

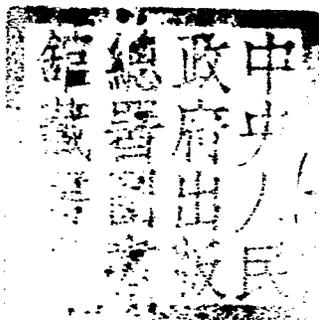
3  
212363  
c11

興初級中學教科書

# 代數

下 册

虞明禮 編 著  
段育華 校 訂



BC  
34.62

商務印書館發行

ME  
G524.62  
86

復興初級中學教科書

代數

下 冊

虞明禮編著  
段育華校訂



3 1760 8067 3

商務印書館發行  
43740

# 目 次

## 下 冊

第十一章 分式方程式 .....	229
§ 103. 引論 .....	229
§ 104. 怎樣解分式方程式 .....	230
習題九十一 .....	232
§ 105. 用化整法往往得偽根 .....	233
§ 106. 偽根何自而來 .....	234
§ 107. 不用驗算，怎樣決定根的真偽 .....	236
習題九十二 .....	237
習題九十三 .....	239
習題九十四 .....	241
第十二章 乘方及開方 .....	242
I 乘方 .....	242
§ 108. 單項式乘 $n$ 次方 .....	242
§ 109. 二項式乘 $n$ 次方 .....	243
習題九十五 .....	245

II 開方 .....	245
§ 110. 關於開方的幾個名詞 .....	245
§ 111. 單項式開 $n$ 次方 .....	246
§ 112. 多項式開 $n$ 次方(因子法) .....	246
§ 113. 多項式開平方(通法) .....	247
習題九十六 .....	249
§ 114. 多項式開立方(通法) .....	250
習題九十七 .....	252
第十三章 簡易不等式 .....	252
§ 115. 不等數 .....	252
§ 116. 不等式 .....	254
§ 117. 不等式的分類 .....	257
§ 118. 證恆不等式 .....	257
習題九十八 .....	258
§ 119. 解不等式 .....	259
習題九十九 .....	259
§ 120. 一元一次不等式的圖形 .....	260
習題一百 .....	261
第十四章 不盡根數 虛數 根式方程式 .....	261
I 不盡根數 .....	261

---

§ 121. 不盡根數的需要 .....	261
§ 122. 不盡根數何以爲不盡? 不盡根數的性質 .....	262
§ 123. 不盡根式化簡的原理 .....	264
§ 124. 不盡根數化簡後的形狀 .....	265
習題一百零一 .....	266
§ 125. 不盡根式的加減 .....	267
習題一百零二 .....	268
§ 126. 不盡根式的乘法 .....	269
習題一百零三 .....	270
§ 127. 不盡根式的除法 .....	271
習題一百零四 .....	273
II 虛數 .....	273
§ 128. 虛數的需要及其性質 .....	273
§ 129. 虛數的化簡 .....	275
§ 130. 虛數的加減 .....	275
習題一百零五 .....	276
§ 131. 虛數乘法 .....	277
習題一百零六 .....	278
§ 132. 虛數除法 .....	279
習題一百零七 .....	279

III 根式方程式.....	280
§ 133. 根式方程式的解法及應用.....	280
習題一百零八.....	283
<b>第十五章 比 比例 變數法.....</b>	<b>284</b>
I 比.....	284
§ 134. 關於比的重要名詞.....	284
§ 135. 比的重要定理.....	285
習題一百零九.....	286
II 比例.....	286
§ 136. 比例的重要名詞.....	286
§ 137. 比例的重要定理.....	288
§ 138. 前節定理的應用.....	291
習題一百十.....	294
III 變數法.....	297
§ 139. 常數,變數.....	297
§ 140. 函數(應變數),自變數.....	298
§ 141. 函數的種類.....	300
§ 142. 正變,有理函數之一.....	300
習題一百十一.....	302
§ 143. 倒變,有理函數之二.....	304

---

§ 144. 聯變 .....	306
習題一百十二 .....	307
第十六章 級數 .....	308
§ 145. 級數的需要 .....	308
§ 146. 何謂級數 .....	309
I 等差級數 .....	310
§ 147. 等差級數 .....	310
§ 148. 等差級數的公項 .....	311
§ 149. 怎樣插入等差中項 .....	312
習題一百十三 .....	313
§ 150. 怎樣求等差級數 $n$ 項的和 .....	313
習題一百十四 .....	314
II 等比級數 .....	315
§ 151. 等比級數 .....	315
§ 152. 等比級數的公項 .....	316
§ 153. 怎樣插入等比中項 .....	317
習題一百十五 .....	318
§ 154. 求等比級數 $n$ 項的和 .....	319
習題一百十六 .....	320
§ 155. 無限遞減等比級數的和 .....	321

習題一百十七 .....	322
習題一百十八 .....	322
第十七章 指數 對數 .....	324
I 指數 .....	324
§ 156. 指數意義的推廣 .....	324
§ 157. 分指數的意義 .....	324
§ 158. 零指數的意義 .....	325
§ 159. 負指數的意義 .....	326
習題一百十九 .....	326
II 對數 .....	328
§ 160. 對數的需要 .....	328
§ 161. 對數是什麼 .....	328
習題一百二十 .....	330
§ 162. 對數的三大定律 .....	330
§ 163. 對數的定值部份,定位部份 .....	331
§ 164. 怎樣求定位部 .....	332
§ 165. 怎樣求定值部 .....	334
習題一百二十一 .....	335
§ 166. 求對數 .....	335
習題一百二十二 .....	336

---

§ 167. 求反對數 .....	336
習題一百二十三 .....	337
§ 168. 利用對數來計算 .....	338
習題一百二十四 .....	340
§ 169. 指數方程式 .....	340
習題一百二十五 .....	341

復興初級中學教科書

# 代 數

下 冊

## 第十一章 分式方程式

### § 103. 引論

(1) 何謂分式方程式? 凡分母含有未知數的方程式，都叫做分式方程式。例如  $\frac{1}{x} + 5 = x$ ,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 2$ ,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 12$  等都是分式方程式。而  $\frac{3}{2}x + x^2 = \frac{1}{5}$ ,  $\frac{x^2}{3} + \frac{x}{4} = 5$  都不是分式方程式。

(2) 何以需要分式方程式? 請看下題：

[問題] “二數的差是 1，其倒數的和是  $\frac{21}{10}$  求這二數”。本問題若用一個未知數來解，例如，設  $x =$  一數， $x+1 =$  他數，從題意應得分式方程式：

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{21}{10}.$$

又若用兩個未知數來解，例如，設  $x$  = 大數， $y$  = 小數，那麼，從題意也應得分式方程式：

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{21}{10}. \end{cases}$$

不但如此，任用其他方法，終得分式方程式。所以，若不利用分式方程式，這問題便無法求解。然則分式方程式還可以不要嗎？

§ 104. 怎樣解分式方程式？ 分式方程式的解法，最通用的有二種，就是“化整法”與“加減法”。現在依次來講。

A. 化整法 [例] 解上節問題所得方程式

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{21}{10}.$$

[解法] 以諸分母的 L. C. M. =  $10x(x+1)$  乘原方程式的兩邊，便得整式方程式：

$$10(x+1) + 10x = 21x(x+1)$$

解之，得  $x_1 = -\frac{5}{7}$ ， $x_2 = \frac{2}{3}$ 。

把  $x_1$  和  $x_2$  分別代入原方程式驗其是否相合

$$\frac{1}{-\frac{5}{7}} + \frac{1}{-\frac{5}{7} + 1} = \frac{21}{10}$$

$$\frac{21}{10} = \frac{21}{10},$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{21}{10}$$

$$\frac{21}{10} = \frac{21}{10}.$$

由上例看來，可得分式方程式的解法，如下：

第一步。先以原方程式中所有諸分母的 L. C. M. 遍乘方程式的兩邊。(使原方程式變為整式方程式)。

第二步。由這整式方程式求出未知數的值。

第三步。欲知求得的值果否適合原方程式，可把這所得的值代入原方程式的兩邊，驗其是否相合。若不相合，且非解方程有錯誤，則必有其他原因。(參看下兩節)

B. 加減法 仍取第一法之例來說明。

[例] 解方程式  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{21}{10}$ 。

[解法] 移項，得

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{21}{10} = 0$$

加減，得

$$\frac{-21x^2 - x + 10}{10x(x+1)} = 0$$

乃令分子為零，得

$$-21x^2 - x + 10 = 0$$

解之，得二根

$$x_1 = -\frac{5}{7}, \quad x_2 = \frac{2}{3}。$$

(驗算一步和本節 A 的例相同)。

由上例看來，又得分式方程式的解法如下：

第一步。 先把原方程式中的各項，完全移至方程式的一邊，而使他邊爲零。

第二步。 用分式加減法化簡第一步所得方程式，使成  $\frac{N}{D} = 0$  之形。

第三步。 如  $\frac{N}{D}$  不是最簡分式，約成最簡分式。(理由參看  
下兩節)

第四步。 乃令第三步所得最簡分式的分子爲 0 而解之。

第五步。 把第四步所得的值代入原方程式的兩邊。驗其  
是否相合。

### 習 題 九 十 一

用二法解下列各題並驗算所得的結果：

1.  $x + \frac{13}{x-2} = -5。$

2.  $x-1=4-\frac{12}{x+2}。$

$$3. \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+2)(x-1)}。$$

$$4. \frac{1}{x-2} = \frac{8}{x+5} \times \frac{1}{x-1}。$$

$$5. 3 + \frac{44}{x^2-1} = \frac{4}{x-1} + \frac{11}{x+1}。$$

$$6. 1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-x}。$$

$$7. 1 + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \frac{2}{(x-2)(1-x)}。$$

$$8. \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)} = 0。$$

§ 105. 用化整法往往得僞根 取上節第 7, 8 兩題論之。

[例一] 解方程式

$$1 + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \frac{2}{(x-2)(1-x)}。 \quad (1)$$

[解法] 用化整法去分母, 得

$$(x-2)(x-1) + x-1 + 2(x-2) = -2 \quad (2)$$

解之, 得

$$x = \pm 1$$

[驗算] 以  $x = -1$  代入原方程式, 得

$$1 - \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}, \text{ 左右相合。}$$

以  $x = 1$  代入原方程式, 則得

$$1 - 1 + \frac{2}{0} = \frac{2}{0},$$

分數的分母不可爲 0，故 1 不合原方程式。

∴  $x = -1$  爲原方程式的根；而  $x = 1$  則非其根。我們叫牠做僞根，這種僞根應當除去。

[例二] 試解方程式  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)} = 0$ 。 (1)

[解法] 用化整法去分母，得  $x+1=0$ 。 (2)

解之，得  $x = -1$ 。

[驗算] 以  $x = -1$  代入原方程式，則得

$$\frac{1}{0} + \frac{2}{-0} = 0。$$

這等式無意義，故  $-1$  是原方程式的僞根。

§ 106. 僞根何自而來？欲知僞根的來源，先要明白下面幾條原理：

(1) 方程式的兩邊，可各加（或減）以任何數或任何代數式而不變其根。

(2) 方程式的兩邊，可各乘（或除）以任何永不爲零的代數式而不變其根。

(3) 方程式的兩邊，若各乘以可以爲零的代數式，那麼，所得新方程式，往往增入僞根。

(4) 方程式的兩邊，若各除以可以爲零的代數式，則所得新方程式，往往失去真根。

[例一] 有方程式  $x-2=5$ 。 (1)

兩邊若各以  $x+3$  乘之，則得新方程式：

$$(x+3)(x-2)=5(x+3)。 (2)$$

即

$$x^2+x-6=5x+15$$

解之，得

$$x_1=7, x_2=-3。$$

這所得二值中，7 是方程式(1)的根，-3 就不是方程式(1)的根。可見 -3 是方程式(1)的偽根。這偽根 -3 何自而來。就是因為以  $x+3$  乘(1)式兩邊的緣故。因為，-3 雖不能使  $x-2=5$ ，但是牠能使  $x+3=0$ ，故能使  $(x+3)(x-2)=5(x+3)$ 。換句話說，-3 雖非(1)式的根，卻是(2)式的根。

[例二] 有方程式  $(x+3)(x-2)=5(x+3)$ 。 (1)

兩邊若各除以  $x+3$ ，則得新方程式：

$$x-2=5。 (2)$$

這方程式中只有一根 7，而原方程式(1)則有 7 與 -3 兩根。可見“拿可以為零的代數式  $x+3$  除(1)式的兩邊，其作用能使原方程式(1)失去一根(-3)”。

明白了上面的原理，那麼，對於解分式方程式何以會得偽根，不難洞明其故了。例如，在上節例一中，由(1)式化得(2)式，乃是把(1)式兩邊各乘以  $(x-2)(x-1)$ 。這乘式  $(x-1)(x-2)$  的值在  $x=1$  時為零。故所得(2)式中 1 這個根是(1)式的偽根。

又如，在上節例二中，由(1)式化得(2)式，乃是把(1)式兩邊各乘以  $x(x+1)$ 。這乘式  $x(x+1)$  的值在  $x=-1$  時為零，故(2)式中  $-1$  這個根是(1)式的偽根。

§ 107. 不用驗算，怎樣決定根的眞偽？把上節總括起來，分式方程式解得的值，有時所以不合原方程式，其唯一原因，就在該值能使乘式(即諸分母的 L. C. M.)之值為零。由此得根之眞偽判定的標準如下：

用化整法求解的。 如方程式的根，能使原方程式中一個(或多個)分母為零的，那麼，必是偽根；反之，能使諸分母皆不為零的，必是眞根。

用加減法求解的。 在 § 104, (B) 第二步所得方程式  $\frac{N}{D}=0$  內，如依第三步把  $\frac{N}{D}$  約成最簡分式，再依第四步令第三步所得最簡分式的分子為 0 而解之，那麼，所得的值全為眞根。因為這樣所得的值，皆能使所得最簡分式的分子為零，而不使分母為零。

[例一] 在 § 105 例一中， $x=-1$  能使諸分母  $x-2, x-1, (x-2)(1-x)$  皆不為零。故  $x=-1$  必為眞根。

[例二] 又如，在 § 105 例二中， $x=-1$  能使分母  $x+1$  及  $x(x+1)$  為零，所以必為偽根。

[例三] 在 § 105 例一中,若用加減法化成  $\frac{N}{D}=0$  之形,並把  $\frac{N}{D}$  約成最簡分式而解之,那麼所得的值必非偽根。

原題:  $1 + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} = \frac{2}{(x-2)(1-x)}$ 。 (1)

解法:  $1 + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-2)(x-1)} = 0$

加減,得  $\frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)} = 0$  (2)

約分,得  $\frac{x+1}{x-2} = 0$  (3)

令  $x+1=0$

解得  $x=-1$

[驗算] 以  $x=-1$  代入(1)式,左右相合。故  $x=-1$  是真根而非偽根。

[注意] 由(2)式若不先約成(3)式,直接令左邊分式的分子為零,得  $x^2-1=0$ 。由此求解,就有偽根  $x=1$  參入其間了。

## 習 題 九 十 二

解下列各方程式(并棄其偽根):

1.  $\frac{12+x}{2x} = \frac{12+x}{3x}$

2.  $\frac{8x^2-3x+4}{12x^2+5x-3} = \frac{2}{3}$ 。

$$3. \frac{6x-11}{x-11} - \frac{3x-2}{x+1} = 3.$$

$$4. \frac{7}{x+4} - \frac{3}{x-5} = \frac{26x-25}{x^2-x-20}.$$

$$5. \frac{x}{x+4} - \frac{x-1}{x+3} = 0.$$

$$6. \frac{x-2}{x-3} + \frac{3x-11}{x-4} = \frac{4x+13}{x+1}.$$

$$7. x + \frac{2x}{x-2} - \frac{4}{x+2} = \frac{8}{(x-2)(x+2)}.$$

$$8. \frac{9}{x^2+3x} + 1 = \frac{3}{x+1} + \frac{3}{x}.$$

$$9. x + \frac{1}{x} = 2.$$

$$10. x - 2 + \frac{1}{x-2} = 1.$$

$$11. \frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}.$$

$$12. x^2 + \frac{9}{x^2} = 10.$$

$$13. x^2 - 5x + \frac{1}{x^2 - 5x} = 5\frac{1}{2}.$$

$$14. x^4 + \frac{1296}{x^4} = 97.$$

[註] 第 12, 13, 14 三題不必化爲四次或八次方程式。

$$15. \frac{x-8}{x-10} + \frac{x-4}{x-6} = \frac{x-5}{x-7} + \frac{x-7}{x-9}.$$

[解法] 先把原方程式變爲

$$1 + \frac{2}{x-10} + 1 + \frac{2}{x-6} = 1 + \frac{2}{x-7} + 1 + \frac{2}{x-9}$$

即 
$$\frac{1}{x-10} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-9}$$

移項,得 
$$\frac{1}{x-10} - \frac{1}{x-9} = \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-6}$$

兩邊各自加減,得 
$$\frac{1}{(x-10)(x-9)} = \frac{1}{(x-7)(x-6)}$$

由此得 
$$(x-7)(x-6) = (x-10)(x-9)$$

解之,得 
$$x=8$$

【注意】學者試用 §104 所述二法解上面方程式,看他比本解法孰繁孰簡。

16. 
$$\frac{x}{x-2} + \frac{x-9}{x-7} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-8}{x-6}$$

17. 
$$\frac{2x-3}{2x-4} + \frac{2x-8}{2x-9} = \frac{2x-4}{2x-5} + \frac{2x-7}{2x-8}$$

18. 
$$x - \frac{4x+5}{x+1} + \frac{2x+5}{x+2} - \frac{x^2-10}{x+3} = \frac{x+5}{x+4}$$

19. 
$$\frac{x+2}{x} + \frac{x-7}{x-5} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{x-6}{x-4}$$

20. 
$$\frac{x+3}{x+6} + \frac{x+6}{x+9} = \frac{x+7}{x+10} + \frac{x+5}{x+8}$$

### 習題九十三

解下列各聯立分式方程式(如有偽根應舍棄之):

$$1. \begin{cases} 1 + \frac{2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2y}{x+y} + \frac{y}{x-y} & (1) \\ x+y=9 & (2) \end{cases}$$

【提示】第一法: 把(1)式移項加減化爲

$$\frac{(x-2y)(x-y)}{(x-y)(x+y)} = 0$$

約為最簡分式，得  $\frac{x-2y}{x+y}=0$

乃令分子  $x-2y$  為零，由聯立方程式

$$\begin{cases} x-2y=0 & (1) \\ x+y=9 & (2) \end{cases}$$

求解，就得所求的真根。

第二法：把(1)式用化整法變為  $x^2-3xy+2y^2=0$ 。乃由聯立方程式：

$$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & (1) \\ x+y=9 & (2) \end{cases}$$

求解，得兩組根。其中一組值使(1)式的分母，不盡非零，是為偽根應捨棄之；他組值使(1)式的分母皆不為零，故為真根。

$$2. \begin{cases} 1 + \frac{y}{x} - \frac{2y}{x+y} = \frac{2y^2}{x^2+xy} \\ 5x+4y=27 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{x^2-xy}{xy-y^2}=0 \\ \frac{y}{x-y} + \frac{5}{x+y} - \frac{5y}{x^2-y^2}=2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ x+y=5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\frac{25}{36} \\ xy=1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} + \frac{y-1}{y+1} = 3\frac{1}{3} \\ \frac{x-1}{x+1} + \frac{y+1}{y-1} = 3\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{25}{144} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{17}{12} \end{cases}$$

[註] 本題可以不用分式方程式解法。就是先求  $\frac{1}{x}=?$ ,  $\frac{1}{y}=?$  由此再求  $x, y$  的值。

$$8. \begin{cases} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{4y^2} = \frac{1}{144} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{4y^2} = \frac{9}{144} \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = 3 \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} - \frac{7}{z} = 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 1\frac{1}{3} \\ \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{4}{(x-y)^2} = 4\frac{1}{9} \end{cases}$$

[註] 先以  $\frac{1}{x+y}=u, \frac{1}{x-y}=v$  代入原式, 求出  $u, v$  的值, 然後再求  $x, y$  的值。

$$11. \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 3 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 1 \\ \frac{2}{x+y} - \frac{3}{y+z} + \frac{5}{x+z} = 4 \end{cases}$$

### 習題九十四

- 二數的和是 15, 其各自倒數的和是  $\frac{3}{10}$ 。求這二數。
- 會員若干人, 平均分攤 132 元的用費。若會員增加 1 人, 那麼每人就可少出 1 元。求原有會員若干人。
- 一車從甲地開往乙地。行至中途, 加快速度, 每小時比開車時多行

10 里。於是共經 22 小時而達乙地，倘若該車行至全程  $\frac{1}{4}$  時便以新速度進行，則可早到 1 小時。求甲乙兩地的距離。

4. 一數平方與其倒數平方的和是  $\frac{97}{36}$ 。求這數。

5. 相鄰三偶數，各自倒數的和是  $\frac{13}{24}$ 。求這三數。

6. 有一工程，甲乙合做需時  $1\frac{1}{3}$  日而成；乙丙合做，需時  $1\frac{5}{7}$  日而成；

甲丙合做需時  $1\frac{1}{4}$  日而成。問各人獨做各需幾日而成？

7. 水流每時進行里數與某船在靜水中每時所行里數相差為 10。甲乙兩地相距 120 里，該船往返一次共經 5 小時。求該船每時所行里數。

8. 甲從 A 向 B 進行，乙同時從 B 向 A 進行，相會時甲比乙多行 48 里，相會後甲再行 8 時而達 B，乙再行 18 時而達 A。求各人的速度及 AB 的距離。

