但須$b \neq 0$).

己，若$x_n \to a$，　則$\dfrac{b}{x_n}\to\dfrac{b}{a}$，(但須$a \neq 0$).

庚．若$x_n \to a$，$y_n \to b$，　則$(x_n+y_n)\to(a+b)$.

辛．若$x_n \to a$，$y_n \to b$，　則$(x_n-y_n)\to(a-b)$.

壬．若$x_n \to a$，$y_n \to b$，　則$x_n y_n \to ab$.

癸．若$x_n \to a$，$y_n \to b$，　則$\dfrac{x_n}{y_n}\to\dfrac{a}{b}$，(但須$b \neq 0$).

§ 137. **無理數.** 正則序貫之極限有爲分數者,稱爲有理數 (rational number), 有非分數者,稱爲無理數 (irrational number).

例如吾人按普通方法將 2 開方時,得知

$$(15)\quad \begin{cases} 1^2 < 2 < 2^2 \\ 1.4^2 < 2 < 1.5^2 \\ 1.41^2 < 2 < 1.42^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

左端各數

$$(16)\quad 1^2,\quad 1.4^2,\quad 1.41^2,\quad 1.414^2,\quad 1.4142^2,\ \cdots\cdots$$

成一偏向升序貫,其底數

$$(17)\quad 1,\quad 1.4,\quad 1.41,\quad 1.414,\quad 1.4142,\ \cdots\cdots$$

亦成一偏向[註]升序貫. 今若以 x_n 代表(17)中之第 n 項 (如 $x_1=1$, $x_2=1.4$, $x_3=1.41$,) 則由 (15) 得

$$x_n^2 < 2 < \left(x_n + \frac{1}{10^{n-1}}\right)^2,$$

$$\therefore\ 0 < 2 - x_n^2 < \left(x_n + \frac{1}{10^{n-1}}\right)^2 - x_n^2.$$

註. 如第十三項爲 1.414213562373, 第十四項爲 1.4142135623730, 兩數實相等.

但 $x_n+\frac{1}{10^{n-1}}$ 及 x_n 皆小於 2，故

$$\left(x_n+\frac{1}{10^{n-1}}\right)+x_n<4.$$

乘以 $$\left(x_n+\frac{1}{10^{n-1}}\right)-x_n=\frac{1}{10^{n-1}},$$

得 $$\left(x_n+\frac{1}{10^{n-1}}\right)^2-x_n^2<\frac{1}{10^{n-1}}$$

$$\therefore\quad 2-x_n^2<\frac{4}{10^{n-1}}.$$

將 n 充分增長，右端能小于任何小數 ε，爾時

$$2-x_n^2<\varepsilon.$$

可知(16)之極限爲有理數 2，(§131).

反觀(17)亦爲一升序貫，其中各項皆小于 2，據極限原理(§135)該序貫亦應有一極限 l. 此極限 l 必非分數，可以證之如下.

因(17)之極限既爲 l，則據§136之壬條可以斷定(16)之極限應爲 l^2. 然(16)之極限爲 2，已如上述. 故 $l^2=2$.

假定 l 爲分數. 令 $l=\frac{p}{q}$，子母約簡使 p 與 q 爲互質之正整數. 則 $p^2/q^2=2$.

$$\therefore \quad p^2=2q^2.$$

右端爲偶數,故p亦爲偶數. 命 $p=2r$,則上式變爲

$$4r^2=2q^2,$$

即

$$2r^2=q^2,$$

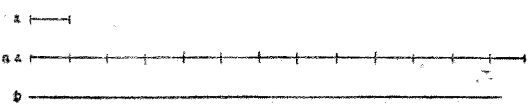
故q亦爲偶數. 是p,q有公因數2也,與原設不合. 可知(17)之極限 $l=\sqrt{2}$ 爲無理數註.

§138. **度量原理.** 設a,b爲任意二線段. 不問a如何短,b如何長,吾人將a二倍之,二倍之不足則三倍之,倍之不足則千萬倍之,必可使之等于或超過b. 換言之:

公理XXI. 設a,b爲任意二線段,則必有一正整數n存在能使

$$na\geqq b, \qquad \frac{1}{n}b\leqq a.$$

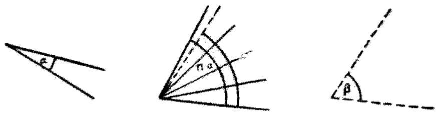
此猶云「a雖小,其倍量必有大於b者;b雖大,其分量必有小於a者.」



第 397 圖

註. 別證見§141.

不特線段惟然,角亦如之.



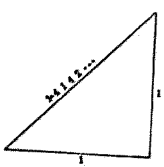
第 398 圖

可見線段及角二量皆能合:

亞幾默德(Archimedes)原理. 設A, B為同類二量,則必有一正整數n能使

$$n\cdot A\geq B,\quad 或\ \frac{1}{n}\cdot B\leq A.^{註}$$

§139. 量法. 有直角三角形于此,勾,股之長各1寸,吾人欲知其弦c之長,通常測量之法如下:—



第 399 圖

以寸度之, 1寸 $<c<$ 2寸;

以分度之, 14分 $<c<$ 15分;

以釐度之, 141釐 $<c<$ 142釐;

以毫度之, 1414毫 $<c<$ 1415毫;

....

註. 吾人認為「$\frac{1}{n}B<A$」與「$nA>B$」同一意義,不必問$\frac{1}{n}B$係指何量. 如此,可不涉及「B量可否分為n等分」之問題. 但若B量可分為n等分,則

$$\frac{1}{n}B<A$$

之義意為「有一量焉,小于A,而其n倍等于B.」

于是謂　　$c=1.4142\cdots$寸.

但 1 分 $=\frac{1}{10}$寸, 1 釐$=\frac{1}{100}$寸, $\cdots$.　故上述結果無異于註

$$
(18)\quad \begin{cases} 1\text{寸}<c<2\text{寸}, \\ \frac{14}{10}\text{寸}<c<\frac{15}{10}\text{寸}, \\ \frac{141}{100}\text{寸}<c<\frac{142}{100}\text{寸}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}
$$

左端各係數成一偏向升序貫

$$
(19)\qquad 1,\ \frac{14}{10},\ \frac{141}{100},\ \frac{1414}{1000},\ \frac{14142}{10000},\ \cdots
$$

右端各係數成一偏向降序貫

$$
(20)\qquad 2,\ \frac{15}{10},\ \frac{142}{100},\ \frac{1415}{1000},\ \frac{14143}{10000},\ \cdots
$$

兩序貫相當項之差為

$$
(21)\qquad 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000},\ \cdots
$$

設 (19) 之極限為 l_1, (20) 之極限為 l_2. 則由 § 136 之辛條知 (21) 之極限為 l_2-l_1.　但 (21) 之極限顯然為 0.　故

註.　欲避免實行均分 1 寸為 10,100,10000,$\cdots$等份之煩, 可將 (18) 寫作

$$
\begin{aligned} 1\text{寸} &< c < 2\text{寸}, \\ 14\text{寸} &< 10c < 15\text{寸}, \\ 141\text{寸} &< 100c < 142\text{寸}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}
$$

$l_2-l_1=0$, 即 $l_1=l_2$. 于是吾人謂該三角形之弦,以寸度之,其量數爲 1.4142….

