VERHANDELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

TIENDE DEEL.

MET PLATEN.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1864.

GEDRUKT BIJ W. J. DE ROEVER KRÖBER.

INHOUD

VAN HET

TIENDE DEEL.

BIJDRAGE

TOT DE

KENNIS VAN DRACAENA DRACO L.

DOOR

N. W. P. RAUWENHOFF.

Sedert onheugelijke tijden worden exemplaren van Dracaena in de Akademische kruidtuinen van Europa en in de kassen van vele particulieren gevonden, en aan belangstelling voor dit gewas heeft het niet ontbroken, al ware het alleen om den hoogen ouderdom, dien de plant kan bereiken; maar slechts zelden kan men haar zien bloeijen en het schijnt bovendien, dat diegenen, welke over Dracaena geschreven hebben, niet altijd over bloemen en vruchten hebben kunnen beschikken. Althans wanneer men zich bepaalt tot de jongste schrijvers over dit onderwerp, dan vindt men vooreerst bij Göppert (*Beiträge zur Kenntniss der Dracæneen,* 1844) de species en varieteiten van Dracaena naauwkeurig onderscheiden naar den vorm der bladen en den geheelen habitus, maar van bloemen en vruchten wordt bijna niet gesproken, zoodat ik vermoed, dat Göppert deze niet gezien heeft. Ten anderen zegt Schacht (*Madeira und Teneriffe,* 1858), die het vaderland van de Dracaena een geruimen tijd bezocht heeft, dat hij den boom niet heeft zien bloeijen.

Ik heb het daarom niet overbodig geacht, om eens opzettelijk de voornaamste schrijvers over Dracaena Draco, voor zoover ik die heb kunnen bekomen, na te slaan, nu ik in de gelegenheid was, om de beschrijvingen met de natuur te vergelijken, daar een rijzige stam van D. Draco in den Hortus Botanicus te Rotterdam in de maand Mei van dit jaar voor het eerst gebloeid heeft. Uit dit onderzoek is mij gebleken, dat een aantal verschijnselen, door vroegere botanisten, vooral door Berthelot en Kunth zeer juist waargenomen zijn, maar dat ten opzigte van sommige bijzonderheden de beschrijvingen en afbeeldingen nog wel iets te wenschen overlaten, terwijl aangaande de anatomie van D. Draco niets onderzocht is, dan het merkwaardige maaksel van den stam, waaromtrent Unger en de Mirbel het een en ander hebben medegedeeld.

Over den hoogen ouderdom, dien deze plant bereiken kan, vooraf een enkel woord. De afmetingen van den beroemden Drakenbloedboom te Orotava op Teneriffe, welke ons Alex. von Humboldt in zijne *Ansichten der Natur* (3e Ausg. Bd. I. S. 104) medegedeeld heeft, vindt men in de meeste beschrijvingen van deze plant overgenomen, zoo als b. v. bij Berthelot (*Nova Acta Acad. Leop. Carol. Nat. Curiosorum*, XIII. p. 781, 1827), bij Göppert *Beiträge zur Kenntniss der Dracaeneen.* Breslau, 1854, S. 4) en bij Schacht (*Madeira und Teneriffe*, S. 24). Volgens die opgaven had genoemde boom in 1799, verscheidene voeten boven den wortel, een omtrek van 45 Par. voet en bij den wortel, volgens eene meting van Le Dru, een omtrek van 74 voet, terwijl de boom zelf niet veel hooger was dan 65 voet. Van denzelfden boom deelt Schacht ons eene latere meting mede, in 1845 verrigt (*Madeira und Teneriffe*, S. 24), volgens welke de boom aan zijne basis eene middellijn van ruim 38 Eng. voet zou bezitten. Deze opgave, aan wier juistheid Schacht zelf schijnt te twijfelen, strookt echter volstrekt niet met de genoemde van von Humboldt. Dezelfde schrijver vermeldt nog een' anderen reusachtigen Drakenboom op Teneriffe, die in de geschiedenis van dat eiland niet vermeld schijnt en wiens stam 8 voet boven den grond nog een omtrek heeft van 9½ meter. Terwijl de boom te Oratava, door stormen van zijne kruin berooid en inwendig hol, zijn einde nabij is, heeft de boom te Icos de los Vinos een gezonden stam en eene ongeschonden kroon, met digt opeenstaande takken (t. a. pl. p. 25).

Wanneer men nu bedenkt, dat de boomen, die zulk eenen omvang kunnen verkrijgen, uiterst langzaam groeijen en gemiddeld slechts om de 30 à 50 jaren eene nieuwe vertakking maken, dan volgt hieruit, dat de genoemde planten een tal van eeuwen moeten geleefd hebben, zoodat de overlevering, volgens welke de Dracaena van Orotava in 1402 bij de eerste expeditie der Béthencourt's reeds nagenoeg even dik en hol zou geweest zijn als tijdens

v. HUMBOLDTS bezoek, niets onwaarschijnlijks bevat. Met regt schrijft dan ook BERTHELOT, de directeur van den Botanischen tuin te Orotava, in zijne fraaije verhandeling over den beroemden boom: »en comparant les jeunes »Dragonniers, voisins de l'arbre gigantesque, les calculs qu'on fait sur l'âge »de ce dernier, effraient l'imagination". *l. l.* p. 781.

Met deze reuzen der plantenwereld kunnen de exemplaren, welke in de Europesche kruidtuinen worden gevonden, zich niet meten. Maar toch bevinden zich daaronder enkelen, die van den langen levensduur dier boomen getuigen kunnen. Merkwaardig is vooral in dit opzigt een exemplaar van Dracaena Draco, dat in 1759 in Berlijn gebloeid heeft en door GLEDITSCH beschreven, door R. BEHRENS (*de Dracone arbore,* 1770) afgebeeld is. MAJER gaf later in 1796 nog eene uitvoeriger beschrijving hiervan (*Mém. sur l'arbre du sang Dracon* in *Mém. de l'Acad. royale de Berlin,* 1796). Deze boom, toen reeds 37 voet hoog, en afkomstig van den Groot-keurvorst, die hem van de Prinses van Oranje ten geschenke had ontvangen, moet, zoo hij thans nog in leven is (wat mij onbekend is), minstens 200 jaar oud zijn *.

Een dergelijke Dracaena Draco heeft echter volgens BERTHELOT eerst het tweede tijdperk zijns levens bereikt. Volgens hem kan men bij deze species drie levensperioden onderscheiden. In het 1ste tijdperk, de jeugd, bestaat de drakenbloedboom uit een regten, cylindrischen, onverdeelden stam, aan zijn boveneinde met een kroon van bladeren voorzien. Aan den stam zijn dan zeer duidelijke halfringvormige lidteekenen van de aanhechtingspunten der afgevallen bladeren zigtbaar, die vooral aan het bovenste of jongste gedeelte een steenrood, schubachtig voorkomen geven. Deze leeftijd kan kort, maar ook somwijlen zeer lang duren en de boom bereikt dan bijna zijne gansche hoogte, alvorens te bloeijen. SCHACHT zag te Sta-Cruz een achtjarigen, uit zaad verkregen Dracaena Draco, die 8 voet hoog was en reeds voor de eerste maal bloeide, terwijl zij in den regel in hun vaderland 20 voet hoog worden en 30 en meer jaren oud zijn, alvorens te bloeijen. In de Europesche kassen wordt die tijdsruimte door langzamer groei nog veel grooter.

Het tweede tijdperk, dat BERTHELOT met de viriliteit bij het menschelijk

* Zie hierover GÖPPERT in *Regenb. Flora,* 1853, S. 395, aan wien ik de genoemde bijzonderheid ontleend heb.

geslacht vergelijkt, vangt aan, wanneer de boom bloem en vrucht voortbrengt, en duurt voort, zoolang de plant krachtig groeijen kan. De schors verkrijgt nu, vooral onder aan den stam, een meer leder- en korstachtig voorkomen en de lidteekenen van de afgevallen bladeren zijn verdwenen. Uit den top der as verheft zich de bloempluim, die eenigen tijd, nadat de vruchten rijp zijn geworden, afvalt, waarna zijdelings van de inplanting der bloemas, aan den top van den stam 2, 3 en meer spruiten ontstaan, die, elk met eene kroon van bladeren voorzien, tot takken worden en nu een grooter of kleiner aantal jaren blijven voortgroeijen, even als de stam in zijne jeugd, om dan, gelijk vroeger de hoofdas, te bloeijen en vervolgens zich in nieuwe takken te verdeelen, die na korter of langer tijd hetzelfde proces zullen herhalen.

Het derde levenstijdperk is de ouderdom. De schubben, die de schors van den stam en van de hoofdtakken vormen, worden dan steeds dikker en breeder. Tevens ontstaan dan soms luchtwortels, parasitische dracaena's en wratachtige gezwellen, van welke merkwaardige verschijnselen BERTHELOT de beschrijving en afbeelding geeft. Wat de luchtwortels betreft, zoo moet ik echter opmerken, dat deze niet altijd alleen aan den ouderdom der plant eigen zijn. Althans ik zag in den Hortus Botanicus te Leiden bij eene krachtige plant van Dracaena Draco, 12 à 15 voet hoog, wier stam eens gebloeid en zich in drie takken verdeeld had, een minstens 3 centim. dikken en 1 centim. langen luchtwortel uit het midden van den stam gevormd.

Evenzoo vertoont een ex. van Dr. Boerhaavii in den Kruidtuin te Utrecht, met nog onverdeelden stam, luchtwortels in ruimen getale aan den voet van de as, maar ook enkelen op het midden van den stam. Het is bovendien bekend, dat bij deze soort van planten, verwondingen soms aanleiding tot de vorming van luchtwortels kunnen geven, gelijk bij onze inlandsche Dicotyledonen abnormale toestanden adventiefknoppen en wortels kunnen te voorschijn roepen.

Bij de in de onderscheiden tuinen onder den naam van Dracaena Draco gekweekte planten heeft men, ten opzigte van den vorm en de grootte der bladeren, reeds vroeg eenige verschillen opgemerkt, zoodat de door onderscheidene botanici gegeven beschrijvingen niet volkomen overeenstemmen. Terwijl nu vroegere auteurs die beschrijvingen eenvoudig overnamen en naast elkander plaatsten, heeft HAYNE * daaruit aanleiding genomen om de species te splitsen in drie onderafdeelingen, als: α. *strictifolia*, β. *laxifolia*, γ. *pendulifolia*. Het verschil tusschen de beide eersten scheen hem zoo aanzienlijk, dat misschien eene nadere beschouwing wel regt zou kunnen geven, om daarvan eene afzonderlijke soort te maken. Tot de eerste afdeeling α. *strictifolia* brengt hij de afbeeldingen van CLUSIUS (1601), van BLACKWELL en van VANDELLI; tot β. *laxifolia*, de afbeeldingen van CRANTZ (*de duabus Dracaen. arbor.*) en van BEHRENS (*de Dracone arbore Clusii*, 1770); eindelijk tot γ. *pendulifolia*, eene andere afbeelding van CRANTZ en BOERHAAVII *Index alt. plant. hort. Lugdun.* T. II, p. 169. Met welk regt HAYNE deze verdeeling gemaakt heeft, kan men uiteengezet vinden door GÖPPERT in *Regensb. Flora*, 1855, S. 594 en *Beiträge zur Kenntniss der Dracaeneen*, S. 6 en volgg. GÖPPERT sluit zich aan de onderscheiding, die TENORE, de Directeur van den Napelschen plantentuin, twee jaren vóór HAYNE gemaakt heeft, en volgens welke onder den ouden naam van Dracaena Draco twee afzonderlijke species begrepen zijn, namelijk ééne met stijve, regt uitstaande kortere bladen (Dracaena Draco L.) en ééne met langere, slappe, afhangende en ongewapende bladen, door hem Dracaena Boerhaavii Tenore genoemd. De eerste species komt overeen met α. strictifolia; onder de tweede of D. Boerhaavii zijn begrepen β. laxifolia en γ. pendulifolia van HAYNE en evenzoo eene vierde varieteit δ. *angustifolia*, door RÖMER en SCHULTES aangenomen.

Van beide species geeft nu GÖPPERT de volgende diagnosen:

Dracaena Draco L. ex parte.

Dr. arborea; apice ramosa, foliis sessilibus, semiamplexicaulibus linearibus, apicem versus sensim attenuatis, apice ipso canaliculatis spinescentibus planis, inferioribus arcuatim dependentibus, mediis patentibus, summis erectis; paniculis terminalibus ramosis foliaceo-bracteatis (ramis ternis patentissimis, floribus quaternis et quinis).

Draco arbor CLUSIUS, *hist. pl. rar.*, I. 1. p. 1. c. icone.

BAUH., *Pinax*, p. 505. BLACKW., *herb.*, T. 358. Arbor Draconis, Draco

* *Getreue Darstellung u. Beschreib. der in der Arzneykunde gebräuchl. Gewächse.* Bd. IX, T. 2. Berlin, 1825.

Yuccaeformis vel Dracaena. VANDELLI, *Dissert.* in RÖMER, *Script. de plant. Hisp. Lusit. Bras.*, p. 37. T. 2. a. b.

Stoerkia Draco CRANTZ, *de duab. Dracon. arbor.*, p. 25. T. 1, 2.

Arbor Draconis latifolia Hortulan. fide Crantzii, p. 21.

Yucca Draconis HOYER, *Amoenit. Acad. Linn.*, III. p. 407.

Asparagus? Draco LINN., *sp. pl.*, edit. 2. T. 1. p. 451.

Dracaena Draco LINN., *Syst. Nat.*, edit. 12. II. p. 246. WILLD., *sp.*, pl. II. p. 155. HAW., *pl. succ.*, p. 30. Ej., *syn.* p. 67. LAM., *Enc. Meth.*, II. p. 323. DALM., *Diss. praes. Thunb.*, p. 3. GLEDITSCH in *Act. Acad. Scient. Berol*; BEHRENS, *Dissert.*, Götting. 1770. p. 36. T. 1, 2, 3. MAJER in *Mém. de l'Acad. Royale de Berlin* 1796 et Berlin 1799, p. 29—44 avec pl., BERTHELOT in *Nova Act. Acad. Caes. Leop. Car. Nat. Cur.*, XIII. 2. (niet XV) p. 773. T. 35—39. Dracaena Draco, α strictifolia et β laxifolia HAYNE, *Getreue Darst.*, IX, T. 2. RÖM. et SCHULT., *Syst. veg.*, T. VII. 1. p. 37. KUNTH, *Enum.*, T. V, p. 5, waarbij ik nog voeg: NEES v. ESENBECK, *Plant. med.* Tab. 41 et 42.

Dracaena Boerhaavii Tenore.

Dr. arborea; apice ramosa, fol. sessilibus semiamplexicaulibus linearibus sensim attenuatis apice canaliculatis spinescentibus junioribus et adultis laxis flaccidis undulatis dependentibus; paniculis terminalibus erectis (floribus subcampanulatis pedunculis geniculatis longioribus, filamentis medio crassioribus). TENORE, *Atti della reale Acad. delle Science di Napoli*, T. 3, p. 37 tav. 3, Ej., *fl. neap. prodr.* App. IV. *Catal. del real orto botanico di Napoli*, 1845, p. 85.

Cordyline fol. inermibus, integerrimis, flaccidis. Royeni Lugd. Bat. p. 22.

Palma foliis longissimis pendulis e caudice glabro enatis. Boerhaav. Lugd. Bat. 2. p. 160.

Oedera dragonalis CRANTZ. *l. c.* p. 30, F. 3.

Arbor Draconis angustifolia Hortul. fide. Crantzii, p. 28.

Dracaena Draco penduliformia. HAYNE, *l. c.*

RÖMER et SCHULT. *Syst., veg.*, T. VII. 1, p. 338.

KUNTH, *Enum.*, T. V, p. 5.

Dracaena Draco δ angustifolia, JACQ., *Fragmenta*, 2 p. 4 t. 2 F. 4.

Met deze onderscheiding, die echter door KUNTH en anderen aanvankelijk niet aangenomen is, kan ik mij wel vereenigen. De planten, die ik in de Nederlandsche kruidtuinen gezien heb, schijnen mij toe tot de twee genoemde species terug te brengen te zijn. Maar — en daarom heb ik de diagnose van GÖPPERT geheel overgenomen — er schijnt in de onderscheidene Horti eene verwisseling der namen te bestaan. Men vindt planten die geheel overeenkomen met de beschrijving door GÖPPERT voor Dr. Draco gegeven, gedoopt met den naam van Dr. Boerhaavii en, omgekeerd, planten als Dr. Draco opgegeven, die door hare langere, smallere en slap afhangende bladeren kennelijk tot Dr. Boerhaavii moeten gebragt worden.

De plant, die in den Hortus Botanicus te Rotterdam heeft gebloeid, en die de aanleiding is geweest tot dit onderzoek, behoort tot Dracaena Draco L. in den engeren zin. De regte, cylindervormige stam is tot aan de bladerkroon 2.74 met. hoog en van boven tot op een afstand van 1 met. van den grond met roodbruine schubben geteekend door de overgeblevene lidteekenen van vroeger afgevallen bladeren. Onmiddellijk onder de oudste bladeren is de kleur oranjerood. Lager aan den stam, dus in het ondere gedeelte, ziet men eene donkerbruine schors, die op enkele punten gespleten is.

De bladeren, die aan den top eene kroon vormen, welke ongeveer 1.2 met. hoog en in horizontale rigting 1.4 met. breed is, zijn stijf en regt. De jongste staan overeind, de middelste staan horizontaal regtuit, de onderste hangen een weinig golfvormig naar den stam gebogen, doch zoodanig, dat de top van alle bladeren nog ver van den stam verwijderd is, daar de lamina van het blad gewoonlijk nog een hoek van 60° ongeveer maakt met de lengteas van den stam. Men ziet dit afgebeeld in onze Pl. I, die den top van den bloeijenden boom op verkleinde schaal voorstelt. Hiermede komen ook het best overeen de figuren bij MAJER in *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1796, Pl. I, fig. I en bij GÖPPERT *Beiträge*, Pl. I, hoewel bij beiden schijnbaar de onderste bladen meer afhangen, omdat de oudere, reeds verdorrende, doch nog niet afgevallen bladeren hierbij geteekend en in onze figuur weggelaten zijn. Men kan dit terstond herkennen, wanneer men die afbeeldingen en onze figuur vergelijkt met de figuur van BERTHELOT, *l. c.* Pl. XXXV. Daarentegen schijnen de teekeningen van NEES V. ESENBECK, *Plantae med.* Tab. 41 en 42, en van GAUDICHAUD, *Voyage de la Bonite* (althans zoo men oordeelen mag naar de daaraan ontleende en overigens zoo getrouwe afbeeldingen van SCHNIZLEINS *Iconographia*, Pl. LV, *c*, fig. 21, want het werk zelf heb ik niet in handen gehad), minder juist te zijn. De eerste laat de bladeren te veel uit één punt aan den stam ontspringen, de tweede geeft eene schets van de bloeijende plant, zoo als ik nergens elders gezien heb. Behalve nog het aantal paniculae, dat vreemd voorkomt, zijn de afmetingen en de stand der bladeren, even als het aantal takken, dat uit één punt ontspringt, zoo geheel verschillend van alle andere beschrijvingen der plant, dat ik niet nalaten kan te vermoeden, dat de phantasiën van den schrijver der *Recherches sur l'organogénie des végétaux* ook hier niet afwezig zijn geweest.

De bladen van onzen Draco zijn ongesteeld, lijnvormig, stijf, aan de basis vleezig, aan den top langzaam in een punt uitloopende en door het omrollen van de beide bladranden aan de spits daar ter plaatse steviger, zoodat zij door sommige schrijvers spinescentia, door anderen subspinosa genoemd worden. Zij zijn echter volstrekt niet stekend, zoo als de bladeren van Yuccasoorten en anderen, waarom ik ze liever met Nees van Esenbeck apice involuto acuminata zou heeten. Aan de basis verbreedt zich het blad aanzienlijk, terwijl het den stam half omvat; hier wordt het dik en vleezig en tot op 3 centim. afstand van de basis aan de bovenvlakte en 2 centim. aan de ondervlakte, is de groene kleur vervangen door eene bloedroode, die vooral aan de grens van het groen levendig is, en naar de basis toe meer naar het gele overhelt, hoewel niet overal gelijkmatig. De omtrek van het blad en de verbreeding en kleuring aan de basis zijn overigens juist afgebeeld in natuurlijke grootte bij Nees van Esenbeck, *l. l.*, met uitzondering van het bruine gedeelte tusschen rood en groen, dat ik bij onze plant niet zoo gevonden heb. De afscheiding van het rood en groen en de gootvormige omkrulling der bladmassa aan de spits vindt men juist weergegeven bij Majer, *l. l.*, Pl. II, fig. 7 en 8.

De afmetingen van het volwassen blad zijn de volgende: lengte 64 centim., breedte aan de basis bij de aanhechting aan den stam 10 centim.; op 4 cent. afstand van daar 4 centim., in het midden op de breedste plaats 4.5 cent.

De bladen van jonge planten hebben denzelfden vorm en zijn even stijf, maar gewoonlijk zijn zij ligter groen gekleurd, en aan de basis, ter plaatse waar later de roode oppervlakte begint, eindigen zij in eene witte massa, hier en daar met donker-bloedroode plekken bezet. Bij eene 3 à 4jarige plant vond ik deze afmetingen bij de oudste bladen: lengte 51,5 cent., breedte aan de basis 5 cent., op 3 cent. afstand van daar 2,5 cent., in het midden 3 cent.

Vergelijkt men hiermede het blad van Dracaena Boerhaavii, dan ziet men een aanzienlijk verschil: het blad is niet alleen slap en neêrhangend, maar ook veel langer en smaller. Een blad afkomstig van eene 3 à 4 voet hooge plant (uit den Leidschen Kruidtuin) gaf mij de volgende cijfers: lengte 80 cent., breedte aan de basis 5 ct., op 3 ct. afstand van daar 1.8 cent., op $\frac{1}{3}$ der lengte van het blad 2 cent., op $\frac{2}{3}$ der lengte 2.3 cent.

Bloeiwijze. De genoemde plant heeft in de jongste maanden uit den top der as eene zamengestelde, herhaaldelijk vertakte panicula ontwikkeld, waaraan een groot aantal kleine bloempjes gezeten waren. Het voorkomen dezer panicula vond ik in geene der mij bekende afbeeldingen volkomen uitgedrukt, waarom ik daarvan eene afteekening op Pl. I hierbij voeg. De pluim was, even als Majer dit beschrijft, met de hoofdas een weinig naar het zuiden gebogen, en in het algemeen minder lang dan dit op de figuren bij Berthelot en bij Nees van Esenbeck is voorgesteld. De as van de panicula, van onderen 3 cent. dik en van boven allengs dunner wordende, draagt op afstanden telkens drie zijtakken, die elk met een hoek van 80° van den top afstaan en elk weder herhaaldelijk op dezelfde wijze vertakt zijn, terwijl dan aan de kleinste takjes de talrijke bloemen gehecht zijn. Onder elk drietal zijtakken aan de hoofdas, bevindt zich eene bladvormige bractea, die geheel gelijkt op de bladeren van Dracaena en evenzoo stijf is en den stengel half omvat, maar slechts hoogstens de helft der grootte van de bladeren bereikt, geene roode vlek aan de basis vertoont en bij het eindigen van het bloeijen bruin wordt en afvalt. Aan de kleinere takjes der panicula zijn tot groepen van 3, 4 of 5 vereenigd (en niet, zoo als Majer, Pl. I, fig. 9, afbeeldt, tot 2 of 3 bijeen) de bloemen gehecht, die even als tak en hoofdas ligt geelgroen gekleurd, op gelede steeltjes gezeten en bij elk groepje nog van een klein, lijnvormig, weldra verdorrend schutblaadje voorzien zijn. Men ziet de afbeelding van een der kleinere takjes in natuurlijke grootte op Pl. II, fig 17; in deze takjes loopen de grootere takken uit, die soms 30 à 40 centimeters lang zijn en zich herhaaldelijk vertakken.

Hetgeen Schacht, die onlangs Madera en Teneriffe, het vaderland van den Drakenboom, geruimen tijd bezocht, doch nooit de levende bloemen der plant gezien heeft (*Madeira und Teneriffe*, 1859, p. 26), van de bloeiwijze berigt, schijnt mij onjuist toe, en komt noch met mijne waarnemingen noch met de berigten van anderen overeen. De zijtakken der panicula (door hem Traube genoemd) zijn niet, gelijk hij beweert, lang, afhangende en altijd onvertakt. Integendeel, zij vertakken zich veelvuldig en staan stijf uit onder een hoek van 80° met de hoofdas. De bloemen staan ook niet in groepjes van 7—10, maar van 3—5 bijeen, zoo als reeds gezegd is.

De orde, waarin de bloemen zich openen, behoort tot de inflorescentia indefinita, zonder geheel regelmatig te zijn vooral bij de eerste bloemen, terwijl bovendien van elk groepje de eene bloem na de andere zich ontplooit. Elk der bloempjes is aan de bloeias gehecht door een steeltje, bijna van de lengte der bloem, dat in het midden geleed en knievormig gebogen is; 3 tot 5 zulke steeltjes ontspringen uit één punt der bloeias, van daar dat de bloemen tot het genoemde aantal in groepjes bijeen staan. Ter plaatse van de geleding breekt de bloemsteel zeer gemakkelijk af, en van de talrijke, weldra afvallende bloemen blijft alleen de onderste helft van den bloemsteel aan de as gehecht.

Wat de bloemen zelve aangaat, deze zijn door KUNTH over het algemeen juist gedetermineerd, maar de afbeeldingen, die mij daarvan onder de oogen gekomen zijn, drukken nergens de natuur volkomen uit *. In Pl. II heb ik getracht, zoo getrouw mogelijk de kenteekenen der bloem en harer deelen terug te geven.

Het perigonium is buis- of klokvormig en tot over de helft ingesneden in 6 slippen, die in den knop als dakpannen over elkander gelegd zijn. De slippen zijn langwerpig, alle even groot, bij de geopende bloem omgeslagen; op den rug hebben zij elk een uitpuilenden vaatbundel, waardoor de knop zich als met zes ribben vertoont. (Zie op Pl. II, fig. 3., den knop in natuurlijke grootte en fig. 17 de bovenste bloempjes.)

Aan de binnenvlakte hebben zij, vooral ter plaatse waar zij zich ombuigen, eene geringe gootvormige verdieping. De top der slippen is regelmatig naar binnen omgekruld. (Zie Pl. II, fig. 1 en 2.) Deze slippen openen zich des avonds en sluiten zich weder des morgens wanneer de zon schijnt, zoo als BERTHELOT reeds heeft opgemerkt. KUNTH heeft naar die beschrijving de bloemen teregt *vespertini* genoemd (*Enum.* V. 3).

Aan de keel van het perigonium zijn 6 meeldraden ingeplant, die een

* Eene der beste afbeeldingen, die ik gezien heb, is de vergroote teekening bij SCHNIZLEIN, *Iconographia*, Pl. 53 *c*, fig. 21, maar het buisvormige gedeelte van het perigonium is veel te lang en smal en te groot in verhouding tot de slippen. De figuren van BERTHELOT en van MAJER zijn in dit opzigt gebrekkig.

weinig korter zijn dan de slippen (zie fig. 2). De helmdraden zijn platgedrukt, aan den top smal, naar het midden toe aanmerkelijk breeder, aan de basis bijna even breed als in het midden. Zij staan regt op en wijken dus van boven van de slippen van het perigonium af, waaraan zij gehecht zijn. (Zie Pl. II, fig. 2, 4, en 5). Door het midden loopt één vaatbundel (fig. 6).

De *helmknoppen*, midden aan de achterzijde aan het zeer korte connectivum gehecht, zijn tweehokkig, langwerpig, van boven rond en in twee lobben verdeeld, van onder meer puntig en uiteenwijkend. Zij springen met eene overlangsche spleet naar binnen open. De middelmatig groote pollenkorrels zijn, droog gezien, elliptisch met eene overlangsche spleet (zie fig. 8 *a*); in water opgezwollen, rond en ondoorschijnend (fig. 8 *b*). De antherae vertoonen als die der overige Liliaceën duidelijke spiraalbanden op de buitenste cellenrij (zie fig. 7).

Midden in den grond der bloem staat de *stamper*, die slechts weinig boven de stamina uitreikt. Het bovenste deel van dezen, de stempel, is drielobbig, met ronde, korte lobben (zie fig. 1). De stijl is rolrond, glad, regt, op den top van het ovarium staande en strekt zich uit bijna tot de hoogte, waarop de slippen van het perigonium zich naar buiten omslaan. Het tissu conducteur vormt in het midden van den stijl een gang van drie in het midden met elkander communicerende spleten, zoodat men zich den stylus kan denken als uit de vergroeijing van drie stijlen ontstaan. Tegenover elk dezer spleten staat een vaatbundel *b* (zie fig. 9), die uit het ovarium komt. Het ovarium, dat geheel vrij staat in den grond der bloem, is op de lengtedoorsnede peervormig (zie fig. 10). Van bovenop gezien, vertoont het drie uitpuilende ribben. In het midden is het driehokkig en tegenover elk hokje bevinden zich drie vaatbundels (zie fig. 11).

Bij een aantal van de eerste bloempjes heb ik het ovarium niet regelmatig, driehokkig, maar onregelmatig, vier- en vijfhokkig gevonden; deze zijn echter alle geavorteerd. De latere vruchtbare ovaria waren alle normaal ontwikkeld.

Ieder hokje bevat één eitje, onmiddellijk aan den binnensten hoek gehecht en omgekeerd (anatropum).

De mikropyle van het ovulum is naar beneden gekeerd (zie fig. 10 en 12). Endostomium en exostomium zijn beide duidelijk te herkennen. De onderlinge plaatsing der bloemdeelen kan men eindelijk herkennen uit Pl. II, fig. 15, waar een diagram des bloemknops, dwars doorgesneden op de hoogte der antherae, is afgebeeld. Men ziet hieruit, hoe de slippen van het perigonium in den knop geplaatst zijn.

Van deze in grooten getale gevormde bloempjes valt het meerendeel bij de minste aanraking af en laat dan altijd los bij de geleding van het bloemsteeltje. Een ander deel der bloemen schijnt bevrucht te zijn, althans de stamina verdorren en het ovarium, altijd door het overblijvend perigonium omgeven, neemt aanzienlijk in grootte toe, maar weldra wordt dit roodachtig geel en begint te verrotten, om dan even zoo bij de geringste beweging af te vallen. Slechts een zeer klein gedeelte van de gevormde bloemen ontwikkelt zich tot vruchten; * zoo zijn van de duizenden bloempjes aan de panicula van onzen Dr. Draco niet meer dan een 30 à 40 tal overgebleven, die beloven zaad te zullen geven. Deze, hoewel aanmerkelijk in omvang toegenomen, zijn nog levendig groen. De bloemstengel daarentegen is na het bloeijen alras bruin geworden, terwijl de bracteae reeds vroeger zijn afgevallen.

Die menigte afvallende bloempjes verzamelt zich in de tusschenruimten tusschen de onderscheiden bladeren en tusschen deze en den bloemstengel Zij vormen daar eene compacte massa, die, wanneer zij niet in tijds wordt weggenomen, alras tot rotting overgaat bij de planten die in kassen staan. In de vrije natuur, waar meer luchtverversching in die tusschenruimten is, zal dit niet zoo ligt plaats hebben, te meer, omdat het grootste deel der afgevallen bloempjes alras weder daaruit waait. Maar het laat zich goed begrijpen, dat eenigen der rijpe vruchtjes daarin vallende een vochtigen bodem vinden, geschikt om de ontkieming te bevorderen, zoodat men dan verkrijgt hetgeen Berthelot als *dragons parasites* heeft beschreven, namelijk jonge plantjes, die eenigen tijd op de moederplant leven. Eenigen van deze, door Berthelot in den grond overgebragt, groeiden welig voort (l.l. p. 784).

Als de vrucht van Dracaena Draco rijp geworden is, vormt zij eene eenzadige (zelden twee- en driezadige, zie Berthelot, p. 778), roodgekleurde bes van de grootte eener kers, volgens de berigten van Mayer, Berthelot, Gaudichaud en anderen. Eene dergelijke, hoewel nog groen gekleurde vrucht heeft de Rotterdamsche Dracaena Draco ook voortgebragt. Men vindt daar-

* Om dit te bevorderen, is het wenschelijk de bloemen kunstmatig te bevruchten, door met eene juist geopende bloem over de stempels der andere geopende te strijken, aangezien het pollen van Dracaena Draco even als van vele andere planten uit warmer gewesten in onze kassen niet stuift.

over en over het zaad de noodige bijzonderheden aan het slot van dit opstel.

Ten slotte neem ik hier de diagnose van KUNTH over, met eenige wijzigingen, die ik daarin gebragt en door cursieve letters aangeduid heb.

Dracaena Draco. Arborea; apice ramosa; foliis sessilibus, semi-amplexicaulibus, linearibus, apice *subacutis;* crasso-subcarnosis; paniculis terminalibus, ramosis, foliaceo-bracteatis; ramis ternis patentissimis; floribus quaternis vel quinis.

Insulae Canarienses. Socotra (Whigt), introducta in India orientali. — Truncus elatus, *subcilindricus,* 8—12 pedalis, crassus, apice subdichotomo-ramosus, ramis semiannulari-cicatrisatis, apice foliosis. Folia linearia, apice *involuto-acuminata,* integerrima, crassa, *basi* subcarnosa, striata, glabra, ima basi valde dilatata, semi-amplexicaulia, 64 *centimetra longa,* 4 *lata, ima basi* 10 *lata.* Paniculae terminales, ramosae, foliaceo-bracteatae; ramis *patentissimis,* per ternos congestis. Flores quaterni vel quini, pedicellati, polygami, similes *floribus* Asparagi officinalis; vespertini; pedicellis supra medium articulatis *subreflexis;* parte superiore in fructu obconico incrassata. Perigonium tubulosum, persistens, profunde 6 fidum, albo-virescens, intus albidum; laciniis oblongis, obtusis, aequalibus uninerviis, nervo ad dorsum *tumescente,* tubo *duplo* longioribus, *patentibus vel reflexis* apice recurvatis. Stamina 6, fauci perigonii inserta, lacinias longitudine subaequantia. Filamenta linearia, plana, membranacea, uninervia, apice angustata, basim versus vix angustiora. Antherae biloculares, oblongae, apice bilobae, lobis obtusis, basi sagittato-bifidae, dorso medio affixae, flavae, loculis interne secundum longitudinem dehiscentibus. Ovarium liberum, *subrotundum,* in superiori *parte costatum,* versus medium triloculare; ovula in locis solitaria, suboblonga, supra basin lateraliter et immediate affixa, anatropa, adscendentia; exostomio inferne spectante, endostomio *exostomium subaequante.* Columna stylina terminalis erecta, *cilindrica, basin versus dilatata,* stamina *paullum* superans. Stigma trilobum, lobis rotundatis. Bacca globosa *irregulariter trisulcata,* carnoso-succulenta, plerumque abortu monosperma, flavescens (?) magnitudine cerasi. Semen *pendulum,* subglobosum, durum. *Albumen albido-coriaceum. Embryo antitropus, rectus, in axilla seminis basi dilatatus, obtusus. Radicula infera.*

Truncus fundit humorem gummoso-resinosum, rubrum (sanguinem Draconis) *in superficie citius indurescentem atro fere colore.*

Aan de bovenstaande morphologische en systematische beschouwingen wensch ik eenige anatomische bijzonderheden vast te knoopen, die het onderzoek van Dracaena Draco mij heeft leeren kennen. Ook uit een anatomisch oogpunt is deze plant belangrijk.

