Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 59

Übungsaufgaben

Aufgabe 59.1. Berechne das Integral

$$\int_Q xy \, d\lambda^2$$

über dem Quader $Q = [a, b] \times [c, d]$.

Aufgabe 59.2. Es sei G der Subgraph unterhalb der Standardparabel zwischen 1 und 3. Berechne das Integral

$$\int_G x^2 + xy - y^3 \, d\lambda^2 \, .$$

Aufgabe 59.3.*

a) Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ mit einer reellen Zahl aus $[c, d]$ addiert?

b) Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ mit einer reellen Zahl aus $[c, d]$ multiplizert?

c) Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ durch eine reelle Zahl aus $[c, d]$ ($c > 0$) dividiert?

Aufgabe 59.4.*

Berechne das Integral zur Funktion

$$f(r, s, t) \, = \, s^2 t + r \cos t$$

über dem Einheitswürfel $W = [0, 1]^3$.

Aufgabe 59.5.*

Berechne das Integral zur Funktion

$$f(r, s, t) \, = \, rst + t \sin s$$

über dem Einheitswürfel $W = [0, 1]^3$.

Aufgabe 59.6. Verallgemeinere Korollar 59.6 auf den Fall eines Quaders $Q = [a_1, b_1] \times [a_2 \times b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Aufgabe 59.7.*

Es sei

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2 \times b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

ein Quader im $\mathbb{R}^n$ und sei

$$f = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$$

ein Monom. Berechne $\int_Q f d\lambda^n$.

Aufgabe 59.8. Berechne das Integral $\int_T f d\lambda^3$, wobei $f(x,y,z) = xz$ und T der Einheitszylinder $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ -1 \leq x, y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ ist.

Aufgabe 59.9.*

Zeige, dass der Schwerpunkt eines Intervalls $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit dem arithmetischen Mittel der Intervallgrenzen übereinstimmt.

Aufgabe 59.10. Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

Aufgabe 59.11. Berechne mittels Integration den Schwerpunkt eines Dreiecks, das durch die drei Punkte $(0,0)$, $(a,0)$ und (b,c) (mit $a, c > 0$) gegeben sei.

Aufgabe 59.12. Zeige, dass der Schwerpunkt eines Dreieckes mit den Eckpunkten A, B, C gleich $\frac{A+B+C}{3}$ ist.

Für einen einfacheren Ansatz zur Lösung der vorstehenden Aufgabe siehe Aufgabe 60.13.

Aufgabe 59.13.*

Es seien $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte Teilmengen mit positivem Volumen derart, dass ihr Durchschnitt $S \cap T$ das Volumen 0 besitze. Es sei P der Schwerpunkt von S und Q der Schwerpunkt von T. Zeige, dass der Schwerpunkt der Vereinigung $S \cup T$ durch

$$\frac{\lambda^n(S)}{\lambda^n(S) + \lambda^n(T)} P + \frac{\lambda^n(T)}{\lambda^n(S) + \lambda^n(T)} Q$$

gegeben ist.

Zu einer endlichen Teilmenge $\{P_1, \ldots, P_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert man den Schwerpunkt durch $\frac{\sum_{j=1}^k P_j}{k}$. Dies ist kein Spezialfall von Definition 59.11, da dort vorausgesetzt wird, dass das Volumen der Teilmenge nicht 0 ist. Aufgabe 59.12 zeigt, dass für ein Dreieck der Schwerpunkt der drei Eckpunkte mit dem Schwerpunkt des flächigen Dreiecks übereinstimmt. Eine weitere Beziehung zwischen den beiden Konzepten wird durch die folgende Aufgabe gestiftet.

Aufgabe 59.14. Es seien $\{P_1, \ldots, P_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ endlich viele Punkte. Es sei $\epsilon > 0$ derart, dass die abgeschlossenen Bälle $B(P_j, \epsilon)$ paarweise zueinander disjunkt seien. Es sei

$$T = \bigcup_{j=1}^{k} B(P_j, \epsilon).$$

Zeige, dass der Schwerpunkt von T gleich $\frac{\sum_{j=1}^{k} P_j}{k}$ ist.

Aufgabe 59.15. Bestimme den Schwerpunkt des oberen Einheitshalbkreises

$$\left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\, y \geq 0\right\}.$$

Aufgabe 59.16.*

Bestimme den Schwerpunkt derjenigen Fläche, die auf $[-1, 1]$ durch die Standardparabel und die durch $y = 1$ gegebene Gerade begrenzt wird.