## 第十二章 乘方及開方

### I. 乘方

§ 108. 單項式乘  $N$  次方 把一數或一式自乘以求其二次，三次或任何次幂，叫做乘方。根據這定義實行乘算，那麼，

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6.$$

$$(-x^3)^2 = (-x^3)(-x^3) = x^{3+3} = x^6.$$

$$(-a^5)^3 = (-a^5)(-a^5)(-a^5) = -a^{5+5+5} = -a^{15}.$$

$$(-3a^3)^4 = (-3)^4(a^3)^4 = 81a^{12}.$$

$$\begin{aligned}
 (a^m)^n &= a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots \text{到 } n \text{ 次} \\
 &= a^{m+m+m} \cdots \text{到 } n \text{ 次} \\
 &= a^{mn}。
 \end{aligned}$$

由此可知要把單項式乘  $n$  次方，就是把這項的係數（依算術方法）乘  $n$  次方，把文字的指數乘以  $n$ ，設  $n$  是偶數，答數所冠的符號是正，假使是奇數，所冠的符號和與式前面原附的符號相同。這樣，就得所求的  $n$  次方。

§ 109. 二項式乘  $N$  次方 求二項式  $(a \pm b)$  的二次冪，三次冪，四次冪，五次冪，實行乘算，得

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2。$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2。$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3。$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3。$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4。$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4。$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5。$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5。$$

上列各式，等號右邊的式子叫做左邊的式子的展式。我們觀察其乘算結果，可得二項式  $(a \pm b)$  乘  $n$  次方的規則如下：

(1) 展式的項數是  $n+1$ 。

(2)  $a$  的指數，在第一項就是  $n$ ，以後逐項少 1，至第  $n$  項爲 1 而止。

(3)  $b$  的指數，在第二項是 1，以後逐項加 1，至末項爲  $n$  而止。

(4) 第一項的係數是 1，第二項的係數是  $n$ ，以後各項的係數是前一項的係數乘前一項  $a$  的指數再用前一項的項數除得的商。

(5) 各項前面所冠符號，在二項的和的  $n$  次方，都是正號；但在二項的差的  $n$  次方，則正負相間。

[例一] 求  $(a-2b)^4 = ?$

[解法]  $(a-2b)^4 = a^4 - 4a^3(2b) + 6a^2(2b)^2 - 4a(2b)^3 + (2b)^4$   
 $= a^4 - 8a^3b + 24a^2b^2 - 32ab^3 + 16b^4。$

[例二] 求  $(3x+y)^5 = ?$

[解法]  $(3x+y)^5 = (3x)^5 + 5(3x)^4y + 10(3x)^3y^2$   
 $+ 10(3x)^2y^3 + 5(3x)y^4 + y^5$   
 $= 243x^5 + 405x^4y + 270x^3y^2 + 90x^2y^3$   
 $+ 15xy^4 + y^5。$

[例三] 計算  $103^3 = ?$

[解法]  $103^3 = (100+3)^3 = (100)^3 + 3 \cdot (100)^2 \cdot (3)$   
 $+ 3(100) \cdot (3)^2 + (3)^3$

$$=1000000+90000+2700+27$$

$$=1092727。$$

## 習題九十五

1. 求下列各單項式的乘方：

(a) $(4a^4b^5x^2)^2。$	(b) $(2ab^2)^3。$
(c) $(3a^2b^3)^4。$	(d) $(5x^2y)^2。$
(e) $(-5ab^2)^3。$	(f) $\left(\frac{1}{3}y^2\right)^3。$
(g) $\left(\frac{Fab^3}{2xy}\right)^2。$	(h) $\left(-\frac{x^3}{3}\right)^5。$

2. 求下列各式的展式：

(a) $(x+y)^2$	(b) $(x+y)^3$
(c) $(x+y)^4$	(d) $(x+y)^5$
(e) $(x+y)^6$	(f) $(x+y)^7$

3. 求下列各式的展式：

(a) $(x-y)^8。$	(b) $(2x-3y)^6。$
(c) $\left(\frac{x}{2}-2y\right)^5。$	(d) $(x-2)^{12}。$
(e) $(3x+1)^7。$	(f) $(xy+1)^{10}。$

4. 計算  $99^6=?$   $98^5=?$ 

## II. 開方

§ 110. 關於開方的幾個名詞 求任何數  $M$  的二次冪, 可照乘方中所講, 寫成  $M^2=?$ ; 求  $M$  的三次冪, 或  $n$  次冪, 可寫成  $M^3=?$ , 或  $M^n=?$  反過來說, 我們也可求何數的二次冪, 三次

稱，或  $n$  次稱等於  $M$ ，用算式表示，可寫成  $\sqrt{M}=?$ ， $\sqrt[3]{M}=?$ ，或  $\sqrt[n]{M}=?$ ， $\sqrt{M}$  爲  $M$  之二次方根或平方根， $\sqrt[3]{M}$  爲  $M$  之三次方根或立方根， $\sqrt[n]{M}$  爲  $M$  之 $n$  次方根。求  $\sqrt[n]{M}=?$  [其實就是  $M=(?)^n$ ] 的運算叫做開方，開方就是乘方的逆運算。

在算式  $\sqrt[n]{M}$  中， $M$  叫做被開式， $n$  叫做根指數，所得結果“?”叫做  $M$  的  $n$  次方根，全式  $\sqrt[n]{M}$  叫做根式。

例如在  $\sqrt[5]{32}=2$  中， $\sqrt[5]{32}$  是根式，32 是被開方數，5 是根指數，2 是 32 的 5 次方根。

§ 111. 單項式開  $n$  次方 由乘法得  $(ax^n)^n = a^n x^{2n}$ 。反之，就得  $\sqrt[n]{a^n x^{2n}} = ax^n = \sqrt[n]{a^n x^{2n}}$ 。可見“要把單項式開  $n$  次方，就是把這項的係數（依算術方法）開  $n$  次方，把文字的指數除以  $n$ ；這樣，就得所求的方根。”舉例如下：

$$[\text{例一}] \quad \sqrt{36a^4} = 6a^2.$$

$$[\text{例二}] \quad \sqrt[4]{81a^4b^8c^{12}d^{24}} = 3a^{\frac{4}{4}}b^{\frac{8}{4}}c^{\frac{12}{4}}d^{\frac{24}{4}} = 3ab^2c^3d^6.$$

§ 112. 多項式開  $n$  次方(因子法) 在被開方式容易分解因子時，欲求方根，可以先把被開方式分成因子，再依 § 110. 去求方根，舉例如下：——

$$[\text{例一}] \quad \sqrt{x^2+6xy+9y^2}=?$$

[解法] 依因子分解法，得

$$x^2+6xy+9y^2 = (x+3y)^2.$$

$$\sqrt{x^2+6xy+9y^2}=\sqrt{(x+3y)^2}=x+3y。$$

[例二] 求 $\sqrt[3]{8x^3-12x^2+6x-1}$ =?

[解法] 依因子分解法,得

$$8x^3-12x^2+6x-1=(2x-1)^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{8x^3-12x^2+6x-1}=2x-1。$$

§ 113. 多項式開平方(通法) 依 § 110, 可見開平方是乘方(二次)的逆算, 故開平方的方法, 完全可從乘方公式推出來。譬如在 $(a+b)$ 的乘方既有 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ; 故在開平方就應有

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b。$$

一切開平方的手續, 完全依這公式為根據。在實際運算上, 把上式改成 $\sqrt{a^2+b(2a+b)}=a+b$ , 於是乃有如下的算式:

$$\begin{array}{r|l} \text{(被開方式)} & a^2+2ab+b^2 \\ \hline & a^2 \\ \hline & 2a \quad | \quad 2ab+b^2 \\ & +b \\ \hline & b(2a+b) \quad | \quad 2ab+b^2 \\ & & \hline & & 0 \end{array} \quad \left| \quad a+b \quad \text{(平方根)} \right.$$

多項式開平方的通法, 步驟如下:

- I. 把被開方式依某文字的昇冪(或降冪)排列起來。
- II. 求根的第一項。 把被開方式的第一項開平方, 即得根的第一項。

從被開方式減去根的第一項的平方，得第一餘式。

III. 求根的第二項。以根的第一項的 2 倍，除第一餘式，所得的商，就是根的第二項。

乃以根的第一項的二倍與這第二項相加，再以根的第二項乘這所得的和。

最後自第一餘式減去這乘得的積，得第二餘式。

IV. 求根的第三項。把已得的第一，第二兩項的和當做一項，而把要求的第三項當做第二項，仿 III 繼續去做。

[註] 這種方法只在開方可以開盡時適用。不能開盡的只能依此法求其近似根。

[例一] 求  $16x^4 + 40x^2 + 25$  的平方根。

$$\begin{array}{r}
 \text{[解法]} \quad 16x^4 + 40x^2 + 25 \quad | \quad 4x^2 + 5 \\
 \underline{16x^4} \\
 2(4x^2) = 8x^2 \quad | \quad 40x^2 + 25 \\
 \quad \quad \quad + 5 \\
 \hline
 5(8x^2 + 5) \quad | \quad 40x^2 + 25 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

[例二] 求  $\sqrt{x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9} = ?$

$$\begin{array}{r}
 \text{[解法]} \quad x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 \quad | \quad x^2 + 2x - 3 \\
 \quad \quad \quad x^4 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 2x^2 \quad | \quad 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 \\
 \quad \quad \quad + 2x \\
 \hline
 2x(2x^2 + 2x) \quad | \quad 4x^3 + 4x^2 \\
 \quad \quad \quad 2x^2 + 4x \\
 \quad \quad \quad - 3 \\
 \hline
 -3(2x^2 + 4x - 3) \quad | \quad -6x^2 - 12x + 9 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

習題九十六

I. 下列各式是否相等,並說明其理由:

(a)  $\sqrt{c^2+d^2+e^2}=c+d+e$ 。

(b)  $\sqrt{x^2-y^2}=x-y$ 。

(c)  $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$ 。

(d)  $\sqrt[3]{x^3-y^3}=x-y$ 。

(e)  $\sqrt[3]{x^3+y^3}=x+y$ 。

(f)  $\sqrt[3]{67}=4+\sqrt[3]{8}$ 。

II. 求下列各式的平方根及立方根:

(a)  $84x^6$ 。

(b)  $64x^6y^{18}z_0^{21}$

(c)  $x^6y^{12}z^{18}w_0^{21}$

(d)  $729x^6y^6z_0^{12}$

(e)  $729a^6m^6n^6c_0^{6p}$

(f)  $4096p^6x^6y_0^{18}zw$

III. 用因子分解法求下列各式的平方根:—

(a)  $5x^2+6xy+y^2$ 。

(b)  $5x^6+12x^3y^2+4y^6$ 。

(c)  $25x^4-30x^2y^2+9y^4$ 。

(d)  $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$ 。

(e)  $4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4xz$ 。

IV. 用因子分解法求下列各式的立方根:

(a)  $m^3+6m^2n+12mn^2+8n^3$ 。

(b)  $27a^3-27a^2+9a-1$ 。

(c)  $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ 。

(d)  $x^6+15x^4y+75x^2y^2+125y^3$ 。

V. 用 § 113 做題 II.

VI. 用 § 113 求下列各式的平方根:



III. 求根的第二項。以根的第一項平方的 3 倍  $3a^2$  除第一餘式的首項得  $b$ ，這就是根的第二項。

乃把  $3a^2$ ，第一，第二兩項之積的三倍  $3ab$ ，與第二項平方，三者相加；而以  $b$  乘這所得的和。

最後，從第一餘式減去這所得的積，得第二餘式。（結果是 0，故  $a+b$  卽是所求的立方根；如所餘非零，則依下法求其第三項。）

IV. 求根的第三項。把已得的第一，第二兩項的和當做第一項，要求的第三項當做第二項，仿 II 繼續去做。

[註] 同 §113 的註。

[例一] 求  $\sqrt[3]{27x^3 + 27x^2 + 9x + 1} = ?$

[解法]  $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 \quad | \quad 3x + 1 = \text{所求之立方根}$

$$\begin{array}{r|l}
 27x^3 & 27x^2 + 9x + 1 \\
 \underline{3(3x)^2 = 27x^2} & \\
 3(3x) \cdot 1 = 9x & \\
 \underline{1^2 = 1} & \\
 1 \times (27x^2 + 9x + 1) & 27x^2 + 9x + 1 \\
 & \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 & 0
 \end{array}$$

[註] 本例中  $a=3x$ ， $b=1$ 。把本例解法與上式比較，當見牠們逐步相同，並沒有什麼困難。

[例二] 求  $\sqrt[3]{x^6 + 6x^4 + 7x^3 + 3x^5 + 3x + 6x^2 + 1} = ?$

[解法] 
$$\frac{x^2 + x + 1}{x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 x^6 & \\
 3x^4 & 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1 \\
 3x^3 & \\
 x^2 & \\
 \hline
 x(3x^4 + 3x^3 + x^2) & 3x^5 + 3x^4 + x^3 \\
 3(x^2 + x)^2 = 3x^4 + 6x^3 + 3x^2 & 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 3x + 1 \\
 3(x^2 + x) \cdot 1 = & + 3x^2 + 3x \\
 1^2 = & + 1 \\
 \hline
 1 \cdot (3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 3x + 1) & 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 3x + 1 \\
 & 0
 \end{array}$$

[註] 既得根的第二項  $x$  之後，把  $x^2 + x$  當做第一項，所求第三項當做第二項，依照求第二項的方法去求這第三項。

### 習 題 九 十 七

- I. 用 § 114 解習題九十六題 III。
- II. 用 § 114 求下列各式的立方根：
  - (a)  $27x^9 - 54x^7 + 36x^5 - 8x^3$ 。
  - (b)  $1 - 9a + 33a^2 - 63a^3 + 66a^4 - 36a^5 + 8a^6$ 。
  - (c)  $27x^6 - 27x^5y - 18x^4y^2 + 17x^3y^3 + 6x^2y^4 - 3xy^5 - y^6$ 。
  - (d)  $\frac{27x^3}{64y^3} - \frac{27x^2}{8y^2} + \frac{9x}{y} - 8$ 。

## 第十三章 簡易不等式

### § 115. 不等數。

我們知道正數比 0 大，負數比 0 小。又從代數數的減法，知一數  $A$  比他數  $B$  大，則  $A - B$  常是正；若  $A$  比  $B$  小，則  $A - B$  常

是負。於是可知

$A-B>0$  與  $A>B$  相同,  $A-B<0$  與  $A<B$  相同。

關於不等數有公理如下:

I. 不等數加等數, 其和仍不等, 原來大的和仍大。

[例如]  $5>4$ , 則  $5+2>4+2$ , 即  $7>6$ 。

[注意]  $>$ , 開口一邊向左, 讀做大於;  $<$ , 開口一邊向右, 讀做小於, 此在習題十三第 5 題注意中已經知道了。此不等號開口一邊的向左向右, 叫做不等號的向。若  $>$  改做  $<$ , 叫做改變不等號的向。

II. 等數加不等數, 其和亦不等, 所加的大和亦大。

III. 從不等數減等數, 其差仍不等, 原來大的差仍大。

[例如]  $5>4$ , 則  $5-2>4-2$ , 即  $3>2$ 。

IV. 從等數減不等數, 其差亦不等, 所減的大, 則其差小。

[例如]  $5>4$ , 則  $7-5<7-4$ , 即  $2<3$ 。

此(IV)換一句話來說, 可如下:

從等數減不等數, 改變不等號的向。

V. 不等數的等倍數仍不等, 原來大的倍數仍大。但此倍數指算術的倍數。(就是正數的倍數)。

[例如]  $5>4$ , 則  $(5\times 2)>(4\times 2)$ , 即  $10>8$ 。

VI. 不等數的等分數仍不等, 原來大的分數仍大。但此分數指算術的分數。(就是正數的分數)。

[例如]  $10 > 8$ , 則  $\frac{10}{2} > \frac{8}{2}$ , 即  $5 > 4$ 。

### § 116. 不等式。

表示二個代數式間有大小關係的式叫做不等式。

[例如].  $(a-b)^2 > 0$ ,  $x+5 > 8$ 。

都是不等式。

在不等式中, 亦有與前款公理相類的基本性質如下:

I.  $a > b$ , 及  $b > c$ , 則  $a > c$ 。

因爲  $a - b \equiv (a - b) + (b - c)$ ,

從前款, 知  $a > b$ , 則  $a - b > 0$ ,

$b > c$ , 則  $b - c > 0$ ,

於是  $a - c > 0$ ,

即  $a > c$ 。

II. 若  $a > b$ , 則  $a \pm c > b \pm c$ 。

因爲  $(a \pm c) - (b \pm c) \equiv a - b$ ,

今  $a > b$ , 即  $a - b > 0$ ,

故  $(a \pm c) - (b \pm c) > 0$ ,

故  $a \pm c > b \pm c$ 。

此(II)換一句話來說, 便是:

在不等式  $a > b$  的兩端加同數, 或從此減同數  $c$ , 此不等號

的向不變。

於是，如有  $d - e > f - g$ ;

兩端都加  $e - f$ ，可得

$$d - f > e - g;$$

若兩端都加  $e + g - d - f$ ，可得

$$-f + g > -d + e,$$

即

$$-d + e < -f + g.$$

從此可知：

a. 變不等式一端的一項或數項的記號，可移到別一端。此是不等式的移項。

b. 若變不等式兩端各項的記號，同時當變不等式的向。

III. 若  $a_1 > b_1$ ,  $a_2 > b_2$ ，則  $a_1 + a_2 > b_1 + b_2$ 。

因為  $(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \equiv (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)$ ,

今從假設，  $a_1 > b_1$ ， 即  $a_1 - b_1 > 0$ ,

$a_2 > b_2$ ， 即  $a_2 - b_2 > 0$ ,

故  $(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) > 0$ ,

即  $a_1 + a_2 > b_1 + b_2$ 。

此(III)換一句話來說，便是：

二個同向不等式，左右各自加起來，不等號的向不變。

[注意] 二個同向不等式不能從一式減又一式。例如  $a_1 > b_1$ ,  $a_2 > b_2$ ，不能得  $a_1 - a_2 > b_1 - b_2$ 。

因爲  $(a_1 - a_2) - (b_1 - b_2) \equiv (a_1 - b_1) - (a_2 - b_2)$ ,

此  $a_1 - b_1, a_2 - b_2$ , 雖都是正數, 但其差或正或負或 0 都可以, 不能定說是正。

IV.  $a > b$ , 又若  $c > 0$ , 則  $ac > bc$ , 及  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ ; 若  $c < 0$  則

$$ac < bc, \text{ 及 } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

因爲  $ac - bc \equiv (a - b)c$ ,

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} \equiv \frac{a - b}{c}.$$

今從假設,  $a > b$ , 即  $a - b > 0$ ,

故 a. 若  $c > 0$ , 則  $ac - bc > 0$ , 即  $ac > bc$ ,

$$\text{及 } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} > 0, \text{ 即 } \frac{a}{c} > \frac{b}{c};$$

b. 若  $c < 0$ , 則  $ac - bc < 0$ , 即  $ac < bc$ ,

$$\text{及 } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} < 0, \text{ 即 } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

V. 若  $a_1 > b_1, a_2 > b_2$ , 且  $a_1, a_2, b_1, b_2$  都是正

數, 則

$$a_1 a_2 > b_1 b_2.$$

因爲

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - b_1 b_2 &\equiv (a_1 a_2 - b_1 a_2) + (b_1 a_2 - b_1 b_2) \\ &\equiv a_2(a_1 - b_1) + b_1(a_2 - b_2). \end{aligned}$$

今從假設, 知

$$a_2 > 0, a_1 - b_1 > 0, b_1 > 0, a_2 - b_2 > 0,$$

故  
即

$$\underline{a_1 a_2 - b_1 b_2 > 0},$$

$$\underline{a_1 a_2 > b_1 b_2}.$$

### § 117. 不等式的分類。

不等式與等式相似，可分成二類：第一類，式中所含文字用任意數代替，不等式恆能成立，此類不等式叫做恆不等式；第二類，式中所含特別文字要用某種界限內的數值代替，不等式纔能成立，此類不等式叫做條件不等式。

[例如] 若  $a, b$  不相等， $a^2 + b^2 > 2ab$  是恆不等式； $x + 5 > 8$  是條件不等式。

### § 118. 證恆不等式。

恆不等式的證法，已見於 § 116 證不等式的基本定理，可取不等號兩邊二式的差看他正負，決定他的大小。或者用代數學初步公式或恆等式，亦可得到很多的幫助。

[例]  $b, a$  都是正數，且不相等，證

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

[證] 因為

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

今從假設， $a \neq b$ ，即  $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$  即  $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0$ ，

於是  $\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0,$

故  $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > 0,$

即  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$

[別證] 用乘法公式

$$a^2 - 2a\beta + \beta^2 = (a - \beta)^2.$$

若  $a \neq \beta$ , 則  $a^2 - 2a\beta + \beta^2 > 0,$

即  $a^2 + \beta^2 > 2a\beta,$

故  $\frac{a^2 + \beta^2}{2} > a\beta.$

今用  $a^2 = a, \beta^2 = b$  代入此式, 即得

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

### 習 題 九 十 八

證以下各恆不等式:

1.  $a, b$  同號且不相等, 證  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2.$

2.  $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ , 證  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) > (ac + bd)^2.$

