

Mathematik für Anwender I**Arbeitsblatt 39****Übungsaufgaben**

AUFGABE 39.1.*

Von einer Bewegung $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei der Geschwindigkeitsverlauf

$$\varphi'(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{t}, t \sin(t^2), te^t \right)$$

bekannt. Ferner sei

$$\varphi(1) = (1, 2, 3)$$

bekannt. Bestimme $\varphi(t)$.

AUFGABE 39.2. Zeige, dass das Integral zu einer stetigen Kurve $[a, b] \rightarrow V$ in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V unabhängig von der gewählten Basis ist.

AUFGABE 39.3. Formuliere und beweise den *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für stetige Kurven $g: I \rightarrow V$, wobei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum sei.

AUFGABE 39.4. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t^2, t^5 - 1, t + \sin t).$$

Bestimme die Komponenten dieser Abbildung bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit beiden Basen das Integral dieser Kurve über $[a, b]$, und bestätige, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

AUFGABE 39.5. Es sei

$$\gamma: [2, 7] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2 - 1, t + 3),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y) = (y^2 - x, -3xy - y^3).$$

AUFGABE 39.6. Sei

$$\gamma: [1, 6] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, t^3, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^2 - xz^2, xy, -3xz - y^3z).$$

AUFGABE 39.7.*

Berechne das Wegintegral $\int_{\gamma} F$ zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (y, x),$$

längs des Weges

$$\gamma: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t, e^t).$$

AUFGABE 39.8.*

Sei

$$\gamma: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, -t^2 + 1, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^2 - xz, xyz, 5x^2z - yz).$$

AUFGABE 39.9. Sei

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (\cos t, \sin t, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y - z^3, x^2, -xz).$$

AUFGABE 39.10.*

Berechne das Wegintegral zur archimedischen Spirale

$$[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t \cos t, t \sin t),$$

im Vektorfeld

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (y, -x).$$

AUFGABE 39.11. Seien $a, b, c, d, r, s \geq 1$ natürliche Zahlen. Wir betrachten die stetig differenzierbare Kurve

$$[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^r, t^s).$$

Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y) = (x^a y^b, x^c y^d).$$

AUFGABE 39.12. Sei

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zu den folgenden Vektorfeldern.

- a) $F(x, y) = (x, y)$,
- b) $F(x, y) = (x, -y)$,
- c) $F(x, y) = (y, x)$,
- d) $F(x, y) = (y, -x)$.

AUFGABE 39.13. Es sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges Vektorfeld und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetig differenzierbarer Weg. Es sei G eine Stammfunktion zu F . Zeige

$$\int_{\gamma} F = G(\gamma(b)) - G(\gamma(a)).$$

AUFGABE 39.14.*

Es sei $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, wobei die i -te Komponente nur von der i -ten Variablen abhängen möge. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein stetig differenzierbarer Weg. Zeige, dass das Wegintegral $\int_{\gamma} F$ nur von $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ abhängt.

AUFGABE 39.15. Wir betrachten das identische Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, P \longmapsto P.$$

Zeige, dass für je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$ und für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(a) = P$ und $\gamma(b) = Q$ das Wegintegral $\int_{\gamma} F$ gleich $\frac{1}{2}(\|Q\|^2 - \|P\|^2)$ ist.

AUFGABE 39.16.*

Es sei $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, aufgefasst als lineares Vektorfeld.

- (1) Man gebe ein Beispiel für ein diagonalisierbares F (mit $n = 2$) und eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ derart an, dass das Wegintegral $\int_{\gamma} F$ nicht 0 ist.
- (2) Es sei nun F diagonalisierbar bezüglich einer Orthonormalbasis. Zeige, dass

$$\int_{\gamma} F = 0$$

für jede stetig differenzierbare Kurve γ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist.

AUFGABE 39.17. Es sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem euklidischen Vektorraum, $F, G: U \rightarrow V$ stetige Vektorfelder und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Für $r, s \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_{\gamma} rF + sG = r \int_{\gamma} F + s \int_{\gamma} G.$$

(2) Es ist

$$\int_{-\gamma} F = - \int_{\gamma} F,$$

wobei $-\gamma$ den umgekehrt durchlaufenen Weg bezeichnet.

(3) Wenn $\delta: [b, c] \rightarrow U$ ein weiterer (stückweise) stetig differenzierbarer Weg mit $\delta(b) = \gamma(b)$ ist, so ist

$$\int_{\gamma * \delta} F = \int_{\gamma} F + \int_{\delta} F,$$

wobei $\gamma * \delta$ den aneinander gelegten Weg bezeichnet.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 39.18. (3 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t^2, t^5 - 1, t + \sin t).$$

Bestimme die Komponenten dieser Abbildung bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit beiden Basen das Integral dieser Kurve über $[a, b]$, und bestätige, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

AUFGABE 39.19. (5 Punkte)

Es sei

$$\gamma: [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t^2, -t^3, t^2 - t + 4),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^3 - x^2z^2, x^2y, 5x^3z - y^2z).$$

AUFGABE 39.20. (5 Punkte)

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t, -t, t^2),$$

und das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x^2, xz, y^2).$$

a) Berechne das Wegintegral $\int_{\gamma} F$.

b) Es sei

$$g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [0, 1], s \longmapsto \sin s,$$

und $\tilde{\gamma} = \gamma \circ g$. Berechne (unabhängig von a)) $\int_{\tilde{\gamma}} F$

AUFGABE 39.21. (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - e^y, xy + \cos x).$$

Bestimme das Wegintegral längs des gegen den Uhrzeigersinn einmal durchlaufenen Einheitsquadrates.

AUFGABE 39.22. (6 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left(\frac{x^3 - xy + 2y^2}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Bestimme das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs des linearen Weges von $(0, -2)$ nach $(3, 4)$.

AUFGABE 39.23. (5 Punkte)

Wir betrachten das konstante Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, P \longmapsto v.$$

Zeige, dass für zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$ und jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(a) = P$ und $\gamma(b) = Q$ das Wegintegral $\int_{\gamma} F$ gleich $\langle Q - P, v \rangle$ ist.

Abbildungsverzeichnis