數學列車

王峻岑著

數學列車

王峻岑著

開明書店

開明青年叢書

數學列車

民國三十七年二月初版
民國三十八年一月再版

每冊定價〇·八〇

著作者　王峻岑

發行者　上海福州路 開明書店 代表人范洗人

印刷者　開明書店

有著作權＊不准翻印

內政部著作權註冊執照內警字第一一〇六九號

(98 P.) K　岑

序

以幾何學爲中心的古希臘數學，固然早已成了陳跡，就是以解方程式爲中心的代數學，也在現代的數學裏面稱不了英雄好漢。全世界研究數學的人士，莫不認爲數學的核心乃是函數，而治理函數的唯一利器乃是微積分。所以二十餘年以前，歐美各國的數學專家與教育專家，有很多人主張把函數的概念定爲學習數學的中心概念，而在中等教育的課程之中，加入簡易微積分一項，使學生對於變化率的比較與極限的應用，早有初步的認識以建立入大學修習微積分的基礎，並作修習物理學、統計學等科的準備。我以爲他們的主張非常合理，在科學突飛猛晉的今日，這個老問題實在有重加注意與討論之必要。

也許有人要提出反對的意見，以爲現行中學課程裏邊的數學，已經太嫌繁重，差不多把學生壓得透不過氣來。過去別人曾喊過「救救中學生」的口號，目的就是要減輕中學生對於數學的擔負。現在若主張在中學課程裏面，再加上微積分，豈不是真要把學生壓得透不過氣來麼？假使他向我這樣表示，那麼我就請他看一看王峻岑先生寫的數學列車這本書。照王先生的方

法來講微積分，是不是比教中學生白白地絞盡腦汁，去演幾道代數幾何的難題，更爲輕鬆，更易明白，更有意義。這些難題，大都瑣碎複雜，迂迴曲折，其實無關宏旨，而且跡近猜謎。假使底本在手，眞是會者不難；但是古本罕見，孤本少傳，一謎二謎已可招來眠食俱廢，三謎四謎簡直要了人的命。經過這種「思想訓練」的青年，歷年來不知道多多少少，可惜不僅不見有幾百幾千的大數學家，紛紛登世界數學之壇，反而見有很多病夫加入了肺癆團體。然而在教材的補充與升學的指導兩項堂皇動人的帽子之下，也只得拚一拚小命。好在一方面躐等以求，博得個用功美名，且可獲得敲門之磚，何妨不惜健康而一試。他方面樂育英才，大顯身手，八方延聘，比得上印佩六國，當然不去管什麼三育並重，教育意義，與夫世界趨勢了。

須知中學課程標準，本來已有問題，再加上補充指導，自然要弄得艱深繁重。倘若將難題名題，一掃而空，單講些基本概念與基本方法，那麼簡易微積分的講授，即使不像數學列車那樣的輕鬆流利，引人入勝，我想總不會比教授艱深的方程式論，級數理論，連分數，消去法，恆等式證法，作圖與軌跡等等項目，更爲艱深罷！

王先生寫數學列車，不但把微積分的基礎，如無窮小的概念，極限的意義，變化率的應用等等，說得明白透徹，人人可懂，而且提出了一個獨到的意見，即是「變爲常而不變爲非常。」這句

話，大可讓那些捧着右本與孤本的人，細細地咀嚼一下。此外，王先生更能將全書寫得詩意盎然，尤屬難能可貴。奧斯古先生的書，我現在正用作教本，王先生也把此書作爲根據，好說是與我有同見。因此就不顧文筆的拙陋，率爾亂道數言，不敢謂之序也。

三十七年元月陳嶽生作於上海大夏大學

自序

無論研究什麼科學，總是離不開數學；而且這個數學，還不僅只是代數幾何。除此之外，用得最多最廣的，卻是微積分。

其次，就整個的數學來說，無論數學的分類有多少不同的意見，然而解析學是數學裏最重要的一支，這也是沒有問題的。在解析學裏，我們又不能不指出微積分是它的一個主幹。照這樣說起來，無論是研究科學，或是僅僅研究數學，微積分應該是一個必需知道的常識。然而在事實上，一個高中畢業的學生，常常是沒有機會和它接觸。這件事情有點太遺憾。

在中文本裏，拿着通俗的文字來介紹微積分的，只有劉薰宇先生的一本數學的園地。在那本書裏，雖然大部分講的都是微積分，然而全書的企圖，在於整個數學內容的介紹。現在我寫的這本書，卻是專門以微積分為範圍，沒有談到別的部門或是別的問題。雖然在我不敢高攀，但是我以為如果這兩本書能夠對照的看起來，倒是對於讀者是很有益處的。

再就是在這一本書裏，因為對象是一般的讀者，尤其是不研究數學的人，或是沒有機會去

學習的人，所以處處着重在基本的觀念，同時又竭力的避免算式。還有爲了不太枯燥，因此講起來就又不免添枝添葉的。

其實，即使學過微積分的人也無妨看看，權作是個消遣；我相信，至少不會讓你頭痛。而且天天在數學裏轉圈子，偶爾到外面散散心，也不是一件沒有意義的事情。

照這樣說來說去的，倒變成爲這本書作廣告了。可是如果廣告作不好，反倒不如不說。——然而還有幾句話，卻是不能不說。

第一，這本書裏的內容，多少是取材於奧斯古先生的微積導論（W. F. Osgood: Introduction to the Calculus）。第二，蒙陳獄生先生爲本書作序，盧錫疇先生爲本書製圖，開明書店爲本書出版，還有金聞榜先生曾對本書提供不少的建議，統此一併道謝。

至於內容究竟如何，還是請看正文。

三十六年七月，濟南。

目錄

第一站　孫悟空坐火車

今天沒有事，咱們隨便談個問題。

談什麼呢？

我想，你大概看過西遊記吧？那是一本長篇小說，講的唐僧取經的故事。至少，你總該聽到別人講過。

這裏面一共有四個主角，就是唐僧，沙僧，豬八戒，孫悟空。孫悟空又叫孫行者，是一個猴子；一個觔斗十萬八千里，他有這麼一副好的本領。豬八戒是一個豬，肥頭大耳朵，走起路來大搖大擺；因爲太胖了，所以只有邁着四方步，腳底下是非常吃力的。他們倆，一個好動，一個好靜，個性恰好相反。假設他們能夠活到現在，那眞是再好玩沒有了！

好啦，現在就算他們還在活着。於是我就想出了一個題目，我們讓孫悟空和豬八戒來個運動競賽。譬如說，跑個長距離吧。那麼我們預測一下，誰能跑第一呢？

當然是孫悟空了！

是的，我也是這樣想；十拿九穩，包管沒有錯。

爲什麼呢？因爲論快慢就要比較距離。豬八戒頂多一步走五尺，可是孫悟空一跳就是十萬八千里！那還會有錯麼？

可是這究竟是一個難得的機會，咱們都應當去瞧一下。

沙僧是發令員，唐僧是評判長。一共四個人包辦這個運動會。

你聽，發令員吹哨了！咱們都得戴起望遠鏡來。豬八戒那麼胖，還沒有走幾步就張着大嘴喘起粗氣來了；可是孫悟空還是不改當年的脾氣，一跳就跳到半天雲裏去！

「孫悟空眞快呀！」大家都喊起來了，這眞是一個奇蹟。

然而，——你猜怎麼着？結果倒是豬八戒得了第一！你說奇怪不奇怪？

爲什麼呢？

老了，孫悟空老了！雖然他是人老心不老，可是腿腳卻不大受用，這一個觔斗跳上去，因爲用力太猛，腿肚子轉了筋，就在半天雲裏來了個四肢無力，週轉不靈。豬八戒雖然也老了，可是老實人專辦老實事，傻勁總還有點，一路上早起晚睡，辛辛苦苦一直就沒有停下來。

結局豬八戒跑了三個月，而孫悟空卻費了一百二十天。你能說孫悟空比豬八戒跑得快嗎？

你笑了，你以為這是胡說，可是這裏面就有一個道理。論快慢，不但要比較距離，而且還要比較時間。

你大概知道，表示快慢的叫做速度。所謂速度就是表示一個單位時間所走的距離。什麼叫做單位時間呢？我們先要知道表示時間的是個複名數，小的單位有時，分，秒；大的單位有日，月，年。一年，一月，一日，一時，一分，一秒，這都叫做一個單位時間。用哪個就說哪個，這倒沒有限制。

至於速度，倘然始終不變，就可以用下面的公式推算：

速度＝距離÷時間

譬如一個速度是每小時十二里，也就是每分鐘三十丈，同時也就是每秒鐘五尺。

而且，時間和距離既然有個單位，所以速度也有個單位。在一個單位時間之內走一個單位的距離，就叫做一個速度的單位。譬如每小時走一里，叫做一時里；每秒鐘走一尺，叫做一秒尺。速度快的，時間就得用個小單位；速度慢的，時間就要用個大單位。這僅是為了表示的便利，並沒有什麼別的道理。

因為速度的表示需要知道距離和時間，所以兩個速度比較的時候，就得先確定一個標準。

假設時間一定，那麼距離大的速度大，這是普通的一個想法。假設距離一定，那麼時間短的速度大，這就是運動會上比較快慢的一個標準。所謂徑賽一百公尺，二百公尺，四百公尺，成績是什麼？十二秒，二十八秒，六十秒。這就是比較的時間。

所以要想表示快慢，那麼時間和距離都得說清楚，不然就沒有意義。我們說，孫悟空一個觔斗十萬八千里，這只是表示他的本領，實在並沒有表示他的速度。然而爲什麼我們都以爲他跑得快呢？這是因爲我們自己認爲一個觔斗用不了多大的時間。看看舊劇裏的武生，一分鐘能夠打十個觔斗，平均一個觔斗不過需要六秒；要是六秒鐘走十萬八千里，一秒鐘就能走一萬八千里，——所以我們覺得他快。但是這一個觔斗打下來要是用了一百二十天，平均一天纔走九十里，那就還不如我們騎腳踏車快了。所以結果就叫豬八戒得了第一。

因此要想說明速度，時間和距離必需都要交代明白，——然而這就是我們常常疏忽的一點。

同時，求速度的公式又可以寫成一個分數：

$$\text{速度}=\frac{\text{距離}}{\text{時間}}$$

按照上面比較速度的說法，假如分母一定，分子大的分數之值就大；假如分子一定，分母小的分數之值就大——這就是比較分數大小的一個原則。

不過在我們心裏，總覺得有點替孫悟空叫屈，說實在的，他自己也覺得有點寃枉！誰叫人老了，連自己的腿也不爭氣！

然而孫悟空卻有個小心眼。他告訴豬八戒說：「老豬，這次有你的，老孫算是栽倒你的手裏。可是咱們回去再比比看，要是我再輸了我就拜你爲師兄。」

豬八戒張開大嘴，哈哈的笑着說：「不敢不敢；只要你不怕丟人，咱們就無妨再試一下！」

這時候沙僧樂得的看個熱鬧，他拍着掌說：「好好好，說賽就賽，一，二，三！」

不等哨響，豬八戒就大搖大擺的叉開了腿。這一次孫悟空不敢再翻觔斗了，可是他一個箭步就鑽到豬八戒的前頭。

「老豬加油啊！」沙僧跟着成了啦啦隊。

這一喊，給豬八戒助了威，果然他就越跑越快，連老命也不要了——可是在他的腳底下加的並不是油，只是加了一個速度。這個額外增加的速度叫做加速度。

加速度也是按照單位時間來計算，如果每一秒鐘加一個速度每秒五尺，那麼這個加速度

就是五個每秒每秒尺。一個每秒尺是一個速度的單位，一個每秒每秒尺是一個加速度的單位。所謂五個每秒每秒尺就是：第一秒末了的速度是每秒五尺，到第二秒末了便是每秒一丈，第三秒末了是每秒一丈五尺，——這樣的一直加下去。豬八戒的加速度是多少，我們並不知道，不過他總是越走越快，遲早會趕上孫悟空的。

孫悟空一看不好，心中頓生一計。趁着老豬還沒有趕到；連忙往四面一瞧，嗖的一聲——就跳上了火車。

孫悟空坐在車上，嗚嗚嗚，——火車開了！豬八戒大叫一聲「不好！」這一來可就洩了氣。一洩氣腿就不由的慢下來，這時候加速度，反而變成減速度了。速度每秒每秒的減下來，結果又恢復了原來的快慢，——一個不變的速度叫做常速。

這且不提；我要問你：這時候誰快誰慢？

當然是孫悟空快了！

可是孫悟空來到車上，樂得歇歇腳；心裏一痛快，結果就倒下睡了。既然睡着不動，那還講什麼快慢？

話卻不能這樣說。孫悟空雖然不動，然而車子一動就帶着他動，所以車子的速度就變成他

的速度了。

然而老孫一覺醒來——卻不料豬八戒就正坐在他的對面。

「咦，奇怪，」老孫說：「你怎麼上來的？」

豬八戒笑了，他說：「傻人有個傻福。回頭來了一班快車，趕上你這慢車，恰好一錯車，我就換了車，一車一車的就扯到一塊了。」

「什麼車呀車呀的，你簡直是胡扯！」老孫氣紅了臉。

不錯，這一扯可就又扯出了一個問題。我再問你，這時候你說他倆誰快？

一般快！

是的，——不過這是咱們這樣說，他們自己可就覺不出來。這又說明了一件事實：論快慢，還要有個標準。

按現在這個情形，就說豬八戒吧。以我們看，他是動的；但是以孫悟空來看，他就變成靜的了。動靜既然是相對的，所以快慢也是相對的。拿着一個靜止的東西作爲標準，這個運動的速度叫做絕對的速度；拿着另外一個運動的東西作爲標準，這個速度就叫做相對的速度。

相對速度的大小是由兩個運動的方向來規定的。譬如你往東走，速度是每時八里我也往

東走，速度是每時六里，那麼你對於我的相對速度就是每時二里，這就是說，每走一小時，你就比我多走二里。這是兩個速度之差。如果你往東走，我往西走，那麼你對於我的相對速度就變成每時十四里，因爲每走一小時，咱倆就要多離開十四里。這是兩個速度之和。

要想明白這個道理，咱們也得坐火車。走着走着旁邊又來了一輛快車，你放心，這是雙軌。現在咱們從窗裏往外瞧，假設兩個車是一個方向，錯車的時候還不覺得它是多麼快；可是要是兩個相反的方向的話，那可就快得多了！這就是因爲：一個是速度之差，一個是速度之和。

假使這兩個車的速度一般快，我們走到哪裏，它也走到哪裏，除非是和別的東西比較，那你就看不出它是動的，因爲相對的速度變成零。

現在孫悟空既然和豬八戒同坐在一個車裏，如果讓我們在地面上看，他們倆是一般快；可是讓他們自己看，那就覺不出來了。不但他們自己覺不出來；假如我們也上了這一輛車，那麼我們也看不出來，因爲速你帶我，孫悟空，豬八戒，我們彼此的相對速度都變成了零。

孫悟空想到這一點，於是就又心生一計。他向豬八戒打了一個招呼：

「老豬，咱們回頭見！」

說時遲，那時快，一言未了，他就跑出了車廂，爬上了車頭；不但爬上了車頭，而且還一跳——就跳

上了飛機!

等到豬八戒趕出來的時候，他也想跳，然而膽小，一遲疑，飛機早就飛過去了!

這一次倒是老孫眞正得了第一。

第二站　動的話題

在一個動的環境裏靜止着便要使人發生沒落之感。這種心情，跑在車站上就會覺得格外明顯。

呼隆呼隆的火車來了，喘着粗氣；對着這個龐大的怪物，使我們覺得自己渺小。而且車動我們不動，又是精神上的一個壓迫。人人都有個活動的天性，我們就不應當自甘寂寞。那麼爲什麼我們不上車呢？只要我們上了車，車動我們也動，我們和火車變成了一體，這時候心情就暢快得多了！

不但心裏暢快，而且眼界也開展了。原來是車動地不動，現在卻是覺得我們自己不動，地倒動起來了。這又是怎麼一回事呢？

因爲運動是相對的。所謂動和不動，我們要有一個觀點。從一個靜止的觀點去觀察一個運動的物體，我們看着它動；可是要從一個運動的觀點去觀察，那麼靜止的物體反而變成動的了。這是由於觀點的不同。

但是這裏還有一個重要之點，我們從一個動的觀點上去看一個靜止的物體，這個物體不但變成動的，而且還和我們這個運動的方向剛剛相反。我們往南，它往北，我們往東，它往西，我們前進，它後退。

這就是一個很好的教訓：如果我們不能跟着時代走，那麼我們實在就是已經落了伍！所謂「為學如逆水行舟，不進則退；按照相對的說法，「不前進」就無異於「開倒車！」

你不要認為我又在給你講什麼大道理，不過借着這個機會打算告訴你一點物理的事實。那就是：論動靜還要先確定一個觀點。

譬如說，我們站在月臺上等車的時候，火車慢慢的停了下來。這時候，我們不動，車也不動，我們說「車停了，」這是從一個靜止的觀點去看動靜。等到我們上車以後，車又開了，看着窗外的車站往後溜過去，同時又看到車廂的那邊走過來了一個車僮，這就是從一個運動的觀點去看動靜。

用靜的觀點去看動靜，這件事情很簡單，不用講，誰都明白。可是要從動的觀點去看動靜，這就來了話題。

最好是我們能夠一個人變成兩個人，一個坐在車上，一個站在地下，兩相對照就可以看出

一些道理來。

首先我們說，地上的人看着車往前進，車上的人看着地往後退。究竟誰對誰不對呢？兩個都對！這就是因為運動是相對的。靜的看着動的在動，而動的卻又看着靜的在動。這兩個運動的快慢一樣，方向相反。所以太陽繞着地球往西轉，同時也就是地球繞着太陽往東轉，單就太陽和地球來說，這兩個說法實在是一個現象。如果不和別的行星比較觀察，那就分辨不出來，到底是誰轉誰不轉。

可是這種情形只有在速度大的時候纔會感覺出來，速度小的時候就往往不會注意。當着你在地上散步的時候，你曾經注意到地是往後退的嗎？不說你就不會理會的。

現在讓我們在地面上走走看！先確定一個目標，譬如走向校門口。如果你能夠忘記了你是往前走，那麼你就會覺得那個校門正是向着你挪過來了。不僅只是這樣，而且你還會看出來，從你到校門的這一段路正在慢慢的縮短，反過來說，也就是你已經走過的那一段路正在慢慢的增長。你不動的時候，這一切都不動；只要你一動，這一切都要發生變化，有的變近，有的變遠。而且，——越說越多了，——你動得快，它們就變得快；你動得慢，它們也就變得慢。這又說明了一件事實，這一切相關的變化，不管是延長或是縮短，然而變化的快慢是一致的。

現在讓我們再在車上走走看，還是用着散步的那個步伐，溜溜躂躂的走。你走我也走，咱們誰也不會覺得快。可是站在地下的你和我（我們的化身）他就要對於這個說法提出了抗議。火車已經夠快的了，你們在車上再一走，那豈不是更快了麼？

不錯，這句話有理。因為要是從地面看起來，那麼我們的速度應當是車速加人速，可是就我們自己講卻並沒有把車速算在裏邊。一個是以地面為標準，一個是以車廂為標準，標準不同，所以速度也就不同了。

而且，——又是一個而且，——就是在車廂裏走，往哪邊走，這個情形也各有不同。車往東你也往東，掉回頭來，車往東你也可以往西，只要是一個步伐一個快慢，那麼在車上看起來，僅只是方向的不同，可是速度相等。然而就地面上看起來，那可就大不一樣了！車往東你也往東，是車速加人速；如果車往東你往西，那就變成車速減人速了。不但這兩個運動變成一致的（都是往東）而且速度又有一個大小的差別。觀點不同，看到的事實就恰好相反。那就是說：在一個進步的環境裏，如果有人能夠再進一步，雖然並不是一件什麼了不起的事情，可是在一個落伍的人看起來，他就要大驚小怪了！所謂少見多怪，這正是表現自己沒落的醜態。

同時又使我們瞭解了一件事實，所謂動靜和快慢不過是描寫一個相對位置的變化。不論

車動地不動，或是地動車不動，只要車和地的位置有了變化，這纔知道這個動那個不動。假若相對的位置沒有變化，不管兩個人一塊坐着還是一塊走，結果誰也看不出誰動來。現在我們一塊坐在車廂裏，你能看得出車上的東西都是正在往前動嗎？

所謂速度的大小，實在就是說明了這個相對位置變化的快慢。人和人的距離變化得慢，所以我們說人的速度小；車和人的距離變化得快，所以我們說車的速度大。兩輛火車的距離能夠變化，所以我們說車是動的；兩個車站的距離不能夠變化，所以我們說車站是靜的。這雖然是一個很淺顯的道理，卻是一個最重要的關鍵。

不過有時候，雖然相對的位置沒有變，可是如果一個人，意識到自己是在動，那麼就會覺得別的東西也在動。例如你和你的朋友一同騎着腳踏車，只要兩輛車子的速度相等，那麼相對的位置就沒有變更。你和他談着話，就好像對面坐在屋子裏一樣，絲毫沒有覺得什麼不方便。這時候你根本就沒有感覺到你們同時一塊動。——然而你們倆個如果是在比賽車子，雖然還是速度相等，可是在這個時候，因爲你注意到你是正在拚命的往前趕，所以你就會覺得他也在拚命的往前趕了。

而且，——再來一個而且，——即使有時候相對的位置有了一頂點的差異，卻是還會遇到

同樣的情形。例如在月下散步的時候，在這個很短的時間之內，地球和月亮的相對位置，可以說是保持着一個固定的距離。雖然你在院子裏走來走去，有了一個移動，可是這個移動比起你到月亮的距離，那就很小很小，小到不在話下。換句話說，你們倆個相對的位置是沒有什麼變動的。可是這時候，因爲你意識到你是在動，所以你就看着月亮也在動了。你往東，月亮也往東，你往西，月亮也往西；你走它也走，只要你停下來，它就不動了。月亮並不是給你表示好感，實在是因爲相對位置變更得很小很小的緣故。

同樣的，我們走在一條很長的馬路上，望着天邊遠處的浮雲，雖然它是在靜止着，可是我們就會看着它是跟着我們一塊往前移動。這都是同樣的道理。

不過，假如相對位置的變化不是一頂點的話，那可就不能這麼說。譬如你現在從火車上去看那天邊的浮雲，它就不會再跟着你一塊往前移動了！

好啦，現在就讓我們從窗車裏向外望望吧。看看還有什麼好看的沒有？

首先碰到眼前的，卻是鐵軌兩旁的樹和電線桿，一個一個的往後溜，尤其是經過窗口的時候，溜得那麼快，幾乎使我們不免有點心驚，惟恐怕它對於我們有什麼損害。——其實造成這個景象的乃是火車，因爲它們的速度也就是火車的速度，僅只方向相反。看到這個事實，你纔想起

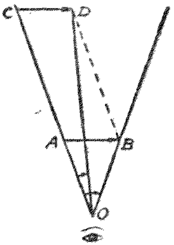
了我們的火車，它是多麼快！

假如我們想要解除這個心理上的壓迫，那就要把眼光放遠些，再往那些遠的地方去看。

這就又來了一個奇蹟。車外面的地，雖然都是往後移動，然而近的地方動的快，遠的地方動的慢，整個的看起來卻是好像在那裏兜圈子，整個的在轉，轉，就好像留聲機上的片子，礱米磨麵的那盤磨。——這又是怎麼一回事呢？

這就和我們的視角有關係了。

無論遠的地方或是近的地方，對於我們的火車來說，都是同一個速度往後移動。可是遠的地方和近的地方，在我們視角的移動上，這兩個角卻是大小不同。雖然在同一個時間，無論遠近都是挪了一個相等的距離，然而近的地方這個視角大，遠的地方那個視角小。這就是說，在一個時間之內，兩個角度的變化彼此不等。對於這個角度變化的快慢叫做「角速度」。現在我們所感覺的這個快慢就是由於角速度的不同！



所以速度有兩種，一種是線速度，一種是角速度。在一個單位時間所走的距離，叫做一個線速度的單位；在一個單位時間所移動的角的大小，就叫做一個角速

度的單位。現在這些車窗外的景物都是順着一個直線的方向往後移動，它們角速度的大小和我們的距離成反比，所以越近越覺得快，越遠越覺着慢。整個的看起來，便是在那裏旋轉。這就是說：線速度相等，然而角速度卻未必相等。