3.  $a, b, c$  都是正數而不相等, 證

$$(b+c)(c+a)(a+b) > 8abc.$$

4.  $a, b, c$  都不相等, 證

$$a^2 + b^2 + c^2 > bc + ca + ab.$$

## § 119. 解不等式。

條件不等式常省稱做不等式。不等式中代表未知數的文字亦叫做元。求不等式中元所能取數值的界限，使此不等式成立的，叫做解不等式。

[例一] 解不等式  $3x - 2 > 2x + 5$ 。

移項，得  $3x - 2x > 5 + 2$

$\therefore x > 7$  答。

[例二] 解不等式  $5x - \frac{1}{4} > 7 + \frac{17x}{3}$ 。

用正數  $4 \times 3$  乘兩邊，得

$$60x - 3 > 84 + 68x,$$

移項，  $60x - 68x > 84 + 3,$

即  $-8x > 87,$

用負數  $-8$  除兩邊，得  $x < -10\frac{7}{8},$

即凡比  $-10\frac{7}{8}$  小的一切值都適合所設不等式。

## 習題九十九

解下諸不等式：

1.  $\frac{1}{15}x < \frac{7}{3}$

2.  $-x > -7.$

3.  $5x - 8 < 3x + 2.$

4.  $x - \frac{5}{7} > \frac{2}{9}x + 2.$

$$5. \frac{3x}{8} - \frac{2x-1}{12} > \frac{3x+1}{6} - \frac{5}{4}.$$

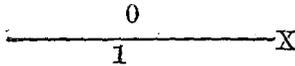
### § 120. 一元一次不等式的圖形。

一元一次不等式化成最簡後的形式是

$$x < a, \text{ 或 } b < x.$$

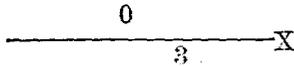
此中  $a, b$  都表已知的代數數。此中只有一個變數  $x$ ，故表

一個數尺中的界限。



[例一]  $x < -1$ ，是

表數尺上在一點  $-1$  左邊的全部份。



[例二]  $3 < x$ ，是表

數尺上一點  $+3$  右邊的全部份。

若將上二式當做二元一次不等式的特例，如

$$x < 0y + a, \text{ 或 } x > 0y + b,$$

則可表示一個平面中的界限。

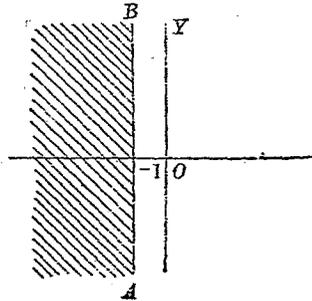
[例三]  $x < -1$  當做

$$x < 0y - 1.$$

先令  $x_1 = 0y - 1$ ，則  $x < x_1$ 。

$x_1 = 0y - 1$  的圖形是右圖中直

線  $AB$ ， $x < x_1$  表示現在所求界

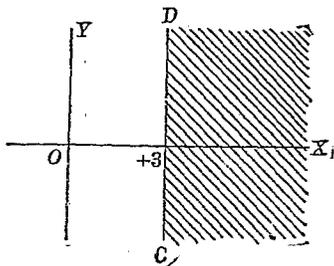


限中的各點是在  $AB$  直線的左邊，便是圖中有陰影的一部份。

[例四]  $x > 3$  當做  $x > 0y + 3$ 。

先令  $x_2 = 0y + 3$ ，此式的圖形是右圖中的直線  $CD$ 。

$x > x_2$  表示現在所求界限中的各點是在  $CD$  直線的右邊。



### 習 題 一 百

下諸一元不等式當做二元不等式用圖表其界限：

1.  $\frac{1}{15}x < \frac{7}{3}$ 。

2.  $-x > -7$ 。

3.  $x > 0$ 。

4.  $-5 < x < -3$ 。

5.  $5x - 8 < 3x + 2$ 。

6.  $x - \frac{5}{7} > 2x + 3$ 。

## 第十四章 不盡根數 虛數 根式方程式

### I. 不盡根數

§ 121. 不盡根數的需要 [問題一] 設有方程式  $x^2 - 2 = 0$ ，試求其根。依前面二次方程式解法解之，得

$$x = \pm\sqrt{2}.$$

[問題二] 設有方程式  $x^3 - 2 = 0$ ，試求其根。

先用移項法，得  $x^3 = 2$ 。

再把兩邊各開立方，得  $x = \sqrt[3]{2}$ 。

由上面例看來，可見解二次以上的方程式，所得的值，有時非含有根號，(如  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}$  之類)不可。

但是  $\sqrt{2}$  的值究竟是多少？整數呢？小數呢？有限小數呢？還是循環小數呢？答曰  $\sqrt{2}$  非整數，非有限小數，亦非循環小數 (理由詳見下節)。若用小數來表  $\sqrt{2}$  的值，其位數必多至無窮而不循環。所以若把  $\sqrt{2}$  依開方手續去開方，無論演至何年何月，終無盡止之時。所以  $\sqrt{2}$  叫做不盡根數。

同樣  $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}$  之類也都是不盡根數。(理由詳見下節)。

§ 122. 不盡根數何以爲不盡？不盡根數的性質 把任何整數開若干次方，如  $\sqrt[n]{N}$  之類，如不能得整數，則必爲不盡根數。理由何在？述之於下：——

先看特例：  $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$  ( $\frac{a}{b}$  是既約分數)；

[證] 假定  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ，

應有  $2 = \frac{a^2}{b^2}$ 。

今  $\frac{a}{b}$  是既約分數，則  $b$  不能整除  $a$ ，自然也不能整除  $a^2$ 。 $b$  既不

能整除  $a^2$ ，當然  $b^2$  更不能整除  $a^2$ 。 $b^2$  既不能整除  $a^2$ ，怎樣能得整數 2? 故

$$2 \neq \frac{a^2}{b^2}.$$

所以  $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$ .

再證通例： $\sqrt[m]{N} \neq \frac{a}{b}$  ( $\frac{a}{b}$  是既約分數)。

[證] 假定  $\sqrt[m]{N} = \frac{a}{b}$ ,

應有  $N = \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ .

因  $b$  不能整除  $a$ ，所以也不能整除  $a^m$ 。 $b$  既不能整除  $a^m$ ，當然  $b^m$  更不能整除  $a^m$ 。故  $\frac{a^m}{b^m}$  不等於任何整數，自然亦不等於  $N$ 。故

$$N \neq \frac{a^m}{b^m},$$

所以  $\sqrt[m]{N} \neq \frac{a}{b}$ 。

明白了  $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$ ， $\sqrt[m]{N} \neq \frac{a}{b}$ ，那麼對於  $\sqrt{2}$ ， $\sqrt[m]{N}$  何以不盡之故，不難一而而知。因為，假若  $\sqrt{2}$ ， $\sqrt[m]{N}$  可化爲有限小數，或循環小數，依算術上“任何有限小數，任何循環小數，均可化成分

數”的道理， $\sqrt{2}$ ， $\sqrt[m]{N}$ 應可化爲分數，這樣，便和上面已證的結果矛盾了。

所以總而言之， $\sqrt[m]{N}$ 如不能開得整數，則其真值也不能用小數來表示。但可用小數來表牠的近似值。例如 1.4；1.41；1.414；等等都是 $\sqrt{2}$ 的近似值，而非真值。 $\sqrt{2}$ 的真值就是一個“自乘可以得‘2’的數。同樣， $\sqrt[m]{N}$ 就是一個“乘 $m$ 次方可以得 $N$ ”的數。用算式來表， $\sqrt[m]{N}$ 的性質如下：

$$(\sqrt[m]{N})^m = N。$$

在不盡根數 $\sqrt[m]{N}$ 中，爲稱述便利計，我們把 $m$ 叫做根的次數， $N$ 叫做被開方數。

§ 123. 不盡根式化簡的原理 在沒有討論不盡根式各種原理之前，我們先要注意幾條條件：

(1) 本章所用  $a, b, N, \dots$  等字母，皆取正值。

(2)  $\sqrt[m]{N}$  可得  $m$  個值，但是現在只論其正的一值，就是此正值的  $m$  幂是  $N$ 。

如  $2^2=4, (-2)^2=4$ ，則 2 與  $-2$  皆爲 4 之方根。但根據上述條件，2 只認爲是  $\sqrt{4}$  的方根， $-2$  是  $-\sqrt{4}$  的方根。

(3)  $m$  爲奇數時， $\sqrt[m]{-N}$  只論其  $-\sqrt[m]{N}$  一值。

如  $\sqrt[3]{-27}$  只論其  $-\sqrt[3]{27}$  一值。

照此規定，可得化簡根式原理如下：

$$(A) \quad \sqrt[m]{a} \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}.$$

$$\begin{aligned} \text{[證]} \quad (\sqrt[m]{a} \sqrt[m]{b})^m &= (\sqrt[m]{a})^m (\sqrt[m]{b})^m \\ &= ab = (\sqrt[m]{ab})^m \end{aligned}$$

兩邊各開  $m$  次方, 得  $\sqrt[m]{a} \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$ 。

$$(B) \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

$$\text{[證]} \quad \left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} = \frac{a}{b} = \left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m$$

兩邊各開  $m$  次方, 得  $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ 。

$$(C) \quad \sqrt[m]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

$$\text{[證]} \quad (\sqrt[m]{a^{np}})^{mp} = a^{np} \quad (1)$$

$$(\sqrt[m]{a^n})^{mp} = [(\sqrt[m]{a^n})^m]^p = (a^n)^p = a^{np} \quad (2)$$

故  $(\sqrt[m]{a^{np}})^{mp} = (\sqrt[m]{a^n})^{mp}$ 。

兩邊各開  $mp$  次方, 得  $\sqrt[m]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$ 。

§ 124. 不盡根數化簡後的形狀 依據上節(A), (B), (C)三條, 任何不盡根數, 都可化成另一不盡根數使合下面的標準:

(1) 被開方數內任何質因子的指數, 不高於根的次數。

[§ 123(A)].

(2) 被開方數內各個質因子的指數與根的次數, 不再有

相同因子。[§ 123(C)]。

(3) 被開方數不含分母。[§ 123(B)並參看 § 127 例一注意]。

$$[\text{例一}] \quad \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{2^2} \sqrt{2} = 2\sqrt{2}。$$

$$[\text{例二}] \quad \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{8 \times 6} = \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{6} = 2\sqrt[3]{6}。$$

$$[\text{例三}] \quad \sqrt[6]{64 \times 27} = \sqrt[6]{64} \sqrt[6]{27} = 2\sqrt[6]{27}。$$

$$= 2\sqrt[6]{3^3} = 2\sqrt{3}。$$

$$[\text{例四}] \quad \sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{6^2} = \sqrt{6}。$$

$$[\text{例五}] \quad \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}。$$

$$[\text{例六}] \quad \sqrt[3]{\frac{1}{a^2b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{a^3b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{ab}。$$

### 習 題 一 百 零 一

化簡下列各式：

1.  $\sqrt{288}。$

2.  $\sqrt{20}。$

3.  $\sqrt[3]{128}。$

4.  $\sqrt{250}。$

5.  $\sqrt[3]{250}。$

6.  $\sqrt[3]{5000}。$

7.  $\sqrt[3]{-2187}。$

8.  $\sqrt[5]{245}。$

9.  $\sqrt[3]{256}。$

10.  $\sqrt[4]{3125}。$

11.  $\sqrt[3]{800}。$

12.  $\sqrt[4]{125}。$

13.  $\sqrt[5]{216}。$

14.  $\sqrt[5]{1125}。$

15.  $\sqrt{\frac{9}{7}}。$

16.  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}。$

17.  $\sqrt{\frac{2a}{b}}。$

18.  $\sqrt[3]{\frac{14}{27}}。$

19.  $\sqrt[3]{-289a^4b^2c^2}$ 。

20.  $\sqrt[10]{(x+y)^5}$ 。

21.  $\sqrt{1849(a+b)^2(a-b)^3}$ 。

22.  $\sqrt{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$ 。

23.  $\sqrt{x^2y^3+x^3y^2}$ 。

24.  $\sqrt[3]{x^3y^3+x^3y^3}$ 。

25.  $\sqrt{a^3+2a^2b+ab^2}$ 。

26.  $\sqrt[3]{8x^2y-24x^2y^2+24x^2y^3-8xy^4}$ 。

在下列各式內，把根號外的係數化入根號之內：

27.  $11\sqrt{3} = \sqrt{11^2} \sqrt{3} = \sqrt{121} \sqrt{3} = \sqrt{363}$ 。

28.  $6\sqrt[3]{4}$

29.  $\frac{ab}{a-b} \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}$

30.  $\frac{4}{11} \sqrt{\frac{77}{8}}$ 。

§ 125. 不盡根式的加減 兩個不盡根式，除係數外，別無他處不同的，叫做同類根式。

幾個同類根式可以加減成一個根式；幾個不同類根式，不能加減成一個根式。（這與以前所述“同類項可以加減成一項；不同類項不能相加或相減成一項，”其理相同。學者可比較一下）。

$$\begin{aligned} \text{[例一]} \quad & 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} \\ & = (3+2-4)\sqrt{5} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\text{[例二]} \quad 3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{5}. \text{ 對否? 何故?}$$

$$3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}. \text{ 對否? 何故?}$$

$$3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{8}. \text{ 對否? 何故?}$$

$$\text{[例三]} \quad 3\sqrt{5} + 2\sqrt[3]{5} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt[3]{5}. \text{ 何故?}$$

$$\text{[例四]} \quad \sqrt{20} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$$

$$= (2+3)\sqrt{5} = 5\sqrt{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{[例五]} \quad & \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{3} + \sqrt{75} \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} + 5\sqrt{3} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{2} + 6\sqrt{3}. \end{aligned}$$

由上列諸例看來，可得不盡根式的加減規則如下：

第一步。 化各個不盡根式成最簡的形狀。

第二步。 把同類根式的係數，依其原冠的符號加減之，以這所得結果置於公共根式之前，作為根式的係數。

第三步。 把不同類諸根式，依其原冠的符號，分別用加減號聯結起來（以示相加或相減之意）。

## 習 題 一 百 零 二

試化簡下列各式：

1.  $5\sqrt{45} - 2\sqrt{20} + 8\sqrt{5}$ 。
2.  $5\sqrt{63} + 6\sqrt{7} - 8\sqrt{28}$ 。
3.  $\sqrt{44} + 5\sqrt{176} - 2\sqrt{99}$ 。
4.  $5\sqrt{363} - 2\sqrt{243} + 3\sqrt{192}$ 。
5.  $5\sqrt[3]{81} - 7\sqrt[3]{192} + 4\sqrt[3]{648}$ 。
6.  $\sqrt{2} + 5\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{50}$ 。
7.  $\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{4}$ 。

8.  $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} + \sqrt{\frac{1}{9}}$ .
9.  $3\sqrt{147} - \frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{37}}$ .
10.  $\sqrt[3]{-54} - 4\sqrt[3]{-16} + 5\sqrt{250}$ .
11.  $3\sqrt{5} + \sqrt{90} + \sqrt{10} - \sqrt{90}$ .
12.  $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{1}{75}}$ .
13.  $\sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8}$ .
14.  $\sqrt[3]{6} + \sqrt{6} + \sqrt[3]{6}$ .
15.  $3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} - 6\sqrt{x} + 7\sqrt{y}$ .
16.  $\sqrt{(a+b)^2c} + \sqrt{(a-b)^2c} - 2a\sqrt{c}$ .
17.  $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}} + 2 + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}} - 2 + \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$ .
18.  $\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{1}{xy}} + \sqrt{xy} + \sqrt{\frac{1521}{x^3y+2x^2y^2+xy^3}}$ .

§ 126. 不盡根式的乘法 依前 § 123 (A) 可見兩個同次根可以相乘。不同次根，如欲相乘，須先求各根式根指數的 L. C. M.，根據  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[mn]{a^{mp}}$ ，各以同數乘各根式的根指數，和被開方式的指數，使各根式均得以所求出的 L. C. M. 為根指數；這樣把不同次根化為同次根，然後相乘。

$$\begin{aligned}
 \text{【例一】 } \sqrt{2}\sqrt{84}\sqrt{6} &= \sqrt{2 \times 84 \times 6} \\
 &= \sqrt{2 \times 2^2 \times 3 \times 7 \times 2 \times 3} \\
 &= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 7} = 12\sqrt{7}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[例二]} \quad \sqrt[3]{2} \sqrt{3} &= \sqrt[6]{2^2} \sqrt[6]{3^3} \\
 &= \sqrt[6]{2^2 \times 3^3} = \sqrt[6]{108}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[例三]} \quad \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{24}) &= \sqrt{2} \sqrt{3} \\
 &+ \sqrt{2} \sqrt{24} = \sqrt{2 \times 3} + \sqrt{2 \times 24} \\
 &= \sqrt{6} + 4\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[例四]} \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{7}) \\
 &= \sqrt{2} \sqrt{5} + \sqrt{3} \sqrt{5} \\
 &+ \sqrt{2} \sqrt{7} + \sqrt{3} \sqrt{7} \\
 &= \sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{14} + \sqrt{21}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[例五]} \quad (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \\
 &= (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b.
 \end{aligned}$$

[註] 根式 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 與根式 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 二者叫做共軛根式。共軛根式的積，恆不含根式。這個結果很為重要。學者務宜注意。

### 習 題 一 百 零 三

求下列各積：

1.  $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{10}$ 。

2.  $\sqrt{3} \times \sqrt{24} \times \sqrt{5}$ 。

3.  $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{324}$ 。

4.  $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{\frac{1}{250}}$ 。

5.  $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{5}$ 。

6.  $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{3}$ 。

7.  $2\sqrt{3}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ 。

8.  $3\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})$ 。

9.  $(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})$ 。
10.  $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ 。
11.  $(-\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ 。
12.  $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ 。
13.  $(-\sqrt{2}+\sqrt{3})(-\sqrt{2}-\sqrt{3})$ 。
14.  $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{20}-\sqrt{12})$ 。
15.  $(\sqrt{x}+3\sqrt{y})(\sqrt{x}-3\sqrt{y})$ 。
16.  $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})(-\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})$ 。

§ 127. 不盡根式的除法 不盡根式的除法，就是把被除數與除數同乘以同一適當的根式，使除數（不是被除數）不含根式。

[例一] 
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}。$$

[注意] 在  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  與  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  之中，二者同有  $\sqrt{3}$ ；而前式的分子是 1，後式的分母是 3。似乎  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  比  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  較簡，那麼我們何必把  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  化成  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  呢？原因如下？

設  $\sqrt{3}$  的近似值為 1.73205。由  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  直接求牠的近似值，須演  $\frac{1}{1.73205}$  除算。但若由  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  求牠的近似值，只須演算  $\frac{1.73205}{3}$ 。這種求近似值的方法非但比較便利，並且亦比較精確。

[例二] 
$$\frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}。$$

[例三] 
$$\frac{5}{\sqrt[3]{4}} = \frac{5 \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{2}。$$

$$\begin{aligned}
 \text{[例四]} \quad \frac{a^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} &= \frac{a^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \\
 &= \frac{a^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}。
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[例五]} \quad \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} &= \frac{2 \times (\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})} \\
 &= \frac{2 \times (\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2+3+2\sqrt{6}-5} \\
 &= \frac{2 \times (\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}) \times \sqrt{6}}{2\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \\
 &= \frac{2 \times (\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30})}{2\sqrt{36}} \\
 &= \frac{2 \times (2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30})}{12} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{6}。
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[例六]} \quad \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}+a} &= \frac{b^2(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{(\sqrt{a^2+b^2}+a)(\sqrt{a^2+b^2}-a)} \\
 &= \frac{b^2(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{(a^2+b^2)-a^2} \\
 &= \frac{b^2(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{b^2} \\
 &= \sqrt{a^2+b^2}-a。
 \end{aligned}$$

## 習題一百零四

求下列各式的結果：

1.  $\sqrt{3} \div \sqrt{2}$ 。

2.  $\sqrt{2} \div \sqrt{3}$ 。

3.  $3 \div \sqrt{2}$ 。

4.  $2 \div \sqrt{3}$ 。

5.  $3 \div \sqrt[3]{2}$ 。

6.  $2 \div \sqrt[3]{3}$ 。

7.  $\sqrt[3]{3} \div \sqrt[3]{2}$ 。

8.  $\sqrt[3]{2} \div \sqrt[3]{3}$ 。

9.  $1 \div (\sqrt{3} + \sqrt{5})$ 。

10.  $(2 - \sqrt{3}) \div (1 + \sqrt{3})$ 。

11.  $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \div (\sqrt{2} - \sqrt{3})$ 。

12.  $(\sqrt{7} - \sqrt{13}) \div (\sqrt{7} + \sqrt{19})$ 。

13.  $1 \div (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ 。

14.  $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) \div (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ 。

15.  $\sqrt{3} \div \sqrt{250}$ 。

16.  $(3 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2) \div (5 - \sqrt{6})$ 。

17.  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \div \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ 。

18.  $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) \div (5 + 2\sqrt{6})$ 。

19.  $\frac{y^2}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}$ 。

20.  $\frac{r^3}{\sqrt{x^2 + a^2} + a}$ 。

設  $\sqrt{3} = 1.73205$ ,  $\sqrt{5} = 2.23607$ , 求下列各商到小數四位：

21.  $\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2}$ 。

22.  $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2 - 2\sqrt{15}}$ 。

## II. 虛數

## § 128. 虛數的需要及其性質

[問題一] 設有方程式  $x^2 + 1 = 0$ , 試求其根。依二次方程

式解法解之，得  $x = \pm\sqrt{-1}$ 。

[問題二] 設有方程式  $x^2 + x + 1 = 0$ ，試求其根。

依公式求解，得  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2}$ 。

由上二例看來，可見解二次方程式所得的值，有時非含負數的平方根不可。

但是，負數的平方根，如  $\sqrt{-1}$  之類，果為何值？ $+1$  呢？抑  $-1$  呢？假定  $\sqrt{-1} = +1$ ，那麼把兩邊各自平方，應得  $-1 = +1$ ，於理不通。可見  $\sqrt{-1} \neq +1$ 。假定  $\sqrt{-1} = -1$ ，把兩邊各自平方，應得  $-1 = +1$ ，於理不通。可見  $\sqrt{-1}$  也非  $-1$ 。然則  $\sqrt{-1}$  究為何值？應之曰 “ $\sqrt{-1}$  就是平方能得  $-1$  的一個數。不但如此，在通例， $\sqrt{-a}$  就是平方能得  $-a$  的一個數”。用算式來表， $\sqrt{-a}$  的性質如下：

$$(\sqrt{-a})^2 = -a。$$

在以前，任何正負整數，分數或不盡根數，其平方恆為正數而今  $\sqrt{-a}$  的平方，如  $a$  取正值時卻為負數。這  $\sqrt{-a}$  的性質和以前所述的正負整數分數或不盡根數等等，不是大不相同嗎？的確！迥然不同。因其性質不同，故各予以不同的專名。依習慣，把  $\sqrt{-a}$  叫做虛數。對於虛數而言， $\sqrt{+a}$  叫做實數。