一般言之,設 Q 爲一量,於同類量中取一量 U 以爲標準. 則據亞幾默德原理, U 之倍量中必有 $\geqq$Q 者. 設

$$n_1 \cdot U = Q,$$

則稱以 U 爲幺率, Q 之量數爲 n_1.

若 U 之倍量中無 $=$Q 者,設令

$$n_1 \cdot U < Q < (n_1+1) \cdot U;$$

則據亞氏原理, U 之倍量中必有 $\geqq$10 Q 者. 設

$$n_2 \cdot U = 10\,Q,$$

則稱 Q 之量數爲 $\frac{n_2}{10}$.

若 U 之倍量中無 $=$10 Q 者,設令

$$n_2 \cdot U < 10Q < (n_2+1) \cdot U;$$

則據亞氏原理, U 之倍量中必有 $\geqq$100Q 者, 設

$$n_3 \cdot U = 100Q,$$

則稱 Q 之量數爲 $\frac{n_3}{100}$.

如此以往,苟 U 之倍量中有

$$n_r \cdot U = 10^{r-1}Q,$$

則稱 Q 之量數爲 $\frac{n_r}{10^{r-1}}$. 此有限位小數量數之定義也,

苟永無此種 n_r 存在,則迭次所得結果僅為

$$
(22)\quad \begin{cases} n_1\cdot U<Q<(n_1-1)U, \\ n_2\cdot U<10Q<(n_2+1)U, \\ n_3\cdot U<100Q<(n_3+1)U, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}
$$

且永無止境.

由第二式知 U 之倍量,或 $<10Q$, 或 $>10Q$; 其 $<10Q$ 者以 $n_2\cdot U$ 為最大,其 $>10Q$ 者以 $(n_2+1)\cdot U$ 為最小. 然據第一式觀之, $10n_1U<10Q<10(n_1+1)U$, 可見 $10n_1U$ 亦為 U 之倍量而 $<10Q$ 者. 故 $10n_1U$ 不得大于 n_2U. 由是 $10n_1\leqq n_2$. 同理 $10(n_1+1)\geqq n_2+1$.

故若將 (22) 寫作

$$
(23)\quad \begin{cases} n_1U<Q<(n_1+1)U, \\ \dfrac{n_2}{10}U<Q<\dfrac{n_2+1}{10}U, \\ \dfrac{n_3}{10^2}U<Q<\dfrac{n_3+1}{10^2}U, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}
$$

則左方各係數成一偏向升序貫

$$
(24)\quad n_1,\ \frac{n_2}{10},\ \frac{n_3}{100},\ \frac{n_4}{1000},\ \cdots\cdots\cdots
$$

右方各係數成一偏向降序貫

(25)　$(n_1+1),\ \frac{n_2+1}{10},\ \frac{n_3+1}{100},\ \frac{n_4+1}{1000},\ \cdots$

其相當項之差爲

(26)　$1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \cdots$

成一正則降序貫,其極限爲0.

據極限原理,(24)應有一極限 l,(25)應有一極限 l'. 又據§136之辛條, $l-l'=0$,即 $l=l'$.

吾人謂以U爲幺率,Q之量數(the measure of Q with respect to the unit U)爲 l.

故同類量中之任何量,悉可以U爲幺率而求其量數. 幺率U定,則各量之量數亦定註. 然若幺率之大小變,則每量之量數亦隨之而變矣.

§140. **比.** 設A, B爲同類二量,能合亞幾默德原理. 如上節所述,用B爲幺率,以求A之量數r,謂之以B度A(measuring A by B). 如此所得之量數r亦稱爲A與B之比(ratio),寫作

$$A:B=r,\ 或\ \frac{A}{B}=r.$$

若r爲有理數(即分數)則A,B二量稱爲可通約(commensurable),否則爲叵通約(incommensurable). 故

註. 就線段言,此即§79之所謂較量公理.

定理. 任意二量苟能合亞幾默德原理,則彼此相度時必有其固定之比.

§ 141. 可通約量之公度. 設A, B二量爲可通約之量,命其比$\frac{m}{n}$爲既約之分數. 設Euclid輾轉相除法以求m與n之最高公因數,結果必爲I. 設除四次而盡,則

$$
\begin{array}{ll}
n)m(q_1 & \qquad m=q_1n+r_1, \\
\underline{nq_1} & \\
r_1)n(q_2 & \qquad n=q_2r_1+r_2, \\
\underline{r_1q_2} & \\
r_2)r_1(q_3 & \qquad r_1=q_3r_2+r_3, \\
\underline{r_2q_3} & \\
1=r_3)r_2(q_4 & \qquad r_2=q_4. \\
\underline{r_3q_4} & \\
0 &
\end{array}
$$

故
$$m\cdot\frac{A}{m}=q_1n\cdot\frac{A}{m}+r_1\cdot\frac{A}{m},$$
$$n\cdot\frac{A}{m}=q_2r_1\cdot\frac{A}{m}+r_2\cdot\frac{A}{m},$$
$$r_1\cdot\frac{A}{m}=q_3r_2\cdot\frac{A}{m}+r_3\frac{A}{m},$$
$$r_2\cdot\frac{A}{m}=q_4\cdot\frac{A}{m}.$$

令 $n\cdot\frac{A}{m}=B,\quad r_1\cdot\frac{A}{m}=R_1,\quad r_2\cdot\frac{A}{m}=R_2,\quad r_3\cdot\frac{A}{m}=R_3,$

則以上各方程變爲

$$A=q_1B+R_1,$$
$$B=q_2R_1+R_2,$$
$$R_1=q_3R_2+R_3,$$
$$R_2=q_4R_3.$$

第一方程顯然謂以B度A時,經q_1次以後尚餘R_1. 第二方程謂以R_1度B,經q_2次後餘R_2. 第三方程謂以R_2度P_1經q_3次餘R_3. 第四方程謂以R_3度R_2適盡.

可知二量若爲可通約,則輾轉相度必有時而盡. 其時充任除數之量即爲公度(common measure); 如上述之$R_3=\frac{A}{m}$即A, B二量之公度也. 所謂R_3爲A, B之公度云者,以R_3度A及B皆能適盡無餘也.

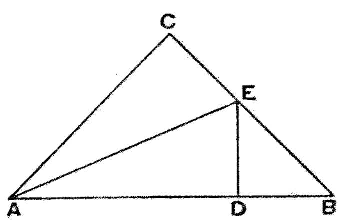
反之,若輾轉相度永無盡時,則二量爲叵通約. 例如等腰直角三角形ABC中,弦AB與股AC即無公度. 蓋于AB上取AD=AC,又作AE平分∠BAC交BC于E. 則

$$\triangle ACE \cong \triangle ADE.$$

故　$\angle ADE=\angle ACE=\text{rt.}\angle,$

$$\angle DEB=\angle DAC=45°,$$

CE=DE=DB. 可見DBE亦爲等腰直角三角形.



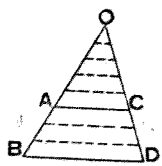
第 400 圖

當吾人以AC度AB時,一商餘DB. 以DB度AC,即

度 BC, 一商餘 BE. 此後雖可再商,然 DB 與 BE 互度,其工事之煩,毫不減于 AC 與 AB 互度. 蓋同係等腰直角三角形之股弦互度也. 可見此種互度工作永無盡時. 其爲不可度明矣.