反過來說，角速度相等的，線速度也未必相等。譬如留聲機上的唱片轉起來的時候，中間的商標和文字比較還能夠看得清楚，可是越靠邊的就越不容易看得清楚了。那就是：雖然角速度相等（一秒鐘轉幾圈是一定的）可是線速度就不一樣了。在同一個時間之內，轉裏圈的圈小，轉外圈的圈大。也就是距離中心越遠的，線速度越大。

家裏沒有留聲機的，無妨看看車輪子，不論什麼車輪，只要轉起來總是中心慢而四周快。假設有過推磨壓磯的經驗那就更清楚了，這些事情只是一個道理。

當着瑩澈的明月夜，聽到小弟弟在那裏唱：「月亮走，我也走，一走走到老河口。」我們不但覺得歌詞有趣，而且還領悟了運動的「相對性。」

第三站　火車究竟多麼快

火車已經開了，滿車的客人慢慢的都就了座。大家安定下來，把走道跑路的事交給了火車，於是彼此就聊起天來。

「喝，這輛車多麼快呀！」一位鄉下的老先生，吸着旱煙，開始爲它讚歎。

「什麼，」旁邊一個比他年青的說：「這輛車快嗎？還有比它快的哩，特別快車，小站不停，坐上去，空空空空空空空空，那纔眞叫快車呢。」

「三哥，」對面的一個小孩說：「特別快車也不算快，飛機纔算快，嗚——的一聲就飛得沒有影了！」

小孩的媽說：「飛機也不算快，還不如我想的快！千里遙遠，只要我一想就到了。」

你聽着這些話覺得好笑，其實這裏面倒有一個眞理。我們曾經說過，快慢也是相對的，論快論慢就需要比較。快的比較慢的快，比起更快的來它就變成慢的；慢的比較快的慢，比起更慢的來它就又變成快的了！

那麽究竟哪個快哪個慢呢？這又需要比較速度。知道了時間和距離，我們就能夠算出個眉目來。反正坐在車上沒有事，我們不妨算算火車的速度。

剛纔在月臺上看到木牌上寫着到下一站的距離是六十五公里，再翻翻火車時間表，兩個到站的時間，一個是一點零五分，一個是兩點零十分。那麽時間除距離，我們就算出了火車的速度：

$$65 \div \left(2\frac{1}{6} - 1\frac{1}{12}\right) = 65 \div \left(\frac{13}{6} - \frac{13}{12}\right) = 65 \div \frac{13}{12} = 60 \text{ 公里/小時}$$

這不過是一個最簡單的算題。

然而，算是算出來了，想想卻又出了問題。所謂一點鐘走六十公里，這個速度到底是什麼時候的速度呢？——一開車嗎？還是跑到半中間呢？

不錯，這裏邊話裏有話。剛開車的時候當然沒有那麽快，剛剛離開車站的那一剎，就好像一隻船離開了水岸，悠悠的我們覺得有點飄飄然；可是等到火車開出了站，就好像打了一鞭子的馬，昂昂的跑得混身都是勁。車到了半道，這匹馬就要發瘋了，撞撞撞，撞撞撞，撞撞 撞 撞 撞 撞撞，——恐怕比上面那個速度還要快得多了！

那麼上面那個速度究竟是什麼時候的速度呢？不問還明白，一問就糊塗。

我們先研究一個小學生的算題：張三得了三塊錢，李四得了四塊錢，王五得了八塊錢。那麼一共得了多少錢？

七八一十五。

每一個人合多少錢？

五塊錢。

怎麼得的？

三除十五。

你的本領總算不壞，一點也不錯。——可是這五塊錢，是張三得的？還是李四得的？還是王五得的？

都不是！

那麼這五塊錢是什麼意思呢？

平均數！

對了，平均每一個人五塊錢。這就和我們上面那個算式一樣了！平均一點鐘走六十公里。這

是一個平均速度。

然而這是一筆糊塗賬！和眞正的情形對照起來，只是一個大致的概算，並不能夠和實在的情形完全符合。有時候車的速度也許和它一樣，有時候就可能比它還快，也許可能比它還慢。這並不是火車眞正的速度。

那麽這個火車究竟多麽快呢？

你覺得這個問題問得滿神氣，其實這個問題問得不明又不白。拿着剛纔的問題反過來再問你：究竟你問的是什麽時候的速度呢？這樣一來，你就會覺得那個問題有點太含糊。不過你的意思我明白。你要問這個火車眞正的速度，眞正快慢的狀況。如此說來，我們還是要借重上面那個算法。

固然求平均速度的算法，得出來的只是一個概算。可是你也不能小看它。譬如說，你要問前一半路程的速度，那就是前一半的時間去除前一半的距離；你要問後一半路程的速度，那就是後一半的時間去除後一半的距離。

假設問頭一點鐘的速度呢？那就是頭一點鐘的時間去除頭一點鐘的距離了，不過這個速度的表示就要說每一分鐘走多少公里。既然你問得仔細，那麽我們回答的也就仔細一點。其實

不過是又用六十除了一下，把時化為分。雖然結果還是一個平均速度，可是這樣一段一段的來計算，那就精密正確的多了！

不過，像這樣的算法和實際的情形還有一個相當的距離。雖然這一個鐘頭的速度求出來了；但是我們能夠保險前半個鐘頭和後半個鐘頭的快慢是一致的嗎？

有理有理。不但前後兩半個鐘頭的快慢不一致，說不定前半分鐘和後半分鐘的快慢就不一樣，前半秒鐘和後半秒鐘的快慢也不一樣！所以最理想的辦法，乃是能夠求出一剎那一剎那的速度。

然而上邊那個算法依然能夠實用，那不過是：

（很小很小的距離）÷（很小很小的時間）＝（一剎那的速度）

——這個一剎那的速度也叫做瞬間速度。這比剛纔那個說法可就更精密了。

然而這裏邊還有個問題。所謂很小很小的時間，到底是多小的時間？所謂很小很小的距離，到底是多小的距離？

這就隨你的便了！而且因為距離是隨着時間變的，在某一個時間，就走了某一個距離；所以我們先要決定時間。這個時間，你願意它多小就多小。

當然啦，越小越精密，越小越正確，——那麼就索興叫它最小吧！什麼是最小呢？最小是零。

然而這就不行了！時間要是變成零，距離也就變成零，於是時間除距離就變成零除零。

從一方面講，時間是零的時候，距離也是零，那就是說，根本沒有運動。既然沒有運動，那就更談不到速度了！因此速度也是零。

從另一方面講，除法是乘法的還原。因爲任何數乘零結果都是零，

任何數×0＝0

所以反過來講，零除零就可以等於任何數，

0÷0＝任何數

這是一個不定式，商數可以隨便。那就是說，時間是零的時候，距離也是零，然而速度卻是等於什麼都行。說它快就是快，說它慢就是慢，說它有快慢就有快慢，說它沒有快慢就沒有快慢。原來想要求精密，結果反而更糊塗了！不但不正確，簡直有點胡扯，——這豈不是一件怪事？

可是反過來再想：所謂時間是零的時候，正是火車剛要想開，還沒有眞開，——萬一開起來的時候，這個速度也許是每點鐘六十公里，也許是每點鐘六十五公里，也許是

每點鐘五十八公里，那可就沒有準。所以如果按照這個想法，那倒是說什麼速度都可以的。

然而這個答案只是瞎猜，我們不需要。我們不能拿零作爲除數——因此這個議案應當取消。所以我們說，所謂很小很小的時間，無論多麼小都可以，然而不能等於零。

拿着這個要多小就多小的時間去計算速度，這個瞬間速度也就夠精密的了。

同時在這裏還要有一點聲明，否則就要發生誤會。

剛纔我們所謂很小很小的時間，這個非常之小的時間，你不要認爲僅只可以求出剛剛開車的那一刹的速度。即便火車開起來，跑在半路上，我們要想求出某一刹那的速度，依然可以利用同樣的辦法把它求出來。

譬如說，火車在剛開的頭半個鐘頭，它是越跑越快的一個加速度運動。這時候，每一刹的速度都是在增加。假如我們想求剛剛5秒的時候那個速度，我們可以先把時間從5秒開始，讓它增加一個很小很小的時間，在這個很小很小的時間，火車就會跑了一個很小很小的距離。只要這個時間小到非常之小，那麼用時間去除距離的那個速度，就是剛剛5秒的速度，——平常我們把它叫做「5秒末速。」

這個5秒末速，當然和5秒內的平均速度並不相同，這是很容易想到的一件事。

因此對於一個運動，不但可以求出一秒鐘，一分鐘，一點鐘的速度，而且還可以求出一秒末，一分末，一點鐘末的速度。一個是在某一個時間之內的平均速度，一個是在某一個時間末了那一刹那的速度——這個速度就是「瞬間速度。」

不過這個名詞還有點不夠精密，既是「瞬間」——間就是一個間隔，這個瞬間還有一個距離。因爲時間既是小到非常之小，那麼我們就不如乾脆把它叫做一個「瞬速」吧。所謂「瞬速」，這就是火車的眞正速度了。我們要它多麼正確就能夠多麼正確，只有這樣纔可以表示出火車的眞正快慢。

像這樣的算法，把一刹一刹的速度都求出來，那麼整個火車運動快慢的狀況就可以完全知道了，這纔是一個正確的描寫。

也許你會覺得這個想法太麻煩，可是這是沒法避免的一件事，要想正確便須精密，要想精密便不能嫌麻煩。

原理是這樣定了，至於怎樣把這個麻煩的手續想法化簡，那只是一個計算的技術問題。

第四站 數的行列

火車走到了原野，聽着車響的聲音，看着車外邊的閃影，我們曉得它是開足了馬力。不知道是爲了這聲音的單調呢，還是爲了振動的疲勞，有的客人已經打着哈欠，有的卻已經閉上眼睛就睡了。

可是這正是我們思索的一個好時候。

我們曾經說過，要想求出火車的眞正速度，那就要計算那些很小很小的時間和距離。然而這只是對於不規則的運動需要這麼辦，對於規規矩矩的運動就根本用不着。假如運動的快慢是一致的話，那就僅只求它隨便一個平均速度好了。這種運動叫做等速運動。速度既是相等，所以平均速度就是它的眞正速度。

假設這個運動不是等速運動，那就情形很繁雜，越走越快的是加速運動，越走越慢的是減速運動。加速度相等的是等加速運動，減速度相等的是等減速運動。一會快，一會慢，快慢不一定的就是變速運動了。

把一個皮球扔到天上去，這個皮球由於地心的吸力，每一秒鐘都減少了一個相等的速度，這就是一個等減速運動。回頭等到皮球從天上掉下來的時候，每一秒鐘又增加了一個相等的速度，這就變成一個等加速運動。大家興高彩烈的去旅行，越走越快是一個加速運動，回來帶着兩隻疲乏的腿，越走越懶得走，這就又變成一個減速運動了。

假設一個物體，越跑越快，比等加速運動還快，那是一個超加速運動。平常我們也把它叫做變加速運動。那是一個加速不規則的運動。

無論研究多麼複雜的問題，我們總是先從簡單的狀態開始，這是研究的一個方式。無論多少繁亂的問題，我們應當先歸納出一個抽象的形式，這又是研究的一個方法。例如把火車看成一個點，把鐵軌看成一條線，火車在鐵軌上跑，那就是一個點在一條線上移動，研究起來就方便得多了！

假設這個點，第一秒鐘走了一尺，第二秒鐘又走了一尺，這樣一尺一尺的走下去，那麼它所走的距離就是：

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,............

每一個數目字表示進展一次的結果；整個的把它們排起隊來，這就表示出整個路程變化的全

般狀態。

假設我們只用一個數目字，那只是表示一個固定的距離，——像這樣一個固定的數叫做常數，常數就是一個不變的數，也就是我們平常，常常的寫，常常的算的一個數。

然而如果把這些常數寫成一套，一隊，一個行列，這就變成一個變數了，這是一個新的觀念，一個新的認識。

首先我們要訓練自己，能夠從這個數的行列裏看出這個變數的變化的狀況。

這個行列就好像一個上樓的梯子，它是一個臺階接着一個臺階；一個變數，依次從這一個數跳到那一個數，就好像我們一級一級的走了上去或是走了下來。因此這個數的行列也有時叫做級數。

這個行列又好像我們去量布，量過一尺就接着一尺；又好像我們去翻書，掀過一頁又是一頁，照這樣接連不斷的繼續下去，——因此這個行列也叫做變數的接連數值。所以變數的內容就比常數複雜的多。

然而這只是變數的一個形式。

其次我們還要在這個行列裏看出變化的趨勢。——讓我們想想可能有幾種趨勢。

例如從一變到二，從二變到三。這個趨勢是什麼呢？越變越大！就好像一個正在打氣的皮球，一個正在蒸發的水泡；這個級數叫做發散級數。它所表示的這個變數是一個越變越大的變數。

反過來說：從三變到二，從二變到一，這個趨勢越變越小；就好像用水團泥，用繩打包。這個級數叫做收斂級數，這個變數就是一個越變越小的變數。

那麼有沒有也變大也變小的變數呢？有。譬如說，一個數的行列是：

1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2,………

從一到二，變大，從二到一，變小。這好像是一個擺動，擺過來又擺回去，擺來擺去還不過是那一段路程。又好像一個人，前走幾步後退幾步，走來走去，彷徨，徘徊，彳亍，游移。——因此這個級數便叫游移級數，這個變數便是個游移變數。

有沒有也不變大也不變小的變數呢？有。例如下面這一個數的行列：

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,………

既不變大又不變小，老是那麼一個勁，常常的保持着一個狀態。——其實，這就是一個常數，所以常數不過是變數的一個特例。當着一個變數無論怎樣變，變來變去還是它自己，這個變數就是一個常數了。

除此以外，還有沒有例外？

有。——奇怪；幹嗎老是有？譬如說，上體操的口令：

一二三四，二二三四，三二三四，四二三四。

一二一，一二一，一二一，一二一。

一二三三四，二二三三四，三二三三四，四二三三四。

這些是什麼級數？這些是什麼變數呢？

這些是亂七八糟的級數！這些是亂七八糟的變數！

對於這些亂七八糟的變數怎麼辦呢？

也有辦法！把它扯開來，一段一段的看，有時候變大，有時候變小，有時候不變。不就是這三種情形麼？所謂千變萬化，不過如是而已。所以研究這一類的變數，就需要一段一段的來研究了！

再則我們還要看出這個變化的方式。

所謂一二三四五六七八九十，這個變數是怎麼變的？它是走着變的，常步走，正步走，一步一步的走。

假若是一三五七九，或是二四六八十，這也是一步一步的走，可是和上面那個走法就不同了。上面那個是，一個單步一個單步的走，現在這個是，一個複步一個複步的走。左腿一邁是一步，右腿一邁又是一步，這是單步。左腿一邁再加右腿一邁，這也是一步，卻叫做複步。複步的距離比單步的距離長，所以這個變數就比上面那個變數變化得快。

假若是：五，十，十五，二十，二十五，三十，這就更快了。假若是：十，百，千，萬，十萬，百萬，這就更——更快了！所以變數變化也有快慢，這是變數的速度。

就上面這些變化看來，其實都是一個方式，走着變的。除此以外，還可能有另外的方式。

再讓我們彈彈琴。我們把手指頭按在白鍵上，按了第一個再按第二個。

do, re, mi, fa, sol, la, si,………

這就是一個越變越大的變數。反過來，

si, la, sol, fa, mi, re, do,………

這就是一個越變越小的變數。

do, re, mi, re, do, re, mi, re, do, re,……

這就是一個變大又變小的變數。假若按出歌兒來，聽着也許很好聽，可是如果按照變數的觀點看起來，那就是一個亂七八糟的變數了！

然而這裏面還有一個統一的形式。這些都是變完一個數之後，馬上就變成另外的一個數。假如我們是吹號，雖然吹出來的是一個do，但是能夠從一個輕音，連續不斷的就能夠變成了一個重音。更正確一點說，我們可以把一個弱音連續不斷的變成一個強音！這個變化就和上面那些都不一樣了！

上面那些變化是一步一步的走，一步一步的爬，現在這個變化卻是連續不斷的滾！好像天上的風在刮，河裏的水在流。

因此就變化的方式來說，一個是連續的，一個是不連續的。走路，跑道，是一種變化；划船，溜冰，又是一種變化。

馬拉車，人拉船，馬的蹄和人的腳，與地面接觸的是一個點又一個點，車輪壓過的地面，船底劃過的水面，接觸的卻是一條連續不斷的線。

不連續的變化可以用一列數去表示，連續的變化卻不好用一列數去表示了。因爲兩點之

間還有數不清的點，兩個數之間還有寫不完的數。所以用數來表示這個變化，就不如畫一根線來表示得更清楚了。

不連續的變化畫出來是些點，不管怎樣密，都是些孤點。連續的變化畫出來卻是一條線，一條連續不斷的線，就好像蠶吐出來的絲，或是機器紡出來的線，富貴不斷頭。

如果用記號來表示，那就要利用一個箭頭。譬如一個變數，從一變到二，再變到三，不連續的時候是：

1, 2, 3;

連續的時候就應當畫成：

1——→2——→3.

這是兩個不同的變化的方式。

但是一個運動，一個變化，卻不見得完全是單純的連續，也不見得完全是單純的不連續。——就說我們坐的這輛火車吧，從上一站到下一站，這個運動是連續的，但是每到一站停下來，這個運動便停止了。假設用數目字代表車站，那麼火車的運動就應當是：

1→2; 2→3; 3→4; 4→5;……

牛頓說：假使沒有外力的話，一個靜止的物體永遠靜止；一個運動的物體永遠運動——永遠向着一個直線的方向運動。這是一個惰性定律。現在，嗚——的一聲火車叫了，司機的人突然把火車的速度減下來。但是車上的客人還是由於惰性的緣故依然往前運動，於是當着車子一停的時候，臉朝前坐的就往前閃了一下，臉朝後坐的就會把腦袋碰在車皮上。因此睡着的就又醒過來，醒着的也想站起來活動活動了。

現在讓我們暫且走下車去，溜溜腿，換換空氣，休息休息腦子。回頭車開的時候再上來吧！

第五站　這個年頭變了

當着我們回到車上來的時候，火車就又開了。這本來是一件很平常的事情，可是想想就覺得怪奇怪的。剛纔我們還在車站上溜躂，如今又走上了征途。剛纔還停留了一會的地方，現在卻漸漸的跑遠了。當着我們把頭伸出了車窗外，回頭再看，那車站已經沒了影。

是動好呢？還是靜好呢？動是一個正常的現象麼？還是靜是一個正常的現象呢？——想着想着，心裏面就好像丟失了一件東西，雖然我們也不知道丟失的是什麼，可是總覺得有點空虛。

變了，一切都變了！這是我們的一點感慨。

但是轉而一想：天地間有什麼是不變的呢？有什麼是永恆的呢？

屋子裏擺着的桌椅，窗外面看見的山，它們是在靜止着嗎？教地理的先生告訴我們，不但地球自己轉，而且還圍着太陽轉，不但圍着太陽轉，而且整個的太陽系還一起跟着太陽移動。只要地一動就帶着我們全體動，那麼連桌帶椅，以及地上面的山，山上面的廟，廟裏的人，不都是在那裏動麼？

平常我們認爲靜是常態，動是變態；其實動纔是常態，而靜不過是一個例外，當着速度變成零的時候的一個特殊情形。

好像看電影：一個故事在銀幕上發展着，演變下去；只有偶爾在片子斷了的時候，銀幕上的一切纔會停止下來。我們能夠說靜止着是一個常態麼？

而且就是不這樣說；例如一個地上的建築物在那裏孤立着，它雖然沒有腿，不會爬起來走，可是風吹日曬，雨打水淋，久而久之，牆片掉了，棟梁彎了，一天一天的就會蒼老起來。我們能夠說它是永遠不變的麼？

只有看清楚這一點，我們纔能夠說：變纔是常態，而不變是一個例外。如此說來，我們對於一切變動倒不必感覺什麼驚異，這原本是一件很平常的事情。我們覺得應付一個變動的局面不容易，太困難，那只是證明我們自己的心理不健康——更具體一點，也就是惰性太深。要想正視現實，那就不能害怕變動。

然而速度的變化卻有兩種，一種是加速度，一種是減速度。加速度的越來越快，減速度的越來越慢。同時動也有兩種，一種是前進的動，一種是後退的動，這也是由於方向的不同。前進的動如果是正動，那麼後退的動就是反動。

而且動又是一個進展，所以也可以說是一種進化。假設由前進的動發展到激動，那就是把速度突然提高了，結果前進變成了激進，在社會的現象上來說，那就是革命。在英語裏，進化是 evolution，革命是 revolution，再沒有比這兩個字表現得更清楚了。反過來說，所謂反動，再一變就會變成了反革命，這在我們的心裏邊應當有一個澈底的了解。

同樣的，變也有正變和反變。——也許可能是一個速度，一個變化的速度，然而就方向來說，卻是剛剛相反！如果不動不變呢？那就要落伍了！

因此所謂速度，它的意義不僅只是表示快慢，而且還表示着方向。假設方向正的是一個加速度的話，那麼方向反的就是一個減速度，——也叫做負速度。如果不論方向但論快慢，那只是一個「速率」。

同樣的，對於變化來說，變化的速度叫做變速，變化的速率叫做變率，也是一個帶有方向，一個不帶方向。這樣一來，就把我們關於速度的觀念擴大了！

例如我們到水邊去釣魚。當着釣魚的鉤子伸到水裏的時候，水面上就會發出了一個圓的波紋，這個波紋慢慢的變大了。圓圈一大，圓的面積就增大，這個面積增大的快慢就是一個變速。

又如放風箏。風箏飛起來了，風很穩，而且順，於是這個風箏就要在天空上往前跑。風箏一跑，

就要放線：風箏跑得快，線也放得快；風箏跑得慢，線也放得慢。它們快慢雖一致，然而一個是運動的速度，一個卻是變化的變速——那就是風箏線長的一個變化的速度。

我們曾經說過，當着你走向校門口的時候，只要你一走，那麼已經走過的路就要增長，還沒有走過的路就要縮短。這兩個快慢當然彼此一樣，然而變化的狀況卻又相反，一個變大，一個變小，一個變長，一個變短。這就是變率相等而變速不等。

照這樣想法，我們可以研究的就太多了。譬如說，現在我們的火車正在走過一個鐵橋，那麼讓我們把手伸在車窗外，丟下去一個石塊。這個石塊正直的掉下去了，而車卻是依然往前跑，那麼那個石塊和我們的手就越來越遠了。我們可以算算這個距離變化的變速，和上面那個走路的問題完全一樣。

假如我們把一滴墨水滴在一張吃墨紙上，這個黑點越滲越大，那麼這個黑點的變速，就又和那個算水紋的問題一樣。同時，當着你看到一個吸煙的人，突然從嘴裏噴出了一個煙圈，這個煙圈越來越大。你不應當僅只驚訝這個好玩的技術，還應當想想這個煙圈的變速的求法。

這並不僅只是一個有趣的觀察，實在是對於一切自然變化的初步了解。例如按照物理上的定律說，物體的體積與溫度和壓力都有關係。溫度不變的時候，壓力越大體積越小；壓力不變

的時候，溫度越高體積越大。如果我們要想知道這個體積變化的實況，我們不就應當先求出這個變化的變速嗎？

像這些能夠變化的量都叫做變量。現在我們已經說過三種變量了：一種是距離的變化，一種是面積的變化，一種是體積的變化。無論一個線，一個面，或是一個體，只要能變，便應當先求出它的變速。——至於一個點的移動，那就只是一個運動的速度了！

對於這些變速應當怎樣去求呢？這還是和求速度的那個方法完全一樣。先求平均變速，再求眞正變速。

首先我們要講明一個名詞。只要是一個變量，那麼經過一個時間就要產生出一個變化，這個變化，我們把它叫做變異。——變異當然不能等於零；因爲如果等於零，那就是沒有變異，既然沒有變異，那就根本不必算了。

如果知道了變異，我們就可以求它的平均變速。那就是：

變異÷時間＝變速

但是要想求出眞正的變速，還得用那個老法：

（很小很小的變異）÷（很小很小的時間）＝（一剎的變速）

只要把一剎一剎的變速求出來，那麼整個變動的狀況就完全明白了。這和求速度還是一個原理。

也許你覺得這些問題有點頭痛，可是這是沒法子的事。要想透徹的了解一個運動或是一個變化，這都是沒法避免的手續。

爲什麼發生這些問題呢？那就是因爲一切都是變的。變就是整個自然現象的一個共同的形式。

就拿時間來說吧，一會天亮了，一會正午了，一會太陽落了，一會天黑了，一會太陽就又從東邊爬出來了。你大概聽過不少關於神話的故事吧？例如一個樵夫跑到山裏去打柴，遇到兩個老頭在下棋。看着下棋就把打柴的事情忘掉了，不過這時候使他奇怪的卻是樹葉黃了黃了又綠了，綠了綠了又黃了。等到他下山回家的時候，已經不曉得經過多少個年代了！所謂「山中方七日，世上幾千年，」就是類似的一個神話。我們別的不管，單就那個樹葉的變色來說，那無非是形容由秋到冬，由冬到春，由春到夏，繞過來又變成了秋天，我們沒法停止這個季節的變化。一天一天的是這樣，一年一年的也是這樣。

