Contribuzione al fondamento della Teoria degli insiemi transfiniti

di GEORG CANTOR in Halle a/S.

1895

Contents

1 ARTICOLO PRIMO (1895)

Dai Mathematische Annalen, Bd. XLVI, pp. 481-512; traduzione di F. GERBALDI. Rivista di Matematica (settembre 1895).

> "Ipotesi non fingo."
>
> "Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arl)itrium nostrum, sed tanquam scribal fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus".
>
> "Veniet tempus, quo ista quae nunc latente, in lucem dies extrahat et longioris xvi diligentia."

1.1 La nozione di potenza o il numero cardinale

Per "insieme" {Menge) noi intendiamo ogni riunione M in un tutto di determinati e ben distinti oggetti m dati dai nostri sensi o dal nostro pensiero (che son detti gli elementi di M). Ciò noi esprimiamo in segni con:

$$M = \{m\} \tag{1}$$

La riunione in un solo di più insiemi M, N, P, ..., che non hanno elementi comuni, è da noi rappresentata con

$$(M, N, P, ...) \tag{2}$$

Gli elementi di questo insieme sono adunque gli elementi di M, di N, di P, ecc. presi insieme.

« Parte » o « insieme parziale » d'un insieme M chiamiamo ogni altro insieme M_1 i cui elementi sono ad un tempo elementi di M.

Se M_2 è una parte di M_1 ed M_1 una parte di M, è anche M_2 una parte di M.

Ad ogni insieme spetta una determinata "potenza" (Mächtigkeit), che noi chiamiamo anche il suo « numero cardinale ».

Potenza o numero cardinale di M chiamiamo quell'idea generale, che per mezzo della nostra attiva facoltà di pensare si deduce dallo insieme M, facendo astrazione dalla natura dei suoi diversi elementi e dall'ordine con cui vien dato. Il risultato di questo doppio atto di astrazione, il numero cardinale o la potenza di M, viene da noi indicato con

$$\overline{\overline{M}} \tag{3}$$

.

Siccome da ogni singolo elemento m, quando si fa astrazione dalla sua natura, nasce un'unità, così il numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ è esso stesso un determinato insieme costituito di pure unità, che ha esistenza come imagine intellettuale o proiezione nel nostro animo dell'insieme dato M.

Diciamo equivalenti due insiemi M ed N e denotiamo ciò con:

$$M \sim N \text{ o } N \sim M, \tag{4}$$

quando è possibile con una legge metterli in una siffatta reciproca relazione, che ad ogni elemento di uno di essi corrisponda uno ed un solo elemento dell'altro. Ad ogni parte M_1 di M corrisponde allora una determinata equivalente parte N_1 di N, ed inversamente.

Avendosi una tal legge per riferire tra loro due insiemi equivalenti, essa si può in varie maniere modificare (escluso il caso che ciascuno degli insiemi consti di un solo elemento). In particolare si può sempre fare in modo che ad un determinato elemento m_0 di M corrisponda un elemento dato qualsiasi n_0 di N. Infatti, se gli elementi m_0 ed n_0 non si corrispondono nella legge iniziale, ma all'elemento m_0 di M corrisponde l'elemento n_1 di N, ed all'elemento n_0 di N corrisponde l'elemento $m_1$di M , basta assumere come legge modificata quella per cui diventano elementi corrispondenti dei due insiemi m_0 ed n_0, e così pure $m_1$ed n_1, e per tutti gli altri elementi si conserva la primitiva legge; a questo modo si ottiene lo scopo voluto.

Ogni insieme è equivalente a se stesso:

$$M \sim M \tag{5}$$

Se due insiemi sono equivalenti a un terzo, sono equivalenti tra loro; vale a dire:

$$\text{da } M \sim P \text{ e } N \sim P \text{ segue } M \sim N. \tag{6}$$

È di fondamentale importanza questo che due insiemi M ed N hanno lo stesso numero cardinale allora e solo allora quando essi sono equivalenti:

$$\text{da } M \sim N \text{ si ottiene } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \tag{7}$$

$$\text{da } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \text{ si ottiene } M \sim N \tag{8}$$

La equivalenza degli insiemi è dunque il criterio necessario e sufficiente per l'eguaglianza dei loro numeri cardinali.

Infatti per la definizione data della potenza il numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ rimane invariato, quando in luogo di un elemento, o anche in luogo di più ed eziandio di tutti gli elementi m di M si sostituisce un altro oggetto, uno per elemento. Ora, se, $M \sim N$, si può stabilire una legge tale che Med N siano reciprocamente ed univocamente riferiti tra loro; corrisponda per essa all'elemento m di M l'elemento n di N. Noi possiamo allora in luogo di ogni elemento m di M pensare sostituito il corrispondente elemento n di N, e così M si trasforma in N senza alterazione del numero cardinale; si ha adunque

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$$

Il teorema inverso si deduce dall'osservazione che tra gli elementi di M e le varie unità del suo numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ sussiste una relazione reciprocamente univoca; perchè, come vedemmo, $\overline{\overline{M}}$ vien fuori in certa maniera da M, col dedurre da ogni elemento m di M una determinata unità di $\overline{\overline{M}}$; quindi possiamo dire che

$$M \sim \overline{\overline{M}}. \tag{9}$$

Similmente è $N \sim \overline{\overline{N}}$. Dunque, se $\overline{\overline{M}}$=$\overline{\overline{N}}$, segue dalla (6) $M \sim N$.

Rileviamo ancora il teorema seguente, che è conseguenza immediata della nozione dell'equivalenza:

Se M, N, P, ... sono insiemi, che non hanno elementi comuni, ed M', N', P', sono insiemi a quelli corrispondenti, ancora senza elementi comuni, e se si ha

$$M \sim M', N \sim N', P \sim P', \dot{} ...,$$

si ha pur sempre

$$(M, N, P, ...) \sim (M', N', P', ...).$$

1.2 Il "maggiore" ed il "minore" per le potenze.

Se per due insiemi M ed N coi numeri cardinali $a = \overline{\overline{M}}$ e $b = \overline{\overline{N}}$, sono soddisfatte le due condizioni :

1) non esiste alcuna parte di M, che sia equivalente ad N,

2) esiste una parte N_1 di N, tale che $N_1 \sim M$,

è anzitutto evidente che esse restano soddisfatte, quando M ed N si sostituiscano con due insiemi a quelli equivalenti $M^{'}$ e $N^{'}$; quelle condizioni esprimono adunque una determinata relazione che passa fra i numeri cardinali a e b.

Inoltre è esclusa l'equivalenza di M ed N, e però l'eguaglianza di a e b; perchè, se fosse $M \sim N$, essendo $N' \sim M$, sarebbe anche $N' \sim N$, ed in virtù di $M \sim N$, dovrebbe anche esistere una parte M' di M tale che $M' \sim M$, e quindi sarebbe anche $M' \sim N$, ciò che contraddice alla condizione 1).

In terzo luogo la relazione di a a bè tale, che è resa impossibile la stessa relazione di b ad a; perchè, se in 1) e 2) si scambiano fra loro M ed N, ne nascono altre due condizioni che sono con quelle in contradizione.

EsprimiamNoi esprimiamo la relazione di a a b caratterizzata dalle 1) e 2) col dire che: a è minore di b, ovvero anche bè maggiore di a; in segni:

$$a < b \text{ o } b > a. \tag{10}$$

Si dimostra facilmente, che

$$\text{se } a < b \text{ e } b < c, \text{si ha } a < c. \tag{11}$$

Similmente segue senz'altro da quella definizione che se P1 è parte d'un insieme P, da $a < \overline{\overline{P'}}$ segue sempre anche $a < \overline{\overline{P}}$ e da $\overline{\overline{P}} < b$ segue sempre anche $\overline{\overline{P'}} < b$. Noi abbiamo visto che delle tre relazioni a = b, a<b, b<a, ognuna esclude le altre due. Ma non è affatto evidente, ed a questo punto del nostro

sviluppo a mala pena si potrebbe dimostrare, che per due numeri cardinali qualunque a e b deve necessariamente aver luogo una di quelle tre relazioni [1]

1.3 L'addizione e moltiplicazione dei numeri cardinali

La riunione di due insiemi M ed N, che non hanno elementi comuni fu denotata al (2) con (M, N). Noi lo diciamo « insieme somma (Vereinigungsmenge) di M ed N».

Se M' ed N' sono altri due insiemi senza elementi comuni, ed è $M \sim M'$, ed $N \sim N'$, vedemmo che anche $(M, N) \sim (M', N')$. Quindi segue che il numero cardinale di (M, N) dipende soltanto dai numeri cardinali $a = \overline{\overline{M}}$ e $b = \overline{\overline{N}}$.