§ 142. 線段比例之基礎定理.

定理一. 平行于一三角形之底邊作一割線,必將二腰割成比例,(即§ 82 之定理二)



第 401 圖

題設: $\triangle OBD$ 之 OB 上有一點 A, OD 上有一點 C, $AC \parallel BD$.

題斷: $OA : AB = OC : CD$.

證. (i). 設 OA 與 AB 爲可通約.

據可通約之定義(§140), OA 與 AB 必有公度,命爲 s.

設　　$OA = ms$,　　$AB = ns$.

將 OA 均分爲 m 段, AB 均分爲 n 段, OB 共分爲 $(m+n)$ 段,各段相等.

過各分點作直線 $\parallel$ BD. 此等平行線必均分 OD 爲 $(m+n)$ 段,各段相等(§41 之i). 命每段之長爲 t, 則

$$OC = mt, \qquad CD = nt.$$

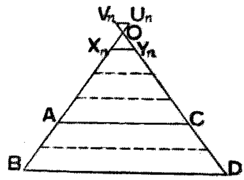
$$\therefore \quad \frac{OA}{AB} = \frac{m \cdot s}{n \cdot s} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{OC}{CD} = \frac{m \cdot t}{n \cdot t} = \frac{m}{n}.$$

$$\therefore \quad OA : AB = OC : CD.$$

(ii). 設OA與AB爲叵通約.

則據叵通約之定義(§140),任何線段皆不能恰度盡OA, AB二者而無餘. 若將AB均分爲n段,以每段之長s度AB恰得$AB=n\cdot s$. 以s度OA决不能恰盡無餘. 設令度m次至于X_n,猶在AO之間,更度一次至U_n,則出乎AO之外.

將BU_n均分爲$(m+n+1)$份,過每分點作線∥BD. 此等平行線必于OD割出相等之線段(§41之i)命每段之長爲t,過X_n及U_n之平行線交DO及其延長線于Y_n及V_n. 則O在Y_nV_n之間.



第 402 圖

當AB所分之份數n愈多,則每段$s\left(=\frac{1}{n}AB=X_nU_n\right)$之長愈短,諸平行線愈密,$X_n$愈近于O,$Y_n$亦然. 故

當$n\to\infty$時

$AX_n\to AO$,	$CY_n\to CO$.
$\frac{AX_n}{BA}\to\frac{AO}{BA}$ (§136之戊).	$\frac{CY_n}{DC}\to\frac{CO}{DC}$ (§136之戊).
然$\frac{AX_n}{BA}=\frac{m\cdot s}{n\cdot s}=\frac{m}{n}$,	然$\frac{CY_n}{DC}=\frac{m\cdot t}{n\cdot t}=\frac{m}{n}$,
故 $\frac{m}{n}\to\frac{AO}{BA}$.	故 $\frac{m}{n}\to\frac{CO}{DC}$.

據§136之辛得　$$0=\frac{AO}{BA}-\frac{CO}{DC}.$$

即　$$AO:BA=CO:DC.$$

定理一. 若AB與CD二直線交于O,且AC∥BD,則

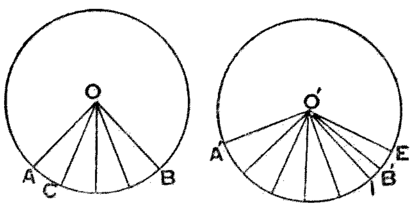
$$OA:OB=OC:OD.$$

§143. 圓弧. 圓心角. 圓周角.

定理一. 同圓或等圓上二弧之比等于其所對圓心角之比.

題設: ⊙O與⊙O′相等,其上有AB及A′B′二弧.

題斷: $\angle AOB:\angle A'O'B'=\widehat{AB}:\widehat{A'B'}$　【公式XLV】



第403圖

證. 凡能度盡$\widehat{AB}$之弧,不必能度盡$\widehat{A'B'}$. 是故吾人若能將$\widehat{AB}$均分爲m等份,以每份$\widehat{AC}$度$\widehat{AB}$,適得$\widehat{AB}=m\cdot\widehat{AC}$; 然若以度$\widehat{A'B'}$,則或盡或不盡. 設令可度n次而不能度n+1次,

則　$$n\cdot\widehat{AC}\leqq\widehat{A'B'}<(n+1)\widehat{AC},$$

即　$$\frac{n}{m}\leqq\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}}<\frac{n+1}{m}.$$

而兩弧所對圓心角之關係亦爲

$$\frac{n}{m} \leq \frac{\angle A'O'B'}{\angle AOB} < \frac{n+1}{m}.$$

倣此,若將$\widehat{AB}$順次均分爲[註]

(27) 2, 4, 8, ...

等份,以每份度$\widehat{AB}$及$\widehat{A'B'}$,則迭次所得之結果爲

(28)
$$\begin{cases} \dfrac{n_1}{2} \leq \dfrac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}} < \dfrac{n_1+1}{2} \\ \dfrac{n_2}{4} \leq \dfrac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}} < \dfrac{n_2+1}{4}, \\ \dfrac{n_3}{8} \leq \dfrac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}} < \dfrac{n_3+1}{8}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

(29)
$$\begin{cases} \dfrac{n_1}{2} \leq \dfrac{\angle A'O'B'}{\angle AOB} < \dfrac{n_1+1}{2}, \\ \dfrac{n_2}{4} \leq \dfrac{\angle A'O'B'}{\angle AOB} < \dfrac{n_2+1}{4}, \\ \dfrac{n_3}{8} \leq \dfrac{\angle A'O'B'}{\angle AOB} < \dfrac{n_3+1}{8}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

今(28)或(29)之左端各係數

(30) $$\frac{n_1}{2},\ \frac{n_2}{4},\ \frac{n_3}{8},\ \frac{n_4}{19},\ \frac{n_5}{32},\ \cdots\cdots\cdots$$

爲偏向升序貫,而右端各係數

(31) $$\frac{n_1+1}{2},\ \frac{n_2+1}{4},\ \frac{n_3+1}{8},\ \frac{n_4+1}{16},\ \frac{n_5+1}{32},\ \cdots\cdots\cdots$$

註. 所以不效法§139均分爲10, 100, 1000, ...等份,而分爲2, 4, 8, ...等份者因「任意一弧AB,是否能均分爲10等份?」甚是問題,而「可均分爲2等份」則無問題也.

爲偏向降序貫. (30) 中各數皆小于(31)各數. 故據極限原理,二序貫皆爲正則序貫. 二序貫相當項之差

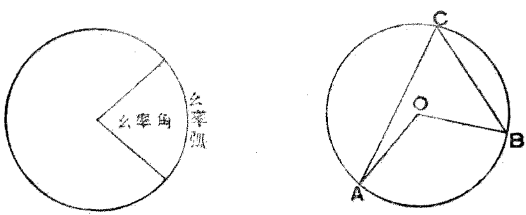
(32) $$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \cdots\cdots$$

成一正則降序貫,其極限爲0. 故據§136之辛,(30)與(31)之極限相等. 命此公共極限爲l, 據§139及§140,比之定義,由關係(28)吾人稱$\widehat{A'B'}:\widehat{AB}=l$; 由關係(29)吾人又稱$\angle A'O'B':\angle AOB=l$, 是以

$$\widehat{A'B'}:\widehat{AB}=\angle A'O'B':\angle AOB,$$

故 $$\widehat{AB}:\widehat{A'B'}=\angle AOB:\angle A'O'B'$$

定義: 任意選定一角,以爲量角之幺率. 則任意一圓上之弧,所對圓心角爲幺率角者,即爲量同圓或等圓上一切弧之幺率.註



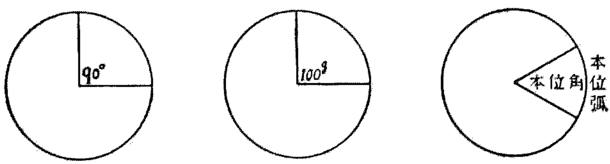
第 404 圖

註. 然此所謂幺率弧,並非一切長之幺率. 僅可用以量同圓上之弧,不足用以量其他圓弧,亦不足用以量直線. 學者須注意焉.