Wat vooreerst den stam betreft, deze is meermalen onderzocht geworden en heeft steeds de belangstelling der anatomen gewekt, omdat men hier even als bij Yucca en andere boomachtige Liliaceën, als het ware de kenmerken van den mono- en den dicotyledonen-stam vereenigd vindt.

Gelijk bekend is, hebben de Aloïneën even als de overige éénlobbige gewassen, verspreide en gesloten vaatbundels, die aan den omtrek van den stam bijeen geplaatst zijn. Tevens bezitten zij echter een waren Cambiumring (of verdikkingsring, zoo als Schacht het noemt), die bij sommigen over een groot deel, bij Dracaena over den geheelen stam levend blijft en dus mogelijk maakt dat deze zulk eene groote dikte bereikt. Nieuwe deelen worden buiten tegen de bestaande aangelegd en zij zijn dus uitmuntende voorbeelden om Decandolle's hypothese van Endogenen en Exogenen te weêrleggen.

De schrijvers, die zich vooral met de anatomie van den stam van Dracaena Draco hebben bezig gehouden, zijn de Mirbel, die reeds in 1802 bij dien boom eene dubbele groeiwijze onderscheidde (*Journ. de Physique de fructidor an* IX) en die in 1844 een nieuw onderzoek bekend maakte (*Ann. des Sc. Nat.* 3e Sér. III, p. 321) (1847); Unger, die in zijne prijsverhandeling over den Dicotyledonenstam ook over Dracaena vele bijzonderheden medegedeelt (*Ueber den Bau des Dicotyl. Stammes.* Petersburg, 1840, p. 34) en Schacht, die in den laatsten tijd het maaksel van den boom heeft nagegaan (*Anat. und Phys. d. Gew.* I. 329, II. 40).

Hoewel in sommige punten de uitkomsten dezer onderzoekers overeenstemmen, zoo wijken zij echter in andere merkelijk van elkander af. Ik was daarom verheugd, door de goedheid van den Hoogl. Miquel in de gelegenheid te zijn, een gedeelte van een onlangs in den Utrechtschen hortus gestorven exemplaar van een volwassen Dracaena Draco te kunnen onderzoeken. Deze stam, die zich reeds in drie takken verdeeld had, bezat op een afstand van 15 cent. onder die verdeeling eene middellijn van 11 cent.; aan de oppervlakte waren de indrukken der bladaanhechting nog duidelijk te zien, maar niet meer rood gekleurd. Op de dwars-doorsnede ziet men den stam grootendeels bestaande uit een net van vaatbundels, van elkander afgescheiden door parenchym. Naar den omtrek toe, hoopen deze vaatbundels zich digter opeen en vormen eindelijk een waren houtring, die uitwendig met een dunwandig parenchymweefsel van jonge cellen (verdikkingsring) en met eene kurklaag bedekt is. De dikte van den houtring met de zeer dunne schors bedraagt op de genoemde hoogte van den stam gemiddeld 7 mm. Dezelfde structuur vindt men ook meer onder aan den stam terug, maar de afmetingen zijn eenigzins verschillende, terwijl over het geheel de vaatbundels dikker zijn en minder elkander kruisen. Op 20 cent. boven den voet is de middellijn van den stam 8 cent.; oppervlakkig zijn de indrukken van de bladaanhechting verdwenen en men ziet eene gladde lederachtige schors met hier en daar uitzweeting van drakenbloed (waarover nader). Houtring en schorslaag zijn hier echter, niettegenstaande de stam dunner is, veel dikker. Beide lagen zijn in radiale rigting te zamen op de dunste plaats 8, op de dikste 15 mm. dik, waarvan aan schors en kurk gemiddeld 3 millim. toekomt.

In beide gedeelten, maar nog wel het duidelijkst in het jongere, vindt men de merkwaardige kruising der vaatbundels terug, zoo als v. Mohl, de Mirbel en anderen die bij een aantal Monocotyledonen hebben doen kennen. Wanneer men een stuk van den stam van Dracaena op eene drooge plaats nederlegt en later overlangs radiaal doorsnijdt, dan heeft men ook zonder maceratie een fraai beeld van den loop der vaatbundels. Schacht heeft dit reeds opgemerkt en ik heb dit verschijnsel, hetwelk ik van Yucca alöefolia reeds kende, bij Dracaena Draco bevestigd gevonden. Van het binnenste gedeelte van den houtring ziet men de vaatbundels zeer langzaam meer binnenwaarts loopen (wanneer men namelijk van onder naar boven den loop der vaatbundels vervolgt), en hier en daar zich onderling vertakkende, maar toch meestal tamelijk evenwijdig aan elkander voortgaan. Wanneer zij aldus iets hooger of lager ongeveer het midden van den stam bereikt hebben, buigen zij zich buitenwaarts om, en gaan nu schuins opwaarts door de jongere binnenwaarts loopende vaatbundels, waarmede zij hier en daar zich vertakken of ten minste eng aaneensluiten, totdat zij aan den houtring genaderd zijn, welke zij dwars doorboren, om in de bladeren over te gaan, en na het afvallen van deze als bruinroode stippen op de schors achter te blijven.

Op eene overlangsche radiale doorsnede vertoont zich dus de stam van Dr. Draco als in Pl. V, fig. 2 is afgebeeld, wanneer men namelijk vooraf de genoemde drooging heeft in het werk gesteld.

De genoemde vaatbundels, die zich in radiale en tangentiale rigting vertakken (anastomoseren), bestaan uit een hout- en een schorsligchaam, welk laatste steeds naar buiten gekeerd is.

Het schorsligchaam is zamengesteld uit sterk verdikte bastcellen (zie Pl. III, fig. 1 en 2, *a*), die op de dwars-doorsnede halvemaanvormig gegroepeerd zijn (fig. 1). Zij zijn zonder intercellulairruimten aaneengevoegd, en hare wanden, die het licht sterk breken, zijn tot op zekere diepte met stippelkanalen voorzien. Aan het bastligchaam van den vaatbundel sluit zich, naar het centrum van den stam gekeerd, het houtligchaam. Dit bevat aan den buitenomtrek van den op de dwars-doorsnede meest cirkelronden of elliptischen vaatbundel, meer of min verdikte houtcellen met stippelkanalen, veel gelijkende op de bastcellen (Pl. III, fig. 2 *d*). Naar het midden van den vaatbundel toe treft men een grooter of kleiner aantal vaten aan (zie Pl. III, fig. 1 en 2 *c*). Deze zijn deels spiraalvaten met digt aaneensluitende windingen, deels gestreepte of laddervormige vaten, wier lange horizontale stippels zoo ver doorloopen als het vat met den wand van eene zelfde hout- of vaatcel in aanraking is; deels eindelijk gestippelde vaten. Deze laatsten zijn wijd, met tamelijk dikke wanden en hebben regelmatige spleetvormige hofstippels, wier spleten over het geheele vat in dezelfde rigting loopen en dus elkander kruisen, wanneer bij eene overlangsche doorsnede de twee tegenoverliggende wanden van hetzelfde vat door elkander schemeren. Bij al deze deelen zijn de afmetingen tamelijk groot, gelijk men uit Pl. III, fig. 1 zien kan, die bij eene 150malige vergrooting geteekend is. Hetzelfde is het geval met het parenchym, dat de vaatbundels begrenst en uit eivormige cellen bestaat. Hier vindt men sterk lichtbrekende wanden, met een aantal stippels bezet, en bovendien vertoonen zich op de celwanden elliptische kringen, waarbinnen soms weder stippels schijnen te zijn. Deze laatsten schemeren echter gewoonlijk van den onderliggenden wand door. Waar de cel doorgesneden en slechts een der wanden overgebleven is, daar vertoonen zich geene stippels in de kringen. Hier en daar blijkt het, aan den omtrek in het afgescheurde stuk, dat deze stippels werkelijke openingen in de cellen zijn, maar somwijlen ook schijnen zij slechts verdunde plaatsen van het celvlies. Misschien is het laatste een overgangstoestand tot het eerste.

Eindelijk binnen in den vaatbundel ziet men nog eene groep van kleine langgestrekte, zeer dunwandige cellen, die algemeen onder den naam van cambium als een gedeelte van den vaatbundel worden onderscheiden. Zij hebben ook werkelijk het voorkomen van zeer jeugdig te zijn, maar een naauwkeurig onderzoek leert toch, dat dit celweefsel, dat in al de vaatbundels, ook in de oudsten die lang hebben opgehouden te groeijen, evenzoo voorkomt, niet als cambium of teeltweefsel mag beschouwd worden. In zeer dunne overlangsche en dwarse doorsneden bij behoorlijke vergrooting gezien, blijken zij die merkwaardige celvormen te bevatten, die HARTIG en v. MOHL in den jongsten tijd in het liber der dicotyledone boomen hebben aangewezen; het zijn ware *Gittercellen*, met uiterst fijne stippels op regelmatig over den lengtewand verdeelde plaatsen. Op de dwarssnede zijn zij geheel fijn gestippeld. Dit weefsel wordt van de vaten afgescheiden door eene rij langgestrekte cellen, met iets dikker wand en groote ronde poriën, doch zonder stippels. De genoemde gittercellen nemen nu merkwaardiger wijze niet alleen dezelfde plaatsen in als de gittercellen bij de Dicotyledonen, d. i onmiddellijk binnen de laag bastbundels, maar ook in scheikundigen zin vertoonen zij daarmede overeenkomst. Zij zijn namelijk het eenige weefsel van den volwassen vaatbundel, hetwelk door ChloorzinkJoodkaliumJodium-oplossing blaauw gekleurd wordt.

Dat deze cellen niet eerder in haren waren aard herkend zijn, moet worden toegeschreven aan de uiterst dunne en doorschijnende wanden, die slechts bij gunstige verlichting en aanzienlijke vergrooting eenige teekening vertoonen. Zelfs nadat ik bij Dracaena de gittercellen had leeren kennen, heb ik bij Yucca aloefolia, bij Cordyline australis, en bij Asparagus officinalis (de beide eersten in droogen, de laatste plant in verschen toestand) de overeenkomstige cellen wel teruggevonden, maar het is mij nog niet gelukt, de Gitter duidelijk te zien, hoewel de cellen voor die van Dracaena in grootte niet onderdoen. Ik aarzel echter niet om ook bij die planten, althans bij de twee eersten, de genoemde dunwandige cellen als gittercellen en niet als cambium te beschouwen. Welligt dat een nader onderzoek van de as der Monocotyledonen leeren zal, dat die celvormen algemeener voorkomen en van gewigtiger beteekenis zijn dan men gewoonlijk vermoedt *. Trouwens het blijvend aanwezig zijn

* Na het eindigen van mijn onderzoek bespeur ik toevallig, dat v. MOHL (*Bot. Zeit.* 1855, p. 895) bij Asparagus officinalis en bij Tamus Elephantipes in de vaatbundels reeds dezelfde soort van cellen heeft gevonden, en aan het vermeende cambium van den Monocotyledonen vaatbundel dezelfde duiding als boven heeft gegeven. Ik maak dus op prioriteit geen aanspraak, waar ik dat cambium met de dunwandige lagen van het liber der Dicotyledonen parallelliseer, maar ik heb het vroeger geschrevene onveranderd gelaten, omdat ik geheel onafhankelijk van v. MOHL, tot dezelfde

van cambium, dat geene cellen meer vormt, en op eene plaats waar geen celgroei meer kan plaats hebben, zoo als binnen in den volwassen monocot. vaatbundel, komt mij zeer onwaarschijnlijk voor. SCHACHT, die erkent, dat dit weefsel geene cellen meer voortbrengt, maar het toch nog cambium blijft noemen (*Anat. und Phys.*, II, p. 45), beweert, dat het gewis dient voor den sapstroom, die volgens v. MOHL in den vaatbundel opstijgt en elders afdaalt. Het is mogelijk dat de genoemde cellen bijzondere diensten verrigten om de sappen in de plant te doen opstijgen, maar het tegendeel is evenzeer mogelijk. Bij den tegenwoordigen staat onzer kennis hebben wij, naar ik meen, geen regt, om hierin stellige uitspraak te doen. Alleen maak ik de opmerking, dat indien deze gittercellen het sap moesten opvoeren, zij hier de tegenovergestelde verrigting zouden moeten vervullen als in de Dicotyledonen, alwaar diezelfde gedeelten, volgens v. MOHL en anderen, juist voor den zoogenoemden nederdalenden stroom moeten dienen.

Doch keeren wij tot Dracaena terug.

De geschetste vaatbundels zijn niet over hunnen geheelen loop gelijk van zamenstelling. In het midden van den stam meer ontwikkeld, schijnen zij, waar zij zich naar buiten ombuigen, eenvoudiger van maaksel te zijn. UNGER heeft dit beschreven en afgebeeld (*l. l.* Pl. III, fig. 11—16), hoewel zijne figuur 11, die den vaatbundel uit het centrum moet voorstellen, niet juist is. Hij heeft in zijne teekening slechts dikwandige prosenchymcellen aangegeven, terwijl in werkelijkheid daar niet alleen bastcellen, maar ook vaten en houtcellen aanwezig zijn. Zie onze fig. 1, Pl. III.

De tot nu toe beschouwde celvormen maken slechts een gedeelte van de as uit. De bundels, in het midden spaarzamer verdeeld en in vele rigtingen elkander kruisende, worden digter opeengehoopt en meer evenwijdig aan elkander, naarmate men meer den omtrek nadert. Steeds blijven zij echter van elkander gescheiden door parenchymcellen, waarvan de wanden op bovengenoemde wijzen geteekend zijn en waartusschen zich een aantal cellen bevindt met een bundel raphiden bijna geheel gevuld. Deze kristallen treft men aan in alle deelen der plant, maar vooral zijn zij opgehoopt in de schors

---

besluiten ben gekomen. Deze eenstemmigheid met de uitkomsten van den grooten plantenphysioloog geeft mij grooten steun voor de juistheid mijner zienswijze. Misschien kan mijn onderzoek in het oog van anderen ook eene kleine bijdrage geven tot bevestiging van hetgeen v. MOHL heeft betoogd.

en in de ovaria. Hunne plaatsing is echter niet regelmatig in twee rijen langs den vaatbundel, zoo als Mirbel dit afbeeldt (*Ann. des Sc. nat.* 3e Sér. III, Pl. 15. fig. V, *d*), gelijk over het geheel zijne anatomische afbeeldingen van Draco veel te wenschen overlaten.

Onderzoekt men nu het overige deel van den houtring van Dracaena, dan vindt men daarin een groot aantal vaatbundels, die een slingerend verloop hebben (hoewel allen in de rigting der lengteas van de plant zich uitbreiden), die zich veelvuldig vertakken en slechts door zeer smalle strooken parenchym van elkander gescheiden zijn, zoodat op eene tangentiale overlangsche doorsnede het hout van Dracaena bij geringe vergrooting veel overeenkomst heeft met eene Dicotyledonen houtsoort met breede en groote mergstralen. Het parenchym is daar ook in de rigting van den radius uitgerekt, of, wil men liever, in peripherische rigting zamengedrukt, doch bestaat overigens uit dezelfde soort van cellen als meer inwendig in den stam. Men ziet die cellen afgebeeld in Pl. III, fig. 3 en 4. Voor de verspreiding der vaatbundels en hun slingerend verloop zou ik kunnen verwijzen naar de afbeelding bij Schacht (*Anat. und Phys.*, II, p. 41, fig. 105), met dien verstande dat men zich de vaatbundels veel digter opeengehoopt moet denken dan aldaar op de dwars-doorsnede voorgesteld is, terwijl bovendien de dwars hierdoor loopende centrale vaatbundels ontbreken. Voor onzen Dracaena-stam vindt men dit afgebeeld Pl. V, fig. 3 en 4. In fig. 3 de dwars-doorsnede, in fig. 4 het voorkomen bij overl. tangentiale snede. Hier bespeurt men ook duidelijk, hoe de centrale vaatbundels *v* door de mazen van het net der peripherische bundels loopen, zonder, zoover ik kan nagaan, met deze in gemeenschap te komen.

Die vaatbundels zelve echter zijn geheel anders gevormd dan de tot boven beschouwde, zoo als Schacht reeds met een enkel woord heeft opgemerkt (*l. l.*). Niet alleen zijn zij op de dwars-doorsnede elliptisch, terwijl die uit het binnenste van den stam cirkelrond waren, zij bestaan ook uit andere zamenstellende deelen, gelijk men reeds aanstonds zien kan, wanneer men op Pl. III, fig. 3 vergelijkt met fig. 1.

De bastbundels zijn verdwenen en evenzoo de spiraal- en gestippelde vaten. In de plaats daarvan ziet men den vaatbundel bijna geheel gevormd uit zeer groote en zeer dikwandige prosenchymcellen, die, op de wijze der houtcellen van Coniferen en Cycadeën, het midden houden tusschen vaten en prosenchymcellen en evenzoo als die der laatstgenoemden met groote spleetvormige hofstippels bedekt zijn. De genoemde spleetvormige stippels zijn tamelijk regelmatig geplaatst in spiralen om den omtrek en loopen over den geheelen wand in dezelfde rigting, zoodat zij even als de spleetstippels der vaten elkander kruisen, waar twee wanden in de snede boven elkander liggen. Deze groote houtcellen met hare merkwaardige teekeningen ziet men afgebeeld op Pl. III, fig. 4. Omtrent den waren aard dier hofstippels is lang strijd gevoerd en nog is men het daaromtrent niet eens. Zelfs in de jongste maanden zijn daarover nog stukken verschenen, die eene gewijzigde beschouwing van den aard en het ontstaan der hofstippels doen kennen. Het is hier de plaats niet, om een historisch overzigt te geven van de verschillende meeningen over de hofstippels, in vroeger en later tijd bekend gemaakt, en de titels daarvan te waarderen. Maar eenige opmerkingen over de jongste onderzoekingen mogen hier eene plaats vinden, te meer omdat het mikroskopisch en chemisch onderzoek der genoemde vaatbundels van Dracaena Draco mij bijzonderheden heeft doen kennen, die in vele opzigten afwijken van hetgeen men gewoonlijk heeft gevonden.

Gelijk bekend is, ontstaat volgens v. Mohl de hof door het plaatselijk uiteenwijken van den primairen wand van twee aangrenzende cellen, waardoor zich eene lensvormige ruimte vormt, die later met lucht gevuld is. Op deze ruimte loopt door de verdikkingslagen van elke der aangrenzende cellen een stippelkanaal uit. Beide kanalen staan echter niet in open gemeenschap met elkander of met de lensvormige ruimte, maar blijven van deze en van elkander door den primairen celwand gescheiden. Geheel verschillend van deze voorstelling is die van Hartig en van Schacht, die beide meenen, dat de hofstippel nog met een eigen vlies (volgens Schacht uit zuivere cellulose bestaande) bekleed is (Schacht, *Anat. und Phys.*, I, 225). In een later opstel heeft Schacht zijne meening in zoo verre gewijzigd (*Bot. Zeit.* 1859, p. 238, en uitvoeriger *Ann. d. Sc. Nat.*), dat hij de hofstippels houdt voor poriën met een verbreeden grond. Aanvankelijk zijn de poriën der aangrenzende cellen gesloten door een afscheidenden wand, die echter verdwijnt, zoodra de cellen sap verliezen, zoodat de hofstippels in ontwikkelden toestand van de gewone stippels slechts daardoor onderscheiden zijn, dat de eersten in onmiddellijke verbinding staan, terwijl de laatsten door de primaire wanden der cellen vaneen gescheiden blijven. Zijne meening aangaande het bekleed zijn van den hof door een vliesje van cellulose heeft hij echter niet herroepen.

In de jongste maanden nu heeft Sanio (*Bot. Zeit.* 1 Junij, 1860. p. 193) een nieuw onderzoek van de hofstippels bekend gemaakt, dat met de laatste uitkomsten van SCHACHT in sommige opzigten overeenstemt, maar in andere daarvan afwijkt. Hij komt tot het besluit, dat de hofstippel ontstaat door partiëel uiteenwijken der primaire celwanden en dat de hierdoor ontstane holte den hof vormt; dat verder op dezen hof door de verdikkingslagen heen van weêrszijde een kanaal van trechtervormige gedaante uitloopt. Aanvankelijk is dit kanaal van den hof gescheiden door den primairen wand der aangrenzende cellen, maar na volkomen ontwikkeling der cel verdwijnt deze afsluiting en het stippelkanaal mondt onmiddellijk in den hof uit, zoodat de aangrenzende cellen met elkander in open gemeenschap staan.

In hoeverre deze besluiten juist zijn, zullen wij voor het oogenblik daarlaten, maar al nemen wij dit aan, dan blijft toch SANIO's voorstelling van het ontstaan van den hof onnaauwkeurig en in strijd met erkende physiologische begrippen.

In de ruimte der hofstippels is, zegt SANIO, aanvankelijk geene lucht, maar eene waterige vloeistof, en als bewijs hiervoor noemt hij in alcohol bewaarde jonge scheuten. Maar immers alcohol jaagt alle lucht uit de weefsels en wordt zelfs bij mikroskopisch onderzoek opzettelijk daartoe gebezigd? Ook zoo er lucht in de hofstippels ware, zou die door den alcohol verdreven zijn, zoodat dit niet als bewijs kan aangenomen worden.

Dat vocht, beweert SANIO verder, moet, aangezien de wanden der cellen vroeger eng aaneensloten, uit de houtcellen daarin gekomen zijn. Het kan niet door het stippelkanaal zijn ingetreden, hetgeen toen nog niet bestond. Evenmin is osmose daarvan de oorzaak, dewijl bij vorming van den hof door uiteenwijking van de wanden het osmoserende vocht daarbinnen ontbreekt. Het vocht moet dus uit de omringende cellen door hare wanden heen *ingeperst* (hineingepresst) zijn. De oorzaak hiervan zoekt SANIO in den bijzonderen groei der wanden ter plaatse van den hofstippel. Hij neemt aan, dat de primaire wanden op die plaatsen door intussusceptie meer groeijen dan elders, en hieruit leidt hij af, dat zij, om ruimte te vinden, uiteenwijken en naar binnen buigen moeten, waardoor de hof gevormd wordt. Zal nu in dezen hof geen luchtledig ontstaan, dan moet door de gevormde drukking het celvocht der naburige cellen door de wanden heen in den hof ingeperst worden.

Tegen deze voorstelling van SANIO heb ik groote bezwaren. Vooreerst volgt uit het aannemen van een partiëlen groei ter plaatse van den toekomstigen hof nog niet, dat de celwanden van twee aangrenzende cellen zullen vaneenwijken. Zij kunnen dan aan elkander gehecht blijven en een eenigzins bogtig verloop nemen, gelijk men dit veelvuldig ziet bij de celwanden der epidermis, terwijl mij daarentegen van dat vermeende uiteenwijken geen voorbeeld bekend is. Ten anderen kan ik niet aannemen, dat zich tusschen de weeke, buigzame en doordringbare vliezen eene luchtledige ruimte zoude vormen, waarin het vocht van buiten ingeperst moest worden.

Immers de ervaring leert, gelijk ook Sanio erkent, dat in zeer jeugdige cellen reeds de hof te zien is. De wanden zijn dan nog uiterst teeder en in plaats van onder vorming van een luchtledig vaneen te wijken, moeten zij veeleer tegen elkander aaneengedrukt worden of anders scheuren, wanneer er aanzienlijke drukking van buiten is.

Wil men onderstellen, dat de hof aanvankelijk gevormd wordt door het uiteenwijken der primaire celwanden, op welke wijze dan ook ontstaan, dan is het veel waarschijnlijker en veel meer in overeenstemming met gezonde begrippen van physiologie om aan te nemen, dat het celvocht, wanneer het osmotisch den jeugdigen wand doordringt, ook voor een klein gedeelte zich verzamelt tusschen de wanden van twee aangrenzende cellen, zoodra die wanden niet innig aaneengehecht zijn. Gaat men van deze onderstelling uit, dan laat het zich begrijpen, dat de celwanden, daar zij reeds door vocht gescheiden zijn, bij partiëlen groei nog meer uiteenwijken, terwijl, zoo lang het vocht in den hof blijft, de groei van den wand daar ter plaatse verzekerd is. Bovendien kan dit vaneenwijken der primaire celwanden ook nog bevorderd worden, wanneer door osmose meer vocht tusschen beide wordt gebragt.

Dit zijn, naar ik meen, de gevolgtrekkingen, die uit de resultaten van Sanio kunnen opgemaakt worden, maar zij geven geen regt tot de onwaarschijnlijke en stellig onjuiste voorstelling van de inpersing van sap in eene ledige ruimte.

Dat echter die besluiten zelve nog niet algemeen als waar worden erkend, blijkt uit een uitvoerig opstel over de hofstippels in October 1860 verschenen (*Bot. Zeit.* 1860, N°. 41, S. 329—336), waarin eene geheel andere voorstelling wordt gehuldigd. Dippel (uit Idar), de schrijver dezer verhandeling, heeft zijne onderzoekingen vooral verrigt op hout en wortel van Pinus sylvestris, alwaar, gelijk men weet, de hofstippels zoo bijzonder groot zijn. Maar behalve dit heeft hij zijne uitkomsten ook getoetst aan hetgeen het onderzoek van andere Coniferen en van de vaten van loofhouten hem leerde. Hij laat nu de oude meening van v. MOHL omtrent het vaneenwijken der primaire wanden bij het ontstaan der hofstippels geheel varen en komt tot de volgende voorstelling, die ik hier, gedeeltelijk met zijne eigene woorden, mededeel: »De hofstippel is eigenlijk een stippel met verwijde basis en ontstaat door plooijing (Einfaltung) van den primairen celwand." In den radialen wand van twee aangrenzende jonge houtcellen van Pinus sylvestris wordt eene kleine ringvormige verhevenheid gevormd door plooijing van het primaire vlies, zoodat in de houtcellen twee aan elkander grenzende, maar door de beide primaire wanden geheel gescheiden lensvormige ruimten ontstaan. Aanvankelijk is deze plooijing gering, maar bij den verderen groei van den hofstippel wordt de ring, waardoor die lensvormige ruimte met het lumen der cel in open gemeenschap staat, steeds kleiner, deels door uitgroeijing dier plooijen zelve (durch sogenanntes Spitsenwachsthum), deels door afzetting der verdikkingslagen, die allengs in de cel ontstaan en die, gelijk bekend is, zich nimmer over den Tüpfel uitstrekken.

Oorspronkelijk is dus de hofstippel altijd gehalveerd door de doorloopende innig verbonden primaire wanden, zoodat de doorgesneden hofstippel de gedaante vertoont als in figuur 14, (Pl. IV). (Namelijk *a* in jeugdigen toestand, *b* ouder en juist door het midden gesneden, *c* niet midden door den hofstippel gesneden). Maar zoodra de cellen lucht gaan bevatten, worden de primaire wanden in den stippel geresorbeerd en de cellen treden in open gemeenschap met elkander. Men verkrijgt dan de open hofstippels (fig. 14. *d*.). Daarentegen blijven die tusschenwanden bestaan bij alle cellen, die met vocht gevuld blijven; hier zijn de hofstippels steeds gesloten.

Gelijk men ziet, is de voorstelling van DIPPEL geheel verschillend van die van SANIO en van de vroegere waarnemers, met uitzondering van SCHACHT. Met SANIO komt hij eigenlijk slechts hierin overeen, dat beiden beweren, dat de hofstippels in de luchtvoerende cellen geheel open zijn. Alvorens nu de genoemde uitkomsten nader te beschouwen, voeg ik aan het bovenstaande nog toe de voorstelling van TH. HARTIG, zoo als hij die heeft bekend gemaakt (nog later dan DIPPEL's verhandeling) in de jongste (10de) door hem bezorgde uitgaaf van het *Lehrbuch für Förster* van zijnen vader Dr. G. L. HARTIG. Al zijn in dit nieuwste stuk geene nieuwe opzettelijke onderzoekingen over de hofstippels bekend gemaakt, wij mogen het echter niet met stilzwijgen voorbijgaan, daar HARTIG hier beknoptelijk het resultaat zijner onderzoekingen mededeelt. En al zijn HARTIG's uitkomsten ook veelal afwijkend van hetgeen andere waarnemers vinden en ten gevolge zijner eigen omslagtige terminologie moeijelijk verstaanbaar en algemeen weinig gewaardeerd, hij is een te goed waarnemer, dan dat wij ook niet rekenschap zouden houden van hetgeen hij meent gevonden te hebben. Hartig onderscheidt alle soorten van stippels in gelijkvormige en ongelijkvormige (l. l. p. 248), al naarmate de tot twee aangrenzende celwanden behoorende stippelkanalen gelijk of ongelijk zijn. Tot de laatste afdeeling brengt hij de hofstippels der houtcellen van Coniferen en der vaten van de loofhouten, welke hij *linsenförmige Tipfelung* noemt. Het stippelkanaal verwijdt zich hier naar buiten tot eene lensvormige ruimte, waarvan de buitenhelft buiten den omtrek der cel uitsteekt, terwijl het corresponderende stippelkanaal van de aangrenzende cel als een cilinder op het midden der lensvormige ruimte staat. De lensvormige ruimte is dus aan ééne zijde geopend, aan de andere zijde gesloten, waarvan men zich overtuigen kan, zoo men eene niet al te dunne tangentiale snede van droog dennenhout, met terpentijn-olie bevochtigd, onder het mikroskoop plaatst. Men ziet dan, zegt Hartig, steeds de lucht in de lensvormige ruimte aan den eenen kant in open gemeenschap met den cel-inhoud, aan den anderen kant van de aangrenzende cel afgesloten (zie Pl. IV, fig. 15).

Overigens neemt Hartig (in overeenstemming met de oudere waarnemers) aan, dat niettegenstaande de verdikkingslagen ter plaatse der stippels ontbreken, de cellen toch overal een gesloten geheel vormen, zoodat het vlies dat de stippelkanalen der aangrenzende cellen vaneen scheidt, niet schijnt geresorbeerd te worden, dan alleen in enkele gevallen (zoo als bij de cellen van de bladen der Mossen en bij de dwarswanden van de vaten der loofhouten), alwaar dit gemakkelijk te herkennen is.

Met geene der genoemde voorstellingen aangaande de hofstippels nu komt hetgeen ik bij Dracaena Draco gezien heb geheel overeen, en hoewel men uit één voorbeeld niet tot het geheel mag besluiten, zoo geloof ik echter, dat de juiste kennis van den toestand, die bij Dracaena voorkomt, licht kan verspreiden over de houtstructuur van de meeste andere boomachtige Liliaceën. Althans bij Yucca aloëfolia, bij Cordyline australis en Dracaena paniculata heb ik dezelfde structuur terug gevonden, hoewel nergens zoo duidelijk ontwikkeld, nergens met zoo groote elementairorganen en met zoo scherp geteekende stippels als bij Dr. Draco. Voor de kennis der hofstippels bieden deze Liliaceën nog dit voordeel, dat niet, als bij de Coniferen en Cycadeën, de groote hofstippels slechts aan bepaalde zijden der cel en in één vlak worden aangetroffen, maar aan alle kanten voorkomen, zoo als men ziet op de dwarsdoorsnede Pl. III, fig. 3. Dientengevolge heeft men bij éène tangentiale of radiale doorsnede gelegenheid, om de hofstippels niet alleen van boven op en in dwars-doorsnede maar ook in alle tusschenrigtingen te zien, zoo als de overlangsche doorsnede van een der uitwendige bundels Pl. III, fig. 4 reeds de hofstippels in onderscheidene rigtingen vertoont.

Beschouwt men ze naauwkeurig op de doorsnede, dan ziet men steeds eene lensvormige ruimte, aan alle zijden door eene scherpe lijn begrensd, en twee kanalen door de verdikkingslagen naar het midden dier ruimte toeloopende. Die kanalen vertoonen zich breed op de overlangsche, smal op de dwarsdoorsnede van den stam, omdat zij spleetvormig zijn met de spleet in dezelfde rigting. Onder de honderden hofstippels, die ik van Dr. D. gezien heb, vond ik echter nooit een enkelen, die mij eene open doorloopende ruimte tusschen de twee aangrenzende cellen vertoonde. Steeds waren de stippelkanalen van den hof door een duidelijk zigtbaar vlies afgescheiden. Dit deed mij twijfelen aan de juistheid der voorstelling van Sanio, wat betreft de Dracaeneën. Die twijfel werd door de aanwending van scheikundige reagentiën bevestigd.

Wanneer men de doorsneden met ClZnIdkId behandelt, wordt alles geel gekleurd, de verdikkingslagen worden bruiner dan de wanden der parenchymcellen, maar overigens ziet men niets anders dan bij de in water of in glycerine gelegde snede.

Zoo men echter de doorsneden eerst kookt in matig sterk NO^5, of ze daarin bij de gewone temperatuur één à twee dagen laat liggen, en daarna met ClZnIdkId behandelt, dan worden bij de dikwandige cellen der laatstgenoemde vaatbundels al de verdikkingslagen zuiver blaauw gekleurd, met uitzondering van het binnenste vliesje, dat als een uiterst dun geel streepje den blaauwen wand begrenst, waar men dezen in doorsnede ziet; van boven op gezien, is het echter te dun om de blaauwe tint van het overige merkbaar te wijzigen. Behalve dit vliesje wordt evenzoo de primaire celwand der cel geel gekleurd (zie Pl. IV, fig. 8), maar dit membraantje is nog dunner en dus nog bleeker gekleurd dan het interne vlies. Ter plaatse waar zich de hofstippels bevinden, is dit echter anders. Daar schijnt het vlies aanmerkelijk dikker te zijn en wordt nu ook hooggeel. Van boven op gezien vertoont zich de celwand als in fig. 5, Pl. IV is afgebeeld. In den blaauw gekleurden wand zijn even zoo veel ronde gele gedeelten als er hofstippels zijn.

