修正課程標準適用

高中乙組代數學

下　册

註冊商標

民國二十六年二月發行
民國二十六年二月初版

高中標準適用[illegible]組代數學（全二冊）

◎下冊實價國幣三角五分
（郵運匯費另加）

編著者　陳藎民　王疏九

發行者　中華書局有限公司　代表人路錫三

印刷者　上海澳門路　中華書局印刷所

總發行處　上海福州路　中華書局印刷所

分發行處　各埠中華書局

（一一〇七八）

修正課程標準適用

高中乙組代數學

下　冊

目　次

第十六章　級數

第十七章　對數及其應用

第十八章　排列組合及或然率

第十九章 行列式

第二十章 複數(虛數)

第二十一章 方程式論

修正課程標準適用

高中乙組代數學

下冊

第十三章

恆等式和其應用

1. 恆等式的意義　設 A 和 B 是相等的兩個代數式,並且用以往的運算律,可以將 A 式變成 B 式,那嗎我們說 A 式恆等於 B 式,用記號表示出來便寫做

$$A \equiv B.$$

例如　$x(x+3)+9$ 是恆等於 $x^2+3(x+3)$

因　$x(x+3)+9=(x^2+3x)+9$

$$=x^2+(3x+9)=x^2+3(x+3).$$

$A \equiv B$ 叫做恆等式,所以恆等式 $A \equiv B$ 就是說第一式 A 可以用運算律把牠變做第二式 B,有些時候,一恆等式中,不含有未知數如 $7-2+3=6+7-5$,便叫做數值的恆等式.

2. 恆等式的性質　在代數學的運算中,我

們常常拿來應用的有幾條定理,這都是恆等式最重要的性質,茲分述於下.

定理 I, 設含 X 的兩多項式恆等,則其相當項的係數也要相等,即是

(證) 若 $a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+a_n\equiv b_0X^n+b_1X^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+b_n$

則 $a_0=b_0$, $a_1=b_1$,$\cdots\cdots\cdots a_n=b_n$

因爲這些相當係數不同,多項式也就不同,第一式就不能用運算的方法把牠變做第二式.

例如,設 $ax^2-2x-4=7x^2+bx-c$,

於是 $a=7$, $b=-2$ $c=4$.

假設 $a_0, a_1, \cdots\cdots a_n$ 和 $b_0, b_1, \cdots\cdots b_n$ 都是不含 X 的數,那嗎從 $a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots\cdots+a_n\equiv b_0X^n+b_1X^{n-1}+\cdots\cdots+b_n$ 便可以得出恆等式

$a_0\equiv b_0$, $a_1\equiv b_1\cdots\cdots a_n\equiv b_n$

上面的定理對於幾個未知數的恆等式也同樣成立,但是他們的係數要都是常數才可以.

定理 II 設 $A\equiv B$ 於是 $B\equiv A$

(證) 因爲我們僅用結合律,可以把 A 式變做 B 式,所以用結合律的還原法,就可以把 B 式變成 A 式了.

例如　將前節的例題倒轉變去.

因 $x^2+3(x+3)=x^2+(3x+9)=(x^2+3x)+9=x(x+3)+9,$

定理 III　設 $A\equiv C$ 和 $B\equiv C$ 於是 $A\equiv B$.

(證)　因為 $B\equiv C$.根據定理 II 便有 $C\equiv B$.

故　$A\equiv C,\quad C\equiv B$　於是 $A\equiv B$

例如　$$x(x+3)+9\equiv x^2+3x+9$$

$$x^2+3(x+3)\equiv x^2+3x+9$$

故　$$x(x+3)+9\equiv x^2+3(x+3)$$

定理 IV　一恆等式的兩邊,若施以相同的演算後,常為一恆等式.

由相等的規律,可以得出下面的例題.

例如　設 $A\equiv B$,　於是 $A+C\equiv B+C$ 等

3. 恆等式的證法　證明兩個代數式 A 和 B 是恆等時,不必一定要把 A 式變成 B 式,才說 $A\equiv B$;祇要將 A,B 兩式能夠化成同樣的一個 C 式就算夠了,這下面的定理是給我們一個很有用的方法.

若從一個假設的恆等式 $A\equiv B$, 用逆算方法導出的結果, $C\equiv D$, 是一個已知的恆等式,那嗎這種假設的恆等式 $A\equiv B$ 必定是眞確的.

因爲用逆推方法將 $C\equiv D$ 可以變成 $A\equiv B$, 但是 $C\equiv D$ 是眞確的,所以 $A\equiv B$ 也要眞確.

例如求證 $(a+b)^2-4ab$ 恆等於 $(a-b)^2$.

若先假設 $(a+b)^2-4ab\equiv(a-b)^2$ ……………(1)

便可以得出 $a^2-2ab+b^2\equiv(a-b)^2$ …………(2)

但是(2)式是已知的恆等式,並且由(1)式到(2)式是可以逆算的,所以(1)式成立.

有時由假設 $A\equiv B$, 證到 $C\equiv D$ 成立,但是不能逆算轉去,那嗎就是原來的假設錯誤.

例如,假設 $x\equiv -x$ ………………………(1)

便可以得出 $x^n\equiv(-x)^2$ ……………………(2)

第(2)式固然成立,但是第(1)式不能因第(2)式之成立而成立,所以假設根本就錯了.

習題

試證下列各恆等式.

1. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3\equiv3(a+b)(b+c)(c+a)$.

2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\equiv(ax+by)^2+(bx-ay)^2$

3. $\dfrac{x+2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x+b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{x+c}{(c-a)(c-b)}\equiv0$.

4. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)\equiv(ax+by)^2-(bx+ay)^2$

5. $(x+y)^3-x^3-y^3\equiv3xy(x+y)$.

6. $(a+b+c)^3 \equiv a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc.$

4. 恆等式原理的應用——未定係數法

我們有時要把一含某未知數的代數式化成這未知數特形的代數式,可以先用文字代表未定的係數,再用恆等式的原理去求出他們的值來,這樣的方法叫做未定係數法.

例 1. 試將 x^2+4x+6 化成以 $(x+1)$ 做未知數的二次多項式.

(解) 所求二次式最普遍的形狀是 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$;a,b,c.都代的常數.

若這個問題是可能的,一定有

$$x^2+4x+6 \equiv a(x+1)^2+b(x+1)+c \cdots\cdots(1)$$

或 $$x^2+4x+6 \equiv ax^2+(2a+b)x+(a+b+c) \cdots\cdots(2)$$

由§2定理 1,因(2)式是恆等式,所以同次項的係數相等,卽

$$a=1, \quad 2a+b=4, \quad a+b+c=6,$$

解之得 $$a=1, \quad b=2, \quad c=3.$$

故 $$x^2+4x+6 \equiv (x+1)^2+2(x+1)+3.$$

這類問題,用綜合除法做爲便.

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 4 & 6 & -1 \\
 & -1 & -3 & \\
\hline
1 & 3 & 3 & \\
 & -1 & & \\
\hline
1 & 2 & &
\end{array}$$

因爲所求的常數項就是等於以 $x+1$ 去除原式的剩餘,倒數第二項的係數就等於以 $x+1$ 去除第一次商的剩餘,以下類推.

例 2. 求用 x^2+x-2 除 x^4+x^3-4 的商式和餘式.

(解) 因商式是二次式,餘式是一次式,並設此二式爲

$$a_0x^2+a_1x+a_2 \text{ 和 } b_0x+b_1$$

則 $$x^4+x^3-4\equiv(a_0x^2+a_1x+a_2)(x^2+x-2)+b_0x+b_1$$

展開得 $$x^4+x^3-4\equiv a_0x^4+(a_0+a_1)x^3-(2a_0-a_1-a_2)x^2$$
$$-(2a_1-a_2-b_0)x-(2a_2-b_1)$$

因同次項的係數相等,所以得

$$a_0=1,\quad a_0+a_1=1,\quad -2a_0+a_1+a_2=0,$$
$$-2a_1+a_2+b_0=0,\quad -2a_2+b_1=-4.$$

解之得 $a_1=0,\ \ a_2=2,\ \ b_0=-2,\ \ b_1=0.$

故商式 $=x^2+2$, 餘式 $=-2x$.

5. **對稱式和對稱恆等式**　含有幾文字的代數式中,若任意將二文字對調,所得的新式仍

與原式爲恒等式者,這式便叫做這些文字的**完全對稱式**;如將各文字排成一定的次序,順次用後一文字,去代替前一文字,用首一文字去代替最末一文字,結果才和原式恒等的,便叫做這些文字的**輪換對稱式**,這兩種統稱曰**對稱式**.

例如　$x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$ 是三次對稱式,

$x^2y+y^2z+z^2x$ 便是三次輪換對稱式.

我們若取兩個對稱式(完全或輪換),求他們的和,差,積,商時,原式既不因文字之調換而改變其形式,和,差,積,商當然也不因文字的調換而改變其形式,所以對稱式的和,差,積,商仍然是一個對稱式.

例如　$3xyz(x+y+z)$ 和 $x+y+z$ 的和,差,積,商

$$(x+y+z)(3xyz+1),\quad (x+y+z)(3xyz-1),$$

$$3xyz(x+y+z)^2,\quad 3xyz$$

都是對稱式.

6. 對稱式的析因式法　以一不爲對稱式的代數式,調換文字後,其形式必變,盡取一切變成的式,便成功一組對稱組.

例如 $(x+y)$, $(y+z)$, $(z+x)$ 是 x,y,z 三文字的完全對稱組.

$(x-y)$, $(y-z)$, $(z-x)$ 便是 x,y,z 三文字的輪換對稱組.

定理:一對稱式的諸因式中,若含有其對稱組中之某一式,則必含有這對稱組中其餘的各式.

(證) 因爲調換文字的結果,使這式改爲組中他式,並且組中所有的式都是由這式變出來的,而對稱式又不因文字的調換而改變,所以組中各式都是對稱式的因式.

對稱式析因式時可分爲下之三步.

I. 由因式定理,求出一個因式.

II. 由上述定理,得出屬於對稱組的一切因式.

III. 由§5知所餘的因式也成對稱,係數則用未定係數法求出.

例 1. 把 $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ 析因式.

(解) 設 $x=-y$, 則上式爲零,因

$$(-y+y+z)^5+y^5-y^5-z^5\equiv 0.$$

所以原式能被 $x+y$ 整除,同理也可以被 $y+z,z+x$ 整除,故 $x+y,y+z,z+x$ 都是原式的因式,但原式是五次對稱式,故尚有一因式爲二次對稱式.設此二次對稱式爲

$$k(x^2+y^2+z^2)+L(xy+yz+zx),$$

則
$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$$
$$\equiv(x+y)(y+z)(z+x)[k(x^2+y^2+z^2)+L(xy+yz+zx)]$$

以 $x=1,y=1,z=0$ 代入得　$15=2k+L$

以 $x=2,y=1,z=0$ 代入得　$35=5k+2L$

解之得　$k=5,\quad L=5$

故　$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5\equiv5(x+y)(y+z)(z+x)$
$$(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$$

例 2.　把 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 析因式.

(解)　設 $a=b$,　則上式爲零,故 $a-b$ 是原式的一個因式,又因原式是一輪換對稱式,所以 $b-c,c-a$ 也是原式的因式。

但原式是四次輪換對稱式,故知尚有一一次對稱式.設此式爲 $L(a+b+c)$,

則
$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$\equiv L(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

若以 $a=0,\quad b=1,\quad c=2$ 代入,則得　$6L=-6\quad L=-1$

故 $$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$\equiv -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

習題

1. 試把 $4x^2+8x+7$ 變成以 $2x+3$ 做未知數的多項式.

2. 試求出一最簡方程式 $ax+by=-1$, 已知其兩組解答為 $x=3, y=1$ 和 $x=4, y=-1$.

3. 試求方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$, 已知其三根為 2,1, 和 3.

試用未定係數法求下列各題前式被後式除的商和剩餘.

4. $3x^4-2x^3-32x^2+66x-35,\quad x^2+2x-7.$

5. $3x^3-3x^2+x-5,\quad x^2-3x+2.$

6. $2x^5-3x^4+x^2-5,\quad x^3-3x+2.$

分解下列各式的因式.

7. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y).$

8. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

9. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz.$

10. $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3.$

11. $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz.$

12. $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$.

13. $x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)$.

化簡下列各題.

14. $\dfrac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2-ac}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

15. $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$.

16. $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)$
$+a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$.

第十四章

二項式定理

1. 數學歸納法 在代數學上,有許多定理都可以用數學歸納法來證明. 二項式定理就是這種定理之一. 現在爲明瞭數學歸納法的方法起見,舉個實例說明如下.

譬如用數學歸納法證明:n個連續奇數之和等於n的平方,即

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

式中n爲正整數.

由實際的計算,知道上面(1)式當$n=1$及$n=2$都是眞的. 現在假設$n=r$也是眞的,即下面的(2)式是眞的

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2r-1)=r^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

於是在(2)式的兩端各加一連續奇數$2r+1$,即得

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2r-1)+(2r+1)=r^2+2r+1$$
$$=(r+1)^2\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)式就是表示$r+1$個連續奇數之和等於$r+1$的平方.

由是可知:上面的(1)式,若當$n=r$是眞的,那麼$n=r+1$也是眞的. 現在由實際的計算,知道當$n=r=2$時

(1)式是眞的,所以 $n=r+1=3$ 時(1)式也是眞的. 既然 $n=r=3$ 時,(1)式是眞的;於是 $n=r+1=4$ 時,(1)式也是眞的. 依此類推,可知無論 n 等於任何正整數,(1)式總是眞的.

由上面的證明,可知用數學歸納法來證明一個定理,就要證明兩部分:

第一. 證明定理當特別情形時是眞的,譬如上面定理當 $n=1$ 或 $n=2$ 時是眞的.

第二. 證明定理當 $n=r$ 時倘若是眞的,那麼 $n=r+1$ 時也是眞的.

這兩部分的證明都是數學歸納法的本體,缺一不可的.所以上面的定理必須先證明 $n=1$ 或 2 是眞,再證明第二部分,如若祇證明一部分,就不能算是數學歸納法,這要發生錯誤的.

譬如 n^2-n+41, 當 n 等於 1,2,3,........40 時,都是代表一個質數如下表.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n^2-n+41	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131	151

但是不能證明數學歸納法的第二部分,即不能證明當 r^2-r+41 是質數,$(r+1)^2-(r+1)+41$ 也是質數.所以

這個式不是代表一切質數的式子,由實際的計算,可知 $n=41$,則 $n^2-n+41=41^2$,而 41^2 不是質數.

用數學歸納法證明一個定理,倘若祗證明第二部分而不證明第一部分,也是要發生錯誤的.

譬如用數學歸納法證明,n 個連續偶數之和是奇數.雖然我們能證明第二部分,但是不能證明第一部分,所以這個定理不是眞的.

總之,用數學歸納法證明一個定理,必須要證明上面所述的兩部分纔算是完全證明,否則就要發生錯誤.

習題

用數學歸納法證明下列各式.

1. $2+4+6+\cdots\cdots+2n=n(n+1)$

2. $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

3. $4+8+12+\cdots\cdots+4n=2n(n+1)$

4. $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

5. $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

6. $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

2. <u>二項式定理</u>　由乘法得:

$$(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$$

$$(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$$

$$(a+x)^4=a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4$$

$$=a^4+4a^3x+\frac{4.3}{\underline{|2}}a^2x^2+\frac{4.3.2}{\underline{|3}}ax^3+x^4$$

假設 n 是代表二項式的指數,由上面三種情形的比較卽得下列各種結果.

I. 第一項是 a^n

II. 第二項是 $na^{n-1}x$

III. a 的指數逐項減 1,減到 0 爲止,x 的指數逐項加 1,加到 n 爲止.

IV. 各項的係數都是一個分數.分母就是 x 指數的連乘積,分子就是 $n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots$ x 的指數是多少,這個積的因數就有幾個.

由上面所舉的四個二項式,可知祇要 $n<5$, 下面的(1)式是眞的:

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}a^{n-2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}a^{n-r}x^r$$

$$+\cdots\cdots+x^n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但是$n\geqslant 5$時候,這個恆等式也是眞的麼?

要證明$n\geqslant 5$時候這個式子也是眞的,就要用數學歸納法來證明.關於歸納法的第一部分,上面已經講過,不再多說,現在祇論第二部分於下.