由定理一知以幺率弧量同圓或等圓⊙O(ABC)上任意一弧AB所得之量數,等于以幺率角量其所對圓心角AOB所得之量數,而二倍于以幺率角量其所對圓周角ACB所得之量數. 此之謂

定理二. 圓心角可以其所對之弧度之,逆之亦然

定理三. 圓周角可以其所對之弧之半度之.



第 405 圖

各門數學中,所選幺率角之大小往往不同,蓋各有其歷史,理論,或實用之原因在也.

六十分制 (sexagesimal system), 均分一直角爲90等份,每份稱爲一度(degree);每度均分爲60等份,每份稱爲一分(minute);每分均分爲60等份,每份稱爲一秒(second). 其略號爲

$$\text{1rt}\angle=90^\circ,\quad 1^\circ=60',\quad 1'=60'',$$ 【公式XLVI】

百分制 (centesimel system). 均分一直角爲100等份,每份稱爲一公度(grade);每公度均分爲100等份,每份稱爲一公分(minute);每公分均分爲100等份,每份稱爲一公秒(second). 其略號爲

$$1\text{ rt.}\angle=100^g,\ 1^g=100^{\backprime},\ 1^{\backprime}=100^{\backprime\backprime}.$$ 【公式XLVII】

本位弧制 (circular measure). 以長等于半徑之弧爲幺率弧,其所對之圓心角爲幺率角,稱爲一本位角(radian). 吾人將于§146證明

$$2\text{rt.}\angle s=3.14159265\cdots(\text{本位角}).$$ 【公式XLVIII】

例如正128邊形每邊所對之圓心角爲

$$\frac{4\text{rt.}\angle s}{128}=2^\circ48'45''=3^g12^{\backprime}50^{\backprime\backprime}=0.049087385\cdots(\text{本位角}).$$

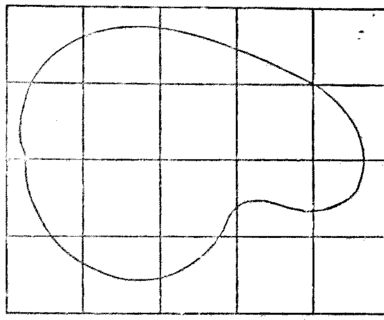
【備考】 僅用圓規及直尺,吾人不能將一直角均分爲90或100等份,更不能取一圓弧等于半徑. 故1°, 1^g, 1本位角云云,實際皆不能僅用圓規直尺作成之. 吾人所能製造之分度器,實際不過近似而已,降能絕對合乎規矩也,

習題466. $1^\circ, 1', 1''$ $1^g, 1^{\backprime}, 1^{\backprime\backprime}$, 各合若干本位角?

習題467. 一本位角合若干度分秒?

§144. **面積.** 邊長為幺率線段之正方形稱為幺率正方形 (unit square).

例如邊長1寸之正方形稱為一方寸,邊長1公分之正方形稱為1方公分.



第 406 圖

吾人欲測量任意一平面區域A之面積,可于此平面上作縱橫兩種平行線,距離各1公分,圍成許多正方形. 此等正方形或全在該區域A內或跨于周界上,或全在外.(如圖,全在A內者四,跨于周界上者十有三,其他全A外). 設令在全區域內者共m個跨于界上者共n個,則

$$m \text{方公分} \leqq A \leqq (m+n) \text{方公分}.$$

因跨于界上之n個,如其有之,皆計入A中則太多,皆不計則太少;如其無之,則m方公分$=A=(m+0)$方公分也.

將每正方形之邊均分為10等份,過各分點作縱橫之平行線,成小正方形,面積各1方公釐. 命此等小正方形之全在A內者共m_1個,跨界者共n_1個,則

$$m_1 \text{方公釐} \leqq A \leqq (m_1+n_1) \text{方公釐}.$$

因　　　$1\text{方公分}=100\text{方公釐},$

故. 在A內者前已有m方公分$=100m$方公釐,

而跨界之n個方公分中,劃成100n個方公釐後,容或又有幾個全在A內者. 可知全在A內的小方格之個數

(33) $$m_1 \geqq 100m.$$

倣此以進,由方公分,而方公釐,而方公毫,…遂次所得之結果若爲

(34) $$\left\{\begin{array}{l} m\text{方公分} \leqq A \leqq (m+n)\text{方公分}, \\ \dfrac{m_1}{100}\text{方公分} \leqq A \leqq \dfrac{m_1+n_1}{100}\text{方公分}, \\ \dfrac{m_2}{10000}\text{方公分} \leqq A \leqq \dfrac{m_2+n_2}{10000}\text{方公分}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

由(33)可知(34)左端之係數

(35) $$m, \frac{m_1}{100}, \frac{m_2}{10000}, \cdots\cdots$$

成一偏向升序貫,而右端係數

(36) $$(m+n), \frac{m_1+n_1}{100}, \frac{m_2+n_2}{10000}, \cdots\cdots$$

成一偏向降序貫. 相當項之差

(37) $$n, \frac{n_1}{100}, \frac{n_2}{10000}, \cdots\cdots$$

苟[註]能漸小而逼近于0,則(35)與(36)有相同之極限a.

註. 尋常區域均係如此.

定義: 此極限 a 稱爲A之面積量數,記作

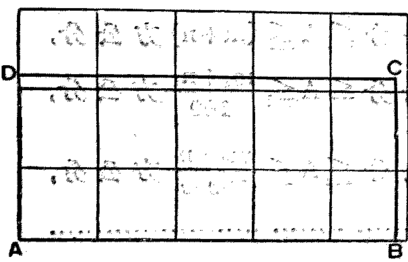
$$A = a \text{ 方公分.}$$

定理. 矩形之面積量數等于二邊量數之積.

題設: 矩形 ABCD 之 AB=b 公分, AD=a 公分.

題斷: ABCD=ab 方公分.　　　　【公式 II.】

證. 如圖,以 A 爲起點,以公分度 AD, 設令足 2 次而不足 3 次,則



第 407 圖

$$2 \text{ 公分} \leqq AD < 3 \text{ 公分.}$$

以 A 爲起點,以公分度 AB 設令足 4 次而不足 5 次,則 4 公分 $\leqq$ AB $<$ 5 公分.