[註一] 虛實二數非同類之數，猶之男女非同性之人。問  $\sqrt{-4}$ ， $\sqrt{-3}$ ，

$\sqrt{-1}$ , 等各爲那個實數, 猶之間阿哥, 阿弟各爲父親的第幾女, 這話自然不通。

〔註二〕 因求解二次方程式  $x^2+a^2=0$  必然產生一種新數  $\sqrt{-a^2}$ 。這種事例並沒有什麼可怪的地方。在算學上每解一種新的問題, 往往有一種新數的產生。例如(1)求解  $3x-5=0$  及其同類方程式, 乃有分數的產生;(2)求解  $x+a^2=0$ , 乃有負數的產生,(3)求解  $x^2-3=0$ , 及其同類方程式, 乃有不盡根數的產生。此類事例, 業已數見不鮮, 絕不希奇。何以到了虛數, 就要兩樣看待呢! 所要注意的, 新數原非舊數, 不能以舊數來表示, 例如分數不能以整數來表示; 負數不能以正數來表示; 不盡根數不能以整數或分數來表示; 當然, 虛數也不能以實數來表示。

§ 129. 虛數的化簡 爲便利計  $\sqrt{-1}$  常省寫爲  $i$  (即  $\sqrt{-1}=i$ )。由是, 任何虛數均可以  $i$  的倍數表之。例如,

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i.$$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3i.$$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}i.$$

$$\sqrt{-k^2} = \sqrt{k^2}\sqrt{-1} = ki.$$

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m}\sqrt{-1} = \sqrt{m}i.$$

$$\sqrt{-12} = \sqrt{12}\sqrt{-1} = \sqrt{12}i = 2\sqrt{3}i.$$

§ 130. 虛數的加減 例如  $ai+bi=?$  欲答這個問題, 先要明白  $ai$  與  $bi$  的意義。

由上節知  $ai = i$  的  $a$  倍,

$bi = i$  的  $b$  倍,

故  $ai+bi=i$  的  $(a+b)$  倍。

$$\therefore \underline{ai+bi=(a+b)i}。$$

同理  $\underline{ai-bi=(a-b)i}。$

[例一]  $3i+4i=(3+4)i=7i。$

[例二]  $3i+4i-8i=(3+4-8)i=-i。$

[例三]  $2i+\sqrt{3}i=(2+\sqrt{3})i。$

[例四]  $2+2i+5-\sqrt{-36}=2+2i+5-6i$   
 $= (2+5) + (2-6)i$   
 $= 7-4i。$

[例五]  $\sqrt{-a^2}+\sqrt{-b^2}+\sqrt{-c}$   
 $= ai+bi+\sqrt{c}i$   
 $= (a+b+\sqrt{c})i。$

### 習 題 一 百 零 五

求下列各式的結果：

1.  $3i+4i-6i+i。$

2.  $-i-2i-3i。$

3.  $xi+yi-zi。$

4.  $\sqrt{-36}+\sqrt{-144}-\sqrt{81}i。$

5.  $\sqrt{-36}-\sqrt{144}。$

6.  $\sqrt{-2}-\sqrt{-4}-\sqrt{9}。$

7.  $\sqrt{-a^2c^3+a^3c^2}+\sqrt{-(a-c)^3}。$

8.  $\sqrt{-\frac{1}{5}}+\sqrt{-\frac{1}{16}}。$

9.  $\sqrt{-\frac{2}{3}}+\sqrt{-54}。$

10.  $\sqrt{-a^2-2ab-5^2}+\sqrt{-a^2+2ab-6^2}。$

11.  $\sqrt{-7} - \sqrt{-8}$ 。                      12.  $\sqrt{-3} + \sqrt{-243} + \sqrt{-863}$ 。  
 13.  $\sqrt[3]{-8} = 2i$ ,                      對不對? 何故?  
 14.  $\sqrt[5]{-32} = 2i$ ,                      對不對? 何故?  
 15.  $\sqrt[4]{-16} = 2i$ ,                      對不對? 何故?

[提示]  $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16} \sqrt[4]{-1} = 2\sqrt[4]{-1}$ 。但  $\sqrt[4]{-1}$  等於  $\sqrt{-1}$  否?

§ 131. 虛數乘法 由 § 128 知  $i^2 = -1$ , 故

$$i = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

$$i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \quad i^8 = 1.$$

推之,  $i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \quad i^{4n+4} = 1.$

由此得虛數的乘法如下:

$$ai \times bi = ab i^2 = -ab,$$

$$ai \times bi \times ci = abci^3 = -abci$$

$$ai \times bi \times ci \times di = abcd i^4 = abcd.$$

$$ai \times bi \times ci \times di \times ei = abcdei$$

[例一]  $-3i \times 4i = -12i^2 = -12(-1) = 12.$

[例二]  $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} \times \sqrt{-49}$

$$= \sqrt{2} i \times \sqrt{3} i \times 7i$$

$$= 7\sqrt{2}\sqrt{3} i^3 = -7\sqrt{6} i.$$

[例三]  $2i(3-4i) = 2i \times 3 - 2i \times 4i$

$$= 6i - 8i^2 = 8 + 6i.$$

[註] 一個實數和一個虛數用加減號相連, 叫做複數, 例如  $(3+2i)$ ,

$(3-4i)$ ,  $(a+bi)$ ,  $(a-bi)$  都是複數。

【例四】  $(3+2i)(4-3i)$

$$= 3 \times 4 - 3 \times 3i + 4 \times 2i - 3i \times 2i$$

$$= 12 - 9i + 8i - 6i^2$$

$$= 18 - i。$$

【例五】  $(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2。$

【註】  $a+bi$  和  $a-bi$  二者叫做共軛複數。兩個共軛複數的積恆為實數。這結果也很重要。學者宜熟記之。

### 習 題 一 百 零 六

1. 求證  $-1=1。$

【證】  $\sqrt{-3} \times \sqrt{-5} = \sqrt{3}i \times \sqrt{5}i = \sqrt{3 \times 5}i^2 = -\sqrt{15}。$  (1)

依 § 123(A),  $\sqrt{-3} \times \sqrt{-5} = \sqrt{(-3) \times (-5)} = \sqrt{15}。$  (2)

比較(1), (2)得  $-\sqrt{15} = \sqrt{15}。$

兩邊各除以  $\sqrt{15}$ , 得  $-1=1。$

【注意】 上面證法, 錯在何處? 公式  $\sqrt{M} \times \sqrt{N} = \sqrt{MN}$ , 在  $M, N$  都是實數時, 是否仍能適用? 然則  $\sqrt{-3} \times \sqrt{-5}$  可否化成  $\sqrt{(-3) \times (-5)}$ ?  $\sqrt{-3} \times \sqrt{-5}$  應該怎樣乘法?

求下列各式的結果:

2.  $2i \times 3i \times 4i \times 5i。$

3.  $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} \times \sqrt{-16} \times \sqrt{-25}。$

4.  $\sqrt{7} \times \sqrt{-6} \times \sqrt{-7} \times \sqrt{6}。$

5.  $\sqrt{-8} \times \sqrt{-2} \times \sqrt{-15} \times \sqrt{3}。$

6.  $(3+4i)(3-4i)。$

7.  $(7+8i)(8-7i)$ 。
8.  $(1+2i)(1-2i)(1-4i)$ 。
9.  $(3+5i)(3-5i)(3^2+5^2i)$ 。
10.  $(1+i)(3+4i)(1-2i)(3-4i)$ 。
11.  $(7-\sqrt{-64})(7+\sqrt{-64})(1-i)^2$ 。
12.  $(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)^2(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)^2$ 。
13.  $(7+\sqrt{-24})(7+\sqrt{24})$ 。

§ 132. 虛數除法 以虛數(或複數)除實數或虛數(或複數),就是以適當的虛數(或複數)同乘被除數與除數,使除數(不是被除數)化爲實數。

[例一] 
$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i。$$

[例二] 
$$\frac{1}{32i^3} = \frac{i}{32i^4} = \frac{i}{32}。$$

[例三] 
$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i。$$

[例四] 
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}-3i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i} &= \frac{(\sqrt{2}-3i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)} \\ &= \frac{2-3\sqrt{3}-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})i}{2+3} \\ &= \frac{2-3\sqrt{3}-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})i}{5} \end{aligned}$$

### 習題 一百零七

求下列各式的結果:

1.  $1 \div 5i^2 \div 3i^3$ .
2.  $(3+2i) \div i^2 \div i^{15}$ .
3.  $(7+8i) \div (7-8i)$ .
4.  $(7-8i) \div (7+8i)$ .
5.  $(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) \div (1+4i)$ .
6.  $(\sqrt{2}+\sqrt{3}i) \div (\sqrt{2}-\sqrt{3}i)$ .
7.  $1 \div (2+\sqrt{3}i) \div (2-\sqrt{3}i)$ .
8.  $-8 \div \sqrt{3}-\sqrt{5}i \div (\sqrt{3}+\sqrt{5}i)$ .
9.  $(3+\sqrt{2}i)^2 \div (3-\sqrt{2}i)$ .
10.  $1 \div (\sqrt{3}+\sqrt{-315})^2 \div (\sqrt{3}-\sqrt{-315})^2$ .
11.  $\sqrt{-a+b} \div \sqrt{-a^2+2ab-b^2}$ .
12.  $(a^2+b^2) \div (a+bi)$ .
13.  $(a^2+2ab+b^2) \div (\sqrt{a}+\sqrt{b}i)$ .
14.  $(c+di) \div (a+bi)$ .

### III. 根式方程式

§ 133. 根式方程式的解法及應用 根號內含有未知數的方程式叫做根式方程式。例如  $\sqrt{x+1}=5$ ,  $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=10$  等都是根式方程式，而  $\sqrt{3+x}=5$ ,  $\sqrt{3}x+\sqrt{3}=\sqrt{6}$  等則非根式方程式。

求解應用問題，有時可得根式方程式。舉例於下：

[例一] 把某數與 36 的和開平方，從這平方根減去某數，其結果等於 6，求某數。

[解法] 設  $x =$  某數，從題意應得方程式

$$\sqrt{x+36} - x = 6 \quad (1)$$

由此方程式怎樣去求  $x$  的值，非設法棄去根號不可。怎樣可去根

號，非把兩邊各自平方不可。但若由(1)式直接平方，那麼牠的左邊將成  $x+36+x^2-2x\sqrt{x+36}$ 。去了一個方根，又來一個方根了。故必先移項，使其一邊不含方根如下式：

$$\sqrt{x+36} = x+6 \quad (2)$$

然後平方，得  $x+36 = (x+6)^2$  (3)

$$x+36 = x^2+12x+36。$$

解之，得  $x_1=0, x_2=-11。$

[驗算] (1)以  $x=0$  代入(1)式，則得等式  $\sqrt{0+36}-0=6$ 。左右相合。故  $x=0$  確為(1)式的真根。又以 0 代入原題，也合題意，故 0 是所求的數。

(2)以  $x=-11$  代入(1)式，則得方程式  $\sqrt{-11+36}-(-11)=6$ ，左右不合，故  $x=-11$  不是(1)式的真根，我們叫牠做偽根。(註)

[例二] 於某數與 5 之和的平方根加入某數本身的平方根，其結果等於某數 4 倍與 9 之和的平方根，求某數。

[解法] 設  $x$  = 某數，從題意得方程式：

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = \sqrt{4x+9}。 \quad (1)$$

平方，得  $x+5+x+2\sqrt{x(x+5)} = 4x+9$

移項，得  $2\sqrt{x(x+5)} = 2x+4$

就是  $\sqrt{x(x+5)} = x+2$

平方,得

$$x(x+5) = x^2 + 4x + 4$$

化簡,得

$$x = 4.$$

[驗算] 以  $x=4$  代入原方程式(1),左右相合,故 4 是(1)式的真根。又以 4 代入原題,也能適合,故 4 是所求的數。

[註] (1) 偽根何自而來? 這個問題可由(2), (3)二式的關係去解決。

由(2)式移項,得  $\sqrt{x+35} - (x+6) = 0$  (2)

由(3)式移項,得  $(x+36) - (x+6)^2 = 0$  (3)

或  $[\sqrt{x+35} - (x+6)] [\sqrt{x+35} + (x+6)] = 0$ . (3')

可見由(2)式變為(3)式,是把(2)式的兩邊同乘以  $\sqrt{x+35} + (x+6)$ 。當  $x = -11$  時,這乘式的值等於零,故由 §108(3),知  $x = -11$  是(2'),(1)式的偽根。

(2) 有時何以不增偽根? 設有方程式

$$x+1-3\sqrt{x-1}=0. \quad (1)$$

試求其根。依法移項平方,得  $(x+1)^2 = 9(x-1)$ . (2)

解之,得  $x=2$  或  $5$ 。二者俱是(1)式的真根。這裏何以不增偽根呢?再就兩方程式(1),(2)的關係來研究:

由(2)移項,得  $(x+1)^2 - 9(x-1) = 0$  (2')

實即  $(x+1+3\sqrt{x-1})(x+1-3\sqrt{x-1}) = 0$ . (2'')

可見由(1)式變為(2)式,是把(1)式的兩邊同乘以  $x+1+3\sqrt{x-1}$ 。今當  $x=2$  或  $5$  時,這乘式的值皆不為零,故  $x=2$ , 或  $5$  皆是(1)式的真根,而非偽根。

總之。把方程式(A)兩邊各自平方,得方程式(B),有時可增偽根有時不增偽根。增不增的判定,原可依本 [註](1),(2)去推求,但最簡易的方法,還是以解得的值代入原方程式(A)去驗算。

習題一百零八

解下列各方程式並分別其真根或偽根。

1.  $3x+2-\sqrt{x(x+24)}=0$ 。

2.  $3x+2-\sqrt{9x(x+3)}=0$ 。

3.  $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$ 。

4.  $\sqrt{x+12}+\sqrt{x-12}=6$ 。

5.  $x^2-5+\sqrt{3x^2-5}=0$ 。

6.  $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\sqrt{6x+3}$ 。

7.  $\sqrt{3x+3}+\sqrt{2x+10}=\sqrt{13+6x}$ 。

8.  $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+6}=\sqrt{2x-6}$ 。

9.  $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}+\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}=10$ 。

10.  $x^2+5x+2-3\sqrt{x^2+5x}=0$ 。

[解法] 化原式成 $(\sqrt{x^2+5x})^2-3\sqrt{x^2+5x}+2=0$ ，依二次方程式解法得 $\sqrt{x^2+5x}=1$ ， $\sqrt{x^2+5x}=2$ 。由此再求 $x$ 的值。

[注意] 假若依常法，把原方程式移項平方，則得四次方程式，求解手續就很麻煩了。

11.  $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x}=-6$ 。

12.  $x^2+x+3-2\sqrt{x^2+2x+3}=35-x$ 。

13.  $\sqrt[3]{x+8}=3$ 。

14.  $\sqrt[3]{x+9}+\sqrt{x+9}=6$ 。

15.  $-\sqrt[3]{x-37}+\sqrt[3]{x}=1$ 。

16. 矩形的對角線比闊多 1 市尺，周圍長 14 市尺。求其面積。

17. 兩數的差是 19，其各自平方根的差是 1。求這兩數。

18. 以兩數的和除這兩數的差，得 $\frac{3}{5}$ 。以這兩數平方根的和除這兩數的差，得 $\frac{1}{3}$ 。求這兩數。

19. 解下列各方程式，是否需把兩邊各自平方？何故？

(a)  $3x + \sqrt{2} = 5x - \sqrt{3}$ ;

(b)  $\sqrt{3}x + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}$ ;

(c)  $\sqrt{3}x + \sqrt{2}x + \sqrt{6}x = 4 - x$ 。

20. 解上題各方程式。

## 第十五章 比 比例 變數法

### I. 比

§ 134. 關於比的重要名詞 爲便於說明起見，先述下列幾個重要名詞：

(1) 比及比值 同類二數量的大小關係，以一量含有他量的倍數表示，叫做這二數量的比。如欲表示  $a$  與  $b$  的比，普通寫成  $a:b$ 。比既是表示一量含有他量的倍數關係，則比的值，或比值，即爲這二數量的商。所以  $a:b$ ，也可寫成  $a \div b$ ，或  $\frac{a}{b}$ 。

(2) 比的兩項。在  $a:b$  中  $a$  叫做比的前項， $b$  叫做比的後項， $a$  與  $b$  統稱比的兩項。

把比和除法及分數比較來看，就得下面的關係：

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{被除數}}{\text{除數}} = \frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{\text{前項}}{\text{後項}}。$$

(3) 優比，劣比。比值大於 1 的叫做優比，比值小於 1

的叫做劣比。

例如 4:5 是劣比, 5:4 是優比。然則比中的優比, 劣比, 與分數中的假分數, 真分數有沒有關係?

(4) 正比, 反比。  $a:b$  是  $a$  和  $b$  正比。 $a$  的倒數和  $b$  的倒數的比, 如  $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ , 是  $a$  和  $b$  的反比。假使前項  $\frac{1}{a}$  和後項  $\frac{1}{b}$  同時用  $ab$  去乘, 得  $b:a$ ; 所以  $a$  和  $b$  的反比, 就是  $b$  和  $a$  的正比。

§ 135. 比的重要定理 關於比的定理最簡而最要的有下列三條:

(1) 比的兩項, 若各以同數 (或正或負但不為零) 去同乘或同除, 那麼這比值不變。

$$[\text{證}] \quad a:b = \frac{a}{b} = \frac{ma}{mb} = ma:mb。$$

(2) 比的兩項, 若各以同數 (或正或負) 去同加或同減, 那麼這比值恆變 (原來比值為 1 的除外)。

[證] 以  $\frac{a}{b}$  表原比的值,  $\frac{a+n}{b+n}$  表新比的值, 則原比與新比

的差為

$$\frac{a+n}{b+n} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bn-ab-an}{b(b+n)} = \frac{(b-a)n}{b(b+n)} \neq 0 \quad (\because b \neq a)$$

$$\therefore \frac{a+n}{b+n} \neq \frac{a}{b}$$

## 習 題 一 百 零 九

1. 用最簡分數表下列各比的值：

(a) 49:56。

(b) 32:40。

(c)  $3\frac{1}{2} : 2\frac{1}{3}$ 。

(d)  $x^2 - y^2 : x^2 + 2xy + y^2$ 。

(e)  $x - y : \sqrt{x} + \sqrt{y}$ 。

(f)  $a^3 - b^3 : a^2 - b^2$ 。

2. 化簡下列各比：

(a)  $\frac{1}{x^4 + x^2y^2 + y^4} : \frac{1}{x^2 - xy - y^2}$ 。

(b)  $\frac{1}{x-y} : \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ 。

(c)  $\frac{1}{6^4 + x^4} : \frac{1}{x^2 + 4x + 8}$ 。

3. 求下列各式中  $x$  與  $y$  的比：

(a)  $8x + 2y = 7x + 8y$ 。

(b)  $ax + by = cx + dy$ 。

(c)  $x^2 + 5xy = y^2 - 2xy$ 。

(d)  $3x^2 + 4xy + y^2 = 0$ 。

## II. 比例

§ 136. 比例的重要名詞。為說明便利起見，先釋下列諸名詞：

(1) 比例，正比例，反比例。在  $a, b, c, d$  四數中，假如

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，我們就說  $a, b, c, d$  四數成比例，也可以說成正比例。

例如  $4:6=10:15$ ，我們說 4, 6, 10, 15 成比例。

又如 4, 10, 15, 4 不成比例，因為  $4:10 \neq 15:4$ 。

在  $a, b, c, d$  四數中，假如  $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\frac{c}{d}}$ ，我們說  $a, b, c, d$  四數成

反比例。假使等號左邊的分數，分母各乘  $ab$ ，右邊的各乘  $ca$ ，得  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ；所以  $a, b, c, d$  四數的反比例等於  $b, a, d, c$  四數的正比例。

(2) 外項，內項。在比例  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  (即  $a:b=c:d$ ) 中， $b, c$  二數叫做內項； $a, d$  二數叫做外項。