假設 $n=m$ 時候,(1)式是眞的,即下面的(2)式是眞的.

$$(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}a^{m-2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)}{\underline{|r}}a^{m-r}x^r+\cdots+x^m\cdots\cdots\cdots(2)$$

於是以$a+x$乘(2)式的兩邊,即得

$$(a+x)^{m+1}=a^{m+1}+ma^mx+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{\underline{|r}}$$

$$a^{m-r+1}x^r+\cdots+ax^m+a^mx+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-r+2)}{\underline{|r-1}}$$

$$a^{m-r+1}x^r+\cdots\cdots\cdots+max^m+x^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)a^mx+$$

$$\cdots+\frac{(m+1)m(m-1)\cdots(m-r+2)}{\underline{|r}}a^{m-r+1}x^r+\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots+(m+1)ax^m+x^{m+1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

把(2)式的m代以 $m+1$ 就是(3)式,所以(2)式若是眞的,則(3)式也是眞的.即若 $n=m$ 是眞的,則 $n=m+1$ 也是眞的.我們已經知道$n=2,3,$

4都是眞的,所以$n=4+1=5$也是眞的,既然$n=5$是眞的,所以$n=5+1=6$也是眞的.由是,無論n是任何正整數,(1)式總是眞的.數學家把(1)式叫做**二項式定理**.(1)式的第二邊叫做第一邊的展開式.

3. <u>二項式的公項</u>　在二項式的展開式裏面,第$r+1$項是

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}a^{n-r}x^r$$

或

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}a^{n-r}x^r$$

這兩個算式叫做二項式展開式的公項.

4. <u>注意</u>　上面用數學歸納法證明二項式定理,對於a,x雖然沒有限制是什麼數,但是對於n是限定要正整數.如若n不是正整數,由下面級數一章的討論,可知非要x在$-a$與$+a$之間不可,否則,二項式定理中,等號的兩邊就不能相等.所以應用二項式定理時候應當注意下列兩點.

I. n是正整數　在這個情形時候,無論a,x是什麼數,二項式定理總是眞的.

II. n不是正整數　在這個情形時候,祗有x在$-a$與$+a$之間,二項式定理是眞的.

習　題

應用二項式定理,把下列各式展開,並且令式中文字各等於1,以檢驗展開式有無錯誤.

1. $(2x-3y^3)^4$

(解)　$(2x-3y^3)^4=(2x)^4+4(2x)^3(-3y^3)$

$+6(2x)^2(-3y^3)^2+4(2x)(-3y^3)^3+(-3y^3)^4$

$=16x^4-96x^3y^3+216x^2y^6-216xy^9+81y^{12}$

(檢驗)　$(2-3)^4=16-96+216-216+81$

即　$1=1$

2. $(x-y)^3$　　3. $(x-y)^4$

4. $(a+b)^4$　　5. $(x-4)^5$

6. $(x+y)^5$　　7. $(\sqrt{a}+\sqrt{x})^4$

8. $\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{2}{3}}\right)^6$　　9. $(x-2y^2)^5$

10. 求$(a-b)^8$的第五項.

11. 求$(x-y)^{14}$的第十項.

12. 求$(2a-b)^{17}$的第十一項.

13. 求$(x+3y)^9$的第七項.

14. 應用二項式,求出$(1.1)^{10}$ $(1.3)^7$到小數點以

後三位為止.

15.　求 41^2 之值.

(解)　$41^2=(40+1)^2=1600+80+1=1681$

16.　求 49^2 之值.

(解)　$49^2=(50-1)^2=2500-100+1=2401$

17.　求 11^3, 98^2, 72^2, 19^3 各值.

第十五章

比例及變數法

I. 比

1. 比　平常看一數大或小於他數若干,是他數的幾倍或幾分之幾,都叫做比;但是在算學裏祇以後者爲限,如 a 和 b 的比,寫做 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$, a 是前項, b 是後項,商是比率。

算術裏量的比,兩項不單是同種量並且要同單位,代數比的兩項不能表異單位的數。

2. 比的原則　用比看兩量的大小,單位大時前後項大,單位小時前後項小,而比率始終不變,就是比的兩項都可以同數乘或除,和分數或分式完全一樣。

習題

1. 怎樣把含不名分數的比化做整數比.

2. 怎樣把含不名小數的比化做整數比.

3. 怎樣把名數比化做不名數比.

4. 兩數的比爲3:7,若前數爲 $3x$,後數怎樣?兩數的和怎樣?

化簡下列各比:(5—8)

5. $\frac{1}{10}$公畝:1 市畝.　　6. $x^3-2x+1:x^2-1$.

7. $1-\frac{9}{x^4}:1+\frac{3}{x^2}$.

8. $\frac{2a^2-5a+3}{a^2-9}:\frac{a^2-2a+1}{a^2-5a+6}$.

9. 試舉配分比例的實例,並用第 4 題去解牠.

10. 試舉混合比例的實例,並用第 4 題去解牠.

II. 比　例

3. 比例　相等兩比合成比例,如 $a:b=c:d$,第一第四兩項的 a 和 d 是外項,第二第三兩項的 b 和 c 是內項.

4. 比例式的計算　比例式也是等分式,或等積式,

如 $$a:b=c:d,$$

即 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

或 $$ad=bc,$$

所以在一比例式裏,兩外項的乘積等於兩內項的乘積,普通解比例式,都是根據這理性的.

例 1. 求 $a^2,2ab,3b^2$ 的比例第四項.

(解) 設 $x=$ 比例第四項,

則 $$a^2:2ab=3b^2:x,$$

而 $$a^2x=2ab.3b^2,$$

∴ $$x=\frac{6b^3}{a}.$$

例 2. 代數 6 册,共價 4 元 8 角. 8 册共價若干?

(解) 設 $x=8$ 册共價元數,

則 $$6:8=4.8:x,$$

而 $$6x=8\times4.8,$$

∴ $$x=6.4.$$

習題

求下各組數的比例第四項:(1–4)

1. 8、20、32尺. 2. p^3、pq、$5p^2q$.

3. 1、$a+b$、a^2-ab+b^2. 4. x^2-4x+3、x^2-1、x^2-5x+6

比例兩內項相等時,內項又叫**中項**.試再求下各組數的比例中項(各組數爲外項):(5–8)

5. 10、25. 6. $12mx^4$、$3m^3$.

7. $(x^2+ax+a^2)^2$、$(x^2-ax+a^2)^2$.

8. x^2-6x+9、x^2+4x+4.

5. 化等積式爲比例式 比例式可化爲等積式,等積式也可化爲比例式.

如 $$ad=bc. \qquad (1)$$

可化爲:

(一) $a:b=c:d$ (2)

(二) $a:c=b:d$ (3)

(三) $d:b=c:a$ (4)

(四) $b:a=d:c$ (5)

6. 比例定理

(一)從前節的(2),可得(3),(4),叫**更比定理**,就是內項可以互換,外項也可互換.

(二)從前節的(2),可以得(5),叫**反比定理**,就是二內項可和二外項同時互換.

如寫(2)爲分式. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

可得 $$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$$

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$$

即 $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad (6)$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \qquad (7)$$

(三)從(2)得(6),叫**合比定理**,就是前二項和與第二項的比等於後二項和與第四項的比. $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(四)從(2)得(7),叫**分比定理**,就是前二項差與

$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

第二項的比等於後二項差與第四項的比.

(五)拿(7)除(6),可得　$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$　(8)

叫合分定理,就是前二項和差的比等於後二項和差的比.

7. 對於解方程式的應用

例 1.　解 $\dfrac{2x+2}{2x-1}=\dfrac{5}{3}$.

(解)　依分比定理,得

$$\frac{(2x+2)-(2x-1)}{2x-1}=\frac{5-3}{3},$$

即
$$\frac{3}{2x-1}=\frac{2}{3}.$$

由是
$$2(2x-1)=3\cdot3.$$

∴
$$x=2\frac{3}{4}.$$

例 2.　解 $\dfrac{x^2+x-2}{2-x}=\dfrac{4x^2+5x-6}{6-5x}$.

(解)　依合比定理,得

$$\frac{(x^2+x-2)+(2-x)}{2-x}=\frac{(4x^2+5x-6)+(6-5x)}{6-5x},$$

即
$$\frac{x^2}{2-x}=\frac{4x^2}{6-5x}.$$

由是
$$x^2(6-5x)=4x^2(2-x).$$

∴
$$x=0\text{或}-2.$$

習題

1. 試證第5節的(2)、(3)、(4)、(5)各式.

已知$a:b=c:d$,試證下列各式:(2−7).

2. $d:c=b:a$.　　3. $b:d=a:c$.

4. $a+b:c+d=b:d$.　　5. $a+b:c+d=a:c$.

6. $ma:nb=mc:nd$.　　7. $a+b:c+d=a-b:c-d$.

解下各方程式:(7−10)

8. $\frac{3x-1}{x+1}=\frac{1}{2}$.　　9. $\frac{9-x}{12-x}=\frac{21-x}{23-x}$.

10. $\frac{3x-1}{7-7x}=\frac{7x-10}{9x+10}$.　　11. $\frac{2x-1}{x^2+2x-1}=\frac{x+4}{x^2+x+4}$.

12. 試證二比例式相當項的乘積仍成比例.

13. 試證一比例式各項的同次乘羃仍成比例.

III. 變數法

8. 正變　設有長100公尺的銅絲重8公斤,長200公尺的重16公斤,可寫成比例式100公尺:200公尺=8公斤:16公斤,前後兩比都是**正比**,這個比例是**正比例**.**正變**是正比例的推廣,如銅絲長L從L_1變到L_2,重量W從W_1變到W_2,可得正比例$L_1:L_2=W_1:W_2$;推廣來講,L,W不論怎樣總是:

$$L:W=K(\text{定數})\text{或}(\text{常數}),$$

即　$$L=KW$$

也可寫成 $L \propto W$,

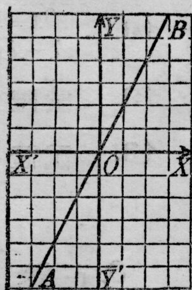
就是 L 依 W 而正變.

所以正變公式是:

$$y=kx.$$

在變數 x、y 裏,有一組相當值,就可以決定 k,在 k 決定後,可以從 x 求 y 的相當值或從 y 求 x 的相當值.

9. 正變圖解　正變公式是沒有常數項的二元一次方程式,所以他的圖解是過原點的直線.右圖是 $y=2x$ 的圖解,除原點外,衹要再定一點,即能畫出表 $y=2x$ 的 AB 了.



10. 反變　設有若干公斤銅做成銅絲長 100 公尺時,橫斷面 $\frac{9}{100}$ 平方公分,長 200 公尺時橫斷面 $\frac{9}{200}$ 公分,可寫成比例式 $\frac{1}{100}$ 公尺:$\frac{1}{200}$ 公尺 $=\frac{9}{100}$ 平方公分:$\frac{9}{200}$ 平方公分,或 200 公尺:100 公尺 $=\frac{9}{100}$ 平方公分:$\frac{9}{200}$ 平方公分,前比是**反比**,後比是正比,這個比例是**反比例**.反變也

是反比例的推廣:如銅絲長 L 從 L_1 變到 L_2,橫斷面 A 從 A_1 變到 A_2,可得反比例 $L_2:L_1=A_1:A_2$;推廣來講,L,A 不論怎樣,總是:

$$L:\frac{1}{A}=K(\text{定數或常數}),$$

即
$$LA=K,$$

也可寫成
$$L\propto\frac{1}{A},$$

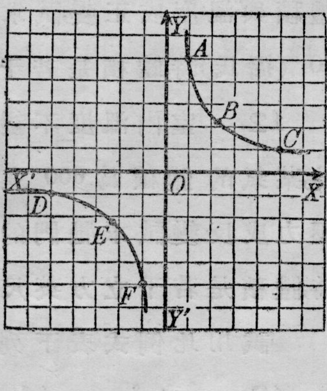
就是 L 依 W 而反變。

所以反變公式是

$$xy=k。$$

決定 k 和從 x 求 y 的相當值或從 y 求 x 的相當值,都和正變相彷。

11.反變圖解　反變公式是有常數項沒有各元二次冪項的二元二次方程式,所以他的圖解是不過原點的雙曲線。右圖是 $xy=5$ 的圖解,要先定若干點,才能畫出表 $xy=5$ 的曲線 ABC、DEF。



習題

1. 設 $x\propto y$，而 $y=6$ 時，$x=18$，求 $x=20$ 時，$y=?$

2. 設 $y\propto x$，而 $x=4$ 時，$y=2$，求 $x=2$ 時，$y=?$

3. 設 $x\propto \frac{1}{y}$，而 $y=6$ 時，$x=18$，求 $x=20$ 時，$y=?$

4. 設 $y\propto \frac{1}{x}$，而 $x=4$ 時，$y=2$，求 $x=2$ 時，$y=?$

作表下列各式的圖解：(5—8)

5. $y=5x$.　　**6.** $y=\frac{1}{5}x$.

7. $xy=10$.　　**8.** $y=\frac{8}{x}$.

9. 設 $y\propto x$，試證 $x\propto y$.

10. 設 $y\propto \frac{1}{x}$，試證 $x\propto \frac{1}{y}$.

11. 室內有橡皮囊，內裝某氣，當絕對溫度(比攝氏度多273°)為300°時，體積為500立方英尺. 設氣體的體積與溫度成正變，試求牠們的關係式. 問溫度為10°、50°(攝氏)時，體積是若干立方英尺.

12. 室內溫度不變，當所受壓力為每方英寸20磅時，某氣的體積為600立方英尺. 設氣的體積與所受壓力成反變，試求牠們的關係式. 問壓力為10磅，25磅時，體積是若干立方英尺?

試用比例式表下列各關係：(13—15)

13. $y\propto x^2$.　　**14.** $y^3\propto x$.　　**15.** $y^2\propto x^3$.

12.聯變　選幾個單比—正反比—的相當項乘積做兩項,可成複比;幾個單比例—正反比例--的相當項乘積做四項,可成複比例.聯變即複變,就是複比例的推廣,所以不出下面三種.

(一)幾個正變合成的.

(二)幾個反變合成的.

(三)正反變合成的.

如銅絲長L、重W,橫斷面A,有下各關係式:

$$\left.\begin{array}{l} W\propto A \\ W\propto L \end{array}\right\}\text{可合成 } W\propto AL,\text{ 或 } W=KAL \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} A\propto W \\ A\propto \dfrac{1}{L} \end{array}\right\}\text{可合成 } A\propto W\frac{1}{L}\text{或 } A=K\frac{W}{L} \qquad (2)$$

K表常數,(1)屬於(一)(2)屬於(三).

(注意)　複比例雖是一個複比和一個單比,實即幾個單比例合成,如

$$\left.\begin{array}{c} 3:6 \\ 5:7 \\ \frac{1}{2}:\frac{1}{3} \end{array}\right\}=30:x,$$

與$3:6=30:y$, $5:7=y:z$, $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=z:x$連乘完全一樣.

習　題

(二項)

1. 試舉幾個單比合成複比的實例.

(四項)

2. 試舉幾個單比例合成複比例的實例.

3. 在 $W \propto A$ 裏,若 W 從 W_1 變到 W', A 從 A_1 變到 A_2,可得單比例式 $W_1:W'=A_1:A_2$. 仿此在 $W \propto L$ 裏,若 W 從 W' 變到 W_2, L 從 L_1 變到 L_2,可得什麼單比例式? 兩個單比例式的乘積怎樣?

4. 設 $x \infty y, x \infty z$,試用前題證 $x \infty yz$.

5. 設 $x \infty \frac{1}{y}, x \infty \frac{1}{z}$,試仿前題證 $x \infty \frac{1}{yz}$.

6. 設 $x \infty y, x \infty \frac{1}{z}$,試仿前題證 $x \infty \frac{y}{z}$.

7. 在 $x=kyz$ 裏, $y=2$、$z=3$ 時, $x=12$. 求 k.

8. 在 $x=\frac{k}{yz}$ 裏, $y=2, z=3$ 時, $x=$? 但 $k=2$.

9. 在 $x=\frac{ky}{z}$ 裏, $x=12, y=2$ 時, $z=$? 但 $k=3$.

13. 對於造公式的應用

例 1. 設 z 依 x^2 正變,並依 y^3 反變,試造求 z 公式.

(解) $z \propto x^2, z \propto \frac{1}{y^3}$,

則
$$z \propto \frac{x^2}{y^3},$$

或
$$z=k\frac{x^2}{y^3}.$$

例 2. 試造時間 t 與速度 v、行程 s 的關係公式.

(解) $t \infty \frac{1}{v}$, $t \infty s$,

$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$
设 $A=B$ 则此图解为圆
$A=0$ or $B=0$ 则为 抛物线
$A\neq B\neq 0$ 为椭圆
余则为双曲线

則 $$t \propto \frac{s}{v},$$

或 $$t=k\frac{s}{v}.$$

但是 $k=1$,所以 $t=\dfrac{s}{v}.$

習題

1. 上面例 2,若 t 表時數,v 表每時所行里數,s 應表什麼?

