用器畫法圖解

平面幾何之部

薛德炯編譯

上海新亞書店印行

用器畫法圖解

平面幾何之部

薛德炯編譯

上海新亞書店發行

中華民國二十二年九月初版

用器畫法圖解

平面幾何之部

（圖另訂）

定價銀八角

外埠酌加寄費

編譯者　薛德炯

發行者　陳邦楨

印刷者　新亞書店

上海四馬路六十號

總發行所　新亞書店

分售處　各地各大書局

編譯者言

國內出版界,關於中等學校所用圖畫範本,年來如雨後春筍,層見疊出;然大都爲毛筆畫,鉛筆畫,水彩畫……,而於用器畫便不易多得,遑論善本! 推厥原因,端在學者對於此科,一切但求形似而怠於學理上之探討,加以用器畫法,原出於幾何學,涉及算學範圍,故每爲學者所不喜;需要既少,出版自鮮。 實際上,不論任何繪畫,要皆以平面幾何畫法,植其基礎,運用得宜,大之足以發揮應用藝術之能力,小亦足以養成縝密之頭腦。他若工業、商業、農業、建築等等作業之設計構圖,隨在皆須應用幾何畫法,以視其他繪畫,其重要且或過之而無不及。 作者有鑒於此,久擬編撰一書,聊應出版界之飢荒,祇以人事紛紜,迄未成稿,客歲得海口氏所著,認爲內容繁簡適當,因卽倫閒迻譯,印以行世。 譯稿初成,承曹駿聲先生助我整理,得早付排印,書此以誌感謝。

22年9月1日薛德炯識於上海

凡　例

1. 本書原爲中等學校學生學習平面幾何畫法而作,故所載各圖,純屬基本的,即以關於點、直線、圓者爲主,而略及圓錐曲線之概念。

2. 本科不能離幾何學之原理而研究,故本書作圖法均根據原理,惟遇複雜之理論,則竭力避免,俾讀者易於入手。

3. 中等學校圖畫科教學時數不多,若取本書內容全部教學,勢所不能,故區別爲基本的與應用的兩類而說明之,俾可適當取捨。

4. 爲作圖明瞭計,設定下列規約: 即解題時所引補助線皆用極細之虛線(……),所設線用較粗之實線,求得之線,用再較粗之實線。

5. 圖中用作符號之字母不設規定,採大小寫混用法,一以便明爲主。

6. 本書「圖」與「解」分別裝訂,藉免上下翻檢而便對照參閱。

目　　次

緒　　論

平面幾何畫法 Plane Geometrical Drawing 爲在平面上依據幾何學原理繪畫正確的平面圖形之法,同時並研究繪畫上必要的技術,以備運用之一學科也。在純正幾何學,謂:點祇有位置而無大小,線祇有長短而無闊狹。然本科乃以在平面(普通紙面)上正確表示點線爲目的,則點須有相當之大小,線須有線當之闊狹,人目方能辨認。故所引之線,以其廣度之中央爲其位置,點以所引小十字線之交點,或所作小圓之中心爲其位置。繪畫正確圖形,——卽點線之構成體,——不論如何熟練,欲如自在畫法,決

不可能。故必賴精密正確之儀器,始可繪畫;而技術之磨練,亦屬必要。

第一章

繪圖器具及其使用法

1. 欲繪正確鮮明之圖畫,須有精巧堅牢之器具。繪圖上所需器具,材料,約舉之則如下:

1. 圖畫板	2. 丁字尺	3. 三角板
4. 鴨嘴筆	5. 圓規	6. 量規
7. 比例規	8. 小圓規	9. 曲線板
10. 量角器	11. 尺	12. 鉛筆
13. 墨硯	14. 繪圖釘	15. 圖畫紙
16. 小刀	17. 製圖鋼筆尖	

2. 圖畫板 Drawing-board. 爲長方形板,檜木或桂木製者最佳。表面宜平滑,大小須視圖畫紙之尺幅,故無一定。

3. **丁字尺** T-square 用以畫直線,以其形若丁字,故名。將丁字形之頭部,置於圖畫板之左方,令其緣密着板緣,而沿之上下移動,得引平行線。

4. **三角板** Set Squares 板作三角形,以賽璐珞製者爲最佳。普通以兩枚爲一組,均係直角三角形(直角三角形即有一角爲 90° 之三角形);惟一則有一角爲 60° 者,一則有二角均爲 45° 者。用以引直線,或對於一直線作垂線,作成 45°, 30°, 60° 之角之直線。

5. **鴨嘴筆** Drawing-pen Fig. 1 所示,乃鴨嘴形之兩鋼片,片間夾墨以引線者.線之闊狹可藉螺旋以加減,畫線時將螺旋頭 H 外向,沿着內側所置直尺邊緣,稍帶傾斜,便可繪畫。

6. **圓規** Compasses 如 Fig. 2 (Fig.3) 所示,一脚 A 可由 C 處拔出,用以畫圓;用

鉛筆作圓時,去A而代以如Fig. 4(Fig. 5)之脚;用墨作圓時,則代以Fig. 6 (Fig. 7)之脚;作大圓時,則添用如Fig. 8 (Fig. 9)之中繼股。畫圓時將B方之尖端輕刺於紙上,繞其周而旋轉圓規便可。

7. **量規** Dividers 形如Fig. 2,但其兩脚端銳尖,且不能拔出。用以由尺量取定長,移於紙上,或取圖上之長,量之於尺又可利用其脚尖輕輕穿穴於紙面,以在直線上定出等距離點。

8. **比例規** Proportional Divider 如Fig. 13所示,用以等分直線。S可在二脚AB中央之鏤空處上下滑動,藉螺旋而任意固定其位置。脚AB之表面有刻度2,3,4,…… …10,今設滑動S,而使其上所刻指標I,與刻度3齊一後,緊旋螺旋;於是開張其脚,則A端之開度,便爲B端開度之3倍。故隨指標I之合於2,3,……,得將

所設直線照2倍,3倍……而等分。

此外,尚有等分圓周,等分面積,等分體積之刻度,刻定於其上者,說明從略。

9. **小圓規** Bow Compasses 是爲如Fig. 14, 15, 16所示之圓規。Fig. 14用作量規, Fig. 15爲用墨以作圓者, Fig. 16爲用鉛筆以作圓者,

10. **曲線板** French Curve 形如Fig. 17, 用以引曲線;亦以賽璐珞製成者爲最佳。

11. **尺** Scales 有竹製者,有黃楊木製者,以鑲象牙邊者爲最佳。其上之刻度,有爲標準制,有爲　　制。製圖時以長20 cm. 30 cm. 者,爲用最廣,得細分之至1 mm.

12. **量角器** Protractor 如Fig. 18所示,用以量角度。簡單者爲半圓形之賽璐珞製品,得量至180°.

13. **鉛筆** Pencil 繪圖時所用鉛筆,以HH或HHH爲最普通。削鉛筆時,尖端

宜如刀鑿,薄而扁平,不可如尖針狀。削成尖針狀者,祇可用以畫圖,不宜劃線。

第二章

點與直線

14. 本章專述關於點與直線之基本的作圖法。

作圖題 1. 試引一直線,將所設有限直線 AB 垂直二等分。(Fig. 19)

(1) 以 A, B 爲中心,用任意半徑,畫弧,設其交點爲 C, D。

(2) 於是聯結 C, D 之直線,即所求之直線也。

作圖題 2. 過直線 AB 上之定點 C, 引一直線,垂直於此直線。

(甲) C 在 AB 之中間者。(Fig. 20)

(1) 在 AB 上,取距 C 等遠之二點 E, F。

(2) 以 E, F 爲中心,用任意半徑,畫圓,設其交點爲 D。

(3) 於是聯結 C, D 之直線,即所求之直線也。

（乙） C在AB之一端者.(Fig. 21)

此時雖可將AB向C延長作圖如甲法,然遇不能延長時,則其作圖法當如次:

(1) 在AB上,取適當之位置B。

(2) 以C爲中心,作過B之弧,與B爲中心BC爲半徑之弧交於D。

(3) 以D爲中心,作過C之弧,與弧BD交於E。

(4) 以D, E爲中心,用任意半徑作弧,設其交點爲F.

(5) 於是聯結C, F之直線,卽爲所求之直線。

（丙） 實用上,常不用圓規而用三角板以作圖.卽將三角板直角之一邊,重合於AB, 且將其角頂重合於C,於是再沿直角之他一邊引直線,卽爲所求之直線。

作圖題3. 由直線AB外之點P,至其上引垂線。

第一法 (Fig. 22)

(1) 以P爲中心,用任意半徑作圓,設與AB交於E,F.

(2) 以E,F爲中心,用任意半徑作弧,設其交點爲D.

(3) 於是聯結P,D之直線,卽所求之直線.

第二法 (Fig. 23)

(1)　在AB上,取任意點C。

(2)　引直線PC,設與其垂直二等分線交於O;則O爲PC之中點。

(3)　以O爲中心,作過P之圓(半徑OP),與AB交於D.

(4)　於是聯結P,D之直線,即所求之直線也。

第三法　在實用上,可單用三角板以作圖,其法如次:

(1)　先以三角板(I)之一邊緣,重合於AB,再以三角板(II)夾直角之一邊緣,密着於其上。

(2)　將三角板(II)沿(I)而滑動,令其垂直於(I)之一邊緣與P齊一。

(3)　然後沿與P齊一之緣而引直線,即得所求之直線。

作圖題4.　過定點P,引平行於直線AB之直線。

第一法　(Fig. 24)

(1)　以AB上之任意一點O爲中心,作過P之圓,設與AB交於A, B。

(2)　以B爲中心,AP爲半徑,作弧,設與圓APB交於Q。

(3)　於是聯結P,Q之直線,卽所求之直線也.

第二法　(Fig. 25)

(1)　以AB上之任意一點A爲中心,作過P之弧,設與AB交於B.

(2)　以P爲中心,作過A之弧,再以A爲中心,BP爲半徑,作弧,與前弧交於Q.

(3)　於是聯結P,Q之直線,卽所求直線也.

第三法　(Fig. 26)

實用上所用之法如次:

(1)　將三角板C,D,安置如圖,使D′之邊線與AB齊一.

(2)　將D沿C之邊線滑動至D′之位置,卽得引所求之直線.

作圖題 5.　平行於定直線 AB, 引距此爲定遠 l 之直線.(Fig. 27)

(1)　以AB上之任意二點C,D爲中心,l爲半徑,作圓.

(2)　於是將直尺之邊線接於二圓,沿之以引直線PQ,卽爲所求之直線.

作圖題 6.　引直線 OB, 令與所設直

線 OA 所成之角等於所設角aob。(Fig.28)

(1) 以o爲中心,作任意弧,設與oa,ob交於a,b。

(2) 在OA上,取OA等於oa。

(3) 以O爲中心,作過A之弧,再以A爲中心,ab爲半徑,作弧,與前弧交於B。

(4) 於是聯結O,B之直線,即所求之直線也。

應用題 1. 過直線AB外之定點P引直線,令與AB所成之角等於所設角α。(Fig. 29)

(1) 應用作圖題6,引任意直線CD,令與AB成角α。

(2) 再據作圖題4,過P引平行於CD之直線,即得所求之直線。

作圖題 7. 作所設角之二等分線。

(甲) 角頂在紙面上者。(Fig. 30)

(1) 設OA, OB爲所設角之二邊。

(2) 以O爲中心,作任意弧,與OA, OB交於E, F。

(3) 以E, F爲中心,用任意半徑作弧,設其交點爲P。

(4) 於是聯結O, P之直線,即所求直線也。

(乙) 角頂在紙面外者。(Fig. 31)

(1) 設AB, CD爲所設角之二邊。

(2) 引與AB, CD相交之任意一直線,設其交點爲E, F。

(3) 求得角 AEF, CFE 之二等分線交於 G, 及角 BEF, DFE 之二等分線交於 H。

(4) 於是聯結 G, H 之直線,卽所求直線也。

別法 (Fig. 32)

(1) 由 CD 上之任意一點 F, 平行於 AB, 引 FI。

(2) 將角 CFI 二等分,引直線 FE, 設與 AB 交於 E。

(3) 於是 EF 之垂直二等分線 PQ, 卽所求直線也。

作圖題 8. 引三等分直角 AOB 之直線, (Fig. 33)

(1) 以 O 爲中心,作任意圓,與 OA, OB 交於 E, H。

(2) 以 E, H 爲中心, OE 爲半徑,作弧,與前弧各交於 G, F。

(3) 於是直線 OG, OF, 卽所求直線也。

作圖題 9. 二直線 AB, CD 之交點在紙面外時,引過定點 P 及交點之直線。(Fig. 34)

(1) 過 P 引一任意直線,設與 AB, CD 各交於 F, E。

(2) 過 F 再引一任意直線,設與 CD 交於 G。

(3) 由 G 平行於 EF 引 GH。

(4) 由 P 平行於 CD 引 PQ, 設與 FG 交於 Q。

(5)　由Q平行於AB引QR,設與GH交於R。

(6)　於是聯結P,R之直線,即所求直線也。

別法 一 (Fig. 35, 36)

(1)　將AB, CD上之任意點E, F與P聯結。

(2)　引平行於EF之任意直線,設與AB, CD各交於G, H。

(3)　由G, H各引平行於EP, FP之線,設其交點爲Q。

(4)　於是聯結P,Q之直線,即所求直線也。

應用題 2.　在直線AB上,求出距定點P等於定遠l之點。(Fig. 37)

以P爲中心,l爲半徑,作圓,與AB交於Q, R,則Q, R即所求之點也。

作圖題10.　求距三點P, Q, R等遠之點。(Fig. 38)

PQ, QR之垂直二等分線之交點O,即所求之點也。

應用題 3.　過P,引距離二點A, B等遠之直線。(Fig. 39)

(1)　設AB之垂直二等分線,與AB交於C。

(2)　於是聯結P,C之直線,即所求之直線也。

應用題 4.　求距直線OY爲d_1, OX爲d_2之點。(Fig. 40)

據作圖題 5,平行於 OY, 引距此爲 d_1 之直線,平行於 OX, 引距此爲 d_2 之直線,求出其交點 P, Q, R, S, 卽得.