Vooral duidelijk is dit aan de grens der snede, zoo als de fig. aanwijst, die geheel naar de natuur geteekend is. De gele gedeelten (d z. de plaatsen van het primaire vlies door den hof ingenomen) ziet men hier en daar van den secundairen wand afgescheiden aan de grens der snede (Pl. IV, fig. 7). Enkele malen zelfs ziet men die stukken van het vlies geheel geïsoleerd als ronde gele schijfjes vrij in het vocht drijven (Pl. IV, fig. 6). Dat echter die ronde schijfjes, schoon los met het primaire membraan zamenhangende en veel dikker dan dit, oorspronkelijk daarmede één geheel gevormd hebben, blijkt uit fig. 6, Pl. IV, alwaar ik heb afgebeeld een stukje van het primaire vlies, nagenoeg ongekleurd en waarin zich de gele schijfjes nog bevonden, zoo als ik dit een paar malen heb gezien. *Dat de stippel gesloten is, bespeurt men hieruit, dat genoemde gele schijfjes, overal waar de secundaire lagen niet daarboven of daaronder geplaatst zijn, zich geheel digt en homogeen vertoonen.* Eerst zoo deze ze geheel of gedeeltelijk bedekken, vertoont zich de spleet. Al moge nu ook waar zijn hetgeen Sanio beweert, dat door de opzwelling der celwanden bij aanwending van zwavelzuur of chloorzink eene kleine opening gesloten wordt, welke in de levende plant geopend is, dan moet toch, vooral zoo de opening eene spleet is geweest, daarvan eenig spoor overblijven, omdat de tot elkander gebragte randen geen homogeen vlies vormen. Bovendien is bij gebruik van chloorzink die opzwelling zoo uiterst gering, dat het voorkomen van het praeparaat in de overige deelen geene verandering ondergaat. Ik kan dus voor Dracaena niet toegeven, dat de hofstippels alleen in jeugdigen toestand gesloten zouden zijn, daar de door mij onderzochte gedeelten tot een reeds tamelijk oud weefsel behooren.

Deze duiding van hetgeen het mikroskoop vertoont, wordt nog bevestigd door hetgeen men bij de dwars-doorsnede van den hofstippel waarneemt (Pl. IV, fig. 8). Een groot voordeel is hierbij, dat ten gevolge der inwerking van NO^5 de dikwandige cellen dikwijls van zelf loslaten van elkander, zoodanig dat de primaire wanden vaneen wijken. Men ziet dan, zoo als fig. 7, Pl. IV ook vertoont, ter plaatse van den hof in de blaauwe verdikkingslagen eene komvormige uitholling aan de buitenzijde, die bedekt is door een hoog geel gekleurd vlies, dat, hoewel tusschen de stippels naauwelijks waarneembaar, over de uitgestrektheid van den hof in doorsnede duidelijke afmeting heeft. Van doorboring van dit gele vlies is nergens een spoor te zien.

Wanneer men let op hetgeen Schacht, Sanio en Dippel aangaande de hofstippels hebben opgeteekend, dan schijnt het van belang, om te constateren, dat de snede juist door het midden van den stippel is gegaan, omdat daar alleen scherp gezien kan worden, of de hofstippel een open kanaal vormt. Men gevoelt echter ligt, dat zoo de stippel gesloten is door een vlies, het voorkomen in geene rigting kan zijn, zoo als DIPPEL dit afbeeldt b. v. Taf. VIII, Fig 2 *f* en 10. Altijd zal men eene lensvormige ruimte door een vlies van alle zijden omgeven zien, en alleen uit de relatieve grootte dier lensvormige ruimte zal men kunnen besluiten of de snede juist het midden van den hofstippel getroffen heeft. Dit heb ik dan ook bij de doorsneden van Dracaena steeds waargenomen en het bevestigt geheel de voorstelling, die men van de genoemde hofstippels verkrijgt, zoo men ze van boven op ziet.

De beschreven bijzonderheden, die ik bij 250malige vergrooting met een OBERHÄUSER's en een NACHET's mikroskoop had waargenomen, heb ik eenige maanden later nog nader kunnen toetsen, toen ik door de goedheid van Dr. MOLEWATER in de gelegenheid was, de hofstippels van Dracaena bij meer dan 1000malige vergrooting door het voortreffelijke mikroskoop van Ross te zien. Ook hier vertoonden zich na behandeling met $N\,O^5$ en ChloorZinkJoodKaliumJodium-oplossing de afsluitende vliezen der hofstippels als ondoorboorde ronde gele gedeelten, zoodra zij niet meer door de blaauw gekleurde verdikkingslagen bedekt waren.

Eindelijk heb ik nog de dunne doorsneden van Dracaena tweemaal 24 uren in een mengsel van alcohol en ether geplaatst en daarna op de gewone wijze met salpeterzuur en ChloorZinkJoodkaliumJodium behandeld, ten einde mij te overtuigen, dat de gevonden gele schijven niet konden bestaan uit een aanvankelijk nog ongekleurd harsachtig afscheidingsprodukt, welligt de grondstof van het welbekende Drakenbloed. Na genoemde behandeling vertoonden zich echter de hofstippels volkomen zoo als boven beschreven is, en de gele schijven vooral waren niets veranderd. Deze reactie bewijst dus dat er geen grond bestaat voor het vermoeden als zou het laagje, dat den hofstippel bekleedt, niet behooren tot den celwand, maar slechts eenig verhard exsudaat of secreet zijn.

Uit al het gezegde meen ik dus te mogen besluiten, dat de hofstippels van Dracaena Draco niet, zoo als de nieuwere onderzoekers bij Dicotyledonen gevonden hebben, eene open gemeenschap tusschen twee aangrenzende cellen vormen, maar dat zij, ook in de oudere weefsels, steeds door een tusschenwand gesloten blijven.

Dit groote verschil in uitkomst met hetgeen SANIO en DIPPEL en anderen in den jongsten tijd bij Coniferen en andere Dicotyledonen gevonden hebben, heeft mij aanleiding gegeven, om ook de hofstippels van Pinus silvestris een weinig nader te onderzoeken, ten einde te zien, in hoeverre deze met die van Dracaena overeenkomen. Ik heb daarbij het volgende gevonden:

De bewering van SANIO l.l. S. 194, dat men op overlangsche doorsneden van zeer jonge houtcellen van Pinus silvestris duidelijk zien kan, dat de stippel met een vlies bekleed is, heb ik bevestigd gevonden. Tevens is dan de inhoud van de ruimte in den hof niet lucht, maar een vocht, dat met Iodium, vooral met bi-Joduretum Zinci bruin en fijnkorrelig wordt. Weldra echter, soms reeds in de 2de of 3de cellenrij van het Cambium afgerekend, is het stippelkanaal open, en men ziet op overlangsche doorsneden dan den hofstippel als in Fig. 2, Taf. VI van SANIO's verhandeling.

Wordt de hofstippel schuins doorgesneden, dan ziet men den stippel als twee kringen, die elkander gedeeltelijk bedekken, maar geen vlies vertoonen. Op de dwars-doorsnede ziet men nu en dan, gelijk SANIO en DIPPEL beide aangeven, den hof bij Pinus geheel geopend, zoodat ik met beide schrijvers geloof te kunnen aannemen, dat in de volwassen en niet meer vocht voerende houtcellen van Pinus silvestris de hofstippels ware openingen vormen, waardoor de eene cel in onmiddellijke gemeenschap met de andere staat. Geheel in overeenstemming met de uitkomsten van beide schrijvers heb ik ook waargenomen, dat bij dwars-doorsneden van dennenhout, overal waar de snede gedeeltelijk den stippel, gedeeltelijk den hof heeft blootgelegd, het den hofstippel begrenzende vlies niet onafgebroken voortgaat, maar zich vertoont als door SANIO (Taf. VI. fig. 7) en DIPPEL (Taf. VIII, fig. 3—6) is afgebeeld.

SCHACHT heeft beweerd, dat scheikundige reagentiën den hof blaauw kleuren. Dit heb ik echter evenmin als SANIO bevestigd gezien, doch ik ben het met beide schrijvers eens, dat bij de verkleuring door Iodium teweeg gebragt, de stippel zelf ongekleurd blijft, hetgeen dus een nader bewijs is voor het open zijn dezer gedeelten. Vooral bij de aanwending van ClZnIdKId na voorafgaande behandeling met NO^5 ziet men groot verschil tusschen de hofstippels van Pinus en van Dracaena.

Het zoude mij te ver van mijn eigenlijk onderwerp afleiden, zoo ik trachten wilde, den strijd tusschen SANIO en DIPPEL over de wijze van ontstaan van den hofstippel bij Pinus en andere Dicotyledonen op te lossen, te meer daar welligt de gevonden verklaring bij het groote verschil tusschen de hofstippels van Pinus en van Dracaena, niet geheel op de laatste van toepassing zou kunnen zijn.

Alleen nog ééne opmerking. Sanio bestrijdt (l.l. S. 197) de meening van Schacht, dat de hofstippels eigenlijk niets anders zijn dan stippels met verwijden grond, die, aanvankelijk als andere stippels door de primaire wanden der aangrenzende cellen van elkander gescheiden, later door het verdwijnen van deze wanden in open gemeenschap met elkander komen. Sanio beweert teregt, dat wanneer dit zoo ware, men bij jonge houtcellen eerst grootere en allengs kleinere kringen in den hof zou moeten zien, doch hij heeft altijd in den hof slechts den kleinen kring van den stippel kunnen ontdekken van dezelfde grootte als later in de volwassen cellen. Met deze uitkomst is echter mijne ervaring in strijd. Ik heb bij de jongste houtcellen herhaaldelijk den stippel gezien als een ring in den hof geplaatst, en veel grooter dan later bij de volwassen cellen. En dit resultaat, vóór de verschijning van Dippel's opstel verkregen, is door zijn onderzoek geheel bevestigd, zoodat ik niet beter kan doen dan naar zijne figuren 14 en 16 (Taf. VIII) te verwijzen, die den toestand bij het Cambium van Pinus silvestris geheel naar waarheid uitdrukken. Het argument door Sanio tegen Schacht aangevoerd, vervalt dus hierdoor.

Keeren wij na deze uitweiding tot de beschrijving van Dracaena Draco terug.

Behalve de genoemde dikwandige groote prosenchymcellen, die het midden houden tusschen vaten en cellen, bevatten deze vaatbundels enkele kleinere cellen, overeenkomende met de houtcellen der vaatbundels van het centrum, en verder ééne of meer groepen gittercellen. Deze laatsten zijn steeds in het midden tusschen de dikwandige cellen geplaatst en komen overigens met de gittercellen der centrale vaatbundels geheel overeen. Bij de kleinere vaatbundels vindt men slechts ééne groep gittercellen, maar bij de grooteren (die hoewel op de dwars-doorsnede nog één afgesloten geheel uitmakende, echter waarschijnlijk den aanvang vormen van eene vertakking van die vaatbundels) zijn er twee of drie op een afstand van elkander staande.

De loop dezer vaatbundels (want ik behoud voor hen dezen naam, hoewel het eigenlijk cellen zijn, waaruit zij bestaan) is afwijkend van dien der straks genoemden, zij vertakken zich veelvuldig zoowel in radiale als in tangentiale rigting, doch op de dwarssnede van den stam breiden zij zich slechts over een smallen ring uit. Zij vormen nagenoeg de hoofdmassa van den zoogenoemden houtring, dat is van het digte, vaste weefsel van den Dracaenastam, maar zij buigen zich niet naar binnen, en waar de centrale vaatbundels zich naar buiten ombuigen en de peripherie in radiale rigting doorloopen om naar het blad te gaan, daar blijven zij geheel buiten aanraking met de laatstgenoemde vaatbundels. Men ziet dit terstond wanneer men bij geringe vergrooting eene tangentiale snede van het buitenste gedeelte van den houtring beschouwt. Zie Pl. V, fig. 4.

Schacht vermoedt, dat de vaatbundels der peripherie gevormd worden, nadat de lengtegroei der as heeft opgehouden. Dit vermoeden heeft, geloof ik, veel waarschijnlijkheid. Deze voorstelling kan zich met die, welke ik mij van den groei van Dracaena gevormd heb, goed vereenigen, en men ziet dan ook, gelijk zoo straks nog nader blijken zal, dat de later gevormde vaatbundels, die de as dikker doen worden, alleen uit die der tweede soort bestaan. De centrale vaatbundels, die zich naar buiten ombuigen, houden waarschijnlijk in hunnen groei alleen in zoo verre gelijken tred met de later gevormde peripherische, als zij ook na het afvallen der bladeren met den verdikkingsring in aanraking zijn. Althans bij het oudste door mij onderzochte stuk van Dracaena zag ik die centrale vaatbundels nog buiten aan den houtkrans dwars tusschen de mazen van het net der peripherische te voorschijn komen.

Gaan wij met onze beschouwing van den stam van Dracaena Draco voort, dan naderen wij nu tot den zoogenoemden *verdikkingsring.*

Buiten om den houtring bevindt zich namelijk een krans van cellen, die het vermogen om zich te vermenigvuldigen behouden hebben, een ware Cambiumlaag, in plaats en verrigting overeenkomende met die der Dicotyledonen. Zoo ver die verdikkingslaag zich uitbreidt, zoo ver is voortgaande groei van den stam en vermeerdering van het aantal vaatbundels mogelijk. Over dit gedeelte heeft de Mirbel vreemde zaken verhaald. Hooren wij hem zelf: »L'oeil à l'aide d'un puissant microscope, ne tarde pas à découvrir çà et là »dans la partie la plus excentrique de ce *tissu générateur,* la présence de »très-petits espaces vagues et nébuleux; quelquefois aussi il semble qu'il y »ait eu déformation d'utricules en certaines places où se produisent et s'ac»cumulent confusément des phytospermes d'une extrême minceur. A ce chaos »microscopique succèdent bientôt l'ordre et la symétrie. Les phytospermes »se meuvent, s'agitent, se rencontrent, s'ajustent ensemble, comme s'ils étaient

»animés, et si je l'ose dire, bâtissent en commun des utricules régulières, »qui ne diffèrent de celles qu'on voit ordinairement que parce que leurs pa»rois sont mamelonnées." (*Ann. des Sc. Nat. l. l. p.* 331). Die zich bewegende phytospermes, waarschijnlijk in het leven geroepen door den gebrekkigen toestand van DE MIRBEL's mikroskoop, zou de beroemde schrijver thans zelf niet meer aannemen. Zij zijn toch niet anders dan zeer jonge en kleine vaatbundels, die zich beginnen te vormen tegen den bestaanden krans aan. Zij vormen zich, zoo als SCHACHT heeft beweerd, uit de reeds bestaande vaatbundels, die tegen de verdikkingslaag aanliggen, door *vertakking*, want zij blijven steeds door parenchym van elkander afgescheiden en kunnen dus niet als bij de Dicotyledonen een onmiddellijk vervolg of liever een integrerend deel van den bestaanden vaatbundelkrans uitmaken. In hoeverre deze voorstelling van SCHACHT in bijzonderheden juist is, kan ik voor Dracaena Draco niet beslissen, aangezien het ter mijner beschikking gestelde stuk behoorde tot een reeds eenigen tijd overleden boom, waardoor dit gedeelte niet meer gezond genoeg was, om daarop resultaten te bouwen. Trouwens dit ontstaan van nieuwe vaatbundels, aanvankelijk met kleine, dunwandige cellen, onmiddellijk buiten den bestaanden houtring en van de aangrenzende vaatbundels steeds door een laag parenchym afgescheiden, heeft reeds UNGER l. l. aangetoond. Hij noemt die parenchymlagen, die vooral in de rigting van den straal duidelijk zijn, *mergstralen*, aldus wijzende op analogie met den Dicotyledonenstam.

Buiten den Cambiumring ligt bij den boom *de schors*. Ook bij Dr. Draco is dit het geval, maar gelijk bij alle andere Monocotyledonen is dit gedeelte hier zeer weinig ontwikkeld. Het bestaat uit dunwandig parenchymweefsel, waartusschen een groot aantal cellen met raphiden gevuld en uitwendig door kurkweefsel begrensd, zoo als wij in figg. 12 en 13, Pl. IV afgebeeld zien. De kurklaag is gevormd uit polyedrische, groote, dikwandige cellen, die, gelijk overal, van buiten afsterven en inwendig aangroeijen door celverdeeling ten gevolge van tangentiale tusschenschotten.

Waar de inhoud dezer cellen niet geheel verdwenen is, vindt men daarin een grooter of kleiner aantal niet of gewoonlijk ligt geel gekleurde oliedroppels (Pl. IV. fig. 12, *o*), die aanleiding geven tot de roode stukken hars, hier en daar in het kurkweefsel voorkomende (fig. 12, *h*).

In onderscheidene Liliaceën, zoo als b. v. bij Yucca, vindt men in de schors afzonderlijke bastbundels uit groepen sterk verdikte bastcellen bestaande, deze ontbreken echter bij Dr. Draco. Daarentegen is de kurklaag zelve zelden zoo magtig als bij Dracaena, zoo als ook Schacht heeft opgemerkt. Dit ziet men echter eerst bij stammen van zekeren leeftijd. De jongere stammen, of bij de ouderen de bovenste (d. i. de jongste) gedeelten, zijn met de bases der bladeren bedekt, waarvan de indrukken, ook na het afvallen van deze, een geruimen tijd zigtbaar blijven.

Het uitwendig voorkomen van den stam is boven beschreven en er blijft dus alleen over, nog melding te maken van het merkwaardige produkt van onzen boom, waaraan hij zijnen naam verschuldigd is en dat vroeger ook in de geneeskunde werd aangewend; namelijk van de *bloedroode hars,* die op bepaalde plaatsen uit den stam te voorschijn komt.

De bruinroode indruk, dien het blad achterlaat, wordt allengs smaller en minder rood, terwijl het kurkweefsel der schors meer lederachtig wordt. Eindelijk blijven er alleen twee zeer fijne strepen over, die elk een halven cirkelomtrek vormend, en aan de uiteinden zamenvallend, maar in het midden ongeveer een duim uiteenwijkend, juist den omtrek der aanhechting van het vroegere blad aangeven. Ter plaatse nu, waar de bladsteel, indien deze ontwikkeld ware, zich bevonden zou hebben (nam. in het midden der bovenste lijn), ziet men de bruine streep aanzienlijk breeder en donkerder gekleurd, en in het midden van deze bruine vlek komt één groote vaatbundel te voorschijn.

Onder deze bruine vlek heeft na korter of langer tijd afscheiding plaats van eene bloedroode hars, die allengs verhardt en nu tusschen schors en kurk, of tusschen de onderscheidene kurklagen eene laag vormt van zeer verschillende dikte. Scheurt de kurklaag open, dan schijnt de afscheiding veel overvloediger te zijn, en wanneer het parenchymweefsel der schors verloren is gegaan, schijnen ook de buitenste lagen van den houtring die stof te kunnen voortbrengen. Zoo plagt men, door insnijdingen in den stam, uit Dr. Draco eene ruime hoeveelheid hars of zoogenaamd drakenbloed (sanguis Draconis) te verkrijgen, dat vanwege zijne scherpe bitterheid geneeskundig gebruik had gevonden. Thans zijn echter, gelijk bekend is, Calamus Draco en Calamus Rotang voor Dracaena in de plaats getreden en de boom, die geene winstgevende produkten meer afwerpt, wordt ook in zijn vaderland hoe langer hoe schaarscher.

De roode hars vertoont onder het mikroskoop eene bladachtige, amorphe structuur. Zij schijnt voor den boom een afscheidingsprodukt te zijn, dat niet alleen in ziekelijken of gewonden, maar ook in normalen toestand geregeld wordt gevormd. Het Drakenbloed staat in innig verband met de kleurlooze oliedroppels, die men in het kurkweefsel en in de overige schors aantreft. Wij zullen dit bij de bladeren bevestigd zien. Nergens echter ziet men dit duidelijker, dan juist aan die plaatsen, waar ook de buitenste vaatbundels van den houtring aan de bereiding van het Drakenbloed deelnemen, om dan allengs zelve onder te gaan.

De dikwandige prosenchymcellen met hare merkwaardige hofstippels, welke, zoo als wij zagen, de hoofdmassa dier zoogenaamde vaatbundels uitmaken, schijnen dan vooral de dragers dezer hars te zijn. De inhoud dezer cellen, die anders ontbreekt of althans volkomen kleurloos en doorschijnend is, wordt dan gevormd door eene ligt bruin-gele stof, aanvankelijk in fijne korrels daarin opgehoopt, zoodat zij op de overl. doorsnede veel overeenkomst hebben met de melksapvaten van uitheemsche Euphorbia's, waarin het melkvocht gecoaguleerd is. Weldra echter ziet men (hetzij als secundairen, hetzij als primairen toestand) den inhoud geheel ingenomen door eene glasheldere gele vloeistof, die in alle stippelkanalen indringt, en bij het verdroogen van den stam tot eene glasachtige hars schijnt te verharden. Komt men in een meer naar buiten gelegen vaatbundel, dan bespeurt men, dat deze stof meer en meer eene roode tint aanneemt en de stippelkanalen en den hof rood kleurt. Allengs wordt de geheele wand daarmede doordrongen, hetgeen echter eerst later geschiedt, zoodat men de wanden nog geel gekleurd ziet als de inhoud reeds rood is. Langzamerhand worden nu wand en inhoud bloedrood en hiermede schijnt ook het leven in deze deelen te hebben opgehouden; de afzonderlijke cellen, hoewel haar vorm bewarende, wijken vaneen en laten los. Eindelijk mengen hunne meer en meer vergane overblijfselen zich met de grootere stukken donkerbloedroode, tot bijna zwarte hars, die aan de oppervlakte in overvloed voorkomt.

De fijnkorrelige structuur der hars schijnt echter ook een blijvende toestand te kunnen zijn, althans nevens de dikwandige cellen met roode heldere, vroeger opgeloste hars gevuld, vindt men anderen, waar eene donkerroode fijnkorrelige maar geagglomereerde stof den inhoud geheel of grootendeels inneemt.

Terwijl dit proces in de vaatbundels plaats grijpt, deelt het parenchym in die algemeene verstoring. Er ontstaan onregelmatige, grootere of kleinere bruinroode stukken in de cellen, de waterige inhoud is verdwenen, de celwanden worden bruinrood, eindelijk donker vuil bruin. Het weefsel verdort

5

en wordt verscheurd, nog voor dat de zamenhang der vaatbundels verbroken is, zoodat de buitensten van deze los tusschen de uitgescheiden harsmassa liggen. Fig. 10, Pl. IV zal den geschetsten overgang nog duidelijker aantoonen.

Aan de beschouwing van de ontwikkeling van het Drakenbloed sluit zich die van de basis der bladeren. Zoo als boven beschreven is, is deze oranjerood gekleurd, terwijl het blad zich aanmerkelijk verbreedt en dikker en vleeziger wordt. Op deze plaats is ook de anatomische structuur eene andere dan op de overige gedeelten van het blad, met uitzondering van de vaatbundels, die hun regtlijnigen loop ook hier vervolgen, en alleen door eene grootere hoeveelheid parenchym omgeven worden.

Zien wij vooreerst het blad zelf. De vaatbundels, die het blad evenwijdig aan zijne lengterigting doorloopen, bestaan uit de gewoonlijk voorkomende deelen, een bastligchaam, cambium, vaten (spiraal- en gestreepte of gestippelde vaten) en houtcellen. Zij bevinden zich meer in het midden van het bladdiachym, terwijl zoowel aan de onder- als bovenvlakte, op regelmatige afstanden, nagenoeg onmiddellijk onder de opperhuid, bastbundels of groepen van verdikte prosenchymcellen worden aangetroffen, die met de genoemde vaatbundels evenwijdig loopen. (Zie fig. 1, Pl. V.) In dit opzigt leveren de bladeren van Dracaena Draco niets afwijkends op. Men vindt dezelfde structuur bij een aantal andere vleezige Monoc. bladeren, b. v. van Yucca, Phormium, Dasylirium enz. Hetgeen Schacht (*Anat. und Phys. d. Gew.*, I, 327) beweert, dat men in het blad den zamenhang der bastbundels met de vaatbundels goed kan waarnemen, heb ik niet bevestigd gevonden. Evenzoo vertoont de epidermis, die voor beide oppervlakten dezelfde structuur heeft, niets ongewoons. Regelmatige parenchymcellen met een aantal stomata (in wier cellen zetmeel en chlorophyll) op die gedeelten waar geene bastbundels zijn, veel smaller en langgestrekte cellen zonder stomata boven de bastbundels, ziedaar wat men bij dergelijke bladeren telkens met kleine wijzigingen terug vindt, en waarvan Fig. 3, Pl. IV eene afbeelding geeft. Alleenlijk verdient vermeld te worden, dat in al de opperhuidcellen, maar vooral in de meer zuiver parenchymateuse, kleurlooze oliedroppels gevonden worden, terwijl het onderliggend weefsel, gelijk bijna alle gedeelten van Dracaena, eene ruime hoeveelheid raphiden bevat. Zie Pl. IV, fig. 1, *d*.

Wanneer men echter aan de basis van het blad komt, verkrijgt de oppervlakte een geheel ander karakter. De opperhuidcellen worden eerst langer, daarna korter in de lengterigting. De wanden worden aanmerkelijk verdikt en met ruime stippelkanalen voorzien, niet alleen de naar buiten toegekeerde maar vooral ook de zijwanden, waar de epidermiscellen met elkander in aanraking zijn. De cuticula wordt evenzoo dikker en verkrijgt nog meer dan vroeger een fijn gekarteld of gestreept voorkomen.

Aanvankelijk is de inhoud der opperhuidcellen licht geel of groen gekleurd, en het onderliggende, dunwandige chlorophyll-houdende parenchym is rijk aan kleurlooze oliedroppels (Pl. IV, fig. 1), die meestal als één groote droppel in elke cel voorkomen. Doch ter plaatse waar de oranjeroode kleur van het blad aanvangt, ziet men diezelfde opperhuidcellen geheel gevuld met een bloedrood vocht, dat eerst den inhoud en de stippelkanalen, maar weldra ook de wanden kleurt. Zie figg. 1, 2 en 4, Pl. IV. Het onder de epidermis liggende weefsel bevat nu in de twee à drie buitenste cellenrijen onderscheidene kleine donkerbloedroode bolletjes, terwijl tevens de celwand licht wijnrood gekleurd en het chlorophyll verdwenen is. In de meer binnenwaarts gelegen eerstvolgende cellenrijen komen diezelfde bolletjes nog in ruime mate voor, maar de celwanden zijn geheel ongekleurd. Allengs vermindert echter hun aantal en nu begint zich in deze cellen weder hier en daar de oliedroppel te vertoonen, die in het overige gedeelte van het blad zoo overvloedig voorkwam. Nog meer binnen in het bladmoes zijn beide droppels verdwenen en in den celinhoud ziet men eene ruime hoeveelheid chlorophyll, als eene uiterst fijnkorrelige, vlokkige massa. Eindelijk de cellen, die het binnenste van het blad vormen, zijn veel grooter dan de zoo even genoemde. Zij hebben fijne stippels en bovendien groote ronde kringen, die hier en daar eene verdunning van den celwand, maar somwijlen ook ware openingen in den celwand schijnen te zijn, zoo als blijkt uit de half doorgesneden en met Id. of met ClznIdKId behandelde cellen (zie Pl. IV, fig. 9) en zoo als DE MIRBEL reeds van de overeenkomstige cellen van den stam heeft medegedeeld.

Voor de bladeren der jonge planten van Dracaena Draco moet de gegevene beschrijving eenigzins gewijzigd worden. Want hier loopt het blad wel aan de basis evenzeer in eene vleezige massa uit, maar deze is gewoonlijk geheel ongekleurd en slechts hier en daar vindt men daarop eenige donkerbloedroode plekken, die bij mikroskopisch onderzoek blijken gevormd te zijn, niet door roode kleuring van den inhoud der hier veel minder verdikte epidermiscellen, evenmin door roode bolletjes in het onderliggend parenchym, maar door los buiten aanliggende stukjes hars of drakenbloed, zonder eenige celstructuur.

Kan het ook zijn, dat het proces der verharsing, dat hier nog plaatselijk is, hier sneller voortgaat en de roode bolletjes van de bladeren der oudere Dracaena's dus als een tusschentoestand tusschen de kleurlooze oliedroppels en de uitgescheiden hars te beschouwen zijn?

Eindelijk van de olieachtige droppels, die overal bijna in de plant voorkomen, mag ik niet afstappen, zonder melding te maken van de merkwaardige opeenhooping van die stof in de bloemsteeltjes en wel alleen ter plaatse, waar zich het knietje of de geleding bevindt en waar de zamenhang zoo los is, dat het meerendeel der bloemen hier bij de geringste aanraking afvalt. Die structuur is afgebeeld Pl. II, fig. 14 en 15. Zij vormen op de dwars-doorsnede een breeden ring om de drie vaatbundels (die hier in plaats van uit spiraalvaten uit rozenkransvormige vaten bestaan) en zij breiden zich, gelijk men fig. 15 op de overlangsche doorsnede ziet, slechts weinig uit boven en beneden de geleding, maar zijn hier dan ook digter dan ergens elders opeengehoopt en volkomen kleurloos. Misschien is hunne rol deze, dat zij strekken om na het afvallen der bloem, de wonde aan het overblijvende steeltje spoedig te heelen, en door verharsing van de buitenlucht af te sluiten. Overigens bevestigt deze waarneming weder geheel, hetgeen door v. Mohl voor weinige weken is opgemerkt, aangaande het loslaten van saprijke plantenorganen (*Bot. Zeit.*, N°. 31, 3 Aug. 1860). Ook hier is geen spoor van periderma zigtbaar, de zamenhang der cellen alleen wordt losser en over de geheele oppervlakte valt zonder scheuren de bloem van den bloemsteel af, en heeft dan, tengevolge der zacht oneffen oppervlakte van de vrij komende cellen, een fluweelachtig voorkomen. Het aantal cellen is ter plaatse der geleding grooter en zij zijn zelve dus veel kleiner, hetgeen met de verschijnselen bij vele in het najaar afvallende bladeren overeenkomt. Waarschijnlijk heeft in een vroeger stadium dan ik heb waargenomen, hier eene bijzondere celvermenigvuldiging plaats gehad. Dit vermoeden wordt nog daardoor ondersteund, dat die physiologische verandering der cellen en de daarmede gepaard gaande vorming van oliebolletjes vrij langzaam voortging, want reeds in den steel der bloemknop was zij even goed te zien als bij de ontwikkelde bloem. Of echter hier de oliebolletjes dezelfde rol vervullen als het amylum, dat v. Mohl vond bij die afscheidingslagen, die zich langzaam ontwikkelden, dan wel of de olie, aan de lucht verharsend, een natuurlijk kleed op de wonde vormt, durf ik niet te beslissen.

De rijk bloeijende boom deed mij een aantal rijpe vruchten verwachten.

Doch deze hoop heeft zich niet bevestigd. Na het bloeijen zijn een 30tal bevruchte ovaria daaraan gebleven, maar, hetzij door de weinige zonnewarmte van den verloopen zomer, hetzij om andere redenen, de gezette vruchtjes namen weinig of niet in grootte toe. Toen nu op den 20sten September 1860 de bloemstengel, die reeds inwendig verrot was, afgesneden werd, waren de vruchtjes nog groen en ongeveer even groot als twee maanden te voren. Doorgesneden bleek hun meerdere omvang dan die van het bevruchte ovarium der bloem alleen ontstaan te zijn uit ontwikkeling der carpella. Inwendig waren zij vleezig en groen en vertoonden drie hokken, welke elk een grootendeels verdroogd en geaborteerd ovulum bevatteden, weinig grooter dan het onbevruchte ei en in geene verhouding staande tot de opening van het hokje.

Te midden van die onrijpe vruchtjes, hier en daar aan de bloeias en hare takken verspreid, was er echter één aanmerkelijk grooter. Deze vrucht, hoewel nog groen, was nagenoeg rijp en bevatte één zaadje, hetgeen mij gelegenheid heeft gegeven, om ten opzigte van de structuur van vrucht en zaad de volgende bijzonderheden op te merken.

Uitwendig is de vrucht nagenoeg kogelrond met eene middellijn van 15 mm. en dus ter grootte van eene kers, donkergroen en hier en daar met roestkleurige vlekken bezet, die bij nader onderzoek bleken weder door vorming van de reeds meermalen genoemde hars ontstaan te zijn. Men ziet op de oppervlakte drie ribben, dezelfde die men ook bij de onrijpe vruchtjes bespeurt, maar hier eenigzins onregelmatig, omdat niet alle carpella zich gelijkmatig ontwikkeld hebben (zie Pl. V, fig. 5). Zij loopen alle van de plaats waar de stylus aangehecht is geweest tot aan de inplanting van het steeltje, twee punten die diametraal tegenover elkander staan, maar zij verdeelen den bol in drie ongelijke segmenten. Ter plaatse dezer ribben, en midden tusschen deze in, dus ten getale van zes, ziet men ongeveer ter halver hoogte van den bol, kleine, ongekleurde, vleezige, driehoekige puntjes op de vrucht, met de basis aan het epicarpium verbonden. Deze gedeelten, die trouwens op de onrijpe vruchtjes nog duidelijker waar te nemen zijn, bestaan uit de overblijfselen van het uiteinde der slippen van het perigonium, dat na de bevruchting met het ovarium vergroeid is, en welke slippen in de ontwikkeling der vrucht niet gedeeld hebben.

Inwendig is de vrucht vleezig en groen en gevormd uit dunwandig parenchym met chlorophyllkorrels, terwijl uit het uiteinde der as vaatbundels zich in de vergroeide carpella verspreiden. De epidermislaag, waarmede de vrucht bekleed is, bestaat op de groene plaatsen uit eenigzins verdikte cellen met tamelijk dikke cuticula.

Merkwaardig is de stevige aanhechting der vrucht aan de bloemas, vooral wanneer men daarmede vergelijkt het uiterst gemakkelijk afvallen van het meerendeel der bloempjes. De steel der kogelvormige vrucht, die aanmerkelijk verdikt is boven de geleding (zoodat hij hier bijna driemaal dikker middellijn heeft dan onder de articulatie), laat bij deze volstrekt niet van zelf los en de reden daarvan verklaart zich geheel bij nader anatomisch onderzoek. De talrijke oliedroppels in de vroeger uiterst dunwandige cellen der geleding zijn namelijk nagenoeg alle verdwenen en de celwanden zijn aanmerkelijk verdikt met talrijke stippelkanalen, zoodat het weefsel in den waren zin houtachtig is geworden. Dit weefsel, dat in den geheelen steel het centrale gedeelte uitmaakt, bestaat uit sterk verdikte parenchymcellen met stippelkanalen. Zie Pl. V, fig. 12. Ter plaatse van de geleding hebben echter de vroeger dunwandige cellen zeer dikke wanden met stippels bekomen, zonder aanmerkelijk in omvang te veranderen. Men ziet dit weefsel afgebeeld op Pl. V, fig. 11.