2. 上面例 2,若 t 表時數,v 表每秒所行里數,k 仍等於 1 麼?

3. 試就工作 W、工人數 n、每日工作時數 t,工作日數 d,造求 W 或 n 或 t 或 d 的各公式.

4. 試就水槽長 l、闊 w、高 h、水管每時注水量 q、注水時數 t,造求 l 或 w 或 h 或 q 或 t 的各公式.

5. 一平面所受風力,與牠的面積及風的速度平方都成正變,試用聯變式及等式表示.

6. 三角形的高,依面積正變,並依底長反變,試用聯變式及等式表示.

第十六章

級　數

1. 等差級數　譬如下面一串的數.

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17$$

其中任意一數和他左側一數的差都是 4,這樣一串的數叫做**等差級數**.這個差數"4"叫做**公差** 1, 5, 9, 13, ………等數叫做**項**.第一項"1"叫做**首項**,最後一項"17"叫做**末項**.譬如,

$$5,\ 2,\ -1,\ -4,\ -7,\ -10,\ -13.$$

也是等差級數.他的首項是 5,末項是 -13,公差是 -3.

2. 等差級數的末項及第 n 項

假設等差級數的首項是 a,公差是 d,項數是 n,那麼,

第二項就是　$a+d$

第三項就是　$a+2d$

第四項就是　$a+3d$

…………………………………

第 n 項就是　$a+(n-1)d$

l 末項 a 首項 n 項數 d=公差
S 總和

由此可知含有 n 項的等差級數,他的末項是 $a+(n-1)d$.

現在設末項是 l, 卽得

$$l=a+(n-1)d \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

3. 等差級數的和

假設等差級數的首項是 a, 末項是 l, 公差是 d, 項數是 n, s 是 n 項的和,於是

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l$$

$$s=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$$

兩邊各相加,卽得

$$2s=(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)$$

卽 $$2s=n(a+l)$$

$$\therefore\quad s=\frac{n(a+l)}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

或 $$s=\frac{n[2a+(n-1)d]}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)(3)兩式都是求和的公式,其中四個字母,如若知道三個,其他一個就可以求出來.

例 1.　求等差級數 1, 5, 9, ……到 12 項之和.

(解)　此處 $a=1$, $d=4$, $n=12$.

$$\therefore\quad S=\frac{12[2+11\times 4]}{2}=6\times 46=276.$$

例 2. 已知等差級數的首項是 1,項數是 12,和是 276,問公差是多少?

(解) 由公式(3)得

$$276=\frac{12[2+11d]}{2}$$

即 $$276=12+66d$$

$$\therefore \quad d=4.$$

例 3. 已知等差級數的首項是 3,公差是 2,和是 440,問項數是多少?

(解) 由公式(3)得

$$440=\frac{n}{2}(6+2n-2)$$

即 $$(n-20)(n+22)=0$$

$\therefore$ $n=20$ 或 -22. 但是項數不應當是負數,所以所求項是 20.

例 4. 已知級數 $48+42+36+\cdots\cdots$ 的和等於 210.問他的項數是多少?

(解) 此處 $a=48$, $d=-6$, $s=210$,

$\therefore$ $$210=\frac{n}{2}(96+6-6n)$$

或 $$(n-10)(n-7)=0$$

即 $$n=7 \text{ 或 } 10.$$

7 和 10 都是正整數,所以項數 n 有兩個答數,因爲

這個級數從第八項以後就是 $6, 0, -6$ 三項,這三項的和是 0,所以 7 項的和與 10 項的和相等.

4. 等差中項　假設 a, b, c 三數成為等差級數,我們就叫 b 是 a, c 的等差中項.由等差級數定義得

$$b-a=c-b$$

即
$$b=\frac{a+c}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

例 1.　求 8, 11 兩數的等差中項.

(解)　所求的中項 $=\frac{19}{2}=9.5$

5. 諸等差中項　一串等差級數,除了他的首項 a 和末項 l 以外,其他各項都叫做諸等差中項.要求諸等差中項,應當先求公差 d,其法如下.

因為
$$l=a+(n-1)d$$

$\therefore$
$$d=\frac{l-a}{n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

由是所求諸等差中項是 $a+\frac{l-a}{n-1}, a+\frac{2(l-a)}{n-1}, \cdots\cdots \frac{n(l-a)}{n-1}$.

例 1.　欲在 4 和 13 中間插入兩個等差中項,問這兩個中項是多少?

（解）　$d=\frac{9}{3}=3$因此所求中項為7,10.

習　題

1.　設首項為 8,公差為 5,求等差級數第 9 項.

2.　求$a-3b,2a-5b,3a-7b$……到20項之和.

3.　求$-18,-15,-12$……的第二十項.

4.　求在$\frac{\sqrt{3}}{2}$和$\frac{\sqrt{3}+1}{3}$之間,插入兩個等差中項.

5.　求在$\frac{\sqrt{2}-1}{3}$和$\frac{\sqrt{2}+1}{3}$之間,插入三個等差中項.

6.　求 $1,-5,-11$……的第 6 項並求這個級數 6 項之和.

7.　設$l=99,n=99,a=1$,求 s 和 d.

8.　設$l=5,n=2,d=-1$,求 a 和 s.

9.　設$d=\frac{1}{6},l=1,a=\frac{1}{3}$,求 n 和 s.

10.　有一個等差級數,前三項的和等於 6,前10項的和等於55,求這個級數.

11.　某物第 1 秒鐘降16公尺,第 2 秒降48公尺,第 3 秒降80公尺,問第10秒降多少公尺?

12.　假設有一輛汽車,每小時速度60公里.開始向斜坡上行,他的速度每秒鐘減少 500 公尺.問經過多少時候,這輛車停止不行.又問這輛車上行多少路纔停止.

$a=1000$
$d=-500$
$l=0$
求$n=?$

13. 以梨堆在一個等邊三角形上,使他成為角錐體,假設底層各邊的球數是10.問底層有多少梨?

$n=10$
$a=1$
$d=1$
$s=?$

6. 調和級數　把一串等差級數的各項都按原來次序寫成倒數,於是這一串倒數叫做**調和級數**.譬如把等差級數 4, 6, 8, 10, 12.的各項寫成倒數,於是這些倒數所成的級數 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, 就是調和級數.我們知道在物理學上,一組張力相等的弦,譬如 5 根弦,若是他的長各與 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$ 成比例.那麼這五根弦彈起來就調和而悅耳.這裏調和兩字原來由物理學借用而來.調和級數的一般形式為

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a+d},\ \frac{1}{a+2d},\ \cdots\cdots\frac{1}{a+(n-1)d}.$$

7. 調和中項　求 a,b 兩數中間的**調和中項**,祇要求出$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$中間的等差中項.於是所得等差中項的倒數就是所求調和中項.

例 1.　求$\frac{5}{4}$和$\frac{6}{7}$中間兩個調和中項.

(解)　先求出$\frac{4}{5}$和$\frac{7}{6}$的等差中項為$\frac{83}{90}$, $\frac{47}{45}$, 於是這兩個數的倒數$\frac{90}{83}$, $\frac{45}{47}$就是調和中項.

習　題

1. 證明 4, 6, 12 三數成調和級數.

2. 在 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{2}{13}$ 之間插入四項,使他成爲調和級數.

3. 設 a, b, c, d 成調和級數,求證 $3(b-a)(d-c)$

H.P.

$=(c-b)(d-a)$.

4. 設 a, b, c 成調和級數,求證 $\frac{2}{b}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}$.

5. 設調和級數之第 m 項爲 n,第 n 項爲 m,求證第 $(m+n)$ 項爲 $\frac{mn}{m+n}$.

10. 設 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ 成調和級數,求證 $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots\cdots+a_na_{n+1}=(n-1)a_1a_n$.

8. 等比級數 像下面這樣一串的數.

$$4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64.$$

其中任意一數和他左側一數的比常等於 2(即常相等),叫做**等比級數**,或**幾何級數**.這個比"2"叫做**公比**,譬如下面的級數.

$$1,\ -2,\ 4,\ -8,$$

首項是 1,公比是 -2, 末項是 -8. 現在假設首項是 a,公比是 r,即得等比級數的一般形式如下.

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\cdots\cdots$$

9. 等比級數的末項和第 n 項.

等比 a 首項 l 末項 r 公比 n 項數
S 總和

假設等比級數的首項是 a, 公比是 r, 項數是 n, 末項是 l, 即得

$$l=ar^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

例 1.　已知等比級數的首項是 4, 公比是 3, 問這個等比級數的第五項是多少?

(解)　所求的第五項 $=4\times3^4=324$.

10. 等比級數的和　假設 a 是首項, r 是公比, n 是項數, s 是 n 項之和, 於是

$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}$. 以 r 乘上式的兩邊, 即得

$Sr=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^n$

兩式各邊相減, 即得

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

或

$$S=\frac{rl-a}{r-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

11. 等比中項　假設 a, b, c 三數成為等比級數, 我們就說 b 是 a,c 的等比中項, 由等比級數定義得

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$$

或

$$b=\pm\sqrt{ac}$$

由是可知,a,c兩數有兩個等比中項$+\sqrt{ac}$及$-\sqrt{ac}$.但是通常所謂a,c的等比中項都是指前一個$+\sqrt{ac}$.

12. 諸等比中項　要想在 a 和 l 之間插入 n 個等比中項,祇要先求出公比,就可以寫出來,其法如下.

因爲
$$l=ar^{n+1}$$

$$\therefore\quad r=\sqrt[n+1]{\frac{l}{a}}$$ 由是所求諸等比中項

爲
$$a\sqrt[n+1]{\frac{l}{a}},\ a\sqrt[n+1]{\left(\frac{l}{a}\right)^2},\ a\sqrt[n+1]{\left(\frac{l}{a}\right)^3}\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

習題

1. 初項 3,公比 2,求第 12 項.

2. 等比級數之第 2 項爲$3\sqrt{2}$,第 5 項爲$\frac{3}{16}$,求其第 1 項及其公比.

3. 試於 6 及 486 之間插入 3 項等比中項.

4. 試於 -144 及 -9 之間插入 3 項等比中項.

5. 求$\sqrt{5}, 1, \frac{1}{5}\sqrt{5}$之第 7 項及其 7 項之和.

6. 試證明 h 及 k 間之等比中項爲$\pm\sqrt{hk}$.

7. 有四數成一幾何級數,其和爲 249,其第一數與第四數之和爲 168,試求此四數.

8. 有一皮球自高 5 尺之處落下,其每次返躍之高為前次落至地面之距離之 $\frac{1}{3}$,如是任其旋起旋落,問當第十次落地時共經若干距離?又問當第 1 次落地後可反躍高幾何?

9. 以複利法計銀生息,如每13年終之銀數較13年始之銀數加增 1 倍,試求銀 1 元在65年終之本利和.

10. 一人有銀50元,若每週付出其所有銀之半,問當其所餘銀數少於 1 元時須經若干時間?

第十七章

對數及其應用

1. <u>對數</u>　對數就是指數;如 a 表正數時,x 是 a^x 裏 a 的指數,也是 a^x 的對數,都是以 a 爲底.

常用對數以10爲底,如 $y=10^x$,y的10底對數是 x, 寫做 $\log y$.不是10底的,底必寫出,如 y 的 a 底對數,寫做 $\log_a y$.

2. <u>定位部和定值部</u>　設 $3.1623=10^{\frac{1}{2}}=10^{.5}$,

則
$$31.623=3.1623\times 10 \quad =10^{1.5},$$
$$316.23= \quad 10^{2.5},$$
$$.31623=3.1623\times 10^{-1} \quad =10^{-1+.5},$$
$$.031623= \quad 10^{-2+.5};$$

就是　$\log 3.1623=.5$,　$\log 31.623=1.5$,　$\log 316.23=2.5$,
$$\log .31623=-1+.5 \text{ 或 } \bar{1}.5,$$
$$\log .031623=-2+.5 \text{ 或 } \bar{2}.5,$$

各位數字不變的數,無論進若干位或退若干位,對數祇整數部不同,小數部都同的.整數部是定位部,可定眞數——原數——的位;小數部是定值部,可定眞數的各位數字.

3. <u>定位部求法</u> 從指數律推出:設從眞數個位的左或右,數到非零的最高位,如得 n,n 就是這個眞數的定位部;但是向左數的爲正,向右爲負.

4. <u>定値部求法</u> 定値部須查對數表.

5. <u>眞數對數的互求</u> 從眞數求對數,先求定値部,後加定位部;從對數求眞數,先求各位數字,後定個位.

習題

1. 0也有對數嗎? 1的對數怎樣?

2. 10的正幾次冪的對數怎樣? 10的負幾次冪的對數怎樣?

3. 負數有對數嗎? 能有對數的數都是些什麼數?

4. 試寫首尾0都不算的三位數,求對數.

5. 試寫首尾0都不算的四位數,並用對數表和牠的附表求對數.

6. 試寫首尾0都不算的四位數,並用對數表和比例補算法求對數.注意兩眞數的微差與兩對數的差,可看做成正比例.

7. 試寫對數,求首尾 0 都不算三位數的眞數.

8. 試寫對數,並用對數表和牠的附表求首尾 0 都不算四位數的眞數.

9. 試寫對數,並用對數表和比例補算法求首尾 0 都不算四位數的眞數.

10. 試寫二位或一位數求對數,並寫對數求二位或一位的眞數.

6. 對數的特性　設 A、B 都表正數,而 $A=10^a$, $B=10^b$, 則 $\log A=a$, $\log B=b$. 由是:

(一)從 $A.B=10^a10^b=10^{a+b}$, 得

$$\log AB=\log A+\log B.$$

(二)從 $A/B=10^a/10^b=10^{a-b}$, 得

$$\log A/B=\log A-\log B.$$

(三)從 $A^n=(10^a)^n=10^{na}$, 得

$$\log A^n=n\log A.$$

(四)從 $\sqrt[n]{A}=(10^a)^{\frac{1}{n}}=10^{\frac{a}{n}}$, 得

$$\log\sqrt[n]{A}=\frac{1}{n}\log A.$$

上面的 a, b, 可以表有理數或無理數.

7. 餘對數　餘對數是一個數倒數的對數;如 $\frac{1}{a}$ 的對數,是 a 的餘對數,寫做 $\log\frac{1}{a}=\operatorname{colog} a$.

cologa 就是 $log1-loga=-loga$, 所以求一個數的餘對數,就將對數的定位部,改號再減 1,做牠的定位部,將對數的定值部從 1 減得的差,做牠的定值部.

例 1. 求 $colog.0625$.

(解) $log.0625=\bar{2}.7959$,

$\therefore \quad colog.0625=1.2041$.

例 2. 求 $colog39.9$.

(解) $log39.9=1.6010$,

$\therefore \quad colog39.9=\bar{2}.3990$.

8. 對數計算

(一)乘除 幾個數的乘除,可先取各除數的餘對數.餘各數的對數,求出牠們的和.

例 1. 求 $\dfrac{21.3\times3.23}{.0925\times6}$.

(解)
$$\begin{aligned} log21.3 &= 1.3284 \\ log3.23 &= .5092 \\ colog.0925 &= 1.0339 \\ colog.6 &= \underline{\bar{1}.2218} \\ &\ 2.0933 = log124. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{21.3\times3.23}{.0925\times6}=124.$$

(二)乘方　求一個數的 n 次方,可先拿 n 分乘這數的對數定位部和定值部,並求所得兩整數部的和.

例 2.　求 13.1^2.

(解)　　$log13.1 = 1.1173$

$$\frac{\begin{array}{r}2\end{array}}{2.2346} = log171.6.$$

$\therefore$　　$13.1^2 = 171.6.$

例 3.　求 23.1^3.

(解)　　$log23.1 = 1.3636$

$$\frac{\begin{array}{r}3\end{array}}{4.0908} = log12330.$$

$\therefore$　　$23.1^3 = 12330.$

例 4.　求 $.231^3$.

(解)　　$log.231 = \bar{1}.3636$

$$\frac{\begin{array}{r}3\end{array}}{\bar{2}.0908} = log.01233.$$

$\therefore$　　$.231^3 = .01233.$

(三)開方　求一個數的 n 次根,可先使這數的對數定位部成 n 的倍數,並拿 n 分除牠和定值部.

例 5.　求 $log\sqrt{231}$.