同樣的，一個人沒有幾天的嬰兒變成幼童了，沒有幾天的幼童又變成大人了，大人轉眼就

又變成了老頭。這種變化卻和上面那個季節的變化又有點不同。季節的變化是週期的，繞了一個圈子又繞了回來；可是一個人的變化卻是不循環的，因爲從來沒有一個老頭能夠又變成一個嬰兒。——這也就是對於人生最大的一個遺憾。

然而這僅只是對於一個人來說，假設就整個人類的全體來看，這一代雖然過去了，可是接着又來了下一代；老的雖然老了，年青的卻又壯大起來，這實在還是一個週期的變化。就彷彿是演舊劇，一齣戲唱完了，所有的腳色從下場門走進去了，可是接着就是下一齣的開始，不同的腳色又從上場門裏走了出來。人生固然不是演劇，我們不應當抱着玩世的態度逢場作戲，但是單就變幻的情形來說，卻又不妨權作這個看法。

假設一個人的眼光不能看到人類的全體，而僅只注意到個人的演變，那麼或早或晚終歸就要消極悲觀，以致苦悶。而且這種心理越老越利害，因此年紀越大的人就覺得一切都看不慣，不順眼，無論什麼都別扭着心。

這種情形太普遍了，——即便來到這個火車上，我們也不免聽到旁邊的那位老先生又在發出這樣的感慨：

「唉，這個年頭什麼都變了！」

其實哪是這個年頭變？無論什麼年頭都在變，根本就沒有不變的時候！——不過也許現在變的稍微快了點，所以老年人便看不慣了。

然而在一個青年人的眼裏就感覺不到那麼深刻，所以又有另外的一個人接着說：

「你老人家歇歇心吧，這個年頭管不了那麼許多了！」

整個的世界就像這輛跑着的火車，一切的萬物又像兩邊的景物，連續不斷的在那兒動，動，動，——永遠的動！變，變，變，——永遠的變！

第六站　跑到哪裏算一站

擋擋擋擋，擋擋擋擋擋，擋擋擋擋，……

聽着火車響得那麼起勁，我們知道它又恢復了正常的速度。從一開車起，一直到現在，沒有一會不是增加速度；但是等到開足了馬力的時候，它就繼續的保持着一個固定的速度往前跑。這就是說，從一個加速度運動又變成一個常速運動了。

雖然它的聲音那麼大，然而因爲太單調的緣故，結果就變成了一隻催眠歌，叫人聽了不耐煩。同時車往前動，人雖然覺不大出來，可是由於上下左右的震動，就又會使人覺得容易疲勞。假設不想法解解悶，豈不就要感覺無聊嗎？

我們應當多想，多問，多想出些問題來！

讓我先開始吧。

「我問你，火車如果像這樣走法，我們結局會跑到什麼地方去呢？」

「那還不是跑到下一站麼？」

「不錯。可是如果永遠不停呢?」

「那就跑到最末一站了!」

「假設鐵軌繼續延長呢?」

「那,也許跑到一個山根。」

「假設連山上也鋪了鐵軌呢?」

「那就跑到山頂了。不,也許就又跑下來。」

「假設再往前跑呢?」

「也許跑到一個河邊。」

「然而河上可以搭橋!」

「那就從這邊跑到那邊了。」

「假設再繼續跑……」

「你怎麼老是沒有完?再跑,就跑到海邊了!再跑就要掉在海裏去了!」

「你放心,海上也有橋……」

「那簡直是豈有此理!」

「不，還是要往前跑！一定要往前跑！」

「再跑？還跑？再跑就要跑回來了！」

「爲什麼？」

「地球不是圓的麼？再跑就跑一圈了。」

「不；假設地面是平的，譬如說把地球壓扁了，而且又壓平了，而且又伸長伸遠伸寬伸大，長的沒有頭，遠的沒有邊，寬的沒有岸，大的沒有個限制。」

「簡直越來越不像話了！」

「不不不，還是要跑，往前跑，一直跑，永遠不停的跑！」

「究竟你的話有完沒有完？」

「有完。乾脆一句話，我要問你，……」

「你不要問我，我倒要問你：跑來跑去，究竟跑到哪裏算一站呵？」

「不錯，這就是我要問的那個問題。」

「這倒上了你的圈套了，咱倆變成了一個問題。幹嗎要這樣嘮嘮叨叨的？」

「不，我要告訴你一個新的問題。

「還是按照我們那個化簡的辦法，把鐵軌看成一條線，火車變成一個點，那麼這個點沿着那條線，永遠向着一個方向跑，結果究竟會跑到什麼地方去呢？」

「那只有天知道吧！」

「不，人也可以知道。」

「那不是越跑越遠麼？」

「對了，老弟。可是到底多麼遠呢？」

「很遠。」

「究竟多遠？」

「遠，遠，遠的利害！」

「利害也不行。究竟多遠？」

「遠，遠，很遠很遠，要多遠就多遠，比什麼都遠！」

「對了！這就說到了正題。」

「這算什麼正題，豈不是和不說一樣嗎？」

「不，說就比不說強。現在我們要想想那個距離了。跑的遠，就是說距離大。遠到要多遠就多

遠的時候，那個距離就是要多大就多大，比什麼都大！」

「這麼一來，那算個什麼數呢？」

「那就是一個無限大無窮大！」

「無窮大也是個數嗎？」

「是，它是個變數。」

「是不是一個最大的數呢？」

「不！不是一個最大的數！」

「這就奇怪了；那麼最大的數是什麼？」

「根本這個問題就不通，天地間找不到一個最大的數。」

「那麼讓我們數數看！」

…………

「你爲什麼不說話了呢？」

「數不到頭。」

「對了。——不是沒頭，而是沒尾。」

「可是我想總該有個最大的數。」

「好，就算承認你這個說法，假設有一個最大的數；要是這個數再加上一個『一』呢？」

「那，——那就比它更大了！」

「那麼原來的那個數還能夠算是一個最大的數嗎？」

「那，——那就不是最大的數了！不過，……別扭，這個問題有點太那個。」

「一點也不那個。這就是說根本沒有一個最大的數。」

「那麼無窮大呢？」

「無窮大也不是一個最大的數！它不過是一個能夠變成要多大就多大的變數，它能夠比什麼數都大，然而卻不能說是一個最大的數。」

「這是什麼意思呢？」

「那就是說它可以大大，大大，大到沒有限制的大，所以是一個無限大。然而大既然是沒有限制的，所以就找不到一個最大的數。」

「究竟這個變數是無限大呢？還是無窮大？」

「既是無限，又是無窮！」

「此話怎講?」

「沒有限制，所以是無限;數不完，所以是無窮。」

「那麼反過來說，就該有無限小無窮小了?」

「不。有無窮小，卻沒有無限小!」

「爲什麼?」

「無論多麼小，小到零就算完了。零不就是一個限制嗎?」

「奇怪，讓我再想想。假如往前跑，越跑越遠，距離越大;那麼——反過來往後跑，越跑越近，距離越小，……」

「這樣跑着跑着就跑回來了，那就變成零。」

「不;還是跑!」

「再跑?還跑?再跑就要——又跑遠了!」

「然而這兩個方向不一樣，按照你那個說法，如果往前跑是正的，現在就變成負的了!」

「不錯，可是這樣越跑越遠，結果就變成負的無窮大了!」

「爲什麼有兩個無窮大，只有一個無窮小呢?」

「那就好像一根線，可以有兩個頭，然而只有一個中點。你能說它爲什麼嗎？

「還有，你說『個』也不妥當，你只能說一種兩種，不能說一個兩個。因爲每一種都可以有無限多的無窮大和無窮小。譬如說，你變大，我也變大，咱倆都是無窮大；你可以變成正的無窮大，我可以變成負的無窮大，咱倆越來越遠越別扭；你變小，我也變小，咱倆都是無窮小，越來越接近，末了都變成一個零。

「這樣一扯又扯遠了，咱們還是想想那個跑到哪裏算一站的問題吧。

「譬如說，火車往前跑，永遠往前跑，那麼它能夠跑到哪裏去呢？」

「實際上你是說一個點在一條線上跑的問題。現在我能夠答覆你了，它要跑到無限遠，也就是無窮遠。」

「問題是瞭解了，可是答案卻不一定對！」

「爲什麼呢？」

「那還要看它是怎樣跑法？」

「無論怎樣跑，結局不都是無窮遠嗎？」

「且慢，我們還是想想看。

「假如從這一站到下一站，永遠往前跑；然而先跑一半，再跑一半的一半，再跑一半的一半的一半，這樣一半一半的跑下去，無論跑到什麼時候，結局——你猜怎麼着？結局也不過是跑到下一站。」

「是嗎？有理倒是有理，可是有點莫明其妙。」

「其實一點也不妙，那不過是火車出了毛病，越跑越慢了。因爲……」

「雖然越跑越慢，然而它不是永遠往前跑嗎？」

「雖然永遠往前跑，然而它總不能越過下一站。」

「對是對；可是還有一點想不通。雖然越跑越慢，然而永遠繼續往前跑，結局就不能跑到很遠的地方去麼？只要有充分的時間！」

「其實你想的並不錯，有時候它是可以跑到很遠的地方去的；不過有時候就不行。例如上邊那個跑法就不行！你想的有理是有理，然而不能完全都對。」

「原因是什麼？」

「那就是因爲受了那一半的限制。所謂一半，是僅就這兩站之間來說的，所以無論如何就不能越過下一站了。假設沒有這一類的限制，那倒是可以跑到無限遠，不過很慢很慢就是。」

「這還像句話。」

「要是用變數講，如果一個變數雖然永遠變大，但是終究不能大於一個固定的數，這個變數就要有個限制。」

「像這樣我也會說，如果一個變數雖然永遠變小，但是終究不能小於一個固定的數，這個變數也就會有一個限制。」

「你的腦袋太好了，比剛纔活動的多了！可是我們還要想一想，如果一個變數的限制知道了，那麼這個變數變來變去，是不是就可以和這個限制變得完全一樣呢？」

「當然一樣了！譬如你說的那個火車，走着走着不就是到了下一站了麼？」

「然而在理論上可就不能那麼說。」

「怎麼？你又推翻了你自己的話麼？你簡直是——簡直是一個變數！變過來也是你，變過去還是你，你到底是怎麼一回事？我剛剛想明白了，你就又變了卦！」

「你別急，老弟，咱們好商量。我並不是推翻了我自己的說法，不過爲了精密還要加以補充。你應當注意，我們現在討論的是個變數，要變就永遠變，絕對不停止；假若它變到和那個限制相等，豈不就是不變了麼？」

「那麼，這倒是一點問題。」

「不錯，一頂點，相差也就是那麼一頂點。這個一頂點是什麼？」

「無窮小！」

「對了，它是近於零而不等於零。對於這一種限制，我們單給它起個名字，叫做變數的極限。所以我們只能寫成：

距離 ⟶ 0　而不是：距離 = 0

「因此，照這樣想法，要是那個很小很小的時間近於零的話，那麼一剎的速度就變成眞正的速度了，一剎的變速也就變成眞正的變速了！這比以前那個說法更精密，更正確。

「上海的肉鋪有個陸稿薦，老陸稿薦，眞正老陸稿薦；北平的刀剪鋪有個王麻子，老王麻子，眞正老王麻子；我們也有個平均速度，瞬間速度，眞正速度；平均變速，瞬間變速，和眞正變速！……」

「別嚷，你聽火車又在叫了；我想大概快要到下一站了。」

「不錯，那就是火車的運動快要到了它的極限値。」

第七站　大和小的賽跑(上)

當着火車又叫第二遍的時候，我們纔發覺並沒有跑到下一站，只是鐵道要拐彎。旁邊有一座塔，塔很高很好看。我連忙告訴你：

「你瞧，你瞧，那個塔！那個塔轉起來了！」

「是嗎？讓我瞧瞧！不錯；這就是因爲我們的火車正在圍着它繞了半個圈。」

「你的悟性不錯，咱們還是坐下再繼續的談。」

「談什麼呀？談來談去不還就是那一套嗎？」

「不，換個題目試試看！我已經告訴你了，無窮大和無窮小都不止一個，而且它們都是變的，那麼現在讓它們湊到一塊，這不就很好玩嗎？」

「這倒有點意思！」

「那麼我們先看無窮大吧。找幾個無窮大來試試。

「從前我們曾經說過，每一個變數的形式都是一個數的行列，這個行列就叫做變數的接

連數值。所以兩個不同的行列就是兩個不同的變數；反過來說，兩個不同的變數，它們的接連數值也就不同。現在你要找哪些無窮大呢？」

「隨你的便吧，只要好玩！」

「那麼我們就先找幾個簡單的，譬如一個是 x，一個是 y，一個是 z。

x: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,……

y: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,……

z: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100,……

現在；一，二，三，就讓它們變！看看誰變得快！」

「這不就和賽跑一樣麼？」

「是的，如果你願意把它們看成賽跑，那就是賽跑，現在我們看看誰跑得頂快？」

「當然 z 跑得頂快了！z 第一，y 第二，x 第三。」

「不錯！可是你說的是……」

「怎麼？又有問題麼？」

「不，還沒有這麼快。——現在再來一個 u，

u: $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, \cdots\cdots$」

「這是些什麼玩意？」

「這也是一個無窮大，帶花的無窮大。它的接連數値都是些方數，平方數。」

「帶花的無窮大？這倒很新鮮，可是有點不明白……」

「其實也沒有什麼，很簡單的我們就可以把它們算出來，那不過是：

u: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \cdots\cdots$

把花一去，這就很平常了。

「現在讓 u 也來跑，看看誰跑得快？」

……………………

「你說呀！」

「別慌，讓我想想看。u 和 x 比，當然是 u 快；u 和 y 比，當然還是 u 快；u 要是和 z 比呢？——

這個……這就是問題了！」

「爲什麼？」

「z 跑到一百的時候，u 也是一百，似乎一般快。可是再跑呢？讓我算算看。

「如果再跑，z應當是：

z: 100, 110, 120, 130, 140, 150,………

u應當是：

u: 100, 121, 144, 169, 196, 225,………

這樣一來，當然是u快了！」

「很好，你居然那麼仔細，這就是一個進步。現在又來了兩個無窮大，一個是v，一個是w。

v: $1+5$, 2^2+5, 3^2+5, 4^2+5, 5^2+5, 6^2+5,………

w: 10×1, 10×2^2, 10×3^2, 10×4^2, 10×5^2, 10×6^2,………

v和w也是些帶花的，然而一個後邊扯着個5，一個前邊拉着個10。現在比一比，看誰能跑得最快？」

「還是別慌，讓我比比看。v和u比，當然是v快了，因為每一個數都多了個5。u和w比呢？——當然是w最快了！

「w第一，v第二，u第三，z第四，y第五，x第——末了。」

「好極！我們還得再想。這些帶花的和不帶花的，跑起來有什麼區別麼？」

「這句話問的我不大明白。」

「那就是：從快慢上說，這兩組有沒有不同的地方？」

「什麼不同的地方？我還是不大明白！——你乾脆就說吧！」

「不，一說穿就沒意思了。我們先一組一組的看。就 x 和 y 來說，跑起來的時候，彼此有什麼關係呢？」

「讓我比比看。——我看出來了，y 永遠比 x 多10。」

「那麼 z 和 x 呢？」

「z 永遠是 x 的10倍！」

「對了，那就是說，y 和 x 的差，z 和 x 的商，永遠相等！」

「這有什麼意思呢？」

「這就是說，跑起來的時候，它們彼此之間的位置老是有一個固定的關係。y 永遠比 x 多十步，z 的距離永遠是 x 距離的十倍。」

「讓我再想想，……那些帶花的也有這麼一種情形。v 永遠比 u 多五步，w 的距離永遠是 u 的距離的十倍！」

「不錯，那就是說，u v w，跑起來的時候，它們彼此之間也是保持着一個固定的關係。現在再讓我們每一組裏挑出一個來比比看！」

「這倒眞像賽跑了！每一組裏選一個第一吧！」

「不，爲了我們自己看着方便，還是選那些倒數第一吧。譬如x和u：

x: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,………

u: 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2,………

「它們彼此之間也有一個固定的關係，這個永遠是那個的方數。

「現在我要問你，x和u跑起來應當是個什麼情形？」

「讓我想想看。x和y是一個差數，x和z是一個倍數，x和u是一個方數，……那麼u和x越離越遠，這個變化可就大得多了！」

「好極啦，老弟，眞有你的。那就是說，u比x快得太多了！同時u與v w，就和x與y z一樣，它們彼此之間的快慢比較還差得少，但是帶花的和不帶花的，彼此的快慢就差得太多了！這是一個重要的分類。因爲帶花的和不帶花的簡直不能夠相比！

「同時，這些變數既然都是些運動員，那麼我們如果打算分班的話，不帶花的應當是低年

級，帶花的就應當是高年級。這就是說，無窮大要分級。有高級的無窮大，也有低級的無窮大。」

「如此說來，你不但是我的老師，而且也是無窮大的老師了！」

「不敢，不敢。」

「那麼這個編級試驗有沒有一個簡單的辦法？」

「有，——那還得講分數。」

「爲什麼呢？」

「分數有個性質。假設一個分數，分子不變，分母越大分數之值就越小；分母越小分數之值就越大。」

「不錯，這在講孫悟空坐火車的時候已經提過了！」

「是嗎？你的記性很好。現在我要告訴你一個新的記號，那就是無窮大；無窮大雖然不是一個固定的數，可是我們爲了方便，也給它規定一個記號，這個記號就是一個睡覺的8，我們把它寫成∞。因此，假設分子不變，

如果 分母 $\to 0$ 則 分數之值 $\to \infty$

如果 分母 $\to \infty$ 則 分數之值 $\to 0$

同時這也就是無窮小和無窮大的一個關係。」

「按照這個說法，它們兩個彼此倒是親戚了！」

「是的，它們兩個是一對寶貝，一對活寶！一個大一個小，一個胖一個瘦。」

「這與無窮大的編級有什麼關係呢？」

「這就要告訴你。假設有兩個無窮大，我們就先讓它們比一比，這一比就變成分數了。譬如 x 和 u：

$$x:\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\cdots\cdots$$

$$u:\ 1,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9^2,\ 10^2,\cdots\cdots$$

$$x:u=\frac{x}{u}:\ 1,\ \frac{2}{2^2},\ \frac{3}{3^2},\ \frac{4}{4^2},\ \frac{5}{5^2},\ \frac{6}{6^2},\ \frac{7}{7^2},\ \frac{8}{8^2},\ \frac{9}{9^2},\ \frac{10}{10^2},\cdots\cdots$$

那就是 $\frac{x}{u}$： $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{10},\cdots\cdots$

這個分數之值也是個變數，越變越小，——這是個無窮小。用記號來表示，就是：

$$\frac{x}{u}\longrightarrow 0$$

——你能從這個關係上看出誰跑得快麼？」

「讓我想想看！如果一個分數之値變成零，那就是 u 比 x 先變成無窮大；所以——u 比 x 快！x 比 u 慢！」

「這眞是好極了！那麼誰是高級？誰是低級？」

「u 是高級，x 是低級！」

「一點也不錯。」

「可是如果 u 比 x 呢？——讓我自己比比看：因爲 u 比 x 和 x 比 u，彼此是一個倒數；分子分母顛倒過來，

如果 $\frac{x}{u} \longrightarrow 0$ 那麼 $\frac{u}{x} \longrightarrow \infty$

這就是 u 比 x 跑得快；那麼還是 u 是高級，x 是低級，結果一樣！這倒有點意思。

「可是 x 和 y 不也是有個快慢嗎？……」

「然而那就不一樣了！因爲：

x: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,………

y: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,……

$\frac{y}{x}$: $\frac{11}{1}$, $\frac{12}{2}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{14}{4}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{16}{6}$, $\frac{17}{7}$, $\frac{18}{8}$, $\frac{19}{9}$, $\frac{20}{10}$,……

或: $1+10$, $1+\frac{10}{2}$, $1+\frac{10}{3}$, $1+\frac{10}{4}$, $1+\frac{10}{5}$, $1+\frac{10}{6}$, $1+\frac{10}{7}$, $1+\frac{10}{8}$,……

這個分數之值永遠是一個1再加一個分數,但是這個分數,分子永遠是10,分母卻是越來越大。當着分母變成無窮大的時候,這個分數就要變成零,那麼y/x就要變成1了!」

「這倒是件怪事。可是如果x比y呢?」

「x比y和y比x彼此還是倒數。因爲:

$\frac{y}{x}$: $1+10$, $1+\frac{10}{2}$, $1+\frac{10}{3}$, $1+\frac{10}{4}$, $1+\frac{10}{5}$, $1+\frac{10}{6}$, $1+\frac{10}{7}$, $1+\frac{10}{8}$,……

那麼 $\frac{x}{y}$: $\frac{1}{1+\frac{10}{1}}$, $\frac{1}{1+\frac{10}{2}}$, $\frac{1}{1+\frac{10}{3}}$, $\frac{1}{1+\frac{10}{4}}$, $\frac{1}{1+\frac{10}{5}}$, $\frac{1}{1+\frac{10}{6}}$, $\frac{1}{1+\frac{10}{7}}$, $\frac{1}{1+\frac{10}{8}}$,……

這樣一來,當着分母變成1的時候,這個分數也變成1,就和上面那個結果完全一樣了。」

「這件事情有點奇怪!讓我想想看:如果一個分數之值變成1,那不就是分子分母變成一

樣的了麼？」

「你說的很對！」

「對了！我明白了！它兩的快慢一樣！它們兩個應當是個同班！這眞是好玩極了！」

「現在再比較比較 x 和 z，那就更容易了。

x: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,………

z: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100,………

z 永遠是 x 的10倍，所以無論到什麼時候總是：

$$\frac{z}{x}=10 \quad \text{或是} \quad \frac{x}{z}=\frac{1}{10}$$

結果變成一個固定的數。

「那麼這時候應當怎麼分法呢？——如果把 z 放在高級裏行不行？」

「z 比 x 跑得快，應當是高級，可是再和 u 一比呢？——不行，和 u 一比它就不配！」

「反過來說，把 x 放在高級裏行不行呢？」

「那更不行了！本來 z 比 x 跑得快嘿！」

「這也不行，那也不行，那就只好把它們放在同年級了，——這些是同級的無窮大!」

「那麼 x 和 y 不也是同級麼?」

「當然是同級呵!可是同級和同班還不一樣!」

「那怎麼講?」

「比值變成常數的時候，是同級；比值變成1的時候，是同班。」

「1不也是個常數嗎?」

「1雖然是常數；然而常數卻不一定是1。這就是說：同班就是同年級，然而同年級卻不一定是同班!」

「這倒和我們的學校完全符合了!想不到火車一動，就會使我們想出了這麼多的玩意。」

第八站　大和小的賽跑（下）

「我們的火車這一站跑得太遠了，怎麼還不到站呢？——你是不是有點餓了？」

「不；我還在想那些問題。你說無窮大和無窮大比較，有高級的，有低級的，有同級的，還有同班的。然而無窮大到底並不是些人，它們都是些數，能跑能變的數。我們能說高級的變數，低級的變數，同級的變數；可是要說同班的變數，——這個名詞有點不像話！」

「好極，你的提議我附議。論說如果一個分數之値變成1的時候，我們應該說分子分母相等。這就像是數學裏的行話了。」

「是嗎？那麼x和y就是兩個相等的無窮大了？」

「是的，我們可以說它相等。」

「別慌，我還得想想看：

x: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,………

y: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,………

可是x永遠比y少10，我們能夠說它相等嗎？而且照這樣看來，x是從1開始，y是從11開始，y不就是x的一部分麼？」

「你想得很對，可是你的看法錯了！」

「這是什麼意思呢？」

「你從這些固定的接連數值來看，x是比y少10，y也的確只是x的一部分。可是你忘記它們都是變數了，它們是在賽跑。你看兩個人賽跑的時候，你不能着重開始，你應當注意結果！現在這些數都要跑到無限遠，當然這個結果看不到，可是你應當注意這個跑的過程。