Ciò conduce alla definizione della somma di a e b, che si ha ponendo

$$a + b = \overline{\overline{(M, N)}}. \tag{12}$$

Siccome nella nozione di potenza si fa astrazione dall'ordine degli elementi, così segue senz'altro:

$$a + b = b + a; \tag{13}$$

e per tre numeri cardinali a, b, c, :

$$a + (b + c) = (a + b) + c. \tag{14}$$

Passiamo alla moltiplicazione. Ogni elemento m di un insieme M si può combinare con ogni elemento n di un altro insieme N in un nuovo elemento (m, n); per l'insieme di tutte queste combinazioni (m, n) adottiamo la notazione (M. N), e lo chiamiamo insieme prodotto (Verbindungsmenge) di M ed N. Si ha adunque

$$(M.N) = \{(m, n)\}. \tag{15}$$

È facile persuadersi che anche la potenza di (M. N) dipende solo dalle potenze $\overline{\overline{M}} = a$ e $\overline{\overline{N}} = b$; perchè se si sostituiscono agli insiemi M ed N insiemi ad essi equivalenti M' = {m') ed N' = {n'}

[1]Più tardi, appena avremo dato uno sguardo alla successione crescente dei numeri cardinali transfiniti, ed avremo acquistato cognizione della loro connessione, risulterà la verità del teorema :

A. «Se a e b sono due numeri cardinali qualunque, si ha: o a=b, o a<b, o a>b ».

Da questo teorema si possono molto semplicemente dedurre i seguenti, dei quali tuttavia non dovremo presentemente fare alcun uso:

B. «Se due insiemi M ed N sono cosifatti che M è equivalente ad una parte N_1, di N, ed N é equivalente ad una parte M_1, di M, sono anche M ed N equivalenti ».

C. «Se M_1, è una parte d'un insieme M, M_2, una parte dell'insieme M_2, e se M ed M_2, sono equivalenti, anche M_1, è equivalente agli insiemi M ed M_2 ».

D. «Se per due insiemi M ed N è soddisfatta la condizione che N non è equivalente nè ad M stesso nè ad una parte di M, vi è una parte N_1, di N che è equivalente ad M ».

E. «Se due insiemi M ed N non sono equivalenti, e vi è una parte N_1, di N che è equivalente ad M, non vi è alcuna parte di M equivalente ad N ».

e si considerano m, m' come elementi corrispondenti e così pure n, n', l'insieme

$$(M'.N') = \{(m', n')\}$$

viene messo in relazione reciprocamente univoca a (M. N), quando si riguardino come elementi corrispondenti (m, n) e (m', n'); si ha' adunque

$$(M'.N') \sim (M.N). \tag{16}$$

Ora noi definiamo il prodotto a. b per mezzo dell'equazione

$$a.b = \overline{\overline{(M.N)}}. \tag{17}$$

Un insieme col numero cardinale a. b si può ancora costruire con due insiemi di numeri cardinali a e b colla regola seguente: si parta dall'insieme N ed in esso si sostituisca ad ogni elemento n un insieme $M,, \sim M$, indi si riuniscano in un tutto S gli elementi di tutti questi insiemi M„ ; si vede facilmente che

$$S \sim (M.N), \tag{18}$$

quindi

$$\overline{\overline{S}} = a.b$$

Infatti, stabilita una legge qualunque per riferire tra loro i due insiemi' equivalenti M ed M„ , si denoti con m„ , l'elemento di M„ , corrispondente all'elemento m di M, e si ha

$$S = \{m,,\}; \tag{19}$$

e perciò gli insiemi S ed (M. N) si possono mettere in relazione reciproca e univoca, riguardando m„ , e (m, n) come elementi corrispondenti., Dalle nostre definizioni seguono facilmente i teoremi:

$$a.b = b.a, \tag{20}$$

$$a.(b.c) = (a.b).c, \tag{21}$$

$$a(b + c) = ab + ac; \tag{22}$$

perché

$$(M.N) \sim (N.M),$$

$$(M.(N.P)) \sim ((M.N).P),$$

$$(M.(N, P)) \sim ((M.N), (M.P)).$$

L'addizione e la moltiplicazione dei numeri cardinali soddisfano adunque alle leggi commutativa, associativa e distributiva.

1.4 Elevazione a potenza dei numeri cardinali.

Per un coprimento (Belegung) dell'insieme N cogli elementi dell'insieme M, o più semplicemente coprimento di N con M intendiamo una legge, colla quale ad ogni elemento n di N si congiunge un determinato elemento di M, potendo uno stesso elemento di M venire più volte impiegato. L'elemento di M congiunto con n è in certa maniera una funzione ad un sol valore di n e però si può rappresentare ad es. con f(n), che diremo funzione di ricoprimento; il corrispondente coprimento di N si chiama f(N).

Due coprimenti $f_1(N)$ e $f_2(N)$ si dicono allora e solo allora eguali , quando per tutti gli elementi n di N è soddisfatta l'equazione

$$f_1(n) = f_2(n) \tag{23}$$

di guisa che se anche per un solo particolare elemento $n = n_0$ questa equazione non sussiste , $f_1(N)$ e $f_2(N)$ sono da considerarsi come coprimenti diversi di N.

A mo' d'esempio, essendo m_0 un particolare elemento di M, può stabilirsi che per tutti gli n sia

$$f(n) = m_0$$

questa legge costituisce un particolare coprimento di N con M. Un'altra sorta di coprimento si ottiene, se m_0 e m_1 sono particolari e diversi elementi di M ed n_0 un particolare elemento di N, quando si pone

$$f(n_0) = m_0$$

$$f(n) = m_1$$

per tutti gli n diversi da n_0.

La totalità dei diversi coprimenti di N con M forma un determinato insieme cogli elementi f(N), che noi chiamiamo l'insieme dei coprimenti di N con M e denotiamo con (N | M). Si ha dunque:

$$(N \mid M) = \{f(N)\}. \tag{24}$$

Se $M \sim M'$ ed $N \sim N'$, si vede facilmente che anche

$$(N \mid M) \sim (N' \mid M'). \tag{25}$$

Il numero cardinale di (N | M) dipende dunque soltanto dai numeri cardinali $\overline{\overline{M}} = a$ e $\overline{\overline{N}} = b$; esso ci serve per definire la potenza a^b :

$$a^b = \overline{\overline{(N \mid M)}} \tag{26}$$

Per tre insiemi qualunque, M, N, P, si dimostrano facilmente i teoremi:

$$((N \mid M).(P \mid M)) \sim ((N, P) \mid M), \tag{27}$$

$$((P \mid M).(P \mid N)) \sim (P \mid (MN)), \tag{28}$$

$$(P \mid (N \mid M)) \sim ((PN) \mid M), \tag{29}$$

dai quali, se si pone $\overline{\overline{P}} = c$, in virtù della (26) e del § 3, si deducono i teoremi seguenti per tre numeri cardinali qualunque a, b, c:

$$a^b.a^c = a^{b+c} \tag{30}$$

$$a^c.b^c = (a.b^c) \tag{31}$$

$$\left(a^b\right)^c = a^{b.c} \tag{32}$$

1.5 I numeri cardinali finiti.

Vogliamo anzitutto mostrare, come i principî esposti, su cui baseremo più tardi la teoria dei numeri cardinali infiniti attuali o transfiniti, offrano anche il fondamento più naturale, più breve e più rigoroso della teoria dei numeri finiti.

Ad un unico oggetto e_0, volendolo considerare come un insieme $E_0 = (e_0)$, corrisponde come numero cardinale ciò che noi diciamo « uno » e denotiamo con 1; abbiamo :

$$1 = \overline{\overline{E_0}}$$

Aggiungiamo ora ad E_0 un altro oggetto e_1, l'insieme somma chiamisi E_1, per guisa che

$$E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1). \tag{33}$$

Il numero cardinale di E_1, dicesi « due » e si rappresenta con 2:

$$2 = \overline{\overline{E_1}}$$

Aggiungendo nuovi elementi noi otteniamo la serie degli insiemi

$$E_2 = (E_1, e_2), E_3 = (E_2, e_3), \bullet\bullet\bullet,$$

che ci forniscono in successione illimitata e l'un dopo l'altro i rimanenti numeri cardinali finiti rappresentati con 3, 4, 5, ... L'impiego che qui facciamo degli stessi numeri come indici, è giustificato da ciò che un numero viene a questo modo adoperato soltanto dopo che esso è stato definito come numero cardinale. Se si intende che $v - 1$ denoti il numero che in quella serie precede immediatamente il numero v, abbiamo

$$v = \overline{\overline{E_{v-1}}} \tag{34}$$

$$E_v = (E_{v-1}, e_v) = (e_0, e_1, ..., e_v). \tag{35}$$

Dalla definizione di somma del § 3 segue:

$$\overline{\overline{E_v}} = \overline{\overline{E_{v-1}}} + 1$$

cioè ogni numero cardinale finito (escluso 1) è la somma di quello che immediatamente lo precede e di 1.

Per i nostri sviluppi sono fondamentali i seguenti tre teoremi:

A. « I termini della serie illimitata dei numeri cardinali finiti

$$1, 2, 3, ...v, ...$$

sono tutti fra loro diversi (cioè non è soddisfatta la condizione di equivalenza per i corrispondenti insiemi stabilita al § 1) ».

B. « Ognuno di questi numeri v è maggiore di quelli che lo precedono e minore di quelli che lo seguono (§ 2) ».

C. «Non esiste alcun numero cardinale che rispetto alla sua grandezza stia tra due termini successivi v e $v + 1$ (§ 2) ».

Le dimostrazioni di questi teoremi si fondano sui seguenti D ed E, di cui perciò ci occuperemo primieramente.