（解）　$log231 = \underline{2.3636(2}$

$$1.1818 = log15.2.$$

∴　$\sqrt{231} = 15.2.$

例 6.　求 $log\sqrt{23.1}$.

（解）　$log23.1 = 1.3636$

$$= \underline{0 + 1.3636(2}$$

$$.6818 = log4.807.$$

∴　$\sqrt{23.1} = 4.807.$

例 7.　求 $log\sqrt{2310}$.

（解）　$log2310 = 3.3636$

$$= \underline{2 + 1.3636(2}$$

$$1 \quad .6818 = log48.07.$$

∴　$\sqrt{2310} = 48.07.$

例 8.　求 $log\sqrt{.231}$.

（解）　$log.231 = \bar{1}.3636$

$$= \underline{\bar{2} + 1.3636(2}$$

$$\bar{1} \quad .6818 = log.4807.$$

∴　$\sqrt{.231} = .4807.$

例 9.　求 $\dfrac{(330\times\frac{1}{49})^4}{\sqrt[3]{22\times 6.9}} = 330^4 \times \left(\dfrac{1}{49}\right)^4 \times \sqrt[3]{\dfrac{1}{22}} \times \sqrt[3]{\dfrac{1}{6.9}}.$

(解) $4\log 330=4\times 2.5185=10.0740$

$4\,\mathrm{colog}\,49=4\times\bar{2}.3098=\bar{7}.2392$

$\frac{1}{3}\mathrm{colog}\,22=\frac{1}{3}\times\bar{2}.6576=\bar{1}.5525$

$\frac{1}{3}\mathrm{colog}\,6.9=\frac{1}{3}\times\bar{1}.1612=\bar{1}.7204$

$\bar{2}.5861=\log .03856.$

$$\therefore\quad \frac{\left(330\times\frac{1}{49}\right)^4}{\sqrt[3]{22\times 6.9}}=.03856.$$

(注意) 在對數計算裏,各數都要做正數看,結果的正負,須再照正負數的算律決定.

習 題

求下列各式的差近值: (1—12)

1. $97\times 740\times .892$ **2.** $.00094\times(-.0563).$

3. $\frac{1}{.0651\times 378}$ **4.** $\frac{24167}{-.0045}.$

5. $\frac{-.08025}{-.4807}.$ **6.** $\frac{.6096\times 4.065}{-698\times .6885}.$

7. $(1.024)^{10}.$ **8.** $(-.75)^7.$

9. $\left(\frac{113}{355}\right)^8.$ **10.** $\left(\frac{113}{355}\right)^{\frac{1}{8}}.$

11. $\frac{\sqrt{.01637\times .0269}}{537.8}.$ **12.** $\sqrt[3]{\frac{8^{\frac{1}{4}}\times 90^{\frac{1}{3}}\times(.1)^{\frac{1}{2}}}{(.0062)^5\times(759)^{\frac{1}{4}}}}.$

13. 已知三角形三邊的長爲 218.6,244,52.68, 求面積.

14. 設 a、b、c 爲直角三角形裏直角兩邊和斜邊的長,試證:

$$\log a=\frac{1}{2}[\log(c+b)+\log(c-b)].$$

15. 在直角三角形裏,已知斜邊長爲43,直角一邊的長爲25.12,求餘一邊的長.

16. 已知英京倫敦的鐘擺——秒擺——長99.413公釐,試用公式 $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=1$ 求 g. 但 l 表擺長, g 表地心吸力.

9. 對於解方程式的應用 在前講各種方程式外,還有**指數方程式**,指數含未知數,有**對數方程式**,對數含未知數,都是**超性方程式**,沒有一般的代數解法;現就可用對數解的,略舉數例如下:

例 1. 解 $13^{2x+5}=14^{x+7}$。

(解) $13^{2x+5}=14^{x+7}$,

則 $(2x+5)\log 13=(x+7)\log 14$.

$$\therefore\quad x=\frac{7\log 14-5\log 13}{2\log 13-\log 14}$$

$$=\frac{2.4532}{1.0817}=2.268.$$

例 2. 解 $\sqrt[2x]{2}=\sqrt[4]{3^x}$.

（解）　$\sqrt[2x]{2}=\sqrt[4]{3^x}$,

則　$\frac{1}{2x}\log 2=\frac{x}{4}\log 3$,

卽　$x^2=\frac{2\log 2}{\log 3}$

$$=\frac{.6020}{.4771}=1.262.$$

∴　$x=\pm 1.123.$

例 3.　解 $3^x-3^{-x}=\frac{3}{2}$.

（解）　設 $u=3^x$,

則　$\frac{1}{u}=3^{-x}$,

而原式爲　$u-\frac{1}{u}=\frac{3}{2}$.

解得　$u=2$ 或 $-\frac{1}{2}$,

卽　$3^x=2$ 或 $-\frac{1}{2}$.

因　$3^x=-\frac{1}{2}$ 不能解,故祇取 $3^x=2$.

解得　$x=.6309$.

例 4.　解 $x^{2\log x}=10x$.

（解）　$x^{2\log x}=10x$,

則　$2(\log x)^2=\log x+\log 10$.

設　$u=\log x$, 解得

$$u=1 \text{ 或 } -\frac{1}{2}=\log x.$$

$\therefore \qquad x=10$ 或 $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

例 5. 解 $log_x 36=1.367$.

(解) $log_x 36=1.367$,

則 $x^{1.367}=36$,

而 $1.367 log x=log 36$.

解得 $x=13.76$.

例 6. 解 $\frac{1}{2}log(x+7)+log\sqrt{3x+1}=1$.

(解) $\frac{1}{2}log(x+7)+log\sqrt{3x+1}=1$,

則 $\frac{1}{2}log(x+7)+\frac{1}{2}log(3x+1)=\frac{1}{2}log100$,

而 $\frac{1}{2}[log(x+7)+log(3x+1)-log100]=0$,

即 $\frac{1}{2}log\frac{(x+7)(3x+1)}{100}=0$.

由是 $\frac{1}{100}(x+7)(3x+1)=1$.

$\therefore \qquad x=3$ 或 $-\frac{31}{3}$.

10.對於解公式的應用

例 從複利公式 $A=P(1+r)^n$, 求 A 或 P 或 n.

(解) $logA=logP+nlog(1+r)$ (1)

$logP=logA-nlog(1+r)$ (2)

$n=\dfrac{logA-logP}{log(1+r)}$ (3)

順次從(1)、(2)、(3),可求得A、P、n.

習 題

解下各方程式: (1—6)

1. $x\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}$ **2.** $\dfrac{x^{\log x}}{x\sqrt{x}}=\dfrac{1}{10}$.

3. $2^{2x}-2^{x+1}+1=0$. **4.** $3^{x}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$.

5. $\log_{x}100=\log x$. **6.** $\log(35-x^{3})\log(5-x)=3$.

7. 本75元,利率8%,每年計算複利一次,求6年的本利和.

8. 利率8%,每年計算複利一次,經多少時本利和就是本的2倍?

第十八章

排列組合及或然率

I. 排 列

1. <u>**排列**</u>　設有 a、b、c, 三字母,任取 2 個,依各順序**排列**,必得下面 6 式:

$$ab、ac、ba、bc、ca、cb.$$

從 n 個物或 n 件事裏,任取 r 個或 r 件的排列數,可寫做 ${}_nP_r$.

習 題

1.　試從 4 個字母 a、b、c、d 裏,任取 2 個排列,看共有若干式.任取 3 個排列,怎樣?

2.　試從 5 個字母 a、b、c、d、e 裏,任取 2 個排列看共有若干式.任取 3 個或 4 個排列,怎樣?

2. <u>**求排列數一**</u>　設有 n 個物為 a、b、c、d、e,任取 2 個排列,如:

ab	ba	ca	da	ea
ac	bc	cb	db	eb
ad	bd	cd	dc	ec
ae	be	ce	de	ed

共得 $5\times4=20$ 式.所以從 n 個物或 n 件事裏,任取 2 個或 2 件排列,排列種數必爲 $n(n-1)$, 即

$$_nP_2=n(n-1).$$

3. 求排列數二　設有 n 個物爲 a、b、c、d、e, 任取 3 個排列,如:

abc　acb　adb　aeb

abd　acd　adc　aec

abe　ace　ade　aed

---

bac　bca　bda　bea

bad　bcd　bdc　bec

bae　bce　bde　bed

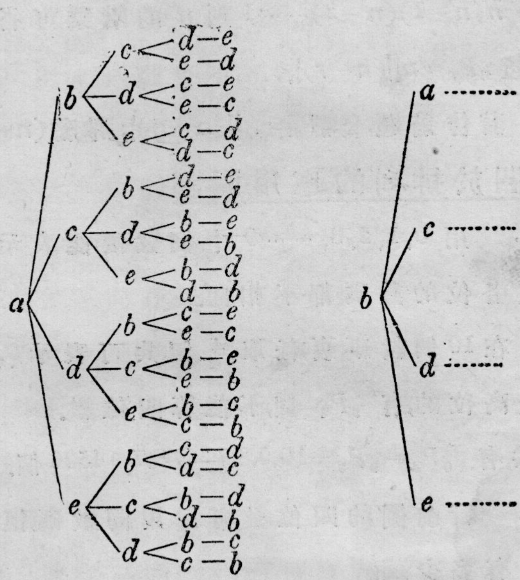
....

共得 $5\times4\times3=60$ 式.所以從 n 個物或 n 件事裏,任取 3 個或 3 件排列,排列種數必爲 $n(n-1)(n-2)$, 即

$$_nP_3=n(n-1)(n-2).$$

4. 求排列數三　設有 n 個物爲 a、b、c、d、e, 任取 2、3、4、5 個的排列如:

$L^0 = 1$



所以從 n 個物或 n 件事裏,任取 r 個或 r 件排列,排列種數必爲 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-\overline{r-1})$, 即

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-\overline{r-1}).$$

若取 n 個或 n 件排列,則得:

$$_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 1.$$

習題

1. 試證 $_{n+1}P_r = {}_nP_r + r\,{}_nP_{r-1}$.

2. 試從 $_{2n}P_3 = 100 \cdot {}_nP_2$ 求 n.

3.　$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots1$ 叫 n 的階乘,可省寫做 $\underline{n|}$ 或 $n!$.試證 ${}_nP_r=n!/(n-r)!$.

4.　若仿前題,令 ${}_nP_n=n!/(n-n)!$,那麼 $(n-n)!=$?

5. 關於排列的應用問題

例 1.　用 0、1、2、3、……9 十個數碼,能表示多少個四位數?但各位的數碼都不相同.

(解)　在 10 個數碼裏,任取 4 個,共可表示 ${}_{10}P_4$ 個數但 0 在最高位的,有 ${}_9P_3$ 個,不能算四位數.

$\therefore$　共有 ${}_{10}P_4-{}_9P_3=10.9.8.7-9.8.7=4536$ 個.

例 2.　若前例的四位數,可以用同數碼,但必須爲偶數,共計有多少個?

(解)　第一位數碼須在 1 到 9 裏取 1 個,末位須在 2、4、6、8、0 裏取 1 個,餘二位可在 0、1 到 9 裏取 1 個.

$\therefore$　共有 $9.5.10.10=4500$ 個.

例 3.　用 fancies 一字的各字母,可排成多少字?但 a、i、e 必須在偶位(從右到左數)裏.

(解)　a、i、e 有 $3!$ 種排法,餘各字母有 $4!$ 種排法.

$\therefore$　共有 $3!\,4!=144$ 字.

習　題

1.　京滬特別快車共停 11 站,問每一等車票可分

单去 $\frac{_{11}P_2}{2} = \frac{11(11-1)}{2} = \frac{110}{2} = 55$
來往 $_{11}P_2$

幾種?

2.　用4面顏色不同的旗子打旗語,可以祇用一面,也能2、3、4、面並用,問能得幾種不同的符號? $_4P_1 + {_4P_2} + {_4P_3} + {_4P_4} = 64$

3.　在4位的整數裏:

(1)不含同數碼的有多少? $_{10}P_4 - {_9P_3} = 4536$

(2)含2同數碼的有多少? $_{10}P_3 - {_9P_3} = 216$

(3)含3同數碼的有多少? $_{10}P_2 - {_9P_2} = 18$

(4) 4數碼全同的有多少? $_4P_1 = 4$

(5)含兩對同數碼的有多少? $_{10}H_4 - (4536 + 216 + 18 + 4) = 10^4 - 4774 = 522$

4.　8人圍1圓桌吃飯,問有幾種坐法? $_{8-1}P_7$

5.　8粒不同的鑽石,可穿成幾種鑽石圈? $_{8-1}P_7$

6.　男女各4人,圍1圓桌吃飯,男女相間而坐,問有幾種坐法? $_3P_3 \times {_4P_4}$

II. 組合

6. 組合　設有 a、b、c 三字母,任取2個合成1組,不論排列的順序,必得下面3式:

$$a\text{和}b、\ a\text{和}c、\ b\text{和}c、$$

從 n 個物或 n 件事裏,任取 r 個成 r 件的組合數,可寫做 $_nC_r$.

7. 組合數和排列數的關係

例 1. 設有 n 個物,或 n 件事,任取 2 個或 2 件的組合數和排列數的關係怎樣?

(解) 任取 2 個或 2 件組合,每 1 組合的 2 個物或 2 件事可依順序得 2 排列,

$$\therefore \qquad {}_nP_2 = 2!\,{}_nC_2.$$

例 2. 設有 n 個物或 n 件事,任取 3 個或 3 件的組合數和排列數的關係怎樣?

(解) 任取 3 個或 3 件組合,每 1 組合的 3 個物或 3 件事,可依順序得 3! 排列,

$$\therefore \qquad {}_nP_3 = 3!\,{}_nC_3.$$

例 3. 設有 n 個物或 n 件事,任取 r 個或 r 件的組合數和排列數的關係怎樣?

(解) 任取 r 個或 r 件組合,每 1 組合的 r 個物或 r 件事,可依順序得 $r!$ 排列,

$$\therefore \qquad {}_nP_r = r!\,{}_nC_r.$$

8. 組合的公式 ${}_nP_r = r!\,{}_nC_r$,

則
$$\begin{aligned}{}_nC_r &= \frac{{}_nP_r}{r!}\\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\\ &= \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.\end{aligned}$$

習題

1. 試證:

(1) ${}_9C_4={}_9C_5$. (2) ${}_{12}C_3={}_{12}C_9$. (3) ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$.

2. 試從下各式求 n:

(1) ${}_nC_4=2{}_nC_3$. (2) ${}_nP_3=\frac{1}{2}{}_nC_5$.

3. 試證:

(1) ${}_{12}C_4+{}_{12}C_3={}_{13}C_4$ (2) ${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$.

4. ${}_nP_1=$? ${}_nC_1=$? ${}_nC_n=$?

5. 試就下各積裏,研究 x 的係數和組合數的關係.

(1) $(x+a)(x+b)(x+c)$. (2) $(x+a)^3$.

(3) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$. (4) $(x+a)^4$.

(5) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$, $(x+a)^5$.

6. 試就下各積裏,研究項數和排列的關係.

(1) $(a+b)(a+b)$. (2) $(a+b+c)(a+b+c)$.

(3) $(a+b+c+d)(a+b+c+d)(a+b+c+d)$.

9. 關於組合的應用問題

例 1. x、y、z 的完全齊次式,共有多少項?

(解) x^3、y^3、z^3 項各有 1 項,共有 3 項;

x^2、y^2、z^2 項各有 2 項,共有 6 項;

xyz 項祇有 1 項.

$\therefore$ 共有 $3+6+1=10$ 項.

例 2. 有從 0,1 到 9 的數碼 3 套,任取 3 個合 1 組,共能有多少種?

(解) 不含同數碼的,有 ${}_{10}C_3=\frac{10!}{7!3!}=120$ 組;

含 2 同數碼的,有 $10{}_9C_1=10\times\frac{9!}{8!1!}=90$ 組;

3 數碼全同的,有 10 組.

$\therefore$ 共有 $120+90+10=220$ 組.

習題

1. 有東西兩隊人比拳;東隊 12 人,西隊 11 人.問各隊選 1 人,可得多少組? ${}_{12}C_1\times{}_{11}C_1=132$

2. 有兵士 80 人和軍官 3 人.問作兵 3 官 1 的步哨,共有幾種組合法? ${}_{80}C_3\times{}_3C_1$

3. 有青、黃、赤、白、黑的衣、袴和背心,若能着同色的,共有幾種着法? ${}_5C_3$

4. 平面內有 25 點,沒有 3 點共線.今任取三點做頂,可畫多少個三角形? ${}_{25}C_3=\frac{\lfloor 25}{\lfloor 25-3\,\lfloor 3}=2300$

5. 若有 5 點共線,那麼前題怎樣?

