

として與へられる。 f' の面に於けるものは、上式に於て、

$$r = x, \quad y = 0$$

を代入して、

$$\mathbf{E}_y = -\frac{e}{4\pi c^2 x} (\dot{\mathbf{v}}_y)_{t-\frac{x}{c}}$$

となる。夫故に、 $f\Delta$ の體積内の總ての電子に依るものは、上式を總ての電子に對して加へて、

$$\mathbf{E}_y = -\frac{1}{4\pi c^2 x} (\Sigma e \dot{\mathbf{v}}_y)_{t-\frac{x}{c}}$$

となる。

面 f を通過するエネルギーは、

$$f \mathbf{S}_x = c \mathbf{E}_y^2 f'$$

を以て與へられる。物質内に於ける電子の運動は不規則なる故、上式を相當に長き時間の間に平均すれば、

$$f' \bar{\mathbf{S}}_x = c f' \bar{\mathbf{E}}_y^2 = c f' \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \mathbf{E}_y^2 dt$$

となる。 f から發する輻射エネルギーに依る電場のベクトルを、フーリエの級數を以て表はし、

$$\mathbf{E}_y = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin \frac{s\pi}{\theta} t$$

$$a_s = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \mathbf{E}_y \sin \frac{s\pi}{\theta} t dt$$

とする。上式の s に相當する振動數を n とすれば、

$$n = \frac{s\pi}{\theta}, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{n} = \frac{2c\theta}{s}$$

の關係を得る。 λ は、 n に相當する波長を表はす。又上の關係から、

$$\frac{n_{s+1} - n_s}{n_s} = \frac{s+1-s}{s} = \frac{1}{s}$$

となる。即ち、 s の小なるものは n は小にして、 λ は大となる。波長 λ のあまり大なるものは、輻射エネルギーとして現はれない。又、 s が相當に大であれば相隣れる振動數の差は殆んど零となる故、輻射エネルギーに含まれる振動數は、殆んど連続的となることが知れる。

フーリエの級數で表はした \mathbf{E}_y の値を用ひれば、 f' 面に到達する單位面積毎のエネルギーは、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_x &= \frac{c}{\theta} \int_0^\theta \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin \frac{s\pi}{\theta} t \sum_{s'=1}^{\infty} a_{s'} \sin \frac{s'\pi}{\theta} t dt \\ &= \frac{c}{2} \sum_{s=1}^{\infty} a_s^2 \end{aligned}$$

となる。但し、上の積分に於ては $s=s'$ のもののみが残り、 $s \neq s'$ なる項は總て零となる。

今 f' に到達する輻射エネルギーの内、振動數が n と $n+dn$ の間にあるものを取り、各振動に相當する輻射エネルギーの強さ、即ち振幅 a_s は總て相等しきものと

すれば、振動数が n と $n + dn$ の間に存在する輻射線は

$$ds = \frac{\theta}{\pi} dn$$

なる故、 f' の単位面積に到達するエネルギーは、

$$\bar{S}_x ds = \frac{c}{2} a_s^2 ds = \frac{ca_s^2 \theta}{2\pi} dn$$

となる。

次に、 s 番目の振動の振幅 a_s は既に求めたる積分式の \mathbf{E}_v に、最初に求めたる値を代入すれば、

$$a_s = -\frac{e}{2\pi c^2 \theta x} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{\theta} (\dot{\mathbf{v}}_v)_{t-\frac{x}{c}} \sin \frac{s\pi}{\theta} t dt$$

となる。又、

$$\int_0^{\theta} (\dot{\mathbf{v}}_v)_{t-\frac{x}{c}} \sin \frac{s\pi}{\theta} t dt = -\frac{s\pi}{\theta} \int_{-\frac{x}{c}}^{\theta-\frac{x}{c}} (\mathbf{v}_v)_t \cos \frac{s\pi}{\theta} \left(t + \frac{x}{c}\right) dt$$

となる。上の積分の極限の時間は、電子と分子との相隣れる二つの衝突の間の時間をとれば充分である。この時間の中に於ては、 \mathbf{v}_v 及び $\cos \frac{s\pi}{\theta} \left(t + \frac{x}{c}\right)$ は一定と見做すも差支へなし。依つて上の積分の値は、

$$-\frac{s\pi}{\theta} \tau \mathbf{v}_v \cos \frac{s\pi}{\theta} \left(t + \frac{x}{c}\right)$$

となる。 τ は相隣れる二つの衝突の間の時間にして、 t はその中間の時間をとる。従つて振幅は

$$a_s = \frac{se}{2\theta^2 c^2 x} \sum_{s=1}^{\infty} \tau \mathbf{v}_v \cos \frac{s\pi}{\theta} \left(t + \frac{x}{c}\right)$$

となる。又各の電子の衝突間の経路は、互に無関係であると思ふことを得るが故に、その方向は何れにも同當に分布されて居る。即ち、 \mathbf{v}_v は正及び負に同等に分布されて居る。されば、振幅の二乗を求むるとき、 s の異なるものの積の項は零となり、各項の二乗のもののみが残る筈である。従つて、

$$a_s^2 = \frac{s^2 e^2}{4c^4 \theta^2 x^2} \sum_{s=1}^{\infty} \tau^2 \mathbf{v}_v^2 \cos^2 \frac{s\pi}{\theta} \left(t + \frac{x}{c}\right)$$

となる。又、

$$\mathbf{v}_v^2 = \frac{1}{3} \mathbf{v}^2, \quad l = \tau |\mathbf{v}|$$

なる故、上式に代入して

$$a_s^2 = \frac{s^2 e^2}{12c^4 \theta^2 x^2} \sum_{s=1}^{\infty} l^2 \cos^2 \frac{s\pi}{\theta} \left(t + \frac{x}{c}\right)$$

を得る。 l は電子の自由経路の長さである。

上の a_s^2 の加算は、先づ自由経路の一定のものに就て行ひ、更に l の相違するものに就て行へば宜しい。

自由経路 l の一定のものに就ては餘弦の角は 0 から $s\pi$ 迄とり得るが故に、上式に於ける餘弦の二乗の、 $0 - s\pi$ 間に於ける平均値は $\frac{1}{2}$ となる。従つて、 l の一定のものに對しては

$$a_s^2 = \frac{s^2 e^2}{24c^4 \theta^2 x^2} \sum l^2$$

となる。

次に、自由経路 l の異なるものに就ての加算を行ふ。電子と分子との衝突に於て、分子の質量は電子のそれに比して著しく大なるが故に、分子は静止状態にあると見做し、電子の速度は衝突後も変化せざるものとする。

θ の時間内に介在する自由経路の数は、

$$\frac{|\mathbf{v}|\theta}{\bar{l}}$$

である。 \bar{l} は平均自由経路の長さを表はす。そして、自由経路が l と $l+dl$ の間に介在する公算は、

$$\frac{1}{\bar{l}} e^{-\frac{l}{\bar{l}}} dl$$

である。従つて、自由経路が l と $l+dl$ との間に介在する自由経路の数は、上の関係から、

$$\frac{|\mathbf{v}|\theta}{\bar{l}^2} e^{-\frac{l}{\bar{l}}} dl$$

を以て表はされる。自由経路は、0 から ∞ 迄の値をとり得るが故に、 $\sum l^2$ に相當するものは、上式に l^2 を乗じて、積分すれば、

$$\sum l^2 = \int_0^{\infty} l^2 \frac{|\mathbf{v}|\theta}{\bar{l}^2} e^{-\frac{l}{\bar{l}}} dl = 2|\mathbf{v}|\theta\bar{l}$$

を得る。上の値は一つの電子に對するものである。されば、速度が $|\mathbf{v}|$ と $|\mathbf{v}|+d|\mathbf{v}|$ の間に介在して、 $f\Delta$ なる

體積内に存在する電子の全数は、

$$4\pi f\Delta N \sqrt{\frac{h^3}{\pi^3}} e^{-h\mathbf{v}^2} \mathbf{v}^3 d|\mathbf{v}|$$

である。従つて、全體の輻射エネルギーに相當するものは、 $|\mathbf{v}|$ に對して積分して、

$$\begin{aligned} \sum l^2 &= 8\pi f\Delta N \sqrt{\frac{h^3}{\pi^3}} \theta \bar{l} \int_0^{\infty} e^{-h\mathbf{v}^2} \mathbf{v}^3 d|\mathbf{v}| \\ &= 4Nf\Delta \frac{\theta \bar{l}}{\sqrt{h\pi}} \end{aligned}$$

を得る。又電子の平均の速度を v とすれば、

$$h = \frac{3}{2} \frac{1}{v^2}$$

なるが故に、上式は、

$$\sum l^2 = 4 \sqrt{\frac{2}{3\pi}} N f \Delta \theta \bar{l} v$$

となる。従つて、振幅の二乗は

$$a_s^2 = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{s^2 e^2 \bar{l} N v}{6 c^4 \theta^2 x^2} f \Delta$$

となる。夫故に、 f' の面に到達するエネルギーの内、その振動数が、 n と $n+dn$ の間にあるものは、

$$f' \bar{S}_s dn = \frac{f' c \theta q^2}{2\pi} dn = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{s^2 e^2 \bar{l} N v}{12\pi c^4 \theta^2 x^2} f f' \Delta dn$$

である。上に掲げたる関係から、 s を n を以て表はせ

ば、上式は、

$$\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{e^2 \bar{N} v}{12\pi^3 c^3 x^2} f f' \Delta n^2 dn$$

となる。即ち、 f' に到達する輻射エネルギーは、輻射の發する面積 f 、及び到達する面積 f' に比例して、その間の距離 x の二乗に逆比例することを示す。今上式を

$$E \frac{f f'}{x^2} \Delta dn$$

と置き $n = 2\pi\nu$ を入れ、二式を比較して、

$$E = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{2e^2 \bar{N} v}{3c^3} \nu^2 \quad 126$$

を得る。Eを發散率と名付けて居る。

吸収率A、即ち125式と、上式との比をとれば、

$$E_0 = \frac{E}{A} = \frac{2\nu^2}{3c^2} \alpha T \quad 127$$

となる。E₀は上式が示す如く總ての物質に就て一定にして、完全暗黒體の發散率を表はす。この結果は、キルヒホッフ¹の關係と全く同様である。既に掲げた α の値を代入すれば、

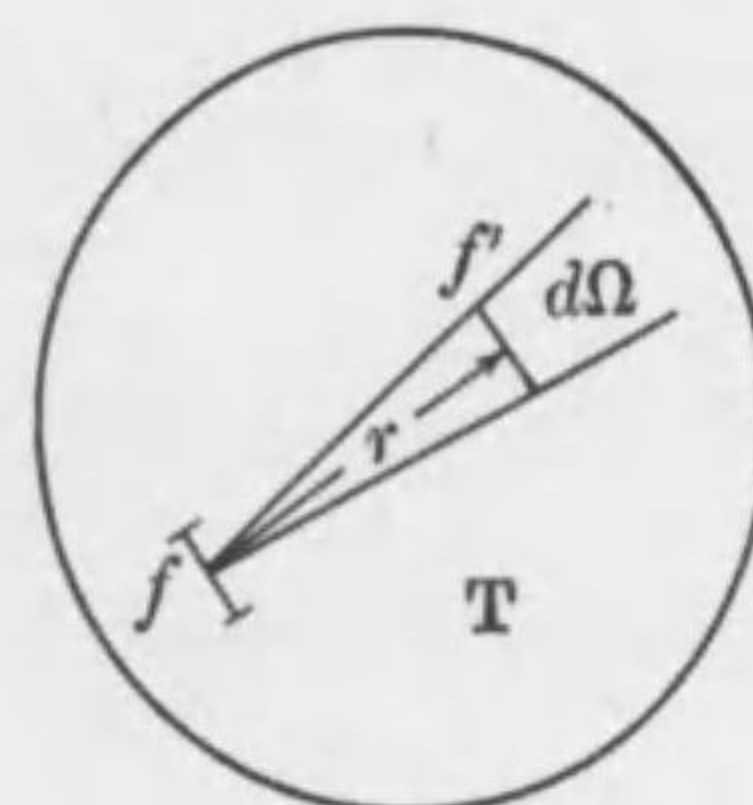
$$E_0 = \frac{\nu^2}{c^2} kT$$

となる。kはボルツマンの常數である。

¹ G. Kirchhoff, Ann. d. Phys. Chem. Bd. 109 (1860), s. 275.

次に、輻射エネルギーを發散する物體を、完全暗黒體を以て作つた密閉室内に封入し、その内部の溫度を一定に保持すれば、輻射エネルギーも亦一定であることは、上に求めたるE₀の關係式からも知られることである。

第四十四圖



第四十四圖に示す如く、今室内の溫度を絶対溫度Tとし、 f と f' の距離を r とする。 f の面から發散して、 f' の面に到達する振動數 n の輻射エネルギーは上に述べたる如く、

$$E_0 \frac{f f'}{r^2} dn = E_0 f d\Omega dn$$

である。 $d\Omega$ は f' を含む立體角である。又、振動數が n なる輻射エネルギーの、單位體積に於けるものを、

$$U_\nu dn$$

を以て表はせば、單位時間に f の面を通過するものは

$$fc U_\nu dn$$

である。

126式を求むる計算に於ては、輻射エネルギーは總て f に垂直なる方向のみをとつたのであるが、完全暗

黒體の室内に於ては、一般に總ての方向を考慮することを必要とする。即ち、 E_v の代りに $\pm E_v$ をとる可きである。従つて、 f 面に到達するエネルギーは上に求めたるものの二倍をとる必要がある。そして、それを全空間に積分すれば、

$$2 E_v f d n \int d \Omega = 8 \pi E_v f d n$$

となる。これは又、面 f を通過するエネルギーに等しき故、

$$8 \pi E_v f d n = f c U_v d n$$

となる。従つて、單位體積に於ける輻射エネルギーは

$$U_v = \frac{8 \pi}{c} E_v = \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} k T \quad 128$$

となる。即ち、完全暗黒體の室内の空間に於ける單位體積のエネルギー U_v は、振動数の二乗と絶対温度とに比例することを示す。この關係は、レーレー¹が熱力學的考察に於て求めたエネルギー輻射の關係と同様にして、其後ヂーンズ²も亦同様の關係を出した。又プランク³が量子論に於て求めたエネルギー輻射の關係式に於て、波長の長き場合に相當するものである。

1. Lord Rayleigh, Phil. Mag. vol. 49, (1900), p. 539.

2. Jeans, Phil. Mag. vol. 10, (1905), p. 91.

3. M. Planck, Wärmestrahlung, Leiptig, (1906), s. 118; Sitz. Ber. der k. Akad. der Wiss. Bd. 35, (1911).

第六章

ゼーマン効果

磁場の影響を受けて光の偏光面が廻轉することは、ファラデー¹に依つて最初に発見された現象である。其後、1877年ケル²は鐵の鏡を磁化してこれに光を當て、その反射光が偏光することを見出した。この現象は、ケル効果として知られて居る。

1896年、ゼーマン³は光源を磁場内に置き、スペクトルの磁場に依る影響を實驗した結果、スペクトル線は磁場の影響を受けて一定の數に分離すること、及びその分離の距離は磁場の強さに比例することを見出した。ゼーマンは、最初カドミウム^{Ca}の綠線に就て實驗した結果、磁場の方向に於ては元線の位置の左右に各一本宛即ち二本に見へ、磁場に直角の方向に於ては元線とその位置を中心として同距離に於ける各一本宛即ち三本に分れることを見出した。前者を縦のゼーマン効果と名付け、後者を横のゼーマン効果と名付け

1. M. Faraday, Experimental Research, (1845), § 2152.

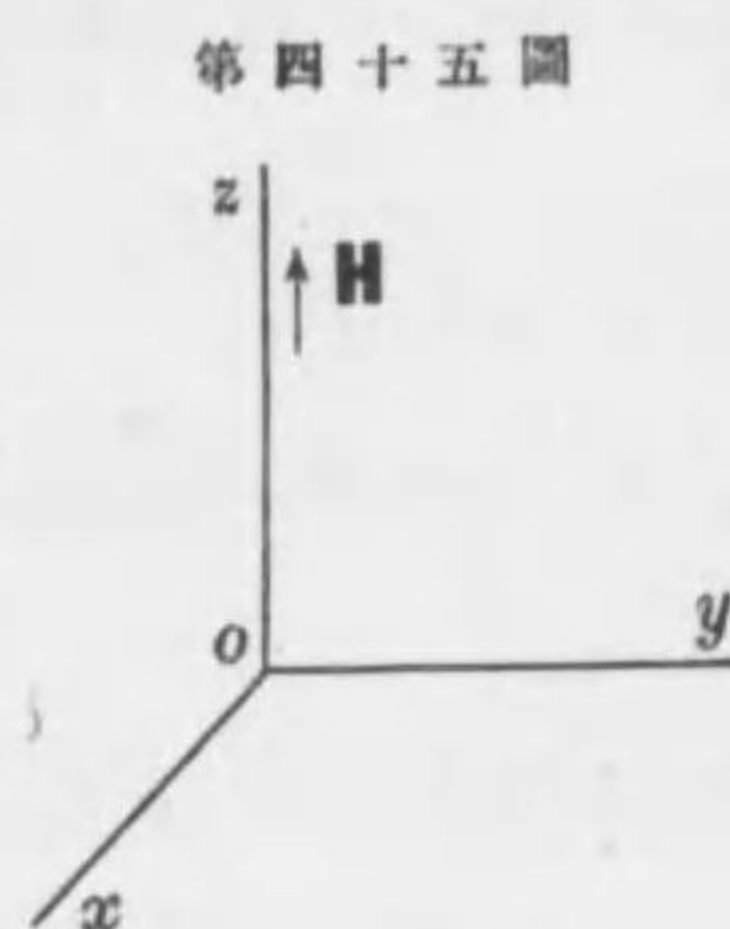
2. J. Kerr, Phil. Mag. (1877), may.

3. P. Zeeman, Zittingsversl. Amsterdam. vol. 5, (1896), p. 181, 242; Phil. Mag. (5) vol. 43, (1897), p. 226; vol. 44 (1897), p. 55, 255; vol. 45, (1898), p. 197

て居る。斯様に、簡單なる規則に適合する如く分離するものを標準ゼーマン効果と名付けて、ローレンツが電子論に依つて説明を與へた。

ローレンツの電子論に於ては、光は物質内に於ける電子の振動に依るとしてこれに對する磁場の影響を求めたものである。

第四十五圖に示す如く、均等的磁場の方向は z 軸の方向にあるものとし、振動電子の速度を \mathbf{v} とすれば、磁場の作用の許に於ける電子の運動の式は、



$$m_0 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -f \mathbf{r} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

を以て表はされる。磁場は z 軸の方向にある爲めに、

$$H_z = |\mathbf{H}|, \quad H_x = H_y = 0$$

である。従つて、電子の運動の式の x, y, z 分は、

$$m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} = -fx + \frac{e}{c} \frac{dy}{dt} H_z$$

$$m_0 \frac{d^2 y}{dt^2} = -fy - \frac{e}{c} \frac{dx}{dt} H_z$$

$$m_0 \frac{d^2 z}{dt^2} = -fz$$

となる。

今、

$$x = a \cos(nt + \delta)$$

$$y = b \sin(nt + \delta)$$

と置き、運動の式の x, y 分に代入すれば、

$$-m_0 a n^2 = -fa + \frac{e}{c} b n H_z$$

$$-m_0 b n^2 = -fb + \frac{e}{c} a n H_z$$

を得る。上式から a, b を消去し、

$$n_0 = \sqrt{\frac{f}{m_0}}$$

と置けば、

$$(n_0^2 - n^2)^2 = \frac{e^2 H_z^2}{m_0^2 c^2} n^2$$

を得る。次に、上式の平方根をとり、その正負の符號のものに相當する振動數 n を、夫々 n', n'' とすれば、

$$n_0^2 - n'^2 = \frac{e H_z}{m_0 c} n'$$

$$n_0^2 - n''^2 = -\frac{e H_z}{m_0 c} n''$$

を得る。従つて、夫々 $n = 2\pi\nu$ を代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} \nu' &= -\frac{e H_z}{4\pi m_0 c} + \sqrt{\frac{e^2 H_z^2}{16\pi^2 m_0^2 c^2} + \nu_0^2} \\ \nu'' &= \frac{e H_z}{4\pi m_0 c} + \sqrt{\frac{e^2 H_z^2}{16\pi^2 m_0^2 c^2} + \nu_0^2} \end{aligned} \right\} \quad 129$$

を得る。 ν_0 は電子の固有振動に依る振動數にして、これは磁場の作用なきときのスペクトル線の振動數を

示すものである。 ν', ν'' は磁場が作用する爲めに ν_0 の左右に同じ距離に分離するスペクトル線の振動数を表はす。今、 ν'', ν' の差を求めれば、

$$\nu'' - \nu' = \frac{eH_z}{2\pi m_0 c} = \frac{e|H|}{2\pi m_0 c} \quad 130$$

となり、 ν', ν'' の二本の分離線間の距離は、磁場の強さに比例して、磁場の強さから求められることを示す。又、129式に於て、 $\frac{eH_z}{4\pi m_0 c}$ は、一般に ν_0 に比して小なるが故に、 ν_0^2 に對して、この二乗項を消略すれば、

$$\nu' = \nu_0 - \frac{e|H|}{4\pi m_0 c}, \quad \nu'' = \nu_0 + \frac{e|H|}{4\pi m_0 c} \quad 131$$

となる。即ち ν', ν'' は、 ν_0 を中心として、左右に $\frac{eH_z}{4\pi m_0 c}$ の所に分離する。

次に、 a, b を消去した結果の式に於て、 n の代りに n' を代入し、従つて a, b の代りにこれに相當する常數、 a', b' を代入すれば、

$$(n_0^2 - n'^2)a' = \frac{eH_z}{2\pi m_0 c} b' n'$$

$$(n_0^2 - n''^2)b' = \frac{eH_z}{2\pi m_0 c} a' n'$$

を得る。上式を比較して、

$$a' = b'$$

を得る。又、同様にして n'', a'', b'' を代入すれば、

$$a'' = -b''$$

の關係を得る。従つて、之等の振動數及び常數に相當

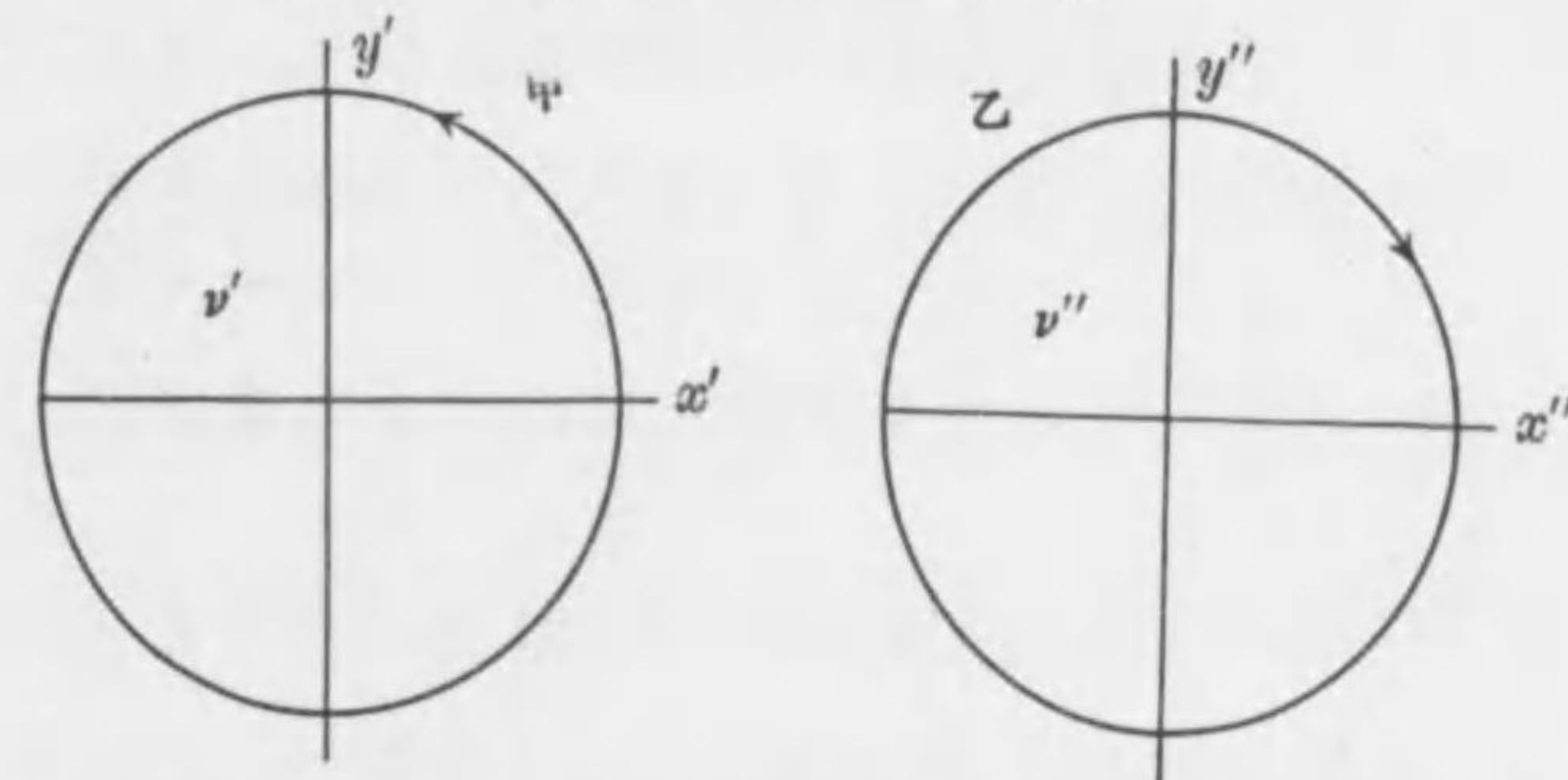
する x, y は、次の如く表はすことが出来る。

$$\nu' \text{に對して} \begin{cases} x' = a' \cos(2\pi\nu' t + \delta) \\ y' = a' \sin(2\pi\nu' t + \delta) \end{cases}$$

$$\nu'' \text{に對して} \begin{cases} x'' = a'' \cos(2\pi\nu'' t + \delta) \\ y'' = -a'' \sin(2\pi\nu'' t + \delta) \end{cases}$$