D. « Se M è un insieme cosifatto che non ha potenza eguale a' quella di alcuno dei suoi insiemi parziali, anche l'insieme (M, e), che nasce da M aggiungendovi un unico elemento e, ha la stessa proprietà di non avere potenza uguale a quella di alcuno dei suoi insiemi parziali ».

E. « Se N è un insieme col numero cardinale finito v, ed N_1 uno qualunque degli insiemi parziali di N, il numero cardinale di N_1¸ è uguale ad uno dei numeri precedenti $1, 2, 3, ..., v - 1$ ».

DIMOSTRAZIONE DI D. Supponiamo che l'insieme (M, e) abbia potenza uguale a quella di uno dei suoi insiemi parziali, che chiameremo N; due casi sono a distinguersi, che conducono entrambi all'assurdo:

1) L'insieme N contiene e come elemento. Sia N = (M_1, e); allora M_1 è una parte di M, perchè N è una parte di (M, e). Come vedemmo al § 1, la legge di corrispondenza dei due insiemi equivalenti (M, e) e (M_1, e) si può modificare in guisa che all'elemento e dell'uno corrisponda lo stesso elemento e dell'altro; ma allora anche M ed M_1 risultano riferiti tra loro in modo reciprocamente univoco. Ora ciò contradice all'ipotesi che M non ha la stessa potenza della sua parte M_1.

2) L'insieme N non contiene e come elemento. Allora N o è M o è una parte di M. Supponiamo che per la legge di corrispondenza posta a fondamento tra (M, e) ed N all'elemento e del primo corrisponda l'elemento f del secondo. Sia $N = (M_1, f)$; allora sarà contemporaneamente l'insieme M posto in relazione reciprocamente univoca con M_1;

ma M_1, essendo parte di N è in ogni caso parte di M. Quindi anche qui M sarebbe equivalente ad una sua parte, ciò che è contrario all'ipotesi.

DIMOSTRAZIONE DI E. Supporremo il teorema vero fino a un certo v, indi concluderemo che esso sussiste per il successivo v + 1.

Per insieme col numero cardinale v+1 assumiamo $E_v = (e_0, e_1, ..., e_v)$; se il teorema per questo è vero, segue senz'altro (§ 1) la sua verità anche per ogni altro insieme collo stesso numero cardinale v + 1. Sia E' una parte qualunque di E_v; noi distinguiamo i seguenti casi :

1) E' non contiene e_v, come elemento; allora E' è o E_{v-1} o una parte di E_{v-1}, e perciò ha per numero cardinale o v o uno dei numeri 1, 2, 3,...,v-1, perchè noi supponiamo già vero il nostro teorema per l'insieme E_{v-1} col numero cardinale v.

2) E' consta dell'unico elemento e_v ; allora è $\overline{\overline{E'}} = 1$

3) E' consta di e, e di un insieme E", cioè $E' = (E'', e_v)$; E´´ è una parte di E_{v-1} e quindi per quanto si è supposto ha per numero cardinale uno dei numeri 1, 2, 3, ... , v-1; ma si ha $\overline{\overline{E'}} = \overline{\overline{E''}} + 1$, dunque E' ha per numero cardinale uno dei numeri 2, 3, ...,v. DIMOSTRAZIONE DI A. Ognuno degli insiemi da noi denotati con E_v, ha la proprietà di non essere equivalente ad alcuno dei suoi insiemi parziali. Perchè se si suppone che ciò sia vero per un certo v, segue dal teorema D che lo stesso vale per il successivo v+1. Ora per v=1 si riconosce immediatamente che l'insieme $E_1 = (e_0, e_1)$ non è equivalente ad alcuno dei suoi insiemi parziali che in questo caso sono (e_0) ed (e_1).

Consideriamo ora due numeri qualunque μ e v della serie 1, 2, 3,... e sia μ il precedente e v il seguente; sarà $E_{\mu-1}$ una parte di E_{v-1}; perciò $E_{\mu-1}$ e E_{v-1} non sono equivalenti; quindi non sono uguali i corrispondenti numeri cardinali $\mu = \overline{\overline{E_{\mu-1}}}$ e $v = \overline{\overline{E_{v-1}}}$

DIMOSTRAZIONE DI B. Se dei due numeri cardinali finiti μ e v è μ il precedente e v il seguente, si ha $\mu < v$. Infatti consideriamo i due insiemi $M = E_{\mu-1}$ e $N = E_{v-1}$, per essi sono soddisfatte entrambe le condizioni indicate al § 2 per essere $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$. La condizione 1) è soddisfatta, perchè per il teorema E un insieme parziale di $M = E_{\mu-1}$ può avere soltanto uno dei numeri cardinali 1, 2, 3, ... ,μ , e quindi per il teorema A non può essere equivalente allo insieme $N = E_{v-1}$. La condizione 2) è soddisfatta, perchè qui M stesso è una parte di N.

DIMOSTRAZIONE DI C. Sia a un numero cardinale minore di v+1. Per la condizione 2) del § 2 esiste un insieme parziale di E_v, col numero cardinale a. Per il teorema E un insieme parziale di E_v, può avere soltanto uno dei numeri cardinali 1, 2, 3, ... v. Quindi a è uguale ad uno dei numeri 1, 2, 3, ... v. Per il teorema B nessuno di questi è maggiore di v. Per conseguenza non vi è alcun numero cardinale a che sia minore di v+1 e maggiore di v.

Per il seguito ha importanza il seguente teorema:

F. Sia K un insieme qualunque costituito di numeri cardinali finiti e diversi; tra questi ve ne è uno x_1, che è minore degli altri, e perciò è il minore di tutti ».

DIMOSTRAZIONE.

L'insieme K o contiene il numero 1, e allora questo è il minimo $x_1 = 1$; ovvero non lo contiene. In questo secondo caso sia J l'insieme di tutti quei numeri cardinali della nostra serie 1, 2, 3, ... che sono minori di quelli che si trovano in K. Se un numero v appartiene a J, vi appartengono anche tutti i numeri < v. Ma J deve avere un elemento v_1, tale che $v_1 + 1$ e quindi anche tutti i numeri maggiori di v_1 non appartengono a J, perchè altrimenti J abbraccierebbe la totalità dei numeri cardinali finiti, ciò che non è perchè in J non sono contenuti i numeri appartenenti a K. Dunque J è niente altro che (1, 2, 3, ... v_1). Il numero $v_1 + 1 = x_1$, è necessariamente un elemento di K e minore degli altri.

Al teorema F si connette il seguente:

G. « Ogni insieme $K\{x\}$ costituito di numeri cardinali finiti e diversi, si può mettere sotto la forma di serie

$$K = (x_1, x_2, x_3, ...)$$

essendo

$$x_1 < x_2 < x_3 ... \text{»}.$$

1.6 Il più piccolo numero cardinale transfinito alef-zero

Gli insiemi con numero cardinale finito diconsi« insiemi finiti »; tutti gli altri li vogliamo chiamare « insiemi transfiniti» ed i numeri cardinali che ad essi corrispondono « numeri cardinali transfiniti ».

La totalità dei numeri cardinali finiti v ci offre un primo esempio d'un insieme transfinito; chiameremo alef-zero, in segni $\aleph_0$, il numero cardinale che gli corrisponde (§ 1); definiamo dunque

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\{v\}}}$$

Che $\aleph_0$ sia un numero transfinito, cioè che non sia uguale ad alcun numero finito μ, segue dal semplice fatto, che, se allo insieme {v} si aggiunge un nuovo elemento e_0, l'insieme somma ({v}, e_0) è equiva lente al primitivo {v}. Infatti tra i due si può stabilire una relazione reciprocamente univoca, per la quale all'elemento e_0, si fa corrispondere l'elemento 1 del secondo, e all'elemento v del primo l'elemento v+1 del secondo. Perciò abbiamo per il § 3:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0.$$

Ma nel § 5 si è mostrato che $\mu + 1$ è sempre diverso da μ, quindi $\aleph_0$ non è uguale ad alcun numero finito μ.

Il numero $\aleph_0$ è maggiore di qualunque numero finito μ:

$$\aleph_0 > \mu.$$

Ciò segue, in virtù di quanto fu stabilito al § 3, da ciò che $\mu = \overline{\overline{\{(1, 2, 3, ...\mu)\}}}$, niuna parte dell'insieme (1, 2, 3, ... μ) è equivalente allo insieme {v}, e (1, 2, 3, ... μ) è esso stesso una parte di {v}.

Inoltre $\aleph_0$ è il più piccolo numero cardinale transfinito. Se a è un numero cardinale transfinito qualunque diverso da $\aleph_0$, si ha

$$\aleph_0 < a.$$

Ciò è basata sui seguenti teoremi:

A. «Ogni insieme transfinito T ha insiemi parziali il cui numero cardinale è $\aleph_0$ ».

DIMOSTRAZIONE. Se con una legge qualunque si sopprime da T un numero finito di elementi $t_1, t_2, ...t_{y-1}$ vi è sempre la possibilità di levare da esso un altro elemento t_y. L'insieme $\{t_y\}$, dove v denota un numero cardinale finito qualunque è un insieme parziale di T il cui numero cardinale è $\aleph_0$, perchè $\{t_y\} \sim \{v\}$ (§ 1).

