

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Schläft ein Lied in allen
Dingen, Die da träumen fort
und fort, Und die Welt hebt
an zu singen, Triffst du nur
das Zauberwort.

Joseph Freiherr von
Eichendorff

Lineare Unabhängigkeit

DEFINITION 7.1. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Dann heißt eine Familie von Vektoren v_i , $i \in I$, (mit einer beliebigen endlichen Indexmenge I) *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung

$$\sum_{i \in I} s_i v_i = 0 \text{ mit } s_i \in K$$

nur bei $s_i = 0$ für alle i möglich ist.

Wenn eine Familie nicht linear unabhängig ist, so nennt man sie *linear abhängig*. Man nennt übrigens eine Linearkombination $\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$ eine *Darstellung des Nullvektors*. Sie heißt die *triviale Darstellung*, wenn alle Koeffizienten a_i gleich 0 sind, andernfalls, wenn also mindestens ein Koeffizient nicht 0 ist, spricht man von einer *nichttrivialen Darstellung der Null*. Eine Familie von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn man mit ihnen nur auf die triviale Art den Nullvektor darstellen kann. Dies ist auch äquivalent dazu, dass man keinen Vektor aus der Familie als Linearkombination der anderen ausdrücken kann.

BEISPIEL 7.2. Die Standardvektoren im K^n sind linear unabhängig. Eine Darstellung

$$\sum_{i=1}^n s_i e_i = 0$$

bedeutet ja einfach

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + s_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich aus der i -ten Zeile direkt $s_i = 0$ ergibt.

BEISPIEL 7.3. Die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig. Es ist nämlich

$$4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

BEMERKUNG 7.4. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^m$ sind genau dann linear abhängig, wenn das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

eine nichttriviale (d.h. von 0 verschiedene) Lösung besitzt.

Für eine unendliche Familie definieren wir.

DEFINITION 7.5. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Dann heißt eine Familie von Vektoren $v_i, i \in I$, *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung

$$\sum_{i \in J} a_i v_i = 0 \text{ mit } a_i \in K \text{ für eine endliche Teilmenge } J \subseteq I$$

nur bei $a_i = 0$ für alle i möglich ist.

Damit ist die lineare Unabhängigkeit bei einer beliebigen Familie auf den endlichen Fall zurückgeführt. Man beachte, dass es in einem Vektorraum keine unendlichen Summen gibt, ein Ausdruck wie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n v_n = 0$ kann also von vornherein bei Untersuchungen zur linearen Unabhängigkeit keine Rolle spielen.

LEMMA 7.6. Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $v_i, i \in I$, eine Familie von Vektoren in V . Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie $v_i, i \in J$, linear unabhängig.
- (2) Die leere Familie ist linear unabhängig.
- (3) Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.
- (4) Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.

- (5) Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.
 (6) Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.

Beweis. Siehe Aufgabe 7.11. □

Basen

DEFINITION 7.7. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Dann heißt ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $v_i \in V$, $i \in I$, von V eine *Basis* von V .

BEISPIEL 7.8. Die Standardvektoren im K^n bilden eine Basis. Die lineare Unabhängigkeit wurde in Beispiel 7.2 gezeigt. Um zu zeigen, dass auch ein

Erzeugendensystem vorliegt, sei $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$ ein beliebiger Vektor. Dann

ist aber direkt

$$v = \sum_{i=1}^n b_i e_i.$$

Also liegt eine Basis vor, die man die *Standardbasis* des K^n nennt.