上の二對の x, y の値を夫々合成すれば、第四十六圖甲乙に示すが如く、 ν' に相當する振動は左廻りの圓偏光

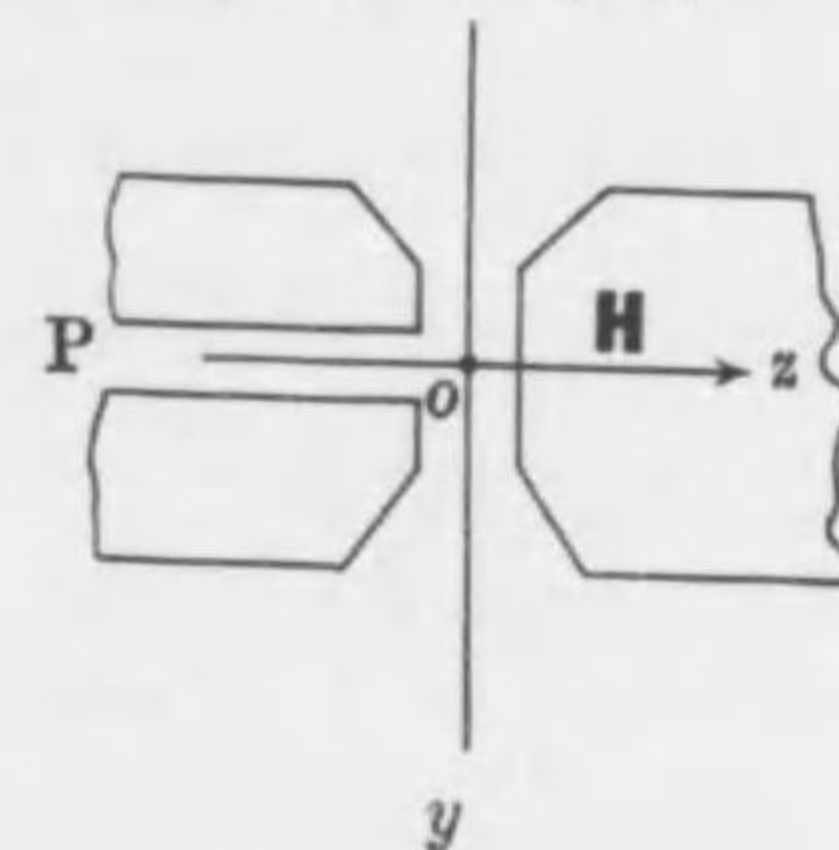
第四十六圖



にして、 ν'' に相當するものは右廻りの圓偏光である。

今、第四十七圖に示す如く、光源を磁場内の點 O に置

第四十七圖



き、磁極を貫通する穴を通して磁場の方向即ち z 軸の方向から觀測すれば、 xy 面内に於て左右に廻轉する圓偏光のスペクトル線 ν', ν'' を元線 ν_0 の位置を中心として左

右に等距離に見る。実験の結果に依れば、波長の長き方即ち振動数の小なる方が右廻りにして、波長の短き方が左廻りである。従つて、131式に於て ν'' の方右廻りで、 ν' の方左廻りである爲めに、電子の電荷 e は負號をとる必要がある。即ち、光を發生するものは負電荷を有する電子であることを示す。この現象を縦のゼーマン効果と名付けて居る。

次に、第四十七圖に於て、 y 軸の方向から観測すれば最後に求めたる運動の式の z 分が示す如く、 z 軸の方向の單弦運動に依る元線 ν_0 と、 x 軸の方向の單弦運動に依る ν' 、 ν'' とが見える。即ち、三本のスペクトル線を見るのである。この方向に於ては總て平面偏光にして、元線 ν_0 は磁場に並行に、 ν' 、 ν'' は磁場に直角に偏して居る。 ν_0 、 ν' 、 ν'' の關係的位置は130、131式に示す通りである。実験の結果と130又は131式を用ひて $\frac{e}{m_0}$ の値を求めることが出来る。即ち1907年ルンゲ及びビロマン¹は、この値を、 1.75×10^7 として出し、ワキス、コットン²は 1.67×10^7 なる値を得、又ステッテンハイマー³は、 1.79×10^7 として出した。更に、1912年ホートラート⁴は 1.7636×10^7 として出した。其後も多くの研究者に

1. C. Runge und W. Lohmann,
2. P. Weiss und A. Cotton,
3. A. Stettenheimer,
4. R. Fortrat.

R. Seeliger, Tahr. Rad. Bd. 9, (1912),
s. 28 及び A. Bestmeyer, Handbuch
der Radiologie, Bd. 5, s. 79—81 参照.

依つて求められ、陰極線に依る実験結果と一致することが知られて居る。

ゼーマンの發見以來多くの學者の實驗的研究に依つて、ゼーマン効果は標準の二本及三本に分離するのみならず、更に多くの線に分離することが見出された。又、上に述べたる理論に依れば光源の物質内に於ける電子の運動は總ての方向に一様に分布さる可きである爲めに、各方向の分としてのスペクトルは總て相等しきエネルギーを持つ筈である。従つて、ゼーマン効果に於て一本のスペクトル線が二本に分離するときは、そのエネルギーも亦等分され、又三本に分離するときは先づ二つに等分されその一つが元位置にあり他の一つが更に二等分されて二本に分れる筈である。従つて、前者に於ては分離線の強さは元線の $\frac{1}{2}$ に等しく互に相等しき筈にして、後者に於ては左右の二線の強さは元位置に於ける線の強さの $\frac{1}{2}$ に等しく、元位置のものは磁場の作用なきときの同位置の線の $\frac{1}{2}$ である筈である。されど、実験の結果は必ずしも然らずして、兩端の線が反つて中央のものよりも、強きものも見出されて居る。

複雑なる分離をなすものに就てその一端を示せば、

次の如きものである。

横ゼーマン効果に於て、 D_1 線は中央のものが二本に分離し全體として四本になる。鐵の波長 4251 \AA は中央が二本に分れて、兩端のものと同位置に現はれる。鐵の波長 2411 \AA のものは、中央のものが二本に分離して兩端の線の外に出る。 D_2 は三本の各が更に二本宛に分離する。水銀の波長 5461 \AA のものは、三本の各が三本宛に分離する。ネオンの波長 5945 \AA のものは、三本の各が四本宛に分離し、波長 6402 \AA のものは各五本宛に分離する。又、タングステンのスペクトルに於ては、全體として十七本及び十九本に分離するものがある。

又、バルマー¹、リッドベルグ²、カイザー³及びルンゲ⁴等に依つて見出されたスペクトル群に就ても同じ群に屬する線は同様のゼーマン効果を與へ、又スペクトルを出す物質が異なるものに就ても、互に相當する群に屬するものは同様のゼーマン効果を與へる。

之等の複雑なる分離を説明する爲めに、ローレンツは次の如き考察をなし少しく説明を與へた。

1. J. J. Balmer, Ann. der Phys. Bd. 25, (1885), s. 80.
2. J. R. Rydberg, K. Svenska, Vet. Akad. Handl, vol. 23, No. 11, (1890), p. 155.
3. Kayser, Handbuch der Spektroskopie, Bd. 2. § 8.
4. G. D. T. Runge, Brit. Assoc. Report, (1888), p. 576.

多數の電子が互に結び付けられて或る一定の釣合状態にある系體を考へ、之等の電子が各その釣合の位置を中心として振動するものとする。今、この系體に屬する電子の數を h とすれば、各電子は三つの自由度を有するが故に、全體として $3h$ の運動の式が成立する。之等の運動の式には電子を一つの釣合の系體として束縛する力が入る筈である。この束縛の條件は幾何の關係式に依つて定められるかは不明なるも、今これを h_1 個とすれば、全體の電子の獨立變數は $3h - h_1$ である。即ち、系體に屬する電子は $3h - h_1$ 個の自由度を有することとなる。これを n とする。この系體が外力の影響を受けざる時に、 n 個の自由度の總てに相當する振動が行はれ各獨立の振動數に相當する n 個のスペクトル線を出すものとすれば、最早やゼーマン効果は起り得ない筈である。されば、ゼーマン効果が起る爲めには、磁場の如き外力の作用なき状態に於ては n 個の自由度の内 s 個だけは相等しき振動數を有し、一本のスペクトルとして現はれることが必要である。即ち、外力の作用なきときは、 $n - (s - 1)$ 個のスペクトル線を出し、磁場の如き外力の作用に依つて s 個の相等しき振動數のものは各獨立のもの如く分離することが必要である。

今 n 個の一般座標を,

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$$

とし, この系體の位置及び運動のエネルギーを夫々 U , T とすれば, 一般に,

$$U = \frac{1}{2} (f_1 q_1^2 + f_2 q_2^2 + \dots + f_n q_n^2)$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2 + \dots + m_n \dot{q}_n^2)$$

を以て表はされる。 f_1, f_2, \dots, f_n は各自由度に相當する准弾性力の係數であり, m_1, m_2, \dots, m_n はその質量であり, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ はその一般速度である。

外力の作用なき状態に於ては, 各自由度に相當する運動の式は,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = - \frac{\partial U}{\partial q}$$

を以て表はされ, 従つて各自由度に對して夫々,

$$m_1 \ddot{q}_1 = -f_1 q_1$$

$$m_2 \ddot{q}_2 = -f_2 q_2$$

$$\dots$$

$$m_n \ddot{q}_n = -f_n q_n$$

となり, その 2π 秒間の固有振動數は夫々

$$n_1 = \sqrt{\frac{f_1}{m_1}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{f_2}{m_2}}, \quad \dots, \quad n_n = \sqrt{\frac{f_n}{m_n}}$$

である。

1. Generalized coordinate, Allgemeine Koordinaten

次に, 上の如き系體に磁場 \mathbf{H} が働くものとし, その一般座標, q_1, q_2, \dots, q_n の方向の分を,

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$$

とすれば, 運動の式は,

$$m_1 \ddot{q}_1 = -f_1 q_1 + Q_1$$

$$m_2 \ddot{q}_2 = -f_2 q_2 + Q_2$$

$$\dots$$

$$m_n \ddot{q}_n = -f_n q_n + Q_n$$

となる。又, Q_1, Q_2, \dots, Q_n は,

$$\mathbf{Q} = \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{H}]$$

の分である爲めに \mathbf{Q} は $\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{H}$ の一次函數である。従つて, これを一般的に次の如く表はすことが出来る。

$$Q_1 = a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2 + \dots + a_{1n} \dot{q}_n$$

$$Q_2 = a_{21} \dot{q}_1 + a_{22} \dot{q}_2 + \dots + a_{2n} \dot{q}_n$$

$$\dots$$

$$Q_n = a_{n1} \dot{q}_1 + a_{n2} \dot{q}_2 + \dots + a_{nn} \dot{q}_n$$

又, $\mathbf{Q} = \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{H}]$ の力は, 一般速度 $\dot{\mathbf{q}}$ に直角である爲めに, この力に依る仕事は零である。即ち,

$$Q_1 \dot{q}_1 + Q_2 \dot{q}_2 + \dots + Q_n \dot{q}_n = 0$$

となる。上式の値を代入すれば,

$$a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + a_{1n} \dot{q}_1 \dot{q}_n$$

$$+ a_{21} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + a_{2n} \dot{q}_2 \dot{q}_n$$

$$+ \dots + a_{n1} \dot{q}_1 \dot{q}_n + a_{n2} \dot{q}_2 \dot{q}_n + \dots + a_{nn} \dot{q}_n^2 = 0$$

となる。この関係を常に満足する爲めには、各項が別別に零であることが必要である。

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 0$$

$$a_{12} + a_{21} = a_{13} + a_{31} = \dots = a_{1n} + a_{n1} = 0$$

$$\dots$$

即ち一般に

$$a_{ii} = 0, \quad a_{ik} = -a_{ki}$$

の関係が成立する。

次に、運動式の各に、 Q_1, Q_2, \dots, Q_n の値を代入して、

$$q_1 = p_1 e^{int}, \quad q_2 = p_2 e^{int}, \quad \dots, \quad q_n = p_n e^{int}$$

と置けば、運動の式は

$$(f_1 - m_1 n^2) p_1 - in(a_{12} p_2 + a_{13} p_3 + \dots + a_{1n} p_n) = 0$$

$$(f_2 - m_2 n^2) p_2 - in(a_{21} p_1 + a_{23} p_3 + \dots + a_{2n} p_n) = 0$$

$$\dots$$

$$(f_n - m_n n^2) p_n - in(a_{n1} p_1 + a_{n2} p_2 + \dots + a_{n(n-1)} p_{n-1}) = 0$$

となる。之等の式から p_1, p_2, \dots, p_n を消去すれば、

$$\begin{vmatrix} f_1 - m_1 n^2 & -ina_{12} & -ina_{13} & \dots & -ina_{1n} \\ -ina_{21} & f_2 - m_2 n^2 & -ina_{23} & \dots & -ina_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -ina_{n1} & -ina_{n2} & -ina_{n3} & \dots & f_n - m_n n^2 \end{vmatrix} = 0$$

となる。上の第一列及び第一行を $\sqrt{m_1}$ にて、第二列及び第二行を $\sqrt{m_2}$ にて除し、以下も同様に第 n 行及び第 n 列を $\sqrt{m_n}$ にて除し、

$$\frac{a_{ik}}{\sqrt{m_i m_k}} = b_{ik}, \quad \frac{f_i - m_i n^2}{m_i} = n_i^2 - n^2$$

と置けば、上式は、

$$\begin{vmatrix} n_1^2 - n^2 & -inb_{12} & -inb_{13} & \dots & -inb_{1n} \\ -inb_{21} & n_2^2 - n^2 & -inb_{23} & \dots & -inb_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -inb_{n1} & -inb_{n2} & -inb_{n3} & \dots & n_n^2 - n^2 \end{vmatrix} = 0$$

となる。今、 n 個の振動数の内 s 個だけ相等しきものとし、

$$n_1 = n_2 = \dots = n_s = n_0$$

と置き、 $n_1^2 - n^2, n_2^2 - n^2, \dots, n_s^2 - n^2$ は極めて小なるものであるとし、 b_{12}, \dots, b_{1s} 等の s 迄の脚號を有する b の値も小なる量であるとするれば、之等の b の係數としての n を近似的に n_0 を以て置き換へれば、上のデターミナントは近似的に次の如く表はすことが出来る。

$$\begin{vmatrix} n_0^2 - n^2 & -in_0 b_{12} & \dots & -in_0 b_{1s} \\ -in_0 b_{21} & n_0^2 - n^2 & \dots & -in_0 b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -in_0 b_{s1} & -in_0 b_{s2} & \dots & n_0^2 - n^2 \end{vmatrix} = 0$$

上式を解けば、 s 個の n の値を得る筈である。

今例として、 $s=3$ の場合を考察する。即ち、

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_0$$

なるが故に、上のデターミナントは次の如くなる。

$$\begin{vmatrix} n_0^2 - n^2 & -in_0 b_{12} & -in_0 b_{13} \\ -in_0 b_{21} & n_0^2 - n^2 & -in_0 b_{23} \\ -in_0 b_{31} & -in_0 b_{32} & n_0^2 - n^2 \end{vmatrix} = 0$$

上式を解きて、

$$n_0^2 - n^2 = 0, \quad (n_0^2 - n^2)^2 = n_0^2(b_{23}^2 + b_{31}^2 + b_{12}^2)$$

を得る。従つて、

$$\left. \begin{aligned} n &= n_0, \\ n &= n_0 \pm \frac{1}{2} \sqrt{b_{23}^2 + b_{31}^2 + b_{12}^2} \\ &= n_0 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_{23}^2}{m_2 m_3} + \frac{a_{31}^2}{m_3 m_1} + \frac{a_{12}^2}{m_1 m_2}} \end{aligned} \right\} \quad 131'$$

を得る。上式は、131式と同様のものを表はし、三本に分離する場合のゼーマン効果を示す。四本以上に分離する場合も全く同様にして求め得られる。 s が奇数の時は、その内の一本は ν_0 に等しく元線の位置にあり、他は左右に對稱的に配列する。 s が偶数の時は、元線 ν_0 の位置は空虛にして、その左右に對稱的に配列する。

131'式に於て、 a は磁場の強さの一次の均等的函數

數にして、 ν_0 を中心として左右に等距離に分離する線との間の距離は上式の第二項の二倍即ち、

$$\sqrt{\frac{a_{23}^2}{m_2 m_3} + \frac{a_{31}^2}{m_3 m_1} + \frac{a_{12}^2}{m_1 m_2}}$$

を以て表はされる。されば、磁場の方向を變へずして其の強さを二倍にすれば、分離は二倍となり、分離の大きさは磁場の強さに比例する。又、 a^2 の値は磁場の x, y, z 分 H_x, H_y, H_z の二次の均等的函數なるが故に、磁場の方向を變へれば分離の大きさは變化する。又、分離が強く明瞭に現はれる爲めには、 a^2 の函數が H_x, H_y, H_z の各の積の項は零となり各の二乗の項のみを以て表はされる場合である。この時、左右二線間の距離は $\alpha |\mathbf{H}|$ となり、分離の距離は最大となる。これは、分離距離が磁場の方向に無關係となる場合にして、物質が磁氣的に等方等質である場合である。

以上のゼーマン効果は規則正しき簡單なる場合に關するものなるも、多くの實驗の結果に依れば極めて複雑なる分離を行ふ所の所謂不規則的ゼーマン効果が見出されて居る。之等の現象の説明は、ゾンマーフェルト¹ 其の他の人々に依つてなされたる量子論的考察に俟つ外はない。

1. A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. B1. 63, (1920), s. 121. A. Sommerfeld, Aufbau und Spektrallinien, Braunschweig, 1924 参照

1897年ラーモア¹は電子が軌道運動をなすときこれに外部磁場を働かしむれば、その軌道運動は變化を起し軌道運動電子を一つの振動子として見做す時、それから發散する輻射としての振動は恰度標準ゼーマン効果と同様の分離を行ふことを示した。

今電子の軌道運動を准弾性力の作用の許に一定の振動数を持つ振動と見做し、これに方向が l, m, n で表はされる均等的外部磁場 \mathbf{H} が作用したとすれば、運動の式の x, y, z 分は次の如く與へられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -a^2 x + \kappa \left(n \frac{dy}{dt} - m \frac{dz}{dt} \right) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -a^2 y + \kappa \left(l \frac{dz}{dt} - n \frac{dx}{dt} \right) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -a^2 z + \kappa \left(m \frac{dx}{dt} - l \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned} \right\} 132$$

$$\kappa = \frac{e|\mathbf{H}|}{mc}, \quad a^2 = \frac{f}{m}$$

f は准弾性力の係数を表はし、上式の右邊の第二項はローレンツの力を m で除したものである。上式に於て $x, y, z \propto e^{i\omega t}$ として代入し、 n を求むれば近似的に

$$n = a, \quad n = a \pm \frac{\kappa}{2}$$

となることが知られる。即ち磁場のなきときは運動

1. J. Larmor, Phil. Mag. 44. (1897), 503; Fathler and Matter, (1900), 341.

電子の振動数は a に等しきも、外部磁場が働いた爲めに電子の運動はその振動数が三つの異なるものを有する状態に變化することを示すものである。併も上の關係は外部磁場の方向 l, m, n の如何に拘はらず現はれることを示して居る。

今上の如き磁場に依る運動の變化を一般に力學的に考察する。今最初の電子の運動を表はした座標系 x, y, z が磁場の方向 l, m, n を軸としてこの回りに角速度 ω を以て廻轉運動を起したとすれば、この動座標系に依つて表はされた電子の速度の x 分は力學の關係に依つて

$$\frac{dx}{dt} - ym\omega + zn\omega$$

となり加速度の x 分は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} n\omega + \frac{dz}{dt} m\omega$$

となる。従つて x 軸に並行なる全加速度は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\omega \left(n \frac{dy}{dt} - m \frac{dz}{dt} \right) - \omega^2 x + \omega^2 l (lx + my + nz)$$

となる。今上式に於て角速度を $\omega = \frac{\kappa}{2}$ とし、外部磁場は弱きものとして ω^2 以上を消略すれば、上の値は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \kappa \left(n \frac{dy}{dt} - m \frac{dz}{dt} \right)$$

となり、132式の外部磁場に依つて附加された部分と

全く相等しくなる。依つて軌道運動の電子に対する外部磁場の影響は、運動を表示する座標軸が磁場の方向を軸として $\omega = \frac{e|\mathbf{H}|}{2mc}$ の角速度を以て廻轉運動を爲すことと、相等しき結果となる。即ち軌道運動の電子に磁場が働くとき、その電子運動の變化した状態は磁場の方向を軸として角速度 $\frac{e|\mathbf{H}|}{2mc}$ を以て廻轉運動をなす座標系に固定した観測者に対する、磁場なき軌道運動と同様になる。即ち電子は磁場の作用に依つて先行運動を行ふこととなる。

今簡単な場合として上の先行運動に依つてスペクトル線の分離を求める。磁場の方向を z 軸の方向とすれば、

$$l=0, \quad m=0, \quad n=1$$

となる故これを132式に代入すれば次式を得る。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x + \kappa \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -a^2y - \kappa \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -a^2z$$

上式に $x, y, z \propto e^{im\omega t}$ を代入すれば、 x, y 分は

$$(a^2 - n^2)x = i\kappa ny, \quad (a^2 - n^2)y = -ianx$$

となり、 x, y を消去すれば

$$n^2 \pm \kappa n - a^2 = 0$$

となり、 n は近似的に

$$n = a \pm \frac{\kappa}{2}$$

となる。又運動の式の κ 分から

$$n = a$$

が求められることは容易に知られる。上式に於て $n = 2\pi\nu$, と κ, a の値を代入すれば

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f}{m}} \pm \frac{eH_z}{4\pi mc} = \nu_0 \pm \frac{eH_z}{4\pi mc}$$

$$\nu = \nu_0$$

となり、ローレンツが求めに131式の値と全く相等しきものとなる。又磁場の方向から観測するときは x, y 平面に於て二つの左右の圓偏光として現はれ、磁場のなきときの元線 ν_0 の左右等距離に二本として現はれ、磁場に直角の方向に於ては元線 ν_0 と共に三本に見へ、外側の線は平面偏光であることは容易に求められる。この関係はローレンツの理論と全く一致することとなる。

第七章

シュタルク効果

光源を電場に置いた時、ゼーマン効果の如き現象が起るか、即ちスペクトル線が電場の影響を受けて分離するか否かに就ては、1901年ホグトが理論的に研究して、電場に於ても磁場に於ける如き現象の起る可きことを結論した。本章に於て述べる理論はホグトの理論である。

強さ E なる電場に於て電子が運動をなすものとするれば、電子の運動の式は、

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}} = -f\mathbf{r} + e\mathbf{E}$$

を以て表はされる。上式に於て、

$$\mathbf{r} = \frac{e}{f} \mathbf{E} = \mathbf{P}$$

と置けば、運動の式は、

$$m_0 \ddot{\mathbf{P}} = -f\mathbf{P}$$

となり、電場の作用なき場合と相等しき振動数を以て運動するものにして、電場の影響は振動数に何等の變化をも與へざるものとなる。されば、振動数に變化を

1. W. Voigt, Magneto- und Elektro-optik, Leiptig, 1908 参照。

與へる爲めには、電子の運動を支配する力が電場の影響を受けて變化する必要がある。運動の式に入る准弾性力 $f\mathbf{r}$ は電場の作用なき場合のものにして、電場の作用する場合に於てはこれが何等かの變化を受けこることが至當である。今、電場が作用する場合に於ける准弾性力のポテンシャルを、

$$\varphi = \frac{1}{2} f r^2 + \frac{1}{4} f' r^4 + \dots$$

を以て表はすものとする。従つて、准弾性力は、

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} = -f\mathbf{r} - f' r^2 \mathbf{r} - \dots$$

となる。但し、右邊の第二項以下は第一項に比して一般に小なるものなるを以て、第三項以下を消略すれば、運動の式は、

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}} = -(f + f' r^2) \mathbf{r} + e\mathbf{E}$$

となる。今電場の方向は z 軸の方向であるとすれば、

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = |\mathbf{E}|$$

となり、電子の變位 \mathbf{r} は z 軸の方向に於て行はれ、 (x_0, y_0, z_0) の點に於て外力が釣合状態にあるとし、 $x_0 = y_0 = 0$ とすれば、

$$z_0 (f + f' z_0^2) = e |\mathbf{E}|$$

の関係が成立する。 z_0 は小なる量とすれば第一近似直として上式から、

$$z_0 = \frac{e|\mathbf{E}|}{f}$$

を得る。

次に、一般的に電子が時刻 t に於て (x, y, z) の位置を占めるものとし、その位置は (x_0, y_0, z_0) に極めて近きものとすれば、

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta$$

と置くことが出来る。従つて、電子の変位は、

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + (z_0 + \zeta)^2 \\ &\doteq z_0^2 + 2z_0\zeta \end{aligned}$$

となる。されば、電子の運動の式の x, y, z 分は、

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{\xi} &= -\{f + f'(z_0^2 + 2z_0\zeta)\} \xi \doteq -(f + f'z_0^2) \xi \\ m_0 \ddot{\eta} &= -\{f + f'(z_0^2 + 2z_0\zeta)\} \eta \doteq -(f + f'z_0^2) \eta \\ m_0 \ddot{\zeta} &= -\{f + f'(z_0^2 + 2z_0\zeta)\} (z_0 + \zeta) + z_0(f + f'z_0^2) \\ &\doteq -(f + 3f'z_0^2) \zeta \end{aligned}$$

となる。上式を解き z_0 の第一近似値を用ひれば、第一、第二式から、

$$n_1^2 = n_2^2 = \frac{1}{m_0} \left(f + \frac{f' e^2 \mathbf{E}^2}{f^2} \right)$$

を得る。又、第三式から、

$$n_3^2 = \frac{1}{m_0} \left(f + \frac{3f' e^2 \mathbf{E}^2}{f^2} \right)$$

を得る。又、電子の固有振動数即ち電場の作用なき場合の振動数は最初の運動の式から、

$$n_0^2 = \frac{f}{m_0}$$

となる。電場の作用する場合に於ける振動数、 ν_1, ν_2, ν_3 は、夫々 $n = 2\pi\nu$ を代入して、

$$\nu_1 = \nu_2 \doteq \nu_0 \pm \frac{f' e^2 \mathbf{E}^2}{32\pi^4 f \nu_0^3 m_0^2} \quad 133$$

$$\nu_3 \doteq \nu_0 \pm \frac{3f' e^2 \mathbf{E}^2}{32\pi^4 f \nu_0^3 m_0^2} \quad 134$$

となり、 ν_0 との間隔は、

$$\nu_1 - \nu_0 = \nu_2 - \nu_0 = \frac{f' e^2 \mathbf{E}^2}{32\pi^4 f \nu_0^3 m_0^2}$$