Aufgabe 59.17. Bestimme den Schwerpunkt derjenigen Fläche, die auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ durch die beiden positiven Koordinatenachsen und den Graphen der Kosinusfunktion begrenzt wird.

Aufgabe 59.18. Bestimme durch Integration die x- und die $y-$Koordinate des Schwerpunktes der oberen Einheitshalbkugel (siehe Beispiel 59.12).

Aufgabe 59.19.*

Wir betrachten ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel die Länge 1 haben und dessen Winkel am Schenkelschnittpunkt 30 Grad beträgt.

(1) Berechne die Grundseite des Dreiecks.
(2) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgabe 59.20.*

Dr. Eisenbeis und Prof. Knopfloch haben einen runden Kuchen mit einem Durchmesser von 40 cm gebacken und ihn in 12 gleichgroße Kuchenstücke aufgeteilt. Am übernächsten Tag ist leider nur noch ein Stück übrig, das sie gerecht aufteilen möchten. Da Dr. Eisenbeis den Rand nicht mag, teilen sie nicht der Länge nach, sondern so, dass die eine Hälfte ein gleichschenkliges Dreieck wird.

(1) Wie lang ist die Schnittkante?
(2) Liegt der Schwerpunkt des Kuchenstücks auf der Schnittkante? Falls nein, wer isst den Schwerpunkt?

Tipp: Bei einen gleichschenkligen Dreieck mit dem Winkel 30 Grad ist das Verhältnis von Grundfläche zu Schenkellänge gleich $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (siehe Aufgabe 59.19). Vergleiche mit dem Schwerpunkt des gleichschenkligen Dreiecks, das entsteht, wenn man das Kuchenstück zu einem gleichschenkligen Dreieck auffüllen würde, als den runden Rand durch eine im Randmittelpunkt tangentiale gerade Strecke ersetzt. Bei einem Dreieck mit den Ecken A, B, C liegt der Schwerpunkt in $\frac{A+B+C}{3}$.

Zur exakten Berechnung des Schwerpunktes in der vorstehenden Situation siehe Aufgabe 60.3.

Aufgabe 59.21.*

Es sei $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion. Zeige, dass der Schwerpunkt des Intervalls $[a,b]$ zur Massenverteilung f mit der x-Koordinate des geometrischen Schwerpunktes des Subgraphen zu f übereinstimmt.

Aufgabe 59.22. Auf der quadratischen Platte $P = [-1,1] \times [-1,1]$ sei eine elektrische Ladung gemäß $f(x,y) = y - x^2$ verteilt. Bestimme den Schwerpunkt der positiven Teilladung und den Schwerpunkt der negativen Teilladung.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 59.23. (5 Punkte)

Es sei G der Subgraph der Sinusfunktion zwischen 0 und π. Berechne die Integrale

a) $\int_G x \, d\lambda^2$,

b) $\int_G y \, d\lambda^2$.

Aufgabe 59.24. (5 Punkte)

Berechne das Integral zur Funktion $f(x,y) = x(\sin x)(\cos(xy))$ über dem Rechteck $Q = [0, 3\pi] \times [0,1]$.

Aufgabe 59.25. (6 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (u,v) \longmapsto \frac{2uv}{(u^2+1)(v^2+v+1)}.$$

Für welche Quadrate $Q = [a, a+1] \times [b, b+1]$ der Kantenlänge 1 wird das Integral

$$\int_Q f \, d\lambda^2$$

maximal? Welchen Wert besitzt es?

Aufgabe 59.26. (5 Punkte)

Berechne das Integral $\int_{B(P,r)} x^2 - y^3 d\lambda^2$ über der Kreisscheibe $B(P,r)$ in Abhängigkeit von $P = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 59.27. (4 Punkte)

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ mit den zugehörigen Koordinatenfunktionen $y_1, \ldots, y_n$. Es sei $f\colon\ T \to \mathbb{R}$ eine stetige Massenverteilung auf T mit der Gesamtmasse $M > 0$. Zeige, dass

$$t_i \;=\; \frac{1}{M} \int_T y_i \cdot f d\lambda^n$$

die i-te Koordinate des Schwerpunktes von T bezüglich dieser Basis ist.

Abbildungsverzeichnis