(3) 比例第四項。在  $a:b=c:d$  中， $d$  叫做  $a, b, c$  的比例第四項。

例如 4, 6, 10 的比例第四項是 15；但 6, 4, 10 的比例第四項則是  $6\frac{2}{3}$ ，而非 15。何故？

(4) 比例中項。在  $a:b=b:c$  中， $b$  叫做  $a, c$  的比例中項。

例如  $4:6=6:9$ ，故 6 是 4 與 9 的比例中項。

(5) 比例第三項。在  $a:b=b:c$  中， $c$  叫做  $a, b$  的比例第三項。

例如  $4:6=6:9$ ，故 9 是 4 與 6 的比例第三項。

又如  $2:3=10:15$ ，但 10 非 2 與 3 的比例第三項，因為  $2:3 \neq 3:10$ 。

§ 137. 比例的重要定理。關於比例的定理，最簡要的如下：

(1) 四數兩兩的積相等，則此四數成比例。

即  $ad=bc$ ，則  $a:b=c:d$ ；

若四數成比例 ( $a:b=c:d$ )，則：

(2) 兩外項的積等於兩內項的積。

即  $ad=bc$ 。

(3) 內項和外項可以交換。

即  $b:a=d:c$ 。

(4) 內項可以交換。

即  $a:c=b:d$ 。

(5) 二比相等，其各前項與後項的和對於後項的比亦相等。

即  $a+b:b=c+d:d$ 。

(6) 二比相等，其各前項與後項的差對於後項的比亦相等。

即  $a-b:b=c-d:d$ 。

(7) 二比相等，各前項與後項的和對於與後項的差其比亦相等。

即 
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

(8) 諸比相等時，若把所有諸比前項的和，比所有諸比後項的和，那麼新比的值，亦與原有諸比相等，叫做連比定理。

即 若 
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \dots\dots\dots,$$

則 
$$\frac{a+c+e+g+\dots}{b+d+f+h+\dots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \dots$$

[證] (1) 原設  $ad = bc,$

兩邊各除以  $bd$ ，就得  $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}.$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$

[證] (2) 原設  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$

兩邊各乘以  $bd$ ，得  $bd \times \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times bd.$

$\therefore ad = bc.$

[證] (3) 原設  $\frac{a}{d} = \frac{c}{d},$

由(2)，得  $ad = bc$

兩邊各除以  $ac$ ，得  $\frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac}.$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{d}{c}。$$

[證] (4) 原設  $a:b=c:d,$

由(2), 得  $ad=bc。$

兩邊各除以  $cd,$  得  $\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd}。$

$$\therefore a:c=b:d。$$

[證] (5) 原設  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$

兩邊各加以 1, 得  $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1。$

$$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}。$$

[證] (6) 原設  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$

兩邊各減以 1, 得  $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1。$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}。$$

[證] (7) 原設  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$

由(5)得  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}。 \quad (A)$

由(6)得  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (B)$

$$(A) \div (B), \text{ 就得 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

$$[\text{證}]_r (8) \text{ 原設 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \dots\dots$$

如以  $r$  表原有諸比的值, 則

$$a = br, \quad c = dr, \quad e = fr, \quad g = hr \dots\dots$$

$$\therefore \frac{a+c+e+g+\dots\dots}{b+d+f+h+\dots\dots} = \frac{br+dr+fr+hr+\dots\dots}{b+d+f+h+\dots\dots} =$$

$$\frac{(b+d+f+h+\dots\dots)r}{b+d+f+h+\dots\dots} = r = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \dots\dots$$

§ 138. 前節定理的應用。前節諸定理, 在幾何方面應用很廣。學者能於此時多加訓練, 將來在幾何方面, 定能事半功倍。反之, 此時對於上述諸理, 若不能應用自如, 將來學習幾何, 自然分外叫苦。這是就學習幾何一方面說。

再就代數本身說, 前節諸理也很重要。倘能應用純熟, 將見出化入神, 對於很難的問題, 略施妙計, 便得其解。茲舉數例於下:

第一。關於證明等式者:

[例一] 若  $a:b=c:d$ , 求證

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)(a-b-c+d) \\ = (a-b+c-d)(a+b-c-d). \end{aligned}$$

[證法]  $\therefore a:b=c:d$

$$\therefore (a+b):(a-b) = (c+d):(c-d)。 \quad [\text{上節(7)}]$$

$$\therefore (a+b):(c+d) = (a-b):(c-d)。 \quad [\text{上節(4)}]$$

$$\begin{aligned} \therefore (a+b+c+d):(a+b-c-d) \\ = (a-b+c-d):(a-b-c+d)。 \quad [\text{上節(7)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (a+b+c+d)(a-b-c+d) \\ = (a-b+c-d)(a+b-c-d)。 \quad [\text{上節(2)}] \end{aligned}$$

[例二] 若  $a:b=c:d$ ,

求證  $(ab+cd):(ab-cd) = (a^2+c^2):(a^2-c^2)$ 。

$$[\text{證法}] \quad \therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \therefore \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{何故?}$$

$$\therefore \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \cdot \frac{b}{d} \quad \text{何故?}$$

$$\therefore a^2 : c^2 = ab : cd \quad \text{何故?}$$

$$\therefore (a^2+c^2):(a^2-c^2) = (ab+cd):(ab-cd)。 \quad \text{何故?}$$

[例三] 若  $a:b=b:c=c:d$ ,

求證  $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd} = \frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}$ 。

$$[\text{證法}] \quad \text{原設各比} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \quad (A)$$

$$\text{故用 135 定理(1), 得各比} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = \frac{b \cdot b}{c \cdot b} = \frac{c \cdot c}{d \cdot c}$$

$$\text{再用 135 定理(3), 得各比} = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd} \quad (B)$$

又由原設(A),用定理(1),得

$$\text{各比} = \frac{ab}{b \cdot b} = \frac{bc}{c \cdot c} = \frac{cd}{a \cdot d}$$

再用定理(3),得  $\text{各比} = \frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}$  (C)

比較(B),(C),就得  $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd} = \frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}$

第二。關於解方程式者：

[例四] 解方程式  $\frac{2x^2+3x+\sqrt{x-1}}{2x^2+3x-\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}-2}$

[解法] 由 § 137(7),得

$$\begin{aligned} \frac{2x^2+3x+\sqrt{x-1}+2x^2+3x-\sqrt{x-1}}{2x^2+3x+\sqrt{x-1}-2x^2-3x+\sqrt{x-1}} \\ = \frac{\sqrt{x-1}+2+\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+2} \end{aligned}$$

就是  $\frac{2(2x^2+3x)}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1}}{2 \cdot 2}$

∴  $2(2x^2+3x) = (\sqrt{x-1})^2$

即  $2(2x^2+3x) = x-1$ 。

∴  $4x^2+6x-x+1=0$

解之,得  $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{4}$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{【例五】 解聯立方程式} \quad & \begin{cases} \frac{x+y+xy}{x+y-xy} = 5 & (A) \\ \frac{x-y+xy}{x-y-xy} = -\frac{1}{3} & (B) \end{cases}
 \end{aligned}$$

【解法】 用 § 137, (7) 化 (A), (B) 二式成

$$\begin{cases} \frac{2(x+y)}{2xy} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{2(x-y)}{2xy} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

就是

$$\begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{3}{2} & (A') \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} & (B') \end{cases}$$

解之, 得

$$\begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} = 1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

### 習 題 一 百 十

- 求下列各組數的比例第四項:  
(a) 3, 9, 5. (b) 7, 8, 9. (c)  $a+b, a-b, a^2+2ab+b^2$ .
- 求下列各組數的比例中項:  
(a) 4, 9. (b) 5, 5. (c)  $x+y, x-y$ . (d)  $A, B$ .
- 求下列各組數的比例第三項:  
(a) 4, 9. (b) 5, 3. (c)  $x+y, x-y$ . (d)  $A, B$ .
- 求下列各比例式中的缺項;

(a)  $3:6=7:?$  (b)  $3:?=15:10$ 。 (c)  $9a:8b=? :7c$ 。

5. 下列各組比例式中,那幾個能成立?

(a)  $36:39=72:79$ 。 (b)  $126:168=99:133$ 。

(c)  $347:199=1736:999$ 。 (d)  $1:\sqrt{7}=\sqrt{7}:7$ 。

6. 仿 § 135 (3) 連比定理的證法,能否證 § 137 中(2)-(7)諸定理?試用此法證明該節中的(5),(6),(7)三條。

7. 仿前題證法,證明 § 138 例一,例二。

[注意] 此法與 § 138 所用證法,那一個比較簡而巧?那一個比較稍有法度可循?

8. 若  $a:b=c:d$ , 試用 § 137 所述諸定理,證明:

(a)  $a+b:a+b+c+d=a:a+c$ 。

(b)  $a^2+c^2:b^2+d^2=a^2:b^2$ 。

(c)  $la^2+mc^2:pab+qcd=lab+mc d:pb^2+qd^2$ 。

9. 利用 § 137 所述諸定理,證明下列二定理:

若(1)  $a+b-3c-3d:a-b-3c+3d=2a+2b-c-d:2a-2b-c+d$ ,

或(2)  $ab+cd:ab-cd=a^2+c^2:a^2-c^2$ ,

則各有下面的結果:

$$a:b=c:d。$$

10. (a) 若  $a:b=c:d$ , 證  $a^2+b^2+c^2+d^2:b^2+d^2=c^2+d^2:d^2$ 。

(b) 若  $a^2+b^2+c^2+d^2:b^2+d^2=c^2+d^2:d^2$ , 求證

$$a:b=c:d, \text{ 或 } a:b=-c:d。$$

11. 解下列各方程式:

(a)  $\frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^3-2x^2+5x-4}=\frac{x+2}{x-2}$ 。

(b)  $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+1}}$ 。

12. 解聯立方程式:

$$(a) \begin{cases} \frac{x+y+xy}{x+y-xy} = -11 \\ \frac{2x-y-xy}{2x-y+xy} = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{x+y+xy}{x+y-xy} = -11 \\ \frac{y+z+yz}{y+z-yz} = -\frac{19}{5} \\ \frac{x+z+zx}{x+z-zx} = -\frac{17}{3} \end{cases}$$

13. 分 36 爲 3 份使其比爲 3:4:5。

[解法] 設  $a, b, c$  爲所求的三份, 由題意得

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$$

用連比定理得  $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{3+4+5} = \frac{36}{12} = 3$

$$\begin{cases} a=3 \times 3=9 \\ b=4 \times 3=12 \\ c=5 \times 3=15 \end{cases}$$

14. 求分 105 爲四份, 使這四份的比爲 2:3:4:5。

$$15. \text{ 解聯立方程式 } \begin{cases} x+y+z=18 \\ \frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{7} = \frac{z+x}{6} \end{cases}$$

15. 仿連比定理的證法, 證本節例三

[提示] 設  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = r$ , 則  $a=br$ ,  $b=cr$ ,  $c=dr$ , 代入求證之式的

兩邊, 各自化簡, 察其結果是否相同。

[注意] 這個方法在比及比例問題中應用極廣, 學者務宜留意。能把這個方法應用純熟, 那麼關於比及比例的問題, 可以十解八九了。

17. (a) 設  $\frac{d}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ , 求證  $\frac{3a^4b^2 + 2a^2c^2 - 5e^4f}{5b^6 + 2b^2f^2 - 5f^6} = \frac{a^4}{b^4}$

(b) 設  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ , 求證

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \sqrt{\frac{l_1a^6 + m_1c^6 + n_1e^6}{l_1b^6 + m_1d^6 + n_1f^6}}$$

18. 設  $\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$ , 求證

$$\frac{l^2+a^2}{l+a} + \frac{m^2+b^2}{m+b} + \frac{n^2+c^2}{n+c} = \frac{(l+m+n)^2 + (a+b+c)^2}{(l+m+n) + (a+b+c)}$$

### III. 變數法

§ 139. 常數, 變數。[問題] 某人現有國幣 5 元。以後每日收入 3 元。問  $x$  日後, 此人應有若干元?

設所求元數是  $y$ , 則由題意應得下面的等式:

$$y = 3x + 5.$$

在這等式中,  $x, y$  的關係如下:

若 $x =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	.....
則 $y =$	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29,	.....

可見  $x, y$  的值都是可變的數, 所以  $x, y$  叫做變數。對於變數而言, 不變之數如 3, 5 等叫做常數。

在通例, 凡在一個問題中, 某量 (或數) 的值若可為種種不同的數, 那麼, 這個量 (或數) 就叫做變量 (或變數)。反之, 其值固定無可變易的量 (或數), 對於變量 (或變數) 而言, 叫做常量

(或常數)。

[例一] 每人每日吃飯四碗， $x$ 人於 $y$ 日內共吃飯 $4xy$ 碗。在此問題中，人數( $x$ )、日數( $y$ )、碗數( $4xy$ )都是變數，而4則為常數。

[例二] 在 $3x-2y=8$ 中，那個是變數，那個是常數？

[例三] 在 $3x+5=6x-7$ 中，3,5,6,7等固然是常數，就是 $x$ 也是常數而非變數，因為 $x$ 只能有一值，決不可變為他值。

§ 140. 函數(應變數)，自變數。在前節問題中，當 $x$ 的值改變時， $y$ 也隨之而變。這樣，我們把 $y$ 叫做 $x$ 的函數。(自然當 $y$ 值改變時， $x$ 的值也隨 $y$ 而變，所以也可以把 $x$ 叫做 $y$ 的函數)。推之，

(A) 在任何甲乙兩個變量中，當乙量改變時，甲量若亦隨之而變，那麼，甲量就叫做乙量的函數，或乙量的應變數。而乙量，對於應變數而言，叫做自變數。

當甲量為乙量的函數時，甲乙二量之間，必有固定關係。這關係究為怎樣的形式；則有時已知，有時未知。

[例一] 據幾何定理“圓周 $=2\pi \times$ 半徑”。在圓周，半徑二量之中，當半徑改變時，圓周亦隨之而變，故圓周是半徑的函數而半徑是自變數。又當圓周改變時，半徑亦隨之而變，故半徑也是圓周的函數，而圓周是自變數。

[例二] 當每人食量一定時，若干人所需食品的總量，隨人數而改變，故人數是自變數，所需食品總量為人數的函數。又人數多少可隨食品總量而改變，故人數也是所需食品總量的函數，而所需食品總量也可以是自變數。

[例三] 在(a)  $3x+5y-8=0$ ,

$$(b) x^2-y^2+9=0$$

中， $x$  是  $y$  的函數； $y$  也是  $x$  的函數。即  $x, y$  可互為自變數。

[例四] 小兒體重和他的年齡有關，故體重是年齡的函數，而年齡是自變數。又年齡亦與體重有關，故年齡也是體重的函數而體重是自變數。(但是欲知這種函數關係，究為怎樣的形式，那就不像前三例易於推求了)。

(B) 在甲, 乙, 丙三個 (或甲, 乙, 丙, 丁四個) 變量中, 當乙, 丙 (或乙, 丙, 丁), 諸量改變時, 甲量若亦隨之而變, 那麼甲量就叫做乙, 丙 (或乙, 丙, 丁) 諸量的函數, 或乙, 丙, (或乙, 丙, 丁) 諸量的應變數。而乙, 丙, (或乙, 丙, 丁) 諸量, 對於甲量而言, 叫做自變數。

當甲量為乙, 丙, 丁諸量的函數時, 甲, 乙, 丙, 丁, 諸量之間必有固定關係, 這關係的實際情形或為已知, 或為未知。

[例五] 據幾何定理“矩形的面積 = 長 × 闊” 在這等式中, 長, 闊二量或二量之一改變時, 面積隨之而變, 故面積是長闊二

量的函數，而長，闊二量是自變數。

[例六] 設  $y$  是每人每日的食量，則  $x$  人於  $t$  日內，所需食品的總量是  $S = xyt$ 。此處食品總量 ( $S$ ) 是人數 ( $x$ )，日數 ( $t$ )，每人每日食量 ( $y$ ) 三量的函數；而人數 ( $x$ )，日數 ( $t$ )，每人每日食量 ( $y$ ) 是自變數。

[例七] 利息是本金，利率，期數三量的函數；而本金，利率，期數三量是自變數。

[註] 函數觀念乃近世科學上最要觀念之一。無數科學家終日所研究的：第一步，量與量之間有無關係？第二步，量與量之間究有若何關係，能不能用函數關係的算式來表示？

§ 141. 函數的種類。 函數的範圍既廣，函數的種類甚多。函數的形式，有已知的，有未知的(如上節例四)。僅就已知的說，有代數函數，有非代數函數(如  $y = \sin x$ ,  $y = a^x$  之類)。僅就代數函數說，有一元函數 [就是含一個自變量的函數，如上節(A)所述]，有多元函數 [就是含多個自變量的函數，如上節(B)所述]。僅就一元的說，有無理函數(如  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  之類)，有理函數(如  $C = 2\pi r$ ,  $U = \frac{1}{3}\pi hr^2$  之類)。僅就有理的說，又有一次與高次之分。詳而論之，為算學中的一枝喚做函數論的事，不在本書範圍以內。下面所要討論的，是函數的正變，倒變，聯變三類。

§ 142. 正變。 有理函數之一。 假使一輛火車，用相同

的速率，在 60 分鐘內可走 40 公里；那麼 30 分鐘可走 20 公里，120 分鐘可走 80 公里。所走距離和時間的比完全相同（ $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ ， $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ ， $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$ ）。用  $x$  表時間， $y$  表距離， $k$  表速率，可列式如下：

$$\frac{y}{x} = k = \text{常數}$$

二變量  $x, y$  之間，如有“ $\frac{y}{x} = k = \text{常數}$ ”的關係，我們就說“ $y$  隨  $x$  而正變”，記以  $y \propto x$ ；其實，就是  $y = kx$ 。

[例一] 假定各人食量相同，若干人 ( $x$ ) 所需食品的總量 ( $y$ )，隨人數而正變，因為  $y = kx$ 。

[例二] 速度一定時，所行里數 ( $d$ )，隨所經時數 ( $t$ ) 而正變，因為  $d = kt$ 。

[例三] 若  $y = 3x$ ，則  $y$  隨  $x$  而正變。

[例四] 若  $y = 3x + 1$ ，則不能直接說  $y$  隨  $x$  而正變。因為  $\frac{y}{x} \neq \text{常數}$ 。

關於正變  $y = kx$  的問題通常有二類：

(A) 已知  $k, x$  (或  $y$ )，求  $y$  (或  $x$ )。求法甚易，茲不贅述。

(B) 已知  $x, y$  的一組對應值  $x_1, y_1$  及另一值  $x_2$  (或  $y_2$ )，

故求  $x_2$  的對應值  $y_2$ , (或  $y_2$  的對應值  $x_2$ )。

[解法] 先由  $y_1 = kx_1$  求出  $k$ , 仿(A)解之。

例如, 已知  $y \propto x$  且當  $x_1 = 3$  時,  $y_1 = 5$ , 問  $x_2 = 7$  時,  $y_2 = ?$

[解] 以  $x_1 = 3$ ,  $y_1 = 5$  代入  $y = kx$ , 得

$$5 = k \times 3, \text{ 就是 } k = \frac{5}{3}.$$

故本題的正變關係是  $y = \frac{5}{3}x$ 。

$$\text{今 } x_2 = 7, \text{ 故 } y_2 = \frac{5}{3} \times 7 = 11\frac{2}{3}.$$

[註] 正變與比例的關係。設  $x_1, y_1$  為  $x, y$  的相應數值;  $x_2, y_2$  亦然。

依次代入  $y = kx$  中, 應得

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 \\ y_2 = kx_2 \end{cases}$$

相除, 得

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

就是說“ $y$  的各值與  $x$  的對應值應成正比例”。根據這種關係也能解上例。

### 習 題 一 百 十 一

1. 依 § 141 所述函數的種類, 作一簡表以示函數的類別。
2. 任舉一元函數的事例五條, 二元函數的事例五條。
3. 學生學習成績, 是不是教師教法的函數? 這種函數關係能不能用簡明算式來表示?
4. 自由墜體下降的距離( $s$ )是不是所經時間( $t$ )的函數? 這函數能不能

用簡明算式來表示 (在物理學中,有公式  $s = \frac{1}{2}gt^2$ )?

5. 利息是不是本金的函數?是不是利率的函數?是不是期數的函數?照單利算,這函數關係該是怎樣的式子?照複利算,這函數關係又是怎樣的式子?

6. 代數式  $x^2+5x, \sqrt{x+5}, \frac{x^2}{x+1}$ , 都是  $x$  的函數嗎?

7. 代數式  $x^2+xy, 3x+5y, 8x-7y+9$  各是幾元函數?

8. 代數式  $3x+6$  是不是  $x$  的函數?設  $x$  表 1, 2, 3, 4, ……50 何者能使  $3x+6$  之值為零?當  $x = -2$  時, 函數  $3x+6$  的值是多少?

9.  $x^2+5x-6$  是不是  $x$  的函數?設  $x=1$ , 函數  $x^2+5x-6$  的值是多少?  $x=-6$ , 這函數的值又是多少?設  $x =$  任何其他數值, 這函數的值是否為零?

10. 由題 8 看,  $-2$  是不是方程式  $3x+6=0$  的根? 又由題 9 看,  $1, -6$  是不是  $x^2+5x-6=0$  的根?然則解方程式  $AX+B=0$  (或  $AX^2+BX+C=0$ ) 的意義, 就是求  $X$  的適當之值, 能使函數  $AX+B$  (或  $AX^2+BX+C$ ) 之值為零。此說對否?

11. 已知  $y \propto x$ , 當  $x=5$  時,  $y=6$ , 問  $x=7$  時,  $y=?$

12. 已知  $y^2 \propto x^3$ , 當  $x=4$  時,  $y=8$ , 問  $y=729$  時,  $x=?$

13. 已知  $y \propto \sqrt{x}$ , 當  $x=25$  時,  $y=15$ , 問  $x=?$  時,  $y=6$ 。

14. 已知  $x \propto cy$ , 求證  $x+y \propto cx-y$ 。

[解法] 原設  $x \propto cy \quad \therefore \frac{x}{y} = k$

$\therefore \frac{x+y}{x-y} = \frac{k+1}{k-1} = k' \quad (\text{何故?})$

即  $x+y \propto cx-y$ 。

15. 已知  $x \propto cy$ , 求證  $lx+my \propto cx-my$ 。

16. 已知  $x \propto cy$ , 求證  $x^2+xy+y^2 \propto cx^2-xy+y^2$ 。

17. 已知  $ax^2+bxy+cy^2=0$ , 求證  $x \propto cy$ 。

18. 已知  $x^2 + xy + y^2 \propto x^2 - xy + y^2$ , 求證 (1)  $x \propto y$ , (2)  $x + y \propto x - y$ .