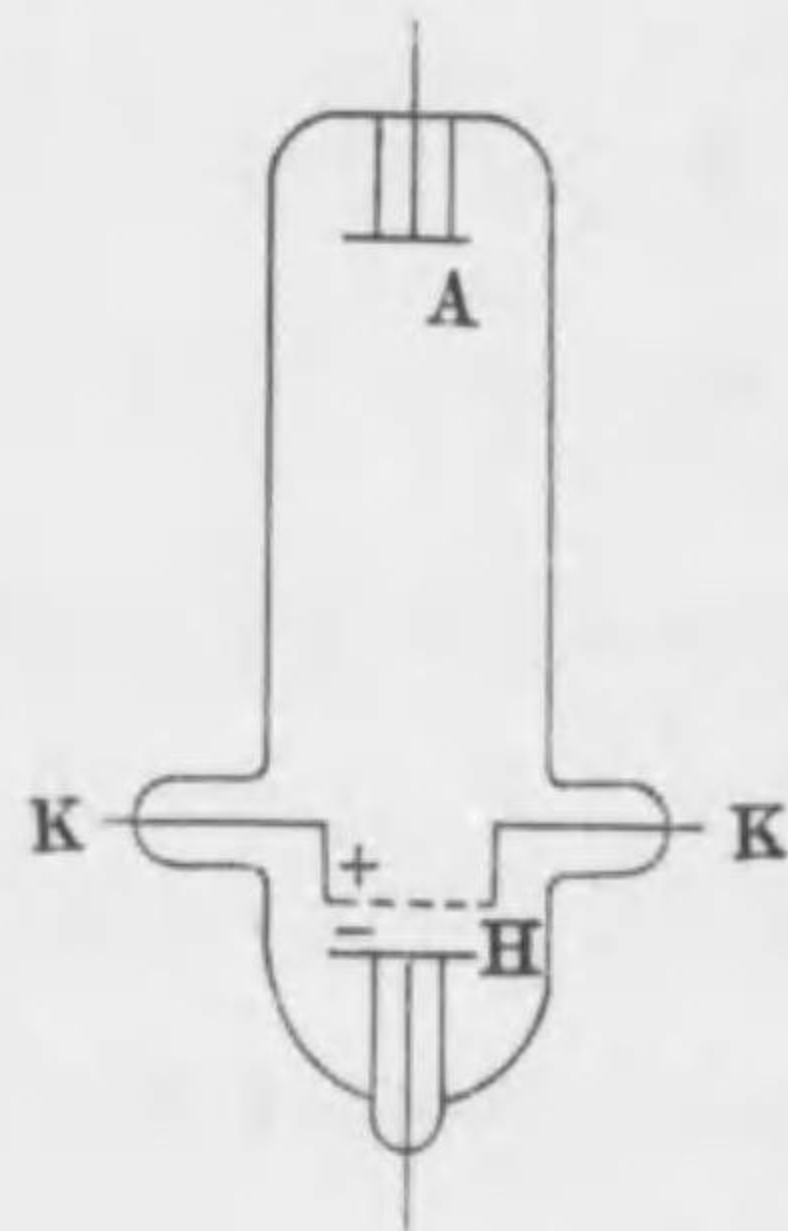
$$\nu_3 - \nu_0 = \frac{3f' e^2 \mathbf{E}^2}{32\pi^4 f \nu_0^3 m_0^2}$$

を以て表はされる。されば、電場の方向から見れば、 xy 面に於ける振動に依る不偏スペクトル線 ν_1, ν_2 が一本として、元線 ν_0 から上式の如き間隔の位置に現はれる。次に、電場に直角の方向から見れば、 z の方向の振動に依る ν_3 が電場に並行に偏して元線 ν_0 から上式の如き間隔の位置に現はれ、 ν_1, ν_2 の一本が電場に直角に偏して現はれる。 ν_3 の ν_0 に對する間隔は、 ν_1, ν_2 の ν_0 に對するものよりも大なるが故に、 ν_3 の線は ν_1, ν_2 よりも ν_0 に對して遠く分離して現はれるのである。又、上式から知られる如く、 ν_1, ν_2 の元線に對する分離の距離は電場の強さの二乗に比例する爲めに、電場の強さが増大するに従つて著しく増大するのである。

1913年シュタルク¹は、實驗的に電場に於けるスペクトル線の分離の現象を見出し、所謂シュタルク効果と名付けてられて居る。

最初に、シュタルクは第四十八圖に示すが如き装置を用ひ、光源としてはカナル線が氣體の原子と衝突する

第四十八圖



るときに發する光を用ひた。Aは正極で、K, Hは負極である。KのHに對する部分は網状に作り、Aから出たカナル線はKの網を通りてK, Hの中間に於て氣體の原子と衝突して光を發する。K, Hの間には圖の如き附號に強き電場を作り、カナル線の衝突に依つて發した光に影響を及ぼさしめるのである。

カナル線自身の發する光のスペクトル線は速度が大なるが故に、ドップラー原理に依る變位を起し、薄く見へることとなる。氣體の分子又は原子はカナル線の衝突の爲めに動かされ、種々の大きさの速度を得るが

1. J. Stark, Berliner Sitzungsber., Nov. (1913); Ann. d. Phys. Bd. 43, (1914), S. 965, 983; Götting. Nachr. Nov. (1914).

2. Doppler's Principle, Dopplersches Prinzip.

故に、それに依るスペクトル線は帶狀に擴大されるが、これは電場の方向に於て觀測した場合にして、電場の方向に直角の方向から觀測する時はその影響は極めて微々たるものである。従つて、横のシュタルク効果は明瞭に觀測される。

第四十九圖に示すものは、水素瓦斯に對する實驗結果にして、この場合

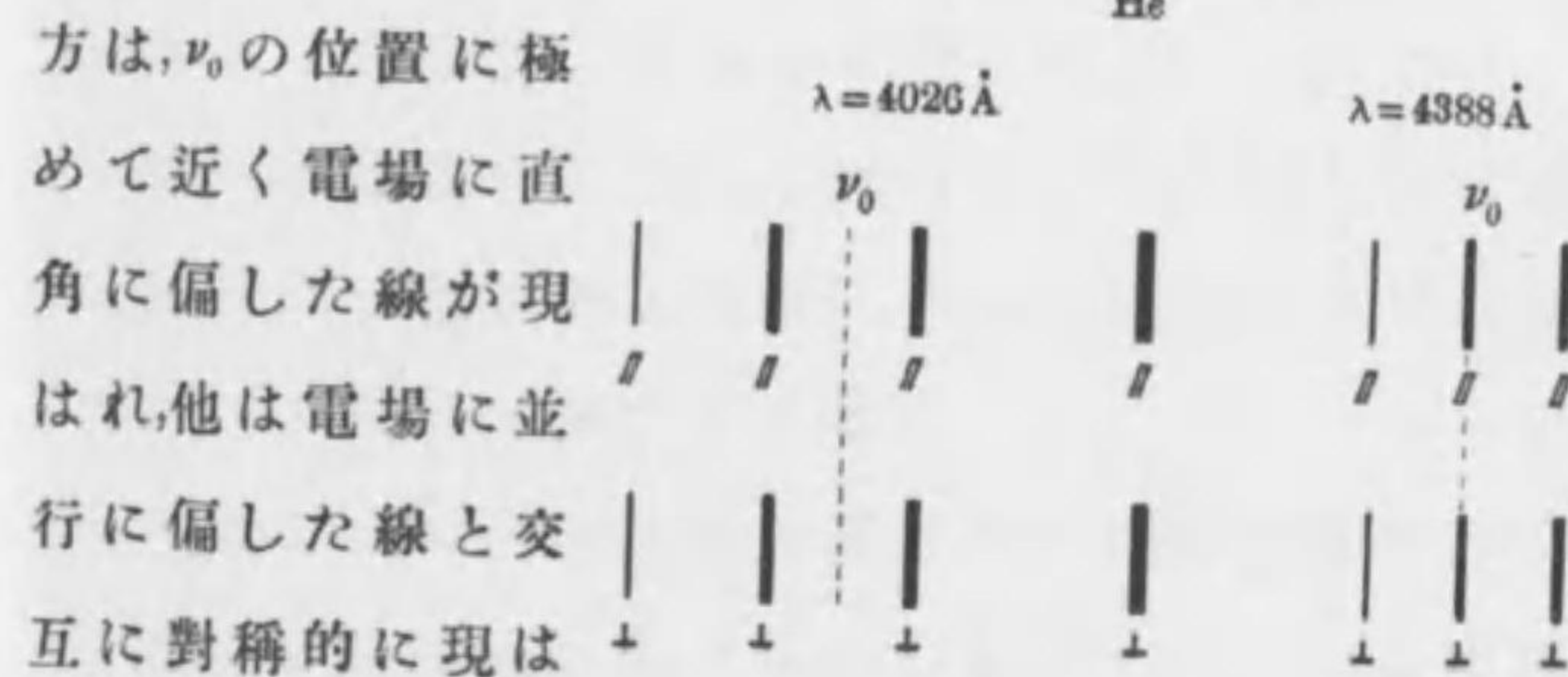
第四十九圖



はカナル線自身からの光のスペクトルの方強さが大である爲めにそれに

依る結果である。電場の強さは一種に對して 13000ボルトである。H_βの方は、電場に直角に偏したものが元線 ν_0 の位置にあり、更に左右に同様の線が現はれ、電場に並行に偏したものが強く外側に ν_0 に對稱的に現はれる。H_γの

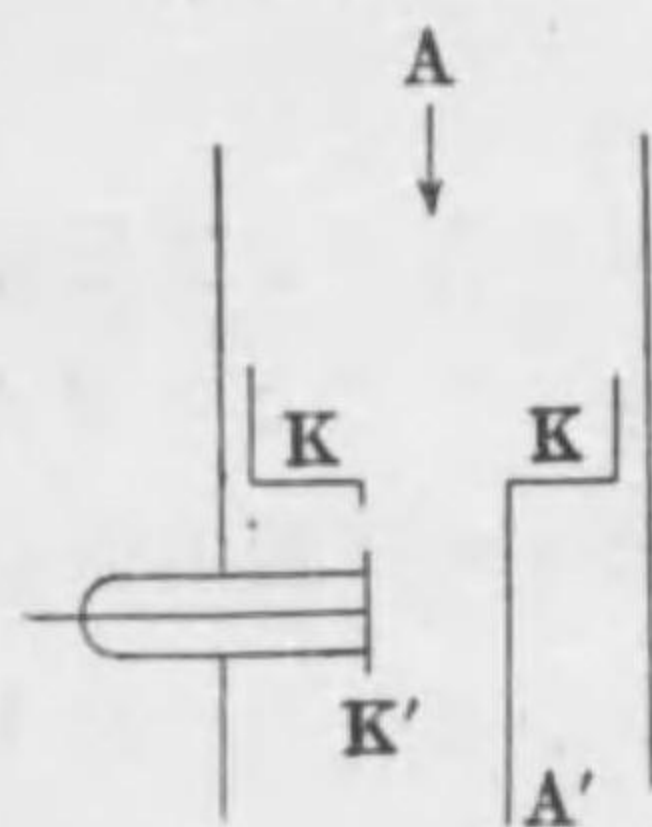
第五十圖



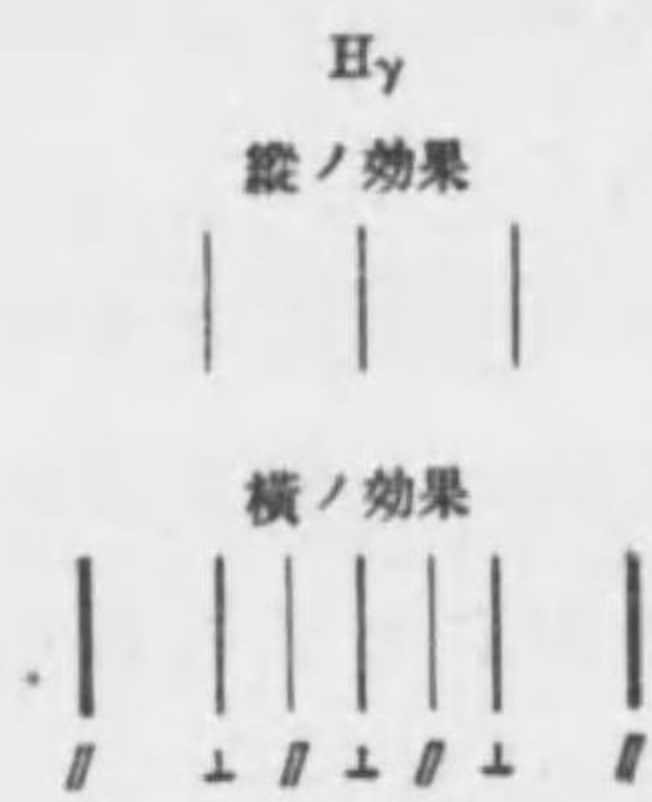
方は、 ν_0 の位置に極めて近く電場に直角に偏した線が現はれ、他は電場に並行に偏した線と交互に對稱的に現は

れ、外側の線は強く現はれる。ヘリウム瓦斯に對するものは衝突に依る方強く、第五十圖はその結果である。この場合は、電場に並行と直角に偏したものが重

第五十一圖



第五十二圖



なつて現はれる。 ν_0 に對しては對稱的に分離せざることを知る。次に第五十一圖に示すが如く、電場をカナル線の進む方向に直角に與ふる場合に於ては、次の如き結果となる。 H_γ に就ての結果は第五十二圖に示す如く、電場の方向に於ては不偏の線が三本に分離し、電場に直角の方向に於ては對稱的に分離する。ヘリウムの場合に於ても、電場の方向に於ける不偏線が分離する。

其後、Li, Cd, Hg等の種々の物質に就て行つた結果は、横効果に於て二本に分離し、ホグトの理論に一致するものが多く見出された。されど、既に述べたる如く水素、ヘリウムの如き複雑なる分離をなすものは、ホグトの理論に依つては説明し得られない。これも亦不規則的ゼーマン効果と同様に、量子論的考察に依るべ

きものにして、1913年エプシュタイン¹、シワルツシルド²、クラマース³等に依つて量子論的に説明が與へられた。

1. P. S. Epstein, Ann. d. Phys. Bd. 50, (1916), S. 483.
2. K. Schwarzschild, Berliner Sitzungsber. April 1916.
3. H. A. Kramers, Zeitschr. f. Phys. Bd. 3, (1920), s. 199. 又 A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien 参照。

第八章

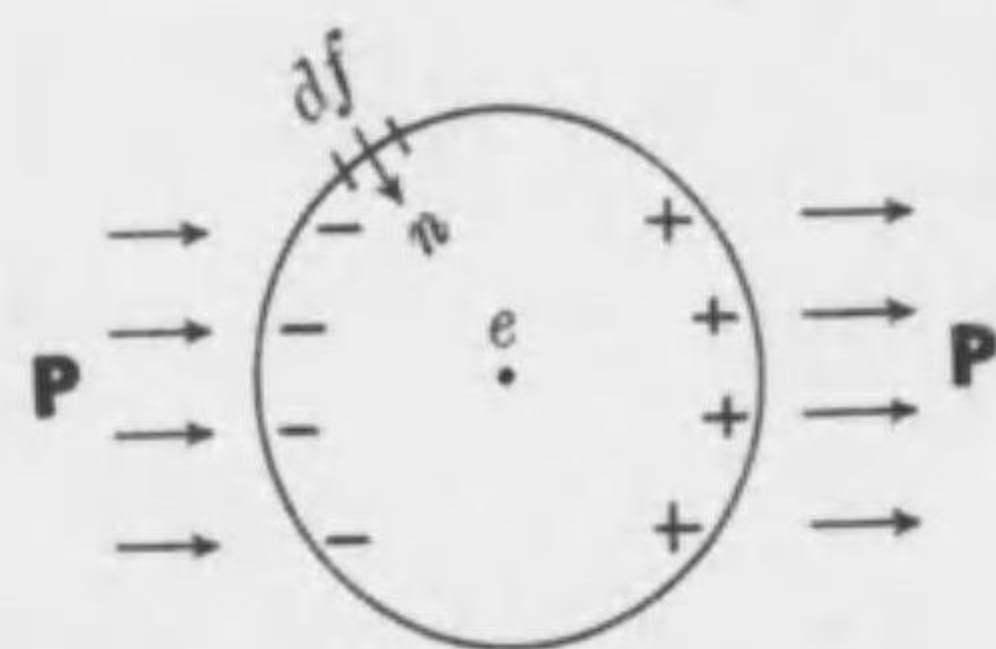
分極電子の運動

既に第一章に於て述べたる如く、分極電子が何等かの作用を受けて r の變位をなすものとし、物質の單位體積内の分極電子の或る一群の数を N とすれば、夫等に依る、單位體積に對する電媒的分極は、

$$\mathbf{P} = \sum N e r$$

である。分極電子に働く力は電磁氣場からの力の外に、電子相互間に働く力をも受ける筈である。されば、電子相互間の力を求める必要がある。

第五十三圖



第五十三圖に示す如く、便宜上物質内に於て一つの分極電子 e を中心として、物理的に微少なる球を想像し、この球面を境としてその内部に存在する分

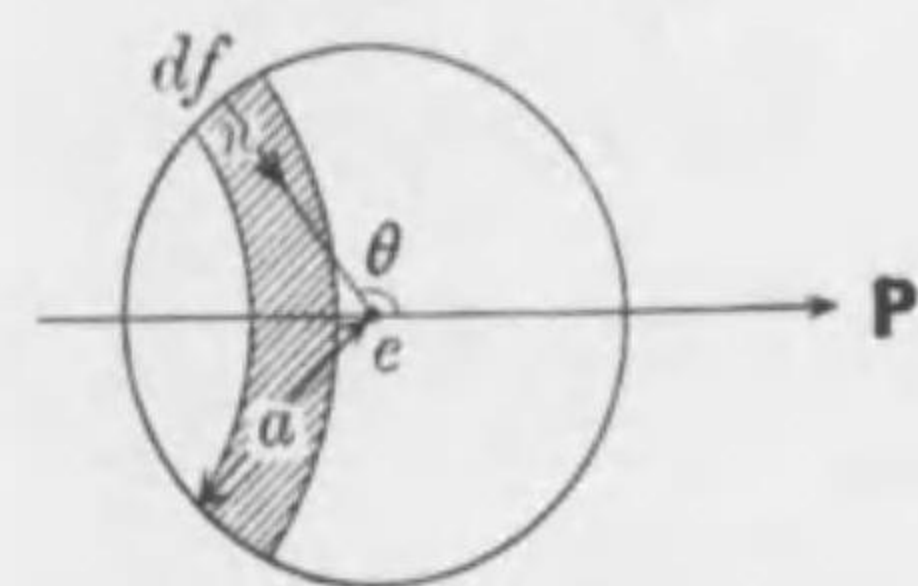
極電子に依る力と、外部に存在する電子からの力とを、分離して考察する。

今物質内に於ては均等的な電媒的分極 \mathbf{P} があるものとすれば、球外の電子からの力は \mathbf{P} に依る作用を以

て表はすことが出来る。そして、分極 \mathbf{P} の爲めに、球の内側には圖に示すが如き見掛け上の電荷が現はれる。

球の外部からの力は、均等的なる \mathbf{P} に依つて、真空球の表面に現れる電荷が球の中心に及ぼす力を求むれば充分である。球の表面に於ける電荷は、分極 \mathbf{P} の表面に於ける垂直分 \mathbf{P}_n に等しい。従つて、球の中心に於ける單位の電荷に及ぼす力は、球表面に於ける電荷に依る力の \mathbf{P} の方向の分力のみにして、他は相殺して零

第五十四圖



となる。即ち、

$$-\int \frac{\mathbf{P}_n \cos \theta dJ}{4\pi a^2}$$

である。 a は球の半径にして、 n は球の表面に於て内方に引かれたる法線である。

又、

$$\mathbf{P}_n = -|\mathbf{P}| \cos \theta, \quad df = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$$

なるが故に、上式は、

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{P}|}{4\pi a^2} \int \cos^2 \theta df &= \frac{|\mathbf{P}|}{2} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{3} |\mathbf{P}| \end{aligned}$$

となる。

球の内部に於ける分極電子に依る力は、之等の電子

の配列の如何に依るものにして、一定ならず。されど、若しも電子が規則正しき立體的配列をなすが如きものにありては、之等の電子に依る力は相殺して、他に何等の力をも及ぼさない。されど一般には必ずしも電子が規則正しき立體的配列をなすものと、見做す可き何等の理由をも見出し得ない。ローレンツは、電子の配列の如何に拘はらず、これを分極 \mathbf{P} に比例するものと假定して、 $s\mathbf{P}$ と置いた。

されば、球の中心に於ける電場は、これを外からの電場と、球内外に於ける分極電子に依るものとの和として表はされる。即ち、

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= \mathbf{E} + \frac{1}{3}\mathbf{P} + s\mathbf{P} \\ &= \mathbf{E} + a\mathbf{P}\end{aligned}$$

を以て表はされる。従つて、

$$a = \frac{1}{3} + s$$

である。

上の如き電場と、外部の磁場からの力を受けて分極電子が振動運動をなすものとすれば、その運動の式は一般に、

$$m_0 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -f\mathbf{r} - g \frac{d\mathbf{r}}{dt} + e(\mathbf{E} + a\mathbf{P}) + \frac{e}{c} \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{H} \right] \quad 135$$

を以て表はされる。上式の右邊の第二項は運動の減衰を起す抵抗力である。

今一種類の分極電子が存在するものとし、上式の各項に Ne を乗じ $\mathbf{P} = Ne\mathbf{r}$ と置き、更に各項を Ne^2 を以て除し \mathbf{P} を以て表はせば、次式を得る。

$$\begin{aligned}m' \frac{d^2 \mathbf{P}}{dt^2} &= -f' \mathbf{P} - g' \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{E} + a\mathbf{P} + \frac{1}{cNe} \left[\frac{d\mathbf{P}}{dt}, \mathbf{H} \right] \\ m' &= \frac{m_0}{Ne^2}, \quad f' = \frac{f}{Ne^2}, \quad g' = \frac{g}{Ne^2}\end{aligned}$$

次に、上式に於て、

$$\mathbf{E}, \mathbf{P} \propto e^{2\pi i \nu t}$$

として、 \mathbf{E}, \mathbf{P} に代入すれば、

$$-4\pi^2 m' \nu^2 \mathbf{P} = -f' \mathbf{P} - ig' 2\pi \nu \mathbf{P} + \mathbf{E} + a\mathbf{P} + 2\pi \frac{i\nu}{cNe} [\mathbf{P}, \mathbf{H}]$$

を得る。上式を解きて、

$$\mathbf{E} = (\alpha + i\beta)\mathbf{P} - i\gamma[\mathbf{P}, \mathbf{H}] \quad 136$$

$$\alpha = f' - a - 4\pi^2 m' \nu^2, \quad \beta = 2\pi g' \nu, \quad \gamma = \frac{2\pi \nu}{cNe} \quad 137$$

を得る。

磁場が作用せざる場合をとれば、136式に於て右邊の第二項は零となる。又、振動が非減衰運動であるとすれば、 $g=0$ となる。依つて、136式は、

$$\mathbf{E} = \alpha\mathbf{P}$$

となる。今電媒的變位を、

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

と置けば,

$$\epsilon = 1 + \frac{1}{\alpha} \quad 138$$

を得る。εは電媒常数と名付られて居る量にして、137式から知られる如く、αは物質に特有なる量である爲めにεも亦物質に特有なる量である。

次に、電磁波が外部から、上の如き物質内に進入し来りし場合に就て考察する。

今電磁波は、z軸の方向に進行し来りしものとするれば、電磁氣場のベクトル及び電媒的變位Dは、一般に $\epsilon^{2\pi i(t - \frac{z}{v})}$ に比例するものである。νは電磁波の振動數にして、vは物質内に於ける電磁波の速度である。

物質内に於ける基礎の式は、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

を以て表はされる。但し、考ふる物質の磁氣透過度を1とした。第一式のx分と第二式のy分をとれば、

$$- \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = - \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

となる。上式のE, H, Dに $\epsilon^{2\pi i(t - \frac{z}{v})}$ を代入して、

$$\frac{1}{v} H_y = \frac{1}{c} D_x$$

$$\frac{1}{v} E_x = \frac{1}{c} H_y$$

を得る。従つて、上式から、

$$D_x = \frac{c^2}{v^2} E_x$$

を得る。又上に求めたる関係を用ひて、

$$D_x = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) E_x$$

と置けば、二式を比較して、

$$\frac{c^2}{v^2} = 1 + \frac{1}{\alpha} = \epsilon$$

を得る。電磁波の屈折率をnとすれば、

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha}} = \sqrt{\epsilon}$$

を得る。この関係は、マックスウエルの電磁氣論に於ける關係に一致するものにして、nは一般にα従つて、振動數νの函數である。されば物質内に進入したる電磁波が多くの振動數のもの群である場合に於ては、その各振動數に相當する電磁波は各異なる速度を以て進行し、各異なる屈折を行ふ爲めに所謂分散の現象が起るのである。今考ふる物質内の分極電子の系體としての固有振動數をν₀とすれば、

$$\nu_0^2 = \frac{f}{4\pi^2 m_0}$$

である。然も、考ふる物質が分極電子に対して等方等質的であるとすれば、 $a = \frac{1}{3}$ と置くことを得るが故に、137式から、

$$\alpha = \frac{4\pi^2}{Nc^2} m_0 (v_0^2 - v^2) - \frac{1}{3}$$

を得る。従つて、 n と α の関係式を用ひて、

$$n^2 - 1 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\frac{4\pi^2 m_0}{Nc^2} (v_0^2 - v^2) - \frac{1}{3}}$$

を得る。若しも、電磁波が可視光線であるとすれば、屈折率 n は常に1よりも大である爲めに、 α は正值をとり、従つて、

$$v_0 > v$$

となる。即ち固有振動数 v_0 は常に紫外線の方に存在することを示すものである。されば、多くの物質は紫外線を著しく吸収するのである。

又上式から、

$$\frac{4\pi^2 m_0}{Nc^2} (v_0^2 - v^2) = \frac{n^2 + 2}{3(n^2 - 1)}$$

の関係を得る。上式に於て、 N は単位体積内に存在する分極電子の總數にして、これは物質の密度に比例するものである。従つて、上式の右邊の逆數は物質の密度に比例することになる。即ち、

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \propto \rho \quad 139$$

となる。屈折率 n を電媒常數を以て表はせば、上式は、

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \propto \rho \quad 139'$$

となる。この関係を、クラウヂユス及びモソッチ²の法則と名付けて居る。この関係は、實驗結果と大體に於て一致するも、高温度に於ては著しく實驗結果と相違することが知られて居る。

次に、化合物質に於て一般にそれを構成する p 個の元素の原子は、各唯一種¹の分極電子のみを含むものとするれば、 p 個の元素の分極電子に対する運動の式の内、 s 番目のものに對して、

$$m_s \frac{d^2 \mathbf{r}_s}{dt^2} = e_s (\mathbf{E} + a \mathbf{P}) - f_s \mathbf{r}_s$$