Nog merkwaardiger wordt die vormsverandering, wanneer men daarmede vergelijkt de wijziging, welke de structuur der steeltjes heeft ondergaan bij de overige kleine onrijpe vruchtjes. Hier heeft ook verhouting, verdikking der celwanden plaats gegrepen, maar slechts boven en beneden de geleding. Op deze zelve is het weefsel dunwandig gebleven en de oliedroppels zijn nog als vroeger in menigte daarin aanwezig. Men ziet dit verschil duidelijk, wanneer men op Pl. V fig. 9 en 10 vergelijkt, waarvan de eerste den steel der onrijpe vrucht, de tweede dien der bijna rijpe, beide in overlangsche snede bij geringe vergrooting voorstelt. De geschaduwde gedeelten duiden de verdikte cellen aan, zoodat men met een oogopslag de plaats van dit weefsel zien kan.

Wanneer men de rijpe vrucht overlangs midden doorsnijdt, dan verklaart zich de niet symmetrische plaatsing der ribben, waarover zoo even gesproken is. In de vrucht is namelijk slechts één zaad; slechts één van de drie ovula heeft zich ontwikkeld en wel ten koste van de overigen, die daardoor van hunne plaats gedrongen zijn. Men ziet dit afgebeeld op Pl. V, fig. 6, waaruit blijkt, hoe zelfs de as door den groei van het zaad geheel uit hare oorspronkelijke rigting gebragt is. Ook wijst de fig. nog een der rudimentaire ovula aan (*b*). Bij vergelijking van deze fig. met Pl. II, fig. 12 bespeurt men tevens, dat het eitje bij zijne ontwikkeling zich niet meer omgewend heeft, zoodat uit het ovulum anatropum een semen pendulum met embryo antitropus ontstaan is. Het zaad zelf was nagenoeg volwassen. Het had 7—8 mm. in middellijn, d. i. ongeveer de grootte bij NEES v. ESENBECK, *Plantae Med.*, Tab. 280. B. 8 opgegeven en afgebeeld. Alleen de testa, die volgens dien schrijver, bruin moet zijn, was nog ongekleurd. Gelijk men weet, is deze verkleuring echter een der laatste verschijnselen bij de rijpwording der zaden en overigens vond ik het zaad geheel ontwikkeld, zoodat ik regt meen te hebben, hiernaar de structuur te beschrijven.

De vorm van het zaad is nagenoeg kogelrond, aan de micropyle eene kleine bruine stip vertoonende, en overigens ongekleurd. Inwendig is het wit, bij doorsnijding van de vleezige besvrucht nog zacht, maar na drooging ingekrompen en hoornachtig hard. Het albumen, dat verreweg de grootste massa van het zaad vormt, bestaat uit eigenaardig verdikte cellen met olie en proteïne-meel (klebermehl) *, zonder spoor van amylum. Deze stoffen vindt men ook in de wijde stippelkanalen der doorschijnende celwanden opgehoopt, welke zich daardoor terstond doen herkennen, en aan de celmassa onder het mikroskoop groote overeenkomst geven met het voorkomen van de dikwandige cellen van iris- en palmzaden. Op Pl. V, fig. 8, zijn eenige cellen van het albumen afgebeeld te gelijk met de testa, die uit twee cellenrijen bestaat, waarvan de buitenste regelmatig verdikte wanden heeft, die duidelijke verdikkingslagen doen zien.

Met chloorzinkjoodkaliumjodium-oplossing behandeld, worden de cellen der testa bruingeel; hieronder bevindt zich eene smalle streep (waarschijnlijk gevormd door uiterst smalle, verdikte en verlengde cellen), die bruin, en een tweede nog smaller gedeelte, dat zuiver blaauw gekleurd wordt. Dit laatste weefsel, dat waarschijnlijk uit verscheidene zeer dunwandige en zamengevallen cellen gevormd is en bij een aantal zaden voorkomt, hier nader te onderzoeken, zou ons te ver afleiden. Wat echter de dikwandige cellen van het albumen zelf betreft, deze worden vuil bruinrood (dezelfde tint, die cellulosewanden soms met bi-joduretum zinci aannemen), terwijl de omtrekken der celwanden en de talrijke wijde stippelkanalen minder scherp zich ver-

* Zie over deze stof en haar voorkomen, mijn opstel in G. J. MULDER, *Scheik. Verhand. en Onderz.*, Dl. II, St. 2, bl. 192.

toonen. Daar men echter geene belangrijke opzwelling der wanden ziet, zoo worden door het genoemde reagens blijkbaar de celwanden van het albumen zoo niet opgelost, dan toch aanmerkelijk verweekt. Dit sluit zich dan aan hetgeen men weet van den eigen toestand der celwanden in het albumen van Palmzaden, die in structuur met de genoemde cellen bij Dracaena zooveel overeenkomst hebben.

Eindelijk waar in deze cellen de inhoud nog aanwezig is, daar wordt deze door het reagens bruingeel gekleurd. Men ziet dit het sterkste in en bij de stippelkanalen, alwaar de fijnkorrelige inhoud het langst aanwezig blijft.

De kleine kiem, te midden van het overvloedige albumen gelegen in de as van het zaad, is regt, aan het naar beneden gekeerde worteleinde breed en stomp; de lengte der kiem is ongeveer $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{4}$ van de middellijn van het zaad. Het voorkomen van embryo met plumula, radicula, en breeden schildvormigen cotyledon ziet men bij 12malige vergrooting afgebeeld Pl. V, fig. 7. Het is overbodig te herinneren, dat de cellen van den embryo geen spoor van amylum bevatten maar opgevuld zijn, zoo als gewoonlijk, met uiterst fijnkorrelige proteïnestoffen, terwijl de vorm dezer cellen ook niets bijzonders vertoont. Naar de beschreven bijzonderheden is de boven (bl. 15) gegeven diagnose van het zaad opgemaakt.

Ten slotte nog een woord over den *wortel* van Dracaena Draco, waarvan ik zoowel lucht- als onderaardsche wortels ter mijner beschikking gehad heb.

De vorming van luchtwortels beperkt zich bij Dracaena niet tot het 5[e] tijdperk van Berthelot (zie boven bl. 4). Ik heb, behalve in de bovengenoemde gevallen herhaaldelijk gelegenheid gehad de vorming van luchtwortels bij nog krachtig groeijende planten, ja zelfs bij die met onverdeelden stam te zien. Ook de hier bloeijende boom heeft na het bloeijen een paar luchtwortels ontwikkeld, één aan den voet, waar de stam in de hoofdwortels overgaat en één op een waren wortel, die op zijde uit eene scheur in de tobbe te voorschijn trad. In jongen toestand zijn de wortels aan de spits ongekleurd, hier en daar met onregelmatige stukken uitgescheiden hars bezet; op ouderen leeftijd echter worden zij groenbruin gekleurd en hebben dan eene dergelijke lederachtige opperhuid als de jongere gedeelten van den stam.

De oppervlakte van in den grond voorkomende wortels komt hiermede gedeeltelijk overeen. De zeer dunne jeugdige wortelvezelen namelijk zijn wit van buiten, de oudere wortels bruinrood, ten gevolge van bruinroode kleuring der buitenste kurkcellen, gepaard met het voorkomen van meer of minder uitgescheiden drakenbloed.

Let men echter op den graad van celverdikking, dan vindt men groot verschil tusschen lucht- en onderaardsche wortels. De eersten vertoonen namelijk bijna altijd een zeer dunwandig weefsel, zoowel van den vaatbundel als van het omliggende parenchym, terwijl bij de laatsten, zelfs reeds tamelijk vroeg, de vaatbundels overdekte wanden doen zien, zoo als men dit ook in den stam kent. Overigens is de structuur van beide tamelijk overeenkomstig, zoodat zij gelijktijdig beschreven kunnen worden. (Vergel. Pl. V, fig. 14 en 15.)

De schors, die vooral bij de jongere wortels op de dwars-doorsnede eene groote uitgebreidheid heeft met betrekking tot het houtligchaam, bestaat uit dunwandig parenchym, zonder verdikte bastbundels (Pl. V, fig. 14, *a. b*). Dit parenchym, dat bij de luchtwortels eene ruime hoeveelheid fijnkorrelig chlorophyll bevat, is buitenwaarts begrensd door eenige rijen van meer dikwandige en grootere cellen, eene soort van kurkcellen, waarvan de buitensten bruin en dood, maar de zeer kort onder de oppervlakte gelegenen nog levend zijn (fig. 14, *a*). In deze cellen komen, even zoo als in de overige deelen van Dracaena Draco, groote kleurlooze en kleine roodgekleurde bolletjes voor, terwijl bij sommigen dezer cellen ook de geheele inhoud ligt rood gekleurd is.

Aan de oppervlakte der jeugdige luchtwortels zijn nergens stomata te vinden, maar daarentegen bespeurt men een aantal wortelhaartjes, uit één of meer verlengde, dunwandige, ongekleurde cellen bestaande.

Hetgeen gewoonlijk het houtligchaam heet en hier het centrale gedeelte van den wortel uitmaakt, bestaat uit een grooter of kleiner aantal vaatbundels, steeds van elkander gescheiden door parenchym, maar aan den omtrek meer of min regelmatig in een kring geplaatst en veel digter op een gehoopt dan in het midden (Fig. 14. *c. d.*). In het centrum schijnen plaats en aantal der vaatbundels veel minder regelmatig te zijn, hoewel dit aantal in dikker wortels grooter is. Zoo vond ik in een onderaardschen wortel v. 15 m.m. middellijn 12 vaatbundels binnen den kring geplaatst; in een dunneren één vaatbundel, en in een nog dunneren ontbraken zij geheel. In dit geval, wanneer slechts enkele of geen centrale vaatbundels gevonden worden, kan de wortel volkomen het maaksel van de as eener éénjarige dicotyledoneplant vertoonen. Men ziet dit uit fig. 14 Pl. V. Overigens blijft in denzelfden wortel het aantal der middelste vaatbundels over eene aanzienlijke lengte hetzelfde. Ten minste bij de drie genoemde wortels (allen onderaardsche), waarvan de grootste eene lengte van ongeveer 2 Ned. palm had, kon ik geene afwijking van dat aantal bespeuren. Waar één vaatbundel was, kon ik deze tot aan het cambium der de uiterste wortelspits vervolgen.

De genoemde vaatbundels bestaan steeds uit gestippelde en spiraalvaten, prosenchymcellen en eenig zoogenaamd cambium (grootendeels gittercellen, zie boven blz. 17). Bundels van groote houtcellen met dikke wanden en met hofstippels, zoo als in den stam worden gevonden, kwamen in de door mij onderzochte stukken niet voor.

In de luchtwortels nu hebben deze deelen wel even groote afmetingen, maar steeds uiterst dunne wanden, zoodat deze wortels eene uitzondering maken op het overige der plant, alwaar overal zulk eene sterke neiging tot verhouting wordt gevonden.

Daarentegen zijn bij in den grond levende wortels, ook bij zeer jonge, de zamenstellende deelen van den vaatbundel alras verhout. Ik zag dit zelfs bijzonder sterk bij de fijnere wortelvezelen aan den genoemden dikken wortel gehecht. Hier vond ik een aantal vaatbundels met geheel verhoute elementen in het centrum en tevens was hier eene rij cellen in hooge mate verdikt, welke de binnenste grens van de schors uitmaakt, en dus den verdikkingsring van buiten begrenst. Deze cellenrij (afgebeeld in Pl V, fig. 15 *b*) komt voor in alle wortels van Dracaena, zoowel in de lucht- als grondwortels. Bij de eersten vormt zij nagenoeg de eenige verdikte cellen. Of zij ook in den stam wordt gevonden, kan ik bij gebrek aan geschikt materiaal niet beslissen. Ik meen dit echter te mogen betwijfelen, daar ik bij Gramineën, Cyperaceën, Zingiberaceën, Smilaceën in het rhizoma dezelfde laag terugvond, maar die steeds in den bovenaardschen stengel zag ontbreken. Dezelfde laag is het, welke, door hare bijzonder verdikte celwanden, Schleiden een middel heeft gegeven om de Honduras- en Vera Cruz-Salsaparille van elkander te onderscheiden. Schleiden noemt ze *kernschede*. Ook Schacht maakt van die laag melding (*Anat. und Physiol. d. Gew.*, II, p. 170) en zegt, dat zij in den wortel gevonden wordt, maar in den stam ontbreekt. Welke echter daarvan de beteekenis zij, komt mij nog twijfelachtig voor. Kan die laag het analogon zijn van verdikte celgroepen in de schorslaag? of wel, dient zij tot beschutting van den verdikkingsring, zoo als de eigenaardige plaatsing der secundaire lagen schijnt aan te duiden?. Zorgvuldig anatomisch onderzoek van die deelen bij verwante plantensoorten in onderscheidene ontwikkelingstoestanden kan hier alleen meer zekerheid geven.

Eindelijk, ten opzigte van de vorming van vaatbundels buiten de reeds bestaande hebben de wortels mij in staat gesteld, om door eigen waarneming de uitkomst van Unger, de Mirbel en Schacht te kunnen bevestigen. Men ziet namelijk bij alle wortels van Dracaena den krans van vaatbundels omgeven door een ring van jeugdige uiterst dunwandige cellen (verdikkingsring, Schacht) en in dit weefsel, tusschen de op de dwars-doorsnede vooruitstekende punten der vaatbundels, bespeurt men groepjes van uiterst kleine en dunwandige cellen, waarin reeds de rangschikking van de deelen van een jeugdigen vaatbundel te bespeuren is, hetgeen bij overlangsche doorsnede nog nader wordt bevestigd (zie Pl. V, fig. 15 *c*). Of echter, zoo als Schacht beweert, deze nieuwe vaatbundels (van de oude altijd door parenchym afgescheiden) ontstaan uit vertakking der andere vaatbundels ter plaatse, waar deze aan den cambiumring grenzen, meen ik te moeten betwijfelen. Het is mij nooit mogen gelukken, zoodanige vertakking als de bron van den nieuwen vaatbundel aan te wijzen. Zonder nu de onmogelijkheid van dergelijke groeiwijze als Schacht zich voorstelt (en waartoe hem welligt de op tangentiale snede veelvuldige anastomosen der vaatbundels van den stam verleid hebben (Fig. 4, Pl. V)) te willen beweren, geloof ik toch te moeten wijzen, op de groote analogie in groeiwijze, tusschen de Asparageën en de Dicotyledonen, eene analogie, die door nieuwere onderzoekingen steeds meer aan het licht is gekomen. Wanneer nu bij de Dicotyledonen, zoo als Trécul door een aantal proeven getoond heeft, de nieuwe houtvorming geschiedt in den cambiumring op de plaats zelve, en onafhankelijk in zekere mate van de overige deelen, waarom zou dan niet op dezelfde of dergelijke wijze de nieuwe vaatbundel bij Dracaena kunnen ontstaan onmiddellijk buiten den reeds gevormden, zonder juist altijd op zulk een bestaanden vaatbundel ingeplant te zijn?

Dat nieuwe celvormen kunnen ontstaan zonder onmiddellijk aan soortgelijke te grenzen, blijkt genoeg uit de schors der Dicotyledonen, alwaar soms een aantal vormen in geregelde opvolging in het liber wordt gevonden.

Rotterdam, 1860.

VERKLARING DER PLATEN.

PLAAT I.

Afbeelding van de bloeiwijze, de bladerkroon en het bovenste deel van den stam van *Dracaena Draco L.* uit den Hortus te Rotterdam op $\frac{2}{15}$ der natuurlijke grootte.

PLAAT II.

Fig. 1. Eene bloem van Dracaena Draco L. met omgeslagen slippen, 5 m. vergroot.

Fig. 2. De helft van het perigonium, uitgespreid en van binnen gezien, met de daarop ingeplante stamina, 5 m. vergroot.

Fig. 3. Eene ongeopende bloem in natuurl. grootte.

Fig. 4. Een der slippen van het perigonium, met den daarop ingeplanten meeldraad, om de aanhechting van dezen, de plooijing der slippen en de omkrulling aan den top te toonen. De slip in half geopenden stand, 5 m. vergroot.

Fig. 5. Een meeldraad, 10 m. vergroot, van ter zijde gezien.

Fig. 6. Dwars-doorsnede van het filamentum een weinig onder het midden, 10 m. vergroot. *a.* vaatbundel in het midden van het filamentum.

Fig. 7. Dwars-doorsnede der antherae met het connectivum, 40 m. vergroot. *a.* ring van cellen met spiraalvezelen bekleed, *b.* vaatbundel van het connectivum.

Fig. 8. Pollenkorrel 250 maal vergroot, *a.* droog, *b.* in water gezien.

Fig. 9. Dwars-doorsnede door het midden van den stijl, 40 m. vergroot, *a.* ductus pollinaris, *b.* vaatbundels.

Fig. 10. Overlangsche doorsnede van den stamper, 7 maal vergroot. Van de drie hokjes ziet men er één midden doorgesneden en daarin het ovulum, aan de overzijde bevindt zich het vlies van de twee andere hokjes, waaronder het ovulum doorschemert. De zwarte lijnen duiden vaatbundels aan.

Fig. 11. Dwars-doorsnede van het ovarium. De ovula zijn gehecht aan het midden der carpella, ieder in een der hokken. Tegenover elk der ovula bevinden zich in de celmassa van het ovarium drie vaatbundels, *b.* Dezelfde vergrooting als de vorige fig.

Fig. 12. Niet bevrucht ovulum, 40 m. vergroot, *a.* chalaza, *b.* raphe, *c.* exostomium, *d.* endostomium, *e.* kiemzak.

Fig 13. Diagram der bloemknop, ter hoogte van de antherae dwars doorgesneden.

Fig. 14. Dwars-doorsnede door den bloemsteel ter plaatse waar de geleding is, 40 m. vergroot, *b, b, b,* drie vaatbundels regelmatig tegenover elkander geplaatst, *a.* niet scherp begrensde ring van cellen, waarin de oliedroppels.

Fig. 15. Overlangsche radiale doorsnede van een deel van den bloemsteel ter plaatse van de geleding, 100 m. vergroot, *a.* ring van cellen met oliedroppels op de geleding, die met eene vernaauwing van den omtrek vergezeld gaat. De vaatbundel *b.* uit spiraalvaten bestaande, gaat op de geleding in rozenkransvormige vaten, *d.* over; *c.* verlengde parenchymcellen van den bloemsteel.

Fig. 16. Kiemplant van Dracaena Draco, in den Hortus Botanicus te Amsterdam gegroeid, stengel en worteltje slechts ten deele afgebeeld; het zaad verticaal doorgesneden. *a.* kiemwit, *b.* zaadlob, *c.* collum, *d.* worteltje, *c.* stengel. Nat. grootte.

Fig. 17. Afbeelding van een der kleinere takjes van de panicula, met onderscheidene gesloten, enkele geopende bloemen; met bevruchte bloemen onderaan en knoppen aan den top. Natuurlijke grootte.

PLAAT III.

Fig 1. Dwars-doorsnede van een vaatbundel van den stam van *Dr. Draco* uit het centrum, in de onmiddellijke nabijheid van den houtring. *a.* bastcellen van den vaatbundel, naar den omtrek gekeerd, *b.* cambium en gittercellen, *c.* gestippelde en spiraalvaten, *d.* houtcellen. 180 m. vergroot.

Fig. 2. Overlangsche doorsnede van denzelfden vaatbundel. De letters hebben dezelfde beteekenis als in de vorige figuur. 250 maal vergroot.

Fig. 3. Dwars-doorsnede van een bundel uit denzelfden stam van *Dr. Draco,* uit den houtring, *a.* groote dikwandige houtcellen met spleetvormige hofstippels, *b.* gittercellen. 180 m. vergroot.

Fig. 4. Overlangsche doorsnede van denzelfden bundel. De letters even als in de vorige figuur. 250 m. vergroot.

PLAAT IV.

Fig. 1. Dwars-doorsnede van een stuk van het blad, evenwijdig aan de bladnerven, en ter plaatse, waar de roode verkleuring der basis aanvangt, *a.* dikwandige epidermiscellen en daaronder liggende cellen met chlorophyll en groote kleurlooze harsbolletjes; *b.* evenzeer dikwandige epidermiscellen, waarvan de inhoud met roode stof gevuld is, daaronder parenchym met een aantal kleine roode bolletjes; de buitenste cellenrij ook nog met een gekleurden inhoud, *c.* eene der stomacellen, *d.* groote cel met raphiden. 200 m. vergroot.

Fig. 2. Dikwandige epidermiscellen aan de grens der roode verkleuring, van bovenop gezien. Onregelmatig verdikte wand met stippelkanalen, 200 m. vergroot.

Fig. 3. Epidermis van het midden der lamina van het blad aan de ondervlakte; de lengteas van het blad in de rigting der pijl gelegen. *a.* epidermis boven de onmiddellijk onder de oppervlakte gelegen bastbundels, zonder stomata, *b.* epidermis boven het bladparenchym; hierin alleen stomata, *s.* 200 m. vergroot.

Fig. 4. Dwars-doorsnede van een stuk van het blad, loodregt op de lengteas, ter plaatse waar de roode verkleuring aanvangt; *a.* en *b.* hebben dezelfde beteekenis als in fig. 1. 200 maal vergroot.

Fig. 5. Stuk van eene dikwandige houtcel uit den houtring van den stam, in salpeterzuur gekookt en daarna met chloorzink-joodkalium-joodoplossing behandeld. De verdikkingslagen blaauw gekleurd, de primaire wand geel. Bij *a.* een stuk van den primairen wand ter plaatse der hofstippels. De hof is hier aanwezig zonder den stippel. 250 m. vergr.

Fig. 6. Een stukje van het primaire vlies, behandeld als boven. De plaatsen der hofstippels kenmerken zich door meer gele kleur. 250 maal vergroot.

Fig. 7. Eene zelfde houtcel met den hofstippel in doorsnede. Bij *b.* wijken de wanden van twee aangrenzende cellen uiteen, *c.* regelmatig donkerder gekleurde strepen op den celwand. 250 maal vergroot.

Fig. 8. De houtcellen in dwars-doorsnede, evenzoo behandeld. Gele verkleuring van het primaire vlies en desgelijks van de binnenvlakte van den wand. 250 maal vergroot.

Fig. 9. Groote parenchymcellen uit den stam, evenzoo behandeld. Groote verdunde plaatsen in den celwand. 250 maal vergroot.

Fig. 10. Dwars-doorsnede van den stam aan het ondergedeelte, waar de schors opengespleten is en het drakenbloed uitvloeit. Steeds toenemende verkleuring der bundels aan den omtrek, vooral ten opzigte van den inhoud der houtcellen. Buiten aan, massa's verhard bloed, gemengd met gedeeltelijk gedestrueerd weefsel. 33 m. vergroot.

Fig. 11. Een gedeelte van een roodgekleurden houtvezel. Roode massa in den inhoud. Roode verkleuring van de hofstippels. 250 m. vergroot.

Fig. 12 en 13. Dwars-doorsnede van de schors aan het jonger deel van den stam, waar de lidteekenen der afgevallen bladeren nog ongeschonden zijn, *a*—*b*. kurkweefsel, hier en daar met oliedroppels, een enkele maal met roode hars daarin, en aan de binnenvlakte aangroeijende. Fig. 12 en 13, *b*—*c*. parenchymcellen der schors, met chlorophyll en met een aantal cellen die bundels raphiden bevatten; *c*—*d*. plaats, waar de vermenigvuldiging door celverdeeling plaats heeft. 100m. vergr.

Fig. 14. Hofstippels van het hout van Pinus silvestris op de dwars-doorsnede, naar DIPPEL in V. MOHL's *Bot. Zeitung*. 1860. Pl. VIII, fig. 11, I—III.

Fig. 15. Hofstippels van Pinus silvestris, volgens de voorstelling van TH. HARTIG, in G. L. HARTIG's *Lehrbuch für Förster*. 10e Aufl. Bd. I. S. 249. fig. 30. De zwart geteekende gedeelten duiden aan hetgeen met lucht gevuld blijft, wanneer eene dunne snede van dennenhout met terpentijnolie bevochtigd wordt.

PLAAT V.

Fig. 1. Dwars-doorsnede uit het midden der blad-lamina, loodregt op de lengteas, *e*. epidermiscellen, met tamelijk dikke cuticula, *d*. twee stoma-cellen met onderliggende luchtholte, *b*. bastbundels, onmiddellijk onder de oppervlakte gelegen, *b'*. bastgedeelte van den vaatbundel uit het midden der bladmassa, *c*. cambium en gittercellen, *v*. vaten, gestippelde en spiraalvaten, *h*. houtcellen van den vaatbundel. 200 m. vergroot.

Fig. 2. Overlangsche radiale doorsnede van een stuk van den stam, bovenaan, van den omtrek tot een weinig voorbij het centrum, na verdwijning van het parenchym door uitdrooging. Kruising en loop der vaatbundels. Nat. grootte.

Fig. 3. Stuk van den stam, dwars doorgesneden, 6 m. vergroot. *a*. kurklaag, *b*. schorsparenchym met vele raphidencellen, *c*. cambium, *c'*. houtring, waarin een groot aantal bundels van houtcellen, *d*. aanvang der vaatbundels, op Pl. III, fig. 1 en 2 afgebeeld, *v*. een dergelijke vaatbundel in horizontale of schuins opstijgende rigting naar het blad gaande.

Fig. 4. Tangentiale, overlangsche snede van het buitenste van den houtring van den stam. Vertakking der bundels van houtcellen *h*. en tusschen de mazen van dit net de dwarsdoorsnede *v* der horizontaal naar het blad loopende vaatbundels. 25 m. vergroot.

Fig. 5. Nagenoeg rijpe vrucht van boven op gezien. Nat. grootte.

Fig. 6. Dezelfde, overlangsch midden doorgesneden. Plaats en rigting van zaad en embryo, met de overblijfselen van een der beide andere geavorteerde ovula. Nat. grootte.

Fig. 7. Embryo van het zaad, overlangsch doorgesneden, *a*. testa, *r*. radicula. 12m. vergr.

Fig. 8. Gedeelte van het albumen en van de zaadhuid. 200m. vergroot. Eigenaardige verdikking der celwanden; stippels, *a.* in doorsnede, *b.* van boven op gezien.

Fig. 9. Overlangsche doorsnede van het steeltje der kleine onrijpe vruchtjes ter plaatse der geleding, *d.* verdikte cellen, *o.* cellen met oliedroppels, *v.* vaatbundels. 20maal vergroot.

Fig. 10. Overlangsche doorsnede van het steeltje der nagenoeg rijpe vrucht aan de geleding. *d.* verdikte cellen, *v.* vaatbundels. 20maal vergroot.

Fig. 11. Verdikte verlengde cellen uit den steel, stippelkanalen. 200maal vergroot.

Fig. 12. Verdikte cellen op de geleding der bijna rijpe vrucht. 200maal vergroot.

Fig. 13. Dwars-doorsnede van een klein deel van den wortel aan de buitengrens der buitenste vaatbundels (zie Fig. 14 *c.*), *a.* dunwandige polyedrische parenchymcellen der schors, *b.* laag van eenzijdig verdikte cellen, die als een koker den verdikkingsring omgeven (kernschede), *c.* jonge vaatbundel buiten den reeds gevormden *e.* ontstaan. 200m. vergroot.

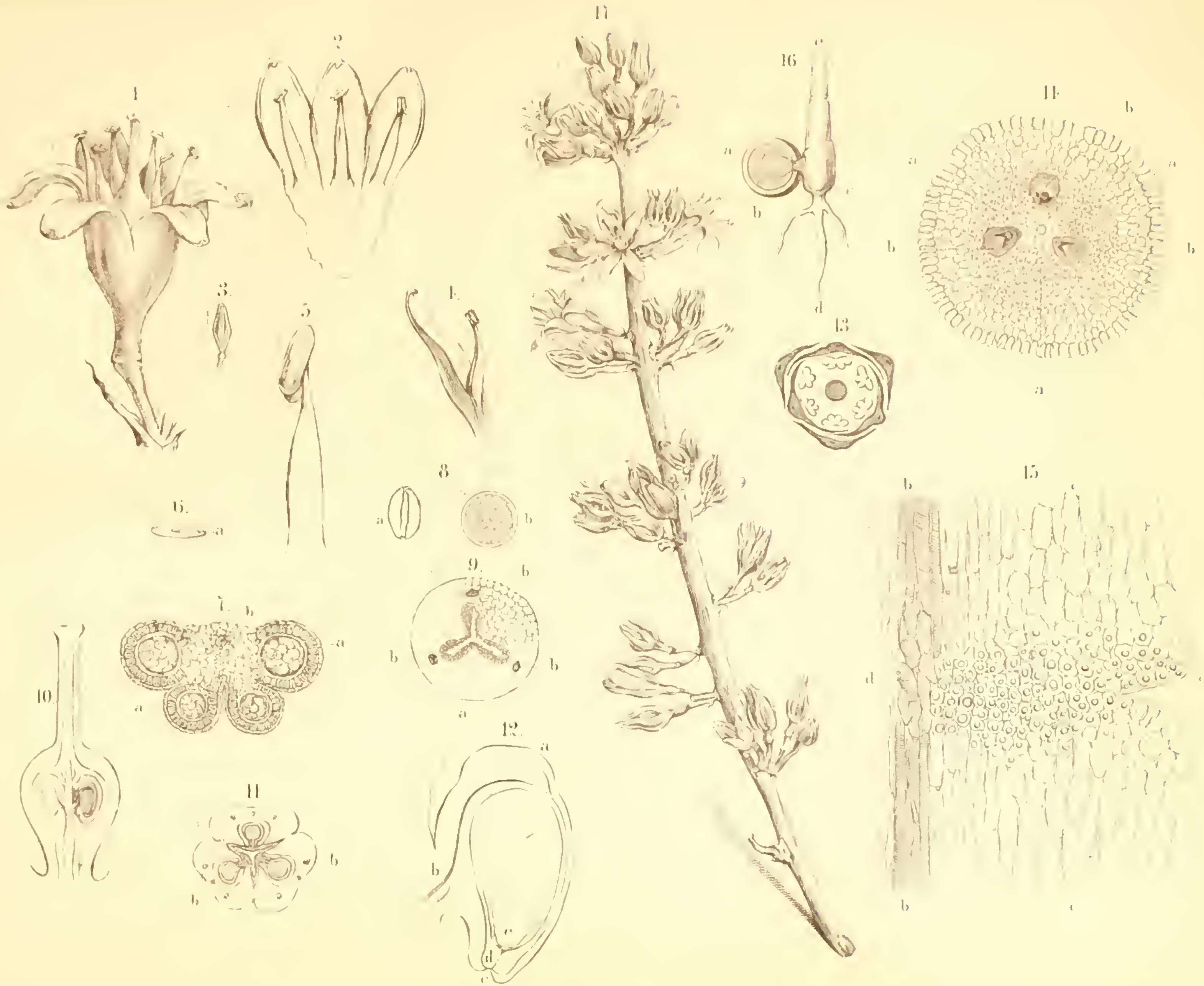
Fig. 14. Dwars-doorsnede van een stuk van den wortel, van den omtrek tot even voorbij het centrum, *a* laag van bogtige, eenigzins dikwandige, geelgekleurde kurkcellen, *b.* breede laag van dunwandig, polyedrisch schorsparenchym, *c.* stukje in Fig. 13 vergroot afgebeeld, *k.* lijn van eenzijdig verdikte cellen, *d.* kring van vaatbundels, reeds in dubbele rij staande en waartusschen aan den buitenomtrek nieuwe vaatbundels ontstaan, *e.* parenchym, binnen den kring der vaatbundels gelegen, *f.* vaatbundel uit het centrum. 10maal vergroot.

Fig. 15. Overlangsche radiale doorsnede door het uiteinde van een luchtwortel, *a. a.* eerste vaten met lucht gevuld, *b.* schorsligchaam, *c.* nog niet ontwikkelde vaatbundels van het centrum, in celtoestand, *d.* jeugdig en klein celweefsel, waarvan de tusschenruimten met lucht gevuld zijn, *e.* punctum vegetationis, alwaar de verdikkingsring zich reeds door eene smalle gebogen lijn als eene kegelvormige verlenging van het ouder weefsel doet kennen, *f.* wortelmuts, inwendig uit jong celweefsel gevormd, dat zich aan de binnenzijde vermenigvuldigt; uitwendig losse zamenhang der bruin wordende cellen, die van buiten in grooter of kleiner bruine stukken loslaten, *g.* roodbruine plek op de lichtgroene oppervlakte van den wortel. 6 maal vergroot.

VERH. D. KON. ACAD. V. WETENSCH. AFD. NATUURK. D. X. W. P. van Geldorp del.

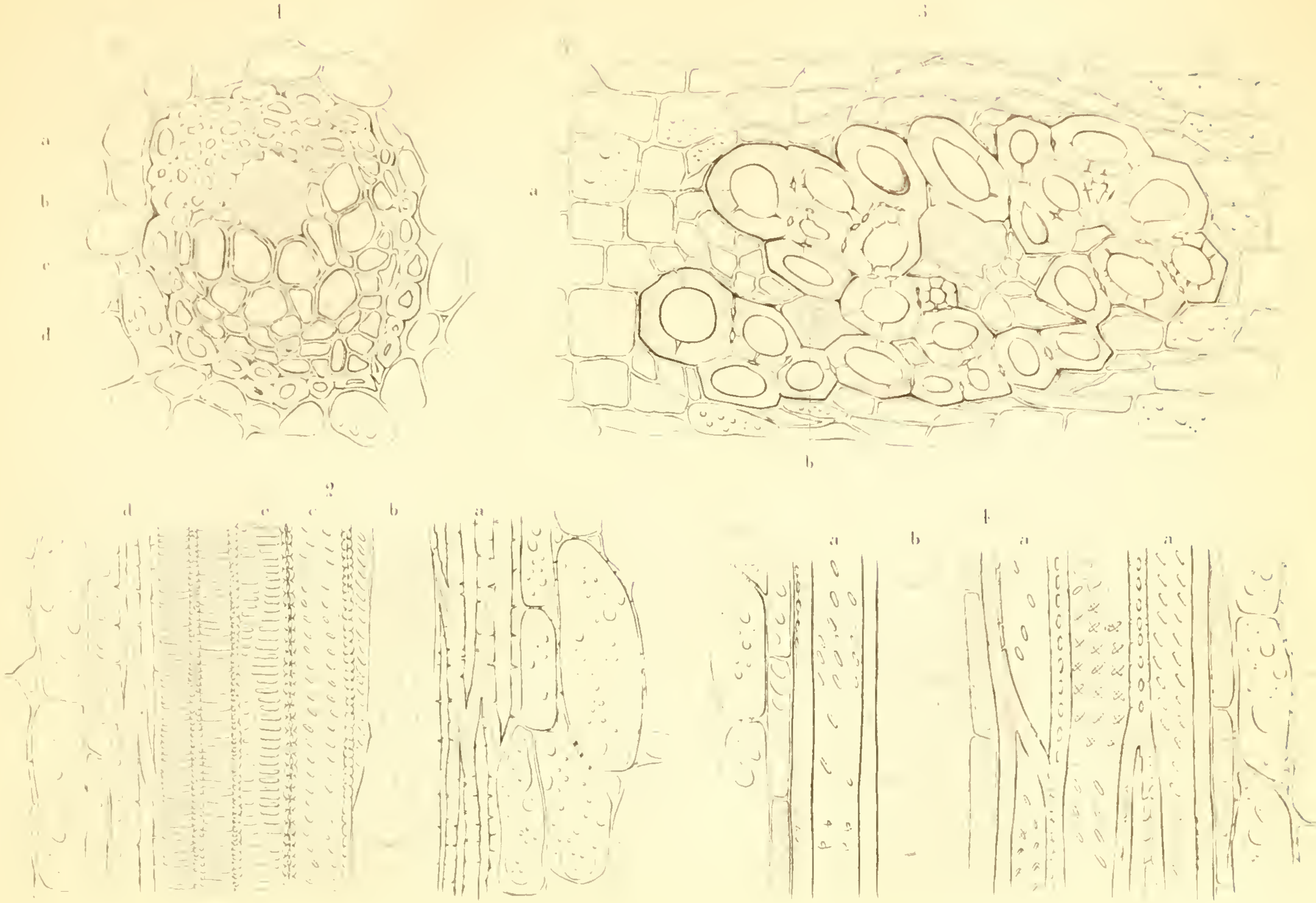
N. W. P. RAUWENHOFF over Dracaena Draco L.