${}_5C_1\times{}_{20}C_2+{}_5C_2\times{}_{20}C_1+{}_{20}C_3=2290$

6. 有 2 角鎳幣 5 枚,1 角鎳幣 10 枚、5 分鎳幣 20 枚、問任意各取幾枚,可得多少種不同之值.但不限定兼取

$20+20\ {}_{10}C_{10}+{}_{20}\,{}_5C_5$

三種幣.

III. 或然率

10.<u>或然率</u> 設有 a、b、c 三字母,任取 1 個,或 a 或 b 或 c,共有 3 種取法,而取 a、b、c 各佔其 1,就是**出現的或然率**是 $\frac{1}{3}$,**不出現的或然率**是 $\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}$,而 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$. 又有 a、b、c、d、e、f 六字母任取 2 個,或 ab、或 ac、或 ad、或 ae、或 af、或 bc、或……共有 15 種取法,而取 ab 等各佔其 1,就是出現的或然率是 $\frac{1}{15}$,不出現的或然率是 $\frac{15-1}{15}=\frac{14}{15}$,而 $\frac{1}{15}+\frac{14}{15}=1$. 若 $a=1, b=2, c=3, d=4, e=5, f=6$, 則因 $1+6=2+5=3+4=7$, 上面 2 字母和為 7 的出現或然率是 $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$, 不出現的或然率是 $\frac{15-3}{15}=\frac{4}{5}$. 所以有 n 種情形,出現的機會均等,而其中 a 種於某事有關,則這事的出現或然率是 $\frac{a}{n}$,不出現的或然率是 $\frac{n-a}{n}=1-\frac{a}{n}$.

習題

1. 在 a、b、c 三字母裏,任取 2 個,取得 ab 的或然率是多少? $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3C2}=\frac{1}{3}$

2. 在 a、b、c、d、e、f 三字母裏,任取 3 個,取得 abc

的或然率是多少? $\frac{1}{6C_3} = \frac{1}{\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{1}{20}$

3. 若 $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4,\ e=5,\ f=6$, 則前題 3 字母和爲 9 的出現或然率是多少? $\frac{3}{6C_3}$

4. 一袋裏,有白球 3 個,黑球 5 個,問任意取 2 球,共有多少取法? $8C_2$ 取得 2 白球的或然率是多少? $\frac{3C_2}{8C_2}$ 取得 2 黑球的或然率是多少? $\frac{5C_2}{8C_2}$

11. <u>共立事件和複合或然率</u> 一事出現與否,和他事不必相反,這兩件事就叫**共立事件**;其中完全無關係的,叫**獨立事件**,有關係的,叫**相倚事件**.如上面第 4 題,若先取 1 球,能不能得白球,與後再取 1 球能不能得白球是相倚事件,而二者可以都能做到;但是先後各取 1 球,共有 8×7 法,而兩次取白球,共有 3×2 取法,兩次取得白球的或然率是 $\frac{3\times2}{8\times7}$, 等於第一次取得白球或然率 $\frac{3}{8}$ 與第二次取得白球或然率 $\frac{2}{7}$ 的乘積.所以一組共立事件能完全出現的或然率,等於各事件出現或然率的乘積 —— **複合或然率.**

習 題

1. 一袋內裝 4 白球、5 黑球,先取出 1 球,後放入再取,問兩次都得白球的或然率是多少? 若取出後不

$\frac{4C_1}{9C_1} \times \frac{4C_1}{9C_1} = \frac{16}{81}$

$\frac{4C_1}{9C_1} \times \frac{3C_1}{8C_1} =$

放入,即取第 2 球,都得白球的或然率是多少?

2. 甲生能解某問題的或然率是 $\frac{3}{4}$,乙生能解的或然率是 $\frac{2}{3}$.今二生同解某題,求不能解的或然率和能解的或然率.

a. $(1-\frac{2}{3})(1-\frac{3}{4})=\frac{1}{12}$　b. $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{12}$ 乙甲成功 | $\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{12}$ 甲败乙胜 | $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{12}$ 甲成乙败

3. 一事爲某甲所親見,這人說話的可信程度是 $\frac{4}{5}$.如乙、丙、丁說話的可信程度順次爲 $\frac{5}{7}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{7}{10}$,則這事由甲、乙、丙、丁輾轉傳說,最後報告情形,祇有幾分可靠?

$\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

12. <u>不共立事件和完全或然率</u>　一事出現與否,和他事一定相反,這兩事叫**不共立事件**.如上面第 2 題,在(1)甲生能解,乙生不能解,(2)甲生不能解,乙生能解,(3)甲生能解,乙生也能解,(4)甲生不能解,乙生也不能解,四件事裏,一事出現,他事即不出現;但是(1)的或然率是 $\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{4}$, (2)的或然率是 $\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$, (3)的或然率是 $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$,而二生能解的或然率是 $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{11}{12}$.

所以一組不共立事件至少有一出現的或然率,等於各事件出現或然率的和——**完全或然率**.

習題

1. 一袋裝 4 白球,5 黑球,先取出 1 球,後放入再

a. $1-\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}$　b. $1-\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}$

取,至少取得 1 白球的或然率是多少? 若取出後不放入,即取第 2 球,至少取得 1 白球的或然率是多少?

2. 有獵人甲、乙、丙、丁,他們射中的機會順次為 $\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{4}{5}$. 今使四人同射 1 兔,問射中的機會怎樣?

3. 甲事出現的或然率是 p_1,乙事出現的或然率是 p_2.

(1) 甲、乙都出現的或然率怎樣? $P_1 \times P_2$

(2) 甲出現乙不出現的或然率怎樣? $P_1(1-P_2)$

(3) 甲不出現乙出現的或然率怎樣? $(1-P_2)P_2$

(4) 甲、乙都不出現的或然率怎樣? $(1-P)(1-P_2)$

(5) 甲、乙至少有一出現的或然率是多少? P_1+P_2

(6) 甲、乙至少有一不出現的或然率是多少?

$(1-P_1)+(1-P_2)$

② $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{120}$

射中的机会 $1-\frac{1}{120}=\frac{119}{120}$

第十九章

行　列　式

1. 行列式　行列式已在第十章裏講過,就是一種代數式的簡寫,如

(一) $a_1b_2-a_2b_1$ 簡做 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$,

(二) $(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2)$
$-(a_3b_2c_1+a_1b_3c_2+a_2b_1c_3)$

簡做 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

(三) $(a_1b_2c_3d_4+\cdots\cdots)-(a_4b_3c_2d_1+\cdots\cdots)$

簡做 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$,

各原式都叫行列式的**展式**.

展式各項必含各行元素各列元素且各限於一:如(二)的 $a_1b_2c_3$ 裏, a_1 是第 1 行第 1 列元素,

b_2是第2行第2列元素,c_3是第3行第3列元素;$a_3b_2c_1$裏,a_3是第1行第3列元素,b_2是第2行第2列元素,c_1是第3行第1列元素.

若組成各項的元素,照字母順序排列時,遇一個大數碼在一個小數碼後,叫一逆置,如$a_1b_2c_3$的逆置數爲0,$a_1b_3c_2$的逆置數爲1(2在3後),$a_2b_3c_1$的逆置數爲2(1在2和3之後),又照數碼大小排列時,遇一字母和他字母次序顚倒,也叫一逆置,如$a_1b_2c_3$的逆置數爲0,$a_1c_2b_3$的逆置數爲1(b在c後),$c_1a_2b_3$的逆置數爲2(a和b都在c後).逆置數爲0或偶數的各項都是正項,爲奇數的,都是負項,他們包括前講含各行一元素各列一元素的一切項.

習題

1. 試說三級行列式的展式有$(3\times2\times1)$項的理由.

2. 試說四級行列式的展式有$(4\times3\times2\times1)$項的理由.

3. 在上面三級行列式的展式裏,含下各組元素的,誰是正項,誰是負項?

(1) $a_3b_1c_2$. (2) $a_3b_2c_1$. (3) $a_2b_1c_3$.

4. 在上面四級行列式的展式裏,含下各組元素的,誰是正項,誰是負項?

(1) $a_1b_2c_3d_4$. (2) $a_4b_3c_2d_1$.

(3) $b_1d_2a_3c_4$. (4) $c_1a_2d_3b_4$

5. 試照字母順序排列正項或負項元素,將相隣兩數碼交換,研究逆置數有何變化? 又不相鄰兩數碼交換,怎樣?

6. 試照數碼大小排列正項或負項元素,將相鄰兩字母交換,研究逆置數有何變化? 又不相隣兩字母交換,怎樣?

7. 試顚倒正項各元素,研究字母逆置數與數碼逆置數的和.

8. 試顚倒負項各元素,研究字母逆置數與數碼逆置數的和.

2. <u>高級行列式和低級行列式的關係</u> 三級行列式,可以用二級行列式來表示,如

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$的展式裏,含$a_1$的項,除$a_1$外,其餘部份

就是$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$的展式,含$a_2$的項,除$a_2$外,其餘部份

就是 $-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 的展式(因這行列式 b_1c_3 項是正項,原行列式 $a_2b_1c_3$ 項是負項,....),含 a_3 的項,除 a_3 外,其餘部份就是 $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ 的展式,所以

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{或}\quad a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

仿此,四級行列式也可用三級行列式來表示,如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{或}\ a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

高級行列式都可用各低級行列式來表示.

習題

試用二級行列式表下各三級行列式:(1—6)

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix}$.

試用三級行列式表下各四級行列式:(7—12)

7. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} e & f & g & h \\ e & f & g & h \\ i & j & h & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} a & b & a & d \\ e & f & e & h \\ i & f & i & l \\ m & n & m & p \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} a+e & b+f & c+g & d+h \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} a & b & c-a & d \\ e & f & g-e & h \\ i & j & k-i & l \\ m & n & o-m & p \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} ra & b & c & d \\ re & f & g & h \\ ri & j & k & l \\ rm & n & o & p \end{vmatrix}$.

13. 試用二級行列式表第 7 題的行列式.

14. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f & g & h \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = ?$。

15. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & a & d \\ e & f & e & h \\ i & j & i & l \\ m & n & m & p \end{vmatrix} = ?$。

16. $r\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = ?$。

17. $\begin{vmatrix} a & o & o & o \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = ?$。

18. $\begin{vmatrix} a & o & o & o \\ o & f & g & h \\ o & j & k & l \\ o & n & o & p \end{vmatrix}=?$

3. 行列式定理　從前節知道:

(一)各行元素都移到相當列,行列式的值不變;如

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & e & i & m \\ b & f & j & n \\ c & g & k & o \\ d & h & l & p \end{vmatrix}.$$

(二)因爲 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}+g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}=d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}-a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}+g\begin{vmatrix} e & f \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$=-a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}+d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}-g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = g\begin{vmatrix} e & f \\ b & c \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} h & i \\ b & c \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} h & i \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$= -a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} - g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix},$$

知道:任二行或任二列元素順次交換,行列式的絕對值不變而符號相反.

(三)有二行或二列元素全同的行列式,值都爲零.

(四)有一行或一列元素都是零的行列式,値都爲零.

(五)以某數乘或除任一行或任一列元素,和乘或除行列式一樣.

(六)以任二行或任二列元素順次兩兩的和或差代其中一行或一列的元素,行列式的值也不變.但餘一行或餘一列的元素,也能先以某數去乘或除而後再求和差.

4. 行列式的化簡　用前節定理(五)、(六)使一行或一列的元素祗剩一個不是零,就能化高

級行列式爲低級行列式.不化做低級行列式時,用這兩條定理,也可以使計算簡便.

例 1. 化簡 $\begin{vmatrix} 20 & 6 & 4 \\ 15 & 7 & 2 \\ 30 & 8 & 3 \end{vmatrix}$,使第 1 行元素無公約數.

(解) $$\begin{vmatrix} 20 & 6 & 4 \\ 15 & 7 & 2 \\ 30 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\times5 & 6 & 4 \\ 3\times5 & 7 & 2 \\ 6\times5 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

例 2. 化簡 $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 6 & 4 \\ \frac{1}{3} & 7 & 2 \\ \frac{1}{4} & 8 & 3 \end{vmatrix}$,使第一行元素變爲整數.

(解) $$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 6 & 4 \\ \frac{1}{3} & 7 & 2 \\ \frac{1}{4} & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{6}{12} & 6 & 4 \\ \frac{4}{12} & 7 & 2 \\ \frac{3}{12} & 8 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 4 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

例 3. 化簡 $\begin{vmatrix} 20 & 6 & 4 \\ 15 & 7 & 2 \\ 30 & 8 & 3 \end{vmatrix}$,使第 1 行元素的絕對值變小.

(解) $\begin{vmatrix} 20 & 6 & 4 \\ 15 & 7 & 2 \\ 30 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 4-4 & 6 & 4 \\ 3-2 & 7 & 2 \\ 6-3 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

$= 5\begin{vmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \end{vmatrix}$ 或 $5\begin{vmatrix} -4 & 6 & 4 \\ -1 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

例 4. 化簡 $\begin{vmatrix} 20 & 6 & 4 \\ 15 & 7 & 2 \\ 30 & 9 & 3 \end{vmatrix}$,使成二級行列式.

(解) $\begin{vmatrix} 20 & 6 & 4 \\ 15 & 7 & 2 \\ 30 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\begin{vmatrix} 12 & 6 & 4 \\ 9 & 7 & 2 \\ 18 & 9 & 3 \end{vmatrix}$

$= \frac{5}{6}\begin{vmatrix} 12 & 12 & 4 \\ 9 & 14 & 2 \\ 18 & 18 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{6}\begin{vmatrix} 0 & 12 & 4 \\ -5 & 14 & 2 \\ 0 & 18 & 3 \end{vmatrix}$

$= \frac{5}{6}\times 5\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 18 & 3 \end{vmatrix} = 25\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$.

習　題

化簡下列各行列式,求牠的值: (1–8)

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 \\ 11 & 9 & 5 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \\ 0 & 11 & 53 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} a & b & o \\ o & b & c \\ a & o & c \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} l & m & n \\ m & n & l \\ n & l & m \end{vmatrix}$.

解下各組聯立方程式: (9–16)

9. $\begin{cases} ax+by=2 \\ bx+cz=2 \\ cz+ax=2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} lx+my+nz=0 \\ mx+ny+lz=0 \\ nx+ly+mz=0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ x-2y+z=2 \\ 3x-y-z=3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x-3y+4z=11 \\ 3x+2y+5z=21 \\ x+3y+7z=20 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 7x+8y+9z=72 \\ 9x+8y+7z=72 \\ 11x+9y+5z=75 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{5}{z}=20 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=4 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}-\dfrac{1}{z}=16 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{4}z=14 \\ \dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{6}y+\dfrac{1}{7}z=7 \\ x+y+z=44 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x+5y+6z=2 \\ 7x+9z=-2 \\ y+153z=-152 \end{cases}$

17. 以 D_4 和 A_1、A_2、A_3、A_4 代 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$

和 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$、

$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$，試證:

(1) $D_4=a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3-a_4A_4$;

$$(2)\ b_1A_1-b_2A_2+b_3A_3-b_4A_4=\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0;$$

$$(3)\ c_1A_1-c_2A_2+c_3A_3-c_4A_4=\cdots\cdots\cdots\cdots=0;$$

$$(4)\ d_1A_1-d_2A_2+d_3A_3-d_4A_4=\cdots\cdots\cdots\cdots=0.$$

(注意) A_1、A_2、A_3、A_4 順次叫 a_1、a_2、a_3、a_4 的子行列式.

18. 試證解聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1w=k_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2w=k_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3w=k_3 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4w=k_4 \end{cases}$

各式順次乘以 $A_1,-A_2,A_3,-A_4$ 相加,可得 x 的值.

19. 試彷前題法,求前題裏 y、z、w 的值.

20. 試用第 12、13、16 三題,實驗前兩題的解法.

第二十章

複數（虛數）

1. 複數之起源　數系之所以必須擴充,完全由於實際生活的需用,這在第一章裏面已經講過.現在再以解方程式的眼光論數系必須擴充之理於下:

假設我們祇有正整數,就不能解 $4x-5=0$ 的方程式.要使這個方程式能够有解,就不得不增加分數.

祇有正整數和正分數,雖然能解 $4x-5=0$ 但是不能解 $4x+5=0$, 要使這個方程式能够有解,就不可不增加有號數或正負數.

祇有正負的整數和分數,雖然能解 $ax+b=0$ (a,b 都是正負的整數或分數),但是不能解 $x^2-2=0$, 要使這個方程式有解,就不得不增加無理數,使數系成爲實數系.