を以て表はされる。但し、磁場の作用なき場合にして、然も運動は減衰的ならざる場合である。上式の脚號 s に、1 から p 迄の整數を代入すれば總ての元素に對する運動の式を得る。又、各元素の單位體積に含まれる分極電子の數は、總て相等しく N 個であるとすれば、化合物質の單位體積に對する全分極の値は、

1. 此の關係は最初に L. Lorenz に依つて實驗的に求められた。

Ann. Phys. chem. Bd. 11. (1880) s. 70 参照。

2. Clausius and Mosotti's law.

$$\mathbf{P} = N(e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 + \dots + e_p \mathbf{r}_p)$$

となる。そして、之等の電子の運動が振動的であると
し、各電子の變位 \mathbf{r} 、及び \mathbf{E}, \mathbf{P} は一般に、 $\varepsilon^{2\pi i \nu t}$ に比例する
ものであるとすれば、運動の式は、

$$(f_s - 4\pi^2 m_s \nu^2) \mathbf{r}_s = e_s (\mathbf{E} + a \mathbf{P})$$

となる。従つて、上式から \mathbf{r}_s を求めこれに $N e_s$ を乗じ
て、 s に對して加算すれば、

$$\mathbf{P} = (\mathbf{E} + a \mathbf{P}) \sum_{s=1}^p \frac{N e_s^2}{f_s - 4\pi^2 m_s \nu^2}$$

を得る。化合物質が分極電子に對して等方等質的
であるとすれば、上式の a は $\frac{1}{3}$ に等しく、従つて上式を解
きて、 \mathbf{E} を求むれば、

$$\mathbf{E} = \mathbf{P} \frac{1 - \frac{1}{3} \sum_{s=1}^p \frac{N e_s^2}{f_s - 4\pi^2 m_s \nu^2}}{\sum_{s=1}^p \frac{N e_s^2}{f_s - 4\pi^2 m_s \nu^2}}$$

を得る。次に、既に述べるたる場合の如く、

$$\mathbf{E} = \alpha \mathbf{P}$$

と置き、化合物質全體としての屈折率を n とすれば、上
の二式から、

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{1 + 3\alpha} = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^p \frac{N e_s^2}{f_s - 4\pi^2 m_s \nu^2}$$

を得る。従つて、上式は、

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \sum_{s=1}^p \frac{n_s^2 - 1}{n_s^2 + 2} = \sum_{s=1}^p \frac{\varepsilon_s - 1}{\varepsilon_s + 2} \quad 140$$

と置くことが出来る。即ち、化合物質の屈折率に就て
の $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ の表式は、それを構成する各元素の相當表式
の和を以て表はされる。この關係は、化合物を構成す
る元素に屬する原子が相互に無關係にある場合に於
て適用さる可きものにして、各元素の原子間に相互作
用の存在する如き化合物質に對しては適用されざる
ことは勿論である。上の關係式は、種々の有機化合物
に就てよく實驗結果と一致するものが相當に多く見
出されて居る。

第九章 光の分散

一般に原子内に p 個の分極電子の群が存在し、その各群の電子の固有振動数を夫々、

$$\nu_1^2 = \frac{f_1}{4\pi^2 m_1}, \quad \nu_2^2 = \frac{f_2}{4\pi^2 m_2}, \quad \dots, \quad \nu_p^2 = \frac{f_p}{4\pi^2 m_p}$$

とし、又物質の単位体積内にはその各群に、各 N 個宛の電子が存在するとし、物質の屈折率を n とすれば、第八章の考察と同様にして、

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N}{3} \sum_{i=1}^p \frac{e_i^2}{4\pi^2 m_i (\nu_i^2 - \nu^2)} = \sum_{i=1}^p \frac{n_i^2 - 1}{n_i^2 + 2}$$

を得る。上式の ν は外部から該物質に進入し来る光波の振動数を表はす。

今簡単の爲めに、考ふる物質内に唯一種の分極電子のみを含むものとすれば、上式は、

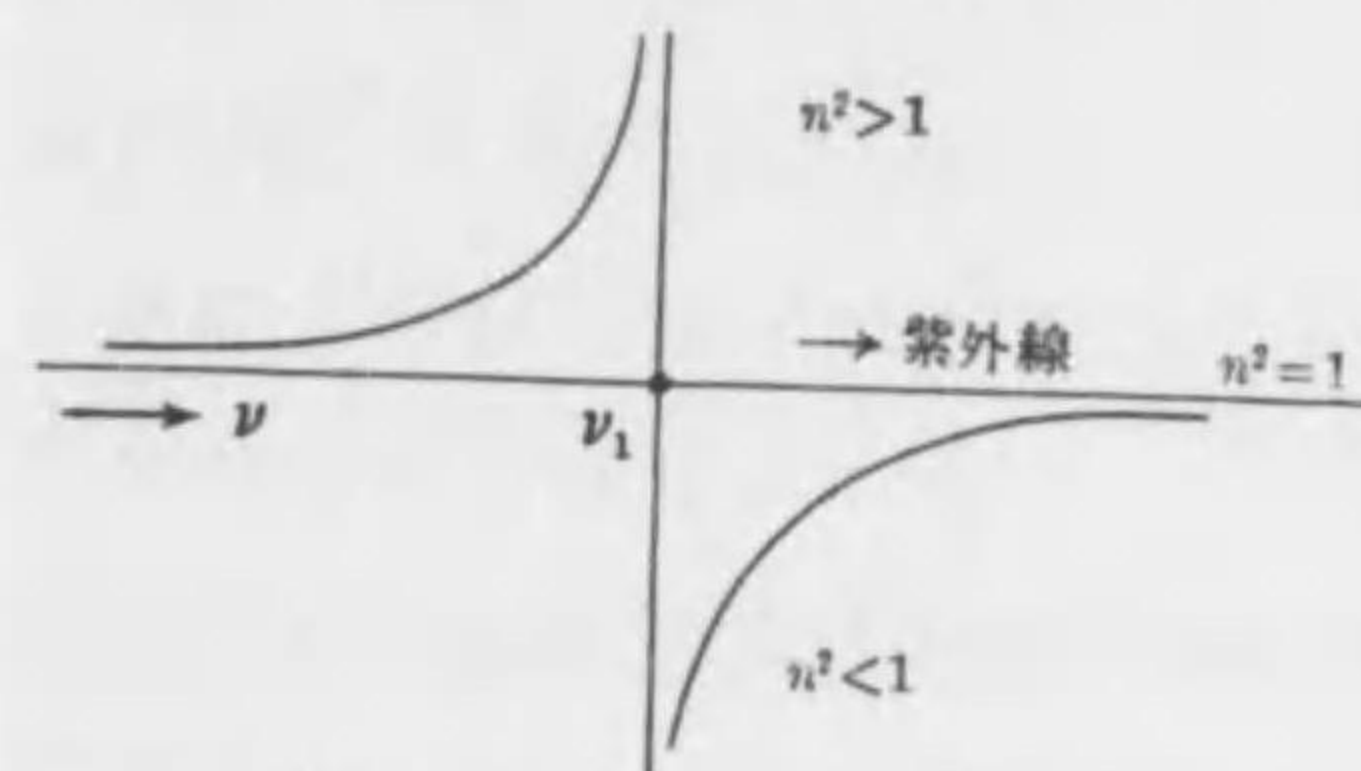
$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N e_1^2}{12\pi^2 m_1 (\nu_1^2 - \nu^2)}$$

即ち
$$n^2 = \frac{2s + 1}{1 - s}, \quad s = \frac{N e_1^2}{12\pi^2 m_1 (\nu_1^2 - \nu^2)}$$

となる。上式に従つて、光波の振動数 ν に対する屈折率 n の変化を表はせば、第五十五圖に示す如く、振動数 ν が次第に増大するに従つて、屈折率は 1 よりも大なる値に於て次第に増大して、 $s = 1$ に於て無限大とな

り、 $\nu = \nu_1$ に於て、 $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ は無限大となる。 ν が更に増大すれば、 $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ は $-\infty$ から次第に増大し、 n^2 は $s = -\frac{1}{2}$

第五十五圖



の時零となり、次第に増大して 1 に近づく。されば、外部から進入し来る光波が種々の振動数を有する一つの群で

あるとすれば、各振動数に對して相違する屈折率を現はす爲めに、光の分散が行はれることとなる。又光波が唯一つの振動数のみを含む場合に於ても、物質内に異種の分極電子即ち、固有振動数を異にする分極電子を含む爲めに、屈折率は各電子に依つて異なり、所謂¹⁾分散の現象が現はれる。

屈折率が著しく大である爲めには、固有振動数が著しく大であることを必要とする。固有振動数が極めて大であれば、その屈折率は殆んど 1 に等しく、その物質は殆んど屈折を與へざるものである。又光波の振動数が極めて大であるとき、即ち X 線の如きものがありては、又多くの物質はその屈折率が 1 に等しく、従つ

¹⁾ Dispersion.

て殆んど屈折を行はない。又光波の振動数 ν がその物質の固有振動数 ν_1 に對して, $s=1$ と $s=\infty (\nu=\nu_1)$ となる範圍及び $s=-\infty$ と $s=-\frac{1}{2}$ となる範圍に於て, n は虚數となり, この部分に於ては他の場合に於ける如く光の進行を論じ得られない。

上の考察に於ては, 分極電子は不減衰的振動運動をなすものと假定すれども, 一般には運動は減衰的にして, 従つて運動の式に運動を妨ぐる力を入れることが必要である。この抵抗力を考慮すれば, $\nu=\nu_1$ の近傍に於て, 上の如き完全共鳴を起さざるものとなる。

上述の如き抵抗力を考慮し, そして磁場の作用なき場合をとれば, 第八章 135 式に於て磁場の項を省略して同様の計算を行へば, 136 式は,

$$\mathbf{E} = (\alpha + i\beta) \mathbf{P}$$

となる。但し, α, β は,

$$\alpha = f' - a - 4\pi^2 m' \nu^2, \quad \beta = 2\pi g' \nu$$

である。電媒的變位 \mathbf{D} は, 上の關係を用ひて,

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P} = \left(1 + \frac{1}{\alpha + i\beta}\right) \mathbf{E}$$

となる。今,

$$\mathbf{D} = \frac{c^2}{q^2} \mathbf{E}$$

と置けば, 上の二式を比較して,

$$\frac{c^2}{q^2} = 1 + \frac{1}{\alpha + i\beta}$$

を得る。 c は光速を表はすが故に, q は複素數にして,

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{v} - i \frac{k}{2\pi\nu}$$

と置くことが出来る。 v は物質内に於ける光速を表はし, k は常數である。

運動が減衰的である爲めに, 光のエネルギーの吸収が行はれる筈である。従つて, \mathbf{E}, \mathbf{D} のベクトルは,

$$\varepsilon^{2\pi i \nu (t - \frac{z}{v})} = \varepsilon^{2\pi i \nu (t - \frac{z}{v}) - kz}$$

に比例すると見做すことが出来る。但し, 光波は z 軸の方向に進行し來るものである。上式の實數項は,

$$\varepsilon^{-kz} \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{v}\right)$$

となり, 振動の振幅は ε^{-kz} に比例して次第に減衰する。即ち光波は物質内に進入して次第に吸収される。そして, 光波が $z=1$, の距離だけ進むときに減衰する振幅は ε^{-k} に比例する。この k を吸収率と名付けて居る。

今, 屈折率 n 及び吸収率 k の光波の振動数 ν 及び抵抗力 g に對する關係を求め。 $\frac{c^2}{q^2}$ の式を變形して,

$$\frac{c^2}{q^2} = 1 + \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$= c^2 \left(\frac{1}{v} - i \frac{k}{2\pi\nu} \right)^2 = \left(\frac{c^2}{v^2} - \frac{c^2 k^2}{4\pi^2 \nu^2} \right) - i \frac{c^2 k}{\pi \nu v}$$

を得る。上式の實數項と虚數項とを夫々比較して,

$$\frac{c^2}{v^2} - \frac{c^2 k^2}{4\pi^2 v^2} = 1 + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \frac{c^2 k}{\pi v v} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

を得る。 β は著しく大なる値を有するものと假定して、 $\frac{1}{\beta}$ 以上の項を省略すれば、

$$\frac{c^2}{v^2} = n^2 = 1 + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{4(\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

$$\frac{c^2 k^2}{4\pi^2 v^2} = \frac{\beta^2}{4(\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

を得る。従つて、近似的に第一式の右邊の第三項を省略すれば、

$$\left. \begin{aligned} n &= 1 + \frac{\alpha}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \\ k &= \frac{\pi v \beta}{c(\alpha^2 + \beta^2)} \end{aligned} \right\} \quad 141$$

を得る。

光が物質内に進入する時、その波長に等しき距離を進む間に吸収される量は、極めて微々たるものにして、殆んど零と見做すことが出来る。従つて振動の振幅は、

$$\varepsilon^{-ik} = \varepsilon^{-\frac{ck}{v}} \doteq 1$$

に、比例すると見做し得られる。即ち、

$$\frac{ck}{v} \doteq 0$$

なるを要す。従つて、 $\frac{ck}{v}$ は殆んど零に近きものなることを示す。されば今、

$$\frac{ck}{2\pi v} = \frac{\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)}$$

の関係が、最大値をとる爲めには、 α が零なるを要す。即ち、

$$\frac{ck}{2\pi v} = \frac{\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2\beta}$$

となる。従つて、上の値が零に等しき爲めには、 β は非常に大なることを必要とする。されば、141式の計算に於ける近似的省略は、不當に非らざることを知る。

されば、吸収率が最大値をとる爲めには、前に得たる α の値の ν の代りに、 ν_0' を代入して、

$$\alpha = f' - 4\pi^2 m' \nu_0'^2 = 0$$

なるを要す。即ち、光の振動数が、

$$\nu_0' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f' - a}{m}}$$

なるとき、吸収率は最大値をとる。この振動数は、吸収スペクトルの中央部を示すものにして、物質の固有振動数は、

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f}{m_0}}$$

にして、これは、發散スペクトルを表はす。一般に ν_0' と ν_0 とは等しからず。

吸収率の最大値は、

$$\alpha = 0, \quad k = \frac{\pi v}{c\beta}$$

にして,

$$\alpha = \pm\beta \text{ のとき, } k = \frac{\pi\nu}{2c\beta}$$

となり,この値は最大値の $\frac{1}{2}$ である。普通吸収線の幅は,その吸収が最大の部分の $\frac{1}{2}$ に等しき二点の間をとる。従つて, $\alpha = \pm\beta$ の範囲を吸収線の幅とすることが出来る。

又,屈折率 n の最大値は 141 式から, $\alpha = \beta$ のときの n の値にして,最小値は $\alpha = -\beta$ の時の n の値である。

即ち,

$$\alpha = f' - a - 4\pi^2 m' \nu^2 = 4\pi^2 m' (\nu_0^2 - \nu^2) = \pm\beta$$

の関係から,

$$\nu^2 = \nu_0^2 \mp \frac{\beta}{4\pi^2 m'}$$

を得る。従つて,屈折率の最大及び最小なる光の振動数は,上式から近似的に,

$$\nu = \nu_0' \mp \frac{\beta}{8\pi^2 m' \nu_0'} \quad 142$$

として求められる。そして,屈折率の最大及び最小値は,

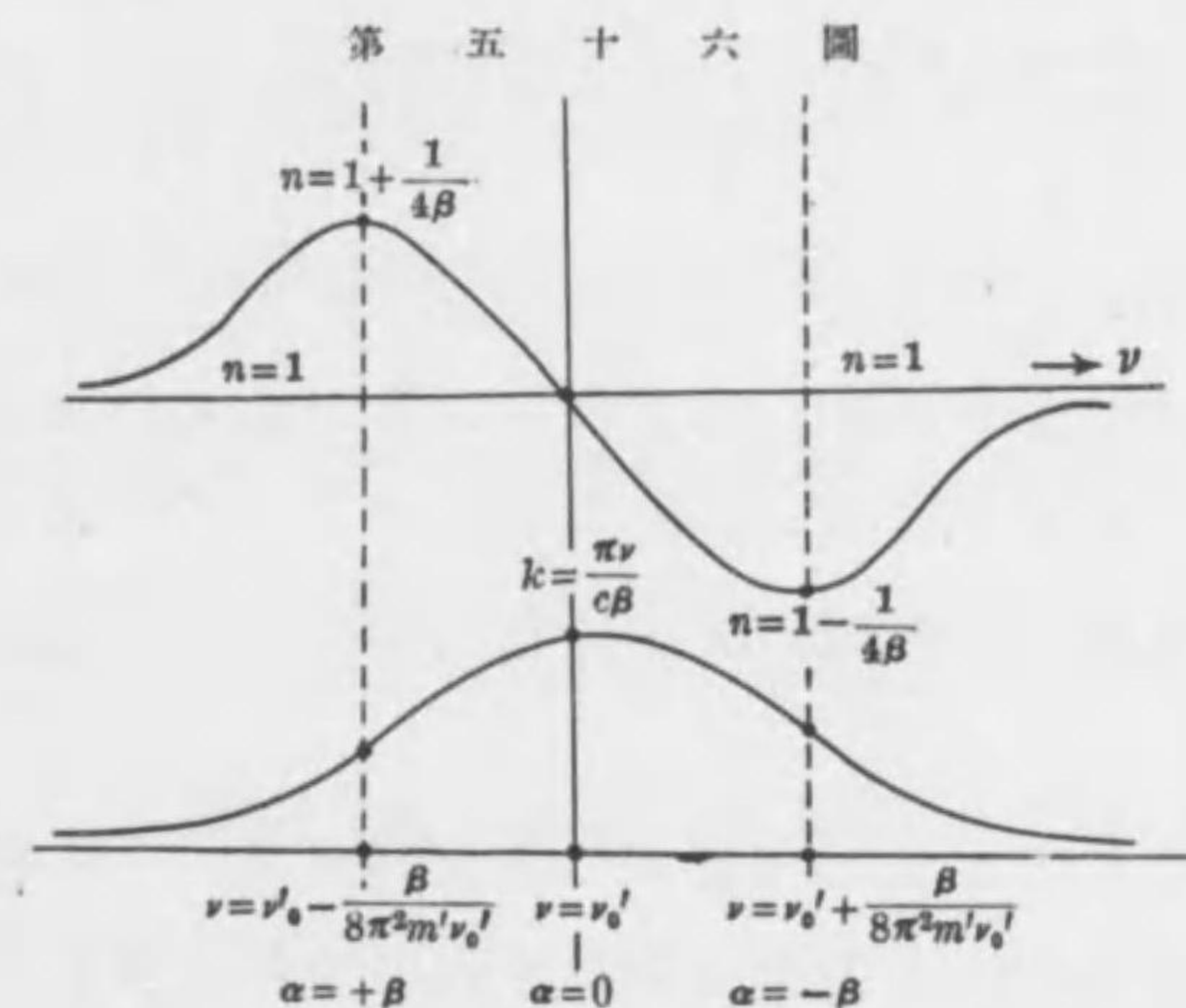
$$n = 1 \pm \frac{1}{4\beta}$$

として與へられる。又,最大吸収率を示すときの屈折率 n は 141 式から,

$$\alpha = 0, \quad n = 1$$

となる。されば,一般に吸収率が最大である振動数に對しては屈折率は最大値をとらず。そして,この差違は β 即ち,振動に對する抵抗が小なるに従つて次第に大となる。そして, β が零となる,即ち振動が不減衰的であれば,屈折率の最大最小値は夫夫正負に於て無限大となり吸収は起らず。これは,最初に述べたる場合である。

以上の關係は,第五十六圖に示す如き變化をなすも



のにして,これを光の異常分散と名付けて居る。この現象は實驗的に,よく知られて居る事實である。

1. Anomalous dispersion, Anomale Dispersion.

第十 章

逆ゼーマン効果

電磁氣場に於て、分極電子が減衰振動運動をなすとするれば、その運動の式は、第八章 135 式を以て與へられる。従つて、電場のベクトル \mathbf{E} は 136 式と同様に、

$$\mathbf{E} = (\alpha + i\beta)\mathbf{P} - i\gamma[\mathbf{P}, \mathbf{H}]$$

を以て與へられる。但し、 α, β, γ は、

$$\alpha = f' - a - 4\pi^2 m' v^2, \quad \beta = 2\pi g' v, \quad \gamma = \frac{2\pi\nu}{cNe}$$

である。

今、分極電子を含む物質内に、光波が磁場の方向と同方向に進入するものとし、その方向を z とすれば、上式に含まれる \mathbf{E}, \mathbf{P} のベクトルは、

$$e^{i\gamma(t - \frac{z}{q})}$$

に比例するものと見做すことが出来る。 q は、光波の物質内に於ける複素數を以て表はされる速度である。

又、電媒的分極の x, y 分は、

$$\mathbf{P}_x = \left(\frac{c^2}{q^2} - 1\right)\mathbf{E}_x, \quad \mathbf{P}_y = \left(\frac{c^2}{q^2} - 1\right)\mathbf{E}_y$$

を以て表はされる。磁場の方向は、 z 軸の方向なるが故に、

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_y = 0$$

となる。従つて、電場のベクトルの x, y 分は上に掲げたる式から、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_x &= (\alpha + i\beta)\mathbf{P}_x - i\gamma\mathbf{P}_y\mathbf{H}_z \\ \mathbf{E}_y &= (\alpha + i\beta)\mathbf{P}_y + i\gamma\mathbf{P}_x\mathbf{H}_z \end{aligned} \right\} 143$$

となる。上に求めたる、 $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y$ の値を代入して、

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\frac{c^2}{q^2} - 1} - (\alpha + i\beta) \right\} \mathbf{P}_x &= -i\gamma\mathbf{P}_y\mathbf{H}_z \\ \left\{ \frac{1}{\frac{c^2}{q^2} - 1} - (\alpha + i\beta) \right\} \mathbf{P}_y &= i\gamma\mathbf{P}_x\mathbf{H}_z \end{aligned} \right\} 144$$

を得る。上式を比較して、

$$\mathbf{P}_x^2 = -\mathbf{P}_y^2$$

を得る。即ち、

$$\mathbf{P}_y = \pm i\mathbf{P}_x$$

を得る。今、

$$\mathbf{P}_x = P e^{i(\gamma + \theta)}$$

と置けば、上の関係から、

$$\mathbf{P}_y = P e^{i(\gamma + \theta \pm \frac{\pi}{2})}$$

となり、 \mathbf{P}_x と \mathbf{P}_y の間には、 $\pm \frac{\pi}{2}$ の位相の差を生ずることとなる。従つて、上の如き振動を xy 面に投影すれば、 x と y の方向の振動に $\pm \frac{\pi}{2}$ の位相の差があ

る爲めに、その合成としての運動は圓運動となる。そして、位相の差は $\pm \frac{\pi}{2}$ なるが故に、右廻りと左廻りの二つの圓運動を表はす。されば、 z 軸の方向に進入し來れる光波は、磁場の作用を受けて xy 面内に於いては、二つの圓偏光に分離することとなる。

次に、144式に於て $\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_y$ を消去すれば、

$$\frac{c^2}{q^2} = 1 + \frac{1}{\alpha + i\beta \pm \gamma \mathbf{H}_z}$$

を得る。上式と、第九章に於ける磁場の作用なきときの $\frac{c^2}{q^2}$ の値とを比較すれば、磁場の作用ある場合に於ては、 α の代りに $\alpha \pm \gamma \mathbf{H}_z$ を用ふれば宜しきことを示す。従つて、吸収率 k は第九章 141式に於て α の代りに $\alpha \pm \gamma \mathbf{H}_z$ を入れて、

$$k = \frac{\pi \nu}{c} \frac{\beta}{(\alpha \pm \gamma \mathbf{H}_z)^2 + \beta^2}$$

を得る。但し、

$$\gamma = \frac{2\pi \nu}{cNe}$$

である。されば、光波の振動数 ν が變化すれば、 γ も亦變化するも、吸収率の極めて狭き幅の範圍に於ては、 γ は殆んど一定と見做し得るが故に、吸収率が最大値をとる爲めには、

$$\alpha \pm \gamma \mathbf{H}_z = 0$$

なることを必要とする。即ち、既に求めたる α の値を代入して、

$$f' - a - 4\pi^2 m' \nu^2 \pm \gamma \mathbf{H}_z = 0$$

となる。従つて、第九章に於ける記號を用ひて上式から、

$$\nu^2 = \nu_0'^2 \pm \frac{\gamma \mathbf{H}_z}{4\pi^2 m'}$$

を得る。即ち近似的に、

$$\nu = \nu_0' \pm \frac{\gamma \mathbf{H}_z}{8\pi^2 m' \nu_0'} \quad 145$$

となる。 ν_0' は吸収線の元線を示すものにして、 ν の二つの値は吸収線が磁場の影響を受けて、元線の左右に分離することを示すものである。この現象は、恰も發散スペクトル線に對するゼーマン効果に相當するものにして、これを逆ゼーマン効果と名付けて居る。又元線 ν_0' からの分離の距離は、

$$\frac{\gamma \mathbf{H}_z}{8\pi^2 m' \nu_0'} = \frac{\frac{2\pi \nu_0'}{cNe} \mathbf{H}_z}{8\pi^2 m_0 \nu_0'} = \frac{e}{4\pi m_0 c} \mathbf{H}_z$$

にして、ゼーマン効果に於ける分離の量に相等しい。又、上の關係はゼーマン効果の縦効果に相當するものにして、これを縦の逆ゼーマン効果と名付けて居る。

1. Inverse Zeeman-effect, Inverser Zeeman-Effekt.

次に、横の逆ゼーマン効果を述べる。

磁場の方向は z 軸の方向にして、光は x 軸の方向に進入し来るものとする。従つて、 \mathbf{E}, \mathbf{P} のベクトルは、

$$e^{-ikx + 2\pi i\nu(t - \frac{x}{v})} = e^{2\pi i\nu(t - \frac{x}{v})}$$

の項に比例すると、見做すことが出来る。そして、電媒的變位は、その x 分が零となり y 分を有するのみにして、

$$\mathbf{D}_x = \mathbf{E}_x + \mathbf{P}_x = 0$$

$$\mathbf{D}_y = \mathbf{E}_y + \mathbf{P}_y$$

となる。上の第一式を、143の第一式に代入して、

$$\mathbf{P}_x = \frac{i\gamma\mathbf{H}_z}{1 + \alpha + i\beta} \mathbf{P}_y$$

を得る。これと、143の第二式とを用ひて、 \mathbf{D}_y を表はせば、

$$\mathbf{D}_y = \mathbf{P}_y \frac{(1 + \alpha + i\beta)^2 - \gamma^2 \mathbf{H}_z^2}{1 + \alpha + i\beta}$$