B. Se Sè un insieme transfinito col numero cardinale $\aleph_0$, un qualunque insieme transfinito parte di S, sarà anche $\overline{\overline{\{S_1\}}} = \aleph_0$ ».

DIMOSTRAZIONE. Si suppone che sia $S \sim \{v\}$; stabilita una legge di corrispondenza tra questi due insiemi, sia s, quell'elemento di S che corrisponde all'elemento v di {v}, si ha

$$S = \{s_y\}.$$

L'insieme S parte di S consta di certi elementi s_x di S, e la totalità dei numeri x forma un insieme transfinito K parte di {v}.

Per il teorema G del § 5, l'insieme K si può mettere sotto forma di serie

$$K = \{x_y\}.$$

dove

$$x_y < x_{y+1}.$$

quindi è anche

$$S_1 = \{s_{x_y}\}.$$

Di qui segue che $S_1 \sim S$, e per conseguenza $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.

Da A e B, in virtù del § 2, si deduce la formula (4).

Dalla (2), aggiungendo 1 ad ambi i membri, si ha:

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

e ripetendo la stessa osservazione:

$$\aleph_0 + v = \aleph_0$$

Ma noi abbiamo ancora

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Infatti, per la (1) del § 3, $\aleph_0 + \aleph_0$, è il numero cardinale $\overline{\overline{(\{a_y\}, \{b_y\})}}$, essendo

$$\overline{\overline{\{a_y\}}} = \overline{\overline{\{b_y\}}} = \aleph_0.$$

Ora si ha evidentemente

$$\{v\} = (\{2v-1\}, \{2v\}),$$

$$(\{2v-1\}, \{2v\}) \sim (\{a_y\}, \{b_y\}),$$

dunque

$$\overline{\overline{(\{a_y\}, \{b_y\})}} = \overline{\overline{\{v\}}} = \aleph_0.$$

L'equazione (6) può anche scriversi:

$$\aleph_0.2 = \aleph_0$$

ed, aggiungendo ad ambi i membri ripetutamente $\aleph_0$, si deduce

$$\aleph_0.v = v.\aleph_0 = \aleph_0.$$

Ora noi abbiamo ancora

$$\aleph_0.\aleph_0 = \aleph_0.$$

Dimostrazione. Per la (6) del § 3, $\aleph_0.\aleph_0$ è il numero cardinale
che spetta all'insieme prodotto.

$$\{(\mu, v)\}$$

dove μ e v sono due qualunque, fra loro indipendenti, numeri cardinali finiti. Ora, se anche λ rappresenta un qualunque numero cardinale finito (per guisa che $\{\lambda\}$, {u} e {v} sono tre notazioni diverse per lo stesso insieme dei numeri cardinali finiti), noi dobbiamo dimostrare che

$$\{(u, v)\} \sim \{\lambda\}.$$

Denotiamo $\mu + v$ con p; p prende tutti i valori numerici 2, 3, 4,... ed in tutto vi sono p - 1 elementi (μ, v), per cui $\mu + v = p$, che sono

$$(1, p-1), (2, p-2), ...(p-1, 1)$$

In questa successione si ponga anzitutto p=2 e si scriva l'unico elemento (1, 1); indi si ponga p=3 e si scrivano i due elementi (1, 2), (2, 1); poi si scrivano i tre elementi per cui p=4, ecc.; si otterranno così tutti gli elementi (μ, v) disposti in una semplice successione:

(1, 1); (1, 2), (2, 1); (1, 3), (2, 2), (3, 1); (1, 4), (2, 3), ...,

e precisamente avviene (come facilmente si vede) che l'elemento (μ, v) si trova scritto al λ^{esimo} posto, essendo

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu + v - 1)(\mu + v - 2)}{2}$$

Ora λ assume ciascun valore 1,2,3,... una volta sola; quindi per mezzo della (9) si ha una relazione reciprocamente univoca tra i due insiemi $\{\lambda\}$ e $\{\mu$, v$\}$.

Moltiplicando i due membri dell'equazione (8) per $\aleph_0$ si ottiene $\aleph_0^3 = \aleph_0^2 = \aleph_0$, e dopo una ripetuta moltiplicazione per $\aleph_0$ si ha per ogni numero cardinale finito v l'equazione

$$\aleph_0^v = \aleph_0.$$

I teoremi E ed A del § 5 conducono al seguente teorema sugli insiemi finiti:

C. « Ogni insieme finito E è cosifatto che esso non è equivalente ad alcuno dei suoi insiemi parziali ».

A questo teorema fa riscontro il seguente per gli insiemi transfiniti:

D. « Ogni insieme transfinito T è cosifatto, che esso ha degli insiemi parziali T_i, che gli sono equivalenti ».

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema A di questo paragrafo vi è un insieme parziale S=$\{t_v\}$, di T che ha il numero cardinale $\aleph_0$. Sia T=(S, U), di guisa che U è composto di quelli elementi di T, che son diversi dagli elementi t_v. Poniamo S=$\{t_{v+1}\}$, $T_1 = (S_1$, U), sarà T_1 un insieme parziale di T, e precisamente quello che si ottiene da T sopprimendo il solo elemento t_1. Siccome è $S \sim S_1$, (teorema B di questo paragrafo), ed $U \sim U_1$, così è eziandio (§ 1) $T \sim T_1$,

Questi teoremi C e D mettono nella maniera più evidente in luce la differenza essenziale tra gli insiemi finiti e gli infiniti, siccome fin dal 1877 ho indicato nel t. 84 del Crelle's Journal, pag. 242.

Dopo di aver introdotto il più piccolo numero cardinale transfinito $\aleph_0$, e di averne stabilite le più immediate proprietà, si presenta la questione dei numeri cardinali più elevati e della loro deduzione da $\aleph_0$.

Mostreremo che i numeri cardinali transfiniti si possono ordinare rispetto alla loro grandezza, ed in quest'ordine formano, come i numeri cardinali finiti, ma in un senso più esteso, un insieme ben ordinato.

Da $\aleph_0$ si deduce con una determinata legge il numero cardinale immediatamente maggiore $\aleph_1$, da questo colla stessa legge l'immediatamente maggiore $\aleph_2$, e così di seguito.

Ma anche la serie illimitata dei numeri cardinali

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, ..., \aleph_v, ...$$

non esaurisce l'idea dei numeri cardinali transfiniti. Si dimostrerà l'esistenza d'un numero cardinale, che denoteremo con $\aleph_\omega$ e che si presenta come l'immediatamente maggiore di tutti gli $\aleph_v$,; da esso, e nella stessa maniera come $\aleph_1$ da $\aleph_0$, se ne deduce uno immediatamente maggiore $\aleph_{\omega+1}$, e così si seguita senza fine.

Per ogni numero cardinale transfinito a ve ne è uno immediatamente maggiore che si deduce da esso secondo un'unica legge; ed anche per ogni insieme {a} illimitatamente crescente e ben ordinato di numeri cardinali transfiniti ve ne è uno immediatamente maggiore, che se ne deduce con unica legge.

A stabilire rigorosamente questi risultati da noi trovati nel 1882 ed esposti sia in un opuscolo « Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883 », sia nel Vol. XXI dei « Mathematische Annalen » noi ci serviamo dei così detti « tipi d'ordine » (Ordnungstypen), di cui dobbiamo anzitutto esporre le teorie nei paragrafi seguenti.

1.7 I tipi d'ordine di insiemi semplicemente ordinati.

Chiamiamo semplicemente ordinato un insieme M quando tra i suoi elementi m sussiste un determinato ordine di posto (Rangordnung), per cui considerando due elementi qualunque m_1, ed m_2, l'uno prende il posto inferiore e l'altro il posto superiore, e ciò in guisa tale che, se di tre elementi m_1, m_2, ed m_3, è per il posto m_1, inferiore a m_2 ed m_2, inferiore ad m_3, anche m_1, è per il posto inferiore ad m_3.

La relazione tra due elementi m_1, e m_2, per cui m_1, occupa il posto inferiore, ed m_2, il posto superiore, nell'assegnato ordine, sarà designato colle formule

$$m_1 < m_2,\ m_2 > m_1.$$

Così ad esempio ogni punteggiata P assegnata su una retta infinita è un insieme semplicemente ordinato, se considerando due punti qualunque p_1 e p_2 di essa si attribuisce il posto inferiore a quello, la cui coordinata (dopo di avere fissata l'origine e la direzione positiva) è minore.

È chiaro che uno stesso insieme può essere « ordinato semplicemente» secondo le più svariate leggi. Prendiamo ad esempio l'insieme R di tutti i numeri razionali positivi $\frac{p}{q}$(dove p e q sono interi primi fra loro), che sono maggiori di 0 e minori di 1; si ha anzitutto il suo ordine « naturale » che è quello rispetto alla grandezza. Essi si possono però ancora ordinare (ed in questo nuovo ordine denoteremo l'insieme con R_0) in guisa che di due numeri $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$per cui le somme p_1+q_1 e p_2+q_2 hanno valori diversi, abbia posto inferiore quello per cui la corrispondente somma è minore, ed in guisa che il più piccolo dei due numeri razionali sia quello di posto inferiore nel caso in cui $p_1+q_1=p_2+q_2$. In questo ordine, corrispondendo ad uno stesso valore di p + q un numero finito di numeri razionali diversi $\frac{p}{q}$, il nostro insieme ha evidentemente la forma:

$$R_0 = (r_1, r_2, ..., r_y, ...) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, ...\right)$$

dove

$$r_y < r_{y+1}$$

Dunque, ogniqualvolta parliamo di un insieme M semplicemente ordinato noi imaginiamo stabilito un determinato ordine di posto per i suoi elementi nel senso sopra dichiarato.