「x和y雖然永遠相差是10，然而當着它們倆都變成無窮大的時候，這點差數就不算什麼了！

「譬如平常我們到鋪子裏去買東西，掌櫃的把算盤一撥，三一三十一，三下五除二，算得那麼仔細，一共十萬零五百。那麼你付給他多少錢呢？」

「當然給他十萬了，這個年頭三百五百的還算錢麼？」

「是的，你這樣想，我也這樣想，掌櫃的也這樣想。這樣一來，你就省下了五百。

「第二天你又去買東西，這一次卻只買了一千塊錢的東西。那麼你再叫他讓五百他幹不

幹？」

「那大概就不行了！」

「豈但是大概，那簡直就是不行！如果你不給他這五百，那可就要找麻煩。

「爲什麼呢？因爲我們對於差誤有兩種看法，簡單一點，看差數的本身；仔細一點，就要比較原數。現在這兩次買賣雖然都是相差五百塊錢，可是如果和原數比較，第一次相差不到十萬分之五百，約合二百分之一；可是第二次相差卻是一半，二分之一。你想，如果不給他這五百，那不就和白送一樣麼？

「這兩種差數，一個是絕對的差，一個是相對的差。——平常所謂『差一差二不算差，』那只是相對的差；如果就絕對的差來說，那就不行了！

「還有，我們說『差一點，』這句話肯定，應當是一個絕對的差；要是說『差個一星半點的，』那就有點相對的意味了。這兩個意義彼此不同。」

「這一扯可就又扯遠了！」

「不；我們還是扯到本題。假如兩個變數都是無窮大，能夠變到要多大就多大，那麼即便差個常數，也算不了什麼，——因爲這個常數，就無窮大看來，那簡直提不到話下。因此，我們就可以

說它們相等。」

「然而這和平常的數不一樣了！」

「當然不一樣！一個變，一個不變，變的能和不變的一樣麼？」

「這不就是說，一個數的一部分能夠等於它的全體嗎？」

「對了！——可是只有無窮的時候纔有這個性質，不是無窮的時候就不行。所以什麼是無窮呢？要是一部分能夠等於全體，這就是無窮；無窮就是數不清的意思——不是數不清，是數不淨，數不盡，數不完，數不到頭，——呵？我又說錯了，是數不到尾！頭是頭，尾是尾，你明白這個意思嗎？」

「明白倒明白，可是我不知研究這個有什麼用？難道你眞要辦一個無窮大的學校嗎？」

「不用當然是有用。譬如說，馬爾薩斯的人口論曾經說過食糧的增加彷彿是這樣的變數：

n: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ……

而人口的增加卻又好像這樣的變數：

N: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ……

這兩個都是越變越大，都是無窮大！然而相等嗎？」

「當然不等。」

「那麼誰快誰慢？」

「當然是N快了！」

「這就是說，N是高級的無窮大，n是低級的無窮大，因此將來的食糧就要成問題。不管他的根據對不對合理不合理，可是在事實上，對於無窮大的分級，並不是沒有用處的。」

「你看，——火車又要拐彎了！」

「是嗎？——那麼我們的話也要拐彎了！……怎麼，你笑？」

「我笑你的話也沒頭，——不，不是，我也說錯了，你的話老是沒有尾！所以我說，你，——你就是一個變數！」

「不管變不變，反正咱們說的是個理！」

「裏？——什麼裏？有裏就有外，有高就有矮，有長就有短，有大就有小，有無窮大就有無窮小，……」

「得啦得啦，再說你也就變成一個變數了！——說曹操就來了曹操，說無窮小就來了無窮小。無窮小來了，我們也要分級。」

「怎麼，無窮小也要分級？」

「是的，我們可不能厚此薄彼，我們要一視同仁。」

「那麼無窮小又是怎麼分法？」

「還是讓它們跑，誰先跑得快，誰就是高級的無窮小，誰要跑得慢，誰就是低級的無窮小。」

「這不是和無窮大的分級一樣了麼？」

「編級試驗是一樣的，可是那個跑法卻不一樣。凡是無窮大都是越跑越有勁，越跑越快；然而所有的無窮小卻是越跑越洩氣，越跑越跑不動。爲什麼呢？因爲無窮大跑起來，是無窮無限，要多遠就多遠；無窮小跑起來，無窮而有限，跑着跑着就跑不動了！」

「那眞是太沒出息了！」

「不管有出息沒出息，既然來了我們就得收容。雖然越跑越跑不動，可是也能夠比較出個快慢來。」

「那麼這些無窮小找誰呢？」

「不必多費事了，因爲我們已經知道，無窮大和無窮小是親戚，一個帶着一個。只要 x 是個無窮大，那麼 $\frac{1}{x}$ 就是一個無窮小；它們兩個互爲倒數。無窮小倒過來就是無窮大，無窮大倒

過來就是無窮小。這是一對難兄難弟。」

「那倒很方便！」

「所以要找無窮小那就不必另外找，只要把上面那些 x y z 倒過來好了。

「可是無窮大和無窮小，兩個跑的方向剛剛相反（以前我已經告訴過你，）所以這兩個甄別試驗的判斷也就要相反了。

「譬如三個無窮小，一個是 α，一個是 β，一個是 γ，……」

「乖乖，這是些什麼玩意呵？」

「你不認得是不是？一個念ㄚㄦㄈㄚ，一個念ㄅㄟㄊㄚ，一個念ㄍㄚㄇㄚ。乍看怪別扭，一熟就順眼啦。現在我們要求 β 和 α 的比值，……」

「別慌別慌，α β γ 到底是些什麼玩意，我還不大明白。」

「剛纔不是說過了麼？α 就是 x 的倒數，

因為 x: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots\cdots$

所以 α: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \cdots\cdots$

同樣的，β是y的倒數，γ是z的倒數：

$$\beta:\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{14},\ \frac{1}{15},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{17},\ \frac{1}{18},\ \frac{1}{19},\ \frac{1}{20}\cdots\cdots$$

$$\gamma:\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{20},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{40},\ \frac{1}{50},\ \frac{1}{60},\ \frac{1}{70},\ \frac{1}{80},\ \frac{1}{90},\ \frac{1}{100}\cdots\cdots$$」

「這不就越來越小了麼？」

「當然啦，要不還是無窮小麼？——現在求β與α的比值，也是一個分數；那麼只要按照分數除分數的辦法，我們就得到：

$$\frac{\beta}{\alpha}:\ \frac{1}{11},\ \frac{2}{12},\ \frac{3}{13},\ \frac{4}{14},\ \frac{5}{15},\ \frac{6}{16},\ \frac{7}{17},\ \frac{8}{18},\ \frac{9}{19},\ \frac{10}{20}\cdots\cdots$$

那麼這個分數越變越大呢？還是越變越小？」

「讓我比比看，……原來是 $\frac{1}{11}$，現在變成 $\frac{10}{20}$，那就是 $\frac{1}{2}$ 了，——越變越大！」

「它能變成無窮大麼？」

「讓我再想一想……：雖然分子和分母同時變大，然而分子總比分母小，所以這些都是眞分數；既然是眞分數，那就——不能變成無窮大！」

「不錯。照這樣變下去，至多變成個什麼？」

「至多是個1！」

「那麼和1差多少呢？」

「讓我再比一比，一個一個的比，這個差數是：

$$1-\frac{\beta}{\alpha}:\ \frac{10}{11},\ \frac{10}{12},\ \frac{10}{13},\ \frac{10}{14},\ \frac{10}{15},\ \frac{10}{16},\ \frac{10}{17},\ \frac{10}{18},\ \frac{10}{19},\ \frac{10}{20},\ \cdots\cdots$$

分子永遠是10，分母卻是越來越大，所以——相差是個無窮小，越來越小！」

「無窮小的極限是什麼？」

「零。」

「那麼這個差數最後要變成什麼？」

「當然也是零了！」

「那就是說：$\frac{\beta}{\alpha}$和1有什麼關係？」

「越來越相等。」

「這就是說：

所以：

$$\frac{\beta}{\alpha}\longrightarrow 1$$

α和β應當怎樣分法？」

「它們是同年級！」

「對了，這是同級的無窮小；不但同級，而且還——」

「我明白啦，不但同級而且還是同班！」

「那就是說，它們不但同級而且還相等。」

「那麼讓我們再看看γ和α好麼？」

「好呵！

$$\alpha:\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{10},\cdots\cdots$$

$$\gamma:\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{20},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{40},\ \frac{1}{50},\ \frac{1}{60},\ \frac{1}{70},\ \frac{1}{80},\ \frac{1}{90},\ \frac{1}{100},\cdots\cdots$$

$$\frac{\gamma}{\alpha}:\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\cdots\cdots$$ 」

「這是什麼意思？」

「因爲α永遠是γ的10倍，所以反過來說，γ就永遠是α的$\frac{1}{10}$！」

「這不是它們兩個也是同級麼？」

「同級是同級，然而不同班——比值不能變成1！」

「這完全和無窮大的辦法一樣呵！」

「是的，單就同級說，完全一樣。不過關於高級和低級，那就剛剛相反了。

「假設x和y都是無窮大，α和β都是無窮小；那麼：

如果$\frac{y}{x}\longrightarrow 0$，那就是$x$先變成$\infty$，所以$x$是高級$y$是低級，

如果$\frac{y}{x}\longrightarrow\infty$，那就是$y$先變成$\infty$，所以$y$是高級$x$是低級；

如果$\frac{\beta}{\alpha}\longrightarrow 0$，那就是$\beta$先變成0，所以$\beta$是高級$\alpha$是低級，

如果$\frac{\beta}{\alpha}\longrightarrow\infty$，那就是$\alpha$先變成0，所以$\alpha$是高級$\beta$是低級。」

「讓我再想想，……呵，我明白了！那不過是一個道理：誰能跑得快，誰就是高級！」

「不錯不錯，老弟眞有你的。你完全明白了！——可是你知道你是怎麼明白的嗎？」

「怎麼，你又要耍什麼花腔？」

「不是耍花腔，我剛纔偷偷的作了一個小統計，前前後後你已經說了七個『想一想，』五個『比一比，』比了再想，想了再比，想過來比過去，你纔能夠明白了這個道理。」

「是嗎？我可沒有那麼細心。我只記得，你一會『這就是說，』一會『那就是說，』說來說去，一不留心差一點就要把我搞糊塗了！」

現在再看看時間，這可就快要跑到下一站了！

第九站　一個跟着一個變

嗚——嗚——嗚——火車又在叫;伸出頭去望望,這一次可眞是要到站了。我們既然不是無窮大,那可就不能老是跑下去沒有完,而且在車上坐得那麼久,也應當下來活動活動。看看錶,乾脆就在這裏下車吧;再有五分鐘還有一班回頭車回去正好還躭誤不了晚飯。

火車進站了,慢慢的停止下來。車裏邊的客人下來的雖是不少,可是從這裏上車的客人也很多,於是上的上,下的下,馬上這個車站就熱鬧起來。

火車彷彿是跑乏了,雖是停着不動,可是還在那裏不斷的喘着粗氣。也許對於這些客人在它肚子裏爬出爬進,爬得它不耐煩,所以有時候還吁——了一下。

只要這口悶氣一出,火車的心裏就鬆快多了,接着咳嗽了一下,一會又好像是在撒尿,一會彳——的一聲,又好像混身通過了一股氣兒,於是火車就又有點不大安靜了。

因爲我們並沒有別的事情而且還打算乘下一班車回去,所以我們就站在月臺上;對着眼前這一列車,倒是覺得有點留戀。

這時候，從車上上來下去的人慢慢的少了，只有站上的小販在車窗外面兜生意，這邊喊喊，那邊跑跑，希望能夠多找到一個顧主。除此之外，無論是車上車下，大家都在等候着，……有時候彼此狠狠的看了一眼，因爲知道車一開就會看不見了。

突然一聲哨響，——同時還有幾個人急急忙忙的爬上爬下，可是馬上都覺得緊張起來。靜候火車一聲叫喊，嗚——的一聲，坐着的坐穩了，站着的也站穩了，大家都以珍惜的眼光彼此告別，……

於是車慢慢的又動了。第一輛車一動，第二輛車就動，第三輛車一動，第三輛車就動，一個跟着一個動，馬上就全體都動了！

從月臺上看火車，又好像在碼頭上看船，悠悠的就走開了，——但是接着就聽到那個熟悉的聲音：

撞撞撞撞，撞撞撞撞，撞撞撞撞，……火車是越走越快，越走越遠了！

看看這個開車的情況，我又想到了一個話題。所謂這輛車一動，那輛車就跟着動，這就表明兩個變化可以有一個聯繫。——這又像那個分數，分子固定的分數，只要分母一變，分數之值就要跟着變。

像這樣，一個跟着一個變，這是一個很重要的聯繫。從這一點，我們可以找出一個因果來，從這一點，也可以看出一切變化的狀況。

為了說明的方便，我們先要起幾個名字。

一個領頭變的叫做自變數，它可以要怎麼變就怎麼變，變成什麼都可以。一個跟着人家變的叫做因變數，處處受別人的影響，受別人的牽制。這是兩個不同的變數。一個是獨斷獨行，自己支配自己；一個是服從隨和，叫它怎樣，它便怎樣。

當然它們兩個也不能分家，因為彼此比較起來，也是一個相對的關係。自變數是因變數的自變數，因變數又是自變數的因變數；這就好像說，哥哥是弟弟的哥哥，弟弟是哥哥的弟弟。

可是這個說法太麻煩，所以因變數也叫做「函數」——當然是自變數的函數。

所以：如果 y 跟着 x 變，那麼 y 就是 x 的函數。有人說，女人就是男人的函數，因為男的是少爺的時候，女的是少奶奶；男的是老爺的時候，女的是太太；男的變成老太爺，女的就變成老太太了。

可是你也不要把它們兩個看得那麼呆板，因為 y 跟着 x 變的時候，反過來說，也就是 x 跟着 y 變。譬如說：男的當了老師，女的便是師母；要是女的當了老師的時候，男的叫做什麼呢？論說，

那就應當叫他師爸爸了。可是這個稱呼有點別扭，我們只聽過有人叫乾爹乾爸爸，卻沒有聽過師爹師爸爸。其實這只是一個習慣，事實上不叫師爹也得叫老師，雖然我們並不跟他上學。其實，如果比照師母的稱呼，我們叫他師公，倒也滿好；師公師母不就是公母倆麼？現在我們所稱的公雞母雞，在以前就叫做雞公雞母，可見這也並不是一個新名詞。

假設女的作了縣長，那麼對於這位女縣長的先生應當怎麼稱呼？這可就更麻煩了！叫他縣長老爺，不行；縣長先生，也不行；縣長跟班的，那更不行了！到底應當叫什麼，我們暫且不管他，可是總不能不尊稱他一點，——縣長的先生麼！如果你覺得應當高看他一眼，那麼男人就又變成女人的函數了。

女人是男人的函數，男人也是女人的函數；然而這兩個函數卻有一點不同，自變數和因變數倒過來了。這個的自變數是那個的因變數，這個的因變數又成了那個的自變數，所以我們說這兩個函數彼此相反。如果 y 是 x 的函數，那麼 x 就是 y 的反函數。

再舉一個例。譬如說，現在這個年頭，物價一天比一天高因此物價就是一個變數。物價漲了，想不出好辦法，便只好多發票子，所以票子就是物價的函數。——可是票子越發越多，越多越不值錢，越不值錢物價就要更漲，結果物價又成了票子的函數。

物價和票子一賽跑，這一跑可就把我們跑苦了。小報上的標題說：「物價與大票齊飛，人民共小菜一色」——這個例子有點太慘！慘是慘，可是事實，而且論物價就要計算物價指數，說票子就要質問發行額，這完全是個數字的問題，卻沒有越出我們所講的範圍。因爲我們講的都是些變數，所以上面那個男女函數，不過是個比喻，這個物價和鈔票的關係纔眞正是一個算例。

同時，由於通貨膨脹的結果，不僅刺激物價，而且擾亂社會，影響民生；所以生活指數也是票子的一個函數。要想具體的指出這個因果的關係，那麼我們就需要調查統計，然後列表，畫曲線，找算式。所以關於函數的表示就有三種不同的辦法。

隨便一個數字對照表，隨便一個任意曲線，都可以表示一個函數的關係；然而一個函數卻不一定非要化成算式不可，這倒是一個重要之點。

不過我們爲了說明的方便，還是先從算式開始。例如：

$$y=10x$$

y永遠是x的10倍。x是零，y也是零；x是1，y是10；x是2，y是20；x是3，y是30；……所以y是x的函數。反過來講，

$$x=\frac{y}{10}$$

y是零，x還是零；y是1，x是$\frac{1}{10}$；y是2，x是$\frac{2}{10}$；y是3，x是$\frac{3}{10}$；……所以x也是y的函數，——然而這就是上面那個函數的反函數。

如果從因果上來講，自變數就是因，函數就是果。同一結果不見得只有一個原因，所以一個函數也可以同時是許多變數的函數。反過來說，同一原因也不見得只有一個結果，所以一個變數也可以有許多的函數。

代表一個函數的算式可以是一個代數式，——這裏面僅有加，減，乘，除，乘方和開方——這就是一個代數函數；有時候也許是一個三角算式，對數算式，那就是一個超越函數了。

假設把這個函數的變化看成一個運動，按照我們以前所講的，有連續的運動和不連續的運動，所以函數也有連續的函數和不連續的函數。

怎麼，你又不說話了？聽着有點煩是不是？那麼我們一塊到附近去散散步。

我走你也走，你就是我的函數，我在前邊，你在後邊，我先走了一步。咱倆一個步伐，一二一，一二一；這樣一來，我走了x步，你走了y步。因爲你比我少走一步，所以

$$y=x-1$$

這就是一個代數函數。回頭再來個向後轉——走，那就變成你在前邊我在後邊，這時候我跟着

你走，所以我又成了你的函數，而且我落後了一步。如果論距離，以剛纔的出發點為標準，就變成：

$$x=y+1$$

這還是一個代數函數，卻是上面那個函數的反函數。

現在我就又想起了那個速度。在運動的時候，時間越久，跑的越遠，所以距離就是時間的函數。假設 s 代表距離，t 代表時間，f 後邊帶個括號代表函數，那就是：

$$s=f(t)$$

如果Δ（念ㄉㄝㄦㄊㄚ）代表「很小很小的」，

因為 $s\div t=\frac{s}{t}=$ 平均速度，

所以 $\Delta s\div\Delta t=\frac{\Delta s}{\Delta t}=$ 瞬速，

而且當着 $\Delta t\longrightarrow 0$ 的時候，

$\frac{\Delta s}{\Delta t}\longrightarrow$ 眞正速度，

這就是對於眞正速度的一個數學的表示。

然而時間近於零的時候，距離也要近於零，所以 Δs 和 Δt 都是無窮小，——不但是無窮小，而

且多半還是同級的無窮小；這個分數的極限，就是那個眞正速度的數值。平常我們把這個極限寫成 $\frac{ds}{dt}$，所以：

$$\text{當着 } \Delta t \longrightarrow 0, \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} \longrightarrow \frac{ds}{dt} = \text{眞正速度}$$

這樣一來，我們就完全用記號來表示了，這就是數學研究的一個方法。其實這裏面並沒有什麼新的意義，僅只是把我們說的話，寫的字，統統換了一些記號。假設你把這些記號的意義都搞清楚，那麼看算式就和看書聽演講一樣的方便，一樣的自然！

同樣的，假設用 u 代表變量，一個變化的量，（譬如放風箏的線長，水面上圓圈的面積，以及任何物體的體積，那就是變動的線，變動的面，變動的體；以及溫度，壓力，反射，摩擦，聲音的高低，光亮的強弱，電流的快慢，磁性的大小，振幅的寬窄，密度的厚薄，質量的大小，以及什麼的什麼，）只要是時間的函數，我們都可以求出它的 $\frac{\Delta u}{\Delta t}$；而且——

$$\text{當着 } \Delta t \longrightarrow 0, \quad \frac{\Delta u}{t} \longrightarrow \frac{du}{dt} = \text{眞正變速}$$

現在把上面這兩個算例對照起來，又可以統一成下面這一個形式：

如果 $y=f(x)$，那麼當着 $\Delta x \longrightarrow 0$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \dfrac{dy}{dx}$

末了這個記號再翻譯成語言文字，就叫做「微商」「微係數」「微紀數」「微變率」「微變速」「誘導函數」「導來式」「導來微變速」……

說到這裏你可就忍不住了：「什麼 do re mi fa so，你說的是人話還是鬼話？」

不錯，這是個不中不西的名詞，英文叫做 derivative，有人喜歡譯音，有人喜歡譯義，有人又要音義兼顧，於是譯來譯去，就變成了這麼多的不三不四的名，結果哪一個也沒有確定。

話又說囘來了，咱們還要囘去是不是？五分鐘到了，咱們還得上車。

第十站 Do Re Mi

當着我們再上火車的時候，可就往回裏跑了。就我們的家鄉來說，原來是越走越遠，現在是越走越近。剛纔我們都是無窮大，現在就又變成無窮小了。

跑着跑着我們就又想起了那個 do re mi, derivative; 微，微——微什麽來？

微變速，微係數，導來式！那就是：

$$y=f(x) \text{ 的 } \frac{dy}{dx}$$

這是一個極限值，一個極限值的記號。可是也可以看成一個分數；因爲：

$$\text{當着 } \Delta x\longrightarrow 0 \text{ 的時候，} \frac{\Delta y}{\Delta x}\longrightarrow\frac{dy}{dx}$$

所以dy就是一個很小很小的Δy，dx就是一個很小很小的Δx，同時Δx和Δy又叫做x和y的微分；

所以 $\frac{dy}{dx}$ 也可以叫做函數的微分比。

有了這個微分比，我們的本領可就大得多了！有了它，我們就可以算出一切變量的眞正變

速，有了它，我們就可以求出一切曲線的正確方向。——你不要小看這兩句話，所謂一切，便包括了各種各類的變量，各式各樣的曲線。這個一，實在就是含有百千萬個的種類在裏邊！

如果你要想知道一點實際的應用，那我也不難隨便指出幾個簡單的問題。不過首先我們還要對於那個微，微，微什麼來？——微分比，再加一研究。

所謂 y 是 x 的函數的時候，y 對於 x 就有個微分比；要想求這個微分比的時候，當然先要知道這個函數。

y 是跟着 x 變的，說不定 y 的微分比也是跟着 x 變；那就是說：y 是 x 的函數，可能 y 的微分比還是 x 的函數。

如果這樣的時候，那麼我們又可以求出微分比的微分比，以及微分比的微分比的微分比。像這樣，多微分一次，便可以多得到一個微分比。因此這些微分比，我們就叫做第一微分比，第二微分比，以及第多少多少微分比。不過照這樣一次一次的微分下去，結果不是一個常數就是零，所以這個微分的手續倒不是無限的。——然而有時候，卻也不一定。

這些微分比也有固定的記號譬如：

$y=f(x)$，$\frac{dy}{dx}$ 是第一微分比；

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2},$$ 第二微分比；

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]=\frac{d^3y}{dx^3},$$ 第三微分比。

我們曾經說過，在運動裏，距離是時間的函數，距離對於時間的微分比就是速度。那麼速度對於時間的微分比是什麼呢？——我們知道：每一個單位時間所增加的距離是速度，那麼每一個單位時間所增加的速度是什麼呢？

那就是加速度！用記號來表示：

$$s=f(t),\quad \frac{ds}{dt}=\text{速度},$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\text{加速度};$$

同樣的 $u=f(t)$, $\frac{du}{dt}=$變速，

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\text{變加速度}。$$

譬如說，我們在太陽底下走路，地下就會有個影，你走影也走，速度當然一樣。假如你是背着

太陽，對着一道牆走，這樣走着走着，你的影子就會先到了牆根；再往前走，影子沒處去了，它就要爬牆。這時候你的影子成了兩半截，一部分在地下，一部分在牆上。人往前走，影子向上爬，這時候兩個速度就不一樣了！可是只要知道人的速度，我們就可以求出影子的速度。

假設我們有一個水車井，套上一匹小驢，在井臺上轉圈。驢一轉，水車上的輪子就要轉；輪子一轉，那一串十五個小水斗子就要七上八下。驢轉的快，水斗子上來的也快；驢轉的慢，水斗子上來的也慢；驢要是提出了抗議，水斗子就要跟着罷工。因此，根據驢的速度又可以求出水桶的速度。不過因為驢轉的是圈，所以這個算題裏就要用着角速度。