祇有實數系的數,也不能解 $x^2+4=0$ 或 $x=\pm\sqrt{-4}$,因爲這個記號"$\sqrt{-4}$"是代表自己相乘等於"-4"的一個數,查實數系裏面的數,無論"$+2$"

或"-2",自己相乘都等於 4,並不等於"-4",所以在十六世紀以前,數學家都認這種方程式沒有根,到了十七世紀,法國數學家笛卡兒纔認這種方程式有虛根,分一切方程式的根為實根和虛根.德國數學家高斯 (Gauss 1777－1855) 以 i 代替 $\sqrt{-1}$,把 $\sqrt{-4}$ 寫為 $\sqrt{-1}\sqrt{4}$ 或 $i2$,於是承認 $i2$ 也是一個數,叫做純虛數,並且把所有實數都看作是 i 的係數,把 i 看作是新發生的單位,叫做虛數單位(實數的單位為 1, 1 加 1 為 2, 2 加 1 為 3, ……由是擴充至分數,無理數及有號數),由是得一串純虛數如下:

$$\cdots\cdots-2i\cdots\cdots-i\cdots\cdots0\cdots\cdots i\cdots\cdots2i\cdots\cdots$$

這一串的純虛數,祇要把 i 加以適當的定義,如下面所述,他的運算律就可以和實數一樣.

i 的定義: $i=\sqrt{-1}$, $i^2=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=-1$.

有了 i 的定義和上面一串的純虛數凡方程式 $ax^2+b=0$ 都可以有根,譬如 $x^2+4=0$ 的根是 $\pm2i$,

有了純虛數,雖然可以使這種方程式 $ax^2+b=0$ 都有根,但是不能使 $ax^2+bx+c=0$ 一定有

根.譬如 $x^2-4x+29=0$ 的根是 $2+5i$ 和 $2-5i$. 這兩個根並不是實數也並不是純虛數,乃由實數和純虛數兩樣數結合而成.由是可知要使 $ax^2+bx+c=0$ 在任何情形下都有根,就不能沒有這樣形式 $A+Bi$ 的數.(A,B 都是實數)這樣形式 $A+Bi$ 的數,叫做複數或虛數. A 叫做複數的實部, Bi 叫做複數的虛部.這樣的複數能包含一切實數及純虛數,使實數和純虛數都是他的特例.譬如 $B=0$ 就得實數;$A=0$ 就得純虛數.

複數能使一切代數方程式(無論方程式的係數是實數或虛數)都有根,因此複數也叫做代數數,代數數的分類如下:

$$
\begin{array}{c}\text{代數數}\\ A+Bi\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\begin{array}{c}\text{實數}\\ (\text{以}1\text{爲單位})\\ B=0\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\text{正數}\left\{\begin{array}{l}\text{正有理數}\left\{\begin{array}{l}\text{正整數}\\ \text{正分數}\end{array}\right.\\ \text{正無理數}\end{array}\right.\\
\text{負數}\left\{\begin{array}{l}\text{負有理數}\left\{\begin{array}{l}\text{負整數}\\ \text{負分數}\end{array}\right.\\ \text{負無理數}\end{array}\right.
\end{array}
\right.\\
\begin{array}{c}\text{純虛數}\\ (\text{以}i\text{爲單位})\\ A=0\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\text{純虛正數}\left\{\begin{array}{l}\text{純虛正有理數}\\ \text{純虛正無理數}\end{array}\right.\\
\text{純虛負數}\left\{\begin{array}{l}\text{純虛負有理數}\\ \text{純虛負無理數}\end{array}\right.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

2. 複數的運算律

複數的概念,也像實數一樣,係根據事實的需要而發生,他的運算祇須記住下面兩條基本假設就和一切實數一樣的運算:

基本假設 I.　複數 $A+Bi$ 祇有 A,B 都等於 0 的時候纔等於 0.

基本假設 II.　複數運算律要記住 $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$, 其他都和實數一樣.(但是 $\sqrt{-a}\,\sqrt{-b}\neq\sqrt{ab}$)

3. <u>複數的四則運算</u>　根據上面基本假設 II,即得複數四則運算如下:

複數加減法.

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

複數乘法

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

複數除法

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

(注意) 由上面的運算,可知兩個複數的和差積商仍舊是一個複數.

(注意) $c+di$ 和 $c-di$ 兩複數祇有虛部前面的符號相反,其餘都相同,叫做共軛複數,共軛複數的積是實數,這是要注意的.

4. 複數相等的定理 兩個複數,祇有實部與實部,虛部與虛部各相等的時候纔能相等.

(證明) 若 $a+bi=c+di$,

則 $$a-c+(b-d)i=0$$

由基本假設 I,得

$$a-c=0 \text{ 及 } b-d=0$$

$$\therefore a=c, \text{ 及 } b=d,$$

習題

1. 寫出下列各複數的共軛複數.

$5+4i,\quad 7-6i,\quad -8+3i,\quad -7-5i.$

2. 求證 $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$

3. 求下列各式之值.

$(4-5i)(4+5i)$;$(12+14i)(12-14i)$.

4. 求下列各式的結果.

$(3+5i)+(7-4i)+(4-3i)-(6-2i)$;

$(15-6i)-(11-3i)+(4-7i)(4+7i)$;

$(9+15i)(7-9i)4i+(i+1)(i-1)+(1+i)(1-i)$;

$\frac{5+7i}{3-6i}$; $\frac{3+7i}{9+5i}$; $\frac{2-7i}{6-5i}$.

5. 求證 i 的奇數冪常常等於 i 或 $-i$.

6. 求證 i 的偶數冪常常等於 1 或 -1.

7. 問 $i^5+i^9-i^{13}$ 的值是多少?

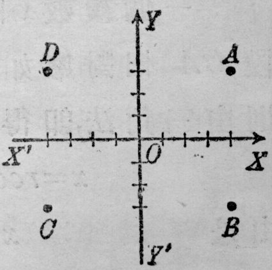
8. 問 $i^{41}+i^{57}+i^{64}-i^{93}$ 的值是多少?

9. 問下面等式的 x,y 等於多少,纔能使這個等式 $x+y+(x-y)i=4+2i$ 成立(應用基本假設 I 即得).

10. 求出下列各方程式的根,並以所得的根代入原方程式以驗算.

$$x^2+3=0,\ (x-3)^2+5=0,\ 4x^2+4x+7=0$$

5. 複數的圖示法　前面已經講過,一切實數都可以用有向直線上面的點代表他,直線上面的點和實數都是一對一相應的,現在講複數的圖示法也和實數相似,一切複數都和平面的點一對一的相應,一個複數 $x+$



yi 的值常隨 x, y 而變,若以 x, y 爲平面上一點的坐標,於是這一點 (x, y) 就可以代表複數 $x+yi$, 譬如 $4+3i$, $4-i3$, $-4-3i$, $-4+3i$ 等各與 A, B, C, D 四點相應.這四點就各自代表上面四個複數.

以原點 O 和 A, B, C, D 四點相連結,即得 OA, OB, OC, OD 四個有向線段各和上面四個複數一對一的相應,所以複數圖示法也和實數一樣的有兩種,即點和有向線段.

一個複數 $x+yi$,若 $y=0$,就成爲實數 x,這些實數 x 和橫軸的點或有向綫段是一對一相應的.因此橫軸也叫做實數軸或實軸.依同樣道理,若 $x=0$,複數 $x+yi$ 就成爲純虛數 yi,這些純虛數 yi 和縱軸的點或有向線段一對一的相應,因此縱軸也叫做純虛數的軸或虛軸.

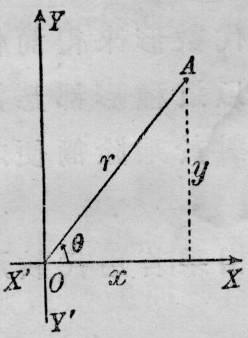
6. 複數的代數形和極形

一個複數 $x+yi$,若和平面一點 A 或有向綫段 OA 相對應如甲圖所示,
則由三角法,即得

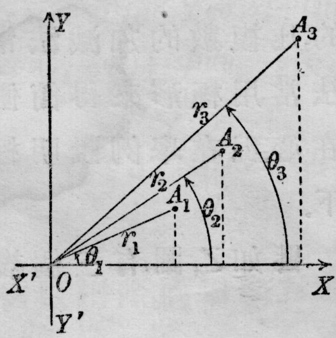
$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta,$$

由是
$$x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

甲　圖



乙　圖



於是一個複數可以用 $x+yi$ 或 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 兩種形式表示出來,前一種叫做代數形,後一種叫做極形. r 係表示 OA 的長,永遠是正數,因此 r 叫做複數的絕對值或模. θ 係表示 OA 和 x－軸所夾的角叫做複數的方向角或幅. $\cos\theta+i\sin\theta$ 叫做複數的方向因子.

凡知道一個複數的極形爲 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$,就可以寫出這個複數的代數形的 x 和 y,即 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

反之,凡知道一個複數的代數形爲 $x+yi$,

他的極形也可以寫出來,即

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=arctg\frac{y}{x}$$

複數的極形和代數形,在運算上都是很重要的,凡複數的加減法常用代數形來得簡便,乘除法常用極形來得簡便,所以這種形都應當牢記在心.現在舉例說明極形對於乘除簡便之處如下.

譬如乙圖,有三個複數相乘,若用代數形,即得

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)(x_3+iy_3)=x_1x_2x_3-y_1y_2x_3-x_1y_2y_3-x_2y_1y_3+i(x_1x_3y_2+x_2x_3y_1+x_1x_2y_3-y_1y_2y_3)$$

若用極形,即得

$$r_1(cos\theta_1+isin\theta_1)r_2(cos\theta_2+isin\theta_2)r_3(cos\theta_3+isin\theta_3)$$
$$=r_1r_2r_3[cos\theta_1cos\theta_2-sin\theta_1sin\theta_2+i(sin\theta_1cos\theta_2+cos\theta_1sin\theta_2)][cos\theta_3+isin\theta_3]$$
$$=r_1r_2r_3[cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+isin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)]$$

由上面兩個結果的比較,可知代數形不如極形來得簡單,若用極形可得一法則如下.

複數相乘法則: 複數相乘,所求積的絕對值等於各因數絕對值相乘,所求積的方向角等於各

因數方向角之和.

兩個複數相除,若用極形來運算,卽得

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}\times\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\times\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

由是得

複數相除法則 兩個複數相除,祇須絕對值相除,方向角相減卽得.

7. 特摩氏公式 $r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

這個公式是特摩氏 (DeMoivre1667－1754) 發明的,所以叫做特摩氏公式.

如若 n 是正整數,祇要用複數相乘的法則,就可以證明這個公式是眞的,如若 n 是負整數,譬如 $n=-p$, 就要用下面的方法來證明.

因爲 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}=\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$$=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$$

所以 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-p}=[(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}]^p$

$$=[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^p=\cos(-p\theta)+i\sin(-p\theta).$$

如若 n 是分數,譬如$n=\frac{p}{q}$,其證法如下.

因為 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{q}}=\left[\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}=$ $\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}$, 由是得

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}=\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^p=$$

$$\cos\frac{p}{q}\theta+i\sin\frac{p}{q}\theta.$$

由是可知無論 n 是正負有理數,特摩氏公式永遠是眞.

8. 複數的應用 複數對於物理學方面應用很多,尤其對於力學和電學方面,祇因這些應用都超出本書程度以外,所以這裏不提,下面所舉的例都是屬於數學本身的應用並且合於本書程度的.

例 1. 解 $x^3-1=0$

(解) 第一法. 把原方程式寫為 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

求得三根: $1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

第二法. 把原方程式寫為 $x^3=1$, 或 $x=1^{\frac{1}{3}}$

即求 1 的三次根.現在用特摩氏公式得

$$1^{\frac{1}{3}}=[cos(0^\circ+k360^\circ)+isin(0^\circ+k360^\circ)]^{\frac{1}{3}}$$

$$=cos\frac{0^\circ+k360^\circ}{3}+isin\frac{0^\circ+k360^\circ}{3}$$

現在令 $k=0,1,2$, 卽得 1 的三次根爲

$$1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

（注意）因爲 $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ 的平方等於 $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, 而 $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ 的平方也等於 $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, 所以若命 $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\omega$, 則 $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\omega^2$, 由是得 1 的三次根爲 ω^3,ω^2,ω.

依同樣道理 8 的三次根爲 $2,2\omega,2\omega^2$. 64 的三次根爲 $4,4\omega,4\omega^2$.

例 2. 求 $(3+i\sqrt{3})^4$ 之值

（解）把 $(3+i\sqrt{3})$ 寫爲極形, 卽

$$3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}(cos30^\circ+isin30^\circ)$$

由特摩氏公式得

$$(3+i\sqrt{3})^4=[2\sqrt{3}(cos30^\circ+isin30^\circ)]^4$$

$$=144(cos120^\circ+isin120^\circ)$$

$$=-72+72\sqrt{3}i.$$

例 3. 求 $\sqrt[3]{-2+2i}$ 之值.

（解）把 $-2+2i$ 寫爲極形, 卽

$$-2+2i=2\sqrt{2}(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$$

由特摩氏公式,得

$$\sqrt[3]{-2+2i}=(-2+2i)^{\frac{1}{3}}$$

$$=[2\sqrt{2}\{\cos(135^\circ+k360^\circ)+i\sin(135^\circ+k360^\circ)\}]^{\frac{1}{3}}$$

$$=\sqrt{2}[\cos(45^\circ+k120^\circ)+i\sin(45^\circ+k120^\circ)]$$

令 $k=0,1,2$, 卽得三個根如下.

$1+i$, $\sqrt{2}(\cos 165^\circ+i\sin 165^\circ)$, $\sqrt{2}(\cos 285^\circ+i\sin 285^\circ)$

習題

應用特摩氏公式,求出下列各式的冪或根.

1. $(1+i)^8$ **2.** $(4+i4)^2$

3. $\sqrt{2-2i}$ **4.** $\sqrt{-2+2\sqrt{3}i}$

5. $(3+\sqrt{3}i)^6$ **6.** $2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)^6$

7. $\sqrt{(\cos 60^\circ+i\sin 360^\circ)}$ **8.** $\sqrt[3]{i}$

9. $\sqrt[4]{\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ}$

求下列各方程式的根.

10. $x^4-16=0$. **11.** $x^6-1=0$.

12. $x^8-1=0$. **13.** $x^5-32=0$.

14. $x^7-128=0$.

第二十一章

方程式論

1. <u>n 次整式</u> 設 n 是正整數,$a_0,a_1,a_2,\cdots a_n$ 是任意數,但是不含 x,並且 $a_0 \neq 0$;於是

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

就叫做 x 的 n 次整式或 x 的 n 次多項式,在本章裏,常常用 $f(x)$ 代表 x 的 n 次多項式.

習 題

把下列各式和上面一般的多項式比較,求出 $a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots a_n$ 之值.並求出 $f(1),f(2)$之值.

1. $f(x)=3x^6+\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{5}x^2+7$

2. $f(x)=\frac{5}{4}x^7+\frac{8}{9}x^5-13x^3-\frac{13}{14}x^2+(2+i)x$

3. $(3+i\sqrt{3})x^5+7x^4-(5+i2)x+4$

2. <u>n 次整式的值</u> 求 n 次整式的值,除把 x 的值代入式中以外,還有簡便的算法.現在爲學者容易了解這個方法起見,姑舉三次整式爲例

設 $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ······························(1)

並設$x=t$,問$F(t)$的值是多少?

要計算$F(t)$的值,先以 t 乘 a 又加 b,即$at+b$

令 $at+b=f$ ……………………………………(2)

再以 t 乘 f 又加 c,即$tf+c$

令 $tf+c=at^2+bt+c=g$ ………………………(3)

依同樣方法,再算一次,命所得結果為 h,即

$tg+d=at^3+bt^2+ct+d$ ……………………………(4)

於是 $h=F(t)$ 即所求的值.

上面的算法也可以排列如下.

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ & at & ft & gt \\ \hline & f & g & h \end{array} \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

像(5)式這樣排列起來計算,叫做綜合算法

例 1. 設$F(x)=x^3-4x^2+5x+7$, 求$F(o)$,$F(1)$,$F(3)$的值

(解) 求$F(o)$, $F(1)$ 的值,不必用綜合算法來求.因為$F(o)$就是常數項 7,即 $F(o)=7$. $F(1)$就是各項係數之和即$F(1)=1-4+5+7=9$.至於$F(3)$的值,如若以 3 代入 $F(x)$來算,就很麻煩.即 $F(3)=27-36+15+7=13$. 現在採用綜合算法如下.