Esistono insiemi doppiamente, triplamente, v volte, a volte ordinati, ma da questi per ora nel nostro studio facciamo astrazione. Perciò ci permettiamo in quel che segue di adoperare l'espressione più breve « insieme ordinato » nel senso di « insieme semplicemente ordinato ». Per ogni insieme ordinato M si ha un determinato « tipo ordinatore » o più brevemente un determinato « tipo », che noi denotiamo con

$$\overline{M};$$

con ciò intendiamo l'idea generale che si ricava da M, quando si fa astrazione soltanto dalla natura degli elementi m, ma si conserva per essi l'ordine di posto.

Perciò il tipo d'ordine $\overline{M}$ è esso stesso un insieme ordinato, i cui elementi sono unità pure, le quali hanno fra loro lo stesso ordine di posto che hanno gli elementi corrispondenti di M, da cui quelle si dedussero coll'astrazione.

Chiamiamo « simili » (ähnlich) due insiemi M ed N se essi si possono riferire tra loro in modo reciprocamente univoco, in guisa che se $m_1$ed m_2, sono due elementi qualunque di M, n_1 ed n_2, i corrispondenti elementi di N, la relazione di posto tra $m_1$ed m_2 dentro M sia sempre la stessa che quella tra n_1 ed n_2, dentro N. Una siffatta corrispondenza di insiemi simili viene da noi chiamata una rappresentazione (Abbildung) di uno sull'altro. In essa ad un insieme parziale M_1, di M (che evidentemente viene ad essere anche un insieme ordinato) corrisponde un insieme parziale simile N_1, di N. La similitudine di due insiemi ordinati M e N viene espressa in formole con

$$M \simeq N$$

Ogni insieme ordinato è simile a sè stesso.

Se due insiemi ordinati sono simili ad un terzo, essi sono anche simili tra loro.

È facile dimostrare che due insiemi ordinati hanno lo stesso tipo d'ordine allora e solo allora quando essi sono simili; di. maniera che delle due formole

$$\overline{M} = \overline{N},\ M \simeq N$$

Se in un tipo d'ordine $\overline{M}$ si fa ancora astrazione dall'ordine degli elementi, si ottiene (§ 1) il numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ dell'insieme ordinato M, che è ad un tempo il numero cardinale del tipo d'ordine $\overline{M}$. Da $\overline{M} = \overline{N}$ segue sempre $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, cioè insiemi ordinati dello stesso tipo hanno sempre la stessa potenza o numero cardinale; la similitudine di insiemi ordinati ne porta sempre la equivalenza. Per lo contrario due insiemi ordinati possono essere equivalenti, senza essere simili.

Per rappresentare i tipi d'ordine, faremo uso delle lettere minuscole dell'alfabeto greco. Se α è un tipo ordinatore, con

$$\overline{\alpha}$$

intendiamo il corrispondente numero cardinale.

I tipi ordinatori di insiemi finiti semplicemente ordinati non offrono alcun particolare interesse. Perchè facilmente si dimostra, che per uno stesso numero cardinale finito tutti gli insiemi semplicemente ordinati sono simili tra loro, e però hanno uno stesso tipo. I tipi ordinatori finiti sono perciò soggetti alle stesse leggi dei numeri cardinali finiti, e per rappresentare gli elementi è lecito far uso degli stessi segni 1, 2, 3, ... v, sebbene questi siano da ritenersi diversi dai numeri cardinali. Ben diverse sono le cose per i tipi ordinatori transfiniti; perchè per uno stesso numero cardinale transfinito vi sono innumerevoli tipi diversi di insiemi semplicemente ordinati, i quali nella loro totalità costituiscono una particolare « classe di tipi ».

Ognuna di queste classi di tipi è quindi determinata da un numero cardinale transfinito α, che è comune a tutti i tipi appartenenti alla classe; perciò noi la chiamiamo brevemente classe tipica $[\alpha]$.

La classe che naturalmente ci si presenta la prima, di cui la trattazione completa deve essere l'immediato scopo della teoria degli insiemi transfiniti, è la classe tipica $[\aleph_0]$, la quale abbraccia tutti i tipi col numero cardinale transfinito minimo $\aleph_0$.

Dobbiamo ben distinguere dal numero cardinale α, che determina la classe tipica $[\alpha]$, quel numero cardinale α', che alla sua volta è determinato dalla classe tipica $[\alpha]$; questo è il numero cardinale, che spetta (§ 1) alla classe tipica $[\alpha]$ in quanto questa rappresenta un ben definito insieme, i cui elementi sono tutti i tipi a col numero cardinale α. Vedremo che α' è diverso da α e precisamente è sempre maggiore di α.

Se in un insieme ordinato M si invertono tutte le relazioni di posto dei suoi elementi, in guisa che dappertutto un elemento superiore diventa inferiore, ed uno inferiore diventa superiore, si ottiene nuovamente un insieme ordinato, che denotiamo con

$$\star M$$

e chiamiamo l'« inverso » di M.

Se $\alpha = \overline{M}$, denotiamo il tipo ordinatore di $\star M$ con

$$\star\alpha.$$

Può avvenire che sia $\star\alpha = \alpha$, come p. es. nei tipi finiti, o nel tipo dell'insieme R di tutti i numeri razionali maggiori di O e minori di 1 nel loro ordine naturale, che noi studieremo denotandolo con η.

Osserviamo inoltre, che due insiemi ordinati simili possono essere rappresentati l'uno sull'altro o in una sola maniera o in più maniere;

nel primo caso il corrispondente tipo è simile a sè stesso solo in una maniera, nel secondo in più maniere.

Così non solo tutti i tipi finiti, ma anche i tipi degli insiemi transfiniti « ben ordinati », dei quali più tardi ci occuperemo e che noi chiamiamo numeri ordinali transfiniti, sono di tal sorta da ammettere una sola rappresentazione in sè stessi. All'opposto il tipo η è simile a sè stesso in innumerevoli maniere.

Vogliamo chiarire questa differenza con due semplici esempi. Con ω intendiamo il tipo d'un insieme ben ordinato

$$(e_1, e_2, ..., e_v, ...)$$

in cui

$$e_v < e_{v+1}$$

e dove v è rappresentante di tutti i numeri cardinali finiti. Un altro insieme ben ordinato

$$(f_1, f_2, ..., f_v, ...)$$

colla condizione

$$f_v < f_{v+1}$$

dello stesso tipo ω, può evidentemente essere rappresentato » sul precedente soltanto coll'assumere e_v, ed f_v, come elementi corrispondenti. Perchè l'elemento e_1, del primo di posto infimo deve nella rappresentazione essere coordinato all'elemento infimo f_1, del secondo, e così l'elemento e_2 di posto successivo ad e_1, deve essere coordinato all'elemento f_2 di posto successivo ad f_1, ecc.

Ogni altra relazione reciprocamente univoca dei due insiemi equivalenti $\{e_v\}$, e $\{f_v\}$ non è una « rappresentazione» nel senso che abbiamo sopra stabilito per la teoria dei tipi.

Prendiamo ora un insieme ordinato della forma

$$\{e_v\}$$

dove è rappresentante di tutti i numeri interi finiti positivi e negativi, incluso lo 0, e dove si ha parimenti

$$e_v < e_{v+1}$$

Questo insieme non ha alcun elemento di posto infimo, nè alcuno di posto supremo. Il suo tipo, secondo la definizione di somma che sarà data al § 8, è

$$\star\omega + \omega.$$

Esso è simile a sè stesso in innumerevoli maniere. Infatti consideriamo un insieme dello stesso tipo

$$\{f_{v'}\}$$

dove

$$v^{'} < f_{v'+1}$$

i due insiemi ordinati possono essere rappresentati l'uno sull'altro, in guisa che all'elemento e_v, del primo corrisponda l'elemento $f_{v'_0+v'}$ del secondo, essendo v'_0, un determinato fra i numeri v'. Per l'arbitrarietà di v'_0 abbiamo dunque qui infinite rappresentazioni.

L'idea qui sviluppata di « tipo ordinatore » quando in ugual maniera sia trasportata agli « insiemi più volte ordinati », accanto all'idea di « numero cardinale o potenza » introdotta nel § 1, abbraccia tutto il « numerabile » che mai si possa pensare, e non ammette in questo senso alcuna ulteriore generalizzazione. Essa non contiene nulla di arbitrario, ma è la naturale estensione dell'idea di numero. Merita qui di essere particolarmente rilevato, che il criterio di eguaglianza (4) segue con assoluta necessità dall'idea di tipo ordinatore e però non ammette cambiamento di sorta. Nell'avere mal compreso questa circostanza è da ricercarsi la causa fondamentale dei gravi errori, che si trovano nell'opera del sig. G. VERONESE: « Grundzüge der Geometrie, Deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894 ».