像這一類關於速度的算題，我們就得用微分比。

同時微分比又可以表示出一個曲線的方向。所以要想知道一個曲線的形狀，哪裏往上？哪裏往下？哪裏變上去？哪裏變下來？哪裏變的利害？哪裏變的差？哪裏平？哪裏陡？哪裏坡？哪裏轉彎？哪裏拐彎？哪裏平？哪裏尖？哪裏連續？哪裏斷了？……這一切問題都需要微分比纔能解決！

還有借重微分比，我們又可以斷定極大和極小的問題。

說到這裏你又該問了：

「極大是不是最大？」

「是最大！」

「極小是不是最小？」

「是最小！」

「然而最大不是沒有麼？最小不就是零麼？」

你的質問的確不錯！可是極大極小卻另外還有個解釋，那就是相對的極大和相對的極小。

假設沒有限制的話，當然沒有極大；可是如果有限制的話，那就有極大了！假設沒有限制的話，極小是個零，假設有限制的話，那就不一定還是零了！

譬如就你的同班說：有沒有最高的？有！有沒有最矮的？有！是不是零？不是！單拿一本字帖來說：有沒有頂大的字？有！有沒有頂小的字？有！是不是零？不是！就你手裏的一把線來說：有沒有極長的？有！有沒有極短的？有！是不是零？不是！

好啦，這些最高，頂大，極長，是什麼？是比較着最高，比較着頂大，比較着極長。這些最矮，頂小，極短，是什麼？也是比較着最矮，比較着頂小，比較着極短。所以相對的極大就是比較着極大，相對的極小就是比較着極小。一有限制，就出來了極大極小的問題。

假如我們要搭起一個圓帳篷，那就好像撐起一把紙傘。我們問：什麼時候這個帳篷裏容的

人最多？那就是問：什麼時候一個圓錐體的容積最大？就拿紙傘來說吧，沒有撐開的時候，容積是零，最小；撐開以後，容積慢慢的變大了；可是等到把傘撐平了的時候，那就變成一張荷葉了，容積呢，又沒有了，還是零，還是最小。那麼這中間就該有一個容積最大的時候。

這個容積與什麼有關係？和那個傘頂上的角度有關係，容積是那個角度的函數！要解決這個問題，就要先求微分比。

再說一個最簡單的事實。假設我們用繩子圍起一個長方形來，我們問，怎樣圍法纔能夠使它的面積最大？這根繩長當然是一定的，拉得太長，它就太窄；拉得太寬，它就太短，都不是最大。那麼什麼時候最大呢？三拉兩拉就拉出來了，正方形！不錯，正方形最大。

你怎麼知道的？想的。有理由嗎？說不大詳細。可是用微分比就能夠正確的計算出來！

再說一個例。我們要按一盞電燈，譬如說在戲院的牆上，為的要把光線集中在舞臺的中間。舞臺和牆的距離當然是一定的，那麼應當按在哪裏？物理的實驗告訴我們，照明的亮度和光線的斜角有關係，同時和距離也有關係。按的過高了不行，過低了也不行。用微分比就可以求出來，離地的高度應當是和舞臺距離的 $\frac{7}{10}$。

以上都是關於極大的問題。

譬如現在我們這輛火車是正東正西的走，另外還有一輛火車是正南正北的走，同時從無限遠來，到無限遠去，一塊開車，卻不是一個速度。假如一樣快慢的話，當然同時走到十字路口，就會碰了車。現在既是快慢不一樣，那就不必顧慮了。原來兩輛車相距無窮遠，結果兩輛車還是無窮遠，這中間就要有個最近的時候，那就是一個求距離最小的問題。

再說一個最簡單的問題，和上面已經講過的那個問題相彷彿，還是用一根繩子圍起一個長方形來。假設這個長方形的面積是一定的，那麼怎樣圍法可以用的繩子最短？讓我們想想看！假設擠得太窄了就要變長，擠得太短了又要變寬。擠來擠去，還是擠出一個正方形來，——對了，正方形用的繩子最短。不信你就試試看！

再說一個例，譬如我們開個食品店，要做罐頭。你知道罐頭是個什麼形狀麼？圓的；不錯，可不是個圓圈，那是圓柱。裏面的容積當然是一定的，高矮粗細那就隨你的便。隨便是隨便，可是我們不能不打打算盤！要想省錢那就要用的材料最少，要想材料少就得表面積最小！我們想想應該怎樣決定？如果底小了，那就得高，高；底越小，罐頭越高，算起來不經濟。那麼讓它矮一點吧，一矮，底可就要大了，也不經濟。那麼怎麼辦？用微分比可以算出來，最經濟的辦法，是高等於底的直徑。

同樣的，你也可以設計一個煤油筒，汽油筒；不論什麼筒，那不過是一個正直的方柱體。假設

這個方柱體的容積也是一定的，那麼什麼樣子作起來最省錢呢？想，——想不如算，一算就算出來了，應當是一個長寬高都相等的正立方體。

然而常見的煤油筒卻不是這樣的，那是一個近於二倍的正立方體。難道賣油的老板沒有打好算盤麼？其實不然。因為筒皮比煤油便宜的多，所以他樂得把筒作得順眼好看，而且提起來方便。這樣一來，筒的形狀就變成了廣告術。只要煤油推銷得好，還不是情吃坐穿，一樣的發財麼？

這叫做「小處不算大處算，」賣油的老板可比我們的心眼活動得多。

說到這裏，我們就要發生感慨了！我們的研究不過是找真理，找出真理來就能夠增加智識，智識增加了就可以利用自然來增進人類的幸福。——然而如果這個智識傳授給那些自私自利的人，他就要借此想法發財，——發財倒不要緊，有時候他還要借刀來殺人！

一顆原子彈可以提早結束反侵略的戰爭，同時一顆原子彈也可以變成侵略者的護身佛！如今研究科學的人也要活動活動心眼了，我們應該利用科學的智識來增加大家的幸福，提高大家的生活，我們應該防止違反這個信念的個人操縱以及國家操縱！

一個人不能老是那麼死啃，我們應當四面八方注意得遠一點！——你瞧，你瞧，那座塔！我們的火車又要拐彎了！

第十一站　一切都是時間的函數

剛纔我們看見那個塔，現在又看見那個塔。是不是一個塔呢？當然是一個塔！是不是一個地方呢？當然是一個地方！

可是末了這一句話就有毛病！

果眞還是那一個地方嗎？那要看對誰說！以地球爲標準，還是那一個地方；以大自然界的天空說，那就不是原來的那個地方了！不但地球轉了一個角度，而且地球還挪了一個位置，那麼我們還能說是原來的位置嗎？

變了，變了，什麼都變了！一切都變了！

這也是一個變數。

那麼這個變數的自變數是什麼呢？

是時間！時間是 time！是 t！

一切都是時間的函數，一切都是 t 的函數！

就宇宙來說，時間變了，一切都變了，宇宙是時間的函數！

就人生說，時間變了，一切都變了，人生也是時間的函數！

整個人類的活動是時間的函數，一個國家，或是一個個人的活動，也是時間的函數。

打開一部歷史來看，人類活動的地域並沒有變，人類活動的事實變了，不同的時間就有不同的活動。

時間進展了，人類進化了，隨着時間的增加而人類的智慧也增加了，這一種函數叫做昇函數。

但是達爾文的進化論說：「物競天擇，適者生存；」在這個時間的進展裏，同時又有多少的生物都被淘汰了。這些隨着時間的增加反而減少的現象，這就是一個降函數。

單昇不降，或是單降不昇，那就叫做單調函數。但是平常多半是忽昇忽降，忽降忽昇；於是從昇到降，或是從降到昇，那就必然有一個轉變點。

現在我們這輛火車要轉彎了，你瞧，你瞧，就是這裏，這裏，這一點，——說着說着就拐過來了，那就是一個轉彎點。

這一轉，就轉出了一個彎，你看，剛纔我們走過的鐵軌就在那邊呢！要是直着的話，你在車窗

裏就不容易看到了，因為它在我們的後邊。現在，卻是在我們的旁邊。

彎有幾種彎法？讓我們想想！——把它畫在紙上，像一個凵，這就是向上彎；像一個冂，這就是向下彎，

畫曲線也有個規定，按照習慣，我們是自左而右。所以乙，心，都是向上彎；刀，乃，都是向下彎。u，v，都是向上彎；m，n，都是向下彎。

但是彎和彎還不一樣！有的彎得圓滑，有的彎得突然。譬如向下彎的人，向上彎的V，這些彎都是尖的，那麼彎點就變成一個尖點了。

有時候這個彎點也許跑到無限遠，好像一個儿字，於是這個曲線就斷了。斷，就是不連續。同時，一個曲線又不見得永遠往上彎，或是永遠往下彎；常常會彎上去再彎下來，彎下來又彎上去。譬如去了點的之字，倒插筆的s，一個是先向下彎再向上彎，一個是先向上彎再向下彎。——於是就有一個拐彎點。

像這些曲線的性質都與微分比有關係。因為曲線也是函數的一種表示，所以知道了函數就可以畫出圖形來。即便不把曲線畫出來，我們也可以用函數的微分比，看出它的形式，並且知道有幾個轉彎點，幾個拐彎點，哪裏向上彎，哪裏向下彎。

平常我們說，一個人好走直線，一個人好走曲線，那就是表示他的生活態度不一樣。

不但每一個人的生活態度不一樣，同時每一個人的生活遭遇也不一樣！

譬如說，一個人的生活，越來越好，這就是一個昇函數；一個人的生活，越來越壞，這就是一個降函數。假設一個人，從好的生活變壞了，或是從壞的生活變好了，這就是一個運氣。從好變壞或是從壞變好，算卦的瞎子叫做轉運，這一轉運，——就是我們說的那個轉彎點。

同時運氣也有變化。從好運可以變成壞運，從壞運也可以變成好運，——這是什麼？這就是命！

從壞運變成好運，這是好命；從好運變成壞運，這就是壞命。好命壞命，也叫做大命小命；命論大小，那倒眞像一個數學名詞了。

命是不是也有變化呢？迷信的說法，命不能變化，所謂命定，就是表示命是一個固定的常數。

但是我們認爲命也能夠變化，那全看我們自己能不能上進！如果能上進，壞命就可以變成好命；不能上進，好命也可以變成壞命。

命既然能夠變化，那麼從好變壞，或是從壞變好，又要經過一個轉命點，——這就是那個拐彎點了。

談運，說命，似乎是迷信；其實運就是一個機會，命就是一個遭遇。就一個短時間來說，是運；就一個長時期來說，就是命。一個人的命運不但看四週的環境，而且還要憑自己的支配。假使我們能夠支配環境，我們就能夠變更命運；假使不能夠支配環境，那可就只好聽天由命了！這樣解釋起來，一點也不迷信。

爲什麼好好的又忽然講起命運來？這個原因很簡單，那不過是因爲人生也是時間的函數；時間變了，人生也要變了！

同時時間的變化是連續的，人生的變化也是連續的。雖然鐘錶告訴我們，現在是一點，兩點，三點，一分，兩分，三分；可是時間卻不是在那裏跳，從一點跳到兩點，它是在那裏流，從第一分鐘流到第二分鐘。人也不是從嬰兒一蹦就蹦成了兒童，從兒童一蹦就蹦成了大人；他也是在那裏不斷的變，變，變，兒童變成了大人，大人又變成了老頭。所以不但人生是時間的函數，而且還是一個連續的函數。

但是「時乎，時乎，不再來！」時間又永遠是一個昇函數。這對於人生是一個最大的威脅。所謂人生最大的悲劇，也就是因爲時間的變化不循環，滑過去就滑不回來。

也許你對於這個循環的字樣要挑眼，因爲你想到了「一年容易又春風；」所謂春夏秋冬，

一年四季，不就是循環的麼？其實這個變化就和我們的地球一樣，雖然是轉圈，然而還往前跑！昨天的這個地方和今天的這個地方不同，去年的春天和今年的春天也不一樣。所謂週而復始，那只是表明季節是週期的，然而時間不循環！

函數也有週期的函數；可是人生和時間，既不是週期的，同時也不循環。或者更正確的說，從形式上膚淺的看，人生也許像是週期的，譬如吃了睡，睡了吃，然而實際上卻不是週期的，譬如以今日之我就可以攻擊昨日之我。爲什麼呢？因爲——變了！

而且時間這個自變數，對於人生的影響又太大，一切文學作品，一大部分都是對於時間的感慨！

曹操的短歌行：——

對酒當歌，人生幾何？
譬如朝露，去日苦多！

李白的將進酒：——

君不見黃河之水天上來，奔流到海不復回；
君不見高堂明鏡悲白髮，朝如青絲暮成雪！

春夜宴桃李園序：——

夫天地者萬物之逆旅，光陰者百代之過客。而浮生若夢，爲歡幾何？

蘇東坡的前赤壁賦：——

哀吾生之須臾，
羨長江之無窮。

和尚念的焰口經：——

將軍戰馬今何在？
野草閑花遍地愁。

即便在近代，我們也不難找出朱自清先生的一首短詩，僅存的：——

髮上依稀的殘香裏，
我看見渺茫的昨日的影子——
遠了，遠了。

但是最沈痛的還是雪萊 P. B. Shelley 的哀歌 Lament：——

O World! O Life! O Time!

Of whose last steps I climb,
Trembling at that where I had stood before;
When will return the glory of your prime?
No more,—oh, never more!

Out of the day and night
A joy has taken flight,
Fresh spring, and summer, and winter hoar,
Move my faint heart with grief, but with delight,
No more,—oh, never more!

這一切，——都不過是說：人生是時間的函數；時間變了，人生也變了！

既然人生是時間的函數，那麼是不是也可以求出它的微分比呢？

是的，可以求！如果能夠求出它的微分比，那麼任何時間，任何時刻的變化就都可以求出來了！這倒是眞正能夠細批流年，評定終身，吉凶禍福，未卜先知，可以擺個算卦攤了。

可惜，我們不知道這個函數的算式！而且也不可能化爲一個算式，因爲除去時間而外，還有許多許多的自變數，例如個人的環境，經濟的狀況，時事的趨勢，思想的變遷，生理和心理的條件，精神和物質的配合……以及什麼的什麼，還有許多的許多。

我們說，人生是時間的函數，這不過是從形式上取決於這個自變數。而且，如果按照這個看法，那麼不但是人生，卽便世間的一切，統統都是時間的函數！

這個時間的變化，時間的流，就好像車窗外邊的那些景物，流，流，流，永遠的流，不斷的流，——那眞是「奔流到海不復回」了！

怎麼，你又沈悶起來？——走，咱們到飯車上去吃點什麼。

第十二站　用算式來描寫這世界

現在我們坐在飯車裏，這兒有舒服的沙發。桌子上鋪着白布，擺着一個玻璃花瓶，裏邊插着青枝綠葉的一束鮮花；紅的那麼嬌豔，像是在發光。我們喝着甜牛奶，眼睛望着車窗外的那一幅流動的畫片，——於是什麼心事也沒有了！忘掉了你和我，忘掉了這火車。彷彿我們就是火車，火車就是我們；眼睛望着這世界。

可是，就是對於這同一個自然界，人人卻可以有種種不同的看法，和種種不同的印象。在一個畫家的眼裏，看到那些紅的，綠的，黃的，白的，一片片的顏色。一個音樂家的耳朵，卻又辨別出各種不同聲音的高低，因為在他的心裏那只是一隻交響的旋律。

譬如就拿這一列車來說，在各個車廂裏都坐滿了不同的客人。有人從鐵道的壓榨上引起了對於世間一切不平的憤慨；有人就會為了眼前的這些變動覺得發暈；又有人顯然是在奔波的道路上，表現得異常疲乏。

一個經濟學者，也許正在從火車的迴轉上，考慮到物資的交流和供應的狀況；一個詩人正

在推敲如何用那生動的字眼，去描寫這旅途上的寂寞——可是在我們的心裏注意的，卻是動力，速度，加速度，位移，方向，一切形狀，和物理的性質。

我們也要描寫這世界，然而不是詞句，不是色彩，也不是音調。我們的作品，乃是一行一行的數目，一列一列的算式。

譬如這桌面，這車窗，那個車門，以及車廂上貼的標語；我們不管它們的作用和意義，我們眼裏注意的卻是一個長方形或是正方形。

這些碟子，盤子，茶杯的口，花瓶的底，不管它的成分，它的用途，它的構造，或是它的年代，——我們只注意一個形式，一個相似的形式，圓或是橢圓。

提到方，也許就有人聯想到方正，規矩，整齊，穩定，四平八穩；提到圓，也許有人想到圓滑，圓滿，團圓，——一個順利的發展和毫無缺陷的結束。

但是在我們感到興趣的，乃是四邊相等，四個角都是直角；以及圓周到圓心的距離處處相等。

然而這僅只是一個靜止的看法，我們另外還有一個運動的觀點。

假設有一個人，站在操場上，現在讓他立定，站好，向前五步走；然後向左轉，五步走；再向左轉，

五步走；再向左轉，五步走，——結果就又回到了原來的地方。

像這樣，他走，走，走了一個什麼樣的路線呢？

正方形！

假設在地面上按起一個木樁，聯上一根繩子，拴上一匹小驢。讓我們來個鞭打小驢！

驢一被打，當然要跑；照直的跑。——然而繩子拴着它，跑不動；那就只好轉，轉，轉圈。這一轉就又轉出了一個圓。

還是按照我們那個看法，把人，把小驢，都看成一個點，一個動點。那麼這些動點的路線便是方，和圓。——用一個數學的名詞，就叫動點的軌跡。

火車在地面上跑，每一個車輪都是一個動點，然而這些動點只能在車軌上移動。如果不是火車，而是一輛腳踏車，或是一部汽車，那就可以隨便的跑。這些動點的軌跡就不一定還是直的或是圓的了，它可能是一個任意曲線！

這就是從圖形的發展到完成的過程上，來看出它們變化的狀況。假設你想到描紅，摹帖，或是更確切一點，描花，縫線，——這都是同一個過程。有時候，也許你可以在銀幕上看到一個白點，在那裏伸長，伸長，轉來轉去就轉成了一個字。這都是軌跡的一些具體的例。

當然這些軌跡，彼此還有一個區別。一種是密集的孤點，一種是接連不斷的連線。我曾經告訴過你，用數學的形容詞，那就是說，一種是連續的，一種是不連續的。同時所謂密集和連續，它們彼此既是不同，所以我們也就不能混爲一談。

又如，——你看，那邊是一個鄉村，有樹，有屋，有河，有橋，彷彿是一套模型。那麼小，小得怪有趣的！但是我們注意的，卻不是「枯藤，老樹，昏鴉，小橋，流水，人家。」我們眼裏分辨出，那都是一些幾何的圖形。一棵樹，彷彿是一個細長的圓柱上頂着一個正圓錐體；一座屋，就是一個三稜錐體躺在一個橫的立方體上；一個橋，從旁看來是一個折線，或是一段圓弧；一道河，那就是一條窄的曲面。

同時，一個體的界限是面，一個面的界限是線，一個線的界限是點，這是一個靜止的看法；反過來說，一個動點的軌跡是線，一個動線的軌跡是體，這就又換成一個運動的觀點了。

所以在我們看起來，這世間的一切，都不過是構成於點，——點應該是一個基本原素。同時世間的一切現象，都不過是發源於運動，——動，又是一切現象的基本原因。因此一個動點的軌跡，應當是我們最重要的課題。

這個軌跡，當然可以千萬變化，——然而描寫出來，卻不外是一個函數的表式。這個函數可

以表明它的種種形式和種種性質。假設這個函數可以化爲算式，那麼我們看一個算式和看一個曲線，同樣的親切而有趣味。

不僅是一個圖形，即便一個觀念，一個現象，一件事實，我們也可以利用一個算式去描寫。例如力量就是一個抽象的觀念。要想描寫這個觀念，那就要說明它的具體的現象爲什麼一個靜止的物體會運動起來？爲什麼一個運動的物體又會靜止下去？爲什麼一個動得慢的會變快了？——這不過都是受了一個力量的影響。

一個力量可以引起一個物體的速度的變化，所以我們就用物體的質量和它的加速度來規定這個力量的大小。因此一個單位的質量去乘一個單位的加速度，就叫做一個單位的力量。——然後關於力量的大小纔能夠有一個具體的表示。

譬如建築一條公路，要想描寫這條公路效能的大小，那就要看它在每一個單位時間裏可以走過多少車輛。然而車輛經過的多少，又要看車身的長短和車開的速度。車跑得快了，當然走過的車輛多；然而車身過長了，走過的車輛反要減少。假設一列火車，連頭帶尾一共十輛，而每一輛車的身長相當於三部汽車。當着一列火車通過的時候，汽車卻可以走過三十部。所以要想表示這條公路的效能，就不能疏忽這些汽車的長短。

但是一列汽車跑起來，究竟還不能和一列火車相比，因為一列火車是一輛一輛的用掛鉤掛起來的；然而一列汽車卻是一部一部的單跑。所以兩部汽車跑起來的時候，前後必需要保持一個相當的距離，否則就會容易發生危險。過遠了固然不經濟，過近了就會——碰車。為了這個原因，所以計算實在能夠通過的車輛，不僅要顧及車長，而且還要顧及兩車之間的距離，就是從第一輛車尾到第二輛車頭的間隔。

知道了這些事實，我們就可以把這條公路的效能具體的用算式來表示，這個效能叫做公路對於車輛的容量。所以：

$$\text{公路對於車輛的容量} = \frac{\text{車速}}{\text{車長} + \text{車距}}$$

從這個例裏，你同時又看出來，我們還是一貫的應用着那個速度的觀念。——現在用來表示一個效能。

這條公路好比是一道河，汽車就是水。我們能夠計算一道河在一個單位時間之內所流過的水量，同樣的，我們也可以算出來一條公路在一個單位時間之內所通過的車輛。照這樣的想法，把車子看作水；所謂「車如流水馬如龍，」一個文學的描寫就變成一個科學的描寫了！

又如：在球場上扔一個籃球，在運動場上擲一個鐵餅或是鐵球，公園裏噴水池裏噴出來的水，戰場上槍礮放出來的子彈；這許多許多的事實，彼此的意義不同，作用不同，方式不同，效果也不同，——然而無論怎樣不同，可是我們卻看出一個相同的性質，那不過是把一個物體給了它一個固定的力量，由於這個力量就使它增加了一個速度。但是這個速度同時又受地心的吸引，因此便發生了一個先往上昇而後下降的運動。這些運動的因素是一樣的，因此這些運動的軌跡就是一個形式。

任何人都可以看出來，這些軌跡都是一個先昇後降往下彎的曲線，但是我們還可以進一步找出來，這些曲線都是一種，我們把它叫做拋物線。

同時，無論直線，圓，橢圓，拋物線，雙曲線，以及那些像6，像8，像9，像，像，像樹葉，像花瓣，像波紋，像下垂的鏈子，像一孔一孔的橋，……在我們的眼裏都是些算式，一個圖形一個算式。

還有一個飯碗，一隻茶杯，一個花瓶，一串糖葫蘆，一隻長喇叭，一個石鼓，一個漏斗，一個魚缸，……都不過是由於一段直線或是一段曲線，繞着一根直線旋轉出來的空間立體，我們不但可以算出它的面積而且可以求出它的體積。——照這樣說來，還不外體是線的軌跡，而線又是點的軌跡。只要這個點是動點，線是動線，那麼我們就可以找出這許多許多的花樣來。

所以，讓我們看這世界的一切，都不過是一行一行的數，一列一列的算式。說到這裏，你應該將車窗外邊的這一切景象，看作好像一本打開了的數學書擺在你的面前。

我們不是文學家，不是畫家——然而我們能夠利用算式來描寫這世界，更具體，更正確。靜的物體是算式，動的現象依然還是算式。

有人說，把一切自然現象，從性質歸納成數量，這是科學的一個最大的特徵；同時把一切數量，從比較對照上再歸納成綜合的算式，這又是數學的一個任務。從駁到純，從繁到簡，從變化到統一，從零亂的事實到整理出一個系統的說明，這就是我們研究自然，認識自然，了解自然的一條道路。

我們要虛心，要理智，要客觀，要精密，要正確，要有耐性。

現在我們面對着這車窗外的自然景象，——

一切都覺得那麼親切，……

同時又好像那麼疏遠，……

一切都無所謂，我們在想，……

其實什麼也沒有想，……

我們在休息，……
好像是在作夢，……
「先生，你還要吃點什麼？」
突然聽到這個聲音，一個茶房站在我們的面前，纔把我們驚醒了！我們依然坐在火車裏，——而車，還是正在轟轟的往前衝！