過各分點作線平行于 AB 及 AD. 則所成之正方形全在 ABCD 內者凡 $2\times4=8$, 毗連界上者至多不過 $2+4+1=7$. 故

(38)　　$$(2\times4) \text{ 方公分} \leqq ABCD < (3\times5) \text{ 方公分.}$$

今若以公分度 AD 及 AB 時所得之結果爲

(39)　　$$\begin{cases} m_1 \text{ 公分} \leqq AD < (m_1+1) \text{ 公分,} \\ \dfrac{m_2}{10} \text{ 公分} \leqq AD < \dfrac{(m_2+1)}{10} \text{ 公分,} \\ \dfrac{m_3}{100} \text{ 公分} \leqq AD < \dfrac{(m_3+1)}{100} \text{ 公分,} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(40)\quad \begin{cases} n_1\text{公分} \leqq AB < (n_1+1)\text{公分}, \\ \dfrac{n_2}{10}\text{公分} \leqq AB < \dfrac{(n_2+1)}{10}\text{公分}, \\ \dfrac{n_3}{100}\text{公分} \leqq AB < \dfrac{(n_3+1)}{100}\text{公分}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

與(38)同理可知

$$(41)\quad \begin{cases} m_1n_1\text{方公分} \leqq ABCD < (m_1+1)(n_1+1)\text{方公分}, \\ \dfrac{m_2n_2}{100}\text{方公分} \leqq ABCD < \dfrac{(m_2+1)(n_2+1)}{100}\text{方公分}, \\ \dfrac{m_3n_3}{10000}\text{方公分} \leqq ABCD < \dfrac{(m_3+1)(n_3+1)}{10000}\text{方公分}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

其左端各係數

$$(42)\qquad m_1n_1,\quad \frac{m_2n_2}{100},\quad \frac{m_3n_3}{10000},\quad \cdots\cdots$$

與右端對應係數

$$(43)\quad (m_1+1)(n_1+1),\ \frac{(m_2+1)(n_2+1)}{100},\ \frac{(m_3+1)(n_3+1)}{10000},\ \cdots$$

之差爲

$$(44)\quad m_1+n_1+1,\ \frac{m_2+n_2+1}{100},\ \frac{m_3+n_3+1}{10000},\ \cdots\cdots$$

據題設, AD之量數爲a, AB之量數爲b, 故據§139知

$$(45)\qquad m_1,\quad \frac{m_2}{10},\quad \frac{m_3}{100},\quad \cdots\cdots$$

之極限爲a,

$$(46)\qquad n_1,\quad \frac{n_2}{10},\quad \frac{n_3}{100},\quad \cdots\cdots$$

之極限爲b. 故據§136之壬,知(42)之極限爲ab, 又因

$$(47)\qquad 1,\quad \frac{1}{10},\quad \frac{1}{100},\quad \cdots\cdots$$

之極限爲0,故據§136之壬,知

$$m_1,\quad \frac{m_2}{100},\quad \frac{m_3}{10000},\quad \cdots\cdots \qquad [\text{即}\ (45)\times(47)]$$

之極限爲$a\cdot 0=0$;

$$n_1,,\quad \frac{n_2}{100},\quad \frac{n_3}{10000},\quad \cdots\cdots \qquad [\text{即}\ (46)\times(47)]$$

之極限爲$b\cdot 0=0$;

$$1,\quad \frac{1}{100},\quad \frac{1}{10000},\quad \cdots\cdots \qquad [\text{即}\ (47)\times(47)]$$

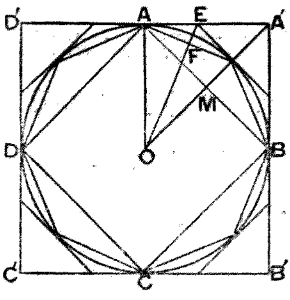
之極限爲$0\cdot 0=0$. 故據§136之庚,(44)之極限爲$0+0+0=0$. 由是據§136之辛,知(43)之極限與(42)之極限同爲ab.

故據上述定義知ABCD=ab方公分.

§145. 圓周長及圓面積. 于⊙O內作內接正四邊形. 于各頂點作切線,成一切正四邊形. 取各弧之中點,與各頂相聯,成一內接正八邊形.加作切線,成外切正八邊形. 做此進而成十六邊形,三十二邊形等.

則內接四邊形之周p_4小于內接正八邊形之周p_8,內接正八邊形之周p_8又小于內接正十六邊形之周p_{16},一般言之.

$$p_4<p_8<p_{16}<\cdots\cdots$$



第 408 圖

就外切正多邊形之周而論,則

$$p_4'>p_8'>p_{16}'>\cdots\cdots$$

因 $p_8'>p_8$, $p_8'<p_4'$,

$\therefore$ $p_8<p_4'$.

同理,升序貫

(48) p_4, p_8, p_{16}, $\cdots\cdots$

中之各項皆小于p_4'. 故據極限原理,該序貫(48)應有極限c.

同理,因降序貫

(49) p_4', p_8', p_{16}', $\cdots\cdots$

中之各項皆大于p_4. 故該序貫(49)應有極限c′.

此兩極限可證其相同.

因據相似多邊形之理,周之比等于對應線段之比.

$$\therefore \qquad p_4 : p_4' = OM : OA < 1,$$

$$p_8 : p_8' = OF : OA.$$

故 $$1-\frac{p_8}{p'_8}=1-\frac{OF}{OA}=\frac{OA-OF}{OA}<\frac{AF}{OA}<\frac{AE}{OA}<\frac{1}{2}.$$

同理 $$1-\frac{p_{16}}{p'_{16}}<\frac{1}{4}, \qquad 1-\frac{p_{32}}{p'_{32}}<\frac{1}{8}, \qquad \ldots\ldots$$

換言之,即序貫

(50) $$\frac{p_4}{p_4'},\ \frac{p_8}{p_8'},\ \frac{p_{16}}{p_{16}'},\ \ldots\ldots$$

中之第n項與1之差$<\frac{1}{2^{n-1}}$. 項愈後,則其與1之差愈小. 故(50)爲正則序貫,其極限爲1. 惟據§136之癸,序貫(50)之極限應爲(48)及(49)二序貫之極限之商.

$$\therefore \quad c/c'=1, \qquad \therefore \quad c=c'.$$

由此可見:

定理一. 定義. 于圓內作內接正多邊形,邊數無限增多,則其周亦增長而迫近于一極限. 于圓外作外切正多邊形,邊數無限增多,則其周縮短而迫近于一極限. 此二極限相等,[註]稱爲該圓周之長 (leugth of the circumference).

註. 普通教科書多不之證.

下定理之證法亦與此相類.

定理二. 定義. 于圓內作內接正多邊形.邊數無限增多,則面積亦增大而迫近于一極限. 于圓外作外切正多邊形.邊數無限增多,則其面積縮小而迫近于一極限. 此二極限相等,稱爲圓之面積(area of circle).