19. 當甲數增大時, 若乙數隨甲數而增大, 則甲數是否隨乙數而正變? 試就下列三例證明你的答案:

$$(a) y = 3x + 5. \quad (b) y = x^2. \quad (c) y = \sqrt{x}.$$

20. 若  $y \propto x$ , 依第五章作圖以明  $x, y$  相應變化的關係。

§ 143. 倒變。有理函數之二。假使一件工作 6 人去做, 8 小時可以做完; 那麼, 12 人須 4 小時, 2 人須 24 小時, 這就是說: 人數增加, 時間可以比例減少; 反之, 人數減少, 時間須比例增加; 但所需的總時間 (即人數乘每人的工作時間) 總是等於一人做完這件事所需的時間。用  $x$  表人數,  $y$  表每人的工作時間,  $k$  表做完這事所需的總時間, 可列式如下:

$$xy = k = \text{常數}.$$

二變量  $x, y$  之間, 如有 " $xy = k = \text{常數}$ " 的關係, 我們就說 " $y$  隨  $x$  而倒變", 記以  $y \propto \frac{1}{x}$ ; 其實, 也就是  $y = \frac{k}{x}$ 。

[例一] 若干人分食定量食品  $k$ 。每人應得的分量 ( $y$ ), 隨人數 ( $x$ ) 而倒變; 人數 ( $x$ ) 也隨每人所得的分量 ( $y$ ) 而倒變。(因為  $xy = k = \text{常量}$ )。

[例二] 欲行一定距離  $d$ , 所需時數  $t$  隨速度  $s$  而倒變, 速度也隨所需時數而倒變, 因為  $st = d = \text{定量}$ 。

[例三] 當  $x^2 y^3 = \text{常量}$  時, 則  $y^3$  隨  $x^2$  而倒變,  $x^2$  也隨  $y^3$

而倒變。

【例四】 當甲量變大時，乙量減小；甲量減小時，乙量增大，如此則甲量與乙量間未必便有“甲量 $\times$ 乙量=常數”的關係。例

如在  $y = \frac{1}{x+2}$  中， $x$  增大，則  $y$  減小； $x$  減小，則  $y$  增大。但  $xy$  不為常數。故不能直接說  $y$  隨  $x$  而倒變。

關於倒變  $xy=k$  的問題，通常亦有二類：

(A) 已知  $k, x$  (或  $y$ )，求  $y$  (或  $x$ )。 求法甚易，茲不贅述。

(B) 已知  $x, y$  的一組對應值  $x_1, y_1$  及另一值  $x_2$  (或  $y_2$ )，求  $x_2$  的對應值  $y_2$  (或  $y_2$  的對應值  $x_2$ )。

【例】 已知  $y \propto \frac{1}{x}$ ，當  $x_1=3$  時， $y_1=5$ ，問  $x_2=7$  時， $y_2=?$

【解】 以  $x_1, y_1$  的值代入  $xy=k$ ，得

$$k=3 \times 5=15$$

故本題的倒變關係是  $xy=15$

今  $x_2=7$ ，故  $y_2 = \frac{15}{x_2} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$ 。

【註】 倒變與比例的關係。 設  $x, y$  的對應值是  $x_1, y_1$  及  $x_2, y_2$  代入倒變公式  $xy=k$  中，得下列二式

$$\begin{cases} x_1 y_1 = k \\ x_2 y_2 = k \end{cases}$$

所以  $x_1 y_1 = x_2 y_2$

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}.$$

就是說“ $x$ 的各值與 $y$ 的對應值成反比例”。根據這種關係也能解上例。

§ 144. 聯變。當 $y$ 隨 $x, z$ 的積而正變時，我們就說“ $y$ 隨 $x, z$ 而聯變”。聯變的定理如下：

當 $x$ 為常數時， $y$ 若隨 $z$ 而正變；且當 $z$ 為常數時， $y$ 又隨 $x$ 而正變；那麼，當 $x, z$ 俱變時， $y$ 必隨 $x, z$ 而聯變。

[證] 第一步。當 $z$ 由 $z_1$ 變為 $z_2$ 時， $y$ 由 $y_1$ 變為 $y'$ 。依 § 142 [註] 應得

$$\frac{y_1}{y'} = \frac{z_1}{z_2} \quad (A)$$

第二步。當 $x$ 由 $x_1$ 變為 $x_2$ 時， $y$ 由 $y'$ 變為 $y_2$ 。依 § 143 [註] 應得

$$\frac{y'}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad (B)$$

$$(A), (B) \text{ 相乘得 } \frac{y_1}{y'} \cdot \frac{y'}{y_2} = \frac{x_1 z_1}{x_2 z_2}$$

$$\therefore \frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2} = \text{常數。}$$

$$\therefore \frac{y}{xz} = k.$$

[例一] 時數一定，所行距離隨速度而正變；速度一定，所

行距離隨所經時數而正變。故時數，速度兩樣都變時，所行距離隨時數，速度而聯變。

[例二] 當  $s$  不變時， $y \propto \frac{1}{t}$ ；當  $t$  不變時， $y \propto s$  今當  $s_1=4$ ，

$t_1=1$  時， $y_1=8$ 。問  $s_2=3$ ， $t_2=6$  時， $y_2=?$

[解法] 由上述定理，知  $y \propto s \cdot \frac{1}{t}$  即  $y = \frac{ks}{t}$ 。

以  $s_1, t_1, y_1$  的值代入上式，得  $8 = \frac{k \cdot 4}{1}$ ，即  $k=2$ 。

故本題的聯變關係是  $y = \frac{2s}{t}$ 。

再以  $s_2, t_2$  的值代入上式，得  $y_2 = \frac{2 \times 3}{6} = 1$ 。

[又法] 由  $y = \frac{ks}{t}$ ，得  $\frac{yt}{s} = k$ 。

故 
$$\frac{y_1 t_1}{s_1} = k = \frac{y_2 t_2}{s_2}$$

即 
$$\frac{8 \times 1}{4} = \frac{y_2 \times 6}{3}$$

$\therefore y_2 = 1$

### 習題 一百十二

1. 已知  $y \propto \frac{1}{x}$ ，當  $x=1$  時， $y=2$ ，問  $x=3$ ， $y=?$

2. 已知  $y \propto \frac{1}{x^3}$ , 當  $x=2$  時,  $y=1$ , 問  $x=1$ ,  $y=?$
3. 已知  $y^2 \propto \frac{1}{z^3}$ , 當  $y=1$  時,  $t=1$ , 問  $y=64$ ,  $t=?$
4. 已知  $x+y \propto \frac{1}{x-y}$ , 當  $x=5$  時,  $y=4$ , 問  $x=4$ ,  $y=?$
5. 已知  $x \propto y$ ,  $y \propto \frac{1}{z}$ ,  $z \propto \frac{1}{t}$ , 那麼,  $x$  隨  $t$  而正變, 抑隨  $\frac{1}{t}$  而正變?
6. 已知  $y$  隨  $x, z$  而聯變, 又隨  $\frac{1}{t}$ ,  $\frac{1}{u^2}$  而聯變, 試求  $y$  與  $x, z, t, u$  的關係。其中含不含未定的量? 這量是常量還是變量?
7. 已知  $V$  隨  $r^3$  而正變,  $A$  隨  $r^2$  而正變, 問  $(\alpha) V^2$  隨  $A^3$  而正變, 抑倒變?  $A$  隨  $V$  的何種函數而正變?
8. 當甲量隨乙量而倒變時, 乙量是不是隨甲量而倒變? 試用算式來證明?
9. 工廠對於工友每日發給工資, 當做工人數不變時, 所發工資隨每日工作時數而正變; 當每日工作時數一定時, 所發工資隨做工人數而正變。某日, 工友 100 人, 各做工 10 小時, 共發工資 125 元。次日, 工人 95 名, 各做工 11 小時, 問該發工資共幾元?
10.  $x$  人於  $y$  日內所需食物的總量是  $t$ 。當  $x$  一定時,  $t$  隨  $y$  而正變; 當  $y$  一定時,  $t$  隨  $x$  而正變。今當  $x=100$ ,  $y=5$  時,  $t=1000$ 。問當  $x=150$ ,  $y=15$  時,  $t=?$
11. 若  $y \propto \frac{1}{x}$ , 作圖以示  $x, y$  相應變化的關係。

## 第十六章 級數

§ 145. 級數的需要 [問題一] 自 1 起幾個連續奇數的和

是 400?

設  $x$  是所求的個數，則因第 1 個奇數是  $2 \times 1 - 1$ ；第 2 個奇數是  $2 \times 2 - 1$ ；第 3 個奇數是  $2 \times 3 - 1$ ，……，故第  $x$  個奇數是  $2x - 1$ ，於是從題意得方程式：

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2x - 1) = 400.$$

怎樣由這方程式去求  $x$ ，非先求出左邊的和不可；怎樣求出左邊的和，這就是級數的問題。

[問題二] 某國因國難當頭，力求緊縮。軍政費支出逐年減少  $\frac{1}{10}$ ，十年後共計節省  $10^{10} + 9^{11}$  元，問原來預算每年若干元？

設  $x$  = 原來預算的元數，從題意得方程式：

$$10x - \left( \frac{9}{10}x + \frac{9^2}{10^2}x + \frac{9^3}{10^3}x + \frac{9^4}{10^4}x + \dots + \frac{9^{10}}{10^{10}}x \right) = 10^{10} + 9^{11}.$$

怎樣解這方程式，非先求出括號內的結果不可，這又是級數的問題。

§ 146. 何謂級數？ 凡依一定規則構成諸數依某次序排列起來而得一數羣，這數羣就叫做級數。級數中的第幾數叫做級數的第幾頁。

[例一]  $1, 3, 5, 7, 9, \dots$  成一級數，(牠構成的規則是第  $n$  項  $= 2n - 1$ )。

[例二]  $1, 2, 4, 8, 16, \dots$  成一級數，(牠構成的規則是第

$n$  項  $= 2^{n-1}$  )。

[例三]  $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$  成一級數, (牠構成的規則是第  $n$  項  $= n^2$  )。

[例四]  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$  亦成一級數, (牠構成的規則是第  $n$  項  $= \frac{n}{n+1}$  )。

[例五]  $1 \times 2 \times 3, 2 \times 3 \times 4, 3 \times 4 \times 5, 4 \times 5 \times 6, \dots$  亦成一級數, [牠構成的規則是第  $n$  項  $= n(n+1)(n+2)$  ]。

由上面諸例看來,可見級數的種類很多。全部理論,非初等代數所能盡述;本章所講的,不過是等差級數,等比級數兩種罷了。

### I. 等差級數

§ 147. 等差級數。 如果級數相隣的後項減前項的差都相等,這種級數叫做等差級數。等差級數的通式是

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+(n-1)d.$$

$d$  叫做公差:如取正值時,各項的值依次增加;如取負值時,各項的值依次減小。

例如,上節例一的級數就是等差級數,牠的公差是 2。

又如  $10, 5, 0, -5, -10, -15, \dots$  亦成等差級數,牠的公差是  $-5$ 。

又如  $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5$ , 亦成等差級數, 牠的公差是  $\frac{1}{2}$ 。

§ 148. 等差級數的公項。由上節定義, 可見等差級數中任何一項必可化成  $a + (?)d$  之形,  $d$  的係數比該項所在的項數少 1。所以第  $k$  項應為  $a + (k-1)d$ , 用算式求表, 就是

$$t_k = a + (k-1)d. \quad (A)$$

$t_k$  叫做等差級數的公項。

已知等差級數的第 1 項  $a$  及其公差  $d$ , 那麼其他各項, 都可由這公式 (A) 去求出。

[例一] 求  $1, 4, 7, 10, \dots$  的第 20 項。

[解法] 本題  $a=1, d=4-1=3, k=20$ 。故所求的一項是  $t_{20}=1+(20-1) \times 3=1+19 \times 3=58$ 。

[例二] 等差級數第 2 項是 3, 第 6 項是  $-5$ , 求其第 10 項。

[解法] 倘能求出第一項  $a$  及公差  $d$ , 便易求得第十項。求  $a$  求  $d$  的方法, 就是利用 (A) 式列出聯立方程式以求其根。今由題意, 得聯立方程式

$$\begin{cases} 3 = t_2 = a + (2-1)d & (1) \\ -5 = t_6 = a + (6-1)d & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + d = 3 & (1) \\ a + 5d = -5 & (2) \end{cases}$$

就是 解之, 得  $a = 5, d = -2$ 。

$$\therefore t_{10} = 5 + (10-1)(-2) = 5 - 18 = -13。$$

§ 149. 怎樣插入等差中項? 在等差級數  $a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, b$  中,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$  諸數統叫做  $a, b$  的等差中項。

已知  $a, b$  二數, 怎樣在  $a, b$  之間插入  $m$  個等差中項? 這個問題也可由上節公式 (A) 去解決。

$$\begin{aligned} \text{因爲} \quad & x_1 = a + d \\ & x_2 = a + 2d \\ & \dots\dots\dots \\ & x_m = a + md。 \end{aligned}$$

如能求得  $d$ , 則這問題便能全部解決了。故先設法求  $d$ : 因  $a$  是等差級數的第 1 項,  $b$  是第  $m+2$  項。故用 (A) 得  $b = a + (m+1)d$ 。

$$\text{由此求得 } \underline{d = \frac{b-a}{m+1}}。$$

[例] 試在 3 與 18 之間插入 4 個等差中項。

[解決] 因 3 是等差級數的第一項, 18 是等差級數的第 6 項, 故用 (A) 式, 得  $18 = 3 + 5d$

就是

$$d = \frac{18-3}{5} = 3$$

∴ 所求等差中項是 6, 9, 12, 15。

### 習題 一百十三

求下列各級數的第  $n$  項：

1. 3, 6, 9, 12, ……。
2. 9, 1, -7, -15, ……。

寫出下列各級數的前 10 項：

3.  $a=100, d=-15$ 。
4.  $a=8, d=1\frac{1}{3}$ 。

補足下列二級數到第 8 項：

5.  $5, 3\frac{1}{2}, 2$ 。
6.  $a, a+2b, a+4b$ 。
7. 等差級數的第 5 項是 10, 第 16 項是 32。求其第 10 項。
8. 等差級數的第 3 項是 50, 第 11 項是 10。求其第 20 項。
9. 試在 3 與 30 之間插入 9 個等差中項。
10. 試在  $100a$  與  $-103a$  之間插入 20 個等差中項。

§ 150. 怎樣求等差級數  $n$  項的和？ 設有  $n$  項等差級數

如下形：

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, l-2d, l-d, l.$$

怎樣去求這  $n$  項的和？

[求法] 首項為  $a$ , 末項為  $l$ , 項數為  $n$ , 其和為  $S$ , 則

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (l-2d) + (l-d) + l$$

$$S = l + (l-d) + (l-2d) + \dots + (a+2d) + (a+d) + a$$

相加得  $2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \dots + (a+l) + (a+l) + (a+l)$

$$= n(a+l)。$$

$$\therefore S = \frac{n(a+l)}{2}。 \quad (B)$$

又因  $l = a + (n-1)d,$

$$\therefore S = \frac{n[a+a+(n-1)d]}{2} = \frac{n[2a+(n-1)d]}{2}。 \quad (C)$$

[例一] 求  $S = 1+2+3+4+\dots+100。$

[解法] 本題  $a=1, l=100, n=100。$  用(B)。

$$\therefore S = \frac{100}{2}(1+100) = 5050。$$

[例二] 求  $3+1\frac{1}{2}+0+\dots+\text{第 } 1000 \text{ 項}。$

[解法] 本題  $a=3, d=1\frac{1}{2}-3=-1\frac{1}{2}, n=1000$  用(C),

$$\therefore S = \frac{1000}{2} \left[ 2 \times 3 + 999 \times \left( -\frac{3}{2} \right) \right] = -746250。$$

### 習 題 一 百 十 四

求下列各級數的和：(1-3)

1.  $2+4+6+8+\dots+\text{到第 } 100 \text{ 項}。$

2.  $1+3+5+7+\dots+231$ 。
3.  $5+10+15+20+\dots+2000$ 。
4. 求 100 與 2000 之間所有 6 的倍數的和。
5. 自 1 至 1000 間,所有 4 的倍數的和,比所有 3 的倍數的和大多或少多少?
6. 等差級數的第 4 項是 12,第 30 項是 64,求其首 100 項的和。
7. 等差級數內首 100 項的和是 5000,公差是 2,求第 1 項,第 10 項,第 100 項。
8. 等差級數的第 1 項是 1,公差是 3, $n$  項的和是 590,求項數  $n$ 。
9. 等差級數的總和是 1000,項數是 50,第一項是 10,求最後 1 項及公差。
10. 等差級數內首 9 項的和是 126,最後 2 項的和是 42,求首 2 項的和。
11. 解 § 145 問題一。
12. 自 -5 起,連續幾個 5 的倍數的和是 3700?
13. 解方程式  $x+4x+7x+10x+\dots+34x=21630$ 。
14. 物體從空中自由下墮,第一秒內降下 16 呎;以後每秒內所降的距離永比前秒內所降距離多 32 呎。今從飛機上投一炸彈,經 12 秒鐘而達地面,問這機距地面幾呎?
15. 石子一粒,自由墮入井中,3 秒鐘後聽到石子擊水的聲音,問井的水面,距地面幾呎?(假定音的速度是每秒 1000 呎)。

## II. 等比級數

§ 151. 等比級數 如果級數相鄰的後項與前項的比都相等,叫做等比級數。這種級數的通式是,

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^n.$$

$r$  叫做公比：如  $r$  爲正數，則大於 1 時，各項的值依次增加；小於 1 時，各項的值依次減小。

[例一]  $1, 2, 4, 8, 16, \dots$  成等比級數。牠的公比是 2。

[例二]  $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$  成等比級數。牠

的公比是  $-\frac{1}{3}$ 。

[例三]  $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots$  成等比級數。牠的

公比是  $\frac{2}{3}$ 。

§ 152. 等比級數的公項 由上節定義，可見等比級數中任何一項必爲  $ar^k$  之形， $r$  的指數比該項所在的項數少 1。故第  $k$  項應爲  $ar^{k-1}$ 。用算式來表就是：

$$t_k = ar^{k-1} \quad (A)$$

$t_k$  叫做等比級數的公項。

已知等比級數的第一項  $a$  及其公比  $r$ ，那麼其他各項，都可由這公式 (A) 去求出。

[例一] 求  $1, 2, 4, 8, \dots$  的第 20 項。

[解法] 本題  $a=1, r=2, k=20$

$$\therefore t_{20} = 1 \times 2^{20-1} = 2^{19}.$$

[註] 求等比級數的第  $k$  項所得的值  $ar^{k-1}$ ，往往是一個位數很多的數。

不必乘出。本題結果  $2^{10}$  也不必乘出。

[例二] 等比級數內第 2 項是 2, 第 6 項是 32, 求其第 10 項。

[解法] 本題  $t_2=2$ ,  $t_6=32$ , 由題意, 應用公式

$$(A), \text{ 得聯立方程式 } \begin{cases} ar = 2 & (1) \\ ar^5 = 32 & (2) \end{cases}$$

解之, 得  $r=2$ ,  $a=1$

$$\therefore t_{10} = 1 \times 2^{10-1} = 2^9 = 512。$$

§ 153. 怎樣插入等比中項? 在等比級數  $a, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_m, b$  中,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$  統叫做  $a, b$  的等比中項。

已知  $a, b$  二數, 怎樣在  $a, b$  之間插入  $m$  個等比中項。這個問題也可用前節公式 (A) 去解決。

因為

$$\begin{aligned} x_1 &= ar \\ x_2 &= ar^2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_m &= ar^m。 \end{aligned}$$

如能求得  $r$ , 則這問題便可全部解決了。故先求  $r$ : 因  $a$  是等比級數第 1 項,  $b$  是第  $m+2$  項, 故用 (A) 式得  $b = ar^{m+1}$ , 由此求得

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}。$$

[例] 在 2 與 64 之間插入 4 個等比中項。

[解法] 因  $a=2$ ,  $b=64$ ,  $m=4$ 。故 64 是等比級數的第 6 項, 故用(A)式, 得

$$2r^5=64$$

即

$$r=2。$$

∴ 所求等比中項是  $2 \times 2$ ,  $2 \times 2^2$ ,  $2 \times 2^3$ ,  $2 \times 2^4$ 。

### 習 題 一 百 十 五

求下列各級數的第  $n$  項:

1.  $3, 6, 12, 24, \dots$ 。

2.  $-7, -2, -\frac{4}{7}, -\frac{8}{49}, \dots$ 。

3.  $9, 1, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \dots$ 。

寫出下列各級數的前 5 項:

4.  $a=-10, r=-3$ 。

5.  $a=100, r=\frac{1}{2}$ 。

6.  $a=10, t_{10}=5120$ 。

補足下列各級數到第 6 項:

7.  $\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ 。

8.  $2, \sqrt{2}, 1$ 。

9. 等比級數的第 5 項是 50, 第 8 項是 400, 求其第 3 項, 第 11 項。

10. 等比級數的第 4 項是 4, 第 8 項是 16。求其第 5 項, 第 16 項, 第 20 項。

11. 在 1 與 243 之間插入 4 個等比中項。  
 12. 在 5 與 320 之間插入 5 個等比中項, 插入 11 個等比中項。

§ 154. 求等比級數  $n$  項的和。級數的種類既然很多(參看 § 146) 求和的方法, 自然各不相同。例如, 若仿 § 150 求等差級數  $n$  項之和的方法, 以求等比級數  $n$  項之和, 其法便全然無效。你們自己試試看, 然後再看下面的解法。

[求法] 設首項為  $a$ , 末項為  $ar^{n-1}$ , 項數為  $n$ , 其和為  $S_n$ , 則

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}.$$

兩邊各乘以  $r$ , 得

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n.$$

兩式相減, 得

$$S_n - rS_n = a - ar^n.$$

$$\therefore S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}. \quad (B)$$

又因  $t_n = ar^{n-1}$ ,

$$\therefore S_n = \frac{a - rt_n}{1-r}. \quad (C)$$

[例一] 求 1, 2, 4, 8, 16, …… 前 10 項的和。

[解法] 本題  $a=1$ ,  $r=2$ ,  $n=10$ 。用公式 (B), 得

$$S_{10} = \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2^{10} - 1.$$

[例二] 求  $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{32}{243} = ?$

[解法] 本題  $a=1$ ,  $r=+\frac{2}{3}$ ,  $t_n=\frac{32}{243}$ , 故用(C)式, 得

$$S = \frac{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{32}{243}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{665}{243} = 2 \frac{179}{243}$$

### 習 題 一 百 十 六

求下列各級數的和:(1-4)

1.  $3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \dots +$  第 10 項。

2.  $1 + 3 + 9 + 27 + \dots +$  第 20 項。

3.  $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \dots + (-1)^{n-1} 2^{n-1} + \dots +$  第 20 項。

4.  $1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots +$  第 50 項。

5. 求 1 與 1500 間所有 2 的冪數(即  $2^k$ )的和。

6. 求 1 與 1500 間所有 3 的冪數(即  $3^k$ )的和。

7. 等比級數的第 4 項是 24, 第 7 項是 192, 求其首 10 項的和, 首 20 項的和, 首 50 項的和。

8. 等比級數的首 98 項和是  $2^{100} - 4$ , 公比是 2。求其第 10 項。

9. 等比級數首 9 項的積是 512, 第 9 項是 4。求其首 9 項的和, 首 18 項的和。

10. 求級數  $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$  中第 10 項至第 20 項的和。

11. 解 §145 問題二。

12. 俗說“臭蟲一隻每夜共生七子, 次夜老小臭蟲又各生七子, 以後繁殖悉依法,” 今若有臭蟲一隻, 問一星期後共有老小臭蟲若干隻? 二星期後如何?