Là è spiegato a pag. 30 il « numero di un gruppo ordinato », che coincide del tutto con ciò che noi abbiamo chiamato « tipo d'ordine di un insieme semplicemente ordinato » (Zur Lehre von Transfiniten, Halle 1890, pag. 68-75, estratto dal Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik dell'anno 1887).

Ma il sig. V. crede di dover fare un'aggiunta al criterio dell'uguaglianza. Egli dice a pag. 27 dell'edizione originale italiana: « Numeri le unità dei quali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine e di cui l'uno non è parte o uguale ad una parte dell'altro, sono uguali ». Questa definizione dell'uguaglianza contiene un circolo e perciò diventa un non senso.

Che intende egli mai colla sua aggiunta non uguale ad una parte dell'altro? Per rispondere a questa domanda, bisogna anzitutto sapere quando due numeri sono uguali o non uguali. Quindi la sua definizione dell'uguaglianza (fatta astrazione dalla sua arbitrarietà) presuppone una definizione dell'uguaglianza, che nuovamente presuppone una defi nizione dell'uguaglianza, per cui occorre di nuovo sapere che cosa è uguale e che cosa disuguale, ecc. ecc. all'infinito.

Dopo che il sig. V. in tal maniera ha, per così dire, volontariamente abbandonato il fondamento indispensabile per confrontare i numeri, non fa meraviglia la sregolatezza colla quale egli ulteriormente opera coi suoi numeri pseudotransfiniti, ed ascrive a questi proprietà, che non possono possedere per la semplice ragione che essi, nella forma da lui imaginata, non hanno esistenza di sorta a meno di quella che hanno sulla carta, ove sono scritti. Quindi si capisce anche la sorprendente rassomiglianza che riattacca le sue imagini di numeri ai « numeri infiniti» eminentemente assurdi di FONTENELLE nella sua « Géométrie de l'infini, Paris 1727 ».

Da poco tempo anche il sig. W. KILLING, nel suo « Index Lectionum » dell'Accademia di Münster (per il 1895-96), ha espresso le sue obbiezioni contro la base del libro del sig. VERONESE.

1.8 Addizione e moltiplicazione dei tipi d'ordine.

L'insieme (M, N) somma di due insiemi M ed N, quando questi sono ordinati, si può pure riguardare come un insieme ordinato, nel quale le relazioni di posto degli elementi di M fra loro, e così pure le relazioni di posto degli elementi di N fra loro, son rimaste le stesse rispettivamente come in M ed in N, inoltre tutti gli elementi di M hanno posto più basso di tutti gli elementi di N. Se M' ed N' sono altri due insiemi ordinati, $M \simeq M'$, $N \sim N'$, è eziandio $(M, N) \simeq (M', N')$; il tipo ordinatore di (M, N) dipende dunque soltanto dai tipi ordinatori $\overline{M} = \alpha$, $\overline{N} = \beta$; quindi noi definiamo:

$$\alpha + \beta = \overline{(M, N)}$$

Nella somma $\alpha + \beta$, α si dice l'« augendus » e β l'« addendus » .

Per tre tipi qualunque vige la legge associativa, facile a dimostrarsi,

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

Per lo contrario, la legge commutativa non è valida in generale per l'addizione di tipi. Ciò si vede già nel seguente semplice esempio. Se ω è il tipo menzionato al § 7 dell'insieme ben ordinato

$$E = (e_1, e_2, ..., e_v, ...) \; e_v < e_{v+1}$$

$1 + \omega$ non è uguale a $\omega + 1$.

Perchè, se f è un nuovo elemento, si ha per la (1)

$$1 + \omega = \overline{(f, E)}$$

$$\omega + 1 = \overline{(E, f)}.$$

Ma l'insieme

$$(f, E) = (f, e_1, e_2, ..., e_v, ...)$$

è simile all'insieme E; dunque

$$1 + \omega = \omega$$

Invece gli insiemi E e (E, f) non sono simili, poichè il primo non ha alcun termine di posto supremo, e il secondo ha il termine di posto supremo f. Quindi $\omega + 1$ è diverso da $\omega = 1 + \omega$

Da due insiemi ordinati M ed N coi tipi α e β si può ricavare un insieme ordinato S nella maniera seguente: in N al posto d'ogni elemento n si sostituisce un insieme ordinato M_n, che ha lo stesso tipo α di M, cioè

$$\overline{M_n} = \alpha,$$

indi per ciò che riguarda l'ordine di

$$S = \{M_n\}$$

si fanno le convenzioni seguenti:

1) due elementi qualunque di S che appartengono ad uno stesso insieme M_n, conservano in S la stessa relazione di posto che in M_n

2) due elementi qualunque di S, che appartengono a due insiemi diversi M_{n_1}, e M_{n_2}, prendono in S la relazione di posto, che n_1, ed n_2 hanno in N.

Il tipo ordinatore di 8 dipende, come è facile a vedersi, dai tipi α e β; noi definiamo:

$$\alpha.\beta = S$$

In questo prodotto α si dice il « multiplicandus » e β il « multiplicator ».

Stabilita una rappresentazione qualunque di M su M_n, sia m_n l'elemento di M_n corrispondente all'elemento m di M. Allora noi possiamo anche scrivere

$$S = \{m_n\}$$

Assumiamo ora un terzo insieme ordinato P=\{p\} col tipo ordinatore $\overline{P} = \gamma$; si ha per la (5)

$$\alpha.\beta = \overline{\{m_n\}}\ ,\ \beta.\gamma = \overline{\{n_p\}}$$

$$(\alpha.\beta).\gamma = \overline{\{(m_n)_p\}}\ ,\ \alpha.(\beta.\gamma) = \overline{\{m_{(n_p)}\}}$$

Ma i due insiemi ordinati $\{(m_n)_p\}$ e $\{m_{(n_p)}\}$ sono simili e vengono l'uno sull'altro rappresentati quando si riguardino come corrispondenti gli elementi $(m_n)_p$, e $m_{(n_p)}$.

Quindi per tre tipi α, β, γ sussiste la legge associativa

$$(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma)$$

Dalle (1) e (5) segue anche facilmente la legge distributiva

$$\alpha.(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma$$

però soltanto nella forma qui scritta, ove il fattore binomio fa da moltiplicatore.

Per lo contrario la legge commutativa nella moltiplicazione dei tipi, come nell'addizione, non vale in generale. Ad esempio $2.\omega$ e $\omega.2$ sono tipi diversi ; infatti si ha per la (5)

$$2.\omega = \overline{(e_1, f_1; e_2, f_2; ...; e_v, f_v; ...)} = \omega$$

per lo contrario è

$$\omega.2 = \overline{(e_1, e_2, ..., e_v; f_1, f_2, ..., f_v, ...)}$$

evidenetemente diverso da ω.

Confrontando le definizioni date al § 3 delle operazioni fondamentali per i numeri cardinali con quelle qui stabilite per i tipi ordinatori, si riconosce facilmente, che il numero cardinale della somma di due tipi è uguale alla somma dei numeri cardinali di ciascun tipo, e che il numero cardinale del prodotto di due tipi è uguale al prodotto dei numeri cardinali di ciascun tipo. Ogni equazione adunque fra tipi d'ordine formata colle due operazioni fondamentali sussiste ancora quando in essa al posto di tutti i tipi si sostituiscono i loro numeri cardinali.

1.9 Il tipo d'ordine η dell'insieme R di tutti i numeri razionali, maggiori di 0 e minori di 1, nel loro ordine naturale.

Per R intendiamo, come al § 7, il sistema di tutti i numeri razionali $\frac{p}{q}$
(p e q interi primi tra loro), che sono >0 e <1, nel loro ordine
naturale, cioè quello in cui il posto è determinato dalla grandezza del numero. Denotiamo poi con η il tipo ordinatore di R:

$$\eta = \overline{R}.$$

Ma noi, al § 7, abbiamo anche indicato per lo stesso insieme un altro ordine, nel quale lo chiamiamo R_0, dove il posto è determinato in prima linea dalla grandezza di p+q, ed in seconda linea, e precisamente per quei numeri razionali per cui p+q ha uno stesso valore, dalla grandezza di $\frac{p}{q}$. R_0 ha la forma di un insieme ben ordinato del tipo ω:

$$R_0 = (r_1, r_2, ..., r_v, ...) \text{ dove } r_v < r_{v+1}$$

$$\overline{R_0} = \omega.$$

Siccome R ed R_0, differiscono soltanto per l'ordine degli elementi, così essi hanno lo stesso numero cardinale, e siccome evidentemente $\overline{\overline{R_0}} = \aleph_0$, così anche

$$\overline{\overline{R_0}} = \overline{\eta} = \aleph_0$$

Il tipo η appartiene dunque alla classe tipica $[\aleph_0]$.

Osserviamo in secondo luogo, che in R non si trova nè un elemento di posto infimo, nè un elemento di posto supremo.

In terzo luogo R ha la proprietà che tra due suoi elementi qualunque cadono altri elementi; questa proprietà viene da noi espressa colle parole: R è dappertutto denso.