命內接正四,八,十六,…邊形之面積爲

(51) $$P_4,\quad P_8,\quad P_{16},\quad \cdots\cdots$$

外切正四,八,十六,…邊形之面積爲

(52) $$P_4',\quad P_8',\quad P_{16}',\quad \cdots\cdots$$

(51)爲升序貫,其中各項皆小于P_4',故必有一極限C; (52)爲降序貫,其中各項皆大于P_4,故必有一極限C'. 但(第408圖)

$$\frac{P_4'}{P_4}=\frac{OA'^2}{OA^2},\quad \frac{P_8'}{P_8}=\frac{OE^2}{OA^2},\quad \cdots\cdots$$

$$\frac{P_4'}{P_4}-1=\frac{OA'^2}{OA^2}-1=\frac{AA'^2}{OA^2}=1,$$

$$\frac{P_8'}{P_8}-1=\frac{OE^2}{OA^2}-1=\frac{AE^2}{OA^2}<\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

同理 $$\frac{P_{16}'}{P_{16}}-1<\left(\frac{1}{4}\right)^2,\quad \frac{P_{32}'}{P_{32}}-1<\left(\frac{1}{8}\right)^2,\quad \cdots\cdots$$

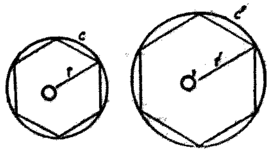
由此可知

(53) $$\frac{P_4'}{P_4},\quad \frac{P_8'}{P_8},\quad \frac{P_{16}'}{P_{16}},\quad \ldots\ldots$$

之極限爲1. 據§136之癸知

$$\frac{C'}{C}=1,\quad \therefore C'=C.$$

定理三. 二圓周之比等于直徑(或半徑)之比:面積之比等于直徑(或半徑)平方之比.



第 409 圖

證. 設⊙O及⊙O′之周爲c及C′,面積爲C及C′,半徑爲r及r′.于二圓各作一內接正n邊形,命其周爲p_n及p_n',面積爲p_n及p_n'. 則據相似多邊形之理知

$$\frac{p_n}{p_n'}=\frac{r}{r'}.$$

令邊數n→∞,則據定理一

$$p_n\to c,\quad p_n'\to c'.$$

故據§136之癸,

$$\frac{p_n}{p_n'}\to\frac{c}{c'},$$

故 $$\frac{r}{r'}=\frac{c}{c'},$$

$$\frac{p_n}{p_n'}=\frac{r^2}{r'^2},$$

令邊數n→∞,則據定理二

$$p_n\to C,\quad p_n'\to C',$$

故據§136之癸,

$$\frac{p_n}{p_n'}\to\frac{C}{C'},$$

故 $$\frac{r^2}{r'^2}=\frac{C}{C'},$$

定理四. 定義. 圓周與直徑之比爲常數,稱爲圓周率,表之以π.

沿用上定理之記號,因$c:c'=r:r'$,即$c:c'=2r:2r'$,故$c:2r=c':2r'$. 換言之,即圓周與直徑之比爲一固定常數,絕不因圓而異其值. 若以π表示此數,則

$$\pi=\frac{c}{2r}=\frac{c'}{2r'}.$$ 【公式L】

定理五. 圓之半徑爲r,則

圓周長 $c=2\pi r,$ 【公式LI】

圓面積 $C=\pi r^2,$ 【公式LII】

證. 前段乃定理四直接結果. 今但證後段可耳.

作一外切正五邊形,命其周爲p,面積爲P,則

$$P=\tfrac{1}{2}rp.$$

今以正十邊形易之此方程仍眞;即以正二十邊形,正四十邊形易之,此方程亦眞.

然邊數無限增加,則據定理一

$$p\to c,$$

故據§134之丁 $\tfrac{1}{2}rp\to\tfrac{1}{2}rc;$

即 $P\to\tfrac{1}{2}rc.$

然據定理二,外切正多邊形當邊數無限增加時,

其面積P→圓面積C,

$\therefore$ $C=\tfrac{1}{2}rc,$

即 $C=\pi r^2.$

【備考】凡本節所用之$r, p_n, \cdots$皆指線段量數言.因每線段皆有其一定之量數(§139),故此$r, p_n, \cdots$究指線段,抑指量數,往往被初學者所忽.反觀c及C則不然.c不過(48)之極限耳,顯然爲一數,$=2\pi r$.此數之存在,本書雖曾證之;然究有一線段其量數爲$2\pi r$否?則非由本書所據各公理所可判斷者也.例如本書但斷定幺率圓內之正多邊形,邊數愈增,則其周長之極限必存在,(約爲6.28…).而未嘗斷定有一線段其長等于該極限(6.28…)也.

習題468.求作一圓,令其周長等于二定圓周長之和.

習題469.求作一圓,令其面積等于二定圓之和.

習題470.正方形內切圓與外接圓面積之比等于正三角形內切圓與外接圓面積之比.

習題471.以r爲半徑而角爲d°之扇形,其面積幾何?

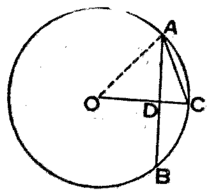
習題472.頂角爲60°之扇形面積與其內切圓面積之比$=3:2$.

§146. **圓周率.** π之爲數,既非整數,亦非分數,又不可以根數表之.吾人祇能求得其近似值而已.爲求此近似值故,吾人先證下定理:——

定理一. 一定圓之半徑為R,內接正n邊形之邊為S;則內接正2n邊形之邊

$$S_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-S_n^2}}.$$ 【公式LIII】

設AB為⊙O內接正n邊之一邊,C為$\overset{\frown}{AB}$之中點,則AC為內接正2n邊形之一邊. 設OC⊥AB于D, 則



第 410 圖

$$OD=\sqrt{R^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2}.$$

$$\therefore\quad DC=R-\sqrt{R^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2}.$$

$$\therefore\quad AC=\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2+\left\{R-\sqrt{R^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2}\right\}^2}$$

$$=\sqrt{\frac{S_n^2}{4}+R^2+\left\{R^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2\right\}-2R\sqrt{R^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2}}.$$

$$\therefore\quad S_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-S_n^2}}.$$

定理二. 幺率圓[註]之內接正n邊形之邊若為S_n,則其內接正2n邊形之一邊

$$S_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_n^2}}.$$ 【公式LIV】

註. 半徑為幺率線段.

據此公式,從正六邊形出發,可以計算正十二邊形正二十四邊形,…之邊及周矣,結果如下表:——

	邊長	周長
$S_6 = 1$	$=1.00000$	6.00000
$S_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-1^2}}$	$=0.51764$	6.21166
$S_{24}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.51764)^2}}$	$=0.26105$	6.26526
$S_{48}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.26105)^2}}$	$=0.13081$	6:27870
$S_{96}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.13081)^2}}$	$=0.06534$	6.28206
$S_{192}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.06534)^2}}$	$=0.03272$	6.28291
$S_{384}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.03272)^2}}$	$=0.01636$	6.28312
$S_{768}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.01636)^2}}$	$=0.00818$	6.28317

取最後所得之值以為幺率圓周之近似值,則

$$\pi=\frac{c}{2R}=\frac{6.28317}{2}=3.14159. \qquad \text{【公式LV】}$$

【備考】. π之值,爲歷來疇人所孳孳尋求而終不可窮盡者也. 周髀算經從徑一周三以計日道,迄今木工柄者仍用之. 後漢張衡(78−139 A.D.)謂 $\pi=\sqrt{10}$ 吳人王蕃(219−257 A.D.)求得 $\pi=\frac{142}{45}$. 魏景元四年(263 A.D.)劉徽注九章算術,創以六觚之面,割之又割,求得周,徑相與之率爲3.14,世稱爲「徽率」. 劉氏之法,即以上所用者也. 南北朝祖冲之(426−500 A.D.)更開密法,斷定$3.1415926<\pi<3.1415927$. 祖氏又爲分數計算之便,設$\frac{22}{7}$及$\frac{355}{113}$二數以代圓率,前者稱爲「冲之約率」,後者稱爲「冲之密率」. 西算未入中土以前,圓率之精,無過冲之密率者.