Pl. 2



VERH. D. KON. AKAD. V. WETENSCH. AFD. NATUURK. D. X.

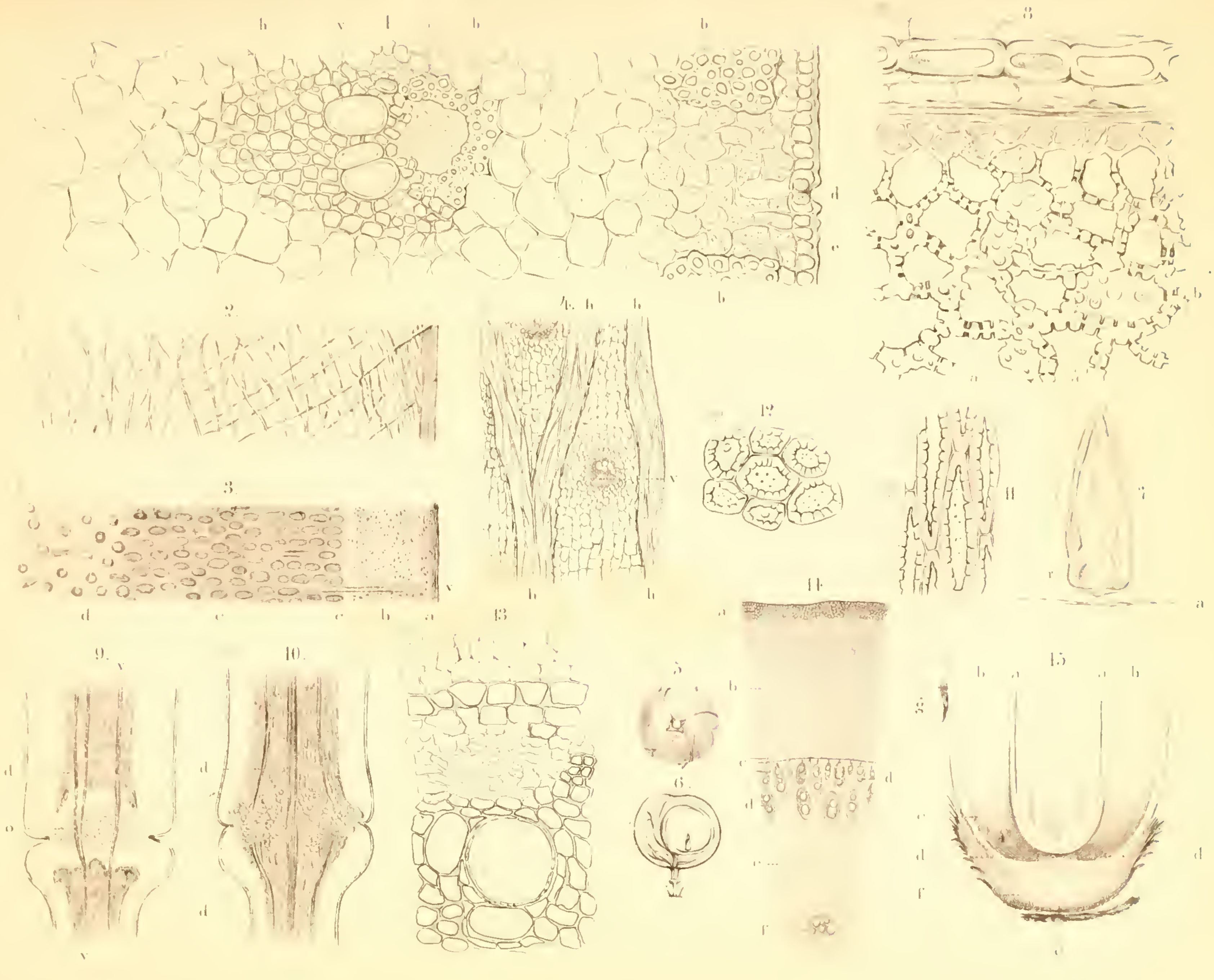
N. W. P. Rau



N. W. P. Rauwenhoff, ad nat. del.

N. W. P. Rauwenhoff ad nat. del.

Art. Drukkerij v. M. Moschreisen Rott.



N. W. P. Rauwenhoff

NASCHRIFT.

Aangezien tusschen het opstellen van bovenstaande beschrijving en den druk ongeveer drie jaren verloopen zijn, zoo acht ik het noodig, die beschrijving met enkele bijzonderheden aan te vullen, ten einde ze op de hoogte van den tijd te houden. Ik maak van deze gelegenheid tevens gebruik tot inlassching van een paar bijzonderheden, die eerst later ter mijner kennis zijn gekomen.

1°. Bij de afbeeldingen van *Dracaena Draco* op bl. 6 opgenoemd, moeten nog gevoegd worden die in Curtis *Bot. Mag.* LXXVII. tab. 4571 en de hieraan ontleende platen in v. Houtte, *Flore des Serres et d. Jard.* VI. pl. 615 en in Lemaire *Jardin Fleuriste.* pl. 124. Behalve den beroemden Dracaena van *Orotava* vindt men aldaar eene goede afbeelding van een der racemi uit de panicula in natuurlijke grootte, eene bloem vergroot met stamen en pistillum afzonderlijk, en eindelijk eene tweezadige bes, dezelfde overlangs doorgesneden en het zaad. Bloemen en vrucht zijn beide juist afgebeeld, vooral de laatste, die volkomen het voorkomen teruggeeft van de door mij (bl. 12 en 38) beschreven en op Pl. V, figg. 5 en 6 afgebeelde vrucht uit den Rotterdamschen Hortus. De bes is echter tweezadig, hetgeen overeenkomt met de beschrijving van Berthelot en anderen. Dit schijnt werkelijk meermalen het geval te zijn. Intusschen heb ik ook bij eenige vruchtjes van een Dracaena Draco, die in 1861 in den Amsterdamschen Hortus Botanicus gebloeid heeft, eenzadige bessen gevonden.

Gelijk te verwachten is, gaat met de meer gelijkmatige ontwikkeling der ovula, ook eene meer evenmatige uitgroeijing der carpella gepaard, zoodat de segmenten, waarin deze de kogelvormige bes verdeelen, niet meer ongelijk, zoo als in Pl. V. fig. 5, maar nagenoeg gelijk van grootte zijn. Naar men mij te Amsterdam verzekerd heeft, waren de rijpe bessen aldaar rood gekleurd, hetgeen overeenkomt met de beschrijvingen van vroegere waarnemers (zie boven bl. 12).

2°. Eene belangrijke bijdrage tot bevestiging van hetgeen boven (bl. 4) opgemerkt is aangaande het ontstaan van luchtwortels, vindt men (bij VAN HOUTTE in *Flore des Serres,* VI. p. 259 en bij LEMAIRE, *Jardin Fleuriste* II pl. 124.), in de mededeeling van Dr. MACKAY, Directeur van den Botanischen tuin te Dublin. Er bevond zich aldaar een fraai exemplaar van Dracaena Draco, gekweekt uit zaad, door hem op het eiland Madera gewonnen en in 1810 uitgezaaid. Nadat de plant de laatste tien jaren in een pot bewaard was, werd zij in den vollen grond geplaatst; maar drie jaren later, in 1846, was zij zoodanig gegroeid, dat zij boven aan het dak van eene 20 voet hooge kas reikte. Nu was goede raad duur. Ten einde de plant te kunnen behouden zonder de kas uit te bouwen, kwam de Hortulanus BAIN op de gedachte om van den stam een gedeelte weg te nemen. Ter hoogte van 4 voet boven den grond maakte hij in den stam eene horizontale insnijding over den halven omtrek ter diepte van ½ à 1 duim, en besmeerde de wonde met kalk, ten einde het uitvloeijen van sap te beletten. Na eenigen tijd maakte hij gedurig de insnijding dieper, zoodat eindelijk het bovenste geheel van het onderste was afgescheiden. Zes maanden later werd het verband geheel losgemaakt, en het bovenstuk bleef vrij hangen in de lucht aan de touwen die het in evenwigt hadden gehouden, terwijl het onderstuk weggeworpen werd. In de acht volgende maanden, waarin de plant geheel droog werd gehouden, vormden zich aan het ondereinde van den stam talrijke dikke luchtwortels, waarna de plant in den grond gebragt, niet slechts welig groeide, maar achttien maanden later in rijken bloei stond.

Deze bloemen (zegt de berigtgever) waren de eerste, die van Dracaena Draco in Groot-Brittannie levend gezien werden. Men heeft deze handelwijze zelfs aanbevolen, om het bloeijen van sommige planten te verhaasten.

3°. Bij het punt van waar de wortels van Dracaena Draco ontspringen, heb ik in mijn opstel niet uitvoerig stilgestaan, omdat ik hieraan niets buitengewoons meende te bespeuren. Thans hierover nog een enkel woord, daar in de laatste jaren hierover verschil van meening is ontstaan bij onderscheiden kruidkundigen. NÄGELI zegt (*Beiträge zur wissensch. Botanik* I. 155), dat Calodracon Iacquini Göpp. een onderaardschen stam, een waren wortelstok met kleine schubvormige bladeren bezit, die als de bovenaardsche stengel een onbegrensden dikte-groei heeft. Deze wortelstok vormt eene kroon met onderscheiden takken, waaraan adventiefknoppen, die tot ontwikkelde bebladerde bovenaardsche stammen aanleiding geven, en waaraan zijdelings ware wortels ontstaan, die in maaksel en in groei grootendeels met de wortels der Palmen overeenkomen.

Schacht daarentegen (*Anat. und Physiol. d. Gew.* I. 305) beweert, dat bij monocotyledonen, zelfs bij Dracaena, de werkzaamheid van den cambiumring spoedig ophoudt in de wortelen, zoodat deze nooit eene aanzienlijke dikte bereiken. Dit geeft Nägeli aanleiding om in eene noot (l. l. p. 155) het vermoeden uit te spreken, dat Schacht waarschijnlijk ware wortels heeft onderzocht, want zoo na verwante planten als Calodracon en Dracaena zullen ten opzigte van het rhizoma (den schijnbaren wortel) waarschijnlijk wel geen groot verschil vertoonen.

Aan de gegrondheid van Nägeli's vermoeden aangaande den stam van Dracaena Draco meen ik te mogen twijfelen. Wat Calodracon betreft, hier vindt men een waren onderaardschen stam; bij Calodracon heliconiaefolius met knolachtige verdikkingen, die men scheuren, en daardoor de plant vermenigvuldigen kan.

Bij Dracaena Draco daarentegen splitst zich de bovenaardsche stam aan zijn voet in eenige hoofdwortels, op de wijze als dit bij Dicotyledonen plaats heeft. Zoo ver ik heb kunnen nagaan (hoewel ik de plant niet geheel heb opgegraven) ontstaan de wortels aan den voet van den bovenaardschen stengel, zoodat er waarschijnlijk geen onderaardsche stam aanwezig is. Ik heb ook nimmer gezien noch vernomen, dat Dracaena Draco zijscheuten of uitloopers maakt, of door scheuren vermenigvuldigd kan worden. Geheel in overeenstemming hiermede, maar in strijd met Nägeli's vermoeden, is de uitkomst van een onlangs bekend gemaakt onderzoek van Caspary (*Monatsbericht d. Kön. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Juli 1862. p. 478), die zegt dat bij Dracaena Draco de wortel uit de basis van den bovenaardschen stam ontspringt en zich van boven verdikt. Bij Cordyline congesta vond diezelfde natuurkundige (l. l. p. 477.) dunne, cilindrische wortels, die zich niet verdikken en uit den onderaardschen, loodregt neergaanden stam ontspruiten.

4°. Het zoo even genoemde opstel van Caspary tracht te betoogen dat een veel grooter getal planten, dan men gewoonlijk aanneemt, van vaten beroofd is, ten minste, wanneer men met v. Mohl vaten noemt, open buizen uit de versmelting van boven elkander geplaatste cellen ontstaan, wier dwarswanden geheel of grootendeels verdwenen zijn. Wij zullen thans niet onderzoeken, of dit al of niet doorboord zijn der dwarswanden van zooveel beteekenis is als Caspary gelooft, hetgeen door sommigen betwijfeld wordt (men vergelijke b. v. de recensie van dit stuk in Nat. Hist. Review, Julij 1863. p. 366). Evenmin is het hier de plaats, om over des schrijvers beschouwingen en over zijne eigene terminologie te spreken, zonder welker opzettelijke studie men zijn geschrift niet kan verstaan.

Ik moet alleen opmerken, dat, zoover het nog aanwezige materiaal en mijne praeparaten mij toelieten, ik zijne aphoristische beschrijving van de structuur van Dracaena Draco getoetst heb, en die grootendeels juist heb gevonden. Bij den wortel heb ik zijne *secundaire Leitbündel* niet teruggevonden, (die misschien echter wel in oudere wortels dan ik onderzocht heb, kunnen voorkomen) en ik mis bij hem de beschrijving der kernschede.

De Leitbündel in den stam zijn beschreven, overeenkomstig met hetgeen ik waargenomen en boven in mijne verhandeling aangeduid heb. Alleenlijk durf ik niet beslissen, of de spiraalvaten der primaire bundels (door Caspary *Schraubenecellen* genoemd) altijd gesloten zijn, zoo als hij beweert.

5°. Over de histologie der Coniferen verscheen in 1862 (*Bot. Zeit.* N°. 22. 30 Mai 1862. S. 169) een nader opstel van Dippel (zie boven bl. 22), waarin echter over het maaksel der hofstippels geene nadere uitvoerige onderzoekingen voorkomen. De schrijver houdt zich aan zijne in 1860 gegeven voorstelling. In dat zelfde jaar is een hevige strijd ontstaan tusschen v. Mohl en Schacht over de verschillende structuur van stam- en wortelhout en over de grootte der elementairorganen in deze deelen bij naald- en loofhouten (v. Mohl in *Bot. Zeit.* 1862 S. 225, 233, 265, 277, 289, 313, 321 en 460. Schacht. Ibid. S. 409, 417, 1863 S. 46), maar over het maaksel der hofstippels, komt daarin niets voor, wat in verband met het bovengezegde nadere bespreking zou vereischen. Ook Th. Hartig heeft nog nader over de hofstippels der Coniferen geschreven (*Bot. Zeit.* 1862. N°. 14 p. 105 en volgg.). Hij betoogt, dat Schacht onregt heeft, door zich den hofstippel bij het volwassen weefsel geopend voor te stellen, en hij verdedigt nader zijne meening aangaande den aard dier hofstippels. (Zie boven bl. 23). Zijne argumenten hebben echter mijne overtuiging nog niet aan het wankelen gebragt.

Eene merkwaardige bevestiging van de uitkomst van mijn onderzoek van Dracaena, boven op bl. 27 vermeld, — dat bij deze soort en hare aanverwanten de hofstippels ook op rijper leeftijd door een vlies gesloten blijven — vindt men in het resultaat van Caspary (*Monatber. d. Kön. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin.* Juli 1862. p. 462 en 465). Deze schrijver zegt namelijk: «De poriën (zoo noemt hij de stippels) zijn dikwijls met een grooten hof voorzien, zoo als bij de Dracaenëen, maar ik vond den primairen wand steeds bewaard gebleven, hoewel die dikwijls alleen onder de gunstigste omstandigheden en met de beste lenzensystemen kon aangetoond worden."

6°. Eindelijk nog een woord over de kieming onzer plant, nu ik door de goedheid van Prof. Oudemans te Amsterdam in de gelegenheid ben gekomen, om eene kiemplant te onderzoeken, die in 1861 in den Hortus Botanicus aldaar vrijwillig ontstaan en op houtazijn bewaard was. Gelijk men weet, heeft de kieming bij de Monocotyledonen op verschillende wijzen plaats, die door Richard onder drie hoofdafdeelingen gebragt zijn. Bij de Palmen vertoont zich het duidelijkst, wat Richard genoemd heeft germinatio admotiva. Hier verlengt zich het onderste gedeelte der zaadlob tot een lang steelachtig ligchaam, en eerst daarna ontwikkelen zich radicula en plumula, zoodat deze op eenigen afstand van het zaad gevonden worden, terwijl het grootste gedeelte van den cotyledon zelven in het zaad blijft en zich ten koste van het albumen vergroot. Hieraan verwant is de kieming van Dracaena, hoewel het steelachtig ligchaam hier zeer kort is, zoodat bij Dracaena zich als het ware een tusschentoestand vertoont tusschen de kiemingswijze der Palmen en de germinatio immotiva der grassen. Groote overeenkomst is er met de kieming van Asparagus (zie Nees v. Esenbeck, *Genera plantarum monoc.* Vol. II. Asparagus Fig. 20). — Bij het exemplaar, dat ik ter beschikking gehad heb, had zich een wortel van meer dan 10 centim. lengte met eenige zijwortels gevormd, en twee knoopen waren boven het collum ontstaan op 2 en op ½ cent. van elkander verwijderd. Het collum zelf bevond zich op ongeveer ½ cent. afstand van het zaad. De eerste blaadjes omvatteden elkander en den top der as kokervormig.

Merkwaardig is de verandering die het zaad inwendig heeft ondergaan bij de kieming. Wanneer men op Fig. 16 Pl. II. (die een deel van deze kiemplant voorstelt) het doorgesneden zaad vergelijkt met de doorsnede van het in de vrucht voorgestelde zaad op Pl. V. Fig. 6, dan blijkt dit verschil duidelijk. De aanvankelijk kleine zaadlob heeft zich zoodanig vergroot, dat zij het grootste deel van het zaad heeft ingenomen (Pl. II. Fig. 16 *b*) ten koste van het albumen, waarvan op de doorsnede niet meer dan de ring *a* aanwezig is. Zoover als deze verandering reikt, heeft ook eene aanzienlijke wijziging van celwand en inhoud plaats gehad. De dikwandige cellen met stippelkanalen, afgebeeld Pl. V. Fig. 8, worden alleen gevonden in den buitensten ring (Pl. II. Fig. 16. *a*); over de geheele uitgestrektheid door *b* aangeduid, zijn zij vervangen door dunwandige cellen met fijnkorreligen inhoud. Over de wijze, waarop die verandering heeft plaats gehad, zal ik hier niet uitweiden, te meer niet, omdat, zoo ver ik bij het praeparaat heb kunnen nagaan, die verandering geheel overeenkomt met de verschijnselen, onlangs door Julius Sachs beschreven voor de kieming van Phoenix dactylifera (*Bot. Zeit.* 1862. N°. 31. p. 241 en volgg.) en aldaar afgebeeld op Pl: IX. Fig. 4. Ik meen hier naar te mogen verwijzen.

In de vaatbundels van het asorgaan der jonge kiemplant worden spiraal- en ringvaten, gestippelde vaten met schuine, spleetvormige stippels en uiterst kleine, maar toch hier en daar waarneembare gittercellen gevonden.

Rotterdam 1863.

BIJDRAGE TOT DE KENNIS

DER

MIKROSKOPISCHE FAUNA EN FLORA VAN DE BANDA-ZEE,

NAAR AANLEIDING VAN EEN

ONDERZOEK VAN EENIGE DOOR DIEPZEELOODINGEN VAN 990 TOT 4000 VADEMEN UIT DIE ZEE OPGEBRAGTE GRONDEN *.

DOOR

P. HARTING.

Het is bekend, dat in den loop der laatste jaren een aantal diepzeeloodingen in verschillende streken van den oceaan gedaan zijn, waardoor het gelukt is het relief van den zeebodem tot op diepten van verscheidene duizend ellen te leeren kennen. Bovendien is men er in geslaagd om, door aanwending van den toestel van BROOKE, zelfs uit zeer aanmerkelijke diepten genoegzame hoeveelheden van den grond naar boven te brengen, om deze aan een mikroskopisch onderzoek te onderwerpen en zoo de bestanddeelen, welke dien grond zamenstellen, te leeren kennen.

Het eerste daartoe betrekkelijke onderzoek werd in 1844 gedaan door EHRENBERG †. Het betrof een grond, door Kapitein Sir JAMES ROSS op zijne gedenkwaardige zuid-poolreis in de zuidelijke IJszee gelood op 270 vademen diepte en door J. D. HOOKER, die, gelijk men weet, ROSS op dien togt vergezelde, verzameld.

* Voorgedragen in de zitting van 29 December 1860.

† *Monatsbericht der Berliner Akademie*, 1844, p. 191. *Mikrogeologie*. T. XXXV A.

Het vruchtbaarst in dit opzigt zijn echter de loodingen in den Noorder Atlantischen oceaan geweest.

Pourtalès * gaf een verslag betreffende die, verrigt nabij de oostelijke kusten der Vereenigde Staten, tot op diepten van 276 vademen. Eene uitvoerige beschrijving der bij deze loodingen opgebragte organismen werd gegeven door Bailey †.

Gewigtiger nog waren de uitkomsten van het onderzoek der gronden op eenige punten van denzelfden oceaan, doch meerendeels ver verwijderd van de kust, uit diepten van 1080 tot 2000 vademen opgebragt, bij gelegenheid der loodingen, welke door Luitenant Berryman, op last der regering van de Vereenigde Staten, werden verrigt. Zoowel Bailey § als Ehrenberg ** onderzochten deze gronden mikroskopisch en gaven verslag van hunne bevinding.

Later hadden Bailey †† en Ehrenberg §§ nog gelegenheid eenige gronden van denzelfden oceaan uit diepten van 410 tot 1950 vademen te onderzoeken, welke bij de diepzeeloodingen tot opsporing van den meest geschikten weg voor het leggen van den transatlantischen telegraafkabel waren verkregen.

Nog onlangs gaf G. C. Wallich *** een beknopt verslag van zijne bevinding aangaande den grond uit 1260 vademen opgebragt bij eene diepzeelooding halfweg tusschen Groenland en Ierland, alsmede bij eene andere op 1913 vademen in denzelfden oceaan.

* *Proceedings of the American Association for the Advancement of Science*, 1850. p. 84, en later in *Report of U. S. Coast Survey* 1853, *Appendix*. p. 83.

† *Smithsonian Contributions to Knowledge*, II. 1851. Art. III.

§ *American Journal of Science an Arts*, March, p. 176 en *Quart. Journal of Microsc. Science* 1854, October, N° IX. p. 89.

** *Monatsbericht der Berliner Akademie* 1853. S. 782 en 1854 S. 54: *Mikrogeologie*, T. XXXV B.

†† Maury's *Sailing Directions*, 8th Edit. Washington, 1858. Vol. I p. 163.

§§ *Monatsbericht d. Berl. Akad.* 1857. S. 143.

*** *Ann. a. Magaz. of Natural History*, 3th Ser. Dec. 1860. Vol. VI. p. 457.

Verders deelde EHRENBERG * ook de uitkomsten mede van zijn onderzoek der door FORBES uit de Aegaeische zee op diepten van 17 tot 200 vademen opgehaalde gronden.

BAILEY † onderzocht nog drie grondsoorten uit de zee van Kamschatka, op diepten van 900, 1700 en 2700 vademen, door Luitenant BROOKE verzameld; en eindelijk maakte dezelfde nog korten tijd vóór zijnen dood de hoofduitkomsten bekend van zijn onderzoek van den grond in de Koraal-zee op 13° Z. B. 162° O. L., uit eene diepte van 2150 vademen §.

De algemeene uitkomst van deze verschillende onderzoekingen is geweest, dat schier zonder uitzondering **, in alle de opgebragte gronden mikroskopische organismen gevonden zijn, hoofdzakelijk: Diatomeën, Foraminiferen of Polythalamien, en Polycistinen, behalve de alleen door het mikroskoop herkenbare overblijfselen van andere grootere organismen, gelijk spons-spiculae enz. Op sommige plaatsen is het aantal der kleine kalk- en kiezelschalen zoo groot, dat deze in aanmerkelijke mate deel nemen aan de zamenstelling des bodems, zoodat thans zich aldaar nog krijtmergels vormen, die geheel te vergelijken zijn bij die, welke, in voorwereldlijke perioden, mede op den bodem der toenmalige zee ontstaan zijn, doch zich nu hoog boven hare oppervlakte verheffen.

Het vinden dezer mikroskopische organismen op zoo aanmerkelijke diepten, dikwerf nog in geheel ongeschonden staat, zoodat zij zich schier als versch vertoonen, heeft aanleiding gegeven tot de vraag: of zij al dan niet, op de diepten, waar zij gevonden zijn, geleefd hebben? Deze vraag is door de beide bovengenoemde natuuronderzoekers, aan wie wij bijna uitsluitend de vermeerdering onzer kennis in deze rigting te danken hebben, in juist tegengestelden zin beantwoord geworden. Straks zullen wij op dit nog onbesliste vraagstuk nader terugkomen en tevens de gronden uiteenzetten en kritisch beschouwen, welke daartoe leiden kunnen.

* *Monatsbericht* 1854, S. 305. *Mikrogeologie*, T. XXXV A.

† *American Journal*, July 1856.

§ MAURY's *Sail. Dir.* 8th Ed. 1858. I. p. 169.

** BAILEY had alleen in den grond nabij New-Foundland op 75 vademen diepte geene organismen gevonden. EHRENBERG heeft echter later, bij een onderzoek van grond afkomstig van dezelfde plek, ook daarin eenige soorten waargenomen. Zie *Monatsbericht* 1854, S. 195.

Voorts heeft men ook reeds getracht uit de in het werk gestelde nasporingen eenige algemeene gevolgtrekkingen af te leiden, betreffende de breedte- en diepteverspreiding der onderscheidene groepen dezer kleine wezens, gevolgtrekkingen, die echter niet in allen deele onderling overeenstemmend zijn, gelijk zich trouwens niet anders laat verwachten, wanneer men let op het geringe aantal der tot hiertoe waargenomen feiten en dit vergelijkt met de uitgestrektheid des bodems van den oceaan.

Ik heb daarom gaarne gebruik gemaakt van de welkome gelegenheid om eenige door diepzeeloodingen verkregen gronden te onderzoeken, die afkomstig zijn uit een gedeelte des oceaans, waaruit tot dusverre niets aangaande de zamenstelling des bodems bekend was *, en wel des te eerder omdat er onder de opgebragte gronden twee zijn uit zeer aanmerkelijke diepte, grooter dan die van eenigen grond, welke ooit aan mikroskopisch onderzoek onderworpen werd.

Gelijk reeds in het beknopte daaromtrent door de Commissie, waarvan ik de eer had lid te zijn, uitgebragte Verslag † vermeld is, zijn deze diepzeeloodingen, gedurende de maanden April, Mei en October, verrigt aan boord van Z. M. brik Cachelot, onder bevel van den Kapitein-Luitenant A. F. SIEDENBURG, en wel op de volgende plaatsen en diepten:

I.	990	vademen,	5°51′	Z. Br.	128°2½′	O. L.
II.	1200	«	4°12′	«	129° 5′	«
III.	2050	«	5°52′	«	128°51′	«
IV.	2700	«	6°40′	«	126°47′	«
V.	4000	«	4°20′	«	129°26′	«

De onderzochte gronden zijn derhalve alle afkomstig uit de Banda-zee,

* Voor zoover ik weet, is de eenige diepzeelooding, waardoor grond uit den Indischen oceaan is opgebragt, welke mikroskopisch onderzocht is, die verrigt door Kapitein PULLEN, op 5°37′ Z. Br. en 61°33′ O. L., ter diepte van 2200 vademen, derhalve in een geheel ander gedeelte van dien oceaan, ruim 78 aequator-graden verwijderd van het punt, waar de diepzeeloodingen gedaan zijn, welke de stof tot deze mededeeling hebben geleverd. Overigens is een uitvoerig onderzoek van dien grond mij niet bekend, maar alleen de optelling van eenige daarin gevonden soorten van het geslacht *Asterolampra* door R. K. GREVILLE, te vinden in het *Quart. Journal of Microsc. Science*, April 1860, N°. XXXI, p. 102.

† Zie *Verslagen en Mededeelingen*, *Afd. Natuurk.* Dl. XI. blz. 286.

N°. II, III en V in de lijn van Banda naar Amboina, N°. I iets westwaarts daarvan, ten zuiden van Ambon, N° IV daarentegen op vrij grooten afstand van die lijn in eene zuid-westelijke rigting verwijderd, op omstreeks 1½ tot 2 mijlen van het vulkanisch eilandje Goenong Api.

Opmerkelijk voorzeker is het, dat op eenen betrekkelijk zoo korten afstand, als die tusschen Banda en Amboina, eene zoo diepe zee wordt aangetroffen, waarvan het diepst geloode punt slechts weinig minder diep is dan de grootst bekende diepte van den Noorder Atlantischen oceaan, die Europa van Amerika scheidt. Evenzoo is het eenigermate onverwacht, nog in het gezigt van eenen uit de zee oprijzenden vulkaan eene diepte van 2700 vademen te vinden. De voorzorgen echter, welke bij deze loodingen zijn in acht genomen, strekken ten waarborg, dat de daarbij verkregen uitkomsten niet ver bezijden de waarheid kunnen zijn, en wat bepaaldelijk de geloode diepte van 4000 vademen betreft, zoo is deze waarschijnlijk eer te laag dan te hoog geschat, daar bij deze looding in het geheel eene lijn van 5000 vademen was afgeloopen, maar alleen dat gedeelte, namelijk ten bedrage van 4000 vademen, hetwelk in volkomen geregeld klimmende tusschentijden afliep, als werkelijk de diepte aanwijzende is beschouwd. Overigens verwijzen wij dengene, die de bijzonderheden dezer diepzeeloodingen nader mogt wenschen te kennen, naar het daaromtrent door den heer Siedenburg zelven gegeven verslag, hetwelk gedrukt is in het door het Kon. Nederl. Meteor. Instituut uitgegeven Verslag, getiteld: *Onderzoekingen met den zeethermometer, als uitkomsten van wetenschap en ervaring*, enz. 1861, bl. 160 en volg., hier alleen nog aanstippende, dat voor alle deze loodingen gebruik is gemaakt van de inrigting van Brooke, echter met eene kleine wijziging, welke daarin door den Heer Siedenburg gemaakt en ter genoemde plaatse nader beschreven is.

De verzamelde gronden waren, zoo als gewoonlijk, aan vet gehecht, en hunne hoeveelheid was bovendien zeer gering. Ik maak van deze omstandigheden hier gewag, omdat het voor de volledigheid van het onderzoek inderdaad wenschelijk is eensdeels dat men over grootere hoeveelheden te beschikken hebbe, anderdeels dat deze vrij zijn van het vet, welks geheele verwijdering steeds moeijelijk is. Dat daartoe, althans in sommige gevallen, de mogelijkheid bestaat, blijkt uit het medegedeelde in het Verslag over die diepzeeloodingen (bl. 165), alwaar omtrent die op 1200 vademen vermeld wordt: dat, toen de ijzeren toestel binnen boord gekomen was, deze geheel bedekt was met bijna witte modderachtige klei. Nu zal het, wel is waar, slechts zelden gebeuren, dat de grond op die wijze wordt boven gebragt, daar de aan den toestel los aanhangende deelen in den regel zullen afgespoeld zijn, alvorens deze de oppervlakte des waters bereikt heeft, maar, wanneer, gelijk in het onderhavige geval, zij werkelijk nog daaraan kleven, dan heeft men gelegenheid eene grootere hoeveelheid, niet verontreinigd door vet, daarvan in te zamelen, en het is wenschelijk dat die gelegenheid voortaan niet meer onbenuttigd voorbij ga.

Welligt is het ook mogelijk den grond op eene andere wijze naar boven te voeren dan door middel van vet. Reeds zijn twee inrigtingen beschreven, waarvan althans de eene mij voorkomt eene nadere toetsing te verdienen. Ik bedoel die van Wallich *, hoofdzakelijk bestaande uit een klein vergaarbakje, waarvan de opening door een klep gesloten is, die zich van zelf door drukking op eene veer opent, wanneer de toestel den bodem bereikt, om zich weder te sluiten zoodra deze wordt opgehaald. Minder gepast en alleen bij ondiepe loodingen in de nabijheid der kust bruikbaar schijnt mij de zuigsonde toe, welke door Graf is uitgedacht en door Joh. Müller † aanbevolen, tenzij men deze ook zoodanig inrigte, dat zij zich van zelf opent op het oogenblik, dat zij den bodem bereikt, en zich weder sluit, wanneer zij daarmede niet meer in aanraking is.

Ik maak van deze voorslagen tot verbetering der wijze van verzameling des gronds slechts in het voorbijgaan gewag, ten einde er de aandacht der zeevaarders op te vestigen. Zij zelve kennen het best de eigendommelijke bezwaren, die aan diepzeeloodingen verbonden zijn, en zullen dus ook het best weten, in hoe verre het hun mogelijk is, zich de gegeven wenken ten nutte te maken en in praktijk te brengen. Eene opmerking zij mij hier nog veroorloofd; zij betreft de wijze van bewaring van den op deze of op de gewone wijze verzamelden grond. Voor het onderzoek is het namelijk wenschelijk, dat een gedeelte in gedroogden, een ander in vochtigen toestand bewaard worde, hetzij op rum, arak of eenig ander sterk alkoholisch vocht, of nog beter op het bewaarvocht van Goadby, waarvan hieronder de zamenstelling is opgegeven §.