第十三站　化零爲整

現在我們從飯車裏再回到我們原來坐的那一輛車，因爲我們的車在前邊，飯車在後邊，所以現在我們走的方向就和火車進行的方向完全一致，車往前走，我們也往前走。走過了第一輛車，又走過了第二輛車，我忽然回過頭來問你：

「你說一個人，能夠比火車跑得還快嗎？」

你搖搖頭。你以爲這是不可能的；一個人，拚上命也不會比火車跑得還快，這又是一個玄想。可是這就錯了！我曾經告訴過你，人是可以比火車跑得還快的，——單看從什麼地方來看。譬如現在我們在火車上走，而且是一個方向。假設以飯車爲標準，飯車的速度就是火車的速度；可是我們走着走着就走到飯車的前邊來了！如果從地面看起來，我們實在就比火車還要快呢！

這件事情一點也不出奇。——對於任何一個問題，千萬不要不加考慮就貿然回答。

現在我們走到原來的座位，坐下去；——這一坐，我又想到了另外的一個問題。

剛纔我們是「走過去，」現在是「退回來；」剛纔是「站起來，」現在是「坐下去。」這樣對照比較，兩個動作彼此不同，不但不同，而且相反。——這是兩個相反的運動。

同時，如果把這兩個相反的運動接連起來，譬如說：拉上去再掉下來，收進來再放出去，放大了再縮小，縮短了再延長，一進一退，一鬆一緊，一左一右，一前一後，一彎一直，一反一覆，……像這樣反來覆去的，結果就還了原。

在數學裏邊，關於運算也有同樣的情形，兩個相反的運算就叫做「彼此互爲逆算；」有時候也叫做「彼此還原。」例如加和減，乘和除，乘方和開方，指數和對數，三角函數和反三角函數。

以前我們所講的，都是把整體分解成零星的部分，然後再研究這些很小很小的一部分。現在我們把這些零星的部分都搞清楚了，我們就可以把它們再聚集起來，從零星的又恢復了整體。

化整爲零，是求微分；反過來說，化零爲整，就是求積分。這個零，不是常數的零，而是以零爲極限的變數，要多小就多小，應該是一個無窮小。所謂「化整爲零，化零爲整，」這是一個最簡潔的說明，——然而這兩種手續恰好相反。所以我們說，求微分和求積分，也是互爲逆算，彼此還原。

例如吃水果的時候，我們可以把它切成一片一片；一片，又可以切成一條一條，一條，又可以

切成一段一段。這就是整個的解體。

反過來說，一個米粒一個米粒的就可以擺成一條線，一條線一條線的就可以連成一個面，一片紙一片紙的就可以堆成一個體。一顆珠子看成一個點，一串珠子便是一條線。一根竹子是一條線，一掛竹簾便是一個面。一頁稿紙是一個面，一本稿紙便是一個體。所以我們說：點集成線；線集成面；面集成體。這就是點滴的累集。

這個累集的算法是什麼呢？那太簡單了，——原來不過就是一個加法。譬如我們現在看着車窗外，呼隆呼隆的又在經過那個橋。看着那個橋上面的架子，一根橫着的鐵筋。如果把車窗看成靜止的，那麼那根鐵筋是往後溜；可是如果把鐵筋看成靜止的，那麼這個車窗的框就一點一點的滑過來了，——那就是說，一點一點的加起來便成了一段距離，——火車跑過的距離。

所謂一點一點的，其實就是一個很小很小的距離，也就是從前我告訴過你的那個Δs。現在我們要求這些Δs的總和，用一個數學的記號把它寫成 $\Sigma\Delta s$。

這個橫着寫的Σ（ㄙㄧㄍㄇㄚ，）不過是表示許多許多的Δs相加。

也許你會覺得，這又是一件庸人自擾的事，分割開，再湊起來，這不是自找麻煩麼？

然而這裏邊，卻是大有妙用。

第一，平常我們認識一件東西，並不見得先認識全體。如果認識了全體，當然可以用解析的方法，來研究它的任何一部分。但是現在知道了這個觀念，只要我們能夠認識每一部分，我們也就可以反過來把握它的整體。

例如我們知道了一根曲線，我們就可以求出這根曲線的每一點的方向。一根曲線，在平面上，可以看成一個函數，

$$y=f(x)$$

那麼每一點的方向就是這個函數的微分比，$\frac{dy}{dx}$。因爲線是點的軌跡，是一個動點所走的途徑，那麼曲線的方向，也就是這個點——運動的方向；拿普通的話來講，也就是這個運動的趨勢。

反過來說，如果能夠知道這個動點，時時刻刻的趨勢，也就是處處的動向，那麼這個動點整個的途徑也就知道了！一個是從靜的途徑上來研究動的方向，一個是由動的方向來研究靜的途徑。這兩件事情，彼此剛剛相反；但是無論從全體到部分，或是從部分到全體，結局終歸是一個問題，可是在認識上就方便得多了。因因果果，知道了這一個就可以研究出那一個。

第二，——這就說來話長了！

假設一條線是直線，那就是它的方向處處一致；如果現在要想測量這條直線的長短，那麼

我們一段一段的量完了再加起來，似乎是一件迂闊的事情（假設這條線並不太長的話。）可是假設這條線是一個曲線，那麼我們實在就想不出另外有什麼好的方法。因為一個曲線是沒法用直尺去測量的。

也許你覺得這句話有點過分，譬如一個圓圈，一個拋物線，我們不會用尺子沿着它的邊，一點一點的量下去嗎？

是的，可是所謂一點一點的量下去，這就是先量出了它的各個部分，然後再加起來，湊成一個整體，和上面那個說法並沒有兩樣。

你或者還可以想到，我們也可以用一根繩子去測量，譬如說用皮尺——然而仔細想起來，這還是和上面那個辦法完全一樣，還是一點一點的測量的。其實不僅曲線，即便是一條直線，我們的眼光也是從頭到尾，沿着那個直尺看下去的。這統統是一種手續，一個道理。

而且，用尺量距離或直線的時候沒問題，很簡單；像圓或是拋物線，量起來也沒有什麼麻煩，可是假若是一條任意曲線，那就是說，它的方向處處變更，這就麻煩了。結果我們還是用上面那個辦法比較方便。

同時我們又可以看出來，直線也就是曲線。一根線的方向處處變更時就是曲線，方向處處

不變時就是直線；可是不變不就是變的一個特殊情形麼？

因此，研究一個任意曲線的量法，實在是一個更寬廣的問題。

其次我們還要把這個問題想得更普遍一點。

一根線的長短既然可以用一個點一個點的去計量，那麼一個面的寬廣就可以用一根線一根線的去計量，一個體的大小就可以用一個面一個面的去計量。

然而這個分割，解體，還有問題。例如作菜的時候，我們切肉，把肉塊切成肉片，肉片再改成肉絲，肉絲再剁成肉丁，這就是一個分割。一個手藝好的廚司務固然可以把它切的非常整齊，非常均勻，一般厚，一般長，一般小。這樣一來，相加就可以變成相乘。但是一般人卻不見得那麼精細靈巧。我們把一個體解成面，面解成線，線解成段，也未必能夠統統整齊劃一。

其實，這也是一個不必要的規定。我們先應當搞清楚，分解的用意是什麼？我們不是想要量長，量寬，量厚，量大小麼？

就說量一段曲線吧。兩頭有兩個點，中間是一道曲線；同時兩頭兩個點，中間我們也可以聯起一根直線。這個直線好比一張弓的弦，那個曲線就好比弓的背。弓弦是直的，弓背是彎的，當然兩個線段的長短不等。可是如果把這個弓背截成一段一段的，然後每一段再連起一個小的弓

弦，——弓背變小了，弓弦也變小了，它們的差數也就更小了！

弓背變到非常之小，弓弦也就變成非常之小，它們都是無窮小，兩個無窮小之差更是無窮小了。弓背和弓弦，不但都是無窮小，而且還是同級又同班，——它們兩個比值的極限是1，它們相等。講到這個地方，我們就可以拿着這個無窮小的直線去代替那個無窮小的曲線。於是求曲線之長，就又變成一個直線長的累集的問題。

知道了這件事實，我們纔能夠說，把線分成段，實在並不必需每段一定相等。因為無論怎樣分法，——最後，我們必需把它們都分解成無窮小！

假設把Δs再分，分得很小很小，結果就變成了ds；那麼這些ds的總和就等於全長，用了數學的記號，就是：

$$\int ds = s$$

這個伸長了的s也是表示相加的意思。英語裏的和是sum，這個s也就是那個sum的第一個字母。

ds叫做s的微分，反過來說，s就是ds的積分。微分和積分，就是兩個相反運算的結果。一個是從整體裏求部分，一個是從部分求整體，對於我們，實在是同樣的重要。

點。

這個辦法，不僅只求直線可以用，即便求曲線，求任何一個曲線都能用，這是一個最重要之點。

當然這個 ds 不能等於零。如果 ds 等於零，那麽無論多少零相加還是零，那就沒有意義了！

莊子的天下篇裏，曾經說：「集無厚而至千里，」所謂無厚，並不是沒有厚，而是這個厚可以非常之薄，薄到要多薄就多薄，它也是個無窮小。把這些無窮小堆集起來，就可以堆集成千里之厚。如果從字面上呆板的來講，這句話就不通；如果用變動的看法，應用極限的觀念，這句話實在就是講到集面成體的一個問題。

所以薄就是厚的微分，厚就是薄的積分。把微分和積分兩個聯合起來，就叫做「微積分。」這樣一來就把題目指明了，我們現在談的這一套，都是些微積分的問題，微積分也是數學的一種。

現在又要到站了，車上的客人紛紛的走下去，這時候化整爲零；回頭車快開的時候，客人又紛紛的爬上來，就又化零爲整了！

第十四站　點線面體

再有一站我們就要到家了，現在我們不預備下車去溜躂，還是繼續的談我們的問題。

剛纔我們已經說過：從整體求部分，是微分；從部分求整體是積分；微分和積分是兩個相反的運算。

拿算式來講微分的問題，是——

已知函數 $y=f(x)$，求 $\frac{dy}{dx}$ 或是 dy.

積分的問題是，——

已知 $\frac{dy}{dx}$ 或是 dy，求原函數 y

y 是 x 的函數，dy/dx 還是 x 的函數，所以積分的問題又可以寫成，——

已知 dy，求 $\int dy$

或 已知 $\frac{dy}{dx}$，求 $\int\frac{dy}{dx}dx$

所謂 $\frac{dy}{dx}$ 是 y 對於 x 的微分比，$\int\frac{dy}{dx}dx$ 就是那個微分比對於 x 的積分。前邊一個長 s，後邊一個 dx，就好比一個括號——那就是「對於 x 求積分」的一個符號。

所以關於求積分的問題，又可以寫成——

已知函數 $y=f(x)$，求 $\int ydx$

這可有點像講書了，在課堂上那樣板起面孔來講。但是這也是沒法避免的事情。

所謂數學，從形式上來講，就是一部研究符號的科學。我們這些符號代表的都是些「量」，把這些量找出一個統一的形式，而作整個的研究，集體的討論，這就是數學的一個特色。

所以這究竟和畫符不一樣。畫符，沒有意義，數學的符號卻有具體的內容；畫符，據說可以捉妖拿邪，那只是一個迷信，一個心理上的欺騙，自欺欺人；研究數學符號，卻能真正分析自然現象客觀如實的素描，精密正確的把握，這是一種科學。

因此，要研究數學，便沒法避免符號，——其實這就是我們的法寶！

應用這些法寶，我們已經知道，

$s=\Sigma\Delta s$ 和 $s=\int ds$

但是這兩個算式還應當再加以說明，所謂 Δs 的總和是 s，這是一段一段加的，所謂 ds 的總和是 s，卻是一點一點加的；在直線的時候，兩個算式都對，在曲線的時候，卻是一個是概算一個是極限值，這兩個算式在精密正確上，就有一個程度上的差別。

上面說的是：點集成線。

其次，假若有一個求面積的問題，就說一把小刀吧。如果這把刀子是一個正方形，長方形，三角形，菱形，平行四邊形，……總而言之一句話，是直線圖形，那麼我們總有辦法，在算術裏差不多都已經講過了。如果是一個多邊形，也就是多角形，譬如八角形吧，那就多少麻煩一點，我們需要先把這個八角形分成七個或八個三角形，分別算出來，然後再相加。

如果這些邊，有一個邊不是直的，那就麻煩極了！譬如現在有一把吃西餐用的刀子，三邊是直的，而盡頭上，一邊是個半圓形的，那麼這個面積應當怎樣求法呢？

還是按着我們那個祖傳妙法，先把它來個解體，把它分成一條一條的。——當然啦，你可以說，無論怎樣分法，反正每一條都還是和原來的那個形狀相似，三邊是直的，一邊是曲的。

不錯，話是有理。——可是如果每一條的寬度很夠分到非常之小，變成一個無限小，那麼這個長條，就差不多可以看成一個長方形了。

不但差不多，而且實在也就只差一點，差一個無限小。因為我們這個分法，可以繼續不斷的接連下去，分，分，分了再分，一直分到你可以承認這句話的時候為止。

這樣一來，每一個長條的寬，從Δx就變成dx了，這一個長條幾乎就是一根直線，它的長是y，那麼這把刀子的總面積就是：

$$A=\int y\,dx$$

這就是說的，線——線集成面。

如果現在有個大麵包，我們要求它的體積。我們先把它橫着切成一片一片，非（常之）薄非（常之）薄的，然後再把它加起來求總和。每一個薄片的面積是

$$A=\int y\,dx$$

假若它的厚，——非常之薄的厚，是dz，那麼這個麵包的總體積，就是

$$V=\iint y\,dx\,dz$$

按照上面的解釋，就是先求對於x的積分，再求對於z的積分，積來積去，就積成了整體。

這就是說，面集成體。

因此，所謂積分，可以有兩個不同的看法，一種是微分的還原，求微分的逆算；一種是總和的極限，求微分相加的極限値。

但是這兩種情形，彼此還有一點差別。

從微分的還原這一方面講，一個積分的微分是眞正的還原。例如 y 是 x 的函數，y 對於 x 的積分是 $\int ydx$，這個積分再對於 x 求微分，就變成：

$$\frac{d}{dx}\int ydx = y; \quad 因爲\ d\int ydx = ydx, \quad 即\ ydx = ydx$$

但是一個微分的積分，卻是一個更廣泛的還原。例如 y 對於 x 的微分比是 $\frac{dy}{dx}$，這個微分比再對於 x 求積分，卻變成：

$$\int \frac{dy}{dx}dx = y + c$$

在這裏，y 是原函數，c 是一個任意常數——一個不變的數。因爲：

$$\frac{d}{dx}\int \frac{dy}{dx}dx = \frac{dy}{dx} \quad 而 \quad \frac{d}{dx}(y+c) = \frac{dy}{dx}$$

你有點糊塗是不是？——你聽嗚——火車又開了！現在我們還是談火車。

假設 y 是表示距離，x 是表示時間，那麼：

$$y=f(x)\ 就是：s=f(t)$$

這是表示一個運動的狀況，因為距離隨着時間變，就是關於運動狀況的一個描寫。

那麼 s 對於 t 的微分比是什麼呢？——剎那速度，

不錯；反過來說，這個微分比對於 t 的積分是什麼呢？

$\frac{dy}{dt}$ 是剎那速度，

$\frac{dy}{dt}dt$ 是：剎那速度×剎那時間＝剎那距離。

$\int\frac{dy}{dt}dt$ 是：剎那距離總和的極限＝整個距離。

——好啦，問題就在這兒啦。我要問你，量距離當然要有個起點，我們從哪裏量起呢？

譬如我們現在量這個火車所走的距離，我們應當從什麼地方開始呢？

當然要從剛纔離開的那個車站量起。

是的，這不過是「一個」辦法。其實我們也可以從前一站量起，或是從再前一站量起。假設前一站到剛纔這一站的距離是 a，那麼求出積分來就應當再加 a，假設再前一站的距離是 b，

那麼求出積分來就應當再加 $c+c$。無論 c 或是 $c+c$，都不過是一個固定的常數。

再舉一個例。你總還記得運動會上跑長距離的情形，因爲裏圈和外圈的長短不一樣，要想終點都在一個地方，一條線上，那麼起點就得有參差，跑外圈的在前，跑裏圈的在後。如果這些運動員的速度一般大，跑起來一般快，當然就會同時到達終點，時間是一致的，距離也是一致的。現在讓我們把這些跑道拉直，我們站在最後一個人的起點上。現在問，這些運動員跑到終點之後，每一個人都距離我們一般遠麼？

當然不一般遠！從裏圈往外圈數，一個比一個遠。他們彼此之間，相差一個常數，這就是由於起點不在一起的緣故。

所以，雖是一個速度，一個微分比，但是它的積分的結果卻不一定相等，因爲彼此可以相差，差一個常數，一個任意的常數。

反過來說，對於這些總距離，如果求他們的速度卻是一致的。跑外圈的雖是距離我們遠，可是求速度的時候，這個距離卻只能從起點算起；因爲起點以前的這一段路，他並沒有跑，沒跑當然就是沒有運動，沒有運動就談不到速度了。

把這些性質用微積分的行話來講，就是：如果兩個函數相差是一個常數，那麼它們的微分

比是相等的。反過來，如果兩個函數相等，它們的積分卻是可以彼此相差一個常數。

因為這個原因，所以對於一個函數，如果先積分再微分，結果還原等於原函數；如果先微分再積分，結果也許還原成原函數，也許就比原函數還多一個常數。

你覺得有點頭痛有點麻煩，是不是？——可是這正是我們的得意之作。

你總該還知道一點代數。譬如乘方或開方彼此還原，可是這也要看先後的次序。先開方再乘方，是還原，沒有錯；可是先乘方再開方，卻不僅只還原。你沒有聽說過嗎？其實這也很簡單。譬如說，2 的平方是 4，4 再開平方，卻是 ± 2。4 的平方根可能是正 2，也可能是負 2，一共兩個答數。然而反過來講，4 的平方根是 ± 2，但是無論正 2 或是負 2，平方起來總是 4，這就和原來的完全一樣了。

按照上面那個說法，我們說：一個數，如果先開平方再平方起來，結果還原等於原數；如果先平方起來再開平方，結果也許還原成原數，也許就和原數相差一個正負號。

難道這還叫做還原嗎？是的，這還是一個還原，一個更廣泛的還原。所謂 ± 2 實在是得到了兩個答數，正 2 或是負 2，原來的數不過是其中的一個，而且原數只有這兩個可能。

所謂 y 的微分的積分是 $y+c$，如果 c 等於零，那麼 $y+c$ 就是 y，我們的原函數不過是

$y+c$的一個特例。所以不但是還原，而且是包括了一切可能的還原，我們這個答案是值得畫一百分的。

你的神情告訴我，你已經有點疲倦了。這也難怪，我們已經來回坐了幾個鐘頭的火車，而且還說了不少的話，用了不少的心思。我們暫且休息一會吧，好在就要到家了。

第十五站 求積的設計

看着你坐在我的對面，那一副睏的姿態，我忍不住笑了。

「你笑什麼？」你忽然睜開眼睛奇怪的問我。

我更忍不住了：「因爲我想起了孫悟空，那個在火車裏睡覺的孫猴子！」

「是嗎？」你也笑了：「小心你說不定就會變成豬八戒！」

「得啦，得啦，咱們彼此說和。」

「說和就說和，還是你說你的，我聽我的。」

是嗎？那麼無論如何，我打算在下車以前，完成一個段落。你且聽着：——

我們已經說過，積分是微分的還原，同時又是一個總和的極限。要是從第二方面來講，那就還得加以補充。

所謂研究一個總和的極限，按照這個題目的本身來講，我們總得有個範圍，這纔有意義。

譬如現在要求一根曲線的長，實在說就是先要在這個曲線上選擇兩個定點P和Q，然後

再求PQ之長。同時所謂求一個曲線下的面積，就是要求PQ這一段曲線下的面積。我們曾經說過求一把刀子的面積，這把刀子三邊是直的，只有頭上那一邊是曲線。如果這個曲線是：

c. $y=f(x)$

那麼這個曲線下的面積就是：

A: $A=\int ydx=\int f(x)dx$

可是剛纔我們曾經說過，一個函數的積分，它的結果可能還有一個任意常數，所以我們實在應當寫成：

$$A=\int ydx+c=\int f(x)dx+c$$

這樣一來，y是x的函數，它對x的積分還是x的函數，所以A也就是x的函數。

假設我們要求PQ這一段曲線下的面積，那麼面積是從P點下的這一邊量起，一直量到Q點下的那一邊為止。同時P和Q既然都是曲線c上的點，所以它們的位置也是由於x來決定的。譬如說，x等於a的時候決定P點，x等於b的時候決定Q點，那麼x等於a的時候A等於零，這就是面積開始的一個條件。把這個條件代入上邊那個結果，我們可以寫成：

$$0=\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a}+c,\qquad \therefore\ c=-\left[\int f(x)dx\right]_{x=a}$$

於是這個常數 c 就確定了，因此

$$A=\int f(x)\,dx-\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a}$$

A 既是 x 的函數，那麼 x 等於 b 的時候，

$$A=\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=b}-\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a}$$

因而這個面積也就求出來了。

從另一方面想，我們也曾說過，把它分成一條一條的，譬如說一共分成 n 條；這 n 個長方形，長是 y 寬是 Δx，總和是：

$$\Sigma y\Delta x$$

而且 $n\longrightarrow\infty$， $\Delta x\longrightarrow 0$， $\Sigma y\Delta x\longrightarrow A.$

平常我們把這個極限值寫成下面這樣一個記號：

$$\int_a^b f(x)dx$$

叫做從 a 到 b，y 對於 x 的積分，這是表示面積另外的一個寫法。現在把這兩個結果聯合起來，就得到一個等式：

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_{x=b} - \left[\int f(x)dx\right]_{x=a}$$

把右邊這個結果再換一個新記號，我們通常把它寫成：

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_{x=a}^{x=b}$$

這就是積分裏最重要最基本的一個定理。

這個定理告訴我們求積分就是一個求總和的極限的方法；換句話說積分也就是一個總和的極限值。

上面那個算式，

$$A = \int f(x)dx + c$$

c 可以是一個任意常數，所以這個積分叫做不定積分。現在這個算式：

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_{x=a}^{x=b}$$

沒有那個任意常數了，——然而另外卻添了兩個限制，所以就叫做有限積分。有了這個有限積分，我們對於一切自然現象的研究，就得到了一個有力的武器。

譬如說，我們把上面那一段曲線繞着一根直線轉一圈，結果就成了一個體，——這種體叫做旋轉體。

怎麼，你又覺得有點太沈悶麼？——你看，那邊來了一個小販；讓我們買點什麼吃。買什麼？買幾個梨，幾個蘋果，再來瓶汽水，一包糖，——一個用圓紙筒包好的糖，裏邊一片一片的，又圓又甜，頂好吃的糖。

你覺得有點開心。

可是這就是些現成的數學問題。

咱們先吃糖。——別慌，我且問你，這包糖是個什麼形狀？

直圓柱！

不錯；它的體積怎麼求法？

不知道！

讓我們打開看一看，裏邊是一個糖片又一個糖片，累集起來就成了一個圓柱。好啦，這對於

我們是一個很好的啓示。

假如我們把這個圓柱橫着切成一片一片，切到非常之薄，每一個看成一個圓，圓的面積是π乘半徑r的平方；然後再把它一個一個的累集起來，你想可以有多少個圓？

那就看這個圓柱多麼高了！

是的；所以求圓柱的體積就是：

$$V=\pi r^2h$$

h就是圓柱的高。當着每一片的厚變成無窮小的時候，那麼圓柱的體積就是這些圓片相加的總和，——這也就是包括着一個極限觀念的積分方法。

然後再吃梨。這個梨不是別的，在我們的眼裏就是一個旋轉體。譬如把這個梨從頭到尾一切兩半，這半個梨的邊緣是一段曲線；把這個曲線繞着中分的一條直線轉一圈，結果就成了這個梨，所以它就是一個旋轉體。

好啦，現在讓我們求出這個旋轉體的體積。

怎麼求法呢？還是用那個老法，先把這個梨橫着切成一片一片的。那麼這一片一片的是些什麼形狀呢？

近似糖片。對了，那就是說，它們差不多都是些圓柱體，不過這個圓的半徑太大，而且高度又太矮，不大好看。好看不好看，且不要管它，反正是近於圓柱，這倒是事實。

如果那個曲線是 $y=f(x)$，那麼這些圓半徑就是 y，而高卻是 Δx。y 的大小是隨着曲線變的，所以它是一個變數；Δx 是個很小很小的數量，暫且讓它是一個常數。現在把這些體積加起來就應當是：

$$\Sigma \pi y^2 \Delta x$$

可是這個總和和那個眞正的體積還差一點——不錯；差一點當然就不能算對，這只是一個近似值。

然而我們還有的是辦法！我們現在再繼續的切，再切，那就是讓 Δx 開始變，變，越變越小，變到最後，結果等到

$$\Delta x \longrightarrow 0, \quad \Sigma \pi y^2 \Delta x \longrightarrow \int \pi y^2 dx$$