世界古國惟埃及 Padyrus Rhind 較 $\pi=3.1604$,較吾國周髀算經爲早. 希臘號稱精通幾何,而計圓率最精者莫過于 Archimedes (287−212 B.C.),得 $\pi=3.14$ 或 $\frac{22}{7}$,西洋人稱爲 Archimedes' value,即中國人所謂「徽率」及「冲之約率」也. 印度 Aryabhatta 發現 $\pi=3.1416$,時代與冲之同,而數值則不如密率精. 歐人之知 $\pi=\frac{355}{113}$ 自 Adriaen Anthonisg (1527−1607) 始,蓋在祖冲之以後千有餘年矣.

冲之而後千有餘年,至于清,始有朱鴻繼求圓率至四十位,不誤者二十正位:

$$\pi = 3.141592653589793238462643,$$

$$\frac{1}{\pi} = 0.318309886183790671537767 5,$$

蓋師法杜德美(Tu Te—mêi 法人在中國傳道者)者也，曾紀鴻用 Gregcry's series

$$\mathrm{Tan}^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$$

及公式 $$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3}$$

算 π 至百位. 當此之時歐,人已由35位進至100位, 200位,440位, 530位, 607 位, 707 位, 而吾國則止于百位而已. 歐人已因計算之困難,尋得許多急斂級數矣,更進而證明 π 之超越性矣,吾國人則毫無建白也註.

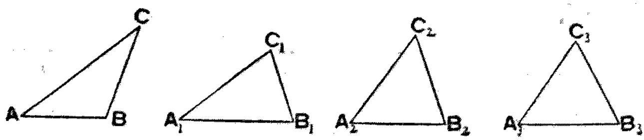
註. 關于此類問題學者可參攷 P·202 所引各書及 HOb-SOn, SPuaringthe Circle.

代數方程之根謂之代數數 (algebr ic number); 非代數數爲超越數 (transcendental number), π 既爲超越數,自非代數方程之根,更非加減乘除開平方之所可表示, 故據§112所提之準則,不可以以圓規直尺作一線段于已知圓之周長.

§147. 極大極小問題之極限解法.

§129 例 1 及 §130 所討論之定理亦可證之如下:——

例 1. 等積諸三角形中以等邊者周最小.



第 411 圖

設 ABC 爲任意一三角形. 若諸角不等,可順次平均之[註],另作等積三角形

(54)　$\triangle A_1B_1C_1$,　$\triangle A_2B_2C_2$,　$\triangle A_3B_3C_3$,　$\triangle A_4B_4C_4$, $\cdots$

使

$\angle A_1=\angle A$,　$\angle B_1=\angle C_1=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(\angle A-\frac{\pi}{3})$;

$\angle B_2=\angle B_1$,　$\angle A_2=\angle C_2=\frac{1}{2}(\angle A_1+\angle C_1)=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}(\angle A-\frac{\pi}{3})$;

$\angle A_3=\angle A_2$,　$\angle B_3=\angle C_3=\frac{1}{2}(\angle B_2+\angle C_2)=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{8}(\angle A-\frac{\pi}{3})$;

$\angle B_4=\angle B_3$,　$\angle A_4=\angle C_4=\frac{1}{2}(\angle A_3+\angle C_3)=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{16}(\angle A-\frac{\pi}{3})$;

……………………………………………………………………

則　$$\angle C=\frac{\pi}{3}+(-\frac{1}{2})(\angle A-\frac{\pi}{3})\to\frac{\pi}{3};$$

註. 此即流行教科書所用均之又均之法. 而他書如彼其簡,本書如此其繁者.彼未嘗證明均之又均可以逼近于相等也. 多數代數教科書亦有此病. 參考§129.

$$\angle A_{2m+1}=\angle A_{2m}=\angle C_{2m}\to\frac{\pi}{3};$$

$$\angle B_{2m}=\angle B_{2m-1}=\angle C_{2m-1}\to\frac{\pi}{3};$$

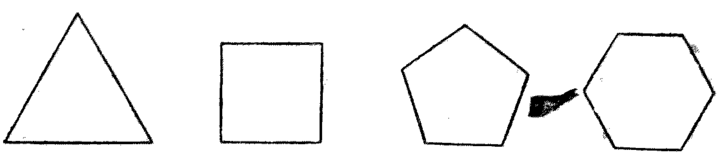
由此可見序貫(54)中諸三角形之極限形狀爲一正$\triangle A'B'C'$.

(54)中各三角形之面積皆等于原$\triangle ABC$,故其極限$\triangle A'B'C'$亦與$\triangle ABC$等積. 然(54)中每三角形之周各大于其後形之周(習題457),故皆小于原$\triangle ABC$之周,而大于極限$\triangle A'B'C'$之周. 故

原$\triangle ABC$之周$>$正$\triangle A'B'C'$之周,

而此二三角形之面積則相等. 可見任意一三角形之周皆大于與之等積之正三角形之周,而本定理證明矣.

例 2. 等積諸正多邊形中,邊數愈多則周愈小,而以與之等積之圓之周爲其下限.



第 412 圖

證. 因等積正多邊形之中,邊數愈多則周愈小. 譬如一正三角形可以認爲一四邊形三邊相等而一邊爲零. 此種四邊形之周當然大于與之等積之正四邊形之周(§130 例 3). 可見正三角形之周大于與之等積

之正四邊形之周. 同周正四邊形之周亦大于與之等積之正五邊形之周,…….

故若命互相等積的

(55) 正三角形,正四邊形,正五邊形,正六邊形,…

之周爲

(56) $p_3, p_4, p_5, p_6, \cdots\cdots$

則 $p_3>p_4>p_5>p_6>\cdots>0$. 可見 (56) 爲正則降序貫,據§133 知其必有一極限 p.

然 (55) 中諸形爲正多邊形,邊數愈多則愈近于圓形. 可見 (55) 之極限形狀爲一圓,仍與諸正多邊形等積. 此圓之周即 (56) 之極限 p 也. 故

$$p_3>p_4>p_5>p_6>\cdots>p.$$

可見任意一正多邊形之周必大于與之等積之圓之周.

演理 等積諸多邊形之周以與之等積之圓之周爲其下限.[註]

【註】. 例1與例2所用證法有共同之點,與以前諸例之證法不同者,即「由羣中任意一形以達于最小周者,中間須經過無窮多個之形.」因須經過無窮多個之形,故非序貫極限之理不能明. 二例亦有不同之點,例1中所謂最小周者爲正三角形,亦屬該羣三角形中

註 以繩捆物,捆愈緊,則套結形狀愈近于圓圈即此理也.

之一;例2中所謂最小周者爲圓,圓非正多邊形之一,特正多邊形當邊數無限極加時之極限形狀而已,此不同之點一也. 就例1言,有任意一三角形于此,吾人可用圓規直尺作一與之等積之三角形,而證明後者之周小于前者;就例2言,有任意一正多邊圓于此,吾人能證其周大于一等積圓之周,而不能用圓規直尺以作出此圓(§§ 145, 146),此不同之點二也.