作圖題 11.　在定直線 AB 上,求出至定點 P,Q 之距離和爲最小之點.(Fig. 41)

(1)　由 P 至 AB 引垂線,設其足爲 O.

(2)　延長 PO, 取 OP_1 等於 OP.

(3)　於是聯結 Q, P_1 之直線,與 AB 相交之點 R, 卽所求之點也.

若 Q 對於 AB 不與 P 同側,則聯結 P, Q 而求得與 AB 之交點便可.

作圖題 12.　設三線分 a, b, c, 求 d 之長,令 $a : b = c : d$.(Fig. 42)

(1)　在一直線 OA 上,取 OA, OB 各令等於 a, b.

(2)　過 O 引一任意直線,在其上取 OC 令等於 c.

(3)　聯結 BC.

(4)　由 A 引平行於 BC 之直線,與 OC 交於 D.

(5)　於是 OD 之長,卽所求之 d 也.

作圖題 13.　五等分線分 AB.(Fig. 43)

(1)　在過 A 之任意直線上,取 Am, mn, np, pq, qb 之任意等長.

(2)　於是由 m, n, p, q 引平行於 Bb 之直線,與 AB 交於 M, N, P, Q, 則此四點卽所求之等分點也。

應用題 5.　將線分 AB, 照 1: 2: 3 之比截分。(Fig. 44)

(1)　在過 A 之任意直線上,取 A1, 12, 23, 34, 45, 56 之任意等長。

(2)　於是由 1, 3 平行於 6B 所引之線,與 AB 相交之點 M, N, 卽所求之分點也。

作圖題 14.　求定長 a, b 之比例中項;卽求 c 之長,令 a : c = c : b。(Fig. 45)

(1)　在任意直線 AB 上,取 AO, OB 令各等於 a, b, 但 O 須在 A, B 之間。

(2)　以 AB 為直徑之圓(卽以 AB 之中點為中心而過 A, B 之圓),與由 O 至 AB 所引垂線交於 C。

(3)　於是 OC 之長,卽所求之長也。

作圖題 15.　求內分線分 AB 於中外比(或稱中末比)之點;卽求出點 C, 令 AB : AC = AC : CB。(Fig. 46)

(1)　在由 B 至 AB 所引垂線上,取 BM 令等於 AB 之半分。

(2)　聯結 A, M, 在其上取 MN 令等於 MB。

(3) 在AB上,取AC令等於AN。

(4) 於是C即所求之點也。

應用題 6. 求外分線分AB於中外比之點;即求出點C,令AC:AB=AB:BC。(Fig.47)

(1) 在由B至AB所引垂線上,取BM令等於AB之半分。

(2) 在AM之延長線上,取MN令等於MB。

(3) 在AB之延長線上,取AC令等於AN。

(4) 於是C即所求之點也。

斯時AC之長,等於以AB爲邊之正十角形外接圓之半徑。

應用題 7. 求定長a, b之調和中項;即求出點h,令a−h:h−b=a:b。(Fig.48)

(1) 在直線AB上,取AO, OB令各等於a, b。

(2) 以AB爲直徑之圓,與由O至AB所引垂線交於D。

(3) 聯結D與圓之中心C。

(4) 由O至CD引垂線OH。

(5) 於是HD之長,即所求之長也。

應用題 8. 過定點O引直線,令至他二定點P,Q之距離爲2:1之比。(Fig.49)

(1) 求出將 PQ 照 2:1 之比內分及外分於點 R,S (即 PR:RQ=PS:SQ=2:1)。

(2) 於是直線 OR, OS, 卽所求直線也。

作圖題16. 至定點 P,Q 之距離之比,爲 3:1 之點,其軌跡若何?試求之! (Fig. 50)

(1) 聯結 P,Q, 照 3:1 之比,將其內分及外分於 M,N。

(2) 於是以 MN 爲直徑之圓卽所求之軌跡也。

作圖題17. 過定點 O 引直線,令自他二定點 P,Q 至其上之距離和(差),等於定長 l。(Fig. 51)

(1) 聯結 O,Q 及 P,Q。

(2) 由 O,P 各引平行於 PQ, OQ 之線,設其交點爲 S。

(3) 以 S 爲中心, l 爲半徑,作弧 AB; O 若在圓 AB 內,則無解答。

(4) 將直尺之一邊緣,齊於 O 而切於弧 AB。

(5) 於是沿直尺邊緣所引之直線 OR, 卽所求之直線也。

OR 若通過 P,Q 間,則 P,Q 至 OR 之距離和等於 l, 否則等於其差。

應用題 9. 在直線 AB 上,求出至定點 P,Q 之距離

之比爲2:1之點。(Fig 52)

(1) 據作圖題16,求出至P,Q之距離之比爲2:1之點之軌跡。

(2) 於是此軌跡與AB之交點C,D,卽所求之點也。

應用題10. 在三角形ABC之二邊AB, CB間,平行於他邊AC_1引直線MN,令MN爲AN,CM之比例中項。(Fig. 53)

(1) 在AB之延長線上,取BC_1令等於BC。

(2) 以AC_1爲直徑之圓,與由B至AC_1所引之垂線交於D。

(3) 平行於AC作BD_1,令其長等於BD。

(4) 引AD_1,設與BC交於M。

(5) 則由M平行AC所引之MN,卽所求之直線也。

作圖題18. 三等分一任意角。

三等分一任意角,爲初等平面幾何學上不能解決之一問題。茲所說明者,乃其近似的作圖法。(Fig. 54)

(1) 設角AOB爲定角。

(2) 引角AOB之二等分線OG。

(3) 引MN垂直於OG,設與OA, OB交於M,N。

(4) 以MN爲直徑,作半圓,與OG交於G.

(5)　求出三等分半圓MGN之弧E, F(三等分半圓時,祗須照半徑之長分截,卽得)。

(6)　以O爲中心,作過M之弧MN,與OG交於P。

(7)　在PO上,取PH令等於NG。

(8)　聯結H, E; H, F,設與圓弧MPN各交於C, D。

(9)　於是直線OC, OD,乃近似的三等分角AOB之直線也。

第三章

三角形與多角形

15. 定義

三直線所圍成之平面形,曰**三角形** Triangle。 三以上之直線所圍成之平面形,曰**多角形** Palygon。 圍成三角形或多角形之直線,曰其形之**邊**。 多角形,隨其邊數而稱爲**四角形** Quadrilateral, **五角形**, Pentagon, **六角形** Hexagon, ...(或**四邊形**, **五邊形**,**六邊形**........)。

(1) **二等邊三角形** Isosceles triangle 爲三角形之有二邊相等者。夾等邊之角,曰**頂角** Vertical angle。其角頂曰**頂點** Vertex。對於頂點之邊,曰**底邊** Base。底邊與

他邊所成之角,曰**底角** Base angle。

(2) **直角三角形** Right triangle 三角形中有一角爲直角者,曰直角三角形。對於直角之邊,曰**斜邊** Hypotenuse。

(3) **正三角形** Equilateral triangle 三邊相等者也。

(4) **三角形之高** 由一角點至其對邊之距離,曰三角形之**高** Altitude。因此對於角頂之邊,稱之曰**底** Base。

(5) **正多角形** Regular polygon 多角形中,各邊之長相等而各內角亦相等者,曰正多角形;隨其邊數而稱爲正五角形,正六角形,正七角形,⋯⋯⋯。關於正多角形,在後章說明之。

(6) **平形四邊形** Parallelogram 二雙對邊各相平行之四邊形也。一雙平行邊間之距離,曰平行四邊形之**高**;而其邊稱之曰**底**。

(7)　**矩形** Rectangle　隣邊各相垂直之平行四邊形也。

(8)　**菱形** Rhombus　隣邊各相等之平行四邊形也。

(9)　**正方形** Square　菱形之內角均爲直角者也。

(10)　**梯形** Trapezoid　一雙對邊平行,他雙不平行之四邊形也。不平行之二邊相等者,曰**二等邊梯形** Isosceles trapezoid。平形之二邊曰**底**,其間之距離曰**高**。

(11)　**多角形之對角線**　多角形中,聯結不相隣二角頂之直線,曰**對角線** Diagonal。平行四邊形之對角線,互爲二等分。菱形之對角線,互相垂直。

(12)　**三角形內角之和**　三角形三內角之和等於二直角。故正三角形之一內角爲 60°

(13)　**多角形內角之和**　設邊數爲 n,

則其內角之和等於$2(n-2)\angle R$。因此正多角形之一內角等於$\frac{2(n-2)\angle R}{n}$。

平行四邊形之對角相等;相隣二角之和等於二直角。

(14) **中線** Median 三角形之一角頂與其對邊之中點聯結之直線,曰三角形之**中線**。三角形之三中線會於一點。此點與各頂點之距離,等於其中線全長之三分之二。是點曰**重心** Centroid。

(15) **相似多角形** Similar triangles 二或二以上之多角形,其對應邊之比相等而對應角相等者,曰相似多角形。例如邊數相同之多角形 ABCD……, abcd…… 中

$$AB : ab = BC : bc = CD : cd = \cdots\cdots$$

$$\angle ABC = abc, \ \angle BCD = \angle bcd, \cdots\cdots$$

時,則此二多角形卽爲相似多角形。

作圖題 19. 已知三邊之長爲 a, b, c, 求作此三角形。(Fig. 55)

(1) 引直線BC,截取之令等於a。

(2) 以C,B爲中心,b,c爲半徑,各作一弧,設其交點爲A。

(3) 聯結A,B;A,C。

(4) 則三角形ABC,卽所求三角形也。

作圖題20 已知三角形各邊之中點爲P,Q,R,求作此三角形.(Fig. 56)

(1) 作三角形PQR。

(2) 由P,Q,R各平行於QR,RP,PQ引平行線,設其各交點爲C,A,B。

(3) 則三角形ABC,卽所求三角形也。

作圖題21. 求所設三角形ABC之重心。(Fig. 57)

(1) 先求AB,AC之中點E,F。

(2) 聯結B,F;C,E;設其交點爲G。

(3) 則G卽所求之重心也。

作圖題22. 已知一邊爲BC及過B,C中線之長爲m_1,m_2,求作此三角形。(Fig. 58)

(1) 以B,C爲中心,m_1,m_2三分之二之長爲半徑,

各作一弧,設其交點爲G。

(2) 在BG, CG上,取BF, CE令其各等於m_1, m_2。

(3) 引BE, CF,設其交點爲A。

(4) 則三角形ABC,卽所求三角形也。

應用題11. 已知三中線爲m_1, m_2, m_3,求作此三角形。(Fig. 59)

(1) 以m_1, m_2, m_3 三分之二之長爲三邊,作三角形BDG。

(2) 在DG之延長線上,取GC等於GD。

(3) 由D, G各引平行於BG, BD之線,設其交點爲A。

(4) 於是三角形ABC,卽所求之三角形也。

作圖題23. 已知底邊BC及頂角α,求作此二等邊三角形。(Fig. 60)

(1) 引直線CE,令與BC之延長線成角α。

(2) 求出角BCE之二等分線,與BC之垂直二等分線交於點A。

(3) 則三角形ABC,卽所求之三角形也。

應用題12. 已知底邊AB,一底角α及頂角β,求作此三角形。(Fig. 61)

(1) 引AC,令與AB成角α。

(2) 引AD,令與AC成角β。

(3)　由B引平行於AD之線,與AC交於C。

(4)　於是三角形ABC即所求之三角形也。

作圖題24.　已知斜邊 AB 及一角 α,求作此直角三角形。(Fig 62)

(1)　作以AB爲直徑之半圓。

(2)　引AC,與BA成角,α 而與半圓交於C。

(3)　於是三角形ABC,乃角ACB爲直角之三角形也。

應用題13.　已知斜邊AB與他一邊之長b,求作此直角三角形。(Fig. 62)

應用題14.　已知高爲h,求作正三角形。(Fig. 63)

(1)　引直線A D,令其長等於h。

(2)　引AC垂直於AD。

(3)　以A爲中心,作任意之圓弧MN,與AC交於N。

(4)　以N爲中心,NA爲半徑,作弧,與弧MN交於E。

(5)　引AE,由D引平行於AC之線,與AE交於B。

(6)　取AC,令等於AB,聯結B,C。

(7)　則三角形ABC,即所求三角形也。

作圖題25.　已知底邊 AC,一底角 α 及他二邊之和l,作此三角形。(Fig. 64)

(1)　引 AD, 令與 AC 成角 α, 且令其長等於 l。

(2)　聯結 C, D, 求出其垂直二等分線與 AD 之交點 B。

(3)　聯結 B, C, 則三角形 ABC 卽所求三角形也。

應用題 15.　已知底邊 AC, 一底角 α, 他二邊之差 d, 作此三角形。(Fig. 65)