但是 π 是個常數，無論切得怎樣小，它是不變的，所以最後的結果就變成了下面這一個公式：

$$V=\pi \int y^2 dx$$

你覺得這些說法很奇怪，好像是在變戲法，耍魔術。其實這裏面並沒有什麼玄妙，這只是一個新觀點，一個變動的新觀點。

再想想，你應該又想出了一些新的問題。我們能夠求出一段曲線下的面積，但是隨便畫一個閉合的曲線，這個面積能夠求得出麼？我們能夠求出一個旋轉體的體積，但是如果有一個隨便的體，歪七扭八的體，我們能夠求得出它的體積嗎？

是的，這些問題我們還不曾說到。——可是這是沒法子的事情，因爲再說就要用到更複雜的算式了，例如畫兩個長s的二重積分和畫三個長s的三重積分。講數學而不用算式，這是一件費力不討好的事情，說的不容易說得清楚，聽的也不容易聽得明白。現在我們的目的只是要知道一個新的觀念。同時，卽便僅僅知道了這麼一點，可是我們已經能夠得到許多許多的應用。

譬如這個蘋果，我們一個人一個，這也是一個旋轉體。還有那瓶汽水，那個瓶子也是一個旋轉體。只要知道這些體的截面的曲線是什麼樣的函數，那麼我們就可以按照上面的辦法求出它們的體積來。這些都是關於幾何一方面的應用。

同時這些應用還不僅只限於幾何。譬如關於求曲線下的面積那個問題，如果曲線的函數，自變數x代表的是時間t，因變數y代表的是速度v，那麼：

這時候，這一段曲線PQ下的面積A，實在表示的就是從a到b這個時間之內所走的距離s，

$$y=f(x) \quad 也就是 \quad v=f(t)$$

$$A=\int_a^b f(x)dx \quad 也就是 \quad s=\int_a^b f(t)dt$$

因爲 $s=\int_a^b vdt$

速度乘時間等於距離，s是那些dt瞬間所走的距離的——總和的極限。

可是在這裏還要加以註解；不然的話，你就又會莫明其妙了。一會我們說，這是曲線下的面積，一會我們又說，這是表示運動的距離。如此說來，豈不是面積就是距離嗎？

是的，這句話實在是說不通的。——但是，表示面積大小的是一個數值，表示距離長短的也是一個數值；我們的意思實在是說這兩個數值相等。如果不論單位，單就數值來說，一個面積的數值是可以等於一個距離的數值的。例如表示兩個平方單位的數值是2，表示兩個長度單位的也是2，單就2來說，它們兩個就能夠相等，這就沒有毛病了，這是暗中交代。

其次，假如x表示時間t，y表示加速度α，加速度跟着時間變，不同的時間有不同的加速度。對於這個變加速運動說，A就是表示的速度v。因爲：

$$y=f(x) \quad 變成 \quad \alpha=f(t)$$

$$A=\int_a^b f(x)dx \quad 變成 \quad v=\int_a^b f(t)dt$$

$$也就是\ v=\int_a^b \alpha dt$$

加速度乘時間等於速度，v是那些dt瞬間所發生的加速度的——總和的極限。

又如x表示距離s，y表示力量F，那麼A就又變成表示工作的大小了。因爲：

$$y=f(x) \quad 變成 \quad F=f(s)$$

$$A=\int_a^b f(x)dx \quad 變成 \quad W=\int_a^b f(s)ds$$

$$也就是\ W=\int_a^b Fds$$

力量乘距離等於工作。在這裏說的F，不是一個固定的力量，它是跟着距離變的一個變量；那就是說，在不同的地方就有不同的力量。因此這個工作就得利用積分去求它。

除此之外，我們還可以利用同樣的辦法，去求一個物體重心的位置，一個物體的惰性力矩，

或是一個液體的壓力，——這些都是對於物理一方面的應用，

知道了利用積分可以求出一個總和的極限，這實在是解決問題的一個利器。對於這些具體的應用，也許你一時還搞不很清楚；可是你總該能夠瞭解這個設計的手續。只要懂得這個設計，這個思索的方法，那麼將來就會知道，如此，這般，就能夠妙用無窮。

第十六站　開擴了許多的眼界

越是心急，越會覺得時間過得慢，其實這只是心理上的一個錯覺。滿以爲就要到家了，可是拿出錶來看一看，我們還要等一個相當的時間。看着車窗外邊，那些寬寬的公路，窄一點的大路，以及那些曲曲折折的人行小道，我的心裏就又想出了一個話題。

從這些道路的發展上，我想到了社會的進化；從社會的進化上，又想到了各種事物的變遷。雖然我們現在覺得鐵路建設是一種交通的便利，可是在不久以前，有些人們卻並不是這樣想法；他們認爲火車是一個不能瞭解的怪物，而且修築一條鐵路就會破壞了當地的風水。你認爲這是一個笑話嗎？可是在他們的眼裏，卻是充滿了驚異和恐怖。他們認爲，自古以來就沒有聽說過這種怪物；他們認爲，這個怪物會給他們帶來了可怕的災害。

可是事實勝於雄辯，鐵道修起來了，火車跑起來了，它不但沒有帶來什麼災害，而且它從很遠很遠的地方，帶來了不容易見面的朋友，和不容易運來的貨物。慢慢的社會發達起來了，商人進出了不少的貨物，農人也提高了一些享受，而且還是那一塊老一輩子留下來的地，現在卻不

知不覺的擡高了身價，銅地錫地變成銀地金地。

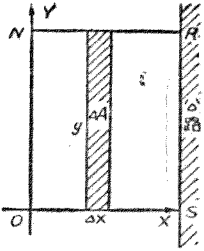
地價增值了，然而這並不是由於地主的加工製造；這是市面繁榮的一個必然的結果，是大家羣策羣力造成的一個事實。那麼這個利潤應當由於地主一個人私有嗎？當然不合理。

因此，我們要擁護國家的一個規定：凡是靠近鐵道車站，公路兩旁，地價既高，收稅也應當加重，這是一件最公平的事情。

事實是公平的，可是計算起來卻是夠麻煩的。——然而這個問題倒有點意思。

現在我們打算把這個問題細心的想一下。當然啦，事先我們也得規定幾個標準。

讓我先畫一個圖。



假設RS是一個公路的路界，從RS往裏邊丈量，五十公尺以外不另加稅，從五十公尺起，距離公路越近的，納稅越重。譬如說：距離二十五尺的地方，每平方尺一律按五十元計算；緊靠公路邊的地方，每平方尺一律按一百元計算。這樣一來，假設從五十尺的地方量起，橫着量，向公路邊量，距離x尺的地方，稅價是v元，v既是跟着x變，所以v是x的函數。這個函數是：

$$v = 2x$$

$x = 0$ 尺的時候：　$v = 0$ 元

$x = 1$ 尺的時候：　$v = 2$ 元

$x = 2$ 尺的時候：　$v = 4$ 元

$x = 25$ 尺的時候：　$v = 50$ 元

$x = 50$ 尺的時候：　$v = 100$ 元

假設現在有一塊地，長方形，長是六十尺，寬是五十尺，總面積一共三千平方尺，恰合市畝五分。——那麼應當納稅多少呢？

首先我們要注意的是，納稅的多少是按照距公路的遠近來規定的。卽便是一塊地，兩個地邊的擔負就不一樣，這是一個要點，同時也是一個困難。

要想解決這個問題，我們還是用那老法，先把這塊地切成長條，假設每一個長條的長是 y，y 等於六十尺，是個常數；寬是 Δx，面積是 ΔA，這兩個數量全看我們怎樣分法，所以它們兩個都是變量。按照面積的求法，

$$\Delta A = y\Delta x$$

因而這個長條面積應當納的稅就是：

$$v\Delta A = vy\Delta x$$

現在我們這塊面積，分了再分，一直分到每一條要多窄就多窄，然後再求納稅總和的極限值，這就是我們想要知道的那個稅額，假設是U。用算式來表示，就是：

$$\because \quad \Sigma v\Delta A = \Sigma vy\Delta x$$

$\therefore$ 當着 $\Delta x \longrightarrow 0$，$\Sigma vy\Delta x \longrightarrow U$

也就是 $U = \int v\,dA = \int vy\,dx$

但是 $v = 2x$，$y = 60$，x 從 0 到 50

所以 $U = 2 \times 60 \int_0^{50} x\,dx$

最後這個x對於x的積分是$x^2/2$（現在我們暫且不證明這個結果）所以從零到五十的積分就應當是：

$$U = 2 \times 60 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{50} = 150000 \text{ 元}$$

假設把這塊地順着公路從中分爲兩半，那麼距離公路遠的一半，x 是從零到二十五，應當納稅：

$$U_1 = 2 \times 60 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{25} = 37500 \text{ 元}$$

距離公路近的一半，x 是從二十五到五十，應當納稅：

$$U_2 = 2 \times 60 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{25}^{50} = 112500 \text{ 元}$$

雖然兩個面積相等，然而納的稅額並不一樣。

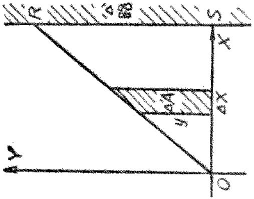
同時，假設 $v = nx$，$y = c$（c 還是一個常數，）於是這個納稅的公式就是：

$$U = nc\left[\frac{x^2}{2}\right] = (nx)\left[c \cdot \frac{x}{2}\right]$$

或 $$U = v\left[y \cdot \frac{x}{2}\right]$$

v 是按照地畝受益的多少來規定的，所以叫做「受益因數，」至於後邊這個因數，卻是容易看出來，那是一個長方形的面積，而 x 是取的平均中值。

假設NR那一邊不和公路垂直，它是一條斜的，那麼這塊地就變成一個三角形了。如果這個三角形長是寬的m倍，那就是$y=mx$。



這時候，總稅額就變成：

$$U=\int vydx=\int 2xmxdx=2m\int x^2dx$$

x^2對於x的積分是$\frac{x^3}{3}$，所以從零到五十的積分就是：

$$U=2m\int_0^{50}x^2dx=2m\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{50}=\frac{2}{3}\times 125000m \text{ 元}$$

如果 $m=1$，　$U=\ \ 83333$ 元

如果 $m=2$，　$U=166666$ 元

如果 $m=3$，　$U=250000$ 元

同時，假設 $v=nx$，$y=mx$，於是這個地稅的公式就變成：

$$U=nm\left[\frac{x^3}{3}\right]=(nx)\left[(mx)\frac{x}{3}\right]$$

或　$$U=v\left[y\frac{x}{3}\right]=v\left[\frac{1}{2}y\left(\frac{2}{3}x\right)\right]$$

這個結果，還是受益因數去乘一個三角形的面積，而這個三角形的底邊是$\frac{2}{3}x$，——這還是取的一個中值。

而且，長方形的時候，

$$U=\frac{1}{2}ncx^2$$

三角形的時候，

$$U=\frac{1}{3}nmx^3$$

一個是和x^2成正比，一個是和x^3成正比。

上面這個算例又可以看作在經濟財政一方面的一個應用。

喂，老兄，你怎麼又不說話了？——譬如說，我們現在有了一筆錢！

「你笑？對了，越是這個年頭，日子越難過人越財迷！我再說一遍，假設我們現在有了一筆錢！那麼我們將要怎麼辦？」

買房子，買地，買東西囤積？——可惜，咱們沒有那個福氣，手裏只有一萬塊錢，那麼怎麼辦呢？

對了，還是放到銀行裏去吧，按時候還可以得點利息。

利息有幾種算法呢？按時間說，有日息，月息，年息。按計算說，有單利，有複利。按利率說，也有規定，幾分幾厘。

當然啦，利息越大越好，於是咱們就要複利息，半年算一次，年利率八厘；算一次，利滾利，本大利大。這倒是一個頂好的辦法。假如我們存一年，半年算一次複利，那麼一年的本利和一共就是：

$$10000\left(1+\frac{.08}{2}\right)^2=10816\text{ 元}$$

這個公式當然你還記得，比我還熟。

可是想想，還不合乎理想。既是每算一次，本錢就增加一次，那麼最好是多算幾次——那也就是說，把結算利息的期間讓它越短越好。假設這個期間變成無窮小，那就是無時無刻不結算利息，無時無刻不增加本錢；這樣一來，咱們是一點也不吃虧了。

這個想法太好了，咱們算算看。——別慌，暫且讓我們猜一下：假設按照這個辦法，我們一年下來，大概能夠拿到多少錢？

猜是不大好猜的，可是我們總可以斷定，至少得發個小財。是的，你這樣想，我也這樣想。我們算算看！

假設一年算n次，年利率既是八厘，所以每期是n分之八厘。代公式：本利和，

$$A=10000\left(1+\frac{.08}{n}\right)^n$$

可是這就來到一個難題，週期要是變成無窮小，期數就要變成無窮大；

$$n\longrightarrow\infty,\quad \frac{.08}{n}\longrightarrow 0,\quad 1+\frac{.08}{n}\longrightarrow 1$$

1的無論多少次方總是1，1乘一萬還是一萬——這簡直是開玩笑！還是原本嗎？這顯然不合理，這裏邊有毛病，咱們還得另外演算演算。

$$A=10000\left(1+\frac{.08}{n}\right)^n=10000\left[\left(1+\frac{.08}{n}\right)^{\frac{n}{.08}}\right]^{.08}$$

這是什麼意思呢？——不錯，在微分裏，我們有一個最重要的變數是

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

當着x變成零的時候，這就是一個「一的無窮大方」的一個變數。

這個變數有個極限（我們暫且不去證明這句話）這個極限值在2與3之間，平常把它用e來表示，就和用π來表示圓周率一樣，這也是一個專用的記號。

如果 $x \longrightarrow 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} \longrightarrow e = 2.71828\cdots\cdots$

然後再看上面那個公式，

如果 $n \longrightarrow \infty$, $\frac{.08}{n} = y \longrightarrow 0$, $\left(1+\frac{.08}{n}\right)^{\frac{n}{.08}} = (1+y)^{\frac{1}{y}} \longrightarrow e.$

所以 $A = 10000e^{.08} = 10832.87$ 元

比單利息纔多三十二元八角七分！

怎麼，你失望了麼？是的，我也覺得有點洩氣。是算錯了嗎？沒有！一點也沒有錯！

這裏邊當然有個關鍵，讓我們拋開財迷的心，只要鎮靜一點，馬上就想起來了。固然我們計算利息的期數越多越好，可是期數越多了，期間就越短，期間越短所生的利息就越小，——因為事先約定好了年利率八厘，這就限制住了利息增加的一個範圍。

財是發了，可惜太小。這件事情，對於不願用腦子，天天專門打算盤的財迷，是一個頂好的諷刺！

e 這個極限值，在高等數學裏是一個重要的數字，這就是我告訴你這個算例的用意。同時，上面這個計息的辦法叫做連續複利計算法。假設你能夠懂得這個算例，也就明白了什麼是連

續，什麼是極限，這一類的觀念。

突然火車停了！原來我們又回到一開頭上車的那個地方。我們的旅行結束了。在這一個短短的旅行中，我們討論了不少的新觀念，雖然有點疲倦，然而卻也感到興奮。而且那個新觀點，動的觀點，也着實使我們又開擴了許多的眼界。

當着我們從票房的門口，隨着客人一齊擁擠出來的時候，看着人羣就好像一股決出了堤口的洪流。等着走出來以後，這些人羣漸漸的鬆動了，卻好像水面上那個圓的水紋，慢慢的發展，逐漸的展開，展開，——慢慢的都又消失了。馬路上，只有你還沒有離開我。

「你是回學校呢？還是回家？」我問你。

「天不早了，我打算回家。」

「那麼明天見吧！」

「明天見！」

看見你，忽忽的往前跑了幾步，颼的一聲就跳上了電車，不由得又使我想起那個跳上飛機的孫悟空。

附錄　車廂檢查

一般人常有一個誤解，認為數學是最死板最乾燥的東西。同時還有一個誤解，認為微積分就是最高深最難懂的數學。其實，並不是這個樣子——至少並不像一般人所想的那樣可怕。微積分的研究，是另外一個觀點，運動的觀點。這個觀點，對於任何人都應當知道一點，尤其是對於沒有機會去學的人，更有知道的必要。不然的話，已經學過的數學智識，將要束縛了他的思想，以及思想的運用。

抱着這個信念，我寫成了這一部數學列車。我竭力的避免算式，我盡量着重基本觀念，在體裁的選擇和敍述的方式上，曾經費了不少的考慮。

然而這是一件不容易討好的工作；而且最危險的是，惟恐以詞害意，以致發生誤解。所以在這本書的最後，預備把每一段所提到的觀念再加以整理，補充和重述。

如果把正文看作列車，那麼這裏便應當是車廂的檢查了。

第一站

首先提到的，有幾個名詞。

每一個單位時間所走的距離叫做速度，——這是對於運動狀況的一個描寫。

每一個單位時間所增加（或減少）的速度叫做加速度（或減速度），——這是對於速度變化的一個描寫。

速度有變化的叫做變速；速度沒有變化的叫做當速。

絕對速度，是表示一個運動的物體，對於一個靜止的標準，發生的「距離的變化」的狀況。

相對速度，是表示兩個運動的物體，彼此以對方爲標準，發生的「距離的變化」的狀況。

第二站

動是表示一個物體位移的狀態。

靜就是不動的一個狀態。

動和靜，快和慢，同時又是表示兩個物體「相對距離」的變化的狀態。

拿着一個定點爲標準，另外一個動點沿着直線或是曲線所發生的速度，叫做線速度。

拿着一個定直線爲標準線，標準線上的一個定點作爲標準點，另外一個動點與標準點的聯線，和標準線成爲一個角度。動點移動的時候，這個角度發生變化的速度叫做角速度。

第三站

求速度的公式是，時間除距離等於速度，

$s \div t = v$

這是一個平均速度，對於速度的一個概算。

假設時間增加了一個 Δt，這時候，距離增加了一個 Δs，

$\Delta s \div \Delta t = \Delta t$ (時間之內的平均速度)。

當着 $\Delta t \longrightarrow 0$，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} \longrightarrow \dfrac{ds}{dt}$ = 瞬間速度，

這是剛剛時間是 t 的那一刹那的眞正速度。這裏邊已經含有一個極限的觀念在內。

第四站

$s \div t = v$，表示速度。

$v \div t = \alpha$，表示加速度。

$\alpha > 0$，表示加速度。

$\alpha < 0$，表示減速度。

α＝常數，是等加速（或等減速）運動。

α＝變數，是變加速（或變減速）運動。

一個固定的數值叫做常數。

一個不是固定的數值叫做變數。

變數的本身用它的接連數值來表示。

變數的變化沒有限制；不變的時候，就變成了常數。

整數列是孤立的數值，有理數列是密集的數值，實數列是連續的數值。

如果一個變數的接連數值是實數列的一段，就是連續變數，如果不是連續的變數，就是不連續變數。

第五站

兩個相反的方向，如果一個叫做正方向，那麼另外一個就叫做反方向或是負方向。

運動方向是正的叫做正動，運動方向是負的叫做反動。延長如果是正的，縮短就是負的。

變化的方向是正的叫做正變，變化的方向是負的叫做反變。發展如果是正的，緊縮就是負的。

速度帶有方向，是個向量。如果只論速度的絕對值，不論方向的正負，就叫做速率。速率是個純量。

變速表示變化的速度，變率表示變化的速率。

如果一個變數的接連數值是循環的，那麼這個變化是週期的。循環是重複的循環，週期是移動的循環。一個車輪在原地不動的旋轉，是循環；假設它在地面上滾動的旋轉，則是週期的。

第六站

假設一個變數的絕對值，能夠大於任何一個預設的大數，就叫做無窮大或是無限大。

無窮大是一個要多大就多大的變數，不是一個常數。

假設一個變數的絕對值能夠小於任何一個預設的小數，就叫做無窮小；——但是不能叫做無限小。

無窮小是一個要多小就多小的變數，也不是一個常數。

無窮大和無窮小的接連數值都是無窮的；但是無窮大沒有極限值，無窮小卻有極限值。

無窮小的極限值是零。

如果一個變數 x 和一個常數 l，其差爲無窮小，那麼這個常數 l 就叫做那個變數 x 的極

限值。記爲：

$$若\ |x-l|\longrightarrow 0\quad 則\ x\longrightarrow l$$

要想求一個變數的極限，先要斷定這個變數是不是有一個極限。要想斷定極限是不是有，可以按照下列這兩種情形論斷：

（一）假設一個變數越變越大，但是無論怎樣變大，卻是總比一個固定的數值還小，只有這種情形，這個變數纔能夠有一個極限。

（二）假設一個變數越變越小，但是無論怎樣變小，卻是總比一個固定的數值還大，只有這種情形，這個變數纔能夠有一個極限。

以上兩種情形，理由只是一個：只有能夠適合這種條件，一個變數纔能夠和一個常數相差是一個無限小，——然後，這纔能夠有一個極限。

例如：——

(1) $x=.\dot{9}=.9999999999\cdots\cdots$

$\because\ 1-x\longrightarrow 0,\quad \therefore\ x\longrightarrow 1$

(2) $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots$$

$\because$ 當着 $n\longrightarrow\infty$， $1-\Sigma\frac{1}{2^n}\longrightarrow 0$， $\therefore$ $x\longrightarrow 1$

第七站

無窮大和無窮小既然都是些變數，所以比較大小只能從極限上着想。而且無窮大和無窮小互爲倒數。

如 $x\longrightarrow\infty$，則 $\frac{1}{x}\longrightarrow 0$

如 $x\longrightarrow 0$， 則 $\frac{1}{x}\longrightarrow\infty$

假如 x 和 y 都是無窮大，——

如 $\frac{x}{y}\longrightarrow\infty$， 則 x 比 y 的級數高；

如 $\frac{x}{y}\longrightarrow 0$， 則 x 比 y 的級數低；

如 $\frac{x}{y}\longrightarrow c\neq 0$， 則 x 和 y 是同級；

如 $\frac{x}{y} \longrightarrow 1$, 則 x 和 y 爲等值。

第八站

如 $a-b=c$, c 是 b 對於 a 的絕對的差；

而 $c \div a = d$, d 是 b 對於 a 的相對的差。

假如 α 和 β 都是無窮小，——

如 $\frac{\alpha}{\beta} \longrightarrow 0$, 則 α 比 β 的級數高；

如 $\frac{\alpha}{\beta} \longrightarrow \infty$, 則 α 比 β 的級數低；

如 $\frac{\alpha}{\beta} \longrightarrow c \neq 0$, 則 α 和 β 是同級；

如 $\frac{\alpha}{\beta} \longrightarrow 1$, 則 α 和 β 爲等值。

而且，如果以 x 爲標準，——

假設 y 和 x 同級，則 y 爲第一級無窮大；

假設 y 和 x^2 同級，則 y 爲第二級無窮大；

也就是：假設 y 和 x^n 同級，則 y 爲第 n 級無窮大。

如 $\frac{y}{x^n} \longrightarrow c \neq 0$，則 y 爲第 n 級無窮大。

如果以 α 爲標準，——

假設 β 和 α 同級，則 β 爲第一級無窮小；

假設 β 和 α^2 同級，則 β 爲第二級無窮小；

假設 β 和 α^n 同級，則 β 爲第 n 級無窮小。

也就是：如 $\frac{\beta}{\alpha^n} \longrightarrow c \neq 0$，則 β 爲第 n 級無窮小。

第九站

如果 y 跟着 x 變，則 y 叫做 x 的函數。x 是自變數，y 是因變數。記爲：

$$y=f(x)$$

如果 y 是 x 的函數，則 x 是 y 的反函數。記爲：

如 $y=f(x)$，則 $x=f^{-1}(y)$.