13. 皮球從 100 市尺高的地方下墜至地，每次返躍的高度，等於下墜距離的  $\frac{1}{3}$ 。問當第十次落地時，該球已經過若干市尺？

§ 155. 無限遞減等比級數的和 在等比級數中，公比  $r$  的絕對值若比 1 小，那麼各項的絕對值就依次減小，以至於無窮小。例如，在級數

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

中， $r = \frac{1}{2} < 1$ ，其各項的值依此減小：如第一千項的值是  $\frac{1}{2^{999}}$ ，

分母已有三百零一位；第一萬項的值是  $\frac{1}{2^{9999}}$ ，分母就有三千零十位；其第十萬項，第一百萬項，或第一千萬項的值更是渺乎其小，簡直和零差不多了。所以，在求這無限遞減等比級數的和的時候，項數既然無限，上節 (C) 式中的  $t_n$  也不妨當作零。代入 (C) 式，則得

$$S = \frac{a}{1-r} - r \cdot \frac{t_n}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2。$$

這種情形不獨在本例如此。在任何等比級數中，假如 (1) 公比的絕對值小於 1，且 (2) 項數無限。那麼牠的求和公式，就由上節公式

$$S = \frac{a}{1-r} - r \cdot \frac{t}{1-r}, \quad (C)$$

變爲公式

$$S = \frac{a}{1-r} \quad (D)$$

(因爲在這情形下  $t_n$  與 0 極相近, 可視牠爲 0。)

## 習 題 一 百 十 七

1. 在等比級數中, (a) 若項數無限, 但公比  $r$  的絕對值不小於 1, 欲求這無限等比級數的和, 可否應用 (D) 式?

(b) 若公比  $r$  的絕對值小於 1, 但項數不爲無限, 欲求這等比級數的和, 可否應用 (D) 式?

2. 然則欲求等比級數的和, 何時該用 (B) 式? 何時該用 (C) 式? 何時該用 (D) 式?

3. 求  $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$  無限項的和。

4. 求無限級數  $1 + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{64}{125} + \dots$  的和。

5. 求無限級數  $1 - \frac{4}{5} + \frac{16}{25} - \frac{64}{125} + \dots$  的和。

6. 求等比級數  $1 + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \dots$  首 1000 項的和。

7. 某人由甲地至乙地。第一日行全路的一半, 以後每日所行距離順次是上一日所行距離的一半。(a) 問此人行至 1000 日後行了全路的幾分之幾?

(b) 設此人如此繼續進行, 行至何時可行完全路?

8. 以 8 市尺, 4 市尺, 2 市尺, 1 市尺,  $\frac{1}{2}$  市尺……爲半徑, 依次畫圓, 求證這無數小圓圓周的和, 不比大圓圓周長。(圓周之長 =  $2\pi \times$  半徑)。

9. 化  $.3\bar{4}$  爲分數。

[解法]  $.3\bar{4} = .34 + .0034 + .000034 + .00000034 + \dots$

$$\begin{aligned}
 &= .34 + \frac{.34}{100} + \frac{.34}{100^2} + \frac{.34}{100^3} + \frac{.34}{100^4} + \dots \\
 &= \frac{.34}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{34}{99}
 \end{aligned}$$

10. 化 (a)  $.1\bar{2}3$ , (b)  $.12\bar{3}5$ , (c)  $.036\bar{7}$  爲分數。

### 習題一百十八 (雜題)

- 在 4, 12 之間插入二數, 使前 3 數成等比級數, 後 3 數成等差級數。
- (a) 在等差級數  $a, A, b$  中,  $A = ?$  (用  $a, b$  來表示)。  
(b) 在等比級數  $a, G, b$  中,  $G = ?$  (用  $a, b$  來表示)。
- 求  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \dots$  到第 20 項的和。
- 求  $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \frac{64}{81} + \dots$  到第 20 項的和。
- 求上題級數無限項的和。
- 求第 3 題級數無限項的和, 有定值沒有? 何故?
- 求  $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots$  無限的和。

【解法】  $r = -2 < 1$ ,  $n = \infty$ 。

$$\therefore S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-2)} = \frac{1}{3}。對不對? 何故?$$

8. 求  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  到 10000000 項的和。

【解法】  $S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ 。對不對? 何故?

9. 因 1, 3, 5, 7, 9,  $\dots$  成等差級數, 所以欲求  $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots +$  第 20 項, 能用等差級數求和公式嗎?

10. 因  $1, 2, 3, 4, \dots$  成等差級數;  $2, 3, 4, 5, 6, \dots$  也成等差級數, 欲求  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots$  首 20 項的和, 能用等差級數求和公式呢? 還是能用等比級數求和公式呢? 何故?

## 第十七章 指數 對數

### I. 指數

§ 156. 指數意義的推廣。在指數是正整數時, 指數的意義已在 § 33 講過了。這時易得下面幾條定律:

$$1. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

$$2. \quad a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

$$3. \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

$$4. \quad (ab)^m = a^m b^m.$$

根據這幾條定律乃能演算關於正整指數的一切問題。然而算學家猶嫌其範圍太狹, 應用不宏。於是把指數的範圍推廣, 使指數的意義不限於指數是正整數, 就是分數, 負數, 零等等, 也都具有意義。並使上列四定律不但適用於正整指數, 就是在指數非正整數時也無不可用。倘能如此, 指數的功用不更宏大嗎? 以下三節, 略論指數意義推廣的方法。

§ 157. 分指數的意義。例如  $a^{\frac{1}{2}} = ?$  欲答這個問題, 先要明白推廣指數意義的目的何在? 如上節所述, 推廣指數意義, 其

目的就是“使上列四條定律，不但在整指數時適用，即在分指數也能適用”。但是要想上舉第三律可以適用，必有下式：

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2} \times 2} = a。$$

然則 
$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}。$$

同樣，欲知  $a^{\frac{p}{q}} = ?$ ，可以先把  $(a^{\frac{p}{q}})^q$  化簡，察其結果再定解答。

因為要使第三律可以適用，故必有

$$(a^{\frac{p}{q}})^q = a^{\frac{p}{q} \times q} = a^p$$

然則兩邊各開  $q$  次方，不是應得  $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$  嗎？由是得分指數的意義如下：

$$\underline{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}。}$$

[例一]  $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4。$

[例二]  $64^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^2} = (\sqrt[3]{64})^2 = 16。$

[例三]  $64^{0.5} = 64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8。$

§ 159. 零指數的意義。要使指數第一律適用於零指數，應有

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m,$$

兩邊各以  $a^m$  除之，應得

$$\underline{a^0 = 1。}$$

[例一]  $1^0=1, 2^0=1, 3^0=1, 4^0=1, n^0=1,$

[例二] 設  $x=100, y=90, z=50,$

求  $(x^3+x^2y-xy^2+x-y)^0 \div (x+y+z)$  的值。

因  $(x^3+x^2y-xy^2+x-y)^0$  的值總是 1, 故所求的值是

$$1 \div (100+90+50) = \frac{1}{240}.$$

§ 159. 負指數的意義。 要使指數第一律能適用於負指數, 應有  $a^m a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1.$

兩邊各除以  $a^m$ , 應得  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

[例一]  $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}.$

[例二]  $64^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{64^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{16}.$

[註] 由上三節看來, 可見要使指數定律在指數是分數, 是零, 或是負數時都能適用, 則  $a^{\frac{p}{q}}$  非等於  $\sqrt[q]{a^p}$  不可,  $a^{-m}$  非等於  $\frac{1}{a^m}$  不可,  $a^0$  非等於 1 不可。至於既令  $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a^0 = 1$  之後, 指數諸定律是否便能全部適合? 這又是另一問題。詳而論之, 非篇幅所許現在只能假定牠們是適合的, 證法待學高中代數時再講。

## 習 題 一 百 十 九

1. 求下列各式的結果:

$$(a) 144^{\frac{1}{2}}. \quad (b) 81^{\frac{2}{3}}. \quad (c) 125^{\frac{4}{3}}. \quad (d) 216^{\frac{5}{3}}.$$

2. 求下列各式的結果(用分數來表示):

$$(a) 144^{-\frac{1}{2}} \quad (b) 81^{-\frac{2}{3}}. \quad (c) 125^{-\frac{4}{3}}. \quad (d) -216^{-\frac{5}{3}}.$$

3. 化簡下式:

$$(a) \left( \sqrt[4]{\frac{5}{\sqrt{a^2}}} \right)^5 = \left( a^{\frac{5}{4}} \right)^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{5}{4} \times \frac{5}{4}} = a^{\frac{25}{16}} = \sqrt[4]{a^{\frac{25}{4}}}.$$

[注意] 由 § 157 公式  $a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$ , 可見分指數問題可以化爲根式問題; 自然, 根式問題也可化爲分指數問題, (然後再依指數定律來化簡)。

$$(b) \left( \sqrt[m]{\frac{m}{\sqrt{a^p}}} \right)^q. \quad (c) \sqrt[4]{(x\sqrt{x})^3} \cdot \sqrt[3]{(x\sqrt{x})^2}$$

$$(d) \left( \sqrt[3]{x^3\sqrt{y}} \right)^2 \left( \sqrt{y\sqrt{x^3}} \right)^3.$$

4. 化下列諸式使其結果只含一個根號:

$$(a) x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}. \quad (b) x\sqrt{x\sqrt{x}} \div \left( x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \right)$$

5. 計算下列各式:

$$(a) 125^{\frac{2}{3}} \times 625^{\frac{3}{5}}. \quad (b) \left( \frac{1}{64} \right)^{-\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{64} \right)^{\frac{5}{3}}.$$

$$(c) 16^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{25} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

6. 化簡下式:

$$(a) \sqrt[5]{\frac{\sqrt{a^3}}{3a^2}} = \left( a^{\frac{3}{2}} \times a^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{5}} = \left( a^{\frac{5}{6}} \right)^{\frac{1}{5}} = \left( a^{\frac{1}{6}} \right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[30]{a}.$$

$$(b) \sqrt[5]{\frac{3a^2}{\sqrt{a^3}}} \quad (c) \sqrt[11]{(\sqrt[3]{a^4} \div \sqrt[5]{a^3})^{12}}$$

7. 演乘除法(舉例):

$$(a) \left( x^{\frac{1}{2}} + 3 \right) \left( x^{\frac{1}{2}} - 5 \right) = x - 2x^{\frac{1}{2}} - 15.$$

$$(b) (x-1) \div (x^{\frac{1}{3}}-1) = (x^{\frac{1}{3}}-1)(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1) \div (x^{\frac{1}{3}}-1) \\ = x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1.$$

8. 演乘法：

$$(a) (3x^{\frac{1}{2}}+5)(5x^{\frac{1}{2}}-3).$$

$$(b) (x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}).$$

$$(c) (x+y) \div (x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}). \quad (d) (x-y) \div (x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}).$$

9. 解方程式  $3x-4x^{\frac{1}{2}}+1=0$ 。

10. 解方程式  $2x^{\frac{1}{2}}-13x^{\frac{1}{4}}+15=0$ 。

11. 解方程式  $x+x^{-1}=3\frac{1}{3}$ 。

12. 解方程式  $x^{\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{1}{3}}=4$ 。

## II. 對數

§ 160. 對數的需要 欲知對數的功用，先看下列兩題：

[問題一]  $\sqrt[100]{2}=?$  求這數的首三位數字。怎樣解此問題？學者有下手之處嗎？

[問題二] 解方程式  $2^x=7$ ，求  $x$  的首三位數字。學者對此問題，又有下手之處嗎？

可見要解這類問題，非另有新法不可。新法是什麼？就是利用對數。

§ 161. 對數是什麼？先就等式  $8^2=64$  來看。這個等式

中共有三數 8, 2, 64。已知其二, 可求其他。詳細說來, 共有三類:

(1) 已知 8, 2 求  $8^2 = ?$ 。這是乘法問題。在乘法, 2 叫做 8 的指數。

(2) 已知 64, 2 求  $(?)^2 = 64$ 。這是開方問題。在開方, “?” 叫做 64 的平方根。因  $(?)^2 = 64$  是一種新運算, 故另用新式  $\sqrt[2]{64} = ?$  來表示。

(3) 已知 8, 64 求  $8^? = 64$ 。這就是對數問題了。在這等式中, “?” 叫做 64 的對數 (底 8), “8” 叫做底。也因  $8^? = 64$  是一種新運算, 故另創新式來表示。新式是什麼? 就是  $\log_8 64 = ?$  所以下列二式:

$$(a) \log_8 64 = ? \quad (b) 8^? = 64。$$

所表 8, 64, ? 三數的關係, 二者完全相同。

推之, 在通例  $a^x = M$  中,  $a$  叫做底,  $w$  叫做  $M$  的對數 (底  $a$ )。因  $a^x = M$  是一種新運算, 故另用新式  $\log_a M = x$  來表示。所以下列二式:

$$(甲) \log_a M = x. \quad (乙) a^x = M。$$

所表  $a, x, M$  三數的關係完全相同。

[例一]  $\log_8 64 = ?$

[解法]  $\because 8^2 = 64 \quad \therefore \log_8 64 = 2。$

[例二]  $\log_4 64 = ?$

$$[\text{解法}] \quad \because 4^3=64 \quad \therefore \log_4 64=3.$$

由上兩例看來，又可見同樣一個數，因其所取的底不同，牠的對數也就不同。

[註] 對數與指數是否相同？由上所述，學者或要說“對數就是指數”其實不然！因為在  $a^x=M$  中， $x$  對於  $a$  叫做指數，對於  $M$  叫做對數。我們可以說“ $a$  的指數就是  $M$  的對數(底  $a$ )”但是不能說“指數就是對數”。

### 習 題 一 百 二 十

1.  $\log_5 25=?$      $\log_5 125=?$      $\log_5 \frac{1}{25}=?$      $\log_5 \frac{1}{125}=?$
2.  $\log_3 27=?$      $\log_9 27=?$      $\log_3 27^2=?$      $\log_9 \frac{1}{27}=?$
3.  $\log_{10} 10=?$      $\log_{10} 100=?$      $\log_{10} 1000=?$      $\log_{10} 10000=?$   
 $\log_{10} 1=?$      $\log_{10} 0.1=?$      $\log_{10} .01=?$      $\log_{10} .001=?$

§ 162. 對數的三大定律 對數的變化全以下列三律為根據：

$$(1) \quad \log_a MN = \log_a M + \log_a N.$$

$$(2) \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$$

$$(3) \quad \log_a M^n = n \log_a M.$$

$$[\text{證 1}] \quad \text{設} \begin{cases} a^x = M & \text{(I)} \\ a^y = N & \text{(II)} \end{cases} \quad \text{則} \begin{cases} \log_a M = x \\ \log_a N = y \end{cases}$$

$$(I) \times (II), \text{得 } a^{x+y} = MN.$$

$$\therefore \log_a MN = x + y = \log_a M + \log_a N.$$

[證 2] (I)  $\div$  (II), 得  $a^{x-y} = \frac{M}{N}$ .

$$\therefore \log_a \frac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N.$$

[證 3] 由(I)式的  $n$  次冪, 得  $a^{nx} = M^n$ .

$$\therefore \log_a M^n = nx = n \log_a M.$$

[例] 已知  $\log_{10} 2 = .3010$ ,  $\log_{10} 3 = .4771$ .

求 (a)  $\log_{10} 6 = ?$  (b)  $\log_{10} \frac{3}{2} = ?$

(c)  $\log_{10} 3^{20} = ?$  (d)  $\log_{10} \sqrt[20]{2} = ?$

[解法] (a)  $\log_{10} 6 = \log_{10} (2 \times 3)$

$$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3$$

$$= .3010 + .4771 = .7781.$$

(b)  $\log_{10} \frac{3}{2} = \log_{10} 3 - \log_{10} 2 = .4771 - .3010$

$$= .1761.$$

(c)  $\log_{10} 3^{20} = 20 \log_{10} 3 = 20 \times .4771 = 9.542.$

(d)  $\log_{10} \sqrt[20]{2} = \log_{10} 2^{\frac{1}{20}} = \frac{1}{20} \log_{10} 2 = \frac{1}{20} \times .3010$

$$= .01505$$

§ 163. 對數的定值部份, 定位部份。如上兩節所述, 任  
及  $a$  都可用做對數的底。但在普通計算上, 對數恆以 10 做

底。這種以 10 做底的對數叫做常用對數。(常用對數的底 10 恆略而不寫。例如， $\log_{10}34$  恆省寫爲  $\log 34$ ；反之， $\log 56$  就是  $\log_{10}56$ )。

在常用對數中，任何一數  $N$ ，不能化爲  $10^n$  的整次幂的，牠的對數必非整數而爲整數與小數的和。這整數叫做對數的定位部，小數叫做對數的定值部。

§ 164. 怎樣求定位部？先就含有一位整數的任何數  $x$  來講：

因  $1 < x < 10$ ，故  $\log 1 < \log x < \log 10$ ，

就是  $0 < \log x < 1$ 。

∴  $\log x = 0 + \text{小數}$

這就是說含有一位整數的數，牠的對數的定位部是 0。如果將  $x$  的小數點移右一位，就是將  $x$  乘  $10^1$ ，也就是在  $x$  原來的對數定位部 0 上加 1，所以

凡有 2 位整數的數，牠的對數定位部是 1。

如果將  $x$  的小數點移右二位，就是將  $x$  乘  $100^1$  或  $10^2$ ，也就是在  $x$  原來的對數定位部 0 上加 2，所以

凡有 3 位整數的數，牠的對數定位部是 2。

推之，

凡有  $n$  位整數的數，牠的對數定位部是  $(n-1)$ 。

用同樣的方法，如果將  $x$  的小數點移左一位，就是將  $x$  乘  $10^{-1}$ ，也就是在  $x$  原來的對數定位部 0 上加  $-1$ ；如果將  $x$  的小數點移左二位，就是將  $x$  乘  $100^{-1}$  或  $10^{-2}$ ，也就是在  $x$  原來的對數定位部 0 上加  $-2$ 。所以，凡小數的第一位有效數字與小數點之間，

有 0 個 0 的，牠的對數的定位部是  $\overline{-1}$ ，簡寫為  $\overline{1}$ ，

有 1 個 0 的，牠的對數的定位部是  $\overline{-2}$ ，簡寫為  $\overline{2}$ 。

推之，

凡小數的第一位有效數字與小數點之間有  $n$  個 0 的，其定位部爲  $-(n+1)$ ，簡寫爲  $\overline{n+1}$ 。（此處  $n+1$  上面的記號“ $\overline{\quad}$ ”不作括號線用）。