(1)　引 AB 與 AC 成角 α, 在 B 之異側取 AD, 令等於 d。

(2)　聯結 C, D, 設其垂直二等分線與 AB 之交點爲 B。

(3)　三角形 ABC, 卽所求三角形也。

應用題 16.　已知一角 α, 及其所對邊之長 a, 與夫他二邊之差 d, 求作此三角形。(Fig. 66)

(1)　引直線 BA, 在其上取 BD, 令等於 d。

(2)　引 DE, 令與 DB 成角 α。

(3)　角 ADE 之二等分線, 與中心 B 半徑 a 之弧交於 C。

(4)　由 C 引平行於 DE 之線, 與 BA 交於 A, 則三角形 ABC 卽所求圖形也。

作圖題 26.　已知二角 α β, 與三邊之和 s, 求作此三角形。(Fig. 67)

(1)　引直線EF,令其長等於s。

(2)　由E,F引直線EP,FQ,各與EF成角α, β,設此兩角之二等分線相交於C。

(3)　由C引平行於EP,FQ之線,各與EF交於A,B。

(4)　則三角形ABC,即所求三角形也。

作圖題27.　已知斜邊之長c,及他二邊之差d,作直角三角形.(Fig. 68)

(1)　引直線AC,在其上取AP,令等於d。

(2)　引DE垂直於AC。

(3)　引角CDE之二等分線DB,與中心A半徑c之弧交於B。

(4)　由B至AC引垂線BC。

(5)　於是三角形ABC,即所求三角形也。

作圖題28.　已知二邊之長a, b及第三邊上中線之長m,作此三角形。(Fig. 69)

(1)　取AD, AC, CD令各等於a, b, 2m,作三角形ACD。

(2)　將CD之中點M與A聯結,與由D平行於AC所引之線交於B。

(3)　則三角形ABC,即所求三角形也。

作圖題29. 已知二邊之長 a, b 及非其夾角之二角差 δ，作此三角形。(Fgi. 70)

(1) 作角ACD令等於角δ，取CD, CA令各等於a, b。

(2) 引AD之垂直二等分線，與CD交於E。

(3) 引AE，在其延線上取AB令等於a。

(4) 則三角形ABC，卽所求圖形也。

作圖題30. 已知對角線之長 l，作此正方形。(Fig. 71)

(1) 引直線AC，令其長等於l。

(2) 求出AC之中點O，在過O所引AC之垂線上，取OB, OD，令各等於$\frac{1}{2}$ l。

(3) 引AB, BC, CD, DA，則四邊形ABCD卽所求正方形也。

作圖題31. 已知對角線之長 a，一邊之長b，求作此矩形。(Fig. 72)

(1) 取AC令其長等於a，以之爲直徑作圓。

(2) 以A, C爲中心，b爲半徑，作弧，與前圓各交於D, B。

(3) 則四邊形ABCD，卽所求矩形也。

作圖題32. 已知一邊 AD 及二對角

線之長m, n, 作平行四邊形。(Fig. 73)

(1)　以AD爲一邊, m, n之半爲他二邊,作三角形AOD。

(2)　在AO, DO之延長線上,取OC, OB令各等於OA, OD。

(3)　引AB, BC, CD, 則四邊形ABCD卽所求圖形也。

應用題17.　已知一對角線之長m,一邊之長n, 作菱形。(Fig. 74)

作圖題33.　已知平行二邊之長a, b及對角線之長c,作二等邊梯形。(Fig. 75)

(1)　引直線AD等於a。

(2)　在AD上,取AM, DN, 令等於a, b之半差。

(3)　過M, N所引AD之垂線,與以D, A爲中心, c爲半徑所作二弧,各交於B, C。

(4)　引AB, BC, CD, 則四邊形ABCD, 卽所求圖形也。

作圖題34,　作多角形,令其相似於定多角形abcdef, 且使對應於ab一邊之長等於定長l。(Fig. 76)

(1)　由af之延長線上任意一點A, 引平行於ab之線AB, 令其長等於l。

(2) 聯結B, b, 與af之延長線交於O.

(3) 聯結O, c, 與由B所引平行於bc之線交於C.

(4) 聯結OD, 與由C所引平行於cd之線交於D.

(5) 以下用同法求出E, F.

(6) 則多角形ABCDEF卽所求圖形也.

作圖題35. 求梯形之重心。(Fig. 77)

(1) 設ABCD爲梯形.

(2) 將二平行邊AD, BC互向反向延長,於其上取DF, BE,令各等於BC, AD.

(3) 求出BC, AD之中點M, N.

(4) 引直線EF, MN,設其交點爲G.

(5) 則G卽求得之重心也.

作圖題36. 求四邊形之重心。(Fig. 78)

(1) 設ABCD爲四邊形.

(2) 引對角線AC, BD,設其交點爲E.

(3) 在DB上,取DF令等於BE.

(4) 作三角形ACF,求出其重心G.

(5) 則G卽所求之重心也.

第四章

直線與圓

16 定義

(1) **圓** 距一定點等遠之點之軌跡,曰**圓**Circle。此定點,曰此圓之**中心**Centre。自定點至圓上任意點之長,曰此圓之**半徑** Radius。

(2) **弦** 聯結圓上任意二點之直線,曰**弦** Chord。直徑者,通過中心之弦也。

(3) **弧** 圓之一部分,曰弧 Arc。

(4) **弓形** 一弧與聯結其兩端之弦所圍成者,曰**弓形** A segment of a circle。

(5) **扇形** 弧與過其兩端之半徑所成者,曰扇形 A sector of a circle。

(6) **同心圓** 公有中心之圓,曰**同心圓** Concentric circles。

(7) **中心角** 兩半徑所夾之角,曰**中心角** Central angle。

(8) **圓周角** 分圓為二弧,一弧之兩端各與他弧上一任意點聯結所成之角,曰立於前一弧上之**圓周角** Angle at the cirumference。

(9) **圓之切線** 與圓祇交於一點之直線,曰圓之**切線** Tangent。其交點,曰**切點** Point of contact.。

(10) **法線** 過切線之切點而垂直於此切線之直線,曰**法線** Normal。圓之法線,過其中心。

(11) **圓之相切** 二圓祇交於一點時,曰此二圓**相切** to contact. 其交點,曰**切點**。

作圖題 37. 過所設三點 P, Q, R, 求作一圓。(Fig. 79)

據作圖題10,求出距三點等遠之點O,則O卽爲中心故以O爲中心,過P作圓,則亦過Q,R。

作圖題38. 已知弦AB與弧之高h,求作此弧.(Fig. 80)

(1) 求出AB之中點D。

(2) 過D引垂直於AB之線,取DC令等於h。

(3) 求出過A,C,B三點之圓之中心,以之爲中心作弧,便得所求.若中心遠在紙外,則其作圖法應如次:

(4) 引CA,更引AE垂直於CA,由C平行於AB引CE,與AE交於E。

(5) 由A引AF垂直於CE。

(6) 將FA,CE,DA等分爲同一任意數(4),分別標明 1,2,3; 1′,2′,3′; 1″,2″,3″.

(7) 引C1,C2,C3及1′1″, 2′2″,3′3″,設其各相對應之交點爲I,II,III.

(8) 於是I,II,III便爲圓弧上之點.再用同法在BC間求出圓弧上之點,應用曲線板將所得各點聯成曲線,便得所求。

作圖題39. 引過三點P,Q,R之圓弧。(Fig. 18)

Fig. 81 所示之作圖法,乃為過三點之圓其中心遠在紙面外者。

(1) 以 P, R 為中心, PR 為半徑,作圓,設與直線 PQ, RQ 各交於 S, T。

(2) 在弧 RS, PT 上,取任意之等距離點 a, b, c, d, e, m, n; a′, b′, c′, d′, e′, m′, n′。

(3) 引 Pa, Pb, ……, Ra′, Rb′, ……, 設其各相對應之交點為 A, B, ……。

(4) 則因 A, B, …… 為弧上之點,應用曲線板依次聯成曲線,便得所求。

作圖題 40. 從圓 O 外之一點 P, 至此圓引切線。

第一法 (Fig. 82)

(1) 將 P 與中心 O 聯結。

(2) 求出以 PO 為直徑之圓與圓 O 之交點 Q, R。

(3) 於是直線 PQ, PR 為所求切線, Q, R 各為切點。

第二法 (Fig. 83)

(1) 過 P 引任意二直線 PA, PC, 設與圓交於 A, B, C, D。

(2) 引 AD, BC 及 AC, BD, 各交於 E 及 F。

(3)　聯結E, F, 與圓交於Q, R。

(4)　於是直線PQ, PR, 即所求切線也。

第三法　(Fig. 84)

(1)　過P引任意三割線PA, PC, PE, 與圓各交於A, B; C, D; E, F。

(2)　引AD, BC及CF, DE, 各交於G及H。

(3)　聯結G, H, 與圓交於Q, R。

(4)　於是PQ, PR, 即所求切線也。

作圖題41. 引切線,令切於定圓弧上之一點P。

第一法　(Fig. 85)

(1)　以P為中心之任意弧,與定弧交於A, B。

(2)　聯結A, B。

(3)　過P平行於AB, 引PQ, 即所求切線也。

第二法　(Fig. 86)

(1)　在定弧上,由P取PA等於AB。

(2)　聯結PA, PB成角APB。

(3)　作角APQ, 令等於角APB。

(4)　則PQ即為所求之切線。

作圖題42. 由定點P至定弧AB引切

線。(Fig. 87)

(1)　過P引任意直線,與弧AB交於A, B。

(2)　以PB爲直徑之圓,與由A所引PB之垂線交於C。

(3)　以P爲中心,過C作弧,與弧AB交於Q。

(4)　於是直線PQ爲所求切線,Q爲切線.

作圖題43.　平行於所設直線AB,引圓之切線。(Fig. 88)

(1)　過圓之中心O至AB引垂線,與圓交於C, E。

(2)　過C, E平行於AB所引之CD, EF,卽所求切線也。

別法　(Eig. 89)

(1)　引平行於AB之任意弦MN。

(2)　引MN之垂直二等分線,與所設圓交於C。

(3)　過C平行於AB所引之CD,卽所求切線也。

作圖題44.　試作二圓P, Q之公切線。(Fig. 90)

(1)　以P爲中心,二圓之半徑和及差爲半徑,作圓, E_1F_1, E_2F_2。

(2)　由Q至圓E_1F_1, E_2F_2引切線,設其切線各爲E_1,

F_1, E_2, F_2。

(3)　PE_1, PE_1, 及 PF_2, PF_2 之延長線,與圓 P 各交於 e_1, f_1, e_2, f_2。

(4)　於是過 e_1, f_1, e_2, f_2, 平行於 QE_1, QF_1, QE_2, QF_2 所引之各線 S_1A_1, S_1B_1, S_2A_2, S_2B_2, 卽所求切線也。

作圖題45.　以定直線 AB 爲弦,作含定角 α 之弓形。(Fig. 91)

(1)　過 B 引 BC, 與 BA 成角 α。

(2)　AB 之垂直二等分線,與由 B 所引 BC 之垂線交於 O。

(3)　以 O 爲中心,作過 A, B 之弧 APB。

(4)　則弓形 APB, 卽所求之弓形也。

作圖題46.　作正三角形,令其頂點在三平行線 BE, AG, CF 之上。(Fig. 93)

(1)　由 AG 上之一點 A, 引直線 AE, AF, 各與 BE, CF 成 60^0 之角。

(2)　作過 E, A, F 之圓,與 EB, FC 各交於 B, C。

(3)　則三角形 ABC, 卽所求圖形也。

應用題18.　已知一邊 AB 及其所對之頂角 α, 高 h, 作此三角形 (Fig. 92)

(1) 以AB爲弦,作含角α之弓形ACB。

(2) 於距離AB爲h之處,引平行線CC',與弧ACB交於C,C'。

(3) 則三角形ACB或AC'B,皆所求三角形也。

應用題19. 已知一邊之長l及其所對之角β與他一角α,作此三角形。(Fig. 94)

(1) 作含角β之弓形EGF。

(2) 引與EF成角α之直線,與弧EGF交於G。

(3) 設O爲EF之中點。

(4) 在EF上,取OA,OC令等於$\frac{1}{2}$l。

(5) 由A引平行於EG之線,與直線OG交於B。

(6) 則三角形ABC,卽所求三角形也。

應用題20. 已知頂角爲α,高爲h,三邊和爲2l,作此三角形。(Fig. 95)

(1) 引成角α之二直線AE,AF,并均令其等於l。

(2) 由E,F各在AE,AF上引垂線,設其交點爲O。

(3) 以A爲中心,h爲半徑作圓,以O爲中心,再作過E之圓;引兩圓之公切線,與AE,AF交於B,C。

(4) 於是三角形ABC,卽所求三角形也。

應用題21. 已知一邊CB及其所對之角α,與夾此角之二邊之比m:n,作此三角形。(Fig. 96)

(1)　以CB爲弦,作含角α之弓形CAB.

(2)　求出將CB內分及外分於m:n之點M,N。

(3)　求出以MN爲直徑之圓,與弧CAB之交點A。

(4)　則三角形CAB卽所求圖形也。

作圖題47.　作定圓O之切線,令自其切點至與直線AB之交點間之長等於定長l (Fig.)