習題473. 定圓內接諸多邊形中,邊數愈多則周及面積愈大,而以圓爲極限.

習題474. 定圓外切諸正多邊形中,邊數愈多則周及面積愈小,而以圓爲極限.

習題475. 等周諸正多邊形中,等數愈多則面積愈大,而以等周之圓爲極限.

習題476. 等周諸多邊形中,邊數愈多則面積愈大,而以等周圓爲極限.

習題477. 等周諸三角形中,以正三角形之面積爲極大,試用極限法證之.

雜　題

習題478. 設A,B爲CD直線同側二點,試于CD上求一點P,令$\angle$APB極大, (第280圖)

習題479. 由一定三角形底邊上一點作二線平行于二腰,所圍成之平行四邊形何者最大?

習題480. 置二頂于一定半圓,二頂于其弦上,求作一最大之矩形.

習題481. 求于一定三角形內,內接一最大之矩形.

習題482. 求過二圓之交點,作一極大割線,楔于二圓之間. (閱第266圖,注意$E_1F_1 \leq OO'$).

習題483. 求于一定$\triangle$ABC內,內接一$\triangle$DEF與一定$\triangle D'_1E_1'F_1'$相似,令其面積極小. (閱第210圖).

習題484. 求于三定點D,E,F作三直線,成一極大面積之$\triangle$ABC,與一定$\triangle A'B'C'$相似. (利用上題).

習題485. 定圓內接一切五邊形中,以正五邊形之面積(周)爲極大.

(用均數逐代法,且注意此題與§130例1當n=5時不同之點.)

習題436. 知b,c,$\angle B-\angle C$, 求作$\triangle$ABC.

(用第267圖之最右圖.命 B′爲AC上之點,AB′=AB:$\angle$A之平分線交BC于X. 注意XB′:XC及$\angle$B′XC).

習題487. 試求一與四定點距離平方之和最小之點.

習題488. 若G爲△ABC之重心,P爲任意一點,求證.

$$PA^2+PB^2+PC^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+3PG^2.$$

習題489. 有定△ABC試求一點P令$AP^2+BP^2+CP^2$最小.

習題490, 有五邊形ABCDE於此,其中AB=BC=CD=DE. 求另作一與之等積之五邊形A′B′C′D′E′令A′B′=B′C′=C′D′=D′E′. 參閱第392圖)

習題491. 有等邊六邊形於此,求另作一與之等積之等邊六邊形. (參閱第391圖)

習題492. 圓內接四邊形對角線互相垂直者,對角線交點與每邊中點之聯線必垂直于其對邊. 此四中點與四垂足必在同圓上.

習題493. 設A,B爲定點,以公式XVIII爲C點之條件,則C之軌跡爲一圓及一直線(過圓心).

習題494. 以公式XIX爲條件,則C之軌跡爲以圓及一直線(切於圓).

習題495. 將一點視為一極小之圓,一直線視為一極大之圓,則 Apollonius' Problem「試作一圓切於三定圓」可化為十題:

(i) 切於三定直線;

(ii) 過三定點;

(iii) 切于一定直線且過二定點;(習題311)

(iv) 切于二定直線且過一定點;(習題283)

(v) 切于一定圓及二定直線;(§107例5)

(vi) 切于一定圓且過二定點;(習題312)

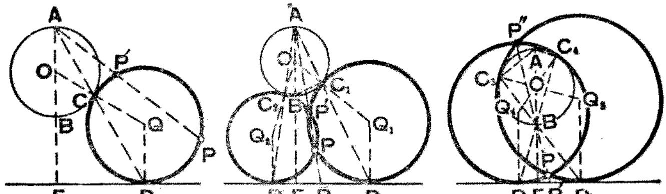
(vii) 切于一定圓,一定線且過一定點;(第413圖)
(注意: AB·AF=AC·AD=AP·AP′)

(viii) 切于二定圓及一定直線;(伸縮半徑法)

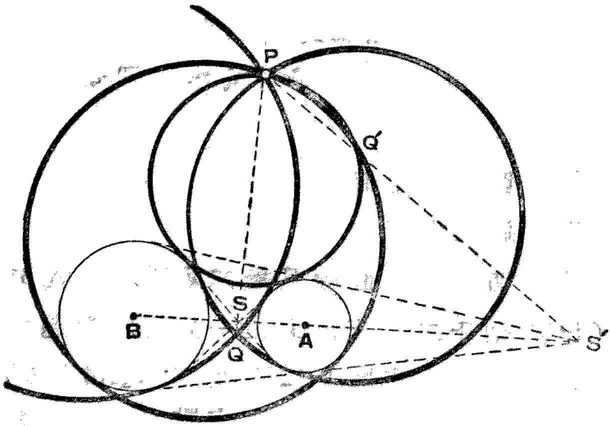
(ix) 切于二定圓且過一定點;(第414圖)
(注意:二定圓與一外(或內)公切線之交點若為C,D,則C,D,P,Q′(或Q)四點共圓.)

(x) 切於三定圓;(伸縮半徑法)

試分別研究其作法.



第 413 圖



第 414 圖

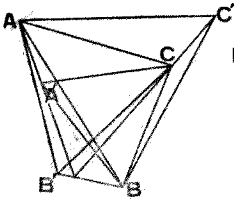
習題496. 習題29作正三角形時,若使A與A′在BC之同側,B與B′在AC之同側,C與C′在AB之同側,AA′,BB′,CC′是否相等? 三直線是否共點? 交角何如?

習題497. 用上題方法改造習題30.

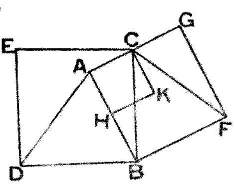
習題498. 上題圖中之AD⊥CF,而AE⊥BK.

習題499. 同圖中△ABC之BC邊上之中線必垂直于GH, CA邊上之中線必垂直于DF, AB邊上之中線必垂直于EK.

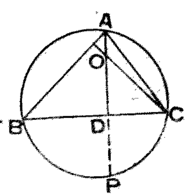
習題500. 上題△ABC縱非直角三角形,結果亦同.



第 415 圖



第 416 圖



第 417 圖

習題501. △ABC之三高線與⊙ABC交于P,Q,R,而O爲垂心,求證

(i) DO=PD;

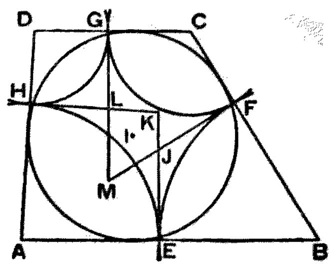
(ii) ⊙ABC=⊙OBC;

(iii) △PQR有內心一,傍心三.共凡四點,其一點爲O.(其餘三點爲何?)

習題502. 四邊形ABCD外切于⊙I,求證

(i) 以四頂爲心,必可作四圓輪迴相切,且其中一圓之半徑可任意指定;

(ii) 此輪迴相切之四切點E,F,G,H成一定形狀之圓內接四邊形,以I爲外心;



第 418 圖

(iii) 四公切線圍成一定形狀之圓外切四邊形,以I圓內心

習題503. 知四邊之長及對角和,求作四邊形.

(仿§124例2解之. 須知今之∠DCF等于設定之角和,而不必爲平角).

習題504. 第171圖中四圓之圓心與miquel's point共圓. (稱爲miqnel's circle).