---

* *Quart. Journ. of Microsc. Science*, XXV, p. 1.

† *Abhand. d. Berliner Akademie.* 1858. p. 27.

§ Deze is: 8 med. onsen keukenzout, 4 onsen aluin en 8 grein. sublimaat, opgelost in 9 kan

Omtrent de door mij gevolgde onderzoekingsmethode kan ik kort zijn. Zij was die, welke men gewoon is in alle dergelijke gevallen te bezigen. Alleenlijk heb ik, ter verwijdering van het vet, in plaats van den vroeger tot hetzelfde doel veelal gebruikelijken ether of terpenthijnolie, benzol aangewend, omdat deze iets spoediger tot het doel leidt.

Nadat het poeder hierdoor van het aanhangend vet bevrijd was, werd het op glasplaatjes verdeeld en er canadabalsem op gebragt, met een dekplaatje. Aldus werd een aantal praeparaten verkregen, die nu geschikt waren voor het mikroskopisch onderzoek der daarin voorkomende vormbestanddeelen.

Alvorens over te gaan tot de mededeeling der resultaten van dit onderzoek, moet ik hier nog opmerken, dat van zeer vele der waargenomen kiezel- en kalkschalen slechts grootere of kleinere fragmenten voorhanden waren, zoodat in verscheidene gevallen eene volledige bepaling en beschrijving der soort niet uitvoerbaar waren. De bijgevoegde afbeeldingen, die alle gemaakt zijn bij doorvallend licht en bij eene 500malige vergrooting, zullen evenwel, naar ik vertrouw, voldoende zijn om later, wanneer door een grooter materiaal naauwkeuriger soortbepalingen mogelijk zijn geworden, de hier gevonden soorten te herkennen.

N° I. GROND VAN 990 VADEMEN.

In het bovengenoemd verslag van den heer Siedenburg wordt deze grond genoemd: *fijn grijs zand met gebroken schelpen*. Deze benaming wordt niet bevestigd door het mikroskopisch onderzoek van het aan het vet klevende poeder. Dit vertoont zich veeleer als eene zeer fijne klei, roodbruin gekleurd door zeer talrijke, uiterst kleine ijzeroxyd-moleculen, waartusschen eenige weinige grootere scherphoekige fragmenten van verschillende niet nader bepaalbare mineralen verspreid liggen. Het gelukte mij niet daarin eenig spoor

water. Ditzelfde vocht is ook zeer geschikt voor de bewaring van kwallen, polypen en weekdieren. Natuurlijk kan dit zoutmengsel ook in droogen toestand worden medegenomen, om, naar gelang men er behoefte aan heeft, daarvan een gedeelte, des noods in zeewater, op te lossen. Het laatste dient dan echter vooraf gefiltreerd te worden ter verwijdering der welligt daarin zwevende kleine organische wezens, wier overblijfselen anders onder de bestanddeelen van den grond gemengd zouden geraken.

van organismen te vinden, noch van die welke alleen door het mikroskoop zigtbaar zijn, noch van schelpfragmenten, afkomstig van grootere weekdieren. Indien deze in den opgebragten grond geweest zijn, dan waren zij derhalve in elk geval daarin niet in fijn vergruisden toestand aanwezig.

N° II. GROND VAN 1200 VADEMEN.

Blijkens het verslag duurde het uitloopen der lijn, alvorens de bodem bereikt werd, slechts 17 minuten en 19 seconden, terwijl daarentegen aan het inhalen meer dan $2\frac{1}{2}$ uur werd besteed. De oorzaak hiervan werd opgehelderd bij het binnen boord komen van de stang met den nog daaraan bevestigden 60ponds kogel, beide bedekt met *licht-grijze modderachtige klei.* De heer Siedenburg besluit daaruit, dat de grond op dit punt zoo week was, dat de kogel niet van de stang heeft kunnen glijden, uit gebrek aan genoegzamen weêrstand.

Bij mikroskopisch onderzoek blijkt, dat de minerale bestanddeelen grootendeels gevormd worden door een uiterst fijn moleculair gruis, waarvan de deeltjes onderling zijn zamengeklonterd, met weinige, daartusschen verspreid liggende, iets grootere fragmenten van rotsgesteenten, die alle scherpkantig zijn.

Van alle de onderzochte gronden is deze de rijkste aan organismen. Deze maken meer dan de helft der geheele massa uit.

DIATOMEËN.

1. *Coscinodiscus irradiatus* Hg. fig. 1.

Zeer na overeenstemmende met *C. radiatus* Ehr., alleen met dit verschil, dat de polyëdrische vakjes niet tot aan den rand der klep gaan, maar dat zij daar begrensd worden door een smallen zoom, welke fijn gestreept is.

2. *Coscinodiscus minor* Ehr. fig. 2.

3. *Coscinodiscus radiopunctatus* Hg. fig. 3.

Deze soort komt in de teekening der kleppen nabij aan *C. profundus* Ehr. (*Mikrogeologie,* T. XXXV B. fig. 8) uit de diepte van den Atlantischen oceaan, doch zij is minstens de helft kleiner (40 *mmm*), en de cellen of vakjes, die het middengedeelte der klep innemen, zijn veel kleiner en minder digt opeengedrongen. In dit opzigt nadert zij meer tot *C. subtilis* Ehr., waarvan zij zich alleen onderscheidt door de straalsgewijze zeer fijne streepjes aan den rand der klep.

Van alle drie deze soorten van *Coscinodisci* zijn verscheidene exemplaren waargenomen.

4. *Amphora?* fig. 4. Slechts een enkel exemplaar aangetroffen.

FORAMINIFEREN.

5. *Rotalia intermedia* Hg. fig. 5.

Slechts één voorwerp dezer soort is waargenomen. Ik heb haar dezen soortnaam gegeven, omdat zij het midden houdt tusschen *R. lepida* Ehr. en *R. Pandorae* Ehr. in de betrekkelijke grootte der verschillende kamers.

6. *Ptygostomum* spec. fig. 6.

7. *Ptygostomum* spec. fig. 7.

8. *Globigerina* spec. fig. 8.

9. *Globigerina* spec. fig. 9.

Van deze vier soorten (6 tot 9) liggen talrijke grootere en kleinere fragmenten in de massa verspreid. Het is mij niet gelukt, deze met zekerheid tot reeds bekende soorten terug te brengen. De beide Ptygostomen herinneren echter *Ptygostomum Orphei* Ehr. van den bodem des Atlantischen Oceaans (*Mikrogeologie*, T. XXXV, B. fig. 1 en 2). Het zoude kunnen wezen, dat de beide door mij afgebeelde, uit eenige kamers bestaande fragmenten ook van ééne soort afkomstig zijn, en dat het ontbreken of liever het onduidelijk zijn der openingen in de kamerwanden der eene slechts het gevolg is van een langer verblijf op den bodem der zee na den dood van het dier. Reeds vroeger * heb ik op deze soort van verwering der oppervlakte, waardoor dezelfde soorten van Foraminiferen zich dan eens met dan weder zonder poriën vertoonen, opmerkzaam gemaakt.

Eene der Globigerinen (N°. 9) nadert ook zeer tot *G. ternata* van den bodem deszelfden oceaans (*Mikrogeologie*, ibid., fig. 5 en 6). Alleenlijk zijn de eerstgevormde kamertjes in deze laatste iets grooter.

10. *Bulimina* (?) *ovulum* Hg., fig. 10 *a* en *b*, in twee verschillende rigtingen gezien. Drie exemplaren zijn waargenomen, waarvan er echter slechts een geheel ongeschonden scheen te zijn. De lengte-doormeter van dit voorwerp bedraagt 100 *mmm*.

* Zie: *De Bodem onder Amsterdam*. Verhand. der Eerste Klasse van het Kon. Ned. Instituut, 3de Reeks, 5de Deel, bl. 42.

Het is met eenigen schroom, dat ik deze soort tot het geslacht *Bulimina* van D'ORBIGNY breng; hare stelling daarin kan slechts als eene voorloopige beschouwd worden.

11. *Grammastomum* (*Textilaria*) *Falx* EHR. fig. 11.

Slechts eenmaal gevonden en zonder de laatste kamer. Naar de afbeelding te oordeelen, die EHRENBERG (*Mikrogeologie*, P. XXIII, fig. 15) van de species, welke in den Nummulitenkalk der pyramide van Gyzeh voorkomt, gegeven heeft, is deze daaraan in gedaante alsmede in het ontbreken van openingen gelijk, doch alleen iets grooter.

Behalve deze mikroskopische Foraminiferen-schalen, bevinden zich in dezen grond nog een aantal fragmenten der schalen van grootere soorten uit dezelfde afdeeling. Een dezer fragmenten is afgebeeld in fig. 12; daarin gaan van uit de openingen in de schaal stersgewijs kleine stralen uit, min of meer op de wijze als bij beencellen. In andere fragmenten zijn de openingen echter zuiver rond. Vermoedelijk zijn het brokstukken van meer dan éene soort.

POLYCISTINEËN.

12. *Haliomma nitidum* HG. fig. 13 en fig. 14.

Van deze soort zijn alleen fragmenten gevonden. De grootere, gelijk die, welke afgebeeld zijn, duiden op eenen doormeter der schaal van 170 tot 180 *mmm.* Deze *Haliomma* nadert door de tamelijk regelmatige gedaante der mazen van de schaal tot *H. hexagonum* EHR. van den bodem des Atlantischen Oceaans, doch de Indische soort is grooter, de mazen, waaruit de schaal bestaat, zijn talrijker, en ook zijn er meer stekels langs den rand der schaal geplaatst. Daar deze echter bij de onderzochte voorwerpen altijd geheel of ten deele afgebroken zijn, zoo is hun normaal aantal niet met zekerheid te bepalen; het schijnt echter 10 te zijn.

13. *Haliomma gracile* HG. fig. 15.

Doormeter 68 *mmm.* Deze soort van *Haliomma*, waarvan slechts één exemplaar voorkwam, nadert zeer door de dunne kanten of balken tot *H. spinulosum* MÜLL. uit de Middellandsche zee *. De mazen zijn echter de helft kleiner. Ook was in het onderzochte voorwerp geen kern zigtbaar.

* *Abh. d. Berl. Akad.* 1858, S. 39. T. IV, fig. 6 en 7.

14. *Haliomma lens* Hg. fig. 16.

Grootste doormeter 66 *mmm.* Eene kleine soort van eenigzins ellipsoïdische gedaante, met rondachtige op rijen geplaatste mazen en twee fijne spiculae tegenover elkander in de lengte-as, die zich tot in het binnenste der schaal voortzetten.

15. *Haliomma pyriforme* Hg. fig. 17.

Aan het eenige gevonden voorwerp ontbreekt nog ongeveer een derde der schaal, welke uit zeer groote mazen bestaat, terwijl men door de eene oppervlakte heen de andere ziet. De grootste doormeter bedraagt 160 *mmm.* Deze soort onderscheidt zich van alle andere van dit geslacht, door dat de schaal noch rond noch langwerpig rond, maar eenigzins peervormig is. Er zijn geen stekels noch spiculae aan zigtbaar.

16. *Haliomma scutum* Hg. fig. 18.

Met eenigen twijfel breng ik dezen vorm tot het geslacht *Haliomma.* Twee exemplaren zijn daarvan gevonden. Beide hebben dezelfde langwerpig schildvormige, aan het eene einde verbreede gedaante, met rondachtige op eenigzins onregelmatige dwarse rijen geplaatste mazen. en in beide vertoont zich, geheel op dezelfde wijs, het stelsel van schijnbare intercellulaire kanalen, gelijk dit in de figuur is afgebeeld. De lengte-doormeter bedraagt 120 *mmm.* *

17. *Flustrella cyclica* Hg. fig. 19.

Vrij talrijk, in grootere en kleinere brokstukken. De celachtige mazen van het middengedeelte zijn tamelijk regelmatig zeshoekig, die van den buitenzoom kleiner en onregelmatiger. Rondom het middelpunt vertoonen zich een aantal (5 tot 8) cirkelronde, met lucht gevulde intercellulaire gangen.

18. *Lithocyclia reticulata* Hg. fig. 20.

Nabijkomend aan *Lithocyclia Ocellus* Ehr., uit den Polycistinen-mergel van Barbados (*Mikrogeologie*, P. XXXVI, fig. 30), doch er van verschillend door den vierhoekigen vorm der straalsgewijs geplaatste mazen, die den randzoom daarstellen.

* In N°. 13, 14, 15 en 16 zijn geene kernen waargenomen. Ehrenberg heeft de kernlooze Haliommen tot een afzonderlijk geslacht *Cenosphaera* vereenigd (*Monatsbericht*, 1851, S. 237). Wanneer echter de schalen gebroken zijn, dan is het zeer moeijelijk te beslissen, of er een kern al dan niet aanwezig is geweest. Het is daarom dat ik de boven vermelde soorten voorloopig onder het geslacht *Haliomma* gerangschikt heb.

19. *Lithocampe corbula* Hg. fig. 21.

Lengte 150 *mmm.* Drie geledingen, de achterste half bolvormig, de beide andere bijna cylindrisch, met op dwarse rijen geplaatste kleine vierhoekige openingen.

20. *Lithocampe sinuosum* Hg. fig. 22.

Lengte 96 *mmm.* Deze soort kenmerkt zich door een tamelijk breeden, doorschijnenden buitenzoom en den golvenden loop zoowel van dezen als vooral van den binnenwand. De gedaante is kegelvormig. Er zijn slechts twee leden, die door eene scherpe insnijding, ook in den buitenzoom, gescheiden zijn. De kleine vierkante openingen staan op dwarse rijen.

21. *Eucyrtidium?* fig. 23.

22. *Podocyrtis brevipes* Hg. fig. 24.

Lengte 120 *mmm.* Kegelvormig; drie geledingen, met ronde op onregelmatige dwarse rijen geplaatste openingen in de schaal; vier korte stekels aan den voorrand der opening. In de figuur zijn daarvan slechts drie zigtbaar.

23. *Acanthodesmia arcuata* Hg. fig. 25.

Deze soort, waarvan verscheidene fragmenten voorhanden zijn, nadert in algemeene gedaante zeer tot *A. vinculata* Müll. * uit de Middellandsche zee, doch is meer dan dubbel zoo groot. Ook schijnt het aantal der kiezelbalken kleiner te zijn, voor zoo ver zich dit beoordeelen laat uit de aanwezige voorwerpen, waarvan er geen in zijn geheel is.

24. *Acanthodesmia inermis* Hg. fig. 26.

Ook van deze soort zijn alleen fragmenten voorhanden, die zich van die der vorige soort onderscheiden door het ontbreken der puntige uitsteeksels, terwijl de kiezelbalken in het algemeen dikker zijn.

25. *Lithocircus?* fig. 27.

26. Verscheidene fragmenten van eene niet nader bepaalbare soort, met op regelmatige rijen geplaatste groote openingen (zie fig. 28). Daar deze stukjes nagenoeg plat zijn, kunnen zij niet van eene *Haliomma* afkomstig zijn, waaraan anders hun maaksel het meest herinnert.

SPICULAE EN ANDERE KIEZELLIGCHAAMPJES VAN SPONSEN.

27. *Spongolithis acicularis* Ehr. fig. 29, 30 en 31.

28. *Spongolithis gigas* Ehr. fig. 32.

* L. c. S. 30, T. I. fig. 4—7.

29. *Spongolithis cenocephala* Ehr. fig. 33 en 34.
30. *Spongolithis Anchora* Ehr. fig. 35.
31. *Spongolithis* ? fig. 36.
32. *Pollinula ovum* Hg. fig. 37.

Met dezen voorloopigen naam bestempel ik een ligchaampje van eironden vorm, 70 *mmm.* lang, uitwendig geheel bezet met digt bijeenstaande, korte scherpe stekeltjes op regelmatige rijen. Vermoedelijk eene zoogenaamde *gemmula* van eene of andere sponssoort.

N°. III. GROND VAN 2050 VADEMEN.

In het verslag van den heer Siedenburg staat opgeteekend, dat deze grond *zwarte zachte modder* is, en dat, even als in het vorige geval, waarschijnlijk alleen ten gevolge van de weekheid des bodems, de kogel aan den toestel was blijven hangen.

Het mikroskopisch onderzoek leerde, dat de minerale bestanddeelen volkomen dezelfde zijn als in N°. II, doch dat daarentegen de organische inmengselen veel verschillen, zoodat slechts weinige soorten in beiden gemeenschappelijk voorkomen, terwijl de Foraminiferen, welke in N°. II talrijk zijn, hier daarentegen geheel ontbreken, hetgeen voor een deel ook rekenschap geeft van het verschil in kleur der beide gronden. Overigens is het aantal der organische overblijfselen in dezen grond weinig minder groot, zoowel wat de soortenrijkheid als wat het aandeel, dat zij aan de gezamenlijke massa nemen, betreft.

In de volgende optelling der waargenomen soorten, zijn die, welke ook in N°. II gevonden zijn, met een * aangeduid.

DIATOMEËN.

1*. *Coscinodiscus irradiatus* Hg. Tamelijk talrijk.
2*. *Coscinodiscus radiopunctatus* Hg. Tamelijk talrijk.
3. *Campylodiscus arachnoïdes* Hg. fig. 38.

Eene fraaije soort van dit geslacht waarvan slechts één goed bewaard exemplaar gevonden is. De schaal is nagenoeg cirkelrond en heeft een doorsnede van 104 *mmm.* Tegen den buitenwand steunen ter weêrszijden straalsgewijs geplaatste vakjes met dubbele grenslijnen; elk dezer vakjes, alleen met uitzondering der kleineren nabij de beide pooleinden, is nog door een dwars tusschenschotje, afwisselend geplaatst met die in elk der aangrenzende vakken, in tweeën verdeeld. De grootte dezer vakken neemt in twee rigtingen af, en zoo omgeven deze eene groote elliptische middenruimte, aan welker beide einden zich twee tegenover elkander staande vrij groote, eironde kringen of openingen vertoonen. In het midden der schaal is een veelhoekig vakje, waartegen aan andere vijf- of zeshoekige vakjes grenzen, die op hunne beurt weder door andere dergelijke vakjes begrensd worden. Al deze vakjes, welke de middenruimte innemen, hebben zeer dunne grenslijnen, en dit geheele gedeelte herinnert eenigzins het webbe eener spin, hetgeen dan ook aanleiding tot de soortbenaming heeft gegeven. *

4. *Grammatophora elongata* Hg., fig. 39.

Slechts één exemplaar, zich van de overige soorten van dit geslacht vooral onderscheidende door den grooten lengtedoormeter, die 160 *mmm.* bedraagt. De beide middenstrepen loopen regt, zonder andere bogten dan die ter plaatse waar zij, ombuigende, elkander ontmoeten.

POLYCISTINEËN.

5. *Haliomma polyacanthum* Hg., fig. 40.

Deze soort behoort tot de grootere van haar geslacht. Haar grootste doormeter bedraagt 190 *mmm.*, dus bijna ⅕ millim. De schaal is niet geheel rond maar eenigzins langwerpig rond. De mazen zijn groot, met tamelijk dikke balken, die onregelmatig ronde openingen begrenzen, van zeer ongelijke grootte. Ook in hare verdeeling is geen regelmaat herkenbaar. Langs de randen staan, mede onregelmatig verstrooid, talrijke korte stekels op drie of vier rijen. Eene voortzetting der stekels binnenwaarts in de schaal was niet waarneembaar.

Het naast komt deze soort bij *H. echinoïdes* Müll. † uit de Middelland-

* *Naschrift.* Sedert deze verhandeling is aangeboden, is een opstel van R. K. Greville verschenen, getiteld: *Descriptions of New and Rare Diatoms.* Series IX (*Quat. Journal of Microscopical Science,* Julij 1863 p. 63), waarin hij, onder andere, eenige vormen beschrijft, welke door hem gevonden zijn in aarde van Barbados, en met den boven beschreven *Campylodiscus arachnoides* in eenige hoofdpunten van het maaksel overeenstemmen. Greville heeft de door hem beschreven soorten tot een nieuw geslacht, *Porodiscus*, vereenigd, waaronder derhalve ook *C. arachnoides* kan gerangschikt worden.

† L. c. S. 36, T. V, fig. 3.

sche zee, maar deze is een derde kleiner, bolrond en heeft een veel geringer aantal stekels, die symmetrisch geplaatst zijn en waaronder grootere voorkomen, die zich in het binnenste der schaal naar de kern voortzetten.

6. *Haliomma inermis* Hg., fig. 41; in *a* de schaal van de oppervlakte, in *b* van binnen gezien.

Slechts een enkel groot fragment, van 194 *mmm*. in middellijn, doch volledig genoeg om daaruit tot het maaksel der soort te besluiten.

De gedaante is nagenoeg kogelrond. Van uitwendige aanhangsels is geen spoor waarneembaar. De mazen zijn groot, zeshoekig en in regelmatige rijen geplaatst. Hare ruimten vertoonen zich fijn gestippeld, vermoedelijk omdat daarin eene fijnkorrelige stof bevat is, die eigenlijk aan de schaal vreemd is en niet anders is dan de allerfijnste tot moleculen vergruisde deeltjes, die tot de minerale bestanddeelen van den bodem behooren *.

De in het midden der schaal geplaatste, door dunne spiculae daarmede verbonden bolronde kern bestaat uit twee concentrisch eene middencel omgevende lagen van celachtige mazen.

7. *Haliomma oblongum* Hg., fig. 42.

Een enkel voorwerp van 196 *mmm*. lengte; bol, schildvormig, zeer langwerpig (dubbel zoo lang als breed), met groote zeshoekige mazen in het midden der schaal, waar ook een kern doorschemert, en kleinere meer rondachtige mazen naar de randen toe. Aan het eene smalle einde zijn een paar korte stekels; vermoedelijk zijn die aan het andere einde afgebroken.

8. *Haliomma amphiaspis* Hg., fig. 43.

Lengte 54 *mmm*. Jeugdige toestand? Joh. Müller (l. c. p. 21) heeft bij de veel grootere *H. amphidiscus* uit de Middellandsche zee waargenomen, dat in den jeugdigen toestand de schaal aan den rand gespleten is, zoodat zij zich, van terzijde gezien, ongeveer in denzelfden vorm vertoont als die welke in fig. 43 is afgebeeld. Het is om die reden, dat ik meen ook deze voor eenen jeugdigen vorm van eene soort van dit geslacht te moeten houden.

Mogt echter later blijken, dat deze vorm persisterend is, dan zoude de

* Hetzelfde nam ik waar bij eenige andere Polycistineën, vooral bij de zoodanige, welker schaal zeer kleine openingen heeft, zoo als de *Lithocampe*-soorten. Het laat zich begrijpen, dat het moleculaire gruis, eenmaal daarin gedrongen zijnde, er gemakkelijker in hangen blijft, dan wanneer de mazen grooter zijn.

geslachtsnaam *Amphiaspis* daaraan kunnen gegeven worden, als uitdrukkende de vereeniging van twee schildvormige plaatjes door eene commissuur ter weerszijde.

9*. *Haliomma* (?) *scutum* Hg.

10. *Tetrapyle* (?) *polyacantha* Hg., fig. 44.

Alleen om geen nieuw geslacht op gebrekkige gegevens te gronden, zij deze soort, waarvan mede slechts één exemplaar gezien is, voorloopig gerangschikt in het Müllersche geslacht *Tetrapyle*. De algemeene gedaante herinnert daaraan. Doch terwijl bij *Tetrapyle* ter weerszijde in de schaal twee openingen (in het geheel dus vier) zijn, is er hier slechts ééne zigtbaar, waarvan het bovendien geenszins zeker is of zij niet het gevolg eener beleediging is. Ook de asymmetrie der stekels, waarvan er zes aan de eene en drie aan de andere zijde staan, kan daardoor veroorzaakt zijn, hoewel de plaatsen van afbreking niet meer te herkennen zijn. Opmerking verdient nog, da det randmazen veel dunner balken hebben, dan die welke het midden innemen.

11. *Rhopalastrum bandaicum* Hg. fig. 45.

Grootste doormeter 234 *mmm.* Geen eigenlijke, door een bijzonder maaksel van het overige ligchaam onderscheiden kern, alleenlijk zijn de mazen in het middendeel het kleinst en nemen buitenwaarts in grootte toe. De rand is nergens gesloten, dan alleen ter weerszijde van elk der drie stralen of hoornen, waar zich een eenigzins bolle, verdikte kant bevindt.

12. *Rhopalastrum* ? Fig. 46.

Een fragment, waarvan de stelling in dit geslacht zeer onzeker is.

13. *Flustrella micromma* Hg., fig. 47.

Vrij talrijke exemplaren van onderscheiden grootte, de grootste 150 *mmm.* in middellijn. De min of meer straalsgewijs geplaatste openingen zijn klein. Rondom het middenpunt 5 tot 8, niet volkomen cirkelvormige, schijnbare intercellulaire gangen.

14. *Cladospyris moluccanus* Hg., fig. 48.

Grootste doormeter 112 *mmm.* De beide helften der schaal, elk ruim drie vierde van een bol uitmakende, zijn door eene diepe insnijding gescheiden; hare wanden worden gevormd door weinige, meerendeels groote mazen van ongeregelde gedaante en stelling, aan de oppervlakte staan talrijke stekels, waarvan sommige vorksgewijs verdeeld zijn; het midden wordt ingenomen door een ronde kern, bestaande uit eene middencel, omgeven door drie concentrische lagen van vierhoekige mazen met dunne balkjes, waarvan de buitenste het grootst zijn.

15*. *Lithocampe corbula* Hg.

16. *Podocyrtis micracanthus* Hg., fig. 49.

Lengte 100 *mmm.* Vier geledingen, waarvan het voorste of grootste bijna cylindrisch is. Aan beide uiteinden twee zeer korte stekeltjes. Rondachtige, op dwarse rijen geplaatste openingen in de schaal.

17*. *Acanthodesmia inermis* Hg.

18. *Lithocircus annulus* Hg., fig. 50.

Dit voorwerp komt zoozeer overeen met *L. annularis* Müll. uit de Middellandsche zee bij Nizza (l. c. p. 29. T. I. fig. 1), dat men beide voor dezelfde soort zoude houden. Het eenige verschil is, dat in het door Müller afgebeelde voorwerp de kiezelring vijf en in dit zes vertakte uitsteeksels heeft, terwijl daaraan bovendien nog een paar kleinere zigtbaar zijn.

SPICULAE EN ANDERE KIEZELLIGCHAAMPJES VAN SPONSEN.

19*. *Spongolithis acicularis* Ehr.

20*. » *gigas* Ehr.

21*. » *cenocephala* Ehr.

22*. » *Anchora* Ehr.

23. *Spongolithis?* fig. 51.

Welligt eene spicula van eene Polycistinee, waaronder er mede zijn, zoo als *Haliomma longispinum* Müller, die van zeer lange met plaatselijke puntige verdikkingen bezette stekels voorzien zijn. De gebogen vorm maakt het echter meer waarschijnlijk, dat dit ligchaampje eene spons-spicula is.

24. *Spongolithis stellatus* Hg. (*Lithasteriscus* Ehr.) fig. 52, 53.

Dergelijke vormen als Bowerbank (*Philos. Transact.* 1858, p. 307) onder den algemeenen naam van *simple stellate spicula* uit het inwendige van verschillende sponsen beschrijft.

25. *Spongolithis verticillatus* Hg. fig. 54.

Een vorm, naderende tot dien, welke Bowerbank (*l. c. p.* 293) beschrijft als afkomstig van twee hem overigens niet bekende sponsen uit de West-Indische zee. Even als van de overige Spongolithen is de hier gegeven soortnaam slechts een voorloopige. De Spongolithen terug te brengen tot de soorten van sponsen, waarvan zij afkomstig zijn, is in zeer vele gevallen

10

onmogelijk, daar bij onderscheidene soorten kiezelspiculae van bijna gelijke gedaante voorkomen, en deze bovendien in een en hetzelfde individu nog verschil opleveren.

De volgende drie ligchaampjes, wederom onder het voorloopige geslacht *Pollinula* gerangschikt, zijn vermoedelijk *gemmulae* van sponsen.

26. *Pollinula reniformis* Hg. fig. 55 *a*, in *b* een gedeelte sterker (700 maal) vergroot.

Lengte-doormeter 52 *mmm.* De gedaante is niervormig. De uiterst kleine stekeltjes staan aan de oppervlakte op zeer digte evenwijdige rijen, die elkander kruisen, in dier voege dat het bij eene geringere vergrooting schijnt alsof twee stelsels van evenwijdige strepen elkander onder eenen stompen hoek snijden.

27. *Pollinula hispida* Hg. fig. 56.

In vorm gelijkende op *P. ovum* (zie bl. 15), doch merkelijk kleiner, met een lengte-doormeter van 50 *mmm.*, en de oppervlakte bezet met minder talrijke doch grootere stekeltjes.

28. *Pollinula minuta* Hg. fig. 57.

Doormeter slechts 22 *mmm.* Bolrond; oppervlakte digt bezet met korte stekeltjes.

N. IV. GROND VAN 2700 VADEMEN.

Deze looding, welke, gelijk reeds is opgemerkt (bl. 5), op vrij grooten afstand van de overige, in een geheel ander gedeelte der Banda-zee geschied is, bragt, volgens het verslag van den heer Siedenburg, op: *fijnen kleiachtigen bruinen modder, met kleine bijna niet te onderscheiden schelpjes.* In de achter het verslag gevoegde lijst der diepzeeloodingen wordt deze grond aangeduid als: *grijze fijne modder, koraal en kleine schelpjes.*

In de geringe, niet meer dan eenige milligrammen bedragende hoeveelheid, die, aan het vet klevende, door mij ontvangen is, heb ik geen spoor noch van koralen, noch van schelpen kunnen ontdekken.

De hoofdmassa bestaat uit hetzelfde zamengeklonterde met ijzeroxyd-moleculen vermengde moleculaire gruis, dat ook in de vorige gronden de hoofdmassa uitmaakt. Echter is hier het aantal grootere fragmenten van verschillende mineralen aanmerkelijker. Alle zijn scherpkantig, zonder spoor van eenige afslijting door rolling. Daaronder komen brokstukjes voor, die gelijken op het gruis van puimsteen en die vermoedelijk vulkanische asch zijn, waarvan trouwens de nabijheid van den Goenong Api gereedelijk rekenschap geeft. Trouwens dergelijke brokstukjes, ofschoon minder talrijk en kleiner, komen ook in de overige gronden uit de Banda-zee voort. Om deze met zekerheid van andere vergruisde rotsbestanddeelen te herkennen, zoude daaraan echter eerst een onderzoek van de asch, door de vulkanen in deze streken uitgeworpen, moeten vooraf gaan.

Aan mikroskopische organismen is deze grond veel minder rijk dan N°. II en III. De kleinere soorten van Foraminiferen ontbreken geheel; slechts een enkel fragment werd gezien, dat vermoedelijk afkomstig was van eene groote soort met dikwandige schaal. Van Diatomeën zag ik slechts een enkel exemplaar van *Coscinodiscus minor*.

Iets talrijker zijn de overblijfselen van Polycistineën, doch meerendeels in eenen toestand, die elke nadere bepaling onmogelijk maakt. Met zekerheid herkenbaar was alleen: *Acanthodesmia arcuata*, dezelfde die ook op 1200 vademen gevonden is. Andere fragmenten behoorden aan *Rhopalastrum* en *Flustrella*, hoogst waarschijnlijk dezelfde soorten als reeds boven beschreven zijn.

Van spons-spiculae zijn waargenomen: *Spongolithis acicularis*, *S. gigas*, en het in fig. 60 afgebeelde kiezelligchaampje, dat hier alleen is aangetroffen en in gedaante nadert tot de mede kransgewijs gedoornde spiculae door Bowerbank (l. c. p. 295) beschreven en afgebeeld, welke afkomstig waren van een hem overigens onbekende spons uit de stille Zuidzee.

N° V. GROND VAN 4000 VADEMEN.

In het verslag is deze genoemd: *witte of lichtgrijze zachte modderachtige klei*. Bij het mikroskopisch onderzoek blijkt, dat de massa grootendeels is zamengesteld uit zeer fijn moleculair gruis, dat minder zamengeklonterd is dan in de andere onderzochte gronden, zoodat de kleine deeltjes zich, bij drukking en zachte wrijving met het dekplaatje, gemakkelijk vaneen scheiden. Ook ontbreken hier de ijzeroxydmoleculen, die elders tusschen het moleculaire gruis verspreid liggen. Er komen daarin slechts weinige iets grootere, steeds scherpkantige fragmenten van mineralen voor.

Mikroskopische organische overblijfselen zijn daarin uiterst spaarzaam, en diegene welke voorkomen zijn zoo vergruisd en afgesleten, dat zij moeijelijk tot eene bepaalde soort kunnen gebragt worden.

Foraminiferen ontbreken geheel. Van Diatomeën zijn er twee gezien, beide tot het geslacht *Coscinodiscus* behoorende (fig. 61, 62), doch de teekening aan de oppervlakte der kleppen is door afslijting bijna geheel verdwenen. De eene (fig. 61) is waarschijnlijk dezelfde, die ook in N°. II en III tamelijk menigvuldig aangetroffen en door mij *Coscinodiscus radiopunctatus* genoemd is. De andere is welligt *C. irradiatus*, waarvan de randen der cellen op de eene helft geheel, op de andere grootendeels afgesleten zijn.

Ook komen eenige zeer kleine fragmenten van Polycistineën voor. In een daarvan meen ik de kern eener *Haliomma* te herkennen, terwijl de andere (fig. 65) vermoedelijk lapjes van *Flustrella* of van *Rhopalastrum* zijn.

Van Spongolithen zijn alleen een paar exemplaren van *S. acicularis* gezien.

Het geheele getal der soorten van mikroskopische organismen, in deze gronden gevonden, bedraagt 52, welke aldus verdeeld zijn:

Diepte.		Diatomeeën.	Foraminiferen.	Polycistineën.	Spongiaceeën.
1200	vadem.	4	7	14	6
2050	«	4	0	14	10
2700	«	1	0	4	3
4000	«	2	0	2	1

Het overwigt der som, verkregen door bovenstaande cijfers bij elkander op te tellen, wordt verklaard door dat eenige soorten in twee of meer diepten zijn aangetroffen.

Slechts één komt in alle vier de onderzochte gronden voor: het is *Spongolithis acicularis*. Men weet echter, dat onder dien naam de spiculae van een groot aantal soorten van sponsen worden zamengevat, zoodat uit de tegenwoordigheid van dezen vorm nog geenerlei besluit kan worden afgeleid aangaande de soort van spons, waaraan deze oorspronkelijk heeft toebehoord. Hetzelfde geldt, hoewel dan ook in geringere mate, van de overige Spongolithen die eene meer gekenmerkte gedaante hebben, en wij zullen derhalve geen harer in de rekening opnemen, maar ons alleen tot de Diatomeeën, Foraminiferen en Polycistineën bepalen.