(1)　在圓O上之一點M作切線MN,令其長等於l。

(2)　引過N之同心圓,與AB交於P,Q。

(3)　於是由P,Q至圓O所引切線PC, PD, QE, QF,卽所求切線也。

應用題22.　過定點P作直線令其被截於圓O之線分,等於定長l。(Fig. 98)

(1)　以圓O上一點N爲中心,l爲半徑,作圓,與圓O交於M。

(2)　引切於直線MN之同心圓GH.

(3)　則由P至圓GH所引切線,卽所求直線也。

應用題23.　設O爲二圓P,Q之交點,過O作二圓之弦,令其比等於m:n。(Fig. 99)

(1)　聯結P,Q,求出以m:n將其內分之點R。

(2)　過O引垂直於RO之弦AB。

(3)　則 AO : OB＝m : n。

作圖題 48. 過定點 P 引二圓 M, N 之割線,令 P 爲割線線分之中點。(Fig. 100)

(1)　將中心 M 與 P 聯結,在其延長線上取 PM_1 令等於 PM。

(2)　以 M_1 爲中心,作半徑與圓 M 相等之圓,設與圓 N 交於 B, D。

(3)　於是聯結 P, B 及 P, D 之直線 AB, CD, 卽所求直線也。

作圖題 49. 作切於二直線 AB, BC, 且互相切之圓。(Fig. 101)

(1)　引角 ABC 之二等分線 BR。

(2)　以 BR 上任意一點 P 爲中心,作切於 BC 之圓,設其切點爲 D, 與 BR 之交點爲 M。

(3)　過 M 引 BR 之垂線,與 BC 交於 E。

(4)　以 E 爲中心,作過 D 之圓,與 BC 交於 F。

(5)　過 F 引 BC 之垂線,與 BR 交於 Q。

(6)　則以 Q 爲中心而過 M 之圓,便切於圓 P 及直線 BA, BC。

(7)　應用同法作圓 R。

(8)　以下仿此。

作圖題50. 作切於二直線AB, BC且過點P之圓。(Fig. 102)

(1) 引角ABC之二等分線BS。

(2) 作切於AB, BC之任意圓,設其中心爲S.

(3) 引直線BP,與圓S交於E_1, E_2。

(4) 由P引平行於SE_1, SE_2之線,與BS各交於O_1, O_2

(5) 於是以O_1, O 爲中心,過P所作之圓,即所求圓也。

應用題24. 作切於定圓P及二直線AB, BC之圓.(Fig. 103)

(1) 平行於AB, CB,引直線CD, EF,令其距離各等於圓P之半徑。

(2) 作切於CD, EF且過圓P中心之圓,設其中心爲O_1, O_2。

(3) 於是以O_1, O_2爲中心而切於直線AB之圓,即所求圓也.

Fig. 103乃圓P非全在角ABC內者圓P若全在角ABC內時,當如何?

應用題25. 作圓,令切於直線AB上之定點P,且過他點Q。(Fig. 104)

(1) 設直線PQ之垂直二等分線,與過P所引AB

之垂線交於O。

(2) 以O爲中心,過P所作之圓,卽所求圓也。

作圖題51. 過二點P,Q作切於直線AB之圓。

第一法 (Fig. 105)

(1) 聯結P,Q,與AB交於C。

(2) 以CQ爲直徑之圓,與過P所引CQ之垂線交於D。

(3) 以C爲中心,過D作圓,與AB交於E。

(4) 於是過P,Q,E三點之圓,卽所求圓也。

第二法 (Fig. 106)

(1) 設直線PQ之垂直二等分線CM,與AB交於C。

(2) 以CM上任意一點M爲中心,作切於AB之圓,與直線CP交於N。

(3) 由P引平行於直線MN之線,與MC交於O。

(4) 於是O卽所求圓之中心也。

所求之圓有二,此圖僅繪其一,其他一圓學者試自求之。

作圖題52. 過點P試作切於直線AB及圓S之圓。

(甲) 外切於圓S者。(Fig. 107)

(1)　引垂直於 AB 之直徑 GH，其延長線與 AB 交於 K。

(2)　作過 P，H，K 之圓，與直線 PG 交於 Q。

(3)　於是過 P，Q 而切於 AB 之圓 O，卽所求圓也。

所求之圓有二，其他一圓學者自求之。

(乙)　內切於圓 S 者。(Fig. 108)

(1)　照 Fig. 107，引 GH，與 AB 交於 K。

(2)　過 P，G，K 作圓，與直線 PH 爲於 Q。

(3)　於是過 P，Q 而切於 AB 之圓 O，卽所求圓也。

所求之圓有二，其他一圓學者自求之。

作圖題 53.　作切於直線 AB 上之點 P 及圓 Q 之圓。(Fig. 109)

(1)　引圓 Q 之直徑 CD，令其垂直於 AB。

(2)　引 PC，PD，與圓 Q 各交於 E，F。

(3)　將中心 Q 與 E，F 聯結，與 AB 上 P 點之垂線各交於 O_1，O_2。

(4)　於是以 O_1，O_2 爲中心，過 P 作圓，卽得所求之圓。

應用題 26.　作切於圓 P 上之一點 C 及直線 AB 之圓。(Fig. 110)

(1)　過點 C 引圓 P 之切線，與 AB 交於 D。

(2)　設角 BDC，ADC 之二等分線，各與直線 CP 交

於 O_1, O_2。

(3) 於是以 O_1, O_2 為中心,過 C 所作之圓,即所求圓也。

作圖題54. 作切於二圓 P, Q 與直線 AB 之圓。(Fig. 111)

(甲) 外切二圓者。

(1) 在定圓之異側,平行於 AB 引直線 C_1D_1, 令其距離等於圓 P 之半徑。

(2) 過 P 作圓,外切於以 Q 為中心,圓 P, Q 之半徑差為半徑之圓,并令切於 C_1D_1; 設其中心為 O_1, 則 O_1 即所求圓之中心也。

(乙) 內切二圓者。

(1) 在二圓之同側,平行於 AB 引直線 C_2D_2 令其距離等於圓 P 之半徑。

(2) 過 P 作圓,內切於以 Q 為中心, 圓 P, Q 之半徑差為半徑之圓,并令切於 C_2D_2; 設其中心為 O_2, 則 O_2 即所求圓之中心也。

(丙) 外切二圓之一而內切其他一圓者。作法如何?學者試自為之。

應用題27. 作圓切於圓 O, 令其中心在直線 AB 上,半徑等於定長 r. (Fig. 112)

(甲) 內切圓O者.

(1) 以圓O之半徑與r之差為半徑,作同心圓,設與AB交於P_1 P_2。

(2) 則以P_1, P_2為中心,r為半徑,所作之圓,即所求圓也。

(乙) 外切圓O者.

(1) 以圓O之半徑與r之和為半徑,作同心圓,設與AB交於P_3, P_4。

(2) 則以P_3, P_4為中心,r為半徑所作之圓,即所求圓也。

本題有時作圖為不可能者,試討論之。

應用題28. 作半徑r之圓切於二圓P, Q。

在Fig. 113, 聯結中心P, Q之線與圓交於A, D, B, C。$2r<BD$時,為不可能。若$2r>BD$, 而$2r<AB$, 或$2r<CD$時,欲作內切圓P或圓Q之圓,乃不可能。若$2r>AB$, $2r>CD$而$2r<AC$時,欲作內切二圓之圓,亦不可能。

Fig. 114乃$2r>AC$者。但圓P,Q之半徑設為r_1, r_2。

(甲) 外切二圓者。

以P, Q為中心,$r+r_1$, $r+r_2$各為半徑作圓,其交點O_1, O_2, 即所求圓之中心也。

(乙) 內切圓P,外切圓Q者.

以P,Q爲中心,$r-r_1$ $r+r_2$各爲半徑作圓,其交點O_3, O_4,卽所求圓之中心也。

(丙) 外切圓P,內切圓Q者.

以P,Q爲中心,$r+r_1$, $r-r_2$各爲半徑作圓,其交點O_5, O_6,卽所求圓之中心也。

(丁) 內切二圓者。

以P,Q爲中心, $r-r_1$, $r-r_2$各爲半徑作圓,其交點O_7, O_8,卽所求圓之中心也。

作圖題55. 過二點A, B,作切於圓O之圓. (Fig. 115)

(1) 過A, B二點作任意圓,與定圓O交於C, D.

(2) 引直線AB, CD,設其交點爲E。

(3) 以CE爲直徑之半圓,與過D所引CE之垂線,交於F.

(4) 以E爲中心,過F作圓,與定圓O交於G, H.

(5) 於是過A, B, G及A, B, H之二圓,卽所求之圓也.

作圖題56. 作切於圓Q上之一點A及圓P之圓。(Fig. 116)

(1) 聯結A, Q,在其上取AB, AC令等於圓P之半徑。

(2) 在AQ上,求出M, N,須使PM=CM, PN=BN.

(3)　於是以M,N爲中心,過A所作之圓,即所求圓也。

17. 相似中心

在二圓O,P,中引二平行直徑ab,CD。則直線aD,bC之交點S_1及aC,bD之交點S_2,就此二點而言,應爲定點。故此二點S_1,S_2,稱曰二圓O,P之**相似中心** Centre of similarity. (Fig. 117)

二圓之公切線過其相似中心。

作圖題57. 作切於二圓A,B且過點P之圓。

(甲)　外切或內切二圓者. (Fig. 118)

(1)　聯結二圓之中心,與圓交於E,F。

(2)　求出二圓之相似中心S_2.

(3)　過P,E,F三點作圓,并引直線PS_2,設其交點爲Q。

(4)　過P,Q二點,外切或內切圓A(或圓B)之圓,即所求圓也。

(乙)　外切一圓,內切他圓者. (Fig. 119)

(1)　聯結圓之中心 A, B, 與圓 B 交於 F, 其延長線與圓 A 交於 G。

(2)　求出二圓之相似中心 S_1.

(3)　過 P, F, G 三點作圓, 幷引直線 PS_1, 設其交點爲 Q。

(4)　過 P, Q 二點, 內切或外切圓 A (否則爲外切或內切圓 B) 之圓, 卽所求圓也.

應用題 29.　作切於三定圓 P, Q, R 之圓。

(甲)　內切或外切三圓者。(Fig. 120)

內切或外切以 Q, R 爲中心, 圓 Q, P, 圓 R, P 之半徑差爲半徑之圓, 而過 P 作圓, 其中心 O_2, O_1, 卽所求圓之中心也。

(乙)　外切圓 P, Q 內切圓 R 者. (Fig. 121)

外切以 Q 爲中心, 圓 P, Q 之半徑差爲半徑之圓, 內切以 R 爲中心, 圓 R, P 之半徑和爲半徑之圓, 而過 P 作圓, 其中心 O 卽所求圓之中心也。

(丙)　外切圓 P, 內切圓 Q, R 者。(Fig. 122)

內切以 Q, R 爲中心, 圓 P, Q, 圓 P, R 之半徑和各爲半徑之圓, 而過 P 作圓, 其中心 O 卽所求圓之中心也。

作圖題 58.　設定圓 O, 求其周之半分。(Fig. 123)

(1)　引直徑AC。

(2)　由中心O引OD,與AC成 30°之角,而與點C上之切線交於D。

(3)　在DC上,取DB令等於半徑之三倍。

(4)　則AB之長等於半圓周。

作圖題59.　設定圓O,求其周長。(Fig. 124)

第一法

(1)　引直徑CD,再引半徑OE,令與CD成30°之角。

(2)　取垂直於CD之DB,令等於直徑之三倍。

(3)　於是由E至CD所引垂線之足A,與B間之長等於圓周。

第二法

(1)　在直徑CD之延長線上,取DE令等於半徑之三倍,取EB令等於半徑。

(2)　引垂直於CD之半徑OF。

(3)　由O引平行於直線EF之線,與CF交於H。

(4)　在OC之延長線上,取CA令等於CH。

(5)　則AB之長等於圓周。

作圖題60.　求圓弧之長。(Fig. 125)

(1) 設AB爲定圓弧,在弦AB之延長線上,取BD令等於弦AB之半分。

(2) 以D爲中心,過A作圓,與點B之切線交於E。

(3) 則BE等於弧AB。

是法爲近似的方法,弧所對中心角愈大,則誤差亦愈大。中心角60°以下所對之弧可以應用。

作圖題61. 試在定弧AB上截取定長l。(Fig. 126)

(1) 引弧AB上點A之切線AC,令等於l。

(2) 將AC四等分,設其分點爲1, 2, 3。

(3) 以1爲中心,過C作弧,與弧AB交於B。

(1) 則弧AB等於l。

是題與前題同,亦近似的作圖法也。

第　五　章

正　多　角　形

18. 內接形與外接形

多角形之各角頂均在一圓上時,則此多角形曰內接於圓。又多角形之各邊均切於一圓時,則此多角形曰外接於圓。

作圖題 62. 試在定圓 O 內,作內接正五角形。

(1) 如 Fig. 127, 引直徑 MN, 及垂直於其上之半徑 OA.

(2) 求出 OM 之中點 P。

(3) 在 PN 上,取 PQ 令等於 PA.

(4) 則 AQ 之長等於所求五角形每邊之長。故依 AQ 之長截切圓周,便得所求正五角形.

作圖題 63. 試在定圓 O 內,作內接正

六角形。

因正六角形每邊之長等於圓之半徑。故依圓之半徑截切圓周,卽得構成正六角形。參閱 Fig. 128

作圖題64. 試在定圓O內,作內接正七角形.