BEISPIEL 7.9. Wir betrachten den K -Untervektorraum $U \subset V$, der durch

$$U = \left\{ v \in K^n \mid \sum_{i=1}^n v_i = 0 \right\}$$

gegeben ist. Eine Basis ist durch die $n - 1$ Vektoren

$$u_1 = (1, -1, 0, 0, \dots, 0), u_2 = (0, 1, -1, 0, \dots, 0), \dots, u_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, 1, -1),$$

gegeben. Diese Vektoren gehören offenbar zu U . Die lineare Unabhängigkeit kann man in K^n überprüfen. Aus einer Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i = 0$$

folgt schrittweise $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, u.s.w. Dass ein Erzeugendensystem vorliegt, ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (v_1 + v_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (v_1 + v_2 + v_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots \\ + (v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_{n-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

, wobei die Gültigkeit in der letzten Zeile auf der Bedingung

$$\sum_{i=1}^n v_i = 0$$

beruht.

Für die komplexen Zahlen bilden $1, i$ eine reelle Basis. Im Raum der $m \times n$ -Matrizen $\text{Mat}_{m \times n}(K)$ bilden diejenigen Matrizen, die an genau einer Stelle eine 1 und sonst überall 0 stehen haben, eine Basis, siehe Aufgabe 7.16.

BEISPIEL 7.10. Im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K sind die Potenzen X^n , $n \in \mathbb{N}$, eine Basis. Nach Definition kann man jedes Polynom

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

als Linearkombination der Potenzen $X^0 = 1, X^1 = X, \dots, X^n$ schreiben. Ferner sind diese Potenzen linear unabhängig. Wenn nämlich

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0$$

ist, so müssen alle Koeffizienten gleich 0 sein (dies gehört zum Begriff eines Polynoms).

Der Charakterisierungssatz für eine Basis

Der folgende Satz gibt eine wichtige Charakterisierung dafür, wann eine Basis vorliegt.

SATZ 7.11. *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Es sei $v_1, \dots, v_n \in V$ eine Familie von Vektoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) *Die Familie ist eine Basis von V .*

- (2) Die Familie ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor.
 (3) Für jeden Vektor $u \in V$ gibt es genau eine Darstellung

$$u = s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n.$$

- (4) Die Familie ist maximal linear unabhängig, d.h. sobald man irgendeinen Vektor dazunimmt, ist die Familie nicht mehr linear unabhängig.

Beweis. Wir führen einen Ringschluss durch. (1) \Rightarrow (2). Die Familie ist ein Erzeugendensystem. Nehmen wir einen Vektor, sagen wir v_1 , aus der Familie heraus. Wir müssen zeigen, dass dann die verbleibende Familie, also v_2, \dots, v_n kein Erzeugendensystem mehr ist. Wenn sie ein Erzeugendensystem wäre, so wäre insbesondere v_1 als Linearkombination der Vektoren darstellbar, d.h. man hätte

$$v_1 = \sum_{i=2}^n s_i v_i.$$

Dann ist aber

$$v_1 - \sum_{i=2}^n s_i v_i = 0$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Familie. (2) \Rightarrow (3). Nach Voraussetzung ist die Familie ein Erzeugendensystem, so dass sich jeder Vektor als Linearkombination darstellen lässt. Angenommen, es gibt für ein $u \in V$ eine mehrfache Darstellung, d.h.

$$u = \sum_{i=1}^n s_i v_i = \sum_{i=1}^n t_i v_i,$$

wobei mindestens ein Koeffizient verschieden sei. Ohne Einschränkung sei $s_1 \neq t_1$. Dann erhält man die Beziehung

$$(s_1 - t_1)v_1 = \sum_{i=2}^n (t_i - s_i)v_i.$$

Wegen $s_1 - t_1 \neq 0$ kann man durch diese Zahl dividieren und erhält eine Darstellung von v_1 durch die anderen Vektoren. Nach Aufgabe 6.15 ist auch die Familie ohne v_1 ein Erzeugendensystem von V , im Widerspruch zur Minimalität. (3) \Rightarrow (4). Wegen der eindeutigen Darstellbarkeit besitzt insbesondere der Nullvektor nur die triviale Darstellung, d.h. die Vektoren sind linear unabhängig. Nimmt man einen Vektor u hinzu, so besitzt dieser eine Darstellung