Het getal der gevonden soorten uit deze afdeelingen bedroeg:

Diatomeeën: 6; daarvan zijn 4 nieuw, 1 reeds van elders bekend, terwijl dit van 1 onzeker is.

Foraminiferen: 7; daarvan zijn twee soorten nieuw, 1 reeds van elders bekend; van de overige 4 soorten waren slechts fragmenten aanwezig, niet duidelijk genoeg gekenmerkt om deze tot eene bepaalde soort te brengen.

Polycistineën: 25; allen nieuw.

In het geheel derhalve 31 nieuwe vormen, waarvan verreweg het grootste gedeelte tot de groep der Polycistineën behoort.

Gemeenschappelijk komen voor:

op de diepte van 1200 en op die van 2050 vademen: 2 Diatomeeën en 5 Polycistineën;

op de diepte van 1200 vademen en die van 2700 vademen: 1 Diatomee en 1 Polycistinee;

op de diepte van 2050 vademen en 2700 vademen: 1 Polycistinee.

Geene der soorten werd op alle drie deze diepten gevonden.

De weinige soorten, uit de diepte van 4000 vademen opgebragt, laten geene vergelijking met die uit de minder diepe plaatsen toe. Alleen één der Diatomeeën is vermoedelijk dezelfde soort, die ook op de diepte van 1200 en 2050 vad. is aangetroffen.

Dit geringe getal van gemeenschappelijk in verschillende diepten gevonden soorten verdient opmerking. Wel is waar is het waarschijnlijk, dat dit getal nog klimmen zoude, wanneer men eene grootere hoeveelheid van het te onderzoeken materiaal ter beschikking had; doch men mag aannemen, dat in dit geval ook nog meer soorten zouden gevonden worden, en ten slotte de verhouding dezelfde zoude blijven.

Verders verdient ook opmerking: het geheel ontbreken der kleinere soorten van Foraminiferen in de grootere diepten, terwijl zij daarentegen op 1200 vademen zoo talrijk zijn, dat hare overblijfselen, hoewel van een minder getal soorten afkomstig, nagenoeg in massa met die der Polycistineën gelijk staan.

Dit resultaat is trouwens geheel in overeenstemming met hetgeen reeds door Ehrenberg uit zijne onderzoekingen is getrokken. Hij bevond, dat in den Atlantischen Oceaan het getal der Foraminiferen (zijne Polythalamiën) vrij geregeld afnam, naarmate de onderzochte grond van eene diepere plaats afkomstig was, terwijl zij in die uit de grootste diepte geheel ontbraken *. Dat ook elders uit groote diepten alleen Diatomeeën en Polycistineën maar geene Foraminiferen zijn opgebragt, leeren de onderzoekingen van den bodem der zee bij Kamschatka en van dien der koraalzee door BAILEY, welke reeds boven vermeld zijn.

Men mag aan dit resultaat uit een geologisch oogpunt in zooverre eenig gewigt hechten, als daaruit blijkt, dat vermoedelijk dan ook de krijtrotsen, die geheel of grootendeels door Foraminiferen ontstaan zijn, zich niet op zeer aanzienlijke diepten gevormd hebben, en dat ook die soorten van krijtmergel, welke, behalve de kiezelschalen van Diatomeën en Polycistineën, ook de kalkschalen van Foraminiferen bevatten, niet ontstaan zijn in zoo groote diepten als in onzen tegenwoordigen oceaan op sommige punten voorkomen.

Wat de Diatomeën en de Polycistineën aanbelangt, zoo zijn schalen of overblijfselen van schalen van soorten uit beide afdeelingen tot in de grootste diepte gevonden. Alleenlijk waren de fragmenten van Polycistineënschalen zoo klein, dat zij geheel onherkenbaar waren, terwijl daarentegen de beide hier aangetroffen Diatomeën althans nog tot het geslacht, waartoe zij behooren, konden worden terug gebragt.

Om rekenschap te geven van deze verschillende diepteverspreiding, kan men zich op tweederlei standpunt plaatsen.

Vooreerst kan men haar toeschrijven aan den invloed van het verdere vervoer der schalen, welke op grootere diepten gevonden zijn, daarbij uitgaande van de veronderstelling dat de tegenwoordige ligplaats dezer schalen meer of minder ver verwijderd is van de oorspronkelijke woonplaats der wezens, waaraan zij hebben toebehoord. Inderdaad laat het zich dan begrijpen, dat de overblijfselen van diegenen hunner, welker schalen het minst broos zijn, ook over den grootsten afstand door stroomen zullen kunnen worden medegesleept, zonder geheel onkenbaar te worden. In elk der drie hoofdgroepen van mikroskopische wezens, welke hier vooral in aanmerking komen: de Diatomeën, de Foraminiferen en Polycistineën, komen soorten met brozere en andere met minder broze schalen voor. Het laat zich derhalve niet in het algemeen als regel stellen, dat b. v. alle Foraminiferen zonder onderscheid spoediger door vervoer verbrijzeld zullen worden dan alle soorten van

* *Monatsbericht*, 1857. S. 145.

Diatomeën en Polycistineën, daar integendeel de grootere soorten van Foraminiferen, welker schalen dikkere wanden hebben, nog wederstand zullen bieden aan mechanische werkingen, waartegen de schalen van vele soorten uit de beide andere afdeelingen niet bestand zijn. Doch wat de schelpjes der kleine Foraminiferen, der Globigerinen b. v. betreft, wier aantal in de gronden, door diepzeeloodingen uit niet te groote diepte verkregen, steeds verreweg het grootst is, mag men veilig aannemen, dat deze minder weerstand kunnen bieden dan de kiezelschalen der meeste Diatomeën en Policistineën, terwijl het dan verder waarschijnlijk is dat, van deze beide laatste afdeelingen, de uit een traliewerk bestaande schalen der Polycistineën eerder verbrijzeld zullen worden dan die van zulke Diatomeën, zoo als het geslacht *Coscinodiscus*, waarvan de wand der schaal een zamenhangend geheel uitmaakt.

Dat de boven medegedeelde uitkomsten van het onderzoek met deze beschouwingen in overeenstemming zijn, is duidelijk. Ook worden deze nog bevestigd door de omstandigheid, dat spongolithen, die van alle deze verschillende kiezelligchaampjes de minst broze, en, zoo ook al gebroken, nog het gemakkelijkst herkenbaar zijn, op alle diepten voorkomen.

In de tweede plaats echter zoude men, ter verklaring dezer verschillende diepteverspreiding, ook met Ehrenberg kunnen aannemen, dat de wezens, welker overblijfselen men in den grond vindt, die door het dieplood wordt opgebragt, werkelijk op die diepte geleefd hebben, en dat elke soort, even als zulks van andere in zee levende dieren en planten bekend is, zich bij voorkeur op tusschen bepaalde grenzen ingesloten diepten ophoudt.

Bij eene oppervlakkige beschouwing schijnt het welligt ongerijmd de mogelijkheid te veronderstellen, dat organische wezens leven kunnen onder eene drukking van 500 en meer atmospheren. Wanneer men echter bedenkt, dat deze drukking niet plotselijk ondervonden wordt, maar dat de tegendrukking der gassen en vochten des ligchaams daarmede in evenwigt is, dan laat zich de mogelijkheid inzien van het bestaan van levende wezens op den bodem der diepste zee, even als andere dieren en planten leven op den bodem van den luchtoceaan.

Moeijelijker is het zich een zoo rijk organisch leven voor te stellen op eene plaats waar nimmer licht doordringt. Daartegen laat zich echter aanvoeren, dat er verscheidene soorten van planten en dieren zijn, en daaronder sommige die op eenen veel hoogeren trap van organisatie staan, welke in grotten en andere onderaardsche ruimten in het volkomen duister leven.

Een ander bezwaar tegen deze voorstelling is gelegen in den verbazenden afstand des op zoo groote diepte gelegen zeebodems van de dampkringslucht. Wel is waar kan bij deze wezens, welker weeke massa enkel uit sarcode bestaat, geen sprake meer zijn van eene eigenlijke ademhaling, doch, voor zoo ver wij het organische leven in het algemeen kennen, is dit toch ondenkbaar zonder eene wisseling van gassen met die, welke in de omringende middenstof bevat zijn, en zulk eene wisseling kan niet plaats grijpen, zonder dat in die middenstof zelve ook eene gestadige wisseling van de daarin opgeloste gasbestanddeelen geschiedt. De atmospheer is de bron, waaruit de verbruikte zuurstof in het zeewater gestadig moet worden vernieuwd, en al kan deze ook door diffusie tot de diepste waterlagen doordringen, zoo kan het toch niet anders of deze wordt daardoor aanmerkelijk vertraagd. Men zoude echter deze bedenking kunnen weêrleggen door op te merken, dat het ten slotte geheel onverschillig is, of een deeltje zuurstof slechts eenige minuten of eenige dagen noodig heeft, om door diffusie eene zekere diepte te bereiken, omdat die diffusie gestadig voortgaat en zoo de diepste waterlagen even rijk kunnen zijn aan dit gas als de oppervlakkige. Doch hiertegen laat zich aanvoeren, dat die zuurstof reeds voor een min of meer aanmerkelijk deel door de zich op den weg bevindende dieren verbruikt wordt, zoodat in elk geval slechts een klein gedeelte daarvan tot in de diepte kan doordringen.

Hoe dit ook zijn moge, even als elders in de natuurwetenschap, zijn het alleen feiten die hier beslissen kunnen. Een enkel goed waargenomen feit werpt alle aprioristische redeneringen en daarop gegronde theoriën omver. De vraag is dus slechts: laten zich feiten aanvoeren, die het bestaan van organisch leven op zoo groote diepten bewijzen?

De bekende merkwaardige onderzoekingen van Forbes in de Aegaeische zee hebben het bewijs geleverd, dat zelfs vrij groote, betrekkelijk hoog georganiseerde Mollusken nog leven kunnen tot op diepten van 180 en 220 vademen, waar zij dus aan eene drukking van 36—40 atmospheren zijn onderworpen. De op die diepten voorkomende soorten onderscheiden zich geenszins door schelpen met dikke, meer weêrstand biedende wanden. Integendeel, er komen daaronder voor (b. v. *Ligula profundissima*), met zeer dunne, teedere schalen. Trouwens binnen die schelpen zijn, even als bij andere schelpdieren, de geheel weeke organen bevat. Ook kan dit minder verwonderen, wanneer men bedenkt, dat op die groote diepte eene onafgebroken stilte heerscht, ongestoord door den golfslag, die alleen de bovenste lagen der zee in beweging brengt. De schalen loopen derhalve aldaar veel minder gevaar van verbrijzeld te worden, dan die van andere weekdieren, welke zich op ondiepe plaatsen ophouden.

Een voorbeeld van een dier, uit nog grootere diepte opgehaald, levert de merkwaardige *Umbellularia Encrinus*. Deze soort kent men tot hiertoe alleen uit de twee exemplaren, die door ELLIS * beschreven en afgebeeld zijn. Zij werden door kapitein ADRIAANSZ., voerende het schip Brittannia, op de walvischvangst zijnde, in den zomer van 1753, op 79° N.Br. en 80 Eng. mijlen van de kust van Groenland, met het dieplood opgebragt uit eene diepte van 236 vademen.

Nog opmerkelijker zoude in dit opzigt de vangst zijn van een anderen polyp uit dezelfde familie (*Pennatulina*), door mij *Crinillum Siedenburgii* genoemd †, indien men kon aannemen, dat dit dier, gelijk Kapitein Luitenant SIEDENBURG heeft medegedeeld §, werkelijk uit de geweldige diepte van 2700 vademen was opgehaald. De aan die mededeeling door Luitenant ANDRAU toegevoegde opmerking, dat het niet waarschijnlijk is dat een dier, hetwelk zoo levendig gekleurd was als dit, op zoo groote diepte zoude geleefd hebben, maar dat men veeleer moet aannemen, dat het bij het nederdalen der lijn op geringere diepte daarin verward is geraakt en toen de reis heen en terug mede gedaan heeft, komt mij voor allezins gegrond te zijn. Ofschoon namelijk de Pennatulinen gewoonlijk met hunnen steel in den weeken bodem bevestigd staan, zoo kunnen zij toch daaruit, door het een of ander toeval, b. v. door den golfslag, los geraken en dus in de zee drijvende worden aangetroffen. Ook zoude het nog de vraag zijn, in hoeverre het hier gezegde ook toepasselijk kon geacht worden te zijn op het zoo even aangevoerde voorbeeld der *Umbellularia*.

Meer vertrouwen schijnen de volgende mededeelingen te verdienen, onlangs

---

* *Natuurlijke Historie van de koraalgewassen*, enz. 's Gravenhage, 1756, bl. 103, Pl. XXXVII.

† Zie *Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetensch., Afd. Natuurkunde*, dl. XI bl. 287.

§ Zie *Onderzoekingen met den zeethermometer*, enz. 1861. bl. 161.

door G. C. Wallich * gedaan. Volgens hem werden bij eene diepteelooding, halfweg Groenland en Ierland, uit eene diepte van 1260 vademen, verscheidene *Ophiocomae* nog levend opgebragt. Zij waren vastgehecht aan de laatste 50 vademen der lijn, en hij is van oordeel, dat er geen twijfel zijn kan, of zij waren werkelijk van de oppervlakte des bodems, waarover dit gedeelte der lijn gesleept had, opgehaald. Als bewijs daarvoor brengt hij bij, dat de tevens uit die diepte opgebragte grond voor 95 proc. uit Globigerinen was zamengesteld en dat diezelfde ook in de maag der zeester werden gevonden.

Verders werden volgens denzelfden bij eene looding tot op 1913 vademen eenige kleine kokertjes opgebragt, die geheel bleken te bestaan uit zamengevoegde Globigerinen. Wallich houdt het er voor, dat deze kokertjes het werk zijn van Anneliden, welke op deze diepte leven.

Deze mededeelingen verdienen voorzeker zeer de aandacht. Of zij echter zoo volkomen afdoende zijn als Wallich meent, komt mij nog eenigzins twijfelachtig voor. Dat de genoemde kokertjes door Anneliden gebouwd zijn is mogelijk maar geenszins zeker, evenmin dat zij noodzakelijk op die diepte moeten ontstaan zijn en niet uit geringere diepte daarheen gevoerd en zoo bezonken. En wat de *Ophiocomae* betreft, zoo is het wel is waar zeldzaam dieren uit de klasse der Echinodermen, die zich gewoonlijk kruipend langs de oppervlakte des bodems bewegen, zoover van de kust, midden in zee aan te treffen, doch men moet daarbij niet uit het oog verliezen, dat de *Ophiocomae* tot diegenen behooren, welke in het bezit zijn van betere bewegingsorganen dan de meesten, en het derhalve geenszins onmogelijk is, dat zij eenen geruimen tijd zwemmende blijven en zich zoo op grooten afstand van de kust verwijderen. Het vinden van Globigerinen in hunne maag, is reeds daarom geen volkomen zeker bewijs, dat zij in gezelschap van deze op zoo aanzienlijke diepte zouden geleefd hebben, omdat de Globigerinen ook pelagisch nabij de oppervlakte der zee voorkomen en het dus ook deze kunnen zijn, die aan de gevangen *Ophiocomae* tot voedsel hebben gestrekt.

* In eenen brief aan de redactie van de *Ann. a. Magaz. of Nat. Hist.* Dec. 1860. 3de Ser. Vol. VI, p. 457.

Wenschelijk is het ook, dat deze laatste naauwkeurig vergeleken worden met reeds bekende soorten, iets waarvan in de korte mededeeling van den heer Wallich geen gewag wordt gemaakt. Mogt het namelijk blijken, dat dezelfde soort ook op geringe diepten aangetroffen wordt, dan zoude het zeer onwaarschijnlijk zijn, dat zij ook op zoo groote diepte onder de zeeoppervlakte leeft Ik meende deze opmerkingen niet achterwege te mogen houden, zonder daarmede echter iets te willen beslissen. Naarmate echter een feit aanleiding kan geven tot gewigtiger gevolgtrekkingen, moet ook de daarvan gegeven verklaring des te volkomener aan de eischen eene zorgvuldige kritiek voldoen, zoodat ten slotte blijkt, dat geene andere verklaring dan de gegevene mogelijk is. Voor als nog schijnt mij die, welke Wallich van de boven medegedeelde feiten gegeven heeft, geene aanspraak te kunnen maken op eenen hoogeren rang dan die eener niet geheel verwerpelijke hypothese.

De redenen, die Ehrenberg er toegebragt hebben om aan te nemen, dat de van den bodem des Atlantischen Oceaans opgehaalde Diatomeën, Foraminiferen en Polycistineën aldaar werkelijk geleefd hebben, zijn: vooreerst de geheel ongeschonden toestand van vele der kleine schalen, en ten tweede en vooral: de omstandigheid, dat hij in vele dezer schalen nog de daarin bevatte weeke, organische ligchaamsdeelen waarnam, die hij, bij de Foraminiferen, door behandeling met zoutzuur zelfs konde isoleren.

Op het eerste dezer argumenten kan men niet zeer veel gewigt leggen. Gelijk wij reeds opmerkten, heerscht op eene betrekkelijk geringe diepte onder het zeeoppervlak eene door geen golfslag gestoorde rust. Alleen nog stroomen, die steeds in dezelfde rigting loopen, brengen daar het water in eene gelijkmatige beweging. Eenmaal op die diepte in ongeschonden toestand gekomen, bestaat er dus weinig gevaar meer voor hen om verbroken te worden, en al mogt door de wederkeerige wrijving van de zich op den bodem bevindende ligchaampjes een aantal hunner beschadiging ondergaan, zoo kan het toch niet verwonderen, dat andere een tijdlang daaraan geheel ontsnappen.

Gewigtiger is het tweede argument. Het verdient dan ook dat wij er iets langer bij stil staan.

Nemen wij voor een oogenblik aan, dat de stof, die Ehrenberg bij behandeling met zoutzuur overhield, werkelijk eene organische massa was, —

11*

waarbij wij echter moeten opmerken, dat dit alleen regtstreeks de Foraminiferen betreft en geenszins de beide andere groepen, welker kiezelschalen niet door zoutzuur kunnen verwijderd worden, — dan mogen wij daarbij niet over het hoofd zien, dat de omstandigheden, waaronder organische stof op den bodem eener diepe zee, en die waaronder dezelfde op de oppervlakte der aarde of slechts met eene dunne waterlaag bedekt voorkomt, geenszins gelijk zijn. Het eerste vereischte voor het ontstaan van verrotting is de toetreding van zuurstof, en men mag wel aannemen, dat de hoeveelheid daarvan in het water met de diepte afneemt en op eene diepte van twee of drieduizend vademen uiterst gering is. Hierbij komt de hoogst aanzienlijke drukking, waarvan men met veel waarschijnlijkheid vermoeden mag, dat zij de rotting, even als elke andere scheikundige omzetting, — b. v. de ontleding van koolzuren kalk door de hitte, — tegengaat. Ook het doortrokken zijn met zeewater kan reeds eene oorzaak zijn, waardoor de verrotting vertraagd wordt, al schijnt er geen grond te zijn om aan te nemen, dat het diepere zeewater een veel grooter zoutgehalte heeft dan dat aan de oppervlakte *. Dat die invloed bestaat, blijkt uit het door MAURY † aangehaalde voorbeeld. Hij zegt namelijk, dat men op de paketbooten tusschen Amerika en Europa gewoon is het vleesch te pekelen, door het eenvoudig tot op groote diepte over boord te laten zinken. Wordt het dan weder opgehaald, dan is het tot in zijn binnenste met zout doordrongen en zoo tegen bederf bewaard. In elk geval laat zich de mogelijkheid inzien, dat de weeke ligchaamsdeelen, in de schalen bevat, dientengevolge eenigen tijd weerstand bieden, zoodat het zeer wel gebeuren kan, dat er zich onder die, welke het dieplood opbrengt, nog eenige bevinden, waarin deze weeke deelen herkenbaar zijn.

Dat overigens, zelfs zonder bijzondere, de rotting verhinderende omstandigheden, de organische stof der Foraminiferen geenszins spoedig verder gaat, blijkt uit hetgeen MAX SCHULTZE § daaromtrent als zijne bevinding heeft

---

* Men zie hierover de resultaten medegedeeld door de H.H. GUNNING en OGTEROP in de reeds aangehaalde *Onderzoek. met den zeethermometer* enz., blz. 173 en volg.

† *Sailing Direct.*, I, p. 176.

§ *Ueber den Organismus der Polythalamien.* Leipzig, 1854. S. 36.

aangeteekend, dat namelijk een verblijf van zes maanden te midden van rottende stoffen, nog weinig ontledend op haar gewerkt had.

Eindelijk is er nog een punt, dat ik niet geheel met stilzwijgen mag voorbijgaan. Niet elke na de werking van het zoutzuur overblijvende massa is van organischen aard. Ik moet hierbij herinneren, dat bij dieren als de Foraminiferen, die alleen uit eene sarcode-achtige zelfstandigheid bestaan, geen sprake kan wezen van duidelijk herkenbare organen. Wat men na de behandeling met zoutzuur overhoudt, is eene structuurlooze massa, die alleen min of meer aan den vorm der schaal beantwoordt en ten deele zelve een bestanddeel der schaal heeft uitgemaakt. Evenzoo moet ik herinneren de ongunstige omstandigheid, dat de gronden, door diepzeeloodingen opgebragt, tot dusverre alleen in den gedroogden toestand hebben kunnen onderzocht worden. Indien er werkelijk binnen de daarin bevatte schalen, nog organische deelen voorkomen, dan zijn deze toch geheel verdroogd en verschrompeld, en, al weeken zij, bij de behandeling met zoutzuur, weder op, dan laat zich bezwaarlijk verwachten, dat zij weder geheel tot den oorspronkelijken vorm zullen terug keeren. Nu heb ik, zoowel in de gronden uit de Banda-zee, als in andere, vele Foraminiferenschelpjes ontmoet, welker holte grootendeels of geheel gevuld was met eene zeer fijn korrelige, zich bij doorvallend licht groen-bruinachtig vertoonende massa, die eenige oppervlakkige gelijkenis heeft met eene in omzetting verkeerende organische stof en daarvoor ook ligtelijk zoude kunnen gehouden worden, wanneer men zich alleen bepaalt bij eene behandeling met zoutzuur, waardoor zij niet aangetast wordt, maar die in werkelijkheid bestaat uit het allerfijnste, zamengeklonterde gruis van silicaten en andere mineralen, dat men ook buiten de schalen vrij waarneemt. Diezelfde massa vult ook zeer dikwijls de holte der schalen van Polycistineën, waarin zij door de kleine mazen van het traliewerk, waaruit de schaal bestaat, is binnengedrongen. Dat deze massa niet van organischen oorsprong is, blijkt bij de gloeijing. Daardoor wordt zij niet zwart, om later bij sterker verhitting geheel te verdwijnen, maar zij neemt alleen eene donkerder bruine kleur aan, ten gevolge der hoogere oxydatie van het daarin bevatte ijzeroxydul. Of Ehrenberg deze voorzorg heeft aangewend, om de zekerheid te erlangen, dat de na de behandeling met zoutzuur overblijvende stof van organischen oorsprong was, is mij niet gebleken.

Doch hoe dit zijn moge, zeker althans is het, dat de door mij in de gronden der Banda-zee gevonden overblijfselen van organismen geen het minste blijk hebben opgeleverd van nog geleefd te hebben, toen het dieplood hen bereikte. Slechts eenige weinige der schalen vertoonen zich ongeschonden, maar van verreweg de meesten zijn niet anders dan grootere of kleinere fragmenten overig. Van daarin nog bevatte organische stof heb ik nergens een spoor kunnen ontdekken.

De slotsom dezer beschouwingen is derhalve, dat er tot hiertoe geene overwegende redenen bestaan om aan te nemen, dat nog organisch leven bestaat op diepten die veel grooter zijn dan 300 vademen, dat is op diepten, die verre de grenzen overschrijden, welke daaraan op gezag, vooral der onderzoekingen van FORBES, worden toegekend *.

Er is echter nog een grond, die men daarvoor heeft aangevoerd, en welke, ofschoon van negativen aard, toch niet geheel mag worden over het hoofd gezien. Men beroept zich namelijk op het maaksel en de levenswijze dezer organische wezens; zij zouden uitsluitend kustbewoners zijn; hunne middelen tot plaatsbeweging, voor zoover zij deze bezitten, zouden hen ongeschikt maken zich in de hooge zee zwemmende te houden. Nu is het waar, dat in het algemeen juist die soorten, welke als kustbewoners bekend zijn, niet gevonden worden in den bodem op groote diepte; de daarin voorkomende schalen zijn dus niet door stroomen van de kust af daarheen gevoerd. Maar, indien dit niet het geval is, hoe kunnen zij dan

* *Naschrift.* — Sedert het aanbieden dezer Verhandeling aan de Akademie verscheen het klassische werk van E. HAECKEL, *Die Radiolarien*, Berlin 1862. Hij betoogt daarin (p. 172—189), ten deele op dezelfde gronden als de boven aangevoerde, de onwaarschijnlijkheid dat de Foraminiferen en Polycistineën op zoo groote diepten leven als EHRENBERG beweerd heeft. Echter is er in den laatsten tijd één feit bekend geworden, waaruit men besluiten mag, dat het organische leven zich in de zee nog tot grootere diepte uitstrekt dan daaraan door FORBES is aangewezen. ALPH. MILNE EDWARDS deelde namelijk aan de Fransche Akademie, in hare zitting van 15 Julij 1861, mede, dat hij op een fragment van den telegraafkabel, die tusschen Sardinie en de kust van Algerie op eene diepte van 2000 tot 2800 meters (omstreeks 1000 tot 1400 vademen) gelegen had, verscheidene polyparien en schelpen van weekdieren had vastgehecht gevonden, die blijkbaar nog kort te voren hadden geleefd, daar de weeke deelen nog bewaard waren, terwijl hij uit de omstandigheid, dat hunne grondvlakte geheel beantwoordt aan den vorm en de oneffenheden des kabels waaraan zij gehecht waren, besloot dat zij zich op die plaats zelve ontwikkeld hadden.

daar gekomen zijn, indien men niet aanneemt, dat zij op die diepte zelve geleefd hebben?

Eer wij deze vraag beantwoorden, hebben wij te onderzoeken, of de praemissen, waarop de redenering, die daartoe aanleiding geeft, steunt, inderdaad juist zijn.

Het is in het algemeen waar, dat aan Diatomeën, die alle eigenlijke beweegorganen missen, al bezitten ook sommige het vermogen tot eene langzame plaatsverandering, en desgelijks aan de Rhizopoden, waartoe Foraminiferen en Polycistineën behooren, wier beweegorganen hen eigenlijk alleen tot een zeer traag kruipen in staat stellen, de kust de meest geschikte woonplaats aanbiedt, niet enkel omdat daar het water minder diep is, maar vooral omdat in hare nabijheid zoo vele wieren groeijen, aan welker oppervlakte zij zich vasthechten. Nu echter is het genoeg bekend, dat er verscheidene wiersoorten zijn, welke, tijdelijk vastgehecht, later drijvende worden, zoodat zij soms groote oppervlakten der zee bedekken. De zoogenaamde Kroos- of Sargasso-zee levert daarvan een voorbeeld *. Dit drijvend wier levert hun eene even geschikte woonplaats als datgene hetwelk nog vastzittend is, en zoo kunnen zij derhalve door zeestroomen naar plaatsen heengevoerd worden, waar de zee vele honderden vademen diep is, en zullen de schalen der afgestorven individus aldaar bezinkende den bodem bereiken.

Het is inzonderheid voor de Diatomeën, dat dit verspreidingsmiddel schijnt te moeten worden ingeroepen. Wat toch de Foraminiferen en Polycistineën betreft, zoo laat het zich niet betwijfelen, of daaronder komen vele soorten voor, die, in weerwil harer gebrekkige middelen tot plaatsbeweging, toch zich drijvende nabij de oppervlakte der zee kunnen ophouden.

Ten aanzien der Foraminiferen nam Ehrenberg † dit reeds voor lang

* Een aantal ontmoetingen van drijvend zeewier is vermeld in *Onderzoek m. d. zeethermometer* enz., bl. 113. In hetzelfde werk, bl. 169, bevindt zich ook een opstel van den hoogleeraar F. A. W. Miquel over *Macrocystis pyrifera*, met aanwijzing harer verspreiding, deels in vastgehechten, deels in drijvenden toestand.

† *Abhandl. der Berl. Akad.*, 1839. S. 104; *Monatsbericht*, 1844. S. 187.

waar. MAX SCHULTZE * zag zelfs grootere soorten, *Polystomella strigilata* en *Rotalia Veneta*, langs de oppervlakte van het water kruipen. J. DENIS MACDONALD † ontdekte nog levende Foraminiferen en daaronder Globigerinen in de maag van Salpen, die, gelijk men weet, pelagisch levende dieren zijn; en JOH. MÜLLER § zag Orbulinen, jonge Rotalien en vooral talrijke Globigerinen aan de oppervlakte der zee, ver van de kust. En wat de Polycistineën betreft, zoo hebben de voortreffelijke onderzoekingen van laatstgenoemden over het maaksel en de levenswijze van vele soorten dezer klasse het bewijs geleverd, dat soorten derzelfde geslachten (*Haliomma, Lithocampe, Acanthodesmia* enz.), die ook de meeste vertegenwoordigers hebben in de gronden der diepte, in zeer grooten getale bij kalme zee, op tamelijk grooten afstand van de kust, vrij in het water leven.

Met één woord: het is bewezen, dat dergelijke organische wezens als die zijn, welker overblijfselen gevonden worden in den grond, door diepzeeloodingen opgebragt, zich drijvende in de zee ophouden, zoodat men, al had het onderzoek der gronden dit niet werkelijk geleerd, reeds daaruit zoude kunnen voorspellen, dat hunne kalk- en kiezelschalen, na hunnen dood bezinken zullen, en dat de bodem der zee hunne grafplaats zijn zal. De redenering omkeerende, geloof ik dan ook even veilig te mogen voorspellen, dat men eenmaal de soorten, van welker bestaan men thans nog alleen kennis draagt door hare overblijfselen in den bodem, ook terugvinden zal nabij de oppervlakte der zee.

Daar nu in de natuurwetenschap de regel geldt, dat men ter verklaring der waargenomen verschijnselen geene nieuwe hypothesen moet inroepen, zoolang de bekende feiten tot dit doel toereikend zijn, zoo meen ik ook, dat de stelling van EHRENBERG, dat deze kleine organische wezens op de diepten, waaruit zij door het dieplood aan het licht gebragt zijn, geleefd hebben, als op geenerlei wezenlijke gronden rustende, voor als nog niet aannemebaar is.

---

* L. c. p. 36.

† *Ann. a Magaz. of Nat. Hist.* 2de Ser. Vol. XX. p. 264.

§ *Abhandl. d. Berl. Akad.*, 1858. S. 25.

Voorzeker is het opmerkelijk en niet zoo gereedelijk te verklaren, dat dieren met kalk- en kiezelschalen, waardoor zij oogenschijnlijk soortelijk zwaarder zijn dan zeewater, daarin drijven kunnen. Het feit, dat zij dit doen, staat echter vast, en daarmede vervalt elke hieraan ontleende tegenwerping. Ook laten zich wel enkele gronden aanvoeren, die daarvan althans eenigzins rekenschap geven. Zoo heeft Joh. Müller in de weeke massa van sommigen vetdroppels gevonden *. Dat zij daardoor soortelijk ligter worden is duidelijk. Hij voegt er echter bij, dat dezelfde soorten, in een vat met water geworpen, zinken, hoewel zij in de volle zee drijvende werden gevonden.

Ik waag het hier nog eene andere oorzaak te noemen, die welligt in aanmerking kan komen, ofschoon haar bestaan eerst door het onderzoek van versche, levende voorwerpen kan worden uitgemaakt. Bij eenige soorten (zie bl. 11 en 14) namelijk nam ik, onder het traliewerk der schaal, ruimten en gangen waar, die bij dezelfde soort standvastig hetzelfde beloop hebben. Deze aan de intercellulaire kanalen der plantenweefsels herinnerende gangen waren met lucht gevuld. Of deze lucht ook voorhanden is in de niet gedroogde voorwerpen, laat zich thans niet beslissen, maar de meer of min analoge, hydrostatische toestellen van *Porpita* en *Velella* wettigen althans het vermoeden, dat bij sommige Polycistineën het ligchaampje drijvende gehouden wordt door eene dergelijke afscheiding van lucht in daarvoor bestemde holten.

Ten slotte doe ik nog opmerken, dat dit onderzoek wederom geleerd heeft, dat de lagere zee-bewonende organismen door gelijke of overeenkomstige vormen vertegenwoordigd worden op plaatsen der zee, welke zeer ver van elkander verwijderd zijn. De verschillen tusschen de Polycistineën, die de Middellandsche zee, en die, welke de bijna onder de linie gelegen Banda-zee bewonen, zijn inderdaad zoo gering, dat men in verzoeking komt sommige voor soortelijk identisch te houden en dat in elk geval er geen generisch onderscheid aanwijsbaar is. Ook in de betrekkelijke grootte, d. i. in de mate van ontwikkeling der individu's, bestaat geen verschil. Wij zien ook

* L. c. p. 23.

hier het algemeeme resultaat bevestigd, hetwelk men uit de beschouwing der dierenwereld in hare verspreiding over de aardoppervlakte en in hare opeenvolging van vormen gedurende den loop der tijden trekken kan, dat namelijk verschil van luchtstreek en van de uitwendige omstandigheden in het algemeen op de dierlijke bewerktuiging in des te mindere mate wijzigend inwerken, als deze eenen geringeren graad van betrekkelijke volkomenheid bereikt heeft.

Utrecht, 14 December 1860.

Harting [illegible]

Op 2700 Vademen diepte

Op 3000 Vademen diep

Harting ...

SUPPLÉMENT

AUX

TABLES D'INTÉGRALES DÉFINIES,

QUI

FORMENT LE TOME IV DES MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE.

PRÉFACE.