(1) 如 Fig. 129, 以圓O上之一點 P爲中心,過O作弧,與圓O交於A, M.

(2) 引直線AM, OP, 設其交點爲N.

(3) 則 AN 等於正七角形每邊之長。故得作所求正七角形。

作圖題65. 試在定圓O內,作內接正九角形.

(1) 如Fig. 130, 以圓O上之一點 P 爲中心,過O作弧,與圓O交於A, D。

(2) 引直線AD, OP, 設其交點爲M。

(3) 在MA之延長線上,取ML令等於圓之半徑.

(4) 求出以ML爲邊之正三角形之頂點N。

(5) 聯結 O, N, 與圓O交於B. 於是 AB 卽所求正九角形之一邊也. 故得作正九角形.

作圖題66. 試在定圓O內,作內接正

十角形。

(1) 如 Fig. 131, 引互相垂直之半徑 OA, OL.

(2) 將 OL 之中點 M 與 A 聯結,於其上取 MN 令等於 MO.

(3) 則 AN 等於正十角形每邊之長. 故得作正十角形.

作圖題 67. 試在定圓 O 內,作內接正十一角形.

(1) 如 Fig.132, 引互相垂直之二直徑 PR_1, LQ.

(2) 求出 OL 之中點 M.

(3) 在 MQ 上,取 MR 令等於 MP.

(4) 以 R_1 爲中心,過 O 作弧,與圓交於 A.

(5) 則 AR 等於所求十一角形每邊之長. 故得作十一角形.

作圖題 68. 試在定圓 O 內,作內接正十二角形.

(1) 如 Fig. 133, 引互相直交之二直徑 AG, DJ.

(2) 以 A, D, G, J 爲中心,過 O 作弧,與圓交於 C, K; B, F; E, I; H, L.

(3) 於是十二角形 ABCDEFGHIJKL, 卽所求圖形

也。

作圖題69. 試在定圓O內,作內接任何邊正多角形.

第一法 (Fig. 134)

(1) 引直徑AM。

(2) 以A, M為中心, AM為半徑,作二弧,設其交點為S.

(3) 將AM照所欲作多角形之邊數等分,設其分點為1, 2, 3,……。

(4) 由A端起,將偶數分點2, 4,……與S分別聯結,幷延長之,與半圓AM交於B, C,……。

(5) 於是AB, BC,……卽所求正多角形之邊也。

第二法 (Fig. 135)

(1) 引直徑MN, 以M, N為中心,過N, M作弧,設其交點為S。

(2) 將半徑OM照所欲作多角形之邊數等分,由O端起將第四分點P與S聯結,幷延長之,與圓交於B。

(3) 於是AB為所求正多角形之一邊. 故得作所求正多角形。

第二法較第一法易得正確的結果。

作圖題70. 已知一邊AB,作正五角形。

第一法　(Fig. 136)

(1)　取垂直於AB之BM,令等於BA。

(2)　求出AB之中點P。

(3)　在AB之延長線上,取PN令等於PM。

(4)　以A,B爲中心,AN爲半徑,作弧,相交於D;更以B,A爲中心,AB爲半徑作弧,與前弧各交C,E。

(5)　於是ABCDE卽所求正五角形也。

第二法　(Fig. 137)

(1)　由AB之中點N,立垂線NP,令其長等於AB。

(2)　聯結A,P,幷延長之,在其上取PQ令等於AB之半。

(3)　以A爲中心,過Q作弧,與NP之延長線交於D。

(4)　以A,B爲中心,AB爲半徑,作弧,與D爲中心,用同半徑所作之弧,各交於C,E。

(5)　於是五角形ABCDE卽所求正五角形也。

第三法　(Fig. 138)

(1)　取垂直於AB之BN,令等於AB之半。

(2)　在AN之延長線上,取NP等於NB。

(3)　以B爲中心,過P作弧,與AB之垂直二等分線

交於O.

(4) 則O爲所求正五角形外接圓之中心。故正五角形易由此而構成之。

第四法　由AB之中點N,立垂線NP,令其長等於AB之一倍有半。則PA,PB之延長線與AB所成之角,殆等於正五角形之內角。故正五角形易由此而作圖。實用上常採是法,且無窒礙。

作圖題71. 已知一邊AB,作正六角形。

因正六角形每邊之長等於其外接圓之半徑,故正六角形易構成之。參閱Fig. 139.

作圖題72. 已知一邊AB,作正七角形。

(1) 如Fig. 140,將AB向B方延長,取AP令等於AB之二倍。

(2) 求出以AP爲一邊之正三角形之重心R.

(3) 於是AR等於所求正七角形外接圓之半徑。故得先畫外切圓,再作正七角形。

作圖題73. 已知一邊AB,作正八角形。

(1)　如 Fig. 141, 在 AB 之中點 M, 立垂線 MP, 令其長等於 AB 之半.

(2)　在 MP 之延長線上,取 PO 令等於 PA.

(3)　則 O 為外接圓之中心。故得作正八角形。

作圖題 74.　已知一邊 AB, 作正九角形。

(1)　如 Fig. 142, 求以 AB 為一邊之正三角形之頂點 P。

(2)　將 AB 之中點 M 與 P 聯結,在其延長線上,取 PO 令等於 AB 之半.

(3)　則 O 為外接圓之中心。故得作正九角形.

作圖題 75.　已知一邊 AB, 作正十角形.

根據應用問題 6, 求得外接圓半徑之長,即可。如 Fig. 143, BQ ($AP \perp AB$, $AP=\frac{1}{2}AB$, $PQ=PA$) 等於外接圓之半徑. 故得作正十角形。

作圖題 76.　已知一邊 AB, 作正十一角形.

(1)　如 Fig. 144, 在 AB 之垂直二等分線 MP 上,求出點 P, 須令 $AB=AP$.

(2) 在MP之延長線上,取PO令等於$\frac{5}{5}\overline{AB}$。

(3) 於是O爲外接圓之中心。故得作正十一角形。

作圖題77. 已知一邊AB,作正十二角形。

(1) 如Fig. 145,在AB之垂直二等分線MP上,求出點P,令AP=AB。

(2) 在MP之延長線上,取PO令等於PB。

(3) 於是O爲外接圓之中心 故得作正十二角形。

作圖題78. 已知一邊AB,作任何邊之正多角形。

(1) 如Fig. 146,在AB之延長線上,取BM令等於BA。

(2) 以A,M爲中心,AM爲半徑,作弧,設其交點爲N.

(3) 將MA照所欲作正多角形之邊數等分,由M端起將第二分點2與N聯結。

(4) 延長N 2,與以AM爲直徑之圓交於C。

(5) 於是過A B,C三點之圓,即所求正多角之外接圓。故得作正多角形.

作圖題79. 作外接於定圓之正多角形.

將定圓照所欲作正多角形之邊數等分,在等分點引切線,即得外接正多角形。

第　六　章

內接形與外接形

作圖題80.　內接於定三角形ABC,作三角形,令與他一定三角形mno相似.(Fig. 151)

(1)　在一邊CB上取Cm等於om,作$\triangle m_1 n_1 C$令與$\triangle mno$全等。

(2)　Cn_1之延長線,與由B所引$m_1 n_1$之平行線交於N_1.

(3)　聯結A, N_1,與BC交於N.

(4)　由N引平行於N_1B, N_1C之線,與BA, CA各交於M, O.

(5)　則$\triangle MNO$卽所求圖形也.

作圖題81.　內接於定三角形ABC,作四邊形,令與定四邊形mnop相似。(Fig. 152)

(1)　由 AC 上之一點 p_1, 引 p_1m_1, 令與 AC 成等於 $\angle opm$ 之角,幷令其長等於 pm。

(2)　由 m_1 引平行於 AC 之線,與 AB 交於 M_1, 更引 M_1P_1 平行於 m_1p_1。

(3)　在 AC 上取 P_1O_1 等於 po, 作與 mnop 全等之四邊形 $M_1N_1O_1P_1$。

(4)　聯結 A, N_1, 與 BC 交於 N。

(5)　由 N 引平行於 N_1M_1, N_1O_1 之線,與 AB, AC 各交於 M, O。

(6)　於是四邊形 MNOP 卽所求圖形也。

作圖題 82.　作外接於三角形 ABC 之最大正三角形. (Fig. 153)

(1)　以邊 BC, CA 爲弦,各作含角 60° 之弓形 BQC, CRA, 而名其中心爲 M, N。

(2)　過 C 引平行於直線 MN 之線,與弧 BQC, CRA 各交於 Q, R。

(3)　引 QB, RA 設其交點爲 P。

(4)　則三角形 PQR 卽所求正三角形也。

應用題 30.　以定長 l 爲一邊,作矩形,令其內接於三角形 ABC. (Fig. 154)

(1)　在一邊 CA 上,取 CD 等於 l。

(2) 由D引BC之平行線,與AB交於M.

(3) 由M引AC之平行線,與BC交於N.

(4) 過M,N引AC之垂線MP,NO.

(5) 則矩形MNOP即所求之矩形也.

應用題31. 以AC上之一點Q爲一角頂,作菱形,令其內接於定三角形ABC. (Eig. 155)

(1) 聯結B,Q,幷延長之,與以C爲中心過A所作之弧相交於E.

(2) 聯結C,E,且平行之,引QP,與BC交於P.

(3) 由P,平行於AC,引PN,與AB交於N.

(4) 由N,平行於PQ,引NM,與AC交於M.

(5) 則四邊形MNPQ即所求菱形也.

應用題32. 作正方形令其內接於定三角形ABC. (Fig. 156)

(1) 由B,立AC之垂線BD.

(2) 由B,平行於AC,引BE,令其長等於BD.

(3) 聯結C,E,與AB交於M.

(4) 由M引AC之平行線,與BC交於N.

(5) 由M,N至AC,引垂線MQ,NP.

(6) 則四邊形MNPQ,即所求正方形也.

應用題33. 作平行四邊形,令其內接於定四邊形

ABCD (Fig. 157)

聯結各邊之中點,作四邊形MNPQ,即得。

應用題34. 以AB上之一點P爲一角頂,作菱形,令其內接於定平行四邊形。(Fig. 158)

(1) 引對角線AC, BD,設其交點爲E.

(2) 引PE,與CD交於R.

(3) 過E至PR引垂線,與BC, AD各交於Q, S.

(4) 則四邊形PQRS即所求菱形也。

作圖題83. 作邊長爲l之正方形,令其外接於正方形ABCD。(Fig. 159)

(1) 引對角線AC, BD,設其交點爲O.

(2) 以O爲中心,l爲直徑作圓.

(3) 由A, B, C, D至圓O各引切線,所成四邊形PQRS即所求正方形也。

應用題35. 作邊長爲l之正方形,令其內接於正方形ABCD。(Fig. 160)

(1) 引對角線AC, BD,設其交點爲O.

(2) 在DC上,取DM,令等於l.

(3) 由M引AC之垂線,設其足爲E.

(4) 以O爲中心,過E作圓,與AB, BC, CD, DA順次交於Q, R S, P.

(5) 則四邊形PQRS卽所求正方形也.

作圖題84. 作正八角形,令其內接於正方形 ABCD。(Fig. 161)

(1) 以A, B, C, D爲中心,過對角線之交點 O,作圓;與各邊交於F, K; E, H; G, J; I, L。

(2) 於是八角形EFGHIJKL卽所求形也。

作圖題85. 作正六角形,令其在正方形ABCD之各邊上各置一角頂。(Fig. 162)

(1) 過A, B, C, D作圓。

(2) 在圓ABC上,截弦AM令等於半徑AO.

(3) 引MO,與AB交於E.

(4) 以O爲中心,過E作圓;卽爲所求正六角形之外接圓。故得作六角形EFGHIJ.

應用題38. 作正三角形,令其內接於正方形ABCD. (Fig. 163)

(1) 過A, B, C, D作圓.

(2) 內接於圓ABC,作以A爲一角頂之正三角形Aef.

(3) 設Ae, Af與BC, CD各交於E, F。

(4) 則三角形AEF,卽所求正三角形也。

作圖題86. 以AB上之定點P爲一角

頂,作正三角形,令其內接於正方形ABCD。(Fig. 164)

(1)　在AD之延長線上,取DE令等於DA。

(2)　由E引AE之垂線EF,令等於AP。

(3)　在EA上,取EI,令其長等於以EF爲一邊之正方形之對角線EH。

(4)　在EA上,取ER,令其長等於以EF,EI爲二邊之矩形之對角線EJ.

(5)　於是以PR爲一邊之正三角形PQR卽所求形也。

作圖題87. 作正方形,令其內接於正六角形ABCDEF. (Fig. 165)

(1)　過對角線AD之中點O,引KL令其垂直於AD。

(2)　引角AOK, AOL之二等分線,與六角形之邊交於M, P, N, Q。

(3)　於是四邊形MNPQ卽所求正方形也。

作圖題88. 作正方形,令其內接於正五角形ABCDE. (Fig. 166)

(1)　引對角線AD及其垂線DP_1,令$DP_1=DA$。

(2)　引EP_1與CD交於P。

(3)　由P引平行於DA, DP_1之線與AB, DE交於N, Q。

(4)　於是以PN, PQ爲二邊之正方形MNPQ, 卽所求正方形也。

作圖題89.　作三角形,內接於圓O,令其與二等邊三角形abc相似. (Fig. 167)

(1)　引圓O上任意一點C之切線CD.