一個自變數的函數未必只有一種，對於不同的函數要用不同的記號。例如 u，v，w 都是 x 的函數，然而彼此不同，記爲：

$$u=f(x),\quad v=g(x),\quad w=h(x).$$

或 $u=f(x),\quad v=F(x),\quad w=\phi(x).$

一個函數的自變數未必只有一個。譬如能夠叫 u 變的同時有 x，y，z，則 u 的自變數有三個，記爲：

$$u=f(x,y,z)$$

假設 $y=f(x)$，x 的數值可以決定 y，y 的數值叫做 x 的對應值。例如：

$$y=x+2,\quad x=0,\quad y=2;$$
$$x=1,\quad y=3;$$
$$x=2,\quad y=4.$$

y：2，3，4 就是 x：0，1，2 的對應值。

即便同一個函數，一個 x 卻不見得只有一個對應值。例如：

$$y=x^{\frac{1}{2}},\quad x=1,\ y=\pm1,$$
$$x=4,\ y=\pm2.$$
$$y=\sin^{-1}x,\quad x=0,\ y=0,\ \pm\pi,\ \pm2\pi,\ \pm3\pi,\dots\dots$$
$$x=1,\ y=\frac{\pi}{2},\ \pm2\pi+\frac{\pi}{2},\ \pm4\pi+\frac{\pi}{2},\dots\dots$$

一個x的對應值只有一個的時候，叫做單值函數；有兩個的時候，叫做二值函數；有n個的時候，叫做n值函數。——只要n大於1，統統是複值函數。

任何一個函數，不見得都能夠用算式去表示。雖然不能用算式去表示，卻無妨礙於函數的成立。函數的定義是相當的廣泛的。

函數的表示有三種：一種是自變數和因變數的「數值對照表，」一種是「坐標曲線，」例如統計圖表，最末一種纔是「算式。」

假設$y=f(x)$，而且這個函數是可以用算式去表示的，那麼按照算式的性質又有下列各種區別。

如果y可以用x的代數式去表示，則y是x的代數函數。例如：

$$y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots\cdots + mx + n$$

如果用三角算式表示，則 y 是 x 的三角函數，例如：

$$y = \sin x$$

如果用指數算式表示，則 y 是 x 的指數函數，例如：

$$y = a^x$$

如果用對數算式表示，則 y 是 x 的對數函數，例如：

$$y = \log_{10} x$$

如果用反三角算式表示，則 y 是 x 的反三角函數，例如：

$$y = \sin^{-1} x$$

凡不是代數函數的，叫做非代數函數，或是超越函數。

如 y 是 x 的函數，x 增加（或減少）Δx 的時候，y 增加（或減少）Δy，Δx 和 Δy 叫做 x 的增分和 y 的增分。（增分可正可負，所以減少的情形也可以包括在裏邊。）

y 的增分和 x 增分的比值的極限值，叫做 y 對於 x 的微分比。——也就是：

如 $y = f(x)$，　$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

當着 $\Delta x \longrightarrow 0,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \frac{dy}{dx},$ y 對於 x 的微分比。

但是當着Δx近於零的時候，Δy也近於零，所以Δx和Δy都是些無窮小。同時微分比就是它們兩個比值的極限值；這個極限值卻不一定都是零。

因此，$\frac{dy}{dx}$所表示的並不是一個分數，$\frac{d}{dx}$實在是表示一個運算的記號，和$+$ $-$ $\times$ $\div$是同樣的情形。

但是$\frac{dy}{dx}$「也可以」看作一個分數，那就是dy和dx的比值，dx就是很小很小的Δx，dy就是很小很小的Δy；dy是y的微分，dx是x的微分，所以這個極限值也可以叫做微分比。

y對於x的微分比又有下列種種不同的記號——但是都表示一個意義。

$$\frac{dy}{dx} \equiv D_x y \equiv y' \text{（或是 } \dot{y}\text{，當着自變數是時間 } t \text{ 的時候。）}$$

憑了這個微分比，我們就可以研究出：當着x變的時候，y究竟是怎樣的變法。——這是一

個最重要的基本關鍵；同時這個問題也就是一個最重要的基本課題。

第十站

如果y是x的函數，則y對於x的微分比叫做第一次微分比。

第一次微分比可能還是x的函數，所以我們可以再求它對於x的微分比，——就叫做第二次微分比。

第二次微分比，再求對於x的微分比，就叫做第三次微分比。

照這樣一次一次的求下去，我們可以求出第n次的微分比。

像這樣求微分比的手續叫做求微分；簡單一點，也叫做微分，——不過這是一個動詞。

上面曾經說過，$\frac{dy}{dx}$有兩個意義，一個是把它看成一個極限值，用微分的方法去求，所以應當記為$\frac{d}{dx}y$；一個是把它看成一個分數，這纔能夠記為$\frac{dy}{dx}$，——這也就是叫做微分比的一個原因。

但是第二種看法，只有在「第一次微分比」的時候是對的，二次以上的微分比，這個看法就不一定都對了。所以這個名詞實在考究起來也是有問題的。我們用這個名詞的用意，不過是因為看起來容易熟悉一點。

同時，也就是因爲這個原因，二次以上的微分比的記號就變了：

一次微分記爲 $\frac{d}{dx}y \equiv \frac{dy}{dx}$,

二次微分記爲 $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$,

三次微分記爲 $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \equiv \frac{d^3y}{dx^3}$,

n 次微分記爲 $\frac{d^ny}{dx^n}$.

n 次微分也有下列種種不同的記號，但是意義是一致的。

$$\frac{dy}{dx} \equiv D_x y \equiv y',$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \equiv D_x{}^2 y \equiv y'',$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} \equiv D_x{}^n y \equiv y^{(n)}$$

例如：——

(1) $y = x^2$, 則 $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$,

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

當着 $\Delta x \longrightarrow 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 2x$, 或 $\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$.

(2) $y = x^3$, 則 $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$,

$$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2,$$

當着 $\Delta x \longrightarrow 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$, 或 $\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$.

(3) $y = x^n$, 則 $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, 或 $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

(4) $y = c$, $c =$ 常數.

則 $y + \Delta y = c$, $\Delta y = 0$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$,

當着 $\Delta x \longrightarrow 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$, 或 $\dfrac{d}{dx}c = 0$.

(5) $y=x$, 則 $\Delta y=\Delta x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$,

當着 $\Delta x\longrightarrow 0$, $\frac{dy}{dx}=1$, 或 $\frac{d}{dx}x=1$.

上面這幾個例，(3) (4) (5) 同時也就是求微分的三個基本公式。

下邊這個例，就是上面那些公式的應用。

例：設 $y=x^5$

則 $\frac{dy}{dx}=5x^4$, $\frac{d^2y}{dx^2}=20x^3$,

$\frac{d^3y}{dx^3}=60x^2$, $\frac{d^4y}{dx^4}=120x$,

$\frac{d^5y}{dx^5}=120$, $\frac{d^6y}{dx^6}=0$.

在幾何方面，$y=f(x)$ 表示平面上一根曲線。$\frac{dy}{dx}$ 表示曲線上任何一點的線坡。

設 P: (x, y); P': $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\tan\angle P'PQ=\tan\tau'$

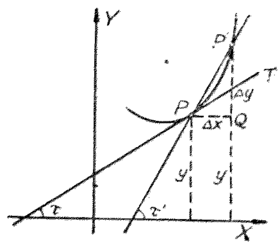
當着 $\Delta x \longrightarrow 0$，$P' \longrightarrow P$，

割線 $PP' \longrightarrow$ 切線 PT，

$\tau' \longrightarrow \tau$，

所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \tan\tau$，

也就是：$\dfrac{dy}{dx} = \tan\tau$，



根據這個幾何的性質，我們就可以研究曲線的方向，以及其他的性質。

如果 $y=f(x)$，x 的數值有限制的話，y 的對應數值也可能有個限制。假設在這些 y 的數值裏以 $y=A$ 最大，則 A 叫做 y 的極大值。

假設在這些 y 的數值裏以 $y=a$ 最小，則 a 叫做 y 的極小值。

以上是 y 的絕對極大值和 y 的絕對極小值。

假設 $y=B$ 比左右鄰近的 y 的數值都大，則 B 叫做 y 的相對極大值。

假設 $y=b$ 比左右鄰近的 y 的數值都小，則 b 叫做 y 的相對極小值。

y的極大值或是極小值，絕對的或是相對的，都和微分比有關係，所以可以利用微分比去解決極大或是極小的問題。

第十一站

假設x增大了y也增大，y是x的昇函數。假設x增大了y反而減小，y是x的降函數。在幾何上，畫曲線的次序是「自左而右。」y是x的昇函數時，曲線越畫越高；y是x的降函數時，曲線越畫越低。

一個函數，假設從降函數變成昇函數，它的曲線是先下來再上去，這樣的曲線叫做向上彎。

一個函數，假設從昇函數變成降函數，它的曲線是先上去再下來，這樣的曲線叫做向下彎。

一個單昇不降，或是單降不昇的函數，叫做單調函數。

一根曲線，往下變成往上的地方，或是往上變成往下的地方，叫做轉彎點。一根曲線從向下彎變成向上彎的地方，或是從向上彎變成向下彎的地方，叫做拐彎點。

這些性質都和一二三次微分比有關係，所以知道了一個函數的一二三次微分比就可以研究曲線的這些性質。

第十二站

一個動點P所走的路線，叫做P點的軌跡。畫出這個軌跡，叫做描跡。

如果一個P點的坐標x，y能夠適合 $y=f(x)$ 這個關係，那麼這個函數的圖形也就是P點的軌跡。

假設 $y=f(x)$ 能夠適合於下列這個事實，

當着 $x\longrightarrow a$ 的時候，$f(x)\longrightarrow f(a)$.

我們說：$y=f(x)$ 在 $x=a$ 的地方是連續的。如果不能適合這個事實，我們說：$y=f(x)$ 在 $x=a$ 的地方是不連續的。

連續或是不連續，對於圖形的解釋，是和普通的說法完全一致的。

應用垂直坐標：直線是二元一次方程式；圓，橢圓，拋物線，雙曲線，都是二元二次方程式。

應用極坐標，那些像6，像8的各種曲線方程式，可以參考解析幾何學。

第十三站

因為：　　所以：

$x+y-y=x$，　　加減互為逆算。

$x\times y\div y=x$，　　乘除互為逆算。

$(\sqrt[y]{x})^y = x$, 乘方開方互爲逆算。

$a^{\log_a x} = x$, 指數對數互爲逆算。

$\sin(\sin^{-1}x) = x$, 三角函數和反三角函數互爲逆算

求微分是化整爲零，求積分是化零爲整。一個是知道全體求部分，一個是知道部分求全體。

關於表示總和的記號，可以按照下列方式縮簡：

$$S = a + b + c + d + \cdots\cdots + n,$$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_n,$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

如果i的開始數和終止數是已知的，假設不致發生誤會，我們還可以簡縮爲：

$$S = \sum^{n} a_i = \sum a_i = \sum a$$

如果曲線上有兩個鄰近的點P和P'，則：

當着 $P' \longrightarrow P$, $\widehat{PP'}/\overline{PP} \longrightarrow 1$

P'近於P的時候，PP'弧和PP'弦是兩個等值的無窮小，——這是可以證明的一個定理，這個

定理非常重要。

如果Y是x的函數，而且

$$\frac{d}{dx}Y=y,\quad y\text{ 是 }Y\text{ 對於 }x\text{ 的微分比；}$$

那麼反過來說，

$$\int y\,dx=Y,\quad Y\text{ 就是 }y\text{ 對於 }x\text{ 的積分。}$$

因爲：

$$\frac{d}{dx}\left[\int y\,dx\right]=y.$$

所以：

微分和積分互爲逆算。

例如：

(1) 因爲 $\frac{d}{dx}x^2=2x$， 所以 $\int 2x\,dx=x^2$，

$2\int x\,dx=x^2$， $\therefore\ \int x\,dx=\frac{x^2}{2}$。

(2) 因爲 $\frac{d}{dx}x^3=3x^2$， 所以 $\int 3x^2dx=x^3$，

$3\int x^2dx=x^3$， $\therefore\ \int x^2dx=\frac{x^3}{3}$。

(3) 因為 $\frac{d}{dx}x^{n+1}=(n+1)x^n$, 所以 $\int(n+1)x^n dx = x^{n+1}$,

$(n+1)\int x^n dx = x^{n+1}$, $\therefore \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

(4) 因為 $\frac{d}{dx}c=0$, 所以 $\int 0 \quad x = c$, （c 是任意常數）。

(5) 因為 $\frac{d}{dx}x=1$, 所以 $\int 1dx = x$,

或 $\int dx = x$.

d 和 $\int$ 可以對消，$\frac{d}{dx}$ 和 $\int\cdots\cdots dx$ 也可以對消，就和 $+$，$-$，$\times$，$\div$，等次的乘方和開方一樣。上面這幾個例，(3) (4) (5) 也就是求積分的三個基本公式。下面這個例，就是那些公式的應用。

例： 設 $y=5x^4+4x^3-3x^2-2x+1$

則 $\int ydx = \int(5x^4+4x^3-3x^2-2x+1)dx$,

$= \int 5x^4dx + \int 4x^3dx - \int 3x^2dx - \int 2xdx + \int dx$,

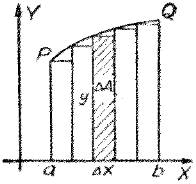
$$=5\int x^4dx+4\int x^3dx-3\int x^2dx-2\int xdx+\int dx,$$

$$=x^5+x^4-x^3-x^2+x+c,$$ （c 是個任意常數）。

因此 $\frac{d}{dx}(x^5+x^4-x^3-x^2+x+c)=5x^4+4x^3-3x^2-2x+1.$

第十四站

設曲線 c 是 $y=f(x)$。



因為 $\Delta A=y\Delta x,$

所以 $\Sigma\Delta A=\Sigma y\Delta x;$

當着 $\Delta x\longrightarrow 0,\quad \Sigma y\Delta x\longrightarrow PabQ,$

所以 $A=\int dA=\int ydx.$

但是，因為——

$$\frac{d}{dx}(y+c)=\frac{dy}{dx}+\frac{dc}{dx}=\frac{dy}{dx};\qquad \frac{dc}{dx}=0,$$

$$\therefore \quad \int \frac{dy}{dx} dx = y + c.$$

c 是任意常數，$y+c$ 是不定值，所以這個積分叫做不定積分。

因爲：$\sqrt[n]{a^n}$ 可能有 n 個根，所以開方是乘方的一個更廣泛的還原。

因爲：$\sin^{-1}(\sin x)$ 可能等於 $x \pm 2n\pi$，所以反三角函數是三角函數的一個更廣泛的還原。

因爲：$\int \frac{dy}{dx} dx = y + c$，所以積分也是微分的一個更廣泛的還原。

因此，$\frac{d}{dx}\int y dx = y$，$\int \frac{dy}{dx} dx = y + c$，微分和積分先後的次序不同，則結果也不同；只有 $c=0$ 的時候，纔是一個單純的還原。

第十五站

設曲線 c 是 $y=f(x)$，則可能

$$A = \int y dx + c$$

但 $x=a$ 的時候，$A=0$，所以 $c = -\left[\int y dx\right]_{x=a}$

因而 $A = \int y dx - \left[\int y dx\right]_{x=a}$

所以 $x=b$ 的時候，

$$A=\left[\int y\,dx\right]_{x=b}-\left[\int y\,dx\right]_{x=a}=\left[\int y\,dx\right]_{x=a}^{x=b}$$

同時又因爲——

$$\Delta A=y\Delta x,\quad \Sigma\Delta A=\Sigma y\Delta x,$$

當着 $\Delta x\longrightarrow 0,\quad \Sigma y\Delta x\longrightarrow \int_a^b y\,dx,$

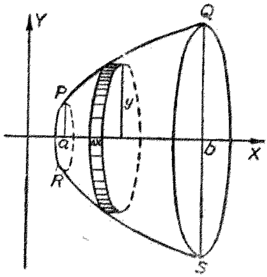
所以：$\int_a^b y\,dx=\left[\int y\,dx\right]_{x=a}^{x=b}$

這就是利用積分求總和的一個基本定理。由於這個定理，於是積分的應用就更加推廣。

設曲線 c 是 $y=f(x)$。如 c 圍繞 X 軸旋轉一週，則成爲旋轉體 $PQRS$。

把這個旋轉體切成 n 片，每片近似一個圓柱體：半徑是 y，厚是 Δx；那麼體積就是：

$$\pi y^2\Delta x$$



然後把這些圓柱加起來，總和是：

$$\Sigma\pi y^2\Delta x = \pi\Sigma y^2\Delta x$$

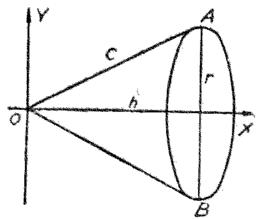
當着 $\Delta x \longrightarrow 0,\quad \pi\Sigma y^2\Delta x \longrightarrow \pi\int_a^b y^2dx = \pi\left[\int y^2dx\right]_{x=a}^{x=b}$

因此，由於 $y=f(x)$ 而成的旋轉體，它的體積V就應當是下面這個公式：

$$V = \pi\int y^2dx$$

例如：

(1) c: $y=\frac{r}{h}x$, 是一條直線。



A是c上一點： $x=h,\quad y=r.$

從 $x=0$ 到 $x=h$，這個旋轉圓錐體的體積是：

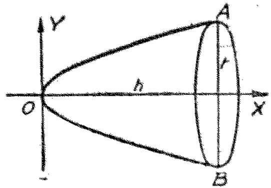
$$V=\pi\int_0^h y^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{\pi r^2}{3h^2}\Big[x^3\Big]_0^h$$

$$\therefore\quad V=\frac{\pi r^2}{3h^2}h^3=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

(2) c: $y^2=x$, 是一個拋物線。

A 是 c 上一點： $x=h \quad y=r=\sqrt{h}$

從 $x=0$ 到 $x=h$，這個旋轉拋物線體的體積是：



$$V=\pi\int_0^h y^2dx=\pi\int_0^h xdx=\frac{\pi}{2}\Big[x^2\Big]_0^h$$

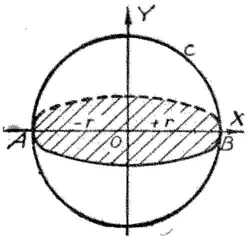
$$\therefore \quad V=\frac{\pi}{2}h^2, \quad 或 \quad V=\frac{1}{2}\pi r^2.$$

(3) c: $x^2+y^2=r^2$, 或 $y^2=r^2-x^2$，是一個圓。

A, B 是 C 上兩個點：——

A: $x=-r, \quad y=0,$

B: $x=+r, \quad y=0.$



從 $x=-r$ 到 $x=+r$，這個旋轉球的體積是：

$$V=\pi\int_{-r}^{+r} y^2dx=\pi\int_{-r}^{+r}(r^2-x^2)dx$$

$$=\pi\Big[r^2x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-r}^{+r}=\pi\Big(\frac{2}{3}r^3+\frac{2}{3}r^3\Big)$$

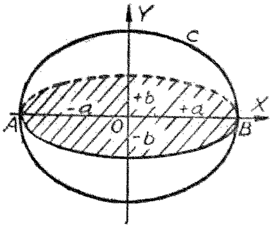
$$\therefore \quad V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

(4) c: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 或 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, 是一個橢圓。

A, B 是 C 上兩個點:——

$$A: \quad x=-a, \quad y=0;$$

$$B: \quad x=+a, \quad y=0.$$



從 $x=-a$ 到 $x=+a$, 這個旋轉橢圓球的體積是:

$$V=\pi\int_{-a}^{+a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)dx$$

$$=\frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a}=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(\frac{2}{3}a^3+\frac{2}{3}a^3\right)$$

$$\therefore \quad V=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

假設 $z=f(x, y)$, 分別對於 x 和 y 求出的積分叫做二重積分, 例如:

$$\iint z\,dx\,dy$$

假設 $u=f(x, y, z)$, 分別對於 x, y 和 z 求出的積分叫做三重積分, 例如:

$$\iiint u\,dx\,dy\,dz$$

這些可以用來求任意面積或是任意體積。

二重積分和三重積分雖然也可以看作微分比的還原，但是因為 z 和 u 的自變數不止一個 x，所以它們的微分比也就複雜得多了！

研究這一類的微分比和積分，這已經是進入高等微積分的範圍。

第十六站

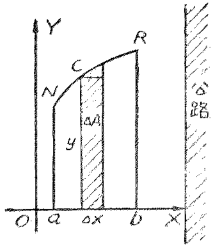
設 c 是 $y=f(x)$ 一個曲線的地界。N，R 是 c 上的兩個點，——

$$N:\ x=a,\ y=0;$$

$$R:\ x=b,\ y=0.$$

則 $\Delta A = y\Delta x = f(x)\Delta x$

設受益因數的規定每單位面積應納稅 v 元，而 v 的大小按照距離公路的遠近來定，因此也就可以看成與 Y 軸的遠近來定。——



Y 軸的選定是 $x=0$ 的地方。設

$$v=F(x)$$

則 ΔA 應當納的稅是：

$$v\Delta A = vy\Delta x = F(x)\cdot f(x)\Delta x$$

$$\therefore \quad \Sigma v\Delta A = \Sigma F(x)\cdot f(x)\Delta x$$

當着 $\Delta x \longrightarrow 0,\quad \Sigma F(x)\cdot f(x)\Delta x \longrightarrow \int_a^b F(x)\cdot f(x)dx,$

即 $U = \int_a^b F(x)\cdot f(x)dx,$

或 $U = \int_a^b vydx$

一塊地應納的稅，與面積大小有關，同時又和公路的遠近有關，這是積分應用的一個算例。

設本銀爲P，年利率爲r，n爲一年內結算的期數。按照複利計算，一年的本利和是：

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

如果按照連續複利計算，則一年的本利和是：

$$n \longrightarrow \infty,\quad A = P\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^r \longrightarrow Pe^r$$

因爲 $n \longrightarrow \infty$，$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} \longrightarrow e$

同理，設 m 為年數。則按照複利計算，m 年的本利和是：

$$A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nm}$$

如果按照連續複利計算，則 m 年的本利和是：

$$n\longrightarrow\infty,\quad A=P\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{mr}\longrightarrow Pe^{mr}$$

要想斷定 e 的數值，應當分兩部來討論。

第一，先要證明這個極限是存在的。

問題是：設 $x\longrightarrow\infty$，求證 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ 有一個極限值。

證：
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=1+x\frac{1}{x}+\frac{x(x-1)}{2!}\,\frac{1}{x^{2}}+\cdots\cdots+\frac{x(x-1)(x-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}{x!}\,\frac{1}{x^{x}}$$
$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{x!}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x-1}{x}\right)$$
$$<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{x!}$$

$$<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^x}$$

因爲當着 $x\longrightarrow\infty$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^x}\longrightarrow 1$，

所以當着 $x\longrightarrow\infty$，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<2+1=3$

因爲 x 增加的時候，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 也增加，這是一個越變越大的昇函數——但是無論怎樣變大，卻是總比一個固定的數值3還小，所以按照上面講過的情形，可以論斷這個極限 e 是存在的；而且 e 在2與3之間，那就是：

$$2<e<3.$$

第二，再計算 e 的數值。

設：$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\therefore\quad\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)+\cdots\cdots$$

當着 $x\longrightarrow\infty\quad\frac{1}{x},\ \frac{2}{x},\ \frac{3}{x}\cdots\cdots\longrightarrow 0\quad\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\longrightarrow e$

所以 $e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots\cdots$

	1.	$=1$
2	1.0000000000	$=1$
3	0.5000000000	$=1\div 2!$
4	0.1666666666	$=1\div 3!$
5	0.0416666666	$=1\div 4!$
6	0.0083333333	$=1\div 5!$
7	0.0013888888	$=1\div 6!$
8	0.0001984126	$=1\div 7!$
9	0.0000248015	$=1\div 8!$
10	0.0000027557	$=1\div 9!$
	0.0000002755	$=1\div 10!$
	2.7182818|007	

$\therefore \quad e=2.7182818\cdots\cdots$

這是個無理數，——算到三十位小數，應當是：

$$e=2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\cdots\cdots$$

但是最後還有一點聲明。我們證明極限值e存在的時候，無形中還有一個假定，就是假設x是一個正整數，——然後纔可以用二項式定理來展開。

然而，不但x是正整數，即便是正負有理數，或是正負實數，這個極限值還是存在的，而且結果還是一個e，一個極限值。我們現在雖然不再證明，可是這個事實是應當知道的。

微積分的內容，當然還不僅止於此。現在所說的，連個粗枝大葉也不夠，而且要想學習微積分，至少關於代數和解析幾何都得知道一點。——但是，就拿這個粗淺的介紹來說，我們已經可以看出來，它的內容是多麼豐富，而且它的應用又是多麼寬廣。只要有機會，我們都應當好好的學習一下！