Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 15

> Das Leben ist schön. Von einfach war nie die Rede.

Höhere Ableitungen

Die Ableitung f' einer (in jedem Punkt) differenzierbaren Funktion nennt man häufig auch die *erste Ableitung* von f. Unter der nullten Ableitung versteht man die Funktion selbst. Höhere Ableitungen werden rekursiv definiert.

DEFINITION 15.1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Die Funktion f heißt n-mal *differenzierbar*, wenn sie $(n-1)$-mal differenzierbar ist und die $(n-1)$-te Ableitung, also $f^{(n-1)}$, differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x)$$

nennt man dann die n-te *Ableitung* von f.

Die zweite Ableitung schreibt man auch als f'', die dritte Ableitung als f'''. Wenn eine Funktion n-mal differenzierbar ist, so sagt man auch, dass die Ableitungen bis zur n-ten *Ordnung* existieren. Eine Funktion f heißt *unendlich oft differenzierbar*, wenn sie n-mal differenzierbar für jedes n ist.

Eine differenzierbare Funktion ist nach Korollar 14.6 stetig, allerdings muss die Ableitung keineswegs stetig sein. Daher ist der folgende Begriff nicht überflüssig.

DEFINITION 15.2. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *stetig differenzierbar* ist, wenn f differenzierbar ist und die Ableitung f' stetig ist.

Eine Funktion heißt n-mal stetig differenzierbar, wenn sie n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung stetig ist.

Extrema von Funktionen

Wir untersuchen jetzt mit Mitteln der Differentialrechnung, wann eine differenzierbare Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, (lokale) Extrema besitzt und wie ihr Wachstumsverhalten aussieht.

Satz 15.3. *Es sei*

$$f\colon \,]a,b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die in $c \in \,]a,b[$ *ein lokales Extremum besitze und dort differenzierbar sei. Dann ist* $f'(c) = 0$.

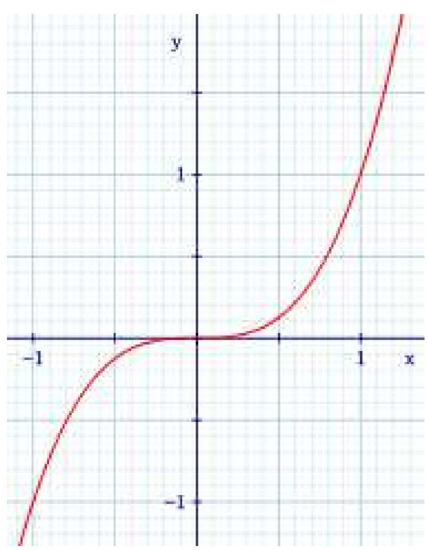
Beweis. Wir können annehmen, dass f ein lokales Maximum in c besitzt. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(c)$ für alle $x \in [c-\epsilon, c+\epsilon]$. Es sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $c-\epsilon \leq s_n < c$, die gegen c („von unten") konvergiere. Dann ist $s_n - c < 0$ und $f(s_n) - f(c) \leq 0$ und somit ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(s_n) - f(c)}{s_n - c} \geq 0,$$

was sich dann nach Lemma 7.11 auf den Limes, also den Differentialquotienten, überträgt. Also ist $f'(c) \geq 0$. Für eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c+\epsilon \geq t_n > c$ gilt andererseits

$$\frac{f(t_n) - f(c)}{t_n - c} \leq 0.$$

Daher ist auch $f'(c) \leq 0$ und somit ist insgesamt $f'(c) = 0$. □



Man beachte, dass das Verschwinden der Ableitung nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Extremums ist. Das einfachste Beispiel für dieses Phänomen ist die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, die streng wachsend ist, deren Ableitung aber im Nullpunkt verschwindet.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Der folgende Satz heißt *Satz von Rolle.*

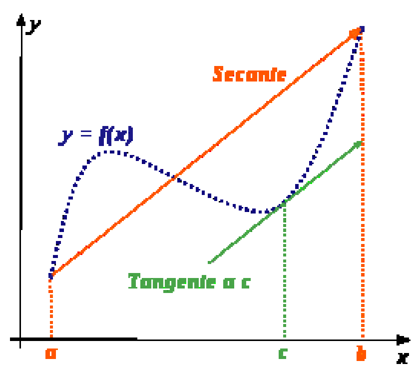
Satz 15.4. *Sei $a < b$ und sei*

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in\ ]a, b[$ mit

$$f'(c) = 0.$$

Beweis. Wenn f konstant ist, so ist die Aussage richtig. Sei also f nicht konstant. Dann gibt es ein $x \in\ ]a, b[$ mit $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Sagen wir, dass $f(x)$ größer als dieser Wert ist. Aufgrund von Satz 11.13 gibt es ein $c \in [a, b]$, wo die Funktion ihr Maximum annimmt, und dieser Punkt kann kein Randpunkt sein. Für dieses c ist dann $f'(c) = 0$ nach Satz 15.3. □



Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt anschaulich gesprochen, dass es zu einer Sekante eine parallele Tangente gibt.