(2)　引弦CB,令與CD所成之角等於角bac.

(3)　由中心O至BC引垂線,與圓交於A.

(4)　則三角形ABC,卽所求形也.

作圖題90.　作正方形,令其內接於弓形MBN.

(1)　如Fig. 168垂直於MN,作NF,令其等於NM.

(2)　將MN之中點E與F聯結,與弧MBN交於C.

(3)　平行於MN,引弦CB.

(4)　由B, C至MN引垂線BA, CD。

(5)　則四邊形ABCD卽所求正方形也.

作圖題91.　作正方形,令其內接於扇形OMN。

(1)　如 Fig 169,在OM, ON間,平行於弦MN,引直線EF.

(2)　引FG垂直於EF,且令等於EF。

(3)　引OG,與弧MN交於C。

(4)　平行於MN,引弦CB。

(5)　於是以BC爲一邊之正方形ABCD,即所求形也。

作圖題92.　作內接於三角形ABC之圓.

(1)　如Fig. 170,求出角A,C之二等分線,相交於O。

(2)　以O爲中心,作切於一邊之圓,即爲所求之圓。

應用題37.　作四個等圓,令每圓均各切於他二圓幷切於正方形ABCD。(Fig. 171)

(1)　引對角線AC, BD,設其交點爲O。

(2)　過O,引平行於AB, BC之線,與各邊交於F, H, E, G.

(3)　正方形AEOH, BFOE, CGOF, DHOG對角線之交點O_1, O_2, O_3, O_4,即所求圓之中心。　故得作所求之圓。

應用題38.　作等圓,令每圓均各切於他二圓,幷切於正方形ABCD. (Fig. 172)

(1)　引對角線AC, BD,設其交點爲O。

(2)　則內接於三角形AOD, BOA, COB, DOC之圓O_1, O_2, O_3, O_4,即所求圓也。

應用題39. 作互切之三個等圓,且令其各切於正三角形之二邊。(Fig. 173)

(1) 由A, B, C至對邊,各引垂線AF, BG, CE。

(2) 角BGC之二等分線與CE之交點O_1爲所求圓之一中心。故以O_1爲中心,作切於AC之圓,卽爲所求之一圓也。

(3) 其他二圓,得用同法求之。

應用題40. 在正三角形ABC內,作每三個互切之六個等圓。(Fig. 174)

(1) 由A, B, C至對邊,引垂線AF, BG, CE.。

(2) 求出角CAF之二等分線與BG之交點P。

(3) 由P引平行於AC之線,設與AF, CE各交於Q, U。

(4) 由Q, U各引平行於AB, BC之線,設其交點爲S,幷與CE, AF各交於R, T.

(5) 則P, Q, R, S, T, U卽所求圓之中心也。故得作所求之圓。

作圖題93. 作三個互切之圓,令其內接於二等邊三角形。(Fig. 175)

(1) 由頂點B至AC引垂線BD。

(2) 求出角BDC, BCD之二等分線,相交於O_1.

(3) 由O_1引BD之垂線,設其足爲M;在其延長線

上,取 MO_2 令等於 MO_1。

(4) 以 O_1, O_2 爲中心,過 M 作圓,即所求之二圓也。

(5) 由 O_2 引 AB 之垂線,取 O_2E 令等於 O_2O_1。

(6) 由 E 引平行於 AB 之線,與 DB 之延長線交於 H。

(7) EO_2 之延長線與 BD 交於 F, 以 F 爲中心,過 E 作弧,與直線 HO_2 交於 G。

(8) 由 O_2 引平行於 FG 之線,與 BD 交於 P。

(9) 則 P 爲第三圓之中心。故以 P 爲中心,作切於圓 O_2 之圓即可。

應用題41. 作內接於正方形 ABCD 之半圓。

(1) 如 Fig. 176, 求切於 AB, CB 之圓,設垂直於對角線 BD 之直徑 E_1F_1。

(2) 引 BE_1, BF_1, 設與 DA, DC 各交於 E, F。

(3) 以 EF 爲直徑之半圓,即所求半圓也。

應用題42. 作三個連續半圓,令其內接於三角形 ABC。

(甲) 切於各邊之中點者。(Fig. 177)

(1) 由各頂點至對邊,各引垂線 AE, BF, CD。

(2) 設角 BFC 之二等分線與 CD 交於 G。

(3) 由 G 引平行於 AC, CB 之線,設與 AE, BF 各交

於H, I。

(4) 於是以GH, HI, IG各爲直徑之半圓,即所求形也。

(乙) 各切二邊者。(Fig. 178)

(1) 由各頂點至對邊,引垂線AE, BF, CD。

(2) 由F至AB引垂線FG,設其足爲G。

(3) 在FA上,取FH令等於FG。

(4) 聯結B, H,與CD交於M。

(5) 由M引平行於AC, BC之線,與AE, BF各交於N, O。

(6) 於是以MN, NO, OM各爲直徑之半圓,即所求形也。

應用題43. 作內接於扇形AOB之圓。(Fig. 179)

(1) 引將角AO,B二等分之半徑OM。

(2) 求得點M上之切線與OA之延長線交於N。

(3) 設角ONM之二等分線與OM交於O。

(4) 以O爲中心,過M作圓,即得所求之圓。

應用題44. 內接於圓O,作八個等圓,令其兩兩互切。(Fig. 180)

(1) 將圓O八等分,設其分點爲A, B,……, H。

(2) 引二等分角AOB, AOH之半徑OQ, OP。

(3)　求出內接於扇形 POQ 之圓之中心 a.

(4)　以 O 爲中心,過 a 作弧,與 OB, OC, ……, OH 各交於 b, c, ……, h。

(5)　以 b, c, ……, h 爲中心,用與圓 a 相等之半徑作圓,即得所求之圓。

應用題 45.　外接於圓 O, 作八個等圓,令其兩兩相切。(Fig. 181)

(1)　將圓 O 八等分,設其分點爲 A, B, ……, H。

(2)　設角 AOB 之二等分線 OP 與點 A 上之切線交於 M.

(3)　設角 AMP 之二等分線與 OA 交於 a。

(4)　引 OB, OC, ……, OH, 與以 O 爲中心過 a 所作之圓,各交於 b, c, ……, h。

(5)　以 a, b, c, ……, h 爲中心,過 A, B, C, ……, H 各作一圓,即得所求之圓。

19. 雜例

Fig. 182, 183, 184 所以示圓之應用,均內接於圓 O 者也。　其作圖法可應用第四章所述作圖題.

Fig. 185 爲求三半圓內接於圓 O 之圖。

Fig. 186 爲三個'巳'字形內接於圓之圖

第七章

面積問題

20. 平面形之面積

(1) 三角形之面積,等於底與高相乘積之半分。

(2) 直角三角形之面積,等於垂直二邊相乘積之半分。

(3) 直角三角形斜邊上正方形之面積,等於他二邊上正方形之面積之和.

(4) 平行四邊形之面積,等於其一邊與其平行邊間距離之積.

(5) 矩形之面積,等於二鄰邊之積.

(6) 梯形之面積,等於平行二邊之半和與其間距離之積.

(7) 圓之面積,等於半徑之平方與圓周率之積。圓周率為 3.14159265358979……乃一不盡數。通常祇用3.1416。亦有用 $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ 以代之者.

(8) 以直角三角形斜邊為直徑之圓,其面積等於以他二邊各為直徑之圓之面積和。

(9) 如 Fig. 190, 由直徑MN之半圓上任意一點P,至MN作垂線PO,則

(a) 以MO, ON為二邊之矩形,其面積等於以PO為邊之正方形之面積。

(b) 以MO, MN為二邊之矩形,其面積等於以PM為邊之正方形之面積。

(c) 以NO, NM為二邊之矩形,其面積等於以PN為邊之正方形之面積。

(10) 相似多角形面積之比,等於其對應邊之二乘比。

(11) 兩三角形有一角相等,夾等角之

二邊之積亦相等者,其面積相等。

應用題46. 求作與三角形ABC等積之矩形。(Fig. 187)

(1) 求出由頂點C至AB所引垂線之中點O.

(2) 由A, B所引AB之垂線,與由O所引AB之平行線,各交於E, D。

(3) 則矩形ABDE即所求之矩形也。

應用題47. 作正方形,令其面積等於邊長爲a,爲b之兩正方形之面積和。(Fig. 188)

(1) 以a, b爲垂直二邊,引直角三角形,設其斜邊爲c。

(2) 則以c爲一邊之正方形C,卽所求正方形也。

應用題48. 作正方形,令與以a, b爲二邊之矩形等積。(Fig. 189)

(1) 在一直線MN上,取MA, AN令各等於a, b。

(2) 以MN爲直徑作圓,與由A所引MN之垂線交於B。

(3) 則以AB爲一邊之正方形ABCD卽所求形也。

應用題49. 作正方形,令其面積等於以l爲邊之正方形面積之$\frac{3}{5}$。

(1) 引任意長之直線MN,在其上求出點O令

OM : ON = 3 : 5。

(2) 以MN爲直徑作半圓,與由O所引MN之垂線交於P。

(3) 在直線NP(或其延長線)上,取點A令NA = l。

(4) 由A引平行於PM之線,與MN(或其延長線)交於B。

(5) 則以AB爲邊之正方形ABCD,卽所求形也。

應用題50. 以AB爲一邊,作矩形,令與以l爲邊之正方形等積。(Fig. 191)

(1) 取垂直於BA之BE,令等於l。

(2) 在AB上取中心,過A, E作半圓AEC_1。

(3) 在BE上取BC,令等於BC_1。

(4) 則以AB, BC爲二邊之矩形ABCD,卽所求形也。

應用題51. 作正方形,令與三角形ABC等積。(Fig. 192)

先求與三角形ABC等積之矩形,更據之以作等積之正方形卽可。ADEF卽所求正方形也。

作圖題94. 作三角形,令與任意多角形ABCDEF等積。(Fig. 193)

(1) 由C引對角線DB之平行線,與AB之延長線

交於G。則AGDEF與ABCDEF等積。

(2) 由D引直線EG之平行線,與AB之延長線交於M。則AMEF與AGDEF等積。

(3) 由F引對角線EA之平行線,與AB之延長線交於N。則三角形MEN與AMEF等積。故三角形MEN與所設多角形ABCDEF等積。

應用題52. 作多角形,令與多角形Abcde相似,而與他多角形OPQRS等積。(Fig. 194)

(1) 求出與Abcde等積之正方形一邊之長mt。

(2) 再求與OPQRS等積之正方形一邊之長NT。

(3) 在Ab上,求得AB令AB : Ab = NT : mt。

(4) 則以AB為Ab之對應邊而與Abcde相似之多角形ABCDE,卽所求形也。(BE || bc, CD || ed, DE || de.)

應用題53. 作正方形,令與梯形ABCD等積。

(1) 如Fig. 195, 在AD上,令AM = $\frac{1}{2}$(AD + BC)。

(2) 在AD上,取MH令等於梯形之高。

(3) 以AH為直徑作半圓,與由M所引AH之垂線交於P。

(4) 則以MP為邊之正方形MPON,卽所求形也。

應用題54. 內接於圓ABC,作矩形,令與以a為一邊之正方形等積。(Fig. 196)

(1) 引直徑 AC,取垂直於此之 CP,令等於 a。

(2) 在 AC 上定中心,過 A,P 作圓,求得其直徑 AM。

(3) 在 CP 上取 CE,令等於 CM,由 E 所引 AC 之平行線,與定圓交於 B。

(4) 以 AB, BC 爲二邊之矩形 ABCD,即所求形也。

應用題 55. 以角 C 爲頂角作二等邊三角形,令與三角形 ABC 等積. (Fig. 197)

(1) 在 AC 之延長線上,取 CB_1 令等於 CB。

(2) 以 AB_1 爲直徑作圓,與由 C 所引 AB_1 之垂線交於 P。

(3) 在 CA, CB 或其延長線上,取 CD, CE 均令等於 CP。

(4) 則三角形 DCE,即所求形也。

作圖題 95. 作三角形,令其面積等於兩三角形 ABC, PQR 面積之和。(Fig. 198)

(1) 在邊 BA 上,取 BP_1 令等於 PR。

(2) 以 BP_1 爲一邊,作三角形 P_1BQ_1,令其與 PQR 全等。

(3) 由 P_1 引平行於 AQ_1 之線,與 BQ_1 交於 E。

(4) 由 E 引平行於 AB 之線,與 CA 之延長線交於 D。

(5) 則三角形 BCD,即所求形也。

作圖題96. 作高為h之三角形,令與三角形ABC等積。(Fig. 199)

(1) 由B至AC引垂線BD。

(2) 在BD之延長線上,取DF令等於h。

(3) 由B引平行於FA, FC之線,與AC各交於E, G。

(4) 則三角形EFG即所求形也。

作圖題97. 作正三角形,令與三角形ABC等積。(Fig. 200)

(1) 作與ABC等積之二等邊三角形AEC。

(2) 以AC為一邊,作正三角形AFC。

(3) 聯結E, F, 與AB交於D。

(4) 以ED為直徑之半圓,與由F所引ED之垂線交於G。

(5) 在ED上,取DP令等於DG。

(6) 由P引平行於FA, FC之線,與AC之延長線各交於M, N。

(7) 則三角形MPN即所求正三角形也。

FD>ED時,應如何作圖,學者試自求之。

作圖題98. 作有二角為α, β之三角形,令其與三角形ABC等積。(Fig. 201)

(1) 由 A, C 引直線,與 CA 成角 α, β, 設其交點爲 d.