となる。又、144の第二式と、上の \mathbf{P}_x の式を用ひて上式を變形すれば、

$$\mathbf{D}_y = \frac{(1 + \alpha + i\beta)^2 - \gamma^2}{(1 + \alpha + i\beta)(\alpha + i\beta) - \gamma^2} \mathbf{P}_y \quad 146$$

となる。但し、

$$\gamma' = \gamma \mathbf{H}_z$$

である。

次に基礎の式、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{から} \quad -\frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}_y}{\partial t}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{から} \quad \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial t}$$

を得る。従つて、上式から、

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}_y}{\partial t^2}$$

を得る。 $\mathbf{E}_y, \mathbf{D}_y$ に $e^{2\pi i\nu(t - \frac{x}{v})}$ を代入して、變形すれば、

$$\left(\frac{1}{v} - \frac{ik}{2\pi\nu}\right)^2 \mathbf{E}_y = \frac{1}{c^2} \mathbf{D}_y$$

を得る。146の \mathbf{D}_y の値を代入して、變形すれば、

$$\left(\frac{1}{v} - \frac{ik}{2\pi\nu}\right)^2 = \frac{\{(1 + \alpha)^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2i(1 + \alpha)\beta\} \{ (1 + \alpha)\alpha - \beta^2 - \gamma^2 - i(1 + 2\alpha)\beta \}}{c^2 \{ (1 + \alpha)\alpha - \beta^2 - \gamma^2 \}^2 + (1 + 2\alpha)^2 \beta^2}$$

となる。今上式を、

$$\left(\frac{1}{v} - \frac{ik}{2\pi\nu}\right)^2 = \frac{A - iB}{c^2 Q}$$

と置けば、この式を解きて、

$$k^2 = \frac{2\pi^2\nu^2}{c^2} \frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{Q} \quad 147$$

を得る。

吸収率の最大値を求めるには、 Q の最小値を求めれば充分である。即ち、

$$Q = \{(1 + \alpha)\alpha + \beta^2 - \gamma^2\}^2 + \beta^2(1 + 4\gamma^2)$$

の値が、最小値をとる爲めには、 α は如何なる関係を満足すべきかを求むれば、充分である。その爲めには、 α を含む第一項が、零であれば充分である。即ち、

$$\alpha = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\gamma^2 - \beta^2 + \frac{1}{4}}$$

の値を有するとき、 Q は最小値をとる。この時、

$$A = 4\beta^2\gamma^2$$

$$B = \frac{\beta}{2} \{1 + 4\gamma^2 \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\beta^2 + 1}\}$$

$$Q = \beta^2(1 + 4\gamma^2)$$

となる。そして、

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{i\gamma'}{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\gamma^2 - \beta^2 + \frac{1}{4}} + i\beta}$$

の關係を得る。今、上式を、

$$\frac{i\gamma'}{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\gamma^2 - \beta^2 + \frac{1}{4}} + i\beta} = C\varepsilon^{i\frac{\pi}{2}}$$

と置くとき、一般に s は 1 に等しからず、従つて xy 面内に於ける振動は、圓運動とならずして一般に橢圓運動を表はす。

次に、近似的計算を行ふ爲めに、磁場の強さは十分に大であり、分極電子の振動運動を防ぐる抵抗力は割合に小なるものとする。即ち、 β はあまり大ならざる場

合を考察する。従つて、

$$\gamma' \gg \beta \gg 1$$

の如き關係が、満足されるものとすれば、上に求めたる値から、

$$\alpha \doteq \pm \gamma'$$

となる。即ち、

$$\alpha = f' - 4\pi^2 m' v^2 = 4\pi^2 m' (v_0'^2 - v^2) = \pm \gamma H,$$

となる。従つて、

$$v^2 = v_0'^2 \pm \frac{\gamma A_z}{4\pi^2 m'}$$

を得る。即ち、前と同様の近似的計算の許に、

$$v = v_0' \pm \frac{\gamma H_z}{8\pi^2 m' v_0'} \quad 148$$

を得る。この關係は横のゼーゼン効果と全く同様にして、第六章 131 式と比較すれば、容易に首肯される。

同様の近似値として、

$$A = 4\beta^2\gamma^2, \quad B = 2\beta\gamma^2, \quad Q = 4\beta^2\gamma^2$$

を得る。又、吸収率 k は、147 式に同様の値を代入すれば、

$$k = \frac{\pi\nu}{2\beta c}$$

となる。即ち、吸収率の最大値は磁場の作用なき場合、即ち第九章に於けるものの $\frac{1}{2}$ となる。そして、電媒的

分極の x, y 分の比は、同様の近似値として、

$$\frac{P_x}{P_y} = \pm i = \varepsilon^{\pm i \frac{\pi}{2}}$$

となる。即ち、 P_x, P_y の位相の差は $\pm \frac{\pi}{2}$ となり、 xy 面に於ける振動は左廻り及び右廻りの圓偏光に相當するものである。即ち、上の如き近似的計算に於ては、横の逆ゼーマン効果は元吸収線の左右に二つの上の如き關係の吸収線が現はれる。この左右の吸収線は、 xy 面内に於ける、右廻り及び左廻りの圓運動に依るものにして、一般的には楕圓運動を表はす。實驗の結果に依れば、圓運動に依るものと然らざるものとが見出されて居る。

第十一章

ファラデー効果

逆ゼーマン効果に於ては、光が物質内に進入するとき、物質内の分極電子の強制振動の爲めの吸収スペクトル線が、磁場の影響を受けて分離するものなるも、進入光波が磁場の影響を受けてその偏光面を變化する現象を、ファラデー効果と名付けて居る。

今、光波は z 軸の方向に並行に進み、磁場も亦 z 軸の方向をとるとすれば、第九章 141 式に於ける屈折率の値は、逆ゼーマン効果に於ける考察と同様にして、磁場の作用するときは α の代りに $\alpha \pm \gamma H_z$ を代入することに依つて求められる。即ち、

$$n = \frac{c}{v} = 1 + \frac{\alpha \pm \gamma H_z}{2(\alpha \pm \gamma H_z)^2 + \beta^2} \quad 149$$

となる。上式が示す如く、屈折率は正負の記號に依つて異なる値の一對を得る。即ち、物質内に於ける光速が異なることを示す。この正負の記號は、右廻りと左廻りの偏光を表はすものなることは既に屢々述べたことに依つて知ることが出来る。されば、相異なる速度の偏光を合成すれば、その偏光面が變化し磁場のなき場合に對して一定量の廻轉を行ふこととなる。

今, $z=0$ の平面即ち xy 面に於て, 上の如き二つの偏光を合成した結果, x 軸の方向の線偏光となると假定すれば, その電場のベクトルは

$$\mathbf{E}_x = A \varepsilon^{2\pi i \nu t}$$

を以て表はされる。これを最初の二つの偏光に分解する爲めに, 次の如く置く。

$$\mathbf{E}_x = \frac{A}{2} (\varepsilon^{2\pi i \nu t} + \varepsilon^{2\pi i \nu t})$$

$$\mathbf{E}_y = \frac{iA}{2} (\varepsilon^{2\pi i \nu t} - \varepsilon^{2\pi i \nu t}) = 0$$

そして, \mathbf{E}_x と \mathbf{E}_y の各第一項を合成し次に各第二項を合成すれば, その各は圓偏光にして互に反對の廻轉を示すこととなる。今, 二つの互に反對の圓偏光の傳播速度を各 v_1, v_2 とすれば, 上の $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y$ は

$$\mathbf{E}_x = \frac{A}{2} \left\{ \varepsilon^{2\pi i \nu \left(t - \frac{z}{v_1}\right)} + \varepsilon^{2\pi i \nu \left(t - \frac{z}{v_2}\right)} \right\}$$

$$\mathbf{E}_y = \frac{iA}{2} \left\{ \varepsilon^{2\pi i \nu \left(t - \frac{z}{v_1}\right)} - \varepsilon^{2\pi i \nu \left(t - \frac{z}{v_2}\right)} \right\}$$

となる。これを書き換へて,

$$\mathbf{E}_x = \frac{A}{2} \varepsilon^{2\pi i \nu (t - \mu)} (\varepsilon^{2\pi i \nu \delta} + \varepsilon^{-2\pi i \nu \delta})$$

$$\mathbf{E}_y = \frac{A}{2i} \varepsilon^{2\pi i \nu (t - \mu)} (\varepsilon^{2\pi i \nu \delta} - \varepsilon^{-2\pi i \nu \delta})$$

を得る。但し,

$$\mu = \frac{z}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right), \quad \delta = \frac{z}{2} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right)$$

である。次に $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y$ の比をとれば,

$$\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_x} = \tan 2\pi \nu \delta = \tan \frac{2\pi \nu z}{2} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right)$$

となる。即ち磁場の作用する場合の $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y$ の合成ベクトルは磁場なき場合のもの即ち最初の \mathbf{E}_x に對して $2\pi \nu \delta$ に相當する角度だけ廻轉することを示す。今, $z=1$ とすれば, 即ち單位の長さに対する廻轉角は

$$\begin{aligned} 2\pi \nu \delta &= \omega = \pi \nu \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) = \frac{\pi \nu}{c} \left(\frac{c}{v_1} - \frac{c}{v_2} \right) \\ &= \frac{\pi \nu}{c} (n_1 - n_2) \end{aligned} \quad 150$$

である。 $\frac{c}{v_1}, \frac{c}{v_2}$ は 149 式に於ける正負の記號に依つて異なる屈折率 n_1, n_2 に相等しきものにして, 今 n_1 の代りに正の記號の n を, n_2 の代りに負の記號の n を代入すれば,

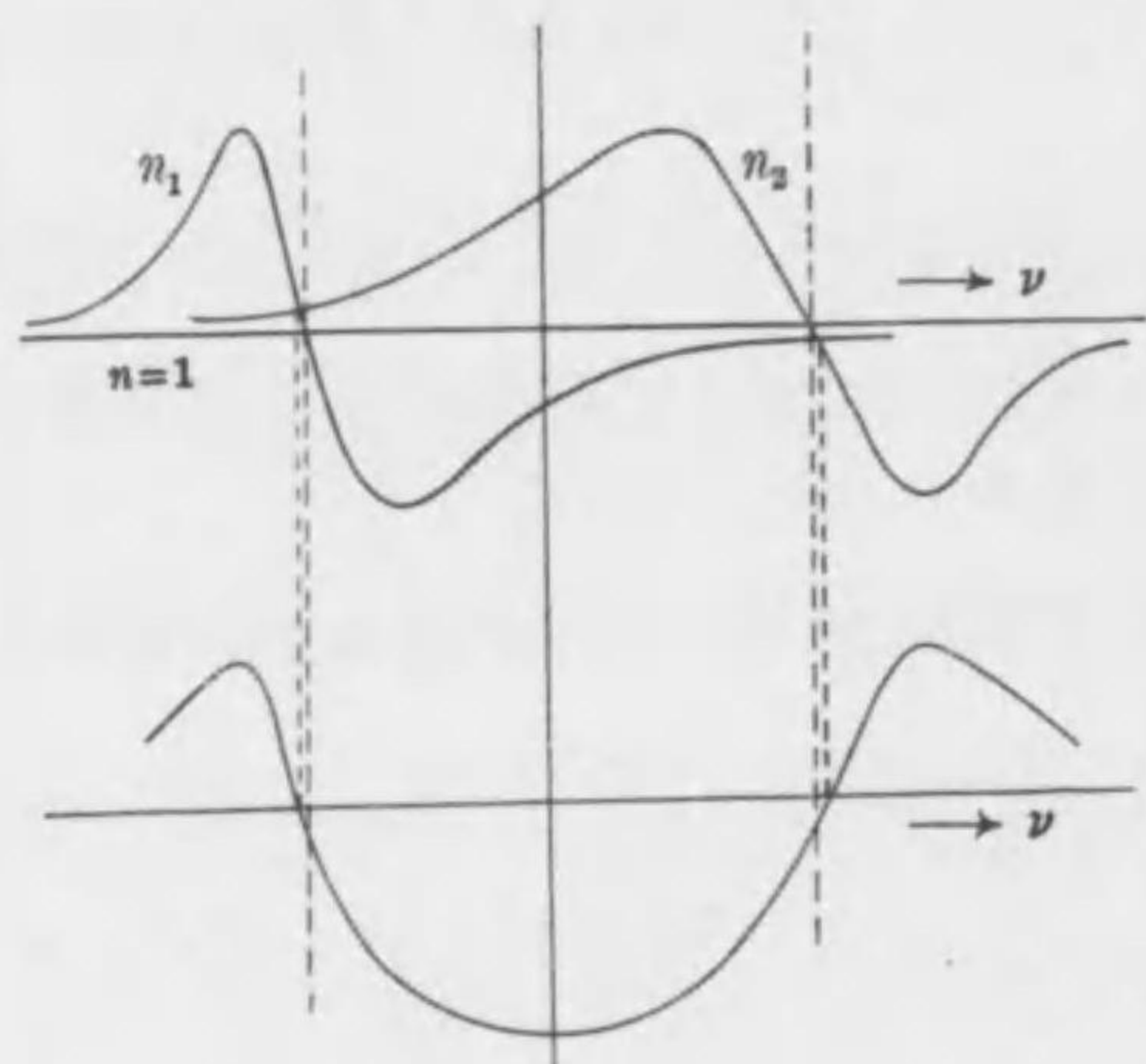
$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\pi \nu}{2c} \left\{ \frac{\alpha + \gamma \mathbf{H}_z}{(\alpha + \gamma \mathbf{H}_z)^2 + \beta^2} - \frac{\alpha - \gamma \mathbf{H}_z}{(\alpha - \gamma \mathbf{H}_z)^2 + \beta^2} \right\} \\ &= \frac{\pi \nu m'}{2c} \left\{ \frac{4\pi^2(\nu_0'^2 - \nu^2) + \frac{\gamma \mathbf{H}_z}{m'}}{16\pi^4 m'^2 (\nu_0'^2 - \nu^2 + \frac{\gamma \mathbf{H}_z}{4\pi^2 m'})^2 + \beta^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi^2(\nu_0'^2 - \nu^2) - \frac{\gamma \mathbf{H}_z}{m'}}{16\pi^4 m'^2 (\nu_0'^2 - \nu^2 - \frac{\gamma \mathbf{H}_z}{4\pi^2 m'})^2 + \beta^2} \right\} \end{aligned} \quad 151$$

となる。

上式に於て、 \mathbf{H} が正のとき、即ち磁場の方向が光の進行の方向と一致する場合に於ては、 ω の正值はその廻轉の方向が磁場の方向に對して、右廻りの方向をとることを意味する。又、廻轉角 ω は光波の振動數に依つて變化するものである。

今、第九章第五十六圖に於ける、屈折率 n の振動數 ν

第五十七圖



に對する變化と共に、 ω の ν に對する變化を、150式を用ひて圖示すれば、第五十七圖に示す如きものとなる。

屈折率 n は磁場の影響を受けて n_1, n_2 となり、各中心から逆ゼーマン効果に於けるが如く、 $\frac{e}{4\pi m_0 c} \mathbf{H}_z$ だけ左右に變位して、各 ν に對して圖に示すが如き變化をな

す。従つて、廻轉角 ω は第五十六圖を参照して知られる如く、元吸収線の近傍に於て振動數が $\frac{e}{4\pi m_0 c} \mathbf{H}_z$ よりも少しく大なる範圍に於て、二度附號を變へる。屈折率の大なる所に於ては廻轉角も亦大である。

この現象を最初に測定したのは、1898年マカルソー及びコルビノにして、リチウム焰から出るD線に就て實驗した結果、その廻轉角は 270° に達することを見出した。其後ゼーマンが1902年に、又ハローが1905年に精密に測定した結果、上に述べたる理論に一致する結果を出した。

又、光が磁場に直角に、 x 軸の方向に進む場合即ち横の効果に相當するものに於ては、光は磁場の影響を受けて、 y 及び z の方向に於て屈折率を異にする二つの光波に分離して、所謂二重屈率を行ひ、恰も結晶體内に於ける光の進行の如き現象を呈する。この現象は、屈折を表はす式の内に、磁場のベクトルが二乗の形として入り來るが故に、磁場の方向を變へるも何等の變化を及ぼさないものである。そして、磁場の強さが増大するに従つて、その現象は著しく増大するものである。

1. D. Macaluso and O. M. Corbino, Comptes Rendus, vol. 127, (1898), p. 548.
2. P. Zeeman, Proc. Amsterdam, vol. 5, (1902), p. 41.
3. J. J. Hallo, Arch. néerl. (2), vol. 10, (1905), p. 148.

第十二章

運動物体内の基礎の式と光の現象

運動物体内に於ける電子論の基礎の式は相対性理論が導かれる以前に、その基礎となる可き種々の実験的事實を説明することが出来て、相対的運動座標系の間に於けるローレンツ變換を導く動機となつた點から見て極めて重要なものである。

物體は電子論から見れば電子の集合體と見做すことが出来る。従つてそれが運動状態にあるときは電子體系が運動すると考へられる。従つて運動状態にある電子體系が作る周囲の電磁氣場は、それが静止するときとは異なるものと考へるのが至當である。ローレンツは静止系と運動系の間に次の如き變換を行ひ、静止系に對する電子論の基礎の式を運動系に變換した。

今エーテルに固定して静止する座標軸を x, y, z とし、各軸が常にこの座標軸に並行し運動物體と相等しき速度 v を以て運動物體の方向に運動する座標軸を x', y', z' とする。これに力學に於けるガリレイ變換を適用すれば次の關係を得る。

$$x' = x - v_x t, \quad y' = y - v_y t, \quad z' = z - v_z t \quad 152$$

但し v_x, v_y, v_z は v の x, y, z の方向の分である。又運動系に於ける時間 t' はガリレイ變換とは異なり、静止系に於ける時間 t に對して次の如き關係にあるものとする。

$$t' = t - \frac{1}{c^2}(v_x x' + v_y y' + v_z z') \quad 152'$$

上式の c は光の速度を表はす。従つて運動物體の速度が光速に對して著しく小である場合は上式の右邊の第二項は著しく小となり、ガリレイ變換の時間に近づくこととなる。又運動系の原點に於ては常に $t=t'$ となる。されど上式は第二項が x', y', z' の函數である爲めに位置に依つて時間が異なることとなり、時間の絶對性の否定を意味し、運動系に於ける時間は相対的となり、時間の意義の變更を示すこととなる。この思想は相対性理論を導く導火線となるものである。

さて一般的に物體は運動座標系に對して相對速度 u を以てその運動方向に運動するものとし、エーテルに固定する静止座標系に對する物體の相對速度を w とすれば

$$w = u + v \quad 153$$

となる。

エーテルに固定する静止系に對する電子論の基礎の式は I-IV を以て表はされる故、152, 152' 式を用ひ

てこれを運動系に変換することとする。今電磁氣場のベクトル \mathbf{E} , \mathbf{H} を代表して函数 ψ を以て表はし、その微分係数を求める。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x'} - \frac{\mathbf{v}_x}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t'}\end{aligned}$$

同様にして次の関係を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial y'} - \frac{\mathbf{v}_y}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t'}, & \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial \psi}{\partial z'} - \frac{\mathbf{v}_z}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t'} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial t'} - \mathbf{v}_x \frac{\partial \psi}{\partial x'} - \mathbf{v}_y \frac{\partial \psi}{\partial y'} - \mathbf{v}_z \frac{\partial \psi}{\partial z'}\end{aligned}$$

次に基礎の式 II をとり、上の微分係数の関係を代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned}\text{rot}_x \mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y'} - \frac{\mathbf{v}_y}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t'} - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z'} + \frac{\mathbf{v}_z}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t'} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial t} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial t'} - \mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial x'} - \mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y'} - \mathbf{v}_z \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial z'} \right)\end{aligned}$$

又運動系に於ても $\text{div } \mathbf{H} = 0$ が満足するものとすれば、

$$\mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial x'} = -\mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial y'} - \mathbf{v}_z \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial z'}$$

を得る故、これを $\text{rot}_x \mathbf{E}$ の右邊に代入して變形すれば、次の関係を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y'} \left\{ \mathbf{E}_z + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_x \mathbf{H}_y - \mathbf{v}_y \mathbf{H}_x) \right\} - \frac{\partial}{\partial z'} \left\{ \mathbf{E}_y + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_z \mathbf{H}_x - \mathbf{v}_x \mathbf{H}_z) \right\} \\ = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \mathbf{H}_x - \frac{1}{c} (\mathbf{v}_y \mathbf{E}_z - \mathbf{v}_z \mathbf{E}_y) \right\}\end{aligned}$$

上式に於て

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}], \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H} - \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{E}] \quad 154$$

と置き、 \mathbf{E}' , \mathbf{H}' を運動系に対する電磁氣場のベクトルを表はすものとすれば、上式は

$$\frac{\partial \mathbf{E}'_z}{\partial y'} - \frac{\partial \mathbf{E}'_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'_x}{\partial t'}$$

となり、一般に

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'} \quad \text{II}'$$

となる。上式は運動系に対する基礎の式の第二式を表はし、静止系に於けるものと同形となる。次に静止系に対する基礎の式 I は

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \rho \mathbf{w} \right)$$

となる故。上式に於て x, y, z, t だけを x', y', z', t' で表はしても近似的に同形のものとなるとすれば、静止系の基礎の式 III を變形して

$$\begin{aligned}\epsilon \left(\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} \right) &= \epsilon \left(\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x'} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y'} + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z'} \right) \\ &\quad - \frac{\epsilon}{c^2} \left(\mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t'} + \mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t'} + \mathbf{v}_z \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t'} \right)\end{aligned}$$

を得る。これに基礎の式 I を代入して書換へれば

$$\begin{aligned} \epsilon \left(\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} \right) &= \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x'} - \frac{1}{c} \left(\mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial x'} - \mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial x'} \right) + \frac{\rho}{c^2} (\mathbf{v}_x \mathbf{w}_x) \\ &+ \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y'} - \frac{1}{c} \left(\mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial y'} - \mathbf{v}_z \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y'} \right) + \frac{\rho}{c^2} (\mathbf{v}_y \mathbf{w}_y) \\ &+ \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z'} - \frac{1}{c} \left(\mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial z'} - \mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial z'} \right) + \frac{\rho}{c^2} (\mathbf{v}_z \mathbf{w}_z) \end{aligned}$$

となる。上式に154式を代入し静止系の基礎式 III を用ひて書換へれば

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E}' &= \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} - \frac{\rho}{c^2} (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= \left\{ 1 - \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{c^2} \right\} \rho \end{aligned} \quad \text{III}'$$

となる。上式は運動系に於ける基礎の式 III を表はすものにして、静止系に於けるものに比して、電荷 ρ が運動系及び物体の速度に依つて變化する如き形となる。勿論之等の速度が光速に比して著しく小なるときは静止系と等しき電荷密度を以て表はされることとなる。更に同様の變換を行へば、静止系に於ける基礎の式 I, IV に相當して次式を得る。

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}' = \frac{1}{c} \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} + \rho \mathbf{u} \right) \quad \text{I}'$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H}' = 0 \quad \text{IV}'$$

上に求めたる I' - IV' を運動系に於ける電子論の基礎の式と名付けて居る。又154の \mathbf{E}' , \mathbf{H}' は運動系に於ける電磁氣場のベクトルを表はし、物体が運動す

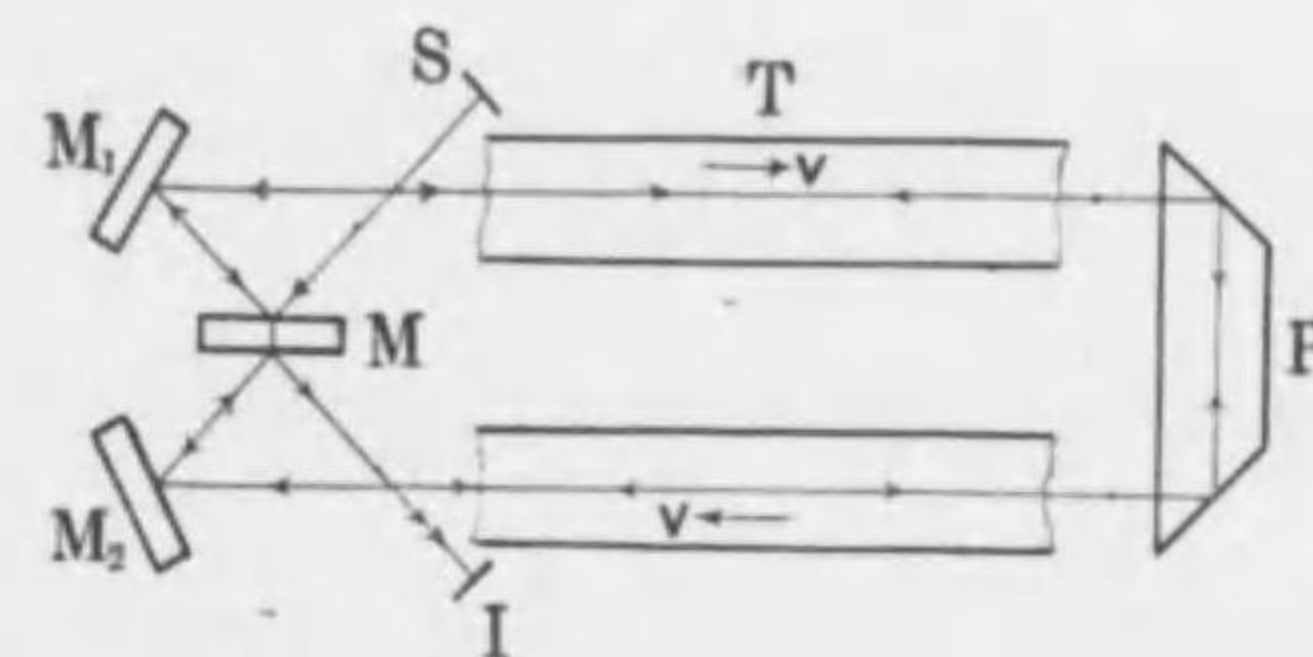
るとき、その電子體系が作る電磁氣場は運動系に對して静止系に於けるものと異なるものとして表はされる。

次に上の基礎の式を用ひて運動物体内の光の現象の一つとしてフーゾーの實驗結果を説明することとする。

フーゾーは1851年第五十八圖に示すが如き装置を用ひて、 \mathbf{v} の速度を以て流れる水中を光を通じ、水流が光の進行に對し

第五十八圖

て影響するか否かを實驗した。水が流れるときエーテルが共に運動するとすれば、



光はエーテルの波動と考へられる故に、流水中の光波の進行速度は静止観測者に對して $c' = \frac{c}{n} \pm \mathbf{v}$ である筈である。正負の記號は夫々光と流水の方向が一致するときと反對の場合を表はすものである、 n は水の屈折率を表はす。若しも流水に依つてエーテルは移動せず、従つて光の進行に對して何等の影響を及ぼさるものとすれば、流水中に於ても又静水中に於ても光

