Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Arbeitsblatt 14

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 14.1. Es sei

$$\varphi\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung. Was besagt in dieser Situation die Transformationsformel für Quader und was die Newton-Leibniz-Formel?

Aufgabe 14.2. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,\, (x,y) \longmapsto (xe^y, -e^{-y}),$$

in jedem Punkt maßtreu, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 14.3. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y) \longmapsto (x+y^2, -y^4-2xy^2-x^2+y^2+x+y),$$

flächentreu ist.

Aufgabe 14.4. Zeige, dass die Transformation

$$[0,2\pi] \times [0,1] \longrightarrow B\,(0,1)\,,\, (\alpha,w) \longmapsto (\sqrt{w}\cos\alpha, \sqrt{w}\sin\alpha),$$

auf geeigneten offenen Teilmengen ein Diffeomorphismus ist und berechne die Jacobi-Determinante in jedem Punkt.

Aufgabe 14.5. Es sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit offenen zusammenhängenden Mengen G und H im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass φ genau dann maßtreu ist, wenn die Jacobi-Determinante überall den Wert 1 oder überall den Wert -1 hat.

Aufgabe 14.6.*

Berechne den Flächeninhalt des Bildes des Rechtecks $Q = [-1,3] \times [0,2]$ unter der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^3, y - x^2).$$

Aufgabe 14.7. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Beweise die Volumenformel für den zugehörigen Rotationskörper K mit der Transformationsformel und der Abbildung

$$\varphi\colon [a,b] \times D \longrightarrow K,\ (x,y,z) \longmapsto (x, f(x)y, f(x)z),$$

wobei D die Einheitskreisscheibe bezeichnet.

Aufgabe 14.8.*

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, $P = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Punkt mit $a_{n+1} > 0$ und K_B der zugehörige Kegel. Beweise die Maßformel für den Kegel mit der Transformationsformel und der Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n \times [0, a_{n+1}] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times [0, a_{n+1}], \\ (x_1, \ldots, x_n, t) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_n, 0) + \frac{t}{a_{n+1}}(a_1 - x_1, \ldots, a_n - x_n, a_{n+1}). \end{aligned}$$

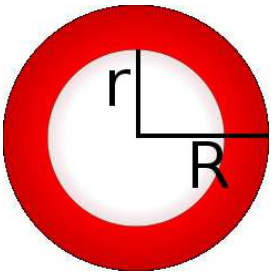
Aufgabe 14.9. Es sei

$$T = \left\{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\pi}{2} \leq \rho \leq \theta,\ \cos\theta \geq 0,\ \sin\theta \geq 0 \right\}.$$

Berechne den Flächeninhalt von T.

Aufgabe 14.10. Interpretiere die Substitutionsregel als einen Spezialfall der Transformationsformel.

Aufgabe 14.11. Zeige, dass der Flächeninhalt eines Annulus gleich dem Produkt aus der Länge des Mittelkreises und der Breite ist.



Aufgabe 14.12. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und

$$h_1, h_2 \colon M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

messbare Funktionen. Zeige

$$\int_M h_1 h_2 d\mu = \int_{S(h_1)} h_2 d\mu \otimes \lambda^1,$$

wobei h_2 in natürlicher Weise als Funktion auf dem Subgraphen $S(h_1)$ zu h_1 aufgefasst wird.

Aufgabe 14.13.*

Berechne $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} dxdy$ mit Korollar 14.5.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.14. (4 Punkte)

Berechne den Wert des Quadrats $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|, |y| \leq 1\}$ für das Bildmaß $\mu = \varphi_* \lambda^2$ unter der Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x, y) \longmapsto (x + y, xy).$$

Aufgabe 14.15. (4 (1+3) Punkte)

Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei

$$\varphi \colon G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus. Es sei

$$f \colon H \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine stetige Funktion.

a) Definiere einen Diffeomorphismus zwischen den offenen Subgraphen zu f bzw. zu $f \circ \varphi$.

b) Beweise die Transformationsformel für Integrale in diesem Fall direkt aus Satz 14.2, angewendet auf den Subgraphen, mit Hilfe von Aufgabe 14.12.

Aufgabe 14.16. (7 (3+2+2) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$[0,10] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2,$$

und interessieren uns für die Straße der Breite 1, deren Mittelstreifen der vorgegebene Funktionsgraph ist.

a) Zeige, dass zu zwei verschiedenen Punkten auf dem Funktionsgraphen die Senkrechten der Länge 1 (mit dem Mittelpunkt auf dem Graphen) untereinander überschneidungsfrei sind.

b) Man gebe eine (möglichst einfache) Parametrisierung der Straße an.

c) Bestimme den Flächeninhalt der Straße.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Annulus.svg , Autor = Benutzer Nandhp auf Commons, Lizenz = PD 2

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5