(2) 由 B 引平行於 AC 之線,與 Ad 交於 b。

(3) 由 b 引平行於 Cd 之線,與 AC 交於 M。

(4) 設以 AC 爲直徑之圓,與由 M 所引 AC 之垂線交於 e.

(5) 在 AC 上,取 AE 令等於 Ae。

(6) 由 E 引 Cd 之平行線,與 Ad 交於 D.

(7) 則三角形 ADE, 卽所求形也.

作圖題 99. 作二角爲 75°, 45°, 面積爲 3 平方糎之三角形。(Fig. 202)

(1) 在直線 su 上,取 so, ou 令其分別等於 3 糎, 1 糎。

(2) 以 su 爲直徑作圓,與由 o 所引 su 之垂線交於 t.

(3) 作任意三角形 aBc, 令角 a=75°, 角 B=45°

(4) 在 aB 之延長線上, 取 BM 令等於由 c 所引 aB 之垂線 cd 之半分 dm。

(5) 以 aM 爲直徑作圓, 與由 B 所引 aM 之垂線交於 n。

(6) 在 Bn 上,取 BN 令等於 ot。

(7) 由 N 引平行於 nc 之線,與 Bc 交於 C。

(8) 由 C 引平行於 ac 之線,與 aB 交於 A.

(9) 則三角形 ABC 卽所求形也.

作圖題100. 作與三角形ABC等積等周之平行四邊形。(Fig. 203)

(1)　在AC之延長線上,取Cb令等於CB.

(2)　求出AB, Ab之中點D, f.

(3)　由C所引AB之平行線,與以A爲中心過f所作之弧交於F.

(4)　於是以AD, AF爲二邊之平行四邊形ADEF,卽所求形也.

作圖題101. 內接於定正方形ABCD,作正方形,而令其面積等於原形之$\frac{2}{3}$.(Fig. 204)

(1)　設對角線AC, BD相交於O.

(2)　將OA三等分,設其分點爲1, 2.

(3)　以AO爲直徑作圓,與由2所引OA之垂線交於E.

(4)　以O爲中心,過E作圓,與定正方形之各邊順次交於P, Q, R, S.

(5)　則四邊形PQRS卽所求形也.

應用題56.　外接於定正方形ABCD作正方形,而令其面積等於定形之$\frac{3}{2}$。(Fig. 205)

(1) 由對角線AC, BD之交點O至AB引垂線Om.

(2) 在Om之延長線上,取mn,令等於Om之$\frac{1}{2}$.

(3) 以On爲直徑作圓與由m所引On之垂線交於E。

(4) 於是以O爲中心,過E作圓,由A, B, C, D向之引切線,所成之四邊形PQRS,卽所求正方形也。

應用題57. 作多角形,令與定多角形Abcdef相似而面積等於其$\frac{2}{3}$. (Fig. 206)

(1) 將邊Ab三等分,設其分點爲1, 2。

(2) 以Ab爲直徑作圓,與由2所引Ab之垂線交於M。

(3) 在Ab上,取AB令等於AM。

(4) 於是以AB爲Ab之對應邊,而與Abcdef相似之多角形ABCDEF,卽所求形也。

作圖題102. 過一角項B,作一直線,將定三角形ABC之面積二等分。(Fig. 207)

將AC之中點D與B聯結,卽可。

作圖題103. 過一邊BC上之一點P,作一直線,將定三角形ABC之面積二等分。(Fig. 208)

(1)　先求AC之中點E。

(2)　由B引平行於PE之線,與AC交於D。

(3)　則直線PD卽所求直線也。

應用題58.　過三角形ABC內之一點P作直線,將其面積二等分。(Fig. 209)

(1)　先求AC之中點D。

(2)　由B引平行於PD之線,與AC交於E。

(3)　於是直線BP, PE, 卽所求直線也。

作圖題104.　在定三角形ABC之一邊AC上,作一垂線,將其面積二等分。(Fig. 210)

(1)　由B至AC引垂線BD。

(2)　求出AC之中點E。

(3)　以CD爲直徑作半圓,與由E所引AC之垂線,交於n。

(4)　在CA上,取CN令等於Cn。

(5)　則由N垂直於AC所引之MN,卽所求直線也。

應用題59.　過定三角形ABC之頂點B,作直線,將其面積照任何定數等分之。(Fig. 211)

將角B所對之邊AC,照所欲等分之數等分之;設

其分點爲 1, 2, 3, ……, 然後與 B 逐一聯結,即易得所求。

作圖題105. 過定三角形ABC邊AB上之一點P,作直線,將其面積四等分。(Fig. 212)

(1) 將AB四等分,設其分點爲1, 2, 3.

(2) 由1, 2, 3引平行於PC之線,與三角形之邊各交於E, F, G.

(3) 則直線PE, PF, PG, 卽所求直線也。

作圖題106. 過定三角形ABC內之一點P,作直線,將其面積六等分. (Fig. 213)

(1) 設PB爲分割線之一。

(2) 將邊AC六等分,設其分點爲1, 2, 3, 4, 5.

(3) 由1引平行於AB之線,與PB交於d, 更由d引平行於PA之線,與AB交於D. 則PD亦分割線之一也。

(4) 由2引平行於AB之線,與BP之延長線交於e, 更由e引平行於PA之線,與AC交於E. 則PE爲又一分割線.

(5) 由5引平行於BC之線,與PB交於h, 更由h引

平行於PC之線,與BC交於H。則PH爲又一分割線。

(6)　延長hH,與AC之延長線交於M。

(7)　設三等分EM於點F, G, 則PF, PG亦所求之分割線也。

作圖題107. 平行於定三角形ABC之邊AC,作平行線,將其面積五等分。(Fig. 214)

(1)　將BC五等分,設其分點爲1, 2, 3, 4。

(2)　以BC爲直徑作半圓,與由1, 2, 3, 4所引BC之垂線,交於m, n, p, q。

(3)　在BC上,取BM, BN, BP, BQ,令各等於Bm, Bn, Bp, Bq.

(4)　則由M, N, P, Q所引AC之平行線MD, NE, PF, QG,卽所求分割線也。

應用題60. 將定三角形ABC之面積用平行於XY之直線六等分之。(Fig. 215)

(1)　由B引XY之平行線與AC交於I。

(2)　將AC六等分,設其分點爲1, 2, 3, 4, 5。

(3)　以AI, IC爲直徑作半圓,與由1, 2, 3, 4, 5所引AC之垂線交於m, n, p, q, r。

(4) 在AB上取AM, AN, AP, CQ, CR, 令各等於Am, An, Ap, Cq, Cr.

(5) 則由M, N, P, Q, R, 所引XY之平行線MD, NE, PF, QG, RH, 卽所求直線也。

應用題61. 將定四邊形ABCD之面積,用過A之直線二等分之。(Fig. 216)

(1) 求出一對角線BD之中點E。

(2) 由E引平行於他對角線AC之線,與BC交於P.

(3) 則直線AP,卽所求分割線也。

作圖題108. 將定平行四邊形ABCD之面積,用過AB上一點P之直線,四等分之。(Fig. 217)

(1) 聯結AD, BC之中點,引直線EF,且等分之爲四,設其分點爲1, 2, 3。

(2) 於是P與1, 2, 3聯結之直線,雖爲所求分割線,而P3則因與DC之延長線相交,不得爲分割線。以此之故,設P3與DC之延長線交於s,由s引平行於PC之線,與BC交於S。如是,PS乃爲第三分割線。

作圖題109. 以定多角形ABCDEF內

之一點P爲頂點,作三角形,令與此多角形等積。(Fig. 218)

(1) 由C引平行於PD之線,與ED之延長線交於d。

(2) 由d引平行於PE之線,與FE之延長線交於e。

(3) 由e引平行於PF之線,與AF之延長線交於N。

(4) 由C引平行於PB之線,與AB之延長線交於b。

(5) 由b引平行於PA之線,與FA之延長線交於M。

(6) 於是三角形MPN,卽所求三角形也。

上述作圖法,雖由C開始,其實不拘始自何點均可。

應用題62. 以定四邊形ABCD一邊BC上之點P爲頂點,作三角形,令與此四邊形等積。(Fig. 219)

(1) 由B, C各引平行於PA, PD之線,與AD之延長線各交於Q, R。

(2) 則三角形PQR卽所求三角形也。

作圖題110. 過定多角形ABCDEF內之定點P,引直線,將其面積六等分。(Fig. 220)

(1) 作三角形MPN,令與多角形ABCDEF等積。

(2) 將MN六等分,設其分點爲1, 2, 3, 4, 5。

(3) 設PC爲一分割線。

(4) 由5引PF之平行線,與FE之延長線交於u,更由u引PE之平行線,與ED交於U。則PU又爲一分割線。

(5) 由4引PF之平行線,與FE交於T。則PT又爲一分割線。

(6) 應用同法,求得分割線PS, PQ。而2因在AF上,故P2亦爲分割線。

應用題63. 作正方形,令其面積等於五個等正方形面積之和。(Fig. 221)

(1) 如圖將五正方形接續,作圖形MDPQBR。

(2) 於是以BD爲一對角線(或以AB, AD爲二邊)之正方形ABCD,卽所求形也。

應用題64. 將定圓之面積,用等長之弧五等分之。(Fig. 222)

(1) 引直徑AB,並五等分之,設其分點爲1, 2, 3, 4。

(2) 則由二個半圓所成之AC1DB, AE2FB, AG3HB, AI4JB,卽等分時所用各弧也。

應用題65. 將定圓之面積,用同心圓四等分之。(Fig. 223)

(1) 引半徑OA,並四等分之,設其分點爲1, 2, 3。

(2) 由1,2,3引OA之垂線,與以OA爲直徑之半圓交於m, n, p。

(3) 於是以O爲中心,過m, n, p所作之三圓,即等分時所用圓也。

應用題66. 作與定圓O等積之矩形。(Fig. 224)

(1) 先求相當於圓O半周之長AB。

(2) 由A引AB之垂線,在其上取AD,令等於圓O之半徑。

(3) 則以AB, AD爲二邊之矩形,即所求形也。

應用題67. 作與定圓O等積之正方形。

先求與圓O等積之矩形,然後再求與此矩形等積之正方形即可。 如Fig. 225之ABCD,即所求正方形也。

Fig. 226爲近似的作圖法,玆示其大要如次:

(1) 在直徑AB之延長線上,取BC令等於半徑之三倍。

(2) 以A, C爲中心,各過O, A作弧,設其交點爲D。

(3) 聯結C, D,與圓O交於E。

(4) 於是直線BE,即等於所求正方形之一邊。

應用題68. 作與正方形ABCD等積之圓。(Fig. 227)

(1) 以任意點o爲中心,作任意圓,設其直徑爲ab。

(2) 求出與圓o等積之正方形一邊之長eb。

(3) 再求BE,令BE : BA = ob : eb。

(4) 則BE等於所求圓之半徑。故以B為中心,過E作圓,即得所求之圓。

第　八　章

圓　錐　曲　線

21.　定義

圓,**橢圓**,**拋物線**,**雙曲線**,總稱曰**圓錐曲線** Conic Section. 亦曰**二次曲線** Quadratic Curve。圓之定義,已見於前,故茲從略。

22.　橢圓

凡點之距二定點 F_1, F_2, 其距離和爲一定者,則其軌跡,曰**橢圓** Ellipse。如 Fig. 228 所示之曲線是。斯時之 F_1, F_2 名曰**焦點** Focus。

二焦點間之中點 O, 曰橢圓之**中心**。

聯結二焦點之直線,與曲線相交之點,設爲 A, B, 則 AB 稱曰橢圓之**長軸** Major axis。由曲線上之任意點至二焦點之距離和等於長軸。

過中心,垂直於長軸之直線,與曲線相交之點,設爲 C, D, 則 CD 稱曰橢圓之**短軸** Minor axis. 由短軸端至一焦點之距離,等於長軸之半。

作圖題 111. 已知長軸 AB, 焦點 F_1, F_2, 求作橢圓。(Fig. 228)

(1) 在長軸上, F_1, F_2 間,取任意點 p。

(2) 以 F_1, F_2 爲中心, Bp, Ap 各爲半徑作圓,設其交點爲 P。則 P 即曲線上之點也。

(3) 用同法,求得曲線上之其他各點,將其聯結爲曲線,即得所求。

作圖題 112. 已知長軸 AB, 短軸 CD, 求作橢圓. (Fig. 229)

(1) 以 AB, CD 各爲直徑作圓。

(2) 過中心 O 之任意直線,與圓 AB, CD 各交於 p_1, p_2。

(3) 由 p_1, p_2 各引 AB, CD 之垂線,設其交點爲 P。則 P 爲曲線上之點。

(4)　用同法,求得曲線上之其他若干點,將其聯結而引曲線,即得所求。

作圖題113. 過橢圓上之一點P,求引其上之切線。

(1)　將P與焦點F_1, F_2聯結。

(2)　角F_1PF_2之外角之二等分線,即所求切線也。

23. 拋物線.