の進行速度は等しく $\frac{c}{n}$ である筈である。フ・ゾーは第五十八圖の如く光源 S から出た光を M の反透明鏡に依つて反射屈折を行はしめ夫々反射鏡 M_1, M_2 に依つて逆行せしめ、P のレンズに依つて屈折し來れるものを再び M_2, M_1 に依つて反射せしめ、再び M に依つて反射及び屈折した光を I に於て干涉せしめた。かくして、光は同じ道を一つは流水の方向に通過し、他は水と反對に通過することとなる。實驗の結果から各の速度を求めた結果に依れば、流水中の光の速度は

$$c' = \frac{c}{n} \pm |\mathbf{v}| \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad 155$$

で表はされることを出した。正負の記號は光の進行と流水の方向が一致する場合と反對の場合とを表はす。されば流水は幾分光の進行に對して影響することが結論された。この實驗は其後 1886 年マイケルソン及びモーレーに依つて、又 1915 年ゼーマン等に依つて精密に繰り返され、上と同様の關係が求められた。フレネルに依れば、エーテルはその内を物體が運動するも又静止するときも、物體內にある密度に相當するものは常に物體と共に移動することを考慮することに依つて、上の速度の關係を求めることが出來た。この意味に於て、 $1 - \frac{1}{n^2}$ をフレネルの係數と名付けて居

る。今フ・ゾーの實驗結果を運動物體內の電子論の基礎の式を用ひて説明する。流水の速度を \mathbf{v} で表はし、水に對する光の速度を \mathbf{u} とし、光は流水の方向即ち x の方向に進行するものとする。従つて光波の振幅は $\varepsilon^{2\pi i v \left(t' - \frac{x'}{u}\right)}$ に比例することが知られる。即ちベクトル \mathbf{E}', \mathbf{H}' は上の振幅に比例することとなる。基礎の式 I' II' に於て電導電流は存在せざる故 $\rho \mathbf{u} = 0$ となり、各式の y, z 分をとり \mathbf{E}', \mathbf{H}' は y', z' には無關係であることを考慮すれば、

$$\frac{\partial \mathbf{H}_z'}{\partial x'} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_y'}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_y'}{\partial x'} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_z'}{\partial t'}$$

となる。上式に $\mathbf{E}', \mathbf{H}' \propto \varepsilon^{2\pi i v \left(t' - \frac{x'}{u}\right)}$ を代入し、右邊に近似値 $\mathbf{E}_y' \doteq \mathbf{E}_y, \mathbf{H}_z' \doteq \mathbf{H}_z$ を代入すれば

$$\frac{1}{u} \mathbf{H}_z' = \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{E}_y \quad \frac{1}{u} \mathbf{E}_y' = \frac{1}{c} \mathbf{H}_z$$

となる。上式の右邊に 154 の値を代入し、同様の近似値をとれば次の如くなる。

$$\frac{1}{u} \mathbf{H}_z' = \frac{1}{c} \left(\varepsilon \mathbf{E}_y' + \frac{|\mathbf{v}|}{c} \mathbf{H}_z' \right) \quad \frac{1}{u} \mathbf{E}_y' = \frac{1}{c} \left(\mathbf{H}_z' + \frac{|\mathbf{v}|}{c} \mathbf{E}_y' \right)$$

上式から $\mathbf{E}_y', \mathbf{H}_z'$ を消去すれば次式を得る。

$$\left(\frac{c}{|\mathbf{u}|} - \frac{|\mathbf{v}|}{c} \right)^2 = \varepsilon = n^2$$

今流水の屈折率を n' とすれば、上式を用ひて

$$n' = \frac{c}{|\mathbf{u}|} = \pm n + \frac{|\mathbf{v}|}{c}$$

を得る。従つて水に對する光の相對速度 $|\mathbf{u}|$ は

$$|\mathbf{u}| = \frac{c}{n'} = \frac{c}{\pm n + \beta} = \pm \frac{c}{n} \mp \frac{c\beta}{n^2}, \quad \beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c}$$

となる。されば靜止觀測者に對する光の速度 $|\mathbf{w}|$ は、その方向が流水の方向と一致するか又は反對するかに従つて、次式を以て表はされる。

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}| \pm |\mathbf{v}| = \pm \frac{c}{n} \pm |\mathbf{v}| \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

この値は 155 式が示す實驗値と一致する。即ちフゾーの實驗結果は運動物体内の電子論の基礎の式を用ひて説明される。以上は運動物体内の電子論に依つて説明される現象の一例である。

第三編

原子の構成論

第一章

α 線の散亂とラザーホードの原子模型

原子内部に於て電子が運動状態にあるとき、これに作用する准弾性力とは何であるか。准弾性力は中心力に屬するものにして、電子の運動に於て自然的に作用する爲めには、電子に對して吸引力を與へるものが存在することを必要とする。即ち、原子内に於ては正の電荷を有する電子が存在すれば、その吸引力に依つて、准弾性力を起し得るのである。されば、原子内に正電子が存在するものとして、それを如何に取扱ふかは實驗的考察に俟つ可きであるが、最も簡単に考へられるのは、原子は球狀をなしその内部に一様なる密度を以て正電荷が分布され、その内に電子が或る配列をなすことである。

この想案の如き原子模型は、¹レ-レ-に依つて最初

¹ Lord Rayleigh, Phil. Mag. vol. 3, (1902), p. 257.

に發案され、1904年ゼーゼー・トムソン¹に依つて數學的に考察された。トムソンの模型は、一様なる密度を以て正電荷を分布し球體の内部に電子はその中心に對して同心圓輪の上に一定の數を以て、等距離に配布したものである。そして、圓輪に於ける電子の運動の安定條件から、一つの圓輪上に於ける電子の數を求めた。その結果、一つの圓輪上には普通四個以上の電子が存在し得ざることとなるも、更に電子の角速度を著しく大にすれば、一つの圓輪上に五個迄の電子を配布し得ることを結論した。されば、電子の數が増すに従つて原子内に於ける同心圓輪の數は増加するのである。又トムソンの計算に依れば、一般に n 個の電子が圓輪上にあるとし、 p 個の電子がその中心にあるとすれば、この系體が安定である爲めには、 n と p との間には次の如き數的關係が存在することになる。

$$n; \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 12 \quad 15 \quad 20 \quad 30 \quad 40$$

$$p; \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 7 \quad 15 \quad 39 \quad 101 \quad 232$$

されば、安定なる原子模型を得る爲めには、原子内に於ける電子の數が増加するに従つて、 n を最も外側の圓輪上にとり、 p をこれに同心圓的な小なる幾個かの圓輪上に配布する必要がある。

¹ J. J. Thomson, Phil. Mag. vol. 7, (1904), p. 237.

ゼーゼー・トムソンが、上の如き意味の模型を發表した同じ年に、理學博士長岡半太郎氏も亦原子模型を發表した。この模型は、土星とその輪との關係を原子に適用せるものにして、土星に相當して、原子の中心に、圓輪上の電子の總電荷と同量の正の電荷を集中せしめ、土星の輪に相當して電子の圓輪を配置した。そして、マックスウェルの土星の輪に関する理論と同様にして、電子の軌道運動を論じた。唯、土星の輪上の質點の間に働く吸引力の代りに、電子輪に於ては電子間に反排力が作用するものとなるのである。かくして、電子輪の平面内に於ける電子の振動からは線スペクトルに相當する輻射が求められ、又電子輪に垂直なる平面内の振動からは、帶狀スペクトルに相當するものを得た。又電子輪に垂直なる方向の振動は、磁場の影響を受けざるものとなる。即ち、この方向に於てはゼーマン効果を現はさず。されば、長岡氏の所謂中心核原子模型は、種々の現象を説明するに好都合のものなるも、圓輪上に於ける電子の運動が極めて不安定にして、原子量の異なる原子を實現することは極めて困難である。

¹ H. Nagoka, Phil. Mag. vol. 7, (1904), p. 445.

ゼーゼートムソン及び長岡博士の模型に於ても、其後相次いで発表された実験結果からのスペクトル群の説明をなすことが極めて困難である爲めに、之等の模型の進展は著しく妨げられた。されど、ラザーホード及び其他の學者の物質内に於ける α 線の異常なる散亂¹の実験結果は、長岡博士の模型に類似する中心核模型が結論され、1913年ニールスボアーに依つて量子論的考察が加へられて、スペクトル群の説明及び原子模型の安定條件が解決されるに至つた。

先づ、ラザーホードの模型を結論した α 線の散亂に就て述べる。

1908年のガイガー²の実験、1913年に於けるガイガー及びマルスデン³の実験、及び1911年以後に於けるラザーホード⁴の α 線の散亂に関する実験結果を、説明する爲めになされた1914年に於けるダーウキン⁵の理論を述べて、実験結果との比較に及ぶことにする。

以上の実験結果に依れば、物質内に進入したる α 線は、 90° に近き角度を以て散亂して來ることを見出し

1. Scattering, Zerstreung.

2. H. Geiger, Proc. Roy. Soc. vol. 81, (1908), p. 174.

3. H. Geiger and E. Marsden, Phil. Mag. vol. 25, (1913), p. 604.

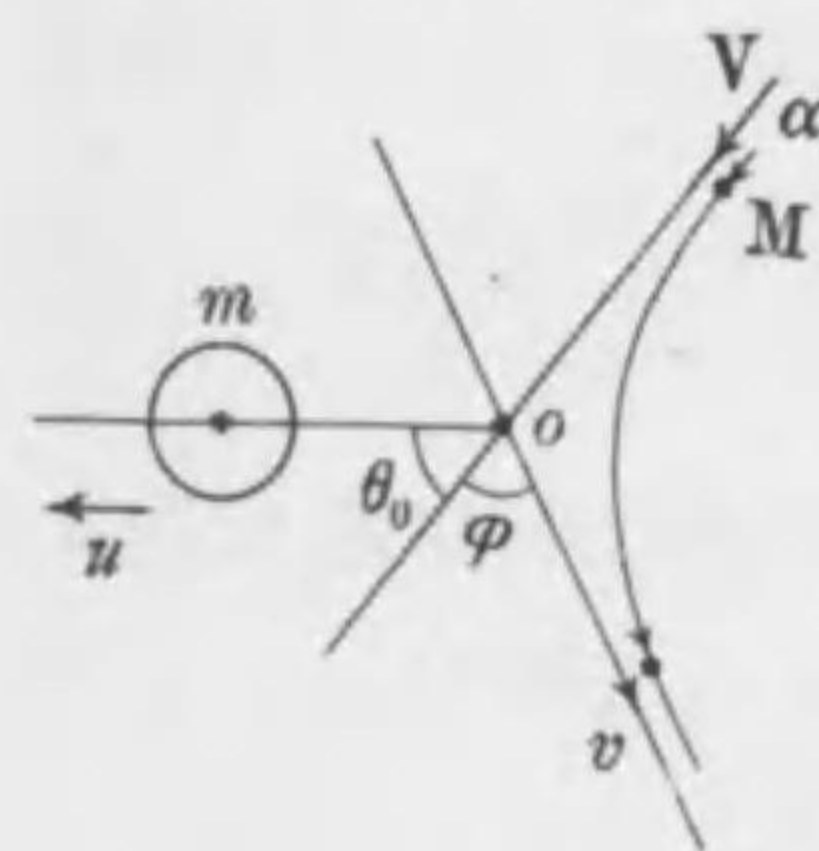
4. E. Rutherford, Phil. Mag. vol. 21, (1911), p. 669; vol. 27, (1914), p. 494.

5. C. G. Darwin, Phil. Mag. vol. 27, (1914), p. 493.

た。例へば、厚さ0.00004種の金箔に α 線を當てると、進入したる α 粒子の約二萬分の一のもの¹が 90° の屈折角を以て出て來ることが見出された。斯様に大なる屈折をなす α 線は原子と唯一回の衝突に依つて起るものにして、一つの α が原子と數回の衝突を行ふ公算は、極めて小なることが結論されて居る。従つて、 α 線が大なる屈折をなすは原子核に正電荷が集中し、それに依る反排に起因するものと見ることが至當である。

今、 α 線と原子の中心核との衝突を、簡單の爲めに氣體分子の衝突の如く考察する。

第五十九圖



第五十九圖の如く、 α はVの速度を以て進入し來り、點Oに於て原子核と衝突して、vの速度を以て屈折するものとし、原子核は衝突前に於ては、静止状態にあり、衝突後はuの速度

を得るものとする。又、 α 及び原子核の質量を夫々M、mとする。

運動量保存則が成立するものとして、

$$MV = Mv \cos \varphi + mu \cos \theta_0$$

$$0 = Mv \sin \varphi - mu \sin \theta_0$$

を得る。又エネルギー保存則も成立するものとして、

$$MV^2 = Mv^2 + mu^2$$

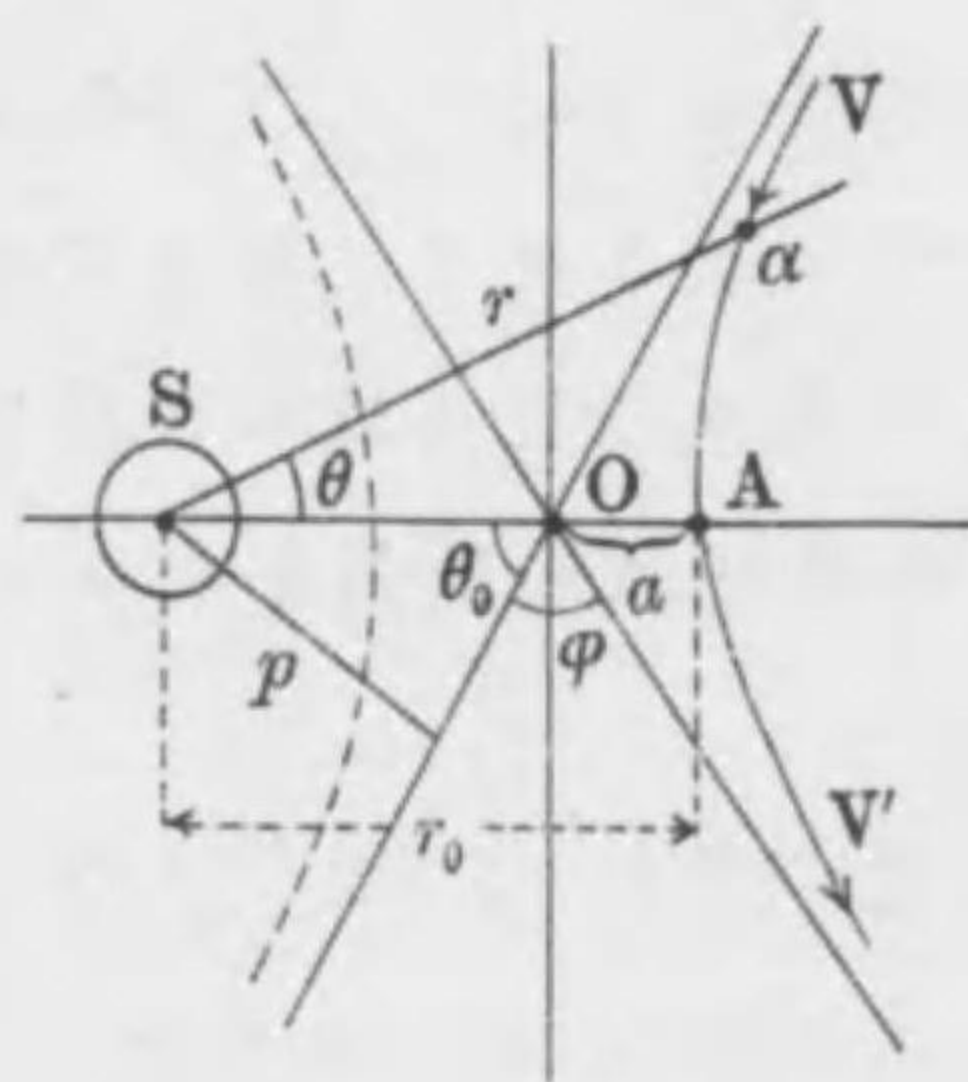
を得る。以上の三つの関係式から、

$$\left. \begin{aligned} u &= 2V \frac{M}{M+m} \cos \theta_0, \quad \tan \varphi = \frac{m \sin 2\theta_0}{M - m \cos 2\theta_0} \\ v &= \frac{V}{M+m} \{M \cos \varphi \pm \sqrt{m^2 - M^2 \sin^2 \varphi}\} \\ \tan \theta_0 &= \frac{m \cot \varphi \pm \sqrt{m^2 \operatorname{cosec}^2 \varphi - M^2}}{M+m} \end{aligned} \right\} 156$$

を得る。上の各関係式に於て、+の記號は他の+號に相當し、-記號のものは他の-記號に相當する。

上の關係は、 α 線が原子核から如何なる力を受くるも常に満足するものである。今、 α 線は原子核から距離の二乗に反比例する如き反排力を受くるものとするれば、 α 線の経路は原子核を一つの焦點とする双曲線

第六十圖



となる。

次に、原子核に対する α の相對運動を考察する。

α は、第六十圖の如き双曲線に沿ふて運動するものとし、Sはその焦點にして原子核の位

置とすれば、双曲線の式は、焦點Sを原點として、 r, θ を以て表はせば、

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$

となる。 ε は、偏心率を表はす。第六十圖から、

$$\theta = \theta_0 \text{ の時, } r = \infty \text{ となり, } \varepsilon = \frac{1}{\cos \theta_0}$$

$$\theta = 0 \text{ の時, } r = r_0 = a(1 + \varepsilon) = SA$$

となる。従つて、

$$SO = SA - OA = a(1 + \varepsilon) - a = \varepsilon a = \frac{p}{\sin \theta_0}$$

となる。 p は焦點Sから漸近線の一つに下した垂線の長さである。上の關係式から a を求めて、 r_0 に代入すれば、

$$r_0 = \frac{p}{\varepsilon \sin \theta_0} (1 + \varepsilon) = \frac{p}{\sin \theta_0} (1 + \cos \theta_0) = p \cot \frac{\theta_0}{2}$$

となる。又、 α 線の衝突前の原子核に対する相對速度を u とし、衝突後の相對速度を u' とし、第六十圖の點Aに於ける相對速度を u_0 とする。 α 線の相對運動は中心力に依る運動なる故、角運動量の保存則が成立する筈である。即ち、

$$pu = r_0 u_0$$

となる。又 α 線の見掛けの質量を m' とすれば、エネルギー保存則から、

$$\frac{1}{2} m' u^2 = \frac{1}{2} m' u_0^2 + \frac{eE}{r_0}$$

の関係を得る。Eは原子核の電荷を表はす。上の二式から、

$$u_0^2 = u^2 \left(1 - \frac{2eE}{m' r_0 u^2} \right)$$

を得る。従つて、角運動量保存の式から、

$$p^2 = r_0^2 \left(1 - \frac{2eE}{m' r_0 u^2} \right)$$

を得る。既に求めたる r_0 の値を代入して書き換へれば、

$$\frac{eE}{m' p u^2} = \frac{\cot^2 \frac{\theta_0}{2} - 1}{2 \cot \frac{\theta_0}{2}} = \cot \theta_0$$

の関係を得る。又、第六十圖から $\varphi = \pi - 2\theta_0$ の関係を得る故、上式を参照して、

$$\tan \theta_0 = \cot \frac{\varphi}{2} = \frac{m' p u^2}{eE}$$

の関係式を得る。従つて、上式から p を求め、

$$m' = \frac{mM}{M+m}$$

を代入して、156式に於ける $\tan \theta_0$ を代入し、 u の代りに V を以て表はせば、

$$p = \frac{eE}{MmV^2} \{ m \cot \varphi \pm \sqrt{m^2 \operatorname{cosec}^2 \varphi - M^2} \} \quad 157$$

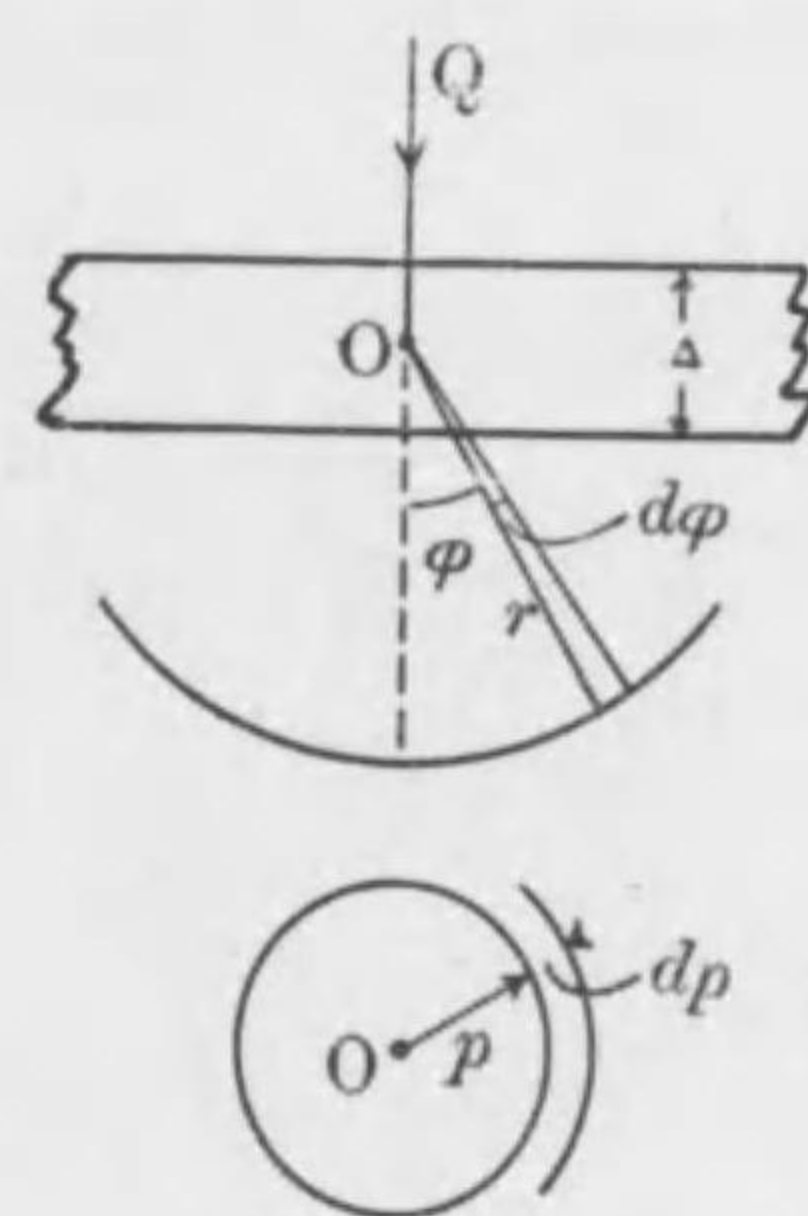
となる。又、既に求めたる関係から同様にして、

$$r_0 = \frac{p}{\sin \theta_0} (1 + \cos \theta_0) = \frac{(M+m)eE}{MmV^2} (1 + \sec \theta_0) \quad 158$$

を得る。

實驗結果と比較する爲めには、多くのα線が多くの原子と夫々衝突する場合を考察する必要がある。今物質の單位體積内の原子の数を N とし、物質の厚さを Δ とし、單位時間に Q 個のα粒子が物質内に進入するものとする。今、第六十一圖に示すが如く、一つの原子 O を中心として、物質の表面に並行なる平面内に於て半

第六十一圖



徑 p の圓を畫けば、これはα線が原子に衝突する範圍となる。

α粒子が半徑 p の圓内に於て原子と衝突する公算を ω とすれば、

$$\omega = \pi p^2 N \Delta$$

を以て表はされる。従つて、厚さ dp なる圓輪内に於て、αが衝突する公算は、

$$d\omega = 2\pi p dp N \Delta$$

である。點 O に於て原子と衝突して φ なる角度を以て屈折するものとするれば、 p が相等しき原子に於ては、 φ も亦相等しきものと見做すことが出来る。今、半徑

p の圓内に於て原子と衝突して、進入の方向と φ の傾きをなし點 O から距離 r の位置に於て、これに垂直なる單位面積内に、單位時間に来る α 粒子の数を n とすれば、傾角 φ と $\varphi + d\varphi$ の間に屈折して點 O から距離 r の位置に来る α の数は、物質内に進入し来る α の内、 p と $p + dp$ の範圍に来る α の數に等しき筈である。即ち、

$$\begin{aligned} 2\pi r^2 n \sin \varphi d\varphi &= Q d\omega \\ &= 2\pi Q N \Delta p dp \end{aligned}$$

となる。157式から $\frac{dp}{d\varphi}$ を求め、上式に代入して n を求むれば、

$$\begin{aligned} n &= \frac{QN\Delta p dp}{r^2 \sin \varphi d\varphi} \\ &= \frac{QN\Delta e^2 E^2}{r^2 M^2 V^4} \operatorname{cosec}^3 \varphi \frac{\left[\cot \varphi \pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \varphi - \left(\frac{M}{m}\right)^2} \right]^2}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \varphi - \left(\frac{M}{m}\right)^2}} \quad 159 \end{aligned}$$

を得る。上式から、屈折角 φ に對する屈折し来る α の數 n を求めることが出来る。

$m > M$ なる場合は、物質として水素及びヘリウムを除く他の原子に於ける關係を表はす。159式の正の記號をとり、 $\frac{M}{m}$ に就て展開して n の近似値を求めれば、