$$u = \sum_{i=1}^n s_i v_i$$

und daher ist

$$0 = u - \sum_{i=1}^n s_i v_i$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, so dass die verlängerte Familie u, v_1, \dots, v_n nicht linear unabhängig ist. (4) \Rightarrow (1). Die Familie ist linear unabhängig, wir müssen zeigen, dass sie auch ein Erzeugendensystem bildet. Sei dazu $u \in V$. Nach Voraussetzung ist die Familie u, v_1, \dots, v_n nicht linear unabhängig, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung

$$0 = su + \sum_{i=1}^n s_i v_i.$$

Dabei ist $s \neq 0$, da andernfalls dies eine nichttriviale Darstellung der 0 allein mit den linear unabhängigen Vektoren v_1, \dots, v_n wäre. Daher können wir

$$u = -\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{s} v_i$$

schreiben, so dass eine Darstellung von u möglich ist. \square

BEMERKUNG 7.12. Es sei eine Basis v_1, \dots, v_n eines K -Vektorraums V gegeben. Aufgrund von Satz 7.11 (3) bedeutet dies, dass es für jeden Vektor $u \in V$ eine eindeutig bestimmte Darstellung (eine Linearkombination)

$$u = s_1 v_1 + s_2 v_2 + \dots + s_n v_n$$

gibt. Die dabei eindeutig bestimmten Elemente $s_i \in K$ (Skalare) heißen die *Koordinaten* von u bezüglich der gegebenen Basis. Bei einer gegebenen Basis entsprechen sich also die Vektoren und die Koordinatentupel $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in K^n$. Man sagt, dass eine Basis ein *lineares Koordinatensystem* festlegt.¹ Durch eine Basis hat man also insbesondere eine bijektive Abbildung

$$\psi_{\mathbf{v}}: K^n \longrightarrow V, \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \longmapsto s_1 v_1 + s_2 v_2 + \dots + s_n v_n.$$

SATZ 7.13. *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzt V eine endliche Basis.*

Beweis. Es sei $v_i, i \in I$, ein Erzeugendensystem von V mit einer endlichen Indexmenge I . Wir wollen mit der Charakterisierung aus Satz 7.11 (2) argumentieren. Falls die Familie schon minimal ist, so liegt eine Basis vor. Andernfalls gibt es ein $k \in I$ derart, dass die um v_k reduzierte Familie, also $v_i, i \in I \setminus \{k\}$, ebenfalls ein Erzeugendensystem ist. In diesem Fall kann man mit der kleineren Indexmenge weiterargumentieren. Mit diesem Verfahren

¹Lineare Koordinaten vermitteln also eine bijektive Beziehung zwischen Punkten und Zahlentupeln. Aufgrund der Linearität ist eine solche Bijektion mit der Addition und der Skalarmultiplikation verträglich. In vielen anderen Kontexten spielen auch nichtlineare (oder krummlinige) Koordinaten eine wichtige Rolle. Auch diese setzen Raumpunkte mit Zahlentupeln in eine bijektive Verbindung. Wichtige nichtlineare Koordinaten sind u.A. Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten. Mathematische Probleme können häufig durch eine geeignete Wahl von Koordinaten vereinfacht werden, beispielsweise bei Volumenberechnungen.

gelangt man letztlich zu einer Teilmenge $J \subseteq I$ derart, dass $v_i, i \in J$, ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis ist. \square

BEMERKUNG 7.14. Es gilt sogar generell der Satz von Hamel, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Der Beweis zu diesem Satz verwendet deutlich stärkere mengentheoretische Hilfsmittel, insbesondere das Auswahlaxiom und das daraus abgeleitete Lemma von Zorn. Dies ist letztlich der Grund, warum sich viele Aussagen für endlichdimensionale Räume auch auf unendlichdimensionale übertragen lassen. Im Rahmen dieses Kurses konzentrieren wir uns, insbesondere in den Beweisen, auf den endlichdimensionalen Fall.