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -4 & 5 & 7 \\ & 3 & -3 & 6 \\ \hline & -1 & +2 & 13 \end{array}$$

(注意) 綜合算法有一點應當特別注意,即 x 的係數必須按 x 次數的遞降來排列,倘若中間有缺項,就應當把 0 補上,現在舉例如下.

例 2. 設 $F(x)=2x^4-2x+3$, 求 $F(3)$ 的值.

(解)

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ & 6 & 18 & 54 & 156 \\ \hline & 6 & 18 & 52 & \boxed{159=F(3)} \end{array}$$

習題

1. 設 $F(x)=4x^5-3x^3+2x-9$,求 $F(2)$,$F(3)$ 的值.

2. 設 $F(y)=4y^5-3y^3+2y-9$,求 $F(2)$,$F(3)$ 的值.

3. 設 $f(x)=7x^4+4x^2-6x-10$,求 $f(0)$,$f(1)$,$f(2)$,$f(3)$的值.

4. 設 $f(x)=8x^7-9x^6+5x^3-4x^2+3x+12$,求 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$的值.

3. 多項式的圖象　多項式 $f(x)$的係數倘若是實數,他的值的變遷可以用圖象表示出來.現在舉例如下.

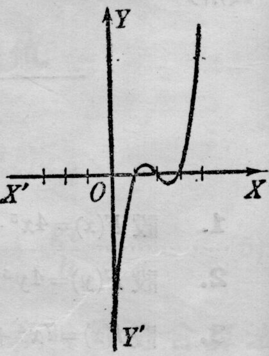
例 1. 作 $y=f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 的圖象,用綜合

算法求出多項式各值如下表.

x		-2	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$y=f(x)$		-60	-24	-13.12	-6	-1.875	0	0.375	0	-0.375	0

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & +11 & -6 & \underline{0.5} \\ & 0.5 & -2.75 & +4.125 & \\ \hline & -5.5 & +8.25 & -1.875 & \therefore F(0.5)=-1.875 \end{array}$$

把表中各行"數對"的點一一畫出來,再把這些點連結起來,即得求的圖象,表中數對越多,所得圖象越眞實.



(注意) 根據這個圖象,可得下列幾種重要性質.

1. 當 $x=1, 2, 3$ 時, $f(x)$ 的值是零,這種點都在 x 軸上,所以 $1, 2, 3$ 各數叫做 $f(x)$ 的"零點"或"零值". $f(x)$ 的零值就是 $f(x)=0$ 的根.

2. 當 $x<1$, 及 $2<x<3$ 時候, fx 是負值.

3. 當 $1<x<2$ 及 $x>3$ 時候, $x(f)$ 是正值.

4. 如若 $f(x_1)>0$, $f(x_2)<0$; 那麼在 x_1 及 x_2 中間必有一數代入 $f(x)$ 等於 0.

習　題

把下面各函數的圖象作出來,並且把實根也畫出來.

1. x^3-x-6　　**2.** $3x^4-16x^3+18x^2-2$

3. x^4-3x^2+5x-6　　**4.** $x^4-2x^3-7x^2+8x+12$

4. 因子定理　倘若 r 是 $f(x)=0$ 的根,那麼 $x-r$ 是 $f(x)$的因子.

(證明) 由餘數定理,可知以 $x-r$ 除 $f(x)$ 的餘數爲 $f(r)$,既然 $f(r)=0$, 卽餘數等於 0,所以 $x-r$ 是 $f(x)$ 的因子.

5. 方程式的基本定理　在方程式論上,有幾個極基本的定理,看起來很容易明白,但是要證明反覺麻煩難懂,現在爲免除難懂起見,就寫在下面不待證明了.

定理 1.　x 的 n 次方程式,無論 x 的係數是實數或複數,至少有一個實根或虛根.(高斯於 1797 年首先證明這個定理).

定理 2.　x 的 n 次方程式恰有 n 個根,也不多也不少.

6. 虛根定理　x的 n 次方程式,倘若 x 係數都是實數,並且 $a+bi$ 是他的根,那麼 $a-bi$ 也

是他的根.

(證明) 既然$a+bi$是方程式.

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

的根,那麼$a+bi$代入(1)式仍舊能使(1)式成立的.現在應用二項式定理把 $a+bi$ 的冪都展開,命實部爲P,虛部爲Qi,即得(1)式爲

$$P+Qi=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由是得　$P=0$　$Q=0$　(複數基本假設 I)

現在把 $a-ib$ 代入(1)式的左邊,其結果好像先把$a+ib$代入(1)式的左邊,再把$+i$換爲$-i$一樣.因此把$a-ib$代入(1)式的左邊可得

$$P-iQ$$

由上面證明$P=0$,　$Q=0$,

所以　$P-iQ=0$

即$a-ib$代入(1)式也能使(1)式成立,即$a-ib$也是(1)式的根.

7. <u>笛卡兒符號律</u>　一個 x 的多項式,其中連續兩項的符號倘若是相反,我們就說這個多項式有一個"改"號 (variation in sign) 譬如

$$5x^4-x^3+2x^2+3x-5$$

就有三個改號,我們為易於檢查改號起見,常把多項式的符號特別寫為＋－＋＋－.

以 $x-1$ 乘上面的多項式,即得

$$5x^5-6x^4+3x^3+x^2-8x+5$$

這個多項式就有四個改號.由是可知改號和多項式的零值有密切關係.這個關係如何,可看下面的笛卡兒符號律.

笛卡兒符號律　x 的係數為實數的方程式 $f(x)=0$,有幾個改號就有幾個正根,或改號多於正根,但所多的數常常是偶數.

(證明)　要證明這個符號律,就是要證明,以 $x-r$ 乘多項式 $f(x)$,增加一個正根,同時所得積的改號也增加,所增加的數都是奇數.

現在為易於檢查改號起見,祇把 $f(x)$ 的符號寫在下面.

$$+\cdots\cdots+-\cdots\cdots-+\cdots\cdots+-\cdots\cdots-+\cdots\cdots+$$

＋後面的點……表示＋,－後面的點……表示－.

設 x 是正根,以 $x-\alpha$ 乘 $f(x)$,得積的符號如下.

$$\begin{array}{l}
+\cdots\cdots+-\cdots\cdots-+\cdots\cdots+-\cdots\cdots-+\cdots\cdots+\\
\quad -\cdots\cdots-+\cdots\cdots+-\cdots\cdots-+\cdots\cdots+-\cdots\cdots-\\
\hline
+\pm\cdots\cdots-\pm\cdots\cdots+\pm\cdots\cdots-\pm\cdots\cdots+\pm\cdots\cdots-
\end{array}$$

上面的±是表示+或−不能一定的意思,±後面的點………就是±的意思,所以也是表示不定的意思.$(x-\alpha)f(x)$ 的改號除了末尾增加一個及±不定外,其餘都與 $f(x)$ 的改號一一相應,所以 $(x-\alpha)f(x)$ 的改號比 $f(x)$ 的改號至少要多一個.$f(x)$ 的＋＋＋或－－－在 $(x-\alpha)f(x)$ 裏面都是不定,這些不定也許是＋＋＋或－－－或＋－＋,或－＋－,如若是＋－＋或－＋－改號就增加兩個,連末尾一個就要增加三個.依此推想,可知 $(x-\alpha)f(x)$ 的改號比 $f(x)$ 的改號要多一個,三個,五個,…….這就是,一個方程式如若增加一個正根,就要增加奇數個改號.換言之,一個方程式的正根常常比改號的數來得少,並且所少的數常常是偶數.

系 1. 要研究 $f(x)=0$ 負根的多少,祇要研究

$$f(-x)=0 \text{的正根有多少.}$$

例 1. 問 $x^3+3x+8=0$ 的根的性質如何?

(解) 因為這個方程式沒有變號,所以沒有正根.

因為 $x^3+3x-8=0$ 祇有一個變號,所以原方程式也祇有一個負根.由是原方程式有一個負的實根兩個虛根.

虚根成对

例 2.　問 $f(x)=x^4-3x^3+4x+9=0$ 的正負根有多少?

(解) 因爲 $f(x)$ 有兩個改號,而 $f(-x)$ 也有兩個改號,所以 $f(x)$ 至多有兩個正根,兩個負根.

例 3.　問 $f(x)=x^3+8x-12=0$ 的正負根有多少?

(解) 因爲 $f(x)$ 有一個改號,所以不能有一個以上的正根.又因爲 $f(-x)$ 沒有變號,所以沒有負根.由是 $f(x)$ 有兩個虛根一個正根.

習題

試研究下列各方程式正負根的多少.

1.　$x^3-3x^2-4x+19=0$.

2.　$5x^4+9x^2+3=0$.　皆虚根 因虚根为成对存在

3.　$x^n-1=0$. (設 n 爲奇數)　一个实根余为虚根

4.　$x^n-1=0$. (設 n 爲偶數)

5.　$x^3+1=0$.

6.　求證 $3x^6-2x^2-4x+3=0$ 至少有兩個虛根.

7.　求證 $x^8+4x^3+7x-10=0$ 有六個虛根並且祇有六個虛根.

8.　求證 $x^4-4x^3-7x^2+22x+41=0$ 沒有虛根.

8. <u>p 形方程式</u>　x 的 n 次方程式,普通都寫爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

因爲$a_0\neq 0$,所以又可以寫爲

$$x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\frac{a_2}{a_0}x^{n-2}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}x+\frac{a_n}{a_0}=0$$

設$\frac{a_1}{a_0}=p_1,\frac{a_2}{a_0}=p_2,\cdots\cdots$即得

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

這樣的方程式叫做p形方程式 (Equation in p-form),討論方程式的性質,其中有許多定理,用p形方程式要比一般方程式來得方便.所以p形方程式也是很重要的.

習　題

變下列各方程式爲p形方程式並指出$p_1,\cdots\cdots p_2$的值.

1.　$4x^4-3x^3-8x^2+12=0$.

2.　$8x^5+16x^3-9x-32=0$.

3.　$3x^6-4x^5-5x^4+6x^2+x+7=0$.

9. 有理根定理　p形方程式的係數倘若是整數,那麽p形方程式如若有有理根,這些有理根一定是整數,並且是p_n的因數.

(證明)　假設$\frac{a}{b}$是最簡分數,倘若$\frac{a}{b}$是p方形程式

的根,卽得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n+p_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}+\cdots+p_{n-1}\frac{a}{b}+p_n=0\cdots(1)$$

以b^{n-1}乘(1)式,卽得

$$\frac{a^n}{b}+p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}b+\cdots\cdots+p_{n-1}ab^{n-2}+p_nb^{n-1}=0.$$

或$\frac{a^n}{b}=-(p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}b+\cdots\cdots+p_{n-1}ab^{n-2}+p_nb^{n-1})\cdot\cdot(2)$

(2)式的右邊都是整數,但是左邊是分數,所以(2)式不能成立,卽係數爲整數的p形方程式,倘若有有理根,一定不是分數.

現在設c爲整數,並設c爲p形方程式的根,於是得

$$c^n+p_1c^{n-1}+p_2c^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}c+p_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

卽　$c^{n-1}+p_1c^{n-2}+p_2c^{n-3}+\cdots\cdots+p_{n-1}=-\frac{p_n}{c}\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)式左邊的數都是整數,所以要(4)式能成立非要c是p_n的因數不可.

習　題

求下列各方程式的有理根.

1.　$x^3-9x^2+23x-15=0.$

(解)　由笛卡兒變號律,可知這個方程式沒有負根.所以這個方程式如若有有理根一定不是 $-1,-3,-5$

或 -15,並且一定是 1, 3, 5 或 15.現在用綜合算法看這四個數,究竟那幾個是所求的根.

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -9 & +23 & -15 & \underline{1} \\
 & +1 & -8 & +15 & \\
\hline
 & -8 & +15 & 0 &
\end{array}$$

所以 1 是所求的根.依同樣方法得3,5也是所求的根.

2. $x^3-6x+11x-6=0.$

3. $x^4-5x^2+6=0.$

4. $x^3-4x^3-17x+60=0.$

5. $x^5-2x^4-2x+4=0.$

6. $x^3-3x^2-4x+12=0.$

10. <u>方程式的變換</u>　一個方程式,每每變換做別一個方程式,能使我們容易求根,或容易討論.所以這種變換是很重要的,我們常用的變換可分下列三種.

I. 把$\dfrac{x'}{m}$代入$f(x)=0$卽令$x'=mx$;由此得 x' 方程式的各根都各m倍於$f(x)=0$的根.

II. 以 $-x'$ 代入 $f(x)=0$, 由此得x' 方程式的根和 $f(x)=0$ 的根絕對值相等,符號相反.

III. 以 $x'+h$ 代入 $f(x)=0$，由此得 x' 方程式的根比 $f(x)=0$ 的根各少 h.

第一種變換法則　以 $m, m^2, m^3, \cdots\cdots$ 各乘已知方程式 $f(x)=0$ 的 $x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, \cdots\cdots$ 則所得新方程式的根將 m 倍於已知方程式的根.

譬如求一個方程式;要他的根 2 倍於已知方程式 $x^4-4x^3+3x^2+1=0$，祇須 $2, 2^2$，乘 $x^3, \cdots\cdots$ 卽得

$$x^4-2(4x^3)+2^2(3x^2)+2^3(o.x)+2^4=0,$$

卽
$$x^4-8x^3+12x^2+16=0$$

上面的法則是用下面的方法引導出來的，卽以 $x=\dfrac{x'}{m}$ 代入

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \cdots\cdots(1)$$

這個代入的結果就是

$$a_0\left(\frac{x'}{m}\right)^n+a_1\left(\frac{x'}{m}\right)^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\frac{x'}{m}+a_n=0$$

卽
$$a_0x'^n+ma_1x'^{n-1}+\cdots+m^{n-1}a_{n-1}x'+m^na_n=0$$

由是得上述法則.

第二種變換法則　求一個方程式，他的根和已知方程式的根絕對値相等，符號相反，祇須把已知方程式 x 的奇數次的符號改變卽得.(這

個法則祗要命 $m=-1$ 卽證明)

譬如 $x^4-2x^3-13x^2+14x+24=0$ 的根是 $2, 4, -1, -3$,現在把 x 的奇數次的符號變換,得 $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$ 於是這個方程式的根就是 $-2, -4, 1, 3$.

第三種變換法則 設以 $x-h$ 除 $f(x)$ 的餘數爲 R_n,所得的商爲 Q_1.又設以 $x-h$ 除 Q_1 的餘數爲 R_{n-1},商爲 Q_2.依此連續除 n 次,最後的商就是 a_0,餘數爲 $R_1, R_2, \cdots\cdots R_n$.於是方程式.

$$a_0x'^n+R_1x'^{n-1}+R_2x'^{n-2}+\cdots\cdots+R_{n-1}x'+R_n=0$$

的根就比 $f(x)=0$ 的根減少 h.

譬如求一個方程式,他的根比 $x^3-4x^2-3x+2=0$ 的根的值減少 2.其法如下.

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -4 & -3 & +2 & 2 \\
 & +2 & -4 & -14 & \\
\hline
1 & -2 & -7 & -12=R_3 & \\
 & +2 & 0 & & \\
\hline
1 & 0 & -7=R_2 & & \\
 & 2 & & & \\
\hline
1 & +2=R_1 & & &
\end{array}$$

所求方程式爲 $x^3+2x^2-7x-12=0$.

上面所述法則是用下面的方法導出來的.

以 $x=x'+h$ 代入，

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\cdots\cdots(1)$$

即 $a_0(x'+h)^n+a_1(x'+h)^{n-1}+\cdots\cdots$

$$+a_{n-1}(x'+h)+a_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

這個方程式的根比(1)的根要減少 h。

現在用二項式定理,把 $x'+h$ 的冪展開並且按 x' 的次數排列起來,即得.

$$a_0x'^n+A_1x'^{n-1}+A_2x'^{n-2}+\cdots\cdots+A_{n-1}x'+A_n=0\cdots\cdots(3)$$

以 $x-h$ 代入(3)式得

$$a_0(x-h)^n+A_1(x-h)^{n-1}+A_2(x-h)^{n-2}+\cdots\cdots$$

$$+A_{n-1}(x-h)+A_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

這個方程式應當就是(1)式.所以

$$A_n=R_n$$

$$A_{n-1}=R_{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_1=R_1.$$

習 題

把下面四個方程式照第一種變換法來變換.

1. $x^3+3x^2-7x-1=0,\ m=3.$

2. $x^3-\frac{x^2}{7}-\frac{8}{49}=0,\ m=7.$

3.　$x^4-10x^2-3x-2=0,\ m=-1.$

4.　$x^3-3x^2+10=0,\ m=-3.$

5.　把上面四個方程式照第二種變換法來變換.