Vogliamo ora dimostrare che queste tre proprietà caratterizzano il tipo η di R, in guisa che sussiste il seguente teorema:

« Se un insieme semplicemente ordinato M soddisfa alle tre condizioni:

1) $\overline{\overline{M}} = \aleph_0$

2) M non ha elementi nè di posto infimo nè di posto supremo,

3) M è dappertutto denso;

il tipo ordinatore di M è uguale a η :

$$\overline{M} = \eta$$

DIMOSTRAZIONE. Per la condizione 1) M si può mettere sotto la forma di un insieme ben ordinato del tipo ω ; presa come base una tale forma, denotiamo M con M_0, e poniamo

$$M_0 = (m_1, m_2, ..., m_v, ...).$$

Ora noi dobbiamo dimostrare che

$$M \simeq R,$$

cioè dobbiamo dimostrare che M si può rappresentare su R in guisa che la relazione di posto tra due elementi qualunque in M è la stessa che la relazione di posto tra i due elementi corrispondenti in R.

All'elemento r_1, in R sia fatto corrispondere l'elemento m_1 in M. r_2 ha una determinata relazione di posto rispetto a r_1; per la condizione 2) vi sono infiniti elementi m_v di M, che hanno rispetto a m_1 le stesse relazioni di posto, che ha in R r_2, rispetto a r_1; tra essi scegliamo quello che ha in M_0 l'indice minimo, denotiamolo con m_{t_2} e coordiniamolo a r_2.

r_3, ha determinate relazioni di posto rispetto ad r_1 e r_2; per le condizioni 2) e 3) vi sono infiniti elementi m_v, di M, che hanno in M le stesse relazioni di posto rispetto a m_1 e m_{t_2}, che ha r_3, in R rispetto a r_1e r_2; tra essi scegliamo quello, e sia m_{t_3}, che ha in M_0, l'indice

minimo, e coordiniamolo a m_3.

Secondo la stessa legge imaginiamo continuato il processo di coordinazione; dopo che ai v elementi

$$r_1, r_2, r_3, ..., r_y$$

di R furono assegnati come imagini in M determinati elementi

$$m_1, m_{t_2}, m_{t_3}, ...m_{t_v}$$

i quali in M hanno fra loro le stesse relazioni di posto che i corrispondenti in R, si assegni come imagine dell'elemento r_{y+1} di R l'elemento $M_{t_{y+1}}$ di M, che ha in M_0 l'indice minimo e che rispetto a

$$m_1, m_{t_2}, m_{t_3}, ...m_{t_v}$$

ha in M le stesse relazioni di posto, che ha $r_{,+1}$ in R rispetto a

$$r_1, r_2, r_3, ..., r_y$$

In questa maniera noi abbiamo per tutti gli elementi r_y, di R assegnati come imagini determinati elementi m_{t_y}, di M e gli elementi m_{t_y} hanno in M lo stesso ordine che i corrispondenti elementi r_y, hanno in R.

Ma deve ancora essere dimostrato che gli elementi m_{t_y}, comprendono tutti gli elementi m_y, di M, ovvero, ciò che è lo stesso, che la serie

$$1, t_2, t_3, ..., t_y, ...$$

è soltanto una permutazione della serie

$$1, 2, 3, ..., v, ...$$

Noi dimostriamo ciò con una induzione completa, facendo vedere

che se nella rappresentazione si impiegano gli elementi $m_1, m_2, ..., m_v$ lo stesso avviene anche per l'elemento seguente m_{v+1} .

Sia λ così grande che tra gli elementi

$$m_t, m_{t_2}, m_{t_3}, ..., m_{t_\lambda}$$

si trovino gli elementi

$$m_1, m_2, ..., m_v,$$

(i quali per ipotesi compariscono nella rappresentazione). Può avvenire che tra essi si trovi anche m_{v+1}, e allora m_{v+1} viene impiegato nella rappresentazione.

Ma se m_{v+1} non si trova fra gli elementi

$$m_t, m_{t_2}, m_{t_3}, ..., m_{t_\lambda}$$

m_{v+1} ha rispetto a questi elementi dentro M una determinata relazione di posto; la stessa relazione di posto rispetto a $r_1, r_2, ..., r_\lambda$ hanno in R infiniti elementi di R, tra questi sia $r_{\lambda+\sigma}$ quello che in R_0 ha l'indice minimo.

Allora m_{v+1}, come è facile persuadersi, ha in M rispetto a

$$m_t, m_{t_2}, m_{t_3}, ..., m_{t_{\lambda+\sigma-1}}$$

la stessa relazione di posto, che ha $r_{\lambda+\sigma}$ in R rispetto a

$$r_1, r_2, ..., r_{\lambda+\sigma-1}$$

Siccome $m_1, m_2, ...m_v$ già sono comparsi nella rappresentazione, così è m_{v+1} l'elemento dotato del minimo indice in M_0, che ha questa relazione di posto rispetto a

$$m_t, m_{t_2}, m_{t_3}, ..., m_{t_{\lambda+\sigma-1}}$$

Per conseguenza seguendo la nostra legge di corrispondenza si ha

$$m_{t_{\lambda+\sigma-1}} = m_{v+1}$$

Dunque anche in questo caso l'elemento m_{v+1} viene ad essere rappresentato, e precisamente è $r_{\lambda+\sigma}$ il suo corrispondente in R.

E così noi vediamo, che col nostro modo di corrispondenza tutto l'insieme M viene ad essere rappresentato su tutto l'insieme R; M ed R sono insiemi simili, c. v. d.

Dal teorema ora dimostrato si deducono a mo' d'esempio i seguenti:

« η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri razionali negativi e positivi, incluso lo zero, nel loro ordine naturale. »

" η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri razionali maggiori di a e minori di b, nel loro ordine naturale, dove a e b son due numeri reali qualunque, e a $<$ b. »

« η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri reali algebrici nel loro ordine naturale. »

« η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri reali algebrici, maggiori di a e minori di b, nel loro ordine naturale, dove a e b sono due numeri reali qualunque, e a$<$b. »

Infatti tutti questi insiemi ordinati soddisfano alle tre condizioni richieste per M dal nostro teorema (Crelle's Journal, Bd. 77, pag. 258),

Consideriamo inoltre degli insiemi che, secondo le definizioni del § 8, hanno i tipi $\eta + \eta, \eta\eta, (1+\eta)\eta, (\eta+1)\eta, (1+\eta+1)\eta$, per essi sono ancora soddisfatte quelle tre condizioni. Quindi abbiamo i teoremi:

$$\eta + \eta = \eta,$$

$$\eta\eta = \eta,$$

$$(1+\eta)\eta = \eta,$$

$$(\eta+1)\eta = \eta,$$

$$(1+\eta+1)\eta = \eta$$

Applicando più volte la (7) e la (8) si trova per ogni numero finito v:

$$\eta.v = \eta$$

$$\eta^v = \eta$$

Per lo contrario, per v>i, i tipi $i+\eta, \eta+i, v.\eta, i+\eta+i$ sono, come si vede facilmente, diversi fra loro e ancora diversi da η. D'altra parte è

$$\eta + 1 + \eta = \eta$$

ma $\eta + v + \eta$ per v>1 è diverso da η.
Finalmente conviene ancora mettere in rilievo che

$$\star\eta = \eta.$$

1.10 Le serie fondamentali contenute in un insieme ordinato transfinito.

Prendiamo a considerare un insieme M transfinito, semplicemente ordinato, qualunque. Ogni insieme parziale di M è esso pure un insieme ordinato. Per lo studio del tipo $\overline{M}$ si manifestano particolarmente utili

quegli insiemi parziali di M, che appartengono ai tipi ω ed $\star\omega$; noi li chiameremo « serie fondamentali di primo ordine contenute in M» e precisamente i primi (quelli del tipo ω) ascendenti», gli altri (del tipo $\star\omega$) « discendenti ».

Siccome noi qui ci limitiamo alla considerazione delle serie fondamentali del primo ordine (in studii successivi ne verranno in campo anche altre d'ordine superiore), così noi le chiameremo qui semplicemente serie fondamentali ».

Una « serie fondamentale » ascendente ha dunque la forma

$$\{a_y\}, \text{ ove } a_y < a_{y+1}$$

una « serie fondamentale discendente » è della forma

$$\{b_y\}, \text{ ove } b_y > b_{y+1}$$

In tutte le nostre considerazioni v (come pure anche x, λ, μ) ha il significato d'un numero cardinale finito qualunque oppure anche di un tipo finito rispettivamente d'un numero ordinale finito.