凡點至一定點F,與一定直線DK之距離相等者,則其軌跡曰**拋物線**Parabola。而名此定點曰**焦點**Focus,定直線曰**準線**Directrix,如Fig. 230所示之曲線是。

由焦點F所引準線DK之垂線FD,曰**軸**Axis。

軸與曲線相交之點A,曰**頂點**Vertex。

作圖題114. 已知焦點F,準線DK,求作拋物線。

(1)　如Fig. 230由F至DK引垂線FD。

(2)　由FD上之任意點n所引FD之垂線,與以F爲中心,nD爲半徑所作之圓,交於P。則P爲曲線上之

點。

(3) 用同法,求得曲線上各點,將其聯結而引曲線,即得所求。

作圖題114. 過拋物線上之任意點P,求引其上之切線。(Fig. 230)

由P至準線所引垂線PN,與PF所成之角,將其二等分之直線,即切線也。

24. 雙曲線

凡點之距二定點F_1, F_2,其距離差為一定者,則其軌跡曰**雙曲線** Hyperbola。如Fig. 231所示之曲線是.

聯結二焦點之直線與曲線相交之點,設為A, B,則A與B,各稱曰**頂點** Vertex, BA稱曰**橫軸** Transverse axis.

由曲線上之任意點至F_1, F_2之距離差等於橫軸AB。

作圖題116. 已知二焦點F_1, F_2與頂點A, B,求作雙曲線。(Fig. 231)

(1) 在直線F_1F_2上,F_1, F_2之外方,取任意點p,以F_1,

F_2為中心, Ap, Bp 各爲半徑作弧,相交於P. 則P乃曲線上之點也。

(2) 用同法,求得曲線上之各點,而聯結各點作曲線,即得所求。

作圖題117. 過雙曲線上之任意一點P,求引其上之切線.(Fig. 231)

將P與焦點 F_1, F_2 聯結,而引二等分角 F_1PF_2 之直線,即可。

應用題69. 已知底邊AB,高h,他二邊和l,求作此三角形。(Fig. 232)

焦點爲A, B,長軸之長爲l之橢圓,與至AB之距離爲h之平行線,其交點C爲所求三角形之頂點。如Fig. 232乃不畫橢圓而可求得C者。

(1) 以AB之中點O爲中心, $\frac{1}{2}$l爲半徑,作半圓MHN.

(2) 由O所引AB之垂線與中心B半徑$\frac{1}{2}$l之弧交於D.

(3) 在OM, OD上,取 OD_1, OI 令等於OD, h.

(4) 由M所引 ID_1 之平行線與OD交於G,由G所引OD之垂線與半圓MHN交於H.

(5) 於是由H, I各引MN, OD之垂線,則其交點C

乃焦點A,B,長軸l之橢圓上所有點也。(參閱Fig. 229)

因此,三角形ABC卽所求之三角形。

應用題70. 今有二圓P,Q,而Q在P之中時,則接於此二圓之圓,其中心之軌跡若何? 試求之!

(甲) 外接圓Q者。(Fig. 233)

(1) 聯結中心P,Q,與圓P交於M,N,與圓Q交於m,n。

(2) 設Mm,Nn之中點爲A,B。

(3) 則以P,Q爲焦點,AB爲長軸之橢圓,卽所求軌跡也。

(乙) 內接圓Q者。(Fig. 234)

(1) 設Mn,mN之中點各爲A,B。

(2) 則以P,Q爲焦點,AB爲長軸之橢圓,卽所求軌跡也。

應用題71. 切於圓P及直線XY之圓,其中心之軌跡若何?

(甲) 外接圓P者。(Fig. 235)

(1) 在圓P之異側,平行於XY,引直線X_1Y_1,令其間之距離等於圓P之半徑r。

(2) 於是以圓P之中心P爲焦點,X_1Y_1爲準線之拋物線,卽所求軌跡也。

(乙)　內接圓 P 者。(Fig. 236)

(1)　在圓 P 之同側,平行於 XY, 引直線 X_2Y_2, 令其間之距離等於圓 P 之半徑 r.

(2)　於是以圓 P 之中心 P 爲焦點, X_2Y_2 爲準線之拋物線,即所求軌跡也。

應用題72.　切於各互在外之二圓 P, Q 之圓,其中心之軌跡若何?

(甲)　外接二圓者。(Fig. 237)

(1)　聯結中心 P, Q, 與圓 P, Q 分別交於 m, M; N, n.

(2)　設 MN, mn 之中點各爲 A, B。

(3)　則以 A, B 爲頂點, P, Q 爲焦點之雙曲線 HA, 即所求軌跡也。

(乙)　內接圓 P, 外接圓 Q 者。(Fig. 238)

(1)　如 Fig. 237 法聯結 P, Q, 各與圓交於 m, M; N, n.

(2)　設 mN, Mn 之中點各爲 A, B.

(3)　則以 A, B 爲頂點, P, Q 爲焦點之雙曲線 HA, 即所求軌跡也。

(丙)　內接二圓者,學者自試之。

應用題73.　求過點 P 作切於圓 O 及直線 AB 之圓.

(甲)　外切圓 O 者。(Fig. 239)

(1)　作拋物線 FEC, 是爲中心之軌跡,其圓乃切於

AB且外切於圓O者.

(2) 再求他一中心之軌跡,其圓乃過P而外切圓O者. 在其上聯結O,P,與圓O交於M,以O,P爲焦點,MP之中點Q爲一頂點,作雙曲線HQC,即得所求.

(3) 上述拋物線與雙曲線之交點C,即所求圓之中心也. 故以C爲中心,切於AB作圓,即得所求之圓.

作圖題118. 已知長軸AB,短軸CD作楕圓之別法.(Fig. 240)

(1) 由A,B至AB,由C,D至CD,各引垂線,構成矩形EFGH.

(2) 將OA,EA照任意同數等分,設其分點爲1,2,……;1′,2′,…….

(3) 引D1,D2,…… C1′,C2′,……,各設其對應之交點爲I,II,…….

(4) 於是I,II,……乃楕圓上之點也. 故用同法求得其他部分各點,而作曲線.

作圖題119. 作楕圓試內接於平行四邊形ABCD.(Fig. 24)

(1) 聯結對邊之中點,引EF,GH,設其交點爲O. 則O爲楕圓之中心.

(2) 將OE,AE,照任意同數等分,設其分點爲1,2,

3, 4; 1′, 2′, 3′, 4。

(3) 引 G1, G2, G3, G4 及 H1′, H2′, H3′, H4′, 設其對應之交點爲 I, II, III, IV。

(4) 則 I, II, III, IV, 乃橢圓上之點也。故用同法求得他部分各點,聯結之而引曲線,即得所求。

作圖題 120. 已知軸 AN 及垂直於軸之弦 PQ, 作拋物線。(Fig. 242)

(1) 由 P, Q 引 AN 之平行線,與由 A 所引 PQ 之平行線,各交於 S, R。

(2) 將 AS, SP, 照任意同數等分,設其分點爲 1, 2, 3, 4; 1′, 2′, 3′, 4。

(3) 由 1, 2, 3, 4 引 AN 之平行線,設 A1′, A2′, A3′, A4′ 之對應交點爲 I, II, III, IV。

(4) 則 I, II, III, IV 乃拋物線上之點。故用同法,求得 A, Q 間之點,聯結之而引曲線,即得所求。

作圖題 121. 已知平行四邊形 PQRS, 作過 P, Q 二點切於 RS 之拋物線。(Fig. 243)

(1) 設 RS 之中點爲 A。是爲切點。

(2) 將 PQ 之中點 N 與 A 聯結。

(3) 將 AS, SP, 照任意同數等分,設其分點爲 1, 2,

3, 4; 1′, 2′, 3′, 4′。

(4)　由1, 2, 3, 4引AN之平行線,與A1′, A2′, A3′, A4′, 各交於I, II, III, IV。

(5)　則I, II, III, IV.乃曲線上之點。故用同法,求得A, Q間之點,聯結之而引曲線,卽得所求。

I, II, III, IV諸點,亦可如下法求之。卽將AN仍照同數等分,設其分點爲1″, 2″, 3″, 4″,設A1′, A2′, A3′, A4′,與Q1″, Q2″, Q3″, Q4″之對應交點爲I, II, III, IV亦可。

作圖題122. 已知二頂點A, B及垂直於橫軸AB之弦PQ,求作雙曲線。(Fig. 244)

(1)　由P, Q引AB之平行線,與由B所引PQ之平行線,各交於S, R。

(2)　設PQ與AB之交點爲V。

(3)　將PV, PS,照任意同數等分,設其分點爲1, 2, 3, 4; 1′, 2′, 3′, 4′。

(4)　引A1, A2, A3, A4及B1′, B2′, B3′, B4′,設其各相對應之交點爲I, II, III, IV。

(5)　於是I, II, III, IV乃曲線上之點。故用同法,求得B, Q間之點,聯結之而引曲線,卽得所求。

25. 圓錐曲線在建築上之應用

圓錐曲線如Fig. 245, 246 所示,可應用於建築物。Fig. 247—250 為楕圓之應用。Fig. 248 之mM, nN,⋯⋯各等於 m1, n2,⋯⋯. Fig. 251, 252 為拋物線之應用。Fig. 253 為雙曲線之應用。

第九章

其他之曲線

26. 卵形 Egg-shaped Oval.

卵形爲其形如卵之曲線,無確定之形狀,故其作圖法亦無一定。實用上之應用極少。

作圖題123. 已知長軸短軸之長,作卵形。(Fig. 254)

(1) 引直線CD,令其長等於長軸。

(2) 在CD上,取DO,令其等於短軸之半。

(3) 由O引CD之垂線AB,以O爲中心,過D作半徑ADB。

(4) 以AB爲短軸,OC爲長軸之半,作橢圓ACB。

(5) 則曲線ACBD卽所求卵形也。

作圖題124. 已知短軸AB,作卵形。(Fig.

255)

單知卵形之短軸,其形不能確定,故作圖法亦不一定.以下所示乃祇用圓弧構成圖形之一例也。

(1) 以AB爲直徑作圓,設垂直於AB之直徑爲PD.

(2) 引AP, BP與以A, B爲中心, AB爲半徑之弧,各交於F, E。

(3) 以P爲中心,過E, F作弧ECF

(4) 則曲線AECFBD,卽所求卵形也。

27. 類似橢圓 False Ellipses。

是爲若干圓弧組成之形,狀若橢圓,故名。如無算學上之關係,可用以代近似的橢圓,且甚實用。其作圖法有種種而無一定,是在運用之得其當耳。

圖作題125. 已知長軸AB,短軸CD,作類似橢圓。

第一法 (Fig 256)

(1) 引CA,在其上取CK,令等於OA與OC之差。

(2) 引AK之垂直二等分線,與CD, AB各交於N, P.

(3) 在OB, OC上取OQ, OM,令各等於OP, ON.

(4) 則以M, N爲中心,過D, C之弧,與以P, Q爲中

心,過A,B之弧所構成之圖形,卽所求形也。

第二法 (Fig. 256)

(1) 在OA上,取OT,令等於OA與OC之差。

(2) 設OT之中點爲R。

(3) 在OA上取OP,令等於OR之三倍。

(4) 在CD上取OM,ON,令等於OR之五倍。

(5) 引MR,NR,在其上取M1,N2令等於OR之二倍。

(6) 以M,N爲中心,各過D,C作弧,與MR,NI各交於J,I。

(7) 以1,2爲中心,各過J,I作弧,與1P,2P各交於F,E。

(8) 於是以P爲中心,過A作圓,必過E,F。

(9) 因此,曲線CIEAFJD爲所求曲線之半分,故得用同法以作右半分。

作圖題126. 已知長軸AB,作類似橢圓。

第一法 (Fig. 258)

(1) 將AB四等分,設其分點爲P,O.Q。

(2) 以AO,BO爲直徑作圓,與直徑PQ之圓交於1,2,3,4。

(3)　設P1與Q3; P2與Q4各交於M, N.

(4)　則P, Q, M, N爲中心之弧,所構成之圖形,卽所求形也。

第二法　(Fig. 259)

(1)　將AB三等分,設其分點爲P, Q。

(2)　以PB, QA爲直徑之圓,設交於M, N。

(3)　則以P, Q, M, N爲中心之弧所構成之圖形,卽所求形也。

28. 阿基米特氏螺線 Archimedean spiral

(1)　如Fig. 260在任意直線OA上,取任意點A。

(2)　將點O上之周角n等分之直線爲OI, OII, ……OXI, OA。

(3)　今設定長爲l,取OI, OII,……OXI, OB,令等於 $OA+\frac{l}{n}, OA+\frac{2l}{n}, \ldots\ldots OA+\frac{(n-1)l}{n}, OA+l$。

(4)　在OI, OII……之延長線上,取XIII, OXIV,……令等於 $OB+\frac{l}{n}, OB+\frac{2l}{n}, \ldots\ldots$。

(5)　過A, I, II, ……, XI, B, XIII, XIV, ……作曲線.

如是所作之曲線,名曰阿基米特氏螺線.

29. 弧成螺線。

以圓弧構成之渦卷形曲線曰弧成螺

線。其作圖法有種種,茲示其例如下:

Fig. 261, 乃中心在一直線 AB 上之半圓連續而構成者也。

Fig. 262, 乃在一直線上,於 O 之兩側,分取 1, 2, 3, 4, ……等距離點,以此諸點爲中心連續作半圓而構成者也。

Fig. 263, 乃以正方形 ABCD 之角頂爲中心,連續作四分圓而構成者也。

Fig. 264, 乃以正五角形 ABCDE 之角頂爲中心,連續作五分圓而構成者也。

Fig. 265, 乃以正三角形 ABC 之角頂爲中心,連續作三分圓而構成者也。