把下面四個方程式照第三種變換法來變換.

6.　$2x^4-3x^2+4x-5=0,\ h=2.$

(解)

$$\begin{array}{rrrrrl}
2 & 0 & -3 & 4 & -5 & \underline{\mid\ 2} \\
 & 4 & 8 & 10 & 28 & \\
\hline
2 & 4 & 5 & 14 & 23=R_4 & \\
 & 4 & 16 & 42 & & \\
\hline
2 & 8 & 21 & 56=R_3 & & \\
 & 4 & 24 & & & \\
\hline
2 & 12 & 45=R_2 & & & \\
 & 4 & & & & \\
\hline
2 & 16=R_1 & & & & \\
\therefore & 2=a_0 & & & &
\end{array}$$

$\therefore$所求方程式爲 $2x^4+16x^3+45x^2+56x+23=0$

7.　$x^3-6x+5=0,\ h=3.$

8.　$x^5-6x^4+7.4x^3+7.92x^2-17.872x-0.79232=0,$

$h=1.2$

9.　$3x^4+9x^3+12x^2+8x+20=0,\ h=-2.$

10.　求 $108x^3-54x^2+45x-13=0$ 的有理根.

(解)　把原方程式寫爲 p 形,卽

$$x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{12}x-\frac{13}{108}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

把(1)式照第一種變換法來變換, $m=6$, 卽得新方程式爲 $x^3-3x^2+15x-26=0$ ......(2)

於是以 6 除(2)式的有理根,就是(1)式的有理根.

根據笛卡兒符號律,可知(2)式沒有負根,所以祇須把 1, 2, 13, 26 試試看,是不是(2)式的根.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & 15 & -26 & 1 \\ & 1 & -2 & 13 & \\ \hline 1 & -2 & 13 & -13 & \end{array}$$

$\therefore$ 1 不是(2)式的根.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & 15 & -26 & 2 \\ & 2 & -2 & 26 & \\ \hline 1 & -1 & 13 & 0 & \end{array}$$

因為 $x^2-x+13=0$ 沒有有理根,所以(2)式祇有一個有理根 2, 因此(1)式也祇有一個有理根 $\frac{2}{6}$ 或 $\frac{1}{3}$.

11. 求 $4x^3+2x^2-4x+1=0$ 的有理根.

12. 求 $6x^4-5x^2+1=0$ 的有理根.

13. 求下面兩個方程式的有理根.

$$4x^3-12x^2+15x-7=0$$

$$4x^3-8x^2+5x-1=0$$

11. 無理根求法(忽拏法) 一個方程式的無理根可以用忽拏氏的方法 (Horner's method) 求出他的近似值來,這個方法手續頗煩,現在舉例

說明如下.

例 1. 求 $x^4-2x^3+4x^2-15x+14=0$ 的實根.

(解) 第一步､先求有理根.

照前面有理根求法,可知這個方程式祇有一個有理根 2.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -2 & 4 & -15 & 14 & 2 \\
 & 2 & 0 & 8 & -14 & \\
\hline
1 & 0 & 4 & -7 & 0 &
\end{array}$$

其他三根就是下面方程式的根.

$$f(x)=x^3+4x-7=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

第二步 求無理根的近似值.

根據符號律,可知(2)式祇有一個正的實根,並且沒有負根.現在用忽拏法求這個正的實根如下.

I. 因為 $f(1)=-2<0$, $f(2)=9>0$ 所以 1 與 2 之間有一個實根.就是這個實根大於 1 小於 2.

II. 命 $h=1$,用第三種變換法把(1)式變換,

$$\begin{array}{rrrrl}
1 & 0 & 4 & -7 & \underline{|\,1} \\
 & 1 & 1 & 5 & \\
\hline
1 & 1 & 5 & -2=R_3 & \\
 & 1 & 2 & & \\
\hline
1 & 2 & 7=R_2 & & \\
 & 1 & & & \\
\hline
1 & 3=R_1 & & &
\end{array}$$

於是得第一次變換式為

$$f(x_1)=x_1^3+3x_1^2+7x_1-2=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

既然(1)式有一個根在 1 與 2 之間,所以(2)式應當有一個根在 0 與 1 之間以 0.0, 0.1, 0.2, ……0.9 各數代入(2)式得 $f(0.2)<0, f(0.3)>0$ 所以(2)式有一個根在0.2與0.3之間。

求這個根的位置,不一定要拿 0.0,0.1,……一一代入(2)式來試驗.祇須把(2)式前兩項撤去變爲

$7x_1-2=0$, 由這個方程式求得 $x_1=0.2$……於是以 0.2左右各數代入(2)來試驗,卽得

$$f(0.2)<0, \qquad f(0.3)>0.$$

既然(2)式有一個根在 0.2 與 0.3 之間,於是把(2)再照上面方法行第二次變換,卽

$$\begin{array}{llll|l}
1 & 3 & 7 & -2 & 0.2 \\
 & 0.2 & 0.64 & 1.528 & \\
\hline
1 & 3.2 & 7.64 & -0.472=R_3 & \\
 & .2 & .68 & & \\
\hline
1 & 3.4 & 8.32=R_2 & & \\
 & 0.2 & & & \\
\hline
1 & 3.6=R_1 & & &
\end{array}$$

由是得第二次變換式爲

$$x_2^3+3.6x_2^2+8.32x_2-0.472=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

既然(2)式的根在 0.2 與 0.3 之間,所以(3)式的根在 0 與 0.1 之間.現在把(3)式的 x 高次項撤去得

$$8.32x_2-0.472=0$$

由此得 x_2 在 0.05 與 0.06 之間,於是以 0.05,0.06 代入(3)式驗出(3)式的根在 0.05 與 0.06 之間.由是得所求方程式無理根的近似值爲 1.25……

現在把忽拏法進行的步驟概括的排列如下.

1	0	4	-7	1
	1	1	5	
1	1	5	-2	
	1	2		
1	2	7		
	1			
1	3	7	-2	0.2
	0.2	0.64	1.528	
1	3.2	7.64	-0.472	
	0.2	.68		
1	3.4	8.32		
	0.2			
1	3.6	8.32	-0.472	

12. n **次方程式的一般解法** 求 n 次方程式 $f(x)=0$ 的實根,其步驟如下.

I. 先試求正有理根 如若有正有理根,譬如 α,就用前面求有理根的方法把 α 的值求出來,並且把和這個根相應的因子 $x-\alpha$ 撤去,使原方程式變爲 $n-1$ 次的新方程式.

II. 試求新方程式的正無理根 用忽拏法

來求.

III. 把 $f(x)=0$ 變爲 $f(-x)=0$, 由 $f(-x)=0$ 求出正有理根和正無理根.

習　題

求下面各方程式的正根,精確到小數點後兩位爲止.

1. $x^3+4x^2+4x-98=0$.

2. $x^5-1200=0$.

3. $x^4-4x-2=0$.

4. $x^3-4x^2+x-1=0$.

5. $x^3+3x-20=0$.

6. $2x^4-3x^3+5x^2-4x+1=0$.

7. $3x^4+10x^3-9x^2-40x-13=0$

13. <u>方程式的代數解</u>　方程式的根如若能夠用代數式表示出來,那麼這個代數式就叫做這個方程式的代數解.譬如一次方程式 $ax+b=0$ 的代數解是 $-\frac{b}{a}$,又二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的代數解是.

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

方程式的代數解如若知道,祇須把係數代

入這個代數解就可以得到他的根,所以代數解對於求根是很有用處的.

三次和四次方程式的代數解,早在十六世紀已經求出,惟五次方程式的代數解雖經數百年之久,始終還是沒有求出來.到了1826年,挪威數學家阿培爾(Abel 1802－1829)根據代換羣理論(Theory of substitution group)纔證明一般的五次方程的根不能用係數的代數函數表示出來.依此推想,可知五次以上的方程式也沒有代數解.

因爲自五次以上的方程式沒有代數解,所以一般人就說自五次以上的方程式都不能解.其實"沒有代數解"未必就是"不能解"像五次方程式雖然沒有代數解,但是法國數學家愛米脫(Hermite 1822－1901)已經證明可以用楕圓函數來解.可知五次方程式並不是不能解,祇是不能用代數的運算來解.

14. 三次方程式的代數解　三次方程式的一般形式爲

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

把(1)式寫爲p形方程式卽得

$$x^3+Bx^2+Cx+D=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

假設 $x=y+k$,以 $y+k$ 代入(2)式即得 y 的三次方程式,這裏的 k 是一個還沒有決定的數,可以任意選擇,擇其能使 y 的三次方程式變爲簡單的形式.現在以

$$x=y+k,$$
$$x^2=y^2+2ky+k^2$$
$$x^3=y^3+3ky^2+3k^2y+k^3$$

代入(2)式,即得 y 的三次方程式.

$$y^3+(3h+B)y^2+(3k^2+2kB+C)y+k^3+Bk^2$$
$$+Ck+D=0 \cdots\cdots\cdots(3)$$

現在選 k 的值爲 $-\frac{B}{3}$, 即 $3k+B=0$

又令　$p=3k^2+2kB+C=C-\frac{B^2}{3}$

$$q=k^3+Bk^2+Ck+D=D-\frac{BC}{3}+\frac{2B^3}{27}$$

由是(3)式變爲

$$y^3+py+q=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由上面的結果可知以 $x=y-\frac{B}{3}$, 代入(2)式能使(2)式變爲(4)式,(4)式是三次方程式最簡單的標準形叫做已化三次方程式 (Reduced cubic equation)

已化三次方程式的解法如下:

設(4)式的根是兩個未知數 u,v 之和卽設

$y=u+v$……(5) 由此得

$$y^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$$

倘若 $u+v$ 是(4)式的根,那麼

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$$

卽 $$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)=-q\quad\cdots\cdots(6)$$

凡能適合(6)式的 u, v, 他的和都是(4)式的根,反之若 $u+v$ 是(4)式的根 u, v, 也能適合(6)式.可是一個方程式(6)不能決定兩個未知數 u, v, 要決定 u, v, 除(6)式以外還要第二個式,這第二個式原來可以隨意選擇,但是在這裏就要選擇能使他自身來得簡單又要能使(6)式變爲極簡單的值,根據這個理由,我們就選

$$3uv+p=0\quad\cdots\cdots(7)$$

爲第二方程式,以(7)式代入(6)式得

$$u^3+v^3=-q\quad\cdots\cdots(8)$$

由此得一結果如下:

倘若 uv 能適合(6)(7)或(7)(8)兩方程式;那

$u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

麼他的和 $u+\nu=y$ 就是(4)式的根,由是可知要解已化三次方程式(4)必須先要解(7)(8)兩方程式.

現在以(7)式的 ν 值代入(8)式,即得

$$u^3-\frac{p^3}{27u^3}=-q$$

或 $$u^6+qu^3-\frac{p^3}{27}=0 \qquad\cdots\cdots(9)$$

因爲(9)式是 u^3 的二次方程式,所以

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad\cdots\cdots(10)$$

或 $$u^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad\cdots\cdots(11)$$

這裏若以(10)式爲 u^3 的值,那麼由(8)式就得

$$\nu^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

這裏若以(11)式爲 u^3 的值,那麼由(8)式就得

$$\nu^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

所以(10)式與(11)式各爲 u^3 與 ν^3 的值,由是得

$$u=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad\cdots\cdots(12)$$

$$\nu=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad\cdots\cdots(13)$$

因爲 u^3 及 ν^3 各有三個根,即 $u, \omega u, \omega^2 u$ 及 $\nu, \omega\nu, \omega^2\nu$.

如若把這六個根,輪流的代入(5)式,那麼 $u+v$ 或 y 就有九個數值.但是其中有六個因爲 u, v 要適合(7)式而廢棄的,所以 $u+v$ 或 y 仍舊祇有三個數值,即(4)式仍舊有三個根,現在設這三個根爲 y_1, y_2, y_3,於是

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= u+v \\ y_2 &= \omega u+\omega^2 v \\ y_3 &= \omega^2 u+\omega v \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

上面(12),(13),(14)的公式都是求已化三次方程式根的公式,叫做卡大拿公式(Cardano 1501–1576,意大利數學家).

15. 四次方程式的代數解 p 形的四次方程式爲

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

(1)式的兩邊各加以 $(mx+l)^2$,即得

$$x^4+Ax^3+(B+m^2)x^2+(C+2lm)x+D+l^2$$
$$=(mx+l)^2 \cdots\cdots (2)$$

假設(2)式的左邊恆等於 $\left(x^2+\frac{A}{2}x+q\right)^2$,其中 q 的值是還沒有決定的數.於是

$$x^4+Ax^3+(B+m^2)x^2+(C+2lm)x+D+l^2$$

$$=\left(x^2+\frac{Ax}{2}+q\right)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

既然假設(3)式是恆等式,那麼次數相等的x的係數也應當相等,即

$$B+m^2=\frac{A^2}{4}+2q \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$C+2lm=Aq \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$D+l^2=q^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

由(4)(5)(6)三式消去 l, m,即得

$$(A^2+8q-4B)(q^2-D)=(Aq-C)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

或 $$8q^3-4Bq^2+(2AC-8D)q+4BD-A^2D-C^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

(8)式是 q 的三次方程式,用卡大拿公式可以把 q 的數値求出來,由此應用(4)(6)又可以把 l, m 求出來.

由(2)(3)兩式得

$$\left(x^2+\frac{A}{2}x+q\right)^2=(mx+l)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

因爲(9)式又與下面兩方程式同解.

$$x^2+\frac{A}{2}x+q=mx+l \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

$$x^2+\frac{A}{2}x+q=-mx-l \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

所以(10)(11)兩式的四個解就是(1)式所求

的解.

習題

1. 解 $x^3-4x^2+6x-4=0$ ……(1)

(解) 此處 $A=-4$,如若以 $x=y-\frac{A}{3}=y+\frac{4}{3}$ 代入(1)式即得已化三次方程式

$$y^3+\frac{2}{3}y-\frac{20}{27}=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

由公式(12)及(13)得

$$u=\frac{1+\sqrt{3}}{3}, \qquad v=\frac{1-\sqrt{3}}{3}$$

所以 $y_1=u+v=\frac{2}{3}$, 因此 $x_1=y+\frac{4}{3}=2$

$$y_2=\omega u+\omega^2 v=-\frac{1}{3}+i$$

因此 $x_2=-\frac{1}{3}+i+\frac{4}{3}=1+i.$

由虛根定理,可知其他一虛根爲 $1-i$.

2. 求 $x^4-6x^3+12x^2-20x-12=0$ 的解 ……(1)

(解) 把原方程式的兩邊各加以 $(mx+l)^2$,即得

$$x^4-6x^3+(12+m^2)x^2+(2ml-20)x+l^2-12$$
$$=(mx+l)^2 \quad \cdots\cdots(2)$$

假設(2)式的左邊恆等於 $(x^2-3x+q)^2$,使 x 等次的係數相等即得

$$12+m^2=9+2q \quad \cdots\cdots(3)$$

$$2ml-20=-6q \cdots\cdots (4)$$

$$l^2-12=q^2 \cdots\cdots (5)$$

由這三個方程式消去$m, l,$ 即得q的三次方程式

$$q^3-6q^2+42q-68=0 \cdots\cdots (6)$$

這個三次方程式有一個根 $q=2$、由(3)(4)(5)各式,

求得　$m^2=1,\ ml=4,\ l^2=16 \cdots\cdots (7)$

由(2)(7)和上面恆等式得

$$(x^2-3x+2)^2=(x+4)^2 \cdots\cdots (8)$$

(8)式和下面兩方程式是同解

$$x^2-3x+2-(x+4)=0 \cdots\cdots (9)$$

$$x^2-3x+2+x+4=0 \cdots\cdots 10)$$

(10)式的根是 $2\pm\sqrt{6}$, (11)式的根是 $1\pm i\sqrt{5}$; 所以(1)式所求的根是 $2\pm\sqrt{6}$ 及 $1\pm i\sqrt{5}$.

3. 求下面各方程式的根.

$x^3-15x-126=0,\quad 3x^3-2x^2-6x+4=0,$

$2x^3-3x^2+2x-3=0,\quad x^3-2x^2+3=0,$

$x^4+2x^2+9=0,\quad 4x^4-36x^3+45x^2+54x-81=0.$

(下冊完)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

中西名詞對照表

(一) 中西對照

十一畫

十二畫

十三畫

十四畫

十五畫

十六畫

十七畫

二十三畫

(二) 西中對照

中1372(全)25,8.