Chiamiamo « compartecipanti » (zusammengehörig) due serie fondamentali ascendenti $\{a_y\}$e $\{a'_y\}$ contenute in M, e scriviamo

$$\{a_y\} \parallel \{a'_\lambda\}$$

quando, sia per ogni elemento a_y, esistono elementi a'_y, tali che

$$a_y < a'_y$$

sia ancora per ogni elemento a'_y , esistono elementi a_μ, tali che

$$a'_y < a_y$$

Chiamiamo « compartecipanti » due serie fondamentali discendenti $\{b_y\}$ e $\{b'_y\}$, contenute in M, e scriviamo

$$\{b_y\} \parallel \{b'_\lambda\}$$

quando per ogni elemento b_y esistono elementi b'_λ, tali che

$$b_y > b'{}_\lambda$$

Una serie fondamentale ascendente $\{a_y\}$, ed una discendente $\{b_y\}$ si chiamano « compartecipanti » e si scrive

$$\{a_y\} \parallel \{b_y\}$$

1) se per tutti i v e μ si ha

$$a_v < b_\mu$$

2) se in M esiste al più un elemento m_0, (cioè o uno solo o nessuno) tale che per tutti i v sia

$$a_v < m_0 < b_v.$$

Ciò posto, sussistono i teoremi :

A. «Se due serie fondamentali sono compartecipanti con una terza, esse sono anche compartecipanti tra loro. »

B. «Due serie fondamentali collo stesso verso, di cui l'una sia parte dell'altra, sono sempre compartecipanti. »

Quando in M esiste un elemento m_0, il quale rispetto alla serie ascendente $\{a_y\}$, ha un posto tale, che

1) per ogni v

$$a_v < m_0,$$

2) per ogni elemento m di M, che sia $< m_0$, esiste un numero v_0 siffatto che

$$a_v > m \text{ per } v \geqslant v_0,$$

noi chiamiamo m_0 « elemento limite di $\{a_y\}$ in M » e nello stesso tempo un « elemento principale di M ».

Similmente noi chiamiamo ancora m_0 un

« elemento principale

di M » e ad un tempo « elemento limite di b_y, in M» quando sono soddisfatte le condizioni:

1) per ogni v

$$b_y > m_0$$

2) per ogni elemento m di M, che sia $>m_0$, esiste un certo numero v_0 siffatto che

$$b_y < m \text{ per } v \geqslant v_0$$

Una serie fondamentale non può mai avere più di un elemento limite in M, ma M ha in generale molti elementi principali. È facile persuadersi della verità dei seguenti teoremi:

C. « Se una serie fondamentale ha un elemento limite in M, tutte le serie fondamentali con essa compartecipanti hanno lo stesso elemento limite in M. »

D. Se due serie fondamentali (collo stesso verso o con versi opposti) hanno uno stesso elemento limite in M, esse sono compartecipanti. »

Siano M ed M' due insiemi ordinati simili, per guisa che

$$\overline{M} = \overline{M'},$$

e pongasi a fondamento una rappresentazione qualunque dei due insiemi; sussistono, come si vede facilmente, i seguenti teoremi:

E. « Ad ogni serie fondamentale in M corrisponde come imagine una serie fondamentale in M', ed inversamente; ad ogni serie ascendente una ascendente; ad ogni discendente una discendente; a serie fondamentali compartecipanti in M corrispondono come imagini serie fondamentali compartecipanti in M', e viceversa. »

F. « Se una serie fondamentale in M possiede un elemento limite in M, anche la serie fondamentale corrispondente in M' possiede un elemento limite in M', è inversamente; é questi due elementi limiti sono imagini l'uno dell'altro nella rappresentazione. »

G. « Agli elementi fondamentali di M corrispondono come imagini elementi fondamentali di M', e inversamente. »

Se un insieme M consta di soli elementi principali, per modo che ognuno dei suoi elementi è un elemento principale, noi lo chiamiamo « un insieme condensato » (insichdichte Menge). Se per ogni serie fondamentale in M esiste un elemento limite in M, noi chiamiamo M « un insieme chiuso » (abgeschlossene Menge). Un insieme che è ad un tempo condensato e chiuso dicesi « insieme perfetto ».

Se un insieme ha uno di questi tre predicati, lo stesso predicato spetta eziandio ad ogni insieme simile; quindi gli stessi predicati si possono anche attribuire ai corrispondenti tipi ordinatori, e così vi sono « tipi condensati », « tipi chiusi », « tipi perfetti », come pure « tipi densi dappertutto » (§ 9).

Cosi ad es. η è un tipo « condensato »; esso è anche, come fu mostrato al § 9, « dappertutto denso » , ma non « chiuso ».

ω ed $\star\omega$ non hanno elementi principali (unità principali); per lo contrario $\omega + v$ e $v + \star\omega$ hanno ciascuno un elemento principale e sono « tipi chiusi ».

Il tipo $\omega.3$ ha due elementi principali, ma non è chiuso »; il tipo $\omega.3 + v$ ha tre elementi principali ed è chiuso ».

1.11 Il tipo ordinatore θ del continuo lineare X

Passiamo allo studio del tipo ordinatore dell'insieme X={x} di tutti i numeri reali x, che sono $\geq$0 e $\leq$1, nel loro ordine naturale, per

guisa che per due elementi arbitrari x e x' si ha

$$x \prec x' \text{ quando } x < x'$$

La notazione di questo tipo sia

$$\overline{X} = 0.$$

Dagli elementi della teoria dei numeri razionali e irrazionali si sa che ogni serie fondamentale $\{x_y\}$ in X ha un limite x_0 in X, e che anche inversamente ogni elemento x di X è elemento limite di serie compartecipanti in X. Perciò X è un « insieme perfetto » e 0 un « tipo perfetto ». Ma con ciò θ non è ancora sufficientemente caratterizzato; noi dobbiamo oltre a ciò tener presente la seguente proprietà di X.

X contiene come insieme parziale l'insieme R, studiato al § 9, di tipo ordinatore η, e particolarmente in modo che tra due elementi qualunque x_0 ed x_1 di X trovano posto elementi di R.

Ora dobbiamo dimostrare che queste proprietà prese insieme caratterizzano completamente il tipo ordinatore del continuo lineare X, per guisa che sussiste il teorema :

« Se un insieme ordinato M ha tale impronta che: 1) esso è perfetto, 2) in esso è contenuto un insieme S col numero cardinale $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$, il quale ha siffatta relazione con M che tra due elementi qualsivogliano m_0 ed m_1, di M trovano posto elementi di S, si ha $\overline{M} = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Se S contenesse un elemento supremo ed un infimo, questi in causa della 2) avrebbero lo stesso carattere anche come elementi di M; noi potremmo allora sopprimerli da S senza che perciò quest'insieme perda la relazione con M espressa nella 2).

Noi supponiamo perciò fin da principio che S sia senza elemento supremo od infimo; allora S ha, per il § 9, il tipo ordinatore η. Perchè, essendo S una parte di M, tra due elementi arbitrarii s_0 e s_1 di S debbono per la 2) trovar posto altri elementi di S; inoltre si ha per la 2) $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$. I due insiemi S ed R sono dunque « simili »,

$$S \simeq R.$$

Imaginiamo ora stabilita una qualunque « rappresentazione » di R su S; asseriamo che essa fornisce ad un tempo una « rappresentazione » di X su M, e precisamente nella maniera che segue.

Tutti gli elementi di X, che appartengono ad un tempo all'insieme R, si fanno corrispondere come imagini a quegli elementi di M, che sono ad un tempo elementi di S e che, per la rappresentazione stabilita di R su S, corrispondono a quegli elementi di R.

Ma se x_0 è un elemento di X non appartenente a R, esso si può riguardare come elemento limite d'una serie fondamentale $\{x_y\}$ contenuta in X, la quale può essere sostituita con una serie fondamentale $\{r_{x_y}\}$, compartecipante con essa contenuta in R. A quest'ultima corrisponde come imagine una serie fondamentale $\{s_{\lambda_y}\}$, in S e M, la quale per la 1) è limitata da un solo elemento m_0 in M, che non appartiene ad S (F, § 10). Questo elemento m_0 in M (che rimane lo stesso, quando in luogo delle serie fondamentali $\{x_y\}$ e $\{r_{x_y}\}$, se ne pensano altre limitate dallo stesso elemento x_0, in X [E, C, D, § 10]) serve come imagine di x_0, in X. Inversamente, ad ogni elemento m_0, di M, che non si trova in S, corrisponde un ben determinato elemento x_0 di X, che non appartiene ad R, e del quale m_0, è l'imagine.

In questa maniera viene stabilita una relazione reciprocamente univoca tra X ed M, la quale bisogna dimostrare che costituisce una « rappresentazione» di questi insiemi.

Ciò sussiste anzitutto per quegli elementi di X ed M che appartengono ad un tempo agli insiemi R ed S rispettivamente.

Confrontiamo ora un elemento r di R con un elemento x_0 di X non appartenente ad R; i corrispondenti elementi di M siano s ed m_0 .

Se è $r < x_0$, esiste una serie fondamentale $\{r_{x_y}\}$, ascendente limitata da x_0,e per un certo valore $v_0$si ha

$$r > r_{x_y} \text{ per } v \geqslant v_0.$$

L'imagine di $\{r_{x_y}\}$ in M è una serie fondamentale ascendente $\{s_{\lambda_y}\}$ limitata in M da m_0, e si ha (§ 10) in primo luogo $s_{\lambda_y} < m_0$, per ogni v ed in secondo luogo $s \prec s_{\lambda_y}$, per $v \overline{>} v_0$, perciò (§ 7) $s \prec m_0$.

Se è $r > x_0$, si conchiudȩ similmente che $s \succ m_0$.

Consideriamo finalmente due elementi x_0, ed x_0', non appartenenti ad R e gli elementi m_0, ed m_0', ad essi corrispondenti in M; con un procedimento analogo si dimostra che, se $x < x_0'$, si ha $m_0 \prec m_0'$

Con ciò risulta dimostrata la similitudine di X ed M, e quindi si ha

$$\overline{M} = 0.$$

Halle, marzo 1895.