Der folgende Satz, der direkt aus dem Satz von Rolle folgt, heißt *Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*

Satz 15.5. *Sei $a < b$ und sei*

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in\ ]a, b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Diese Funktion ist ebenfalls stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Ferner ist $g(a) = f(a)$ und

$$g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Daher erfüllt g die Voraussetzungen von Satz 15.4 und somit gibt es ein $c \in\ ]a,b[$ mit $g'(c) = 0$. Aufgrund der Ableitungsregeln gilt also

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Korollar 15.6. *Sei*

$$f\colon\ ]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in\ ]a,b[$. Dann ist f konstant.

Beweis. Wenn f nicht konstant ist, so gibt es $x < x'$ mit $f(x) \neq f(x')$. Dann gibt es aufgrund von Satz 15.5 ein c, $x < c < x'$, mit $f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \neq 0$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 15.7. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Funktion f ist genau dann auf I wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in I$ ist.*
(2) *Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng wachsend.*
(3) *Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng fallend.*

Beweis. (1). Es genügt, die Aussagen für wachsende Funktionen zu beweisen. Wenn f wachsend ist, und $x \in I$ ist, so gilt für den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

für jedes h mit $x+h \in I$. Diese Abschätzung gilt dann auch für den Grenzwert, und dieser ist $f'(x)$. Sei umgekehrt die Ableitung ≥ 0. Nehmen wir an, dass es zwei Punkte $x < x'$ in I mit $f(x) > f(x')$ gibt. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es dann ein c mit $x < c < x'$ mit

$$f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} < 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. (2). Es sei nun $f'(x) > 0$ mit nur endlich vielen Ausnahmen. Angenommen es wäre $f(x) = f(x')$ für zwei Punkte $x < x'$. Da f nach dem ersten Teil wachsend ist, ist f auf dem Intervall $[x, x']$ konstant. Somit ist $f' = 0$ auf diesem gesamten Intervall, ein Widerspruch dazu, dass f' nur endlich viele Nullstellen besitzt. □

KOROLLAR 15.8. *Eine reelle Polynomfunktion*

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ besitzt maximal $d-1$ lokale Extrema, und die reellen Zahlen lassen sich in maximal d Intervalle unterteilen, auf denen abwechselnd f streng wachsend oder streng fallend ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 15.13. □

Der zweite Mittelwertsatz und die Regel von l'Hospital

Die folgende Aussage heißt auch *zweiter Mittelwertsatz*.

SATZ 15.9. *Es sei $b > a$ und seien*

$$f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit

$$g'(x) \neq 0$$

für alle $x \in \,]a, b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $c \in \,]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Beweis. Die Aussage

$$g(a) \neq g(b)$$

folgt aus Satz 15.4. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

Es ist

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ &= \frac{f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)} \\ &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b) \end{aligned}$$

$$= \quad h(b).$$

Also ist $h(a) = h(b)$ und Satz 15.4 liefert die Existenz eines $c \in \,]a, b[$ mit

$$h'(c) = 0.$$

Umstellen ergibt die Behauptung. □

L'Hospital (1661-1704)

Zur Berechnung von Grenzwerten einer Funktion, die als Quotient gegeben ist, ist die folgende *Regel von l'Hospital* hilfreich.

KOROLLAR 15.10. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$ ein Punkt. Es seien*

$$f, g \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar seien mit $f(a) = g(a) = 0$ und mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq a$. Es sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert

$$w := \lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

und sein Wert ist ebenfalls w.

Beweis. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Zu jedem x_n gibt es nach Satz 15.9, angewandt auf $I_n := [x_n, a]$ bzw. $[a, x_n]$, ein c_n (im

Innern[1] von I_n) mit

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a, so dass nach Voraussetzung die rechte Seite gegen $\frac{f'(a)}{g'(a)} = w$ konvergiert. Daher konvergiert auch die linke Seite gegen w, und wegen $f(a) = g(a) = 0$ bedeutet das, dass $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ gegen w konvergiert. □

Beispiel 15.11. Die beiden Polynome

$$3x^2 - 5x - 2 \text{ und } x^3 - 4x^2 + x + 6$$

haben beide für $x = 2$ eine Nullstelle. Es ist also nicht von vornherein klar, ob der Limes

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x^3-4x^2+x+6}$$

existiert und welchen Wert er besitzt. Aufgrund der Regel von l'Hospital kann man den Grenzwert über die Ableitungen bestimmen, und das ergibt

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x^3-4x^2+x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{6x-5}{3x^2-8x+1} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}.$$

[1]Unter dem *Innern* eines reellen Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ versteht man das Intervall ohne die Intervallgrenzen.

Abbildungsverzeichnis