Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 43

Übungsaufgaben

Aufgabe 43.1. Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.2. Sei M eine quadratische $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Es sei φ_1 eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t)$$

und φ_2 eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_2(t).$$

Zeige, dass $\varphi_1 + \varphi_2$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t) + z_2(t)$$

ist.

Aufgabe 43.3. Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten zu einer reellen $n \times n$-Matrix M und sei $u \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von M zum Eigenvektor $\lambda = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Zeige, dass $e^{at}\cos(bt) \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(u_1) \\ \vdots \\ \operatorname{Re}(u_n) \end{pmatrix}$ und $e^{at}\sin(bt) \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(u_1) \\ \vdots \\ \operatorname{Im}(u_n) \end{pmatrix}$ Lösungen des Systems sind.

Aufgabe 43.4. Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, sei L der Lösungsraum dieses Systems und sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung

$$L \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ \varphi \longmapsto \varphi(t_0),$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Aufgabe 43.5. Wie transformieren sich in Lemma 43.5 die Anfangsbedingungen?

Aufgabe 43.6.*

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 43.7. Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 43.8. Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 43.9.*

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 43.10.*

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 43.11. Finde für das zeitunabhängige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Lösungen mit $u(0) = a$ und $v(0) = b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ sind.

Aufgabe 43.12. Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten mit einer oberen Dreiecksmatrix M. Zeige, dass es ein Fundamentalsystem von Lösungsfunktionen $v_1, \ldots, v_n$ mit

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

gibt.

Die folgenden Aufgaben löse man mit Lemma Anhang 2.1, man spricht vom *Ansatz vom Typ der rechten Seite.*

Aufgabe 43.13. Löse die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 5y = e^t.$$

Aufgabe 43.14.*

Löse die Differentialgleichung

$$y'' - y = e^t.$$

Aufgabe 43.15.*

Löse die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 9y = (t^2 - 8)e^{5t}.$$

Aufgabe 43.16. Löse die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 6y = (t^3 + 5t + 3)e^{2\mathrm{i}t}.$$

Aufgabe 43.17.*

Es sei $v' = Mv$ ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten in d Variablen und sei ein Punkt $P \in \mathbb{R}^d$ vorgegeben.

(1) Erstelle eine rekursive Formel für die Punkte P_n im Polygonzugverfahren zum Startpunkt $P_0 = P$ und zur Schrittweite s in dieser Situation.
(2) Erstelle eine geschlossene Formel für P_n zur Schrittweite s.
(3) Erstelle eine Formel für P_n zur Schrittweite $\frac{1}{n}$.

In eine Potenzreihe kann man nicht zur Zahlen einsetzen, sondern auch quadratische Matrizen, wobei die Potenzen als Matrixpotenzen zu interpretieren sind, und sich fragen, ob die entstehenden Folgen im Raum der Matrizen konvergieren.

Aufgabe 43.18. Es sei M eine reelle (oder komplexe) $d \times d$-Matrix. Zeige, dass

$$\begin{aligned}\exp M &= E_d + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}M^k\end{aligned}$$

im Raum der Matrizen konvergiert.

Aufgabe 43.19. Es sei $v' = Mv$ ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Zeige, dass die Lösung des Anfangswertproblems mit der Anfangbedingung $v(0) = w \in \mathbb{R}^d$ durch

$$v(t) = (\exp(tM))w$$

gegeben ist.

Verwende, dass die Ableitung der Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{Mat}_d(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{d^2},\ t \longmapsto \exp(tM),$$

gleich $M \cdot \exp(tM)$ ist.

Aufgabe 43.20. Begründe Lemma 43.1 mit Aufgabe 43.19.

Aufgabe 43.21. Es sei $v' = Mv$ ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten in d Variablen und sei $s \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, die einem Punkt $w \in \mathbb{R}^d$ den Ortspunkt zum Zeitpunkt s der Lösung des Anfangswertproblems $v(0) = w$ zuordnet, eine lineare Abbildung ist und durch die Matrix $\exp(sM)$ beschrieben wird.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 43.22. (6 Punkte)

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.23. (5 Punkte)

Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.24. (6 Punkte)

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.25. (5 Punkte)

Bestimme die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 + e^t \\ t \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 43.26. (4 Punkte)

Löse die Differentialgleichung

$$y'' + y' - 8y \ = \ (t^2 - 4t + 7)e^{3t}.$$

Abbildungsverzeichnis