[例一] 求  $\log 87500$  的定位部。

[解法] 因 87500 有五位整數，

故  $\log 87500 = 4. \dots\dots$ 。

[例二] 求  $\log .000875$  的定位部。

[解法] 因 .000875 中，小數點與 8 之間有三個 0，

故  $\log .000875 = \overline{4}. \dots\dots$ 。

[例三] 已知  $\log 2 = .3010$  求  $2^{20}, 2^{40}$  各有幾位整數？

[解法] (1)  $\log 2^{20} = 20 \log 2 = 20 \times .3010 = 6.020$

因  $\log 2^{20}$  的定位部是 6。故知  $2^{20}$  有七位整數。

$$(2) \log 2^{40} = 40 \log 2 = 40 \times .3010 = 12.04$$

因  $\log 2^{40}$  的定位部是 12, 故知  $2^{40}$  有 13 位整數。

[註] 由本節(B)可見  $\log .356 = -1 + .5514$ , 這式的值本來該是  $-.4486$ ; 所以寫為  $\bar{1}.5514$  這樣形式的, 只為便利的緣故。便利何在? 第一, 任何數的定值部都是正數; 第二, 任何數的定值部與牠的小數點所在的位置無關。例如在  $\log 356$ ,  $\log 35.6$ ,  $\log 3.56$ ,  $\log .356$ ,  $\log .0356$ ,  $\log .00356$  中, 定值部都是  $.5514$ 。這樣, 造表檢表, 便可各省許多手續了。

§ 165. 怎樣求定值部? 這個問題本是很難的問題。直接求解, 勢必勞而無功。好在算界先賢, 早已有人不辭勞苦, 求得結果造成表冊。我輩後生, 只要坐享其成, 按表檢數就行了。

[例一] 求  $\log 84.6$  的定值部。

[解法] 因定值部與  $84.6$  內小數點的位置無關, 所以只求  $\log 846$  的定值部就得了。

在下頁所附對數表中, 先由最左一行(即  $N$  下的縱行)查出 84, 再在最上一行(即  $N$  右的橫行)查出 6。由 84 向右看, 同時由 6 向下看, 其交叉之處有一數 9274, 就是  $\log 846$  的定值部。

故  $\log 84.6$  的定值部為  $.9274$

[註] 表內所載定值部, 小數點一律省而不寫; 用時須自行補加。

[例二] 求  $\log 95600$  的定值部。

仿例一在  $N$  下的縱行內查出 95, 又在  $N$  右的橫行內查出 6。由 95 向右看, 由 6 向下看, 其交叉處得一數  $.9805$ , 這是  $\log 956$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2320	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3093	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4160	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6.44	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6992	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7390

N	0	1e	2	3	4	5	6e	7e	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7703	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8959	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9185
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9629	9634
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

的定值部，也就是  $\log 95600$  的定值部。

### 習題一百二十一 (口答 1-2)

1. 求下列各數的定值部：

- |                                   |                                |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| (a) $\log 187$ 。                  | (b) $\log 88700$ 。             |
| (c) $\log 0.287$ 。                | (d) $\log(3.12 \times 10^3)$ 。 |
| (e) $\log(.781 \times 10^{-3})$ 。 | (f) $\log \frac{359}{751}$ 。   |

2. 求下列各數的定值部：

- |                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| (a) $\log 878000$ 。  | (b) $\log 45600$ 。    |
| (c) $\log .000456$ 。 | (d) $\log 7590000$ 。  |
| (e) $\log 579000$ 。  | (f) $\log .0000796$ 。 |

3. 已知  $\log 2 = .3010$ ,  $\log 3 = .4771$ , 求下列各對數：

- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| (a) $\log 2^5 = ?$         | (b) $\log 3^6 = ?$         |
| (c) $\log 6^5 = ?$         | (d) $\log 1.5^5 = ?$       |
| (e) $\log \sqrt[3]{9} = ?$ | (f) $\log \sqrt[5]{3} = ?$ |

4. 已知  $\log 3 = .4771$ ,  $\log 5 = .6990$ , 求下列諸數各有幾位：

- |                |                |                         |
|----------------|----------------|-------------------------|
| (a) $3^{10}$ 。 | (b) $5^{10}$ 。 | (c) $\frac{3^5}{5^3}$ 。 |
|----------------|----------------|-------------------------|

5. (a)  $5.67^{10}$  是幾位數？ (b)  $7.65^{10}$  是幾位數？

(c)  $5.76^{10}$  是幾位數？ (d)  $7.56^{10}$  是幾位數？

§ 166. 求對數 已知一數，欲求牠的對數，只要求其定位，定值兩部，再取其和就行了。

[例一] 求  $\log 386 = ?$

[解法] 依求定位部的方法求得定位部是 2。

次依法檢表檢得定值部是 .5866。

$$\therefore \log 386 = 2.5866,$$

[例二] 求  $\log .000879 = ?$

[解法] 定位部爲  $-4$ ；定值部檢得 .5786

$$\therefore \log .000879 = \overline{4}.5786.$$

### 習 題 一 百 二 十 二

1. 求下列各對數：

(a)  $\log 34 = ?$

(b)  $\log .34 = ?$

(c)  $\log 3400 = ?$

(d)  $\log .358 = ?$

(e)  $\log .00358 = ?$

(f)  $\log 358000 = ?$

2. 求下列各對數：

(a)  $\log 81^{10} = ?$

(b)  $\log .92^{10} = ?$

(c)  $\log 75.6^{10} = ?$

(d)  $\log 23.6^{\frac{1}{2}} = ?$

(e)  $\log 38.7^5 = ?$

(f)  $\log 98800^{\frac{1}{3}} = ?$

3. 求下列各式的結果：

(a)  $\log(3^2 \times 4^3 \times 5^4)$ 。

(b)  $\log(518^2 \div 815^3)$ 。

(c)  $\log(98^2 \div \sqrt{89})$ 。

§ 167. 求反對數 在等式  $\log y = x$  中,  $x$  叫做  $y$  的對數,  $y$  叫做  $x$  的反對數。已知  $y$  欲求  $x$ , 是爲求對數。已知  $x$  欲求  $y$ , 這就是求反對數。

求反對數的方法: 先由對數的定值部求出反對數各位的數

字,再由定位部決定反對數中小數點的位置。

【例一】 已知  $\log x = 2.5514$ , 求  $x$ 。

【解法】 先在對數表中查出定值部  $.5514$ 。由  $.5514$  向左看,得  $N$  下的縱行內相應數字是 35; 再由  $.5514$  向上看,得  $N$  右的橫行內相應數字是 6。故知  $.5514$  是 356 的定值部。

又因  $\log x$  的定位部是 2, 故知  $x$  有三位整數。

$$x = 356.$$

【例二】 已知  $\log x = \overline{2}.6857$ , 求  $x$ 。

【解法】 先在對數表中查出定值部  $.6857$ 。由  $.6857$  向右看,得  $N$  下的縱行內相應數字是 48; 又由  $.6857$  向上看,得  $N$  右的橫行內相應數字是 5。故知  $.6857$  是 485 的定值部。

又因  $\log x$  的定位部是  $\overline{2}$ , 故知  $x$  的第一位有效數字與小數點之間應有一個 0。

$$\therefore x = .0485.$$

【例三】 已知  $\log x = \overline{5}.5933$ , 求  $x$ 。

【解法】 檢表得反對數的數字是 392。又因定位部是  $\overline{5}$ ,  
故

$$x = .0000392.$$

### 習題 一百二十三

1. 已知  $\log x = 2.279$ , 求  $x$ 。

[解法] 先在對數表中查出 2279。由 2279 向左看，得  $N$  下的縱行內相應數字是 16；再由 2279 向上看，得  $N$  右的橫行內相應數字是 9。故知反對數的各位數字是 169。

又因定位部是 2，故反對數有三位整數。

$$\therefore x = 169。$$

[注意] 上面解法有沒有錯誤？錯在何處？然則欲求反對數的各位數字，在對數表中應查對數的全部，還是只查定值部？

這種錯誤，初學者往往不死。務宜隨時留心！

2. 已知  $\log x = 1.8169$ ，求  $x$ 。 已知  $\log y = 2.8169$ ，求  $y$ 。

已知  $\log z = \overline{2}.8169$ ，求  $z$ 。 已知  $\log u = \overline{3}.8169$ ，求  $u$ 。

3. 已知  $\log a = 5.7868$ ，求  $a$ 。 已知  $\log b = 5.7875$ ，求  $b$ 。

已知  $\log c = \overline{5}.7882$ ，求  $c$ 。 已知  $\log d = \overline{5}.8774$ ，求  $d$ 。

4. 求下列各式中的  $x$ ：

(a)  $\log x = 1.9657$ 。 (b)  $\log x = 2.973$ 。

(c)  $\log x = 3.9680$ 。 (d)  $\log x = \overline{2}.8971$ 。

(e)  $\log x = \overline{5}.8886$ 。 (f)  $\log x = 20.6263$ 。

5. 求下列各式中的  $x$ ：

(a)  $\log x = 2.8459$ 。 (b)  $\log x = 4.8343$ 。

(c)  $\log x = 4.444$ 。 (d)  $\log x = 9.999$ 。

(e)  $\log x = \overline{3}.333$ 。 (f)  $\log x = \overline{5}.555$ 。

§ 168. 利用對數來計算 已經知道怎樣求對數，怎樣求反對數，那麼，關於乘，除，乘方，開方等計算問題，都可利用對數來縮短演算手續，而 § 154 所舉諸問題，也可完全解決了。

[例一] 求  $2^{100}$  的首三位數。

[解法] 先求  $\log 2^{100}$  是何值，再由該值求其反對數，這

樣,就得所求的數值。算式如下:

$$\log 2^{100} = 100 \log 2 = 100 \times .3010 = 30.10。$$

$$\therefore 2^{100} = 1.26 \times 10^{30} = 126 \times 10^{28}。$$

[例二] 求 $\sqrt[100]{2}$ 的首三位數。

$$\begin{aligned} \text{[解法]} \quad \log \sqrt[100]{2} &= \frac{1}{100} \log 2 = \frac{1}{100} \times .3010 \\ &= .0030。 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt[100]{2} = 1.01。$$

[例三] 求 $\sqrt[5]{.002}$ =?

$$\begin{aligned} \text{[解法]} \quad \log \sqrt[5]{.002} &= \frac{1}{5} \log .002 \\ &= \frac{1}{5} (\bar{3}.3010) \end{aligned} \quad (A)$$

$$= \frac{1}{5} (\bar{5} + 2.3010) \quad (B)$$

$$= \bar{1}.4602。 \quad (C)$$

$$\therefore \sqrt[5]{.002} = .289。 \text{(算到首三位數)}。$$

[注意] 由(A)何以不直接化爲(C)? 由(A)如何化爲(B)? 由(B)化爲(C), 是否比由(A)直接求(C)來得方便?

$$\text{[例四]} \quad \text{求} \frac{325^2 \times 532^3 \times 235^{\frac{1}{4}}}{879 \times 789 \sqrt{897}} = ?$$

$$\text{[解法]} \quad \text{爲寫式便利計, 設 } x = \frac{325^2 \times 532^3 \times 235^{\frac{1}{4}}}{879 \times 789 \times \sqrt{897}},$$

$$\begin{aligned}
 \text{則 } \log x &= 2 \log 325 + 3 \log 532 + \frac{1}{4} \log 235 \\
 &\quad - (\log 879 + \log 789 + \frac{1}{2} \log 897) \\
 &= 2 \times 2.5119 + 3 \times 2.7259 + \frac{1}{4} \times 2.3711 \\
 &\quad - (2.9440 + 2.8971 + \frac{1}{2} \times 2.9528) = 6.4768. \\
 \therefore x &= 2998000. \quad (\text{算到首四位數}).
 \end{aligned}$$

## 習 題 一 百 二 十 四

用對數計算：

1.  $367^{100}$ .
2.  $\sqrt[10]{367}$ .
3.  $759^8$ .
4.  $\sqrt[3]{75900}$ .
5.  $.00367^{100}$ .
6.  $\sqrt[10]{.0567}$ .
7.  $.00758^8$ .
8.  $\sqrt[3]{.00758}$ .
9.  $-567^2 \div 765^3$ .
10.  $-\sqrt{567} \div \sqrt[3]{765}$ .
11.  $\sqrt{567} \times \sqrt[3]{765}$ .
12.  $\frac{765}{\sqrt[3]{.0567}}$ .
13.  $12.3 \div 45.6 \times .00789 \div .789 \times 9.78$ .
14.  $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}}$ .
15. 直角三角形的斜邊是 897 市尺，一腰是 456 市尺，求他腰是幾市尺？
16. 已知圓的半徑是 125.6 市尺，求其面積(圓面積 =  $3.1416 \times$  半徑<sup>2</sup>).

§ 159. 指數方程式 凡含未知指數的方程式，叫做指數

方程式。

指數方程式有時無法求解。但若可化爲  $a^x=b$  之形，那就一定可用對數去求解。

[例一] 解 § 160 所舉方程式  $2^x=7$ 。

[解法] 指數方程式所以不能仿尋常方程式求解的原因，就在未知數含於指數之內。倘能用正確方法，把這未知數移到指數以外，那就不難求解了。今將原方程式的兩邊各取對數，如

$$\log 2^x = \log 7,$$

則得  $x \log 2 = \log 7$ 。

於是  $x = \frac{\log 7}{\log 2} = \frac{.8451}{.3010} = 2.808$ 。

[例二] 解方程式：  $9^x - 13(3^x) + 36 = 0$ 。

[解法] 化原式成  $3^{2x} - 13(3^x) + 36 = 0$ 。

即  $(3^x - 4)(3^x - 9) = 0$ 。

由是得  $3^x = 4$  及  $3^x = 9$ 。

由  $3^x = 4$ ，得  $x_1 = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{.6021}{.4771} = 1.26$ 。

由  $3^x = 9$ ，得  $x_2 = \frac{\log 9}{\log 3} = \frac{2 \log 3}{\log 3} = 2$ 。

### 習題 一百二十五

[題 4-7 與指數方程式無關]

1. 解下列各方程式：

(a)  $63^x = 7$ 。                      (b)  $343^x = 7$ 。                      (c)  $127^x = 250$ 。

2. 解下列各方程式：

(a)  $2^{2x} - 15(2^x) + 56 = 0$ 。                      (b)  $16^x + 4^x - 56 = 0$ 。

3.  $\log_3 80 = ?$        $\log_3 164 = ?$        $\log_3 40 = ?$

4. 求  $1+2+4+8+16+\dots$  第 20 項。(算到首四位數)。

5. 某生第一次考試算學得 40 分。以後每次考試比上一次進步  $\frac{1}{10}$ 。一學期內共考 6 次。問該生平均成績得幾分？

6. 某人每月儲蓄 5 元，連續 10 年。設依月利 .5 釐，一月一結，照複利息計。問共有本利若干元？

7. 存款一項，15 年後本利和 5 倍於本金。依複利算，年利率該是多少？

8. 解方程式  $2^m + 3^{m-1} = 8$ 。

9. 解方程式  $2^m \times 3^{m-1} = 8^{m+1}$ 。

10. 存款一項，年利率一分，幾年後本利和 5 倍於本金？

# 代 數 學

## 英 漢 名 詞 索 引

A	D
Abscissa 橫軸 ... .. 96	Dependent variable 應變數 ... 268
Absolute inequality 恆不等式... 257	Descending power 降幕 ... .. 61
Absolute value 絕對值 ... .. 37	Direct proportion 正比例; 正比 ... .. 285, 286
Algebra 代數 ... .. 1	E
Algebraical expression 代數式 6	Elimination by comparison 比 較消去法 ... .. 75
Antilogarithm 反對數 ... .. 336	Elimination by substitution 代 入消去法 ... .. 73
Applied problem 應用問題 ... 23	Equality 等式 ... .. 14
Arithmetic mean 等差中項 ... 312	Equation 方程式 ... .. 14
Arithmetic progression 等差級 數 ... .. 310	Equation of the second degree or Quadratic equation 二次方 程式 ... .. 163
Arrangement 排列 ... .. 61	Evolution or Radication 開方... 242
Ascending power 昇幕 ... .. 61	Expansion 展式 ... .. 243
Axioms of equality 等量公理 ... 15	Exponent 指數 ... .. 59, 324
B	Exponential equation 指數方程 式 ... .. 340
Base 底 ... .. 59	Expression 式 ... .. 6
Binomial 二項式 ... .. 58	Expression of common multi- ple 公倍式 ... .. 203
Bracket or parenthesis 括號 ... 45	Expression of lowest common multiple 最低公倍式 ... .. 204
C	Extraneous root 僞根... .. 233, 234
Characteristic 定位部... .. 331	Extreme 外項 ... .. 288
Coefficient 係數 ... .. 7	F
Common logarithm 常用對數 ... 332	Factor 因數 ... .. 7
Common root 公共根 ... .. 69	Factorization 因子分解法 ... 139, 161
Complex fractional expression 疊分式... .. 224	
Conditional inequality 條件不 等式 ... .. 257	
Constant 常數 ... .. 297	
Coördinates 坐標... .. 96	
Cross multiplication 十字相乘... 159	
Cubic root 三次方根; 立方根 ... 246	

Factorization by completing a square 配方分解法 ... .. 150, 154  
 Factorization by multiplying and dividing the first coefficient 乘除首係法 ... .. 156  
 Factorization by separating the middle term 分裂中項法 157  
 Formula 公式  $\Delta$  ... .. 170  
 Fourth proportional; the 比例第四項 ... .. 287  
 Fractional equation 分式方程式 ... .. 229  
 Fractional exponent 分指數 ... .. 324  
 Fractional expression 分式 ... .. 58  
 Function 函數 ... .. 298

## G

General method 通法 ... .. 113, 250  
 Geometrical progression 等比級數 ... .. 315  
 Graphical solution 圖解 ... .. 92

## H

Highest common factor 最高公因子 ... .. 197

## I

Identity 恆等式 ... .. 14  
 Imaginary numbers 虛數 ... 178, 261  
 Independent variable 自變數 ... 298  
 Index of radicals 根指數 ... .. 246  
 Inequality 不等式 ... .. 254  
 Inequal number 不等數 ... .. 252  
 Infinite descending geometrical progression 無限遞減等比級數 321  
 Integral expression 整式 ... .. 58  
 Inverse proportion 反比例 ... 286  
 Inverse ratio or Reciprocal ratio 反比 ... .. 285

## K

Known number 已知數 ... .. 14

## L

Laws of operation 運算公律 ... 9  
 Letter 文字 ... .. 2  
 Like terms or Similar terms 同類項 ... .. 8  
 Linear equation with two unknowns 兩元一次方程式 ... .. 93  
 Linear inequality with one unknown 一元一次不等式 ... 260  
 Logarithm 對數 ... .. 324

## M

Mantissa 定值部 ... .. 331  
 Mean 內項 ... .. 267  
 Mean proportional 比例中項 ... 287  
 Method of completing a square 配方法 ... .. 150  
 Monomial 單項式 ... .. 58, 242

## N

Negative exponent 負指數 ... 326  
 Negative number 負數 ... .. 40

## O

Ordinate 縱軸 ... .. 96  
 Origin 原點 ... .. 96

## P

Parenthesis 括號 ... .. 45  
 Perfect cube 完全立方 ... .. 148  
 Perfect square 完全平方 ... .. 144  
 Polynomial 多項式 ... .. 58  
 Positive number 正數 ... .. 40  
 Power 冪; 乘方 ... .. 59, 242  
 Prime factor 質因子 ... .. 140  
 Product 積 ... .. 104  
 Progression 級數 ... .. 308  
 Proportional 比例 ... .. 284

Q

Quadratic equation or Equation of the second degree 二次方程式 ... .. 163  
 Quadrinomial 四項式... .. 58, 144  
 Quotient 商 ... .. 110

R

Radical 根式... .. 246  
 Radical equation 根式方程式 261, 260  
 Radicand 被開式 ... .. 246  
 Radication or Evolution 開方... .. 242  
 Ratio 比... .. 284  
 Rational functions 有理函數 300, 304  
 Ratio of greater inequality 優比... .. 284  
 Ratio of less inequality 劣比 ... 284  
 Real root 實根 ... .. 226  
 Reciprocal ratio or Inverse ratio 反比 ... .. 285  
 Reduction of fraction to a common denominator 通分 ... 211  
 Root 根 ... .. 15

S

Sign 符號 ... .. 2  
 Similar terms or Like terms 同類項 ... .. 8  
 Simplification of a fraction 約分... .. 237  
 Simultaneous equations 聯立方程式 ... .. 69, 294  
 Simultaneous equations with four unknowns 四元聯立方程式... .. 89

Simultaneous equations with three unknowns 三元聯立方程式 ... .. 80  
 Simultaneous linear equations 聯立一次方程式... .. 69  
 Simultaneous linear equations with two unknowns 二元聯立一次方程式... .. 69  
 Simultaneous quadratic equations 聯立二次方程式 ... .. 181  
 Solve, to 解 ... .. 11  
 Solving the equation 解方程式 1b  
 Square root 平方根; 二次方根 ... 246  
 Surd 不盡根數 ... .. 261  
 System of coördinates 坐標制 ... 69

T

Term 項... .. 7  
 Third proportional, the 比例第三項 ... .. 287  
 Transpose 移項 ... .. 18  
 Trinomial 三項式... .. 5b, 144

U

Unknown 元... .. 14  
 Unknown number 未知數 ... 14

V

Value of ratio 比值 ... .. 284  
 Variable 變數 ... .. 297  
 Variation 變數法... .. 297  
 Vary directly, to 正變 ... .. 300  
 Vary inversely, to 倒變 ... .. 304

Z

Zero exponent 零指數 ... .. 323

經月七年六十二於書本  
 定審部育教府政民國  
 照執號二十二第字中到領

中華民國二十六年七月審定本第一版  
 中華民國二十六年四月審定本第一五六版

(上等報紙本)

\*\*\*\*\*  
 版 翻  
 權 印  
 所 必  
 有 究  
 \*\*\*\*\*

復興  
 教科書代

初級中學用  
 (CROSSER)

數二冊

下冊 定價國幣叁角陸分

印刷地點外另加運費

發 行 所	印 刷 所	發 行 人	主 編 者	校 訂 者	編 著 者
商 務 印 書 館	各 地 印 書 館	朱 經 農	王 雲 五	段 育 華	虞 明 禮
		上海河南中路			