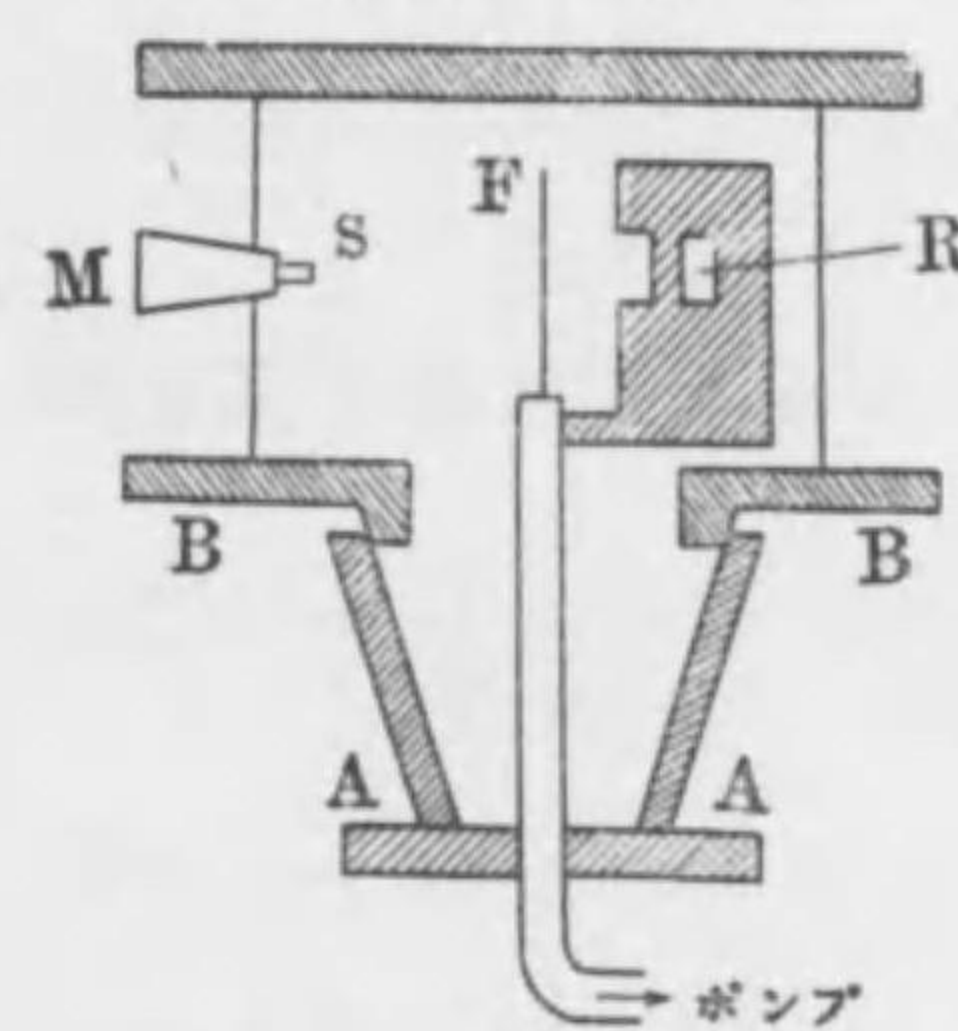
$$\begin{aligned} n &= \frac{QN\Delta e^2 E^2}{r^2 M^2 V^4} \frac{1}{4} \left\{ \operatorname{cosec}^4 \frac{\varphi}{2} - 2 \left(\frac{M}{m}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right) \left(\frac{M}{m}\right)^4 + \dots \right\} \quad 160 \end{aligned}$$

となる。上式の第一項は、ラザ-ホ-ドが1911年に求めたる關係を示す。

$m < M$ なる場合は、物質として水素をとる場合にして、 $m = M$ はヘリウムをとる場合である。

次に、1913年に於けるガイガー及びマルステンの實驗と、160式とを比較する。

第六十二圖



實驗装置の大要は、第六十二圖に示す如きものにして、 F は α の散亂を起さしめる物質の薄箔であり、 R は圖の如き切斷面の鉛製の箱に入れたる α 線を發生するラヂウムエマネーションである。 M は

顯微鏡にして、對物鏡の直前、 s の部分に硫化亞鉛の膜を置き、 F から散亂し來れる α 粒子が當ることに依つて生ずるシンチレーションの光を觀測するものである。 B の台は、圓錐形の内面を有する A の内面と磨り合せ垂直軸の圍りに顯微鏡を伴ふて廻轉し得るもの

である。実験に於ては、装置の内部を十分に真空にすることが必要である。

実験に於ては、 s に起る α のシンチレーションの数は、一分間に五個乃至九十個の範囲内に於て、適當なる数を出す如くラヂウムエマネーションを加減すれば、好結果を得るのである。又、装置内部の残留空気の爲めに散亂される α の数は、物質箔 F をとり去りて、 φ に對する n の觀測を行ふことに依つて見出される。又、實驗中ラヂウムエマネーションが α を出す割合が次第に減少するが故に、その補正をなす必要がある。

以上の如き注意と補正とを行つた實驗結果の一例は、次に示すが如きものにして、物質として銀の箔を使用した結果である。

φ	n (一分間)	$n \sin^2 \frac{\varphi}{2}$
150°	6.95	6.0
135°	8.35	6.1
120°	9.5	5.3
102°	14.6	5.8
75°	41.9	5.8
60°	101.0	6.3

上式が示す如く、 φ の屈折角が大となるに従つて散

亂し來る α の数は減少することを示して居る。又、 $n \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ は、160式の第一項をとれば φ に無關係に一定値をとるものにして、上の結果は殆んど一定と見ることが出来る。

又、160式から知られる如く、 φ の一定の所に於ては、 n は箔 F の厚さに比例する筈である。この關係は實驗的に證明された。

又、 n は α の速度 V の四乗に逆比例する筈である。これは、 F と R の間に種々の吸収膜を置き、 α の種々の速度のものに就て實驗した結果、 $n \propto \frac{1}{V^4}$ の關係が成立することが確められた。

又、 F を白金、金、銀、銅、アルミニウム、錫等を以て作り、一定の屈折角 φ に就て測定した結果、 n は夫等の物質の原子量の $\frac{3}{2}$ 乗に比例することが見出された。

又、 α が物質に進入する點から、その方向に一輻の距離の所に到達する散亂した α の全数は、物質内に進入する α の全数の約 3.7×10^{-7} 倍程度にして、従つてシンチレーションを起す膜 s と物質の箔とは著しく接近せしめる必要がある。

上述の如き實驗結果を用ひて、160式から物質内の原子核の電荷を求むることが出来る。ラザーホードの計算に依れば、電子の電荷を單位として E は物質の

原子量の $\frac{1}{2}$ に等しきことが知られた。

又、 α が原子核に近づく最短距離は、158式の r_0 に於て、 α が原子に垂直に進入し行くものとして、 $\theta_0 = 0$ を代入すれば、

$$r_0 = \frac{2eE(M+m)}{MmV^2}$$

となる。今、銀の場合をとりて、

$$E = 50e, \quad V = 2.06 \times 10^9 \text{ 種毎秒}$$

とし e は α 線の電荷なる故 $2e$ をとれば、

$$r_0 = 3.5 \times 10^{-12} \text{ 種}$$

となる。又、ヘリウム原子をとれば同様にして、

$$r_0 = 1.7 \times 10^{-12} \text{ 種}$$

となる。後者は電子の半径の程度にして、前者はそれよりも少しく大である。

次に原子核の半径を求める。原子核の質量は、電子と同様に電磁氣的のものであるとすれば、

$$m = \frac{E^2}{6\pi ac^2}$$

と置き、 a を求めることが出来る。即ち、ヘリウムに於ては、原子核の半径は電子の半径の約 $\frac{1}{1836}$ となる。

上述の如き結果に依つてラザードは、原子はその中心にその原子量の $\frac{1}{2}$ に等しき数の倍数の正の電

氣素量を集中せしめて核を作り、その周囲に同数の電子を幾つかの同心圓輪上に等距離に分布して、電子は正核の周囲に軌道運動をなすものであることを結論した。

されど、既に述べたる如く中心核原子模型は運動論的に不安定であり、更にスペクトル群の説明を與へることが困難であることは、依然として未解決のままに残された。

第二章

ボアの原子模型

1913年ニールスボア¹に依つて原子模型が發表され、當時に於ける原子模型に對する難問題である所のスペクトルの説明と、それ自身の運動論上の安定問題とに、劃時代的な成功を納め得たるも、其後に於けるスペクトルに關する實驗的研究の著しき進展と量子論の發展とに依つて、ボア及び其他の人々に依つて、最初の模型は著しく改訂されて現時の状態に及んだのである。原子模型の夫等の改訂の過程は、量子論に於ける問題として量子論に譲り、本章に於ては、ボアの最初の原子模型のみに止めることにする。

ボアは、ラザフォードの正核模型をとり、それに量子論的考察を加へて、スペクトル群及び原子模型の運動論上の安定問題を解決した。

原子核は正電荷にして、電子は一般にその正核を一つの焦點とする所の楕圓軌道をとつて運動するのである。電子の質量は、正核に比して極めて小であることは勿論にして、正核の質量は原子それ自身の質量に

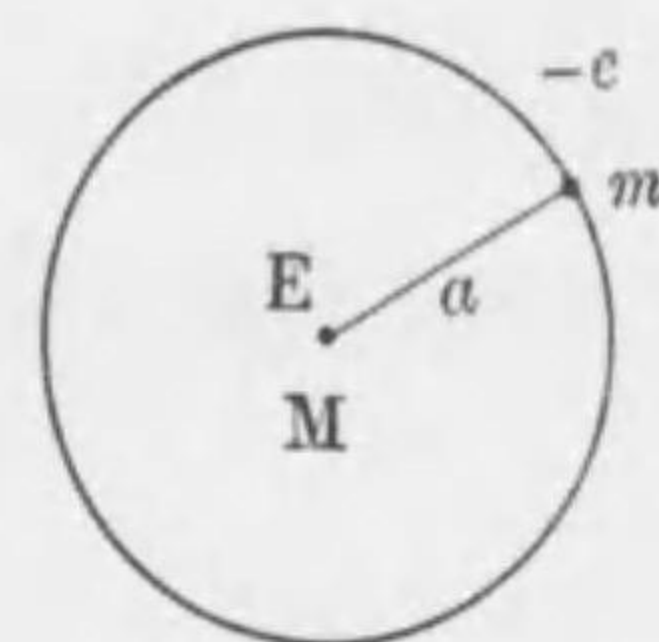
¹ N. Bohr, Phil. Mag. vol. 26, (1913), 1, 476, 857.

殆んど等しいものである。又、電子の軌道運動の速度は光速に比して小なるものである。又、電子は軌道運動に於ては、輻射エネルギーを發散せざるものとする。今電子の軌道は、電子と正核の質量の中心を中心とする圓であるとし、その半徑を a とする。又その系體のエネルギーを W とする。これは、電子を正核から無限の遠方に引き放すに要する仕事に等しい。又、電子の軌道運動に對しては、ケプレルの天體の運動に關する法則が成立するものと假定する。

今第六十三圖に示す如く、原子核の電荷を E とし、その質量を M とし、電子の電荷を $-e$ とし、その質量を m とする。

第六十三圖

電子の、一秒間に於ける軌道を廻轉する數を ω とすれば、電子と正核間の吸引力は、電子の軌道運動に依る遠心力に相等しきが故に、



$$\frac{eE}{a^2} = \frac{Mm}{M+m} (2\pi\omega)^2 a \quad 161$$

の關係が成立する。

次に、電子の運動のエネルギーは上式を參照して、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{Mm}{M+m} \right) (2\pi\omega a)^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{a}$$

となる。又、電子の位置のエネルギーは $-\frac{eE}{a}$ なるが故に、全エネルギーは、

$$-\frac{1}{2} \frac{eE}{a}$$

となり、このエネルギーは、電子を正核から無限の遠方に引き離すに要する仕事に等しき筈である。即ち、

$$W = \frac{1}{2} \frac{eE}{a} \quad 162$$

である。従つて、電子の廻轉数は 161, 162 式から、

$$\omega^2 = \frac{eE(M+m)}{4\pi^2 a^3 Mm} = \frac{2W^3(M+m)}{\pi^2 (eE)^2 Mm}$$

を得る。即ち、

$$\omega = \frac{\sqrt{2} W^{\frac{3}{2}}}{\pi eE} \sqrt{\frac{M+m}{Mm}} \quad 163$$

となる。又軌道の半径は、162 式から、

$$a = \frac{eE}{2W} \quad 164$$

となり。電子の軌道運動の週期は、

$$T = \frac{1}{\omega}$$

として與へられる。されば、エネルギー W 、即ち電子を正核から無限の遠方に引き離すに要するエネルギーを知れば、軌道運動に於ける廻轉數、週期、軌道の半径、及びその運動のエネルギー等を求めることが出来る。

電子の軌道運動に於て、加速度に依る輻射エネルギーの發散を考察すれば、軌道は變化して定常的軌道を作らず。即ち、軌道運動に於て、電子がエネルギーを發散すれば、軌道の半径は次第に小となり、電子の廻轉數は次第に増大する。そして、遂に正核の半径の程度に迄及び、發散するエネルギーは極めて大となり、原子は系體を保ち得ざるに至るのである。然るに、普通の原子は一定の大きさを持ち、外的衝動に従つて一定のエネルギーを發散することは、明らかなる事實である。されば、普通の状態に於ては、原子内に於ける電子の軌道運動に於て輻射エネルギーを發散せざるものとするを合理的と考へられる。

量子論に依れば、輻射エネルギーは量子として發散され、振動數 ω の原子的振動からは、 $h\omega$ の整數倍即ち $\tau h\omega$ の量子的エネルギーが發散されるのである。但し、 h はプランクの常數にして、 τ は正の整數である。

今一個の電子が、一つの正核から、最初無限の遠方に靜止状態に於て存在して居たものとし、これを正核の周圍に持來して第六十三圖の如き軌道運動をなさしめ、その廻轉數 ω に比例するエネルギー、即ち $\tau h\omega$ に比例する所の輻射エネルギーを發散するものとするれば、その電子を軌道運動の状態から無限の遠方に持ち去

るに要する仕事は、その軌道運動の平均の運動のエネルギーに等しく、

$$W = \tau h \frac{\omega}{2}$$

と置くことが出来る。従つて、164式に代入して軌道の半径として、

$$a = \frac{eE}{\tau h \omega} \quad 165$$

を得る。又162, 163式から、

$$\omega = \frac{4\pi^2 e^2 E^2 M m}{\tau^3 h^3 (M + m)} \quad 166$$

$$W = \frac{2\pi^2 e^2 E^2 M m}{\tau^2 h^2 (M + m)} \quad 167$$

を得る。 a, ω, W の式に於て τ に正の整数を代入すれば、それに従つて a, ω, W の種々の値を得る。この τ は、電子軌道の電子核に対する構成を示す指数である。そして、夫等の状態に於ては電子はエネルギーを發散せずして、定常状態を表はす。 ω, W の式から知れる如く、 τ が大となるに従つて夫等の値は減少する。されば、 $\tau=1$ が夫等の最大値を與へ、又半径 a を最小ならしむる状態を表はすものにして、その状態から電子を引き離す爲めには、最も大なるエネルギーを必要とするのである。従つて、 $\tau=1$ が最大安定の状態であることが首肯される。

今正核の電荷を一電気素量とし、電子一個が軌道上にある場合をとれば、

$$E = e = 4.77 \times 10^{-10}, \quad \frac{e}{m} = 5.31 \times 10^{17}, \quad h = 6.5 \times 10^{-27}$$

を165—167式に代入して、

$$2a = 1.1 \times 10^{-8} \text{ 釐}, \quad \omega = 6.2 \times 10^{15} \text{ 毎秒}, \quad \frac{W}{e} = 13 \text{ ボルト}$$

を得る。上の $2a$ の値は、原子の直径として知られて居る値の程度であり、 ω は可視光線の振動数と同程度であり、 $\frac{W}{e}$ の値は原子の電離電圧と同程度のものである。

次にバルマー及びリッドベルグ等に従つて見出されたスペクトル群を求む爲めに、次の如き假定をとる。

定常状態に於ける電子の軌道運動の力學的安定の問題は、普通の力學の法則に従ふも、一つの定常状態から他の定常状態に移動する途中に就ては、普通の力學の法則は適用されない。

一つの定常状態にある軌道から、他の定常状態に電子が移動するとき、等質的輻射エネルギーを發散する。このエネルギーとその振動数の關係は、プランクの量子論に於ける關係をとる。即ち、輻射エネルギーは $h\nu$ に比例する。但し、 ν は輻射エネルギーの振動数にして、移動前後の軌道に於ける電子のエネルギーの差から定まるものである。

今上の如き假定の許に、水素のスペクトル群に関する関係式を求める。水素原子は、中心核に $+e$ の電荷があり、軌道には電子一個が存在する場合にして、定常状態に達する迄になされる仕事、即ちその系體のエネルギーは、167式に於て電子の質量 m を原子核の質量 M に對して省略すれば、

$$W_r = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 r^2}$$

となる。今 τ_1 の定常状態から τ_2 の定常状態に電子が移動すれば、その時出す輻射エネルギーは、兩状態に於けるエネルギーの差にして、然も $h\nu$ に等しきものである。即ち、

$$h\nu = W_{\tau_2} - W_{\tau_1} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right)$$

となる。従つて、輻射エネルギーの振動数は、

$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right) \quad 168$$

を以て與へられる。

上式に於て、 $\tau_2 = 2$ とし、 τ_1 を變化して 3, 4, 5, …… の整数を代入すれば、バルマー¹群を得る。次に、又 $\tau_2 = 3$, $\tau_1 = 4, 5, 6, \dots$ とすれば、1908年に見出されたパッシェン²の赤外線群を得る。 $\tau_2 = 1$, $\tau_1 = 2, 3, 4, \dots$ とすれ

1. J. J. Balmer, Ann. d. Phys. Bd. 25, (1885), s. 80.

2. F. Paschen, Ann. d. Phys. Bd. 27, (1908), s. 565.

ば、ライマン¹の紫外線群を得る。又 $\tau_2 = 4$, $\tau_1 = 5, 6, 7, \dots$ とすれば、1922年ブラケット²の報告せる赤外線群を得る。

前に掲げたる $e, \frac{e}{m}, h$ の値を代入すれば、168の係数の値は、

$$\frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} = 3.1 \times 10^{15}$$

となり、實驗的に求めた値 3.29×10^{15} と誤差の範囲内に於てよく一致する。この係数は物質に無關係なる常數にして、これをリッドベルグ常數³と名付けて居る。

又バルマーが真空管を用ひて見出した水素のスペクトルの十二本の線、及び天體のスペクトルに於ける三十三本の線は、168式に於て τ_1, τ_2 を適當に選ぶことに依つて求められる。

又165, 166式に於て知られる如く、電子軌道の直徑は r^2 に比例する。今、 $r = 12$ とすれば、それに相當する定常状態の軌道の直徑 $2a$ は、 1.6×10^{-6} 糎となり、壓力が水銀柱にて七糎の時の、氣體の分子間の平均距離に等しく、 $r = 33$ とすれば、 $2a = 1.2 \times 10^{-5}$ 糎となり、0.02 糎の壓力に於ける氣體分子間の平均距離に等しくな

1. Th. Lyman, Astrophys. Journ. 23, (1906), p. 181; 43, (1916), p. 89.

2. F. S. Brackett, Astrophys. Journ. 56, (1922), p. 154.

3. Rydberg Constant. Rydbergsche Zahl.

る。されば、多線スペクトルは、氣體の壓力の小なる場合に現はれることが想像される。

又原子核の電荷を、 $E=2e$ とし、二つの電子を軌道に置けば、同様にしてヘリウムに関するピツカリング¹、ハウラー²等のスペクトル群を求めることが出来る。

一つの定常状態から、他の定常状態に移動するとき發散する輻射エネルギーは、定常状態に於ける軌道電子の一秒間に於ける廻轉數即ち振動數の函数なる故、エネルギーを發散すれば、定常状態に於ける軌道電子の振動數が變化する筈である。今一般的に定常状態に於けるエネルギーを、

$$W = f(\tau) h \omega$$

と置く。そして、前と同様の計算を行へば、

$$W = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2h^2 f^2(\tau)}, \quad \omega = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2h^3 f^3(\tau)}$$

を得る。従つて、發散される輻射エネルギーの振動數は、

$$\nu = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2h^3} \left(\frac{1}{f^2(\tau_2)} - \frac{1}{f^2(\tau_1)} \right)$$

となる。

バルマー群を求める爲めに、

1. E. C. Pickering, *Astrophys. Journ.* vol. 4, (1896), p. 369; vol. 5, (1897), p. 92

2. A. Fowler, *Month. Not. Roy. Astro. Soc.* vol. 73, (1912), p. 62.

$$f(\tau) = k\tau$$

と置く。 k は常數である。今、 $\tau_1 = N$ から、 $\tau_2 = N-1$ に移動する場合をとれば、上の値を代入して、

$$\nu = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2k^2 h^3} \frac{2N-1}{N^2(N-1)^2}$$

を得る。又 $\tau_1 = N$, 及び $\tau_2 = N-1$ の軌道に於ける電子の振動數は、

$$\omega_N = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2k^3 h^3 N^3}, \quad \omega_{N-1} = \frac{\pi^2 m e^2 E^2}{2k^3 h^3 (N-1)^3}$$

となる。今、 N が大なる値のものとするれば、 ω_N, ω_{N-1} の比は殆んど1に等しく、従つて、移動の際に發散するエネルギーの振動數と、 ω_N 又は ω_{N-1} との比も1に等しきものと見做すことが出来る。従つて、 ν と ω_N 又は ω_{N-1} とを比較して、

$$k = \frac{1}{2}$$

を得る。即ち、

$$f(\tau) = \frac{\tau}{2}$$

となり、既に求めたものと相等しき結果を得る。

次に、 $\tau_1 = N, \tau_2 = N-n$ の間に、電子の移動が行はれるものとする。但し、 n は N に比して極めて小なるものとするれば、この時發散される輻射エネルギーの振動數は、 $f(\tau) = \frac{\tau}{2}$ として、

$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{h^3} \left(\frac{1}{(N-n)^2} - \frac{1}{N^2} \right) = \frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{h^3} \frac{2n - \frac{n^2}{N}}{N^3 \left(1 - \frac{n}{N}\right)^2}$$

$$\doteq \frac{4\pi^2 m e^2 E^2}{h^3} \frac{n}{N^3}$$

となる。同様にして、軌道電子の振動数は、

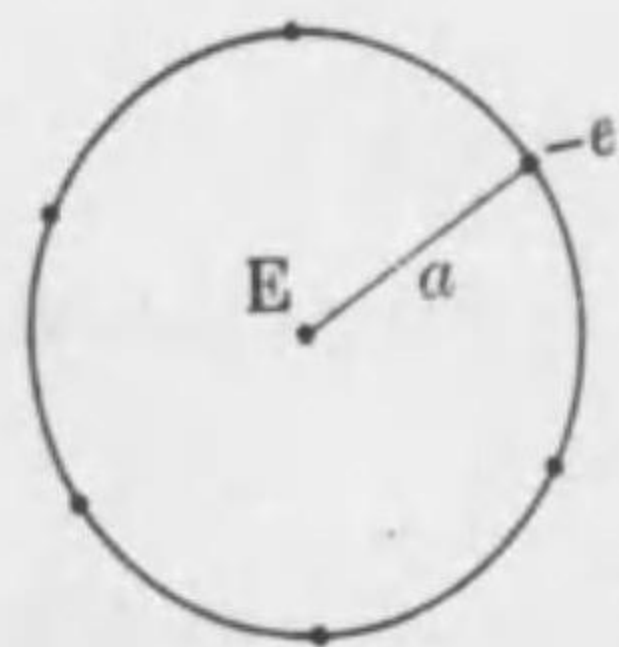
$$\omega_N \doteq \omega_{N-1} = \frac{4\pi^2 m e^2 E^2}{h^3 N^3}$$

となる。従つて、

$$\nu = n \omega_N = n \omega_{N-1}$$

の関係を得る。即ち輻射エネルギーの振動数は、軌道電子の振動数の n 倍となる。このことは、普通の電気力学に於ても首肯されることにして、電子が楕圓軌道又は圓軌道に依つて閉路運動をなすとき輻射エネルギーを出すものとすれば、それを振動数に就てフーリエの級数に展開するとき、その各分の振動数は、軌道電子の振動数 ω の n 倍に等しきことを示す。但し、 n

第六十四圖



に種々の整数を入れるのである。

次に一つの軌道に多くの電子が存在する場合を述べる。

第六十四圖に示す如く、一般に n 個の電子が一つの圓輪上に圓弧上等距離の點にあるとすれば、之等の

原子と正核との系體の位置のエネルギーは、

$$P = -\frac{ne}{a}(E - es_n)$$

$$s_n = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{n-1} \operatorname{cosec} \frac{s\pi}{n}$$

を以て與へられる。次に、軌道上の一つの電子に及ぼす、正核及び他の電子からの中心の方向の力は、

$$F = -\frac{1}{n} \frac{dP}{da} = -\frac{e}{a^2}(E - es_n)$$

を以て與へられる。又電子の軌道運動に依る電磁氣的力を消略すれば、上の中心力に釣合ふ遠心力は、電子の運動のエネルギーを T とすれば、次の如く表はされる。

$$\frac{2T}{a} = \frac{e}{a^2}(E - es_n)$$

従つて、運動のエネルギーは、

$$T = \frac{e}{2a}(E - es_n)$$

となる。又、

$$T = 2\pi^2 m a^2 \omega^2$$

なるが故に、軌道電子の振動数は、上の二式から、

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e(E - es_n)}{m a^3}}$$

を得る。

次に、 n 個の軌道電子を總て相互の位置及び正核から無限の遠方に引き離すに要する仕事は、その系體の

エネルギーに等しく,

$$W = -P - nT = \frac{n e}{2a} (E - e s_n) = nT$$

となり, n 個の軌道電子の運動のエネルギーに等しくなる。この関係は, 既に述べたる電子一個の場合と全く同様である。そして, 162 式と上式とを比較して知られる如く, 一軌道に n 個の電子がある場合に於ては, 電子一個のときの関係式に於て, E の代りに $E - e s_n$ を, W の代りに $\frac{W}{n}$ を代入すれば, n 個の電子の場合の関係式を得る筈である。

されば, n 個の電子の場合に於ける 165—167 に相當するものは,

$$2a = \frac{\tau^2 h^2}{2\pi^2 e m (E - e s_n)} \quad 169$$

$$\omega = \frac{4\pi^2 e^2 m}{\tau^2 h^3} (E - e s_n)^2 \quad 170$$

$$W = \frac{2\pi^2 e^2 m}{\tau^2 h^2} n (E - e s_n)^2 \quad 171$$

となる。今, 正核の電荷を,

$$E = Ze$$

と置き, τ_1 から τ_2 に移動するときに發散する輻射エネルギーの振動数を求めれば, 次の如くなる。

$$h\nu = W_{\tau_2} - W_{\tau_1} = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^2} n (Z - s_n)^2 \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right)$$

従つて,

$$\nu = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3} n (Z - s_n)^2 \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1^2} \right) \quad 172$$

を得る。 s_n は軌道電子の数のみに關係する常數にして, これを b とすれば, 輻射エネルギーの振動数 ν は,

$$\nu \propto (Z - b)^2$$

の關係を満足する。 Z は原子番數を表はすものにして, 上の關係は, モーヅレー¹⁾が X 線の特有線スペクトルの實驗的研究に於て見出したる關係と一致するものである。

次に一個の電子が軌道運動をなす場合をとり, その角運動量を求めれば, それは原子模型の系體に無關係なる常數として與へられる。即ち今, 軌道電子の角運動量を M とすれば,

$$M = \frac{T}{\pi \omega}$$

を以て表はされる。 T は運動のエネルギーであり, ω は軌道電子の振動数を表はす。又既に述べたる如く, 運動のエネルギーは, 原子系體の全エネルギーに等しきが故に,

$$T = W = \tau h \frac{\omega}{2}$$

1. H. G. J. Moseley, Phil. Mag. vol. 26, (1913), p. 1024; vol. 27, (1914), p. 703.

となり、従つて T を求めて、 M の式に代入すれば、

$$M = \frac{h}{2\pi} \tau$$

となる。即ち、軌道電子の角運動量は、 $\frac{h}{2\pi}$ の整数倍となる。最も安定なる状態、即ち $\tau = 1$ の場合の角運動量を τ_0 とすれば、

$$\tau_0 = \frac{h}{2\pi} = 1.04 \times 10^{-27}$$

となる。即ち、運動量はプランクの常数を以て表はされる。この事實は、1912年ニコルソン¹が原子模型の安定問題の論議に於て、原子模型が安定である爲めには、その軌道電子の運動量が原子模型の系體に無關係なる常數である可きことを力説したこととよく一致する。

ボア-は更に原子模型の力學的安定の條件から、一つの軌道にある電子の數と、全電子數との關係を求めた。

今、一個の電子が軌道運動をなすとき、これに働く中心力を $\frac{e^2}{a^2} F$ を以て表はせば、これと釣合ふ爲めの力は、電子の運動に依る遠心力にして従つて釣合の條件は、

$$\frac{m v^2}{a} = \frac{e^2}{a^2} F$$

1. J. W. Nicholson, Month. Not. Roy. Astr. Soc. vol. 72, (1912), p. 679.

である。 v は軌道電子の速度である。又角運動量保存則を、

$$m v a = \frac{h}{2\pi}$$

を以て表はせば、この二式から軌道の半徑及び、電子の速度を得る。即ち、

$$a = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 m F}, \quad v = \frac{2\pi e^2 F}{h}$$

となる。又、エネルギーの關係、

$$W = \frac{1}{2} h \tau \omega = \frac{1}{2} m v^2$$

と上式とを用ひて、軌道電子の振動數 ω が求められる。

即ち、

$$\omega = \frac{4\pi^2 e^4 m}{h^3 \tau} F^2$$

となる。従つて、 F の値を知れば a, v, ω 等の値を求めることが出来る。

今、一軌道に n 個の電子があるとし、正核の電荷を $E = ne$ とすれば、既に述べたる關係を参照して、

$$F = n - s_n, \quad s_n = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{cosec} \frac{s\pi}{n}$$

と置けば、

$$a = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 m} (n - s_n)^{-1}, \quad v = \frac{2\pi e^2}{h} (n - s_n)$$

$$\omega = \frac{4\pi^2 e^4 m}{h^3 \tau} (n - s_n)^2$$

を得る

上式を用ひて,中正原子の外側の電子輪の半徑を求めることが出来る。但し,外輪の電子に働く正核からと他の電子からの力は,正核に全電子の數に相當する數の正電荷があるものとしての力に,等しきものと假定するのである

今電子一個即ち $n=1$ の場合の外輪の半徑を, a_0 とすれば,

$$n=2 \quad a = 0.57 a_0$$

$$n=3 \quad a = 0.41 a_0$$

$$n=4 \quad a = 0.33 a_0$$

となる。

元素の週期率及び,原子模型の力學的安定條件とを考慮して,ボアーは原子番數が24迄の輕原子に就て,電子輪とそれに配布される電子の數を次の如く求めた。

Z	各電子輪の電子數	Z	各電子輪の電子數
1	1	7	4 3
2	2	8	4 2 2
3	2 1	9	4 4 1
4	2 2	10	8 2
5	2 3	11	8 2 1
6	2 4	12	8 2 2

13	8 2 3	19	8 8 2 1
14	8 2 4	20	8 8 2 2
15	8 4 3	21	8 8 2 3
16	8 4 2 2	22	8 8 2 4
17	8 4 4 1	23	8 8 4 3
18	8 8 2	24	8 8 4 2 2

ボアーは,又分子の模型を論じ,更に1914年ゼーマン効果及びシュタルク効果を論じて居る。

1. N. Bohr. Phil. Mag. vol. 27, (1914), 506.

索引

(数字は頁数を示す. ♪1 は前付第一頁の意)

ア 行 の 部

- アインシュタイン Einstein A. 113.
アブラハム Abraham M. ♪1, ♪3.
——の電子 18, 52.
 α 線の散乱 Scattering of α -rays 258.
異常分散(光の) Anormalous dispersion 231.
ウイルソン Wilson C. T. R. ♪1.
運動量保存の法則 Law of conservation of momentum, 7, 22, 59, 65.
ウキデマン, フランツの法則 Wiedemann-Franz's law 147.
エネルギー Energy, 剛體電子の—— Energy of a rigid electron, 48;
——保存の法則 Law of conservation of energy, 9, 22.
エルステル Elster, 113, 161.
エプシュタイン Epstein P. S. 213.
横質量(電子の) Transverse mass of an electron, ♪4, 52, 59, 66.

カ 行 の 部

- カイザー Kayser, 194.
ガイガー Geiger 258 270.
ガイテル Geitel 113, 161.
ガウスの定理 Gauss' theorem 82.
カウフマン Kaufmann W. ♪1, ♪4, 69. —の實驗 70.
化学當量 Chemical equivalent, ♪2.
慣性的力 Inertia force. 95.
吸収率 Absorption coefficient, 176, 227, 239.
基礎の式 Fundamental equations, 2, 3, 17.
運動系に於ける—in a moving system 250.
氣體常数 Gas constant, 172.
強制振動(電子の) Forced oscillation of an electron, 105.
キルヒホッフ Kirchhoff. —の關係 184.
逆ゼーマン効果 Inverse Zeeman effect, 232.
クラーマース Klamars H. A. 213.
クラウジユス及びモソッチの法則 Clausius and Mosotti's law, 221.
屈折率(光の) Index of refraction of light, 219, 224, 231.
原子 Atom, 255, 272.

原子模型 Model of atoms, 270. 長岡氏の— 257, トムソンの— 256. レーレーの— 255, ボアの— 270.
光電効果 Photo-electric effect, 113; 選択的— Selective photo-electric effect, 125.
剛体電子 Rigid electron 18, 52, —の運動の式 21, —のエネルギー保存の法則 22, —のラグラン

ジユの函数 22. —のコンベクションポテンシャル 44, 48.
固有振動数 Frequency of natural oscillation, 103.
コットン Cotton A. 192.
コンベクションポテンシャル Convection potential, 29, 44.
表面分布剛体電子の— 44, 体積分布剛体電子の— 48.

サ行の部

残光 Residual ray, 176.
作用 Action 114; —蓄積の時間 115; プランクの—量子 114, 115.
ジーンズ Jeans J. H. 186.
シュワルツシルド Schwarzschild K. 25, 213.
シュタルク効果 Stark effect, 206.
自由振動(電子の) Free oscillation, 103.
縦質量(電子の) Longitudinal mass of an electron, 74, 52, 59.
磁化電子 Magnetizing electron, 130.
自由電子 Free electron, 127.
水素原子 Hydrogen atom. —の

半徑 54, 285, 286. —の模型 276; —のスペクトル 273, 276.
スケーラーポテンシャル Scalar potential, 12.
ステツテンハイマー Stettenheimer A. 192.
ストークスの法則 Stoke's law, 122.
静止質量(電子の) Rest mass of an electron, 73, 53, 59.
ゼーマン Zeeman, 187, 252; —効果 187, 192, 逆—効果 232.
接觸電氣 Contact electricity, 149.
ゾムマーフェルド Sommerfeld A. 201, 213.

タ行の部

ダーウキン Darwin C. G. 258.
力の函数 Force function, 23, 44, 47.
遅刻ポテンシャル Retarded potential, 88.
デバイ Debye P. 113.

電子 Electron, $\frac{e}{m_0}$ 73, 192; 横質量 74, 52, 59, 66; 縦質量 74, 52, 59; 静止質量 73, 53, 59; 半徑 54; 比電荷 54; アブラハムの電子 48; ローレンツの電子 55;

ブッフエレルの電子 63; —の加速運動 81; —の振動 103; —の自由振動 103; —の強制振動 105. 自由—, 127; 磁化—, 130; 分極—, 128.
電磁氣的運動量 Electromagnetic momentum, 7, 48
電磁氣的質量 Electromagnetic mass, 光の— 10; 電子の— 49.
電磁氣的ポテンシャル Electromagnetic potential, 電子の— 11.
電磁氣的動ポテンシャル (ラグランジュ

の函数を見よ)
電導率 Electrical conductivity, 146, 176
電媒常数 Dielectric constant, 218.
電媒分極 Dielectric polarization, 129.
ドップラーの原理 Doppler's principle, 210.
トムソン Thomson J. J. 71, 72, 73. —の効果 154; —の原子模型 256.
ドルーデ Drude P. 147, 151.

ナ行の部

長岡(半太郎) 257, —の原子模型 257.
ニコルソン Nicholson J. W. 284.
ニコルス Nichols. 176.
熱電氣 Thermo-electricity. 151.

熱電子 Thermion, 161; —電流 Thermionic current, 162, 164.
熱傳導率 Thermal conductivity, 147.
ノイマン Neumann G. 74.

ハ行の部

ファラデー効果 Faraday effect, 241.
フェゾーの實驗 Fizeau's experiment, 251.
フレネルの係数 Fresnel's dragging coefficient, 252.
ハウラー Fowler A. 278.
パツシエンの群 Paschen's series, 276.
發散率(光の) Emission coefficient, 184.
ハミルトンの定常作用の法則 Hamilton's principle of the stationary

action, 24.
ハロー Hallo J. J. 245.
フキゾーの實驗 251.
バルマー Balmer, J. J. 194; —の群 Balmer's series; 276.
光 Light; —のエネルギー 10; —の壓力 10; —の異常分散 231; —の電磁氣的質量 10; —の屈折率 219; —の吸収率 176; —の分散 219, 225, 231; —の發散率 184.
ピツカリングの群 Pickering's series,

278.
 フォルワックス効果 Hallwachs' effect, 113.
 輻射エネルギー Radiation energy, 95.
 ブッフエレル Bucherer A. H. 74, —の電子 63.
 分極 Polarization, 129, —電子 128.
 ブラケットの群 Bracket's series, 277.
 プランク Planck M. 186; —の常數 114, 125.
 フブカ Hupka E. 74, 80.
 ベクトルポテンシャル Vector potential, 11, 92.
 ベステルマイヤー Bestermeyer A. 74.
 ヘビーサイド Heaviside, 73. —の橢圓體 32.
 ペルチエー効果 Peltier effect, 154.
 ヘルツの振動子 Hertz's oscillator, 102.
 ヘルムホルツ Helmholtz H. 151.
 ボアー Bohr N. 258; —の原子模型 270.
 ポインティングベクトル Poynting's vector, 9.
 ホグト Voigt W. 206.
 ホール効果 Hall effect, 160.
 ホートラート Fortrat R. 192.
 ボルツマンの常數 Boltzmann's constant, 165, 184.

マ行の部

- マイケルソン Michelson, 252.
 マカルソー Macaluso D. 245.
 マックスウエルの張力 Maxwell's tension, 6, 62.
 マルスデン Marsden E. 258, 265.
 ミリカン Millikan R. E. 126.
 モーズレー Moseley H. G. J. 283.
 モーレー Moley 252.

ラ行の部

- ライマンの群 Lyman's series, 276.
 ラーマー Larmor J. 71, 202; —の先行運動 204.
 ラングムイア Langmuir, 165.
 ラグランジュ Lagrange; —の函数 22, 24, 44, 47; —の動ポテンシャル, —の函数を見よ。
 ラザーホーフ Rutherford E. 258.
 リチャードソン Richardson O. W. 161, 171.
 リッドベルグ Rydberg J. R. 194; —の常數 277.

- ルーベンス Rubens, 176.
 ルンゲ Runge C. 192, 194.
 レーレー Lord Rayleigh, 186; —の原子模型 255.
 レナード Lenard P. 71, 113.
 ローレンツ Lorentz H. A. 71, 74, 127; —の電子 55.
 ローレンツ Lorenz L. 217.
 ローマン Lohmann W. 192.

ワ行の部

- ワキス Weiss P. 192.

INDEX

(The numbers refer to pages.)

- A**braham M. τ 1, τ 3. —'s electron 18, 52.
 Absorption coefficient of light, 176, 227.
 Action, 114; Quantum of —, 114, 115.
 Angular momentum of an orbitary electron, 284.
 Anormalous dispersion of light, 231.
 Atom, 255, 272; Model of —, 255, 256, 257, 270.
Balmer J. J. 194; —'s series, 276.
 Bestermeyer A. τ 4.
 Bohr N. 258; —'s model of atom, 270.
 Boltzmann's constant, 165, 184.
 Bracket's series, 277.
Characteristic X ray, 283.
 Chemical equivalent, τ 2.
 Clausius and Mosotti's law, 221.
 Coefficient, — of absorption, 176, 227, 239; — of emission, 184.
 Conservation, — of momentum, 7.
 — of energy of an Abraham's rigid electron, 22.
 — a Lorentz's electron, 59.
 — a Bucher's electron, 65.
 Contact electricity, 149.
 Convection potential, 29, 44.
 Cotton A. 192.
Darwin C. G. 258.
 Debye P. 113.
 Dielectric, — palarization, 129;
 — constant, 218.
 Dispersion of ilght, 219, 225, 231.
 Doppler's principle, 210.
 Drude P. 147, 151.
Einstein A. 113.
 Electrical conductivity, 146, 176.
 Electromagnetic, — momentum, 7, 48; — mass, 10, 49; — potential, 11,
 Electrons, $\frac{e}{m_0}$ τ 3, 192; Specific charge of —, 54; Radius of

- 7
- , 54; Rest mass of —
 τ 3, 53, 59; Longitudinal mass of —, τ 4, 52, 59; Transverse mass of —, τ 4, 52, 59, 66;
 Abraham's —, 48; Lorentz's —, 55; Bucherer's —, 63;
 Accelerated motion of —, 81;
 Oscillatory motion of —, 103;
 Free —, 127; Magnetizing —, 130; Polarizing —, 128.
 Elster, 113, 161.
 Energy; Law of conservation of —, 9, 22; — of a rigid electron, 48; Internal — of a Lorentz's electron, 63; Radiation — of an electron, 95.
Faraday effect, 241.
 Fizeau's experiment, 251.
 Force function, 23, 44, 47.
 Fortrat R. 192.
 Fowler A. 278.
 Free electron, 127.
 Fresnel's dragging coefficient, 252.
 Fundamental equations, 2, 3, 17.
 — in a moving system, 250
Gas constant, 172.
 Gauss' theorem, 82.
 Geiger, 258, 265.
 Geitel, 113, 161.
Hall effect, 160.
 Hallo J. J. 241.
 Hallwachs' effect, 113.
 Hamilton's principle of the stationary action, 24.
 Heaviside O. τ 3; —'s ellipsoid, 32.
 Helmholtz H. 151.
 Hertz's oscillator, 102.
 Hupka E. τ 4, 80.
 Hydrogen atoms, Radius of — 54, 285, 286; Model of —, 276
 Spectrum of —, 273, 276.
Index of refraction of light, 219, 224, 231.
 Inertia force, 95.
 Inverse Zeeman effect, 232.
Jeans J. H. 186.
Kaufmann W. τ 1, τ 4, 69, 70.
 Kayser, 194.
 Kinetic potential, 22, 24, 44, 47.
 Kirchhoff's law of radiation, 184.
 Klamars H. A. 213.

Lagrangian function, 22, 24, 44, 47.
 Langmuir, 165.
 Larmor J. ∇ 1. 202; — precession, 204.
 Lenard P. ∇ 1, 113.
 Light, — energy, 10; — pressure, 10; Electromagnetic mass of — 10; Index of refraction —, 219; Absorption coefficient of —, 176; Dispersion of —, 219, 225, 231; Emission coefficient of —, 184.
 Lohmann W. 192.
 Longitudinal mass of an electron, ∇ 4, 52, 59.
 Lorentz H. A. ∇ 1, ∇ 4, 127; —'s electron, 55.
 Lorenz L. 221.
 Lyman's series, 276.

Macaluso D. 245.
 Magnetizing electron, 130.
 Marsden E. 258, 265.
 Mass, Transverse — of an electron, ∇ 4, 52, 59, 66; Longitudinal — of an electron, ∇ 4, 52, 59; Rest — of an electron, ∇ 3, 53, 59.
 Maxwell's tension, 6, 62; Maxwell's fundamental equations, 1.

Michelson 252.
 Millikan R. E. 126.
 Model of atoms, 270; Rayleigh's —, 255; Thomson's —, 256; Nagaoka's —, 257; Bohr's —, 270.
 Moley 252.
 Moseley H. G. J. 283.

Nagaoka. H. 257; —'s model of atoms, 257.
 Neumann G. ∇ 4.
 Nichols, 176.
 Nicholson J. W. 285.

Paschen's series, 276.
 Peltier effect, 154.
 Photo-electric effect, 113; Selective —, 115.
 Pickering's series, 278.
 Planck M. 186; —'s constant, 114, 125.
 Polarizing electron, 128.
 Potential, Electromagnetic —, 11; Scalar —, 12; Vector —, 11; Retarded —, 88; Kinetic —, 22, 24, 44, 47; Convection —, 29, 44.
 Poynting vector, 9.

Rayleigh, Lord, 186; —'s model of atoms, 255.
 Residual ray, 176.
 Retarded potential, 88.
 Richardson O. W. 161, 171.
 Rigid electrons, 18, 52; Equations of motion of —, 21; Law of conservation of energy of —, 22.
 Rubens, 176.
 Runge C. 192, 194.
 Rutherford E. 258.
 Rydberg J. R. 194; — constant, 265.

Scalar potential, 12.
 Scattering of α -rays, 258.
 Schwarzschild K. 25, 213.
 Stark effect, 206.
 Stoke's law, 122.

Stettenheimer A. 192.

Thermal conductivity, 147.

Thermion, 161.

Thermionic current, 162.

Thermo-electricity, 151.

Thomson J. J. ∇ 1; —'s effect 154; —'s model of atoms, 256.

Transverse mass of an electron, ∇ 4, 52, 59, 66.

Vector potential, 11.

Voigt W. 206.

Weiss P. 192.

Wiedemann Franz's law, 147.

Wilson C. T. R. ∇ 1.

Zeeman, 187; 252 — effect, 187, 192 Inverse Zeeman effect, 232.

版權所有



著者 三枝彦雄

發行者 內田作藏

東京市日本橋區大傳馬町一ノ四

發行所

內田老鶴園

東京市日本橋區大傳馬町一ノ四

電話東京一三一四六番
電話浪花一八六五番

電子論典附
定價金四圓

昭和三年五月二十五日印刷
昭和三年五月二十八日發行
昭和九年七月二十日增訂再版印刷
昭和九年七月廿九日增訂再版發行

(秀英會印刷)

新 電 子 論 理學博士 菊判函入 ¥ 4.00
三枝彦雄氏著 三〇〇餘頁 送 .33

本書は先きに本多光太郎先生監修の下に物理学叢書の一として刊行された拙著電子論の續編である。最近數年間に進展した新電子力学及び波動力学の考察に従へば、電子が粒子性と波動性を持つことはその確率状態を表はすものであつて、電子の運動量及びエネルギーの考察に対しては粒子として扱はれ、電子の時間及び空間に関する傳達の場合には波動としての表現を持つことが考へられることゝなつた。本書は右の如き新しき理論的根據に依つて電子を粒子とし又は波動として表はし電子に関する諸々の難問題を、新しくより意義的に開拓して來た跡を總括的に追つた一のコレクションである。敢へて學界の清鑑を俟つ!!

ベクトルとテンソル 理學博士 菊判函入 ¥ 3.50
山田光雄氏著 二八〇餘頁 送 .33

電氣磁氣の理論を學ぶものは先づベクトルの算法を知らなければならない。ベクトルを知らずに電氣磁氣學を解することは絶対に不可能である。處がこのベクトル算法は、稍々難解なものでこの方面の學生の一大難關になつてゐる。この書は之を出来るだけ判り易く説明したもので、既刊電子論等の讀者は勿論、一般に物理学電氣工學等を學ぶ人々にとつて最もよい参考書である。

最近に於ける物理学の發展 理學博士 四六判函入 ¥ 1.50
三枝彦雄氏著 一〇〇餘頁 送 .21

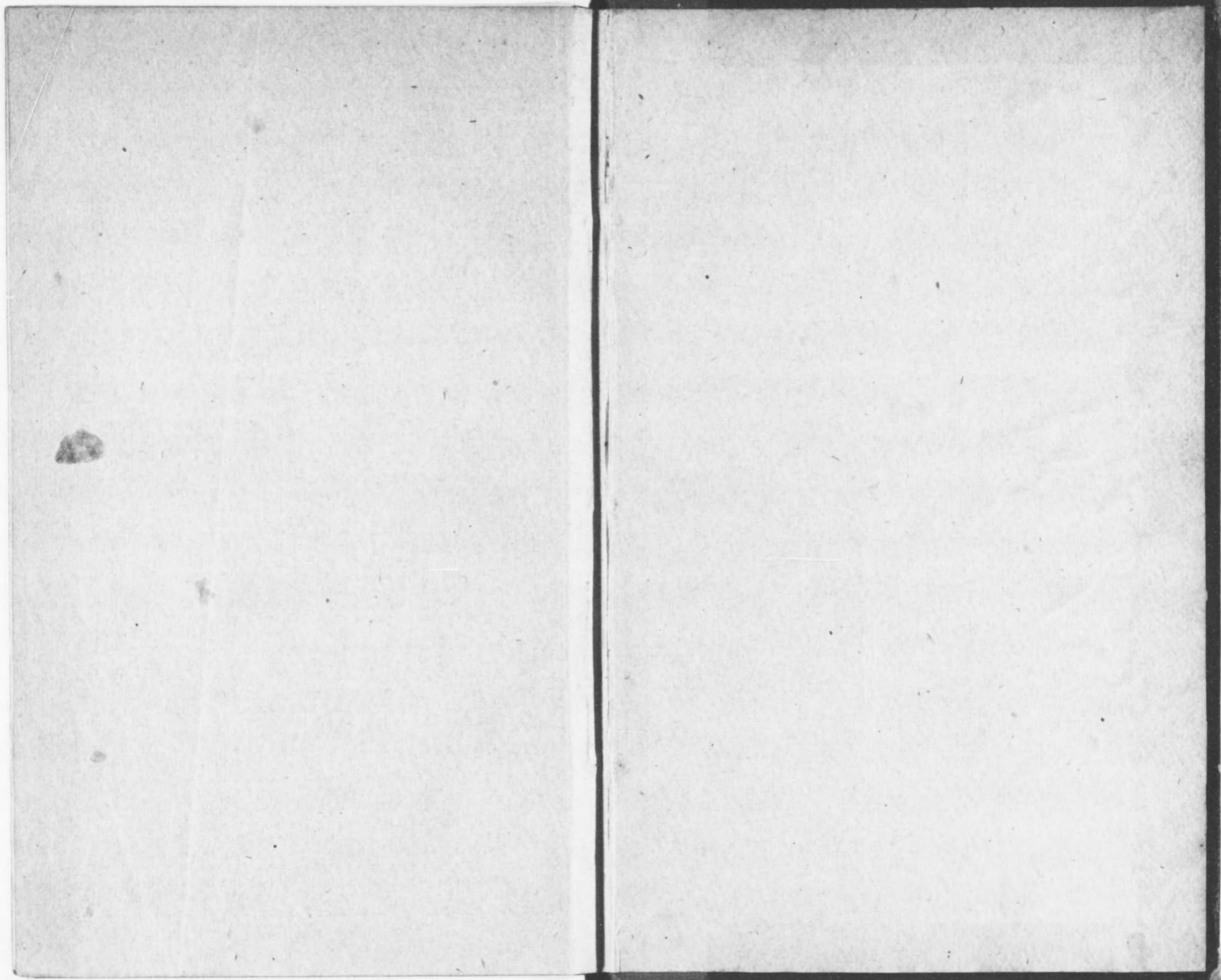
急激に發展せる新興物理学の道程を知らむとする人は本書に據れ!! 最近に於ける物理学の發展は實に脅威を感じるものがある。二十世紀初頭に於てプランクに依つて唱へられた量子論はエネルギーの量子の概念の許に物理学を一新してボーアの原子論を導いた。吾々の思想が量子論に向いて居る間に、アインシュタインの相対性理論は驚く可き明星として輝いて來た。この二大理論に依つて物理学は一時小康を得るかと思はれて居る時情眼を破るが如く相次いで現はれたものは、ハイゼンベルク、ボルン、ヨルダン等に依つて新量子力学と、シュレーディンガーの波動力学である。前者は不連続論の立場から後者は連続論の立場から進展して物理学の理論を整済して次の飛躍の基礎を築きつゝある。然も最近に於て唱へられた、アインシュタイン、ボーゼ及びフェルミ、ディラックの量子の統計力学を經として、縱横に物理学の諸難問題特に原子問題を開拓して居る。本書はニュートン以來の物理学の進展を連続論と不連続論との二つの立場から叙述して、新量子力学及び波動力学に入る道程を指摘し、夫等の概念を述べたものである。然もこれ等の概念を割合に容易に知らんとする人々の爲めに成る可く數學的取扱を避けて、物理的意義を徹底せしめることに努めて居る。先きにアインシュタインの相対性理論に依つて驚異した人々は、シュレーディンガーの波動論を見て、更に驚異を新にするであらう。

改稿物理学通論 理學博士 菊大判函入 ¥ 5.00
本多光太郎氏著 四〇〇餘頁 送 .33


本書は斯界の權威本多光太郎先生の筆になれる高等物理学の名著にして物理学各論に入る前に必讀の書なり。夫れ物理学は凡ての實驗科學の基礎を爲せるが故に本書は單に物理学専攻者のみならず、理学・工学・農學・醫學等を修むる士にも極めて必要な参考書なり。本書は先きに第十五版を機として前版を棄て、新たに稿を起し、假に改版と稱するも全くの新書なり。今や訂正第十六版を發行せり。叙述極めて平明現代物理学の大勢を突破して遺憾なし。

質 點 の 力 學 理學博士 菊判函入 ¥ 4.50
玉城嘉十郎氏著 三八〇餘頁 送 .33

本書は邦文力学書の權威として數版を重ねた。「質點及剛體の力学」の質點及び質點系に関する部分を、編者多年の經驗に徴して分り易く書き改め、且つ近年頗る發展した相対性理論量子力学等を研究するに必要な基礎概念をも與へるための増補をなしたものであつて、一般力学の諸法則を誘導説明すると共に、如何にして其れを應用すべきかを示してある。故に新興力学の根底を知らんとする者、及び古典力学の應用を知らんとする學徒の精讀を要するものである。



46
329

46-329イ-(1)

1200501260134

終