Depuis que les Tables d'Intégrales Définies ont été publiées, ou plutôt depuis l'année 1853, qui est en général la date des intégrales les plus récentes de ce recueil, le nombre de ces formules s'est peu accru, si ce n'est par quelques Mémoires ou Notes, que j'avais écrits, et qui ont paru pendant ce laps de temps. Mais j'ai eu l'occasion depuis de parcourir encore divers Actes et Mémoires d'Académies, divers recueils, journaux, etc.; et par-là non seulement la bibliographie de cette partie de l'Analyse commence à se détacher plus distinctement entre la masse de Mémoires imprimés; mais encore les formules de plus ancienne date, si elles existaient, devaient ainsi nécessairement venir au jour. Or, il est assez remarquable qu'avec quelques exceptions c'étaient toujours les intégrales des Tables que je rencontrais [1], soit celles, qui avaient été tirées des ouvrages d'autrui, soit celles que j'en avais déduites moi-même. Ainsi, comme je viens de le dire, j'avais construit une bibliographie de cette théorie; et quoique certainement elle ne puisse aspirer au titre de perfection, pas même en ce sens que tous les mémoires, qui traitent de cette matière, y sont cités, — déjà, si je ne me trompe, l'ébauche d'une telle entreprise peut aider de beaucoup à l'arrondir et à la compléter. Les difficultés, que j'ai eu à surmonter à cet égard, depuis que j'ai commencé l'extraction des formules pour les tables et mes travaux sur les intégrales définies, ne me laissent aucun doute que cette bibliographie ne soit d'un grand intérêt pour ceux, qui vou-

[1] M. le Prof. Bellavitis, (dans les *Atti dell' Instituto Veneto di Science, lettere ed arti*, Serie III. Vol. IV. p. 3. Marzo, 1859) en testifie autant, et quoiqu'il regrette dans la liste d'ouvrages consultés l'absence de plusieurs ouvrages italiens, il avoue qu'une recherche attentive ne lui a point fait trouver des résultats, qui ne se trouvaient dans mes Tables d'Intégrales Définies.

draient s'occuper de la théorie des intégrales définies et de ce qui en dépend. C'est encore le seul moyen, je crois, de pouvoir un jour être à même d'écrire l'histoire des mathématiques que de posséder en premier lieu une bonne bibliographie des mémoires épars par-ci et par-là: et pour ce but j'espère que cette collection, qui se trouve dans ce supplément, pourra servir une fois. Il est encore une autre raison qui me porte à donner ce supplément à présent, et je ne saurais l'exprimer d'une manière meilleure, qu'en me servant des mots prononcés par M. le rapporteur de l'Académie Impériale des Sciences, Belles-Lettres et Inscriptions de Toulouse, M. Endrès, lors du décernement de la médaille d'or aux Tables d'Intégrales Définies par cette Académie: „Ce recueil grandira peut-être au-delà des espérances et de l'ambition de son auteur, si, comme il y a lieu de l'espérer, le rapprochement de résultats si importants et si nombreux conduit les géomètres à établir des méthodes générales pour les démontrer et pour marcher à de nouvelles découvertes" [2]. Le Volume VIII des Mémoires de notre Académie pourra servir de preuve, je l'espère, que les prédictions du savant rapporteur ont déjà été dévancées, et commencent à se réaliser en partie [3]; et quoique je pense que jamais il n'en puisse résulter des méthodes générales directes, et qu'au contraire nous devrons bien nous contenter de méthodes indirectes, qui de temps à temps peuvent admettre quelque application, il s'en faut de beaucoup que nous semblions être épuisés de ce côté-là. Et si l'apparition des Tables pourrait servir à rendre plus faciles et à engendrer de nouveaux travaux dans cette voie, certainement mes peines seraient plus que recompensées.

Depuis l'impression de mes Tables, je m'étais proposé de publier ce supplément, et je croyais en outre devoir me charger alors d'une réplique aux diverses critiques, qu'elles auraient eu à subir, soit pour réfuter ce que je ne pouvais accepter et reconnaître comme vrai ou utile, soit pour profiter des remarques que pourraient faire ceux, qui en avaient le droit. Mais, qu'il me soit permis de l'exprimer ici avec reconnaissance, — car l'Académie a tout aussi bien droit à la paternité des Tables d'Intégrales Définies, qui sans son aide désintéressé

---

[2] *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences, Inscriptions et Belles Lettres de Toulouse*, 5e Série. Tom. IV. page 396.

[3] A cette occasion je citerai quelques mots du „*Katholische Literatur-Zeitung*, 10 Nov. 1856, Jahrg. III. N°. 45. Wien." où il est question des Tables d'Intégrales Définies: „Eine wohlgeordnete Darstellung jener Lehre (d. h. der bestimmten Integrale), welche zugleich alle allgemeinen wie besonderen Resultate enthielte, wäre eine überaus lohnende Arbeit; sie würde nicht nur den Reichthum der Methoden, sinnreichen Künstgriffe und der einzelnen Ergebnisse erkennen lassen, sondern das Ganze erst zugänglich machen, was bis jetzt aus dem angeführten Grunde für sehr Viele so gut wie unzugänglich ist. Ob sich jedoch ein Mathematiker einstmals dieser Arbeit unterziehen wird, steht dahin." Je ne saurai exprimer plus clairement l'objet de l'Exposé de la théorie, des propriétés, des formules de transformation et des méthodes d'évaluation des intégrales définies, du Tome VIII des Mémoires de l'Académie.

n'auraient pu voir le jour [4], — il en a été tout autrement, que je ne pouvais penser ou espérer. De plusieurs côtés l'ouvrage a été reçu avec un empressement, avec une considération et une approbation inespérées; et je crois que cet accueil, tout aussi bien que la demande continuée d'exemplaires, prouve qu'il satisfait à un besoin, qui se faisait sentir; qu'il a eu le mérite de l'à propos.

Quant aux remarques qui ont été faites et que je vais exposer en quelques mots, je suis heureux de pouvoir exprimer ici toute ma reconnaissance pour la manière prévenante et honorable à la fois, dont on a voulu poser ces observations et ces remarques. Elles ne m'étaient pas moins bien-venues, quoiqu'en partie elles trouvent déjà leur réponse dans la „liste d'Observations et de Corrections en partie critiques," insérées après la Préface des Tables: parmi les autres il y en a de telle nature, que pour la plupart je pourrai en profiter pour une deuxième édition qu'on semble attendre. En général je dois faire observer d'abord, que les Tables en question étaient les premières en leur genre, ce dont tous ceux, que je nommerai tantôt, ont convenu; que par conséquent je n'avais pas d'ouvrage précédent, pour y renvoyer; que tout le matériel devait se trouver dans le volume même. En second lieu, que d'après ce qui a été annoncé à cet égard dans la Préface, on devait trouver dans les Tables toutes les sources, où les intégrales étaient évaluées; et qu'ainsi il arrivait quelque fois que j'avais à admettre quelque intégrale sous diverses formes différentes, selon que l'auteur avait suivi telle ou telle voie. Voilà la réponse que j'ai à faire à M. Bertrand [5], le rapporteur de l'Académie des Sciences de Paris, qui s'étonne d'y rencontrer des formules si simples, à M. Curtze [6] et à M. Bellavitis [7], le rapporteur de l'Institut des Sciences à Vénise, qui ne voudraient pas admettre les formules spéciales auprès des intégrales définies plus générales. Quant à une remarque de M. Bertrand [8] sur les intégrales évidemment impossibles et admises pourtant dans les Tables, je renvoie vers la Préface de l'ouvrage et vers la liste de corrections critiques; d'une part je pensais devoir faire mention de ces résultats, d'autre part j'en ai noté après l'impossibilité. Le même auteur offre encore deux remarques sur les intégrales T 102, N 1 et T 19, N 12, qui coïncident parfaitement avec ce qui se trouve à leur égard dans les corrections critiques. Cette dernier liste d'observations et de corrections en partie critiques a été approuvée spécialement par l'auteur du

[4] Ceci a été très-justement exprimé par le savant O. Terquem (dans ses *Nouvelles Annales de Mathématiques*, T 18, Bulletin. 1859. p. 29—35), qui dit en parlant de ces tables: „C'est aux grandes Académies d'encourager de tels travaux en se chargeant des frais d'impression. Trois Académies, St. Pétersbourg, Berlin, Amsterdam, sont entrées dans cette voie et ont bien mérité de la science."

[5] *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* T. 47. N°. 11. 13 Septembre, 1858. Paris, p. 434, 435.

[6] Grunert's *Archiv.* Bd. 32. Heft 2. *Literat. Bericht.* N°. 126.

[7] *Atti dell' i. r. Istituto veneto di sciencc, lettere ed arti*, Serie III. Vol IV. 13. Marzo 1859. p. 413—420.

[8] *Comptes Rendus.* l. c.

rapport spirituel et intéressant dans le Journal anglais l'Athenaeum [9], qui le premier mit cet ouvrage sous les yeux du public, et que M. L'ABBÉ MOIGNO [10] attribue au célèbre Mathématicien A. DE MORGAN; et encore par M. LINDMANN [11].

Quant à la notation des sources, d'où l'on pourrait tirer l'évaluation de chaque intégrale définie, M. STERN [12] a fait la remarque que plusieurs fois elle n'est que fortuite, lorsqu'on rencontre un tel renvoi auprès d'intégrales très-simples, que l'on trouverait presque dans tout livre sur le calcul intégral, et qui se déduisent d'intégrales indéfinies; aussi je ne crois pas que les auteurs cités s'en fassent une gloire spéciale, et c'est bien là le seul mal qui pût résulter de ces citations. Encore on aurait pu les laisser de côté avec les autres intégrales de ce genre, s'il n'y avait pas quelques objections, qui regardent en même temps les remarques précédentes. D'un côté elles me semblaient devoir entrer dans le cadre que je m'étais posé; d'autre part il n'est pas toujours si aisé de déterminer à priori, si quelque intégrale peut s'évaluer sous forme indéfinie ou non. Dans le premier cas, il importe encore de distinguer entre les cas de continuité et de discontinuité; il faut chercher les valeurs de la variable, pour lesquelles l'intégrale devient discontinue, et calculer la correction nécessaire pour ces diverses valeurs; et ainsi la valeur finale, bien que toujours susceptible d'être calculée avec l'attention nécessaire, pourra servir utilement; ensuite la valeur de quelque intégrale définie devient souvent d'une simplicité peu en rapport avec la formule indéfinie compliquée; enfin j'en avais besoin quelques fois dans la déduction d'intégrales nouvelles pour la réduction nécessaire.

Mais combien une distinction et une certitude suffisante à l'égard des noms des inventeurs ou des auteurs, qui donnent telle intégrale définie, est difficile, c'est ce que prouve encore une remarque du célèbre analyste BERTRAND [13]. Il cite l'intégrale Table 1, N°. 11, comme portant le nom de „CISA DE GRESY" qui ne l'a pas trouvée, tandis qu'elle serait due à GAUSS, qui l'a donnée dix ans plutôt: mais lorsqu'il tourne les feuilles jusqu' à Table 10, N°. 1, qui est la même intégrale sous une forme plus générale, il verra que déjà EULER a devancé GAUSS de beaucoup plus d'années. C'est ainsi que pour trouver l'inventeur d'une intégrale, il faudra en général remonter aux intégrales les plus générales.

Passons à une autre partie de la rédaction, qui m'a coûté beaucoup de temps et bien du travail: c'est la division ordonnée des Sections et des Tables, du cadre, où doivent entrer des formules si dissemblables entre elles: la „dichotomie" comme l'appelle Mr. TERQUEM [14]. Elle a été reçue avec une approbation marquée: seulement M. BELLAVITIS [15] fait quel-

---

[9] *Athenaeum* N°. 1607. August 14, 1858, p. 203.

[10] *Cosmos, Revue Hebdomadaire*, 7e Année, 13e Volume, 10e Livraison. 3 Sept., 1858. p. 272.

[11] *Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar.* Arg. 1860. N°. 6.

[12] *Goettingische gelehrte Anzeigen.* 193es Stück, 6 December, 1858. S. 1921—1928.

[13] *Comptes Rendus.* l. c.

[14] *Nouvelles Annales de Mathématiques par* TERQUEM *et* GÉRONO. T. 18. Bulletin 1859. p. 29—35.

[15] *Atti Ist. veneto.* l. c.

ques réflexions à cet égard; mais les changements proposés auraient rendu illusoires, je crois, les notes bibliographiques dans un premier recueil de ce genre; et la valeur de ces notes est bien incontestablement admise dans les rapports sur cet ouvrage. Une deuxième édition au contraire, si elle serait nécessaire, un autre recueil de ce genre, pourraient peut-être en profiter en partie. Il proposait de ne pas admettre les limites comme argument de classification, et de réunir toutes les intégrales définies de même forme à différentes limites, sauf d'exprimer cette dernière circonstance en prenant une autre lettre pour la variable; encore n'approuve-t-il pas entièrement la distinction pour les fonctions algébriques entre les formes entières et fractionnaires, rationnelles et irrationnelles. A la vérité, cette distinction, je l'avais fait observer moi-même dans la Préface, n'est pas toujours assez naturelle, mais elle me semble indispensable pour ne pas accumuler trop de formules dans une même table, ce qui aurait fait perdre tous les avantages d'une telle division detaillée; et M. Bellavitis reconnaît lui-même [16] la facilité qu'elle offre pour la recherche des formules dont on a besoin.

Enfin plusieurs des analystes nommés, M. Schlömilch [17], Stern [18], Terquem [19] regrettent l'absence des intégrales multiples définies, ou m'engagent à les ajouter dans une deuxième édition. Mais lorsqu'on fait attention au volume des tables, on préfèrera, je n'en doute guère, des tables séparées pour les intégrales définies multiples: j'espère pouvoir satisfaire un jour à ce désir.

Deventer, Mars, 1861.

Cette bibliographie ne contient que des citations de Mémoires académiques et de Journaux scientifiques. On a laissé de côté tous les livres, où il peut avoir été traité des mêmes sujets, et encore toutes les monographies isolées correspondantes. Il n'aurait pas été possible d'admettre les citations du premier genre; et pour avoir une bibliographie, tant soit peu complète, de monographies, quelque intérêt qu'elle puisse offrir, il m'aurait fallu plus de temps, plus de ressources.

Elle se divise en neuf Sections.

A. Intégrales définies — Théorie.	E. Calcul des résidus.
B. Intégrales définies — Évaluation.	F. Fonctions Eulériennes.
C. Intégrales définies multiples.	G. Fonctions Elliptiques.
D. Évaluation par approximation.	H. Fonctions Ultra-elliptiques (Abéliennes &c.).

---

[16] *Atti Ist. veneto.* l. c.

[17] *Zeitschrift für Mathematik und Physik von* Schlömilch *und* Witschel. 4er Jahrg. 1859. *Literatur-Zeitung*, S. 54, 55.

[18] *Goett. gel. Anzeigen.* l. c.

[19] *Nouv. Ann. d. Mathém.* l. c.

I. Logarithme intégral, Sinus intégral, Cosinus intégral, Fonction Bernoullienne.

Elle est construite des données qu'offrait la Bibliothèque de l'Académie Royale des Sciences, très-riche en Mémoires de différentes Académies et de Sociétés Scientifiques, publiées dans le courant de ce siècle; pour quelques séries anciennes j'ai dû encore m'adresser à quelques autres bibliothèques. Quant aux Journaux scientifiques, que j'ai parcourus dans ce but, ils sont:

J. v. Cr.	CRELLE, *Journal für die reine und angewandte Mathematik.*
Gr. Arch.	GRUNERT, *Archiv der Mathematik und Physik.*
J. d. L.	LIOUVILLE, *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*
Ann. M.	GERGONNE, *Annales de mathématiques pures et appliquées.*
J. Ec. Pol,	*Journal de l'Ecole Polytechnique.*
Phil. Mag.	*Philosophical Magazine* (les diverses séries).
Astr. Nachr.	SCHUMACHER, *Astronomische Nachrichten.*
Schl. Z.	SCHLÖMILCH & WITSCHEL, *Zeitschrift für die Mathematik und Physik.*
Baumg. Zeitschr.	BAUMGARTNER & VON ETTINGSHAUSEN, *Zeitschrift für Physik und Mathematik.*
C. Math. Jour.	*Cambridge Mathematical Journal.*
C. & D. Math. Jour.	*Cambridge & Dublin Mathematical Journal.*
Quart. Jour.	*Quarterly Journal.*
Mathem.	*Mathematician.*

Dans la construction on a suivi l'ordre des années; et pour chaque année spécialement, quant aux Mémoires et aux Actes, on s'est conformé à l'ordre, établi dans le catalogue de notre Bibliothèque: quant aux journaux, ils se suivent en général dans l'ordre où l'on vient de les nommer.

Chaque citation porte le nom de l'auteur en caractères saillants: puis le recueil cité avec indication du volume, de l'année, des pages (où toujours la dernière page se trouve tout aussi bien notée que la première, pour qu'on puisse connaître l'étendue du mémoire en question). En seconde ligne tout le titre se trouve transcrit: cette seconde ligne n'a pas été ajoutée, lorsque le même mémoire a déja été cité auparavant dans une des Sections précédentes: seulement alors on est renvoyé vers telle Section, tel Numéro, où le titre entier se trouve transcrit. Vu que ces cas arrivent souvent, l'étendue de cette partie est ainsi restreinte de beaucoup; sans que pour cela l'usage en soit moins utile ou facile.

Cette série de citations offre par suite un Tableau du développement de ce chapitre des sciences exactes, tant qu'il se trouve exprimé dans les Mémoires publiés par les Académies et les Sociétés Savantes et dans les journaux scientifiques cités. Il semblait préférable de prendre le temps pour l'argument de ce tableau: une dernière table par noms d'auteurs fera connaître la part, que chaque auteur a eue à la construction de cette partie de l'analyse: on y verra bien des noms d'importance dans l'histoire des mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE.

A. INTÉGRALES DÉFINIES. — THÉORIE.

1 L. EULER, Misc. Ber. T. 7. A. 1743. p. 91—129.
Theoremata circa reductionem formularum integralium ad circuli quadraturam.

2 ——— Misc. Ber. T. 7. A. 1743. p. 129—171.
De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur.

3 VINC. RICCATI. Comm. Bonon. T. 5. P. 2. p. 432—445. A. 1767.
De quadratura curvarum tradita per summas generales serierum.

4 L. EULER, N. Comm. Petr. T. 14. P. 1. A. 1769. p. 129—167.
De summis serierum numeros Bernoullianos involventium.

5 ——— N. Comm. Petr. T. 16. A. 1771. p. 91—139.
Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1}\, dx\, (lx)^{\frac{m}{n}}$ integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extensa.

6 ——— N. Comm. Petr. T. 17. A. 1772. p. 173—204.
Exercitationes analyticae.

7 ——— N. Comm. Petr. T. 19. A. 1774. p. 3—29.
De valore formulae integralis $\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n}\, dz$, casu quo post integrationem ponitur $z = 1$.

8 ——— N. Comm. Petr. T. 19. A. 1774. p. 30—65.
De valore formulae integralis $\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^{\mu}$, casu quo post integrationem ponitur $z = 1$.

9 ——— N. Comm. Petr. T. 19. A. 1774. p. 66—102.
Nova methodus quantitates integrales determinandi.

10 ——— N. Comm. Petr. T. 20. A. 1775. p. 59—79.
Speculationes analyticae.

11 L. EULER, Act. Petr. A. 1777. P. 2. p. 3—28.

De integratione formulae $\frac{dx\, lx}{\sqrt{(1-xx)}}$ ab $x=0$ ad $x=1$ extensa.

12 ——— Act. Petr. A. 1777. P. 2. p. 29—47.

De valore formulae integralis $\int \frac{x^{a-1}\,dx}{lx} \frac{(1-x^b)(1-x^c)}{1-x^n}$ a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensae.

13 NIC. FUSZ, Act. Petr. A. 1778. P. 2. p. 111—134.

Genuina methodus investigandi valorem producti $\int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \times \int \frac{x^{\alpha-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x)^\beta}}$ dum ambo integralia a termino $x=0$ usque ad terminum $x=1$ extenduntur.

14 DE LA PLACE, Mém. Paris. A. 1779. p. 207—309

Mémoire sur les Suites.

15 NIC. FUSZ, Act. Petr. A. 1780. P. 2. p. 49—69.

Exercit. analytico-geom. circa lineam curvam singulari proprietate praeditam; inest gemina determinatio formulae $\int d\varphi \sqrt{Sin.\varphi} \left[\begin{matrix} a\ \varphi=0 \\ ad\ \varphi=90^\circ \end{matrix}\right]$

16 L. EULER, Act. Petr. A. 1781. P. 1. p. 3—47.

Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales sine subsidiis quantitatum imaginariarum.

17 DE LA PLACE, Mém. Paris. A. 1782. p. 1—88.

Sur les approximations des Formules, qui sont fonctions de très-grands nombres.

18 L. EULER, N. Act. Petr. T. 3. A. 1785. p. 3—24.

Methodus facilis inveniendi integrale hujus formulae $\int \frac{dx}{x} \frac{x^{n+p} - 2\,x^n\,Cos.\varphi + x^{n-p}}{x^{2n} - 2\,x^n\,Cos.\theta + 1}$ casu quo post integrationem ponitur vel $x=1$ vel $x=\infty$.

19 ——— N. Act. Petr. T. 3. A. 1785. p. 25—46.

De summo usu calculi imaginariarum in Analysi.

20 ——— N. Act. Petr. T. 4. A. 1786. p. 3—16.

Evolutio formulae integralis $\int dx \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{lx}\right)$ a termino $x=0$ usque $x=1$ extensae.

21 ——— N. Act. Petr. T. 4. A. 1786. p. 17—54.

Uberior explicatio methodi singularis nuper expositae, integralia alias maxime abscondita investigandi.

22 ——— N. Act. Petr. T. 5. A. 1787. p. 3—26.

Innumera theoremata circa formulas integrales, quorum demonstratio vires analyseos superare videatur.

23 L. Euler, N. Act. Petr. T. 5. A. 1787. p. 86—117.
Comparatio valorum formulae integralis $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{p-q}}}$ a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensae.

24 ——— N. Act. Petr. T. 5. A. 1787. p. 118—129.
Additamentum ad dissertationem praecedentem.

25 ——— N. Act. Petr. T. 7. A. 1789. p. 64—82.
De iterata integratione formularum integralium dum aliquis exponens pro variabili assumitur.

26 ——— N. Act. Petr. T. 8. A. 1790. p. 15—31.
De vero valore formulae integralis $\int dx \left(l \frac{1}{x} \right)^n$ a termino $x=0$ usque ad terminum $x=1$ extensae.

27 M. A. Parseval, Mém. Prés. à l'Inst. Paris. T. 1. p. 567—586. A. 1806.
Méthode générale pour sommer, par le moyen des intégrales définies, la suite donnée par le théorème de M. Lagrange, au moyen de laquelle il trouve une valeur, qui satisfait à une équation algébrique ou transcendante.

28 Legendre, Mém. Inst. Paris. T. 10. p. 416—509. A. 1809.
Recherches sur diverses sortes d'intégrales définies.

29 N. Fuss, Mém. Pét. T. 4. A. 1811. p. 205—220.
Demonstratio theorematum quorundam calculum integralem spectantium.

30 Bidone, Mém. Torino. T. 20. A. 1811—13. p. 231—345.
Mémoire sur diverses intégrales définies.

31 Grüson, Abh. Berlin. A. 1812, 13. S. 31—44.
Allgemeine Methode mittelst bestimmter Integralien die durch den Lagrangischen Lehrsatz gegebene Reihe zu summiren.

32 Poisson, J. Ec. Pol. T. 9. Cah. 16. A. 1813. p. 215—246.
Mémoire sur les intégrales définies.

33 ——— J. Ec. Pol. T. 10. Cah. 17. A. 1815. p. 612—631.
Suite du Mémoire sur les intégrales définies.

34 Plana, Mém. de Torino. T. 23. p. 7—49. A. 1818.
Mémoire sur les intégrales définies.

35 Ch. de Nieuport, Nouv. Mém. Brux. T. 1. A. 1820. p. 3—38.
Mémoire contenant l'Esquisse d'une Méthode Inverse des Formules Intégrales définies.

36 Poisson, J. Ec. Pol. T. 11. Cah. 18. A. 1820. p. 295—341.
Suite du Mémoire sur les intégrales définies.

37 Cisa de Grésy, Mém. de Torino. T. 26. p. 209—396. A. 1821.
Mémoire sur les intégrales définies.

38 H. G. Schmidten, A. M. T. 12. A. 1822. p. 205—222.
Recherches sur les intégrales définies.

39 Sarrus, A. M. T. 12. A. 1822. p. 254—257.
Note sur les équations différentielles partielles et sur les intégrales définies.

40 Poisson, Mém. Acad Paris. T. 6. p. 571—602. A 1823.
Mémoire sur le calcul numérique des intégrales définies.

41 A. Cauchy, Mém. Acad. Paris. T. 6. p. 603—612. A. 1823.
Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques.

42 N. H. Abel, Magazin Christiania. Bd. 2. A. 1823. S. 55—69, 205—216.
Oplösning af et Par Opgaver ved Hjilp af bestemte Integraler.

43 Poisson, J. Ec. Pol. T. 12. Cah. 19. A. 1823. p. 404—509.
Suite du Mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries.

44 Cauchy, J. Ec. Pol. T. 12. Cah. 19. A. 1823. p. 510—592.
Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficiens constants.

45 G. Libri, Mém. de Torino. T. 28. p. 251—280. A. 1824.
Mémoire sur divers points d'analyse.

46 H. Vernier, A. M. T. 15. A. 1825. p. 165—188.
Recherches sur la sommation des termes de la série de Taylor et sur les intégrales définies.

47 Gergonne, A. M. T. 15. A. 1825. p. 360—363.
Note sur le Mémoire de M. Vernier, p. 165.

48 Cauchy, A. M. T. 16. A. 1826. p. 97—108.
Mémoire sur les intégrales définies, où l'on donne une formule générale de laquelle se déduisent les valeurs de la plupart des intégrales définies déjà connues et celles d'un grand nombre d'autres.

49 ——— Mém. Prés. à l'Acad. Paris. T. 1. p. 1—812. A. 1827.
Mémoire sur la théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant, d'une profondeur indéfinie. (avec 20 Notes).

50 ——— Mém. Prés. à l'Acad. Paris. T. 1. p. 599—799. A. 1827.
Mémoire sur les intégrales définies (lu 22 Août 1814).

51 Dirksen, Abh. Berlin. A. 1827. S. 85—114.
Ueber die Darstellung beliebiger Functionen mittelst Reihen, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen eines Winkels fortschreiten.

52 N. H. Abel, Norske Vidensk. Skrift. Trondhjen. Bd. 2. P. 2. S. 177—208. A. 1827.
Et lidet Bidrag til Laeren von adstillige transcendenten Functioner.

53 ——— J. v. Cr. B. 2. A. 1827. S. 22—30.
Ueber einige bestimmte Integrale.

54 Cauchy, A. M. T. 17. A. 1827. p. 84—127.
Recherche d'une formule générale qui fournit la valeur de la plupart des intégrales définies connues, et celle d'un grand nombre d'autres.

55 ——— Mém. Acad. Paris. T. 8. p. 97—129. A. 1829.
Mémoire sur divers points d'analyse.

56 G. Lejeune-Dirichlet, J. v. Cr. Bd. 4. A. 1829. S. 94—98.
Note sur les intégrales définies.

57 ——————— J. v. Cr. B. 4. A. 1829. S. 157—169.
Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

58 A. L. Cauchy, Mém. Acad. Paris. T. 9. p. 97—103. A. 1830.
Extrait du Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles.

59 N. Fuss. Mém. Pét. T. 11. Mém. posth. de L. Euler, F. T. Schubert et N. Fuss. A. 1830. p. 268—273.
Démonstration d'un théorème général relatif au calcul intégral.

60 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. Bd. 5. A. 1830. S. 344—364.
Exercitatio algebraica circa discerptionem singularem fractionum, quae plures variabiles involvunt.

61 Ostrogradsky, Mém. Pét. Sér. 6. T. 1. A. 1831. p. 117—122.
Note sur les intégrales définies.

62 G. Libri, J. v. Cr. Bd. 7. A. 1831. S. 224—233.
Mémoire sur les fonctions discontinues.

63 Poisson, J. Ec. Pol. T. 13. Cah. 20. A. 1831. p. 222—248.
Suite du Mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries.

64 J. L. Raabe, Baumgartners Zeitschr. B. 10. A. 1831. S. 41—74.
Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Reihen.

65 A. F. Svanberg, N. Act. Upsal. T. 10. A. 1832. S. 231—288.
De Integralibus definitis disquisitiones.

66 R. Murphy, Cambr. Phil. Trans. Vol. 3. A. 1833. p. 429—443.
On the General Properties of Definite Integrals.

67 ———— Cambr. Phil. Trans. Vol. 4. A. 1833. p. 125—154.
On the Resolution of Algebraical Equations.

68 ———— Cambr. Phil. Trans. Vol. 4. A. 1833. p. 353—408.
On the Inverse Method of Definite Integrals, with Physical Applications.

69 G. Libri, J. v. Cr. Bd. 12. A. 1834. S. 240—257.
Mémoire sur les intégrales définies aux différences finies.

70 R. Murphy, Cambr. Phil. Trans. Vol. 5. A. 1825. p. 113—148, 315—394.
Second and third Memoir on the Inverse Method of Definite Integrals. — Analytical Table of Reference for the three Memoirs.

71 Lejeune-Dirichlet, Abh. Berlin. A. 1835. S. 391—407.
Ueber eine neue Anwendung bestimmter Integrale auf die Summation endlicher oder unendlicher Reihen.

72 Liouville, J. Ec. Pol. T. 15. Cah. 24. A. 1835. p. 55—60.
Note sur la détermination d'une fonction arbitraire, placée sous un signe d'intégration définie.

73 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. Bd. 15. A. 1836. S. 1—26.
Formula transformationis integralium definitorum.

74 J. L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 15. A. 1836. S. 355—364.
Ueber die Summation periodischer Reihen und die Reduction des Integrals:

$$\int_0^\infty \varphi(Sin. ax, \; Cos. bx)\, dx.$$

75 C. G. J. Jacobi, J. de L. T. 1. A. 1836. p. 195, 196.
Formule pour la transformation d'une classe d'intégrales définies.

76 C. Ramus, Danske Afhandl. 4e Raekke. B. 6. A. 1837. S. 265—307.
Undersögelse af en Classe af Integraler, beslaegtede med de elliptiske.

77 Encke, Astron. Jahrb. A. 1837. S. 251—288.
Ueber mechanische Quadratur.

78 J. Liouville, Mém. Prés. à l'Acad. Paris. T. 5. p. 76—102, 103—151. A. 1838.
Premier et Second Mémoire sur la détermination des intégrales, dont la valeur est algébrique.

79 C. Gudermann, J. v. Cr. Bd. 18. A. 1838. S. 1—54, 220—258.
Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.

80 A. F. Svanberg, J. v. Cr. Bd. 18. A. 1838. S. 55—68.
Mémoire sur quelques intégrales définies.

81 ——————— N. Act. Upsal. T. 11. A. 1839. S. 1—28.
De seriebus periodicis adnotationes.

82 J. Liouville, J. de L. T. 4. A. 1839. p. 225—235.
Note sur quelques intégrales définies.

83 A. L. Cauchy, Mém. Acad. Paris. T. 17. p. 249—768. A. 1840.
Mémoire sur la théorie des nombres. (avec 14 Notes).

84 Ostrogradsky, Bull. Pétersbourg. T. 6. A. 1840. S. 161, 162.
Mémoire sur les quadratures définies.

85 E. E. Kummer, J. v. Cr. Bd. 20. A. 1840. S. 1—10.
Sur quelques transformations générales des intégrales définies.

86 J. L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 20. A. 1840. S. 173—177.
Ueber den Fall wenn in den bestimmten Integrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ die Function $\varphi(x)$ für einen oder mehrere Werthe von x, welche innerhalb a und b liegen, unendlich grosz oder discontinuirlich wird.

87 F. J. Richelot, J. v. Cr. Bd. 21. A. 1840. S. 293—327.
De integralibus quibusdam definitis, quorum summa ad quadraturam divisionemque circuli revocatur.

88 O. Terquem, J. de L. T. 5. A. 1840. p. 37.
Démonstration de deux propositions de M. Cauchy.

89 J. Binet, J. de L. T. 5. A. 1840. p. 373—379.
Mémoire sur les inégalités séculaires des éléments des planètes. Note.

90 A. Cauchy. C. R. T. 12. A. 1841. p. 1145—1158.
Sur la détermination et la transformation d'un grand nombre d'intégrales définies nouvelles.

91 W. R. Hamilton, Proc. Irish R. S. V. 1. A. 1841. p. 475—477.
On Fluctuating Functions.

92 H. Moseley, Not. British Assoc. A. 1841. p. 35—39.
On a Machine for calculating the Numerical Values of Definite Integrals.

93 Dirksen, Ber. Berlin. A. 1841. S. 4—14.
Von den Integralen und deren Anwendung auf Funktionen imaginärer Veränderlichen.

94 Chr. Jürgensen, Danske Afhandl. 4e Raekke. B. 8. A. 1841. S. 1—17.
Om Decompositionen af en Classe af Functioner.

95 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 1. A. 1841. S. 263—268.
Entwickelung einiger Formeln aus der Theorie der bestimmten Integrale.

96 ——— Gr. Arch. B. 1. A. 1841. S. 417—422.
Zur Theorie der bestimmten Integrale.

97 J. Liouville, J. de L. T. 6. A. 1841. p. 69—73.
Sur une formule de M. Jacobi.

98 Ch. Delaunay, J. de L. T. 6. A. 1841. p. 209—237.
Thèse sur la distinction des maxima et des minima dans les questions, qui dépendent de la méthode des variations.

99 Cauchy. J. Ec. Pol. T. 17. Cah. 28. A. 1841. p. 147—248.
Mémoire sur diverses formules relatives à la théorie des intégrales définies, sur la conversion des différences finies des puissances en intégrales de cette espèce.

100 A. Pioch, Mém. Cour. Brux. T. 15. P. 2. A. 1841, 1842, p. 1—74.
Mémoire sur les fonctions arbitraires exprimées par des intégrales doubles.

101 E. H. Dirksen, Ber. Berlin. A. 1842. S. 20—29.
Summation unendlicher Reihen, welche nach den Sinussen und Cosinussen von Winkeln fortschreiten, die Produkte von einer Veränderlichen in die Wurzeln einer transcendenten Gleichung und deren Coefficienten bestimmte Integrale bilden.

102 J. L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 23. A. 1842. S. 105—125.
Ueber die Summation der ohne Ende fortlaufend harmonisch-periodischen Reihen und über die Reduction des Integrals $\int_0^\infty \varphi(Sin.ax,\ Cos.bx)\,\frac{dx}{x}$.

103 C. Jürgensen, J. v. Cr. Bd. 23. A. 1842. S. 142—144.
Note relative à un Mémoire de M. Richelot sur quelques intégrales définies.

104 C. Ramus, J. v. Cr. Bd. 24. A. 1842. S. 257—259.
Démonstration d'un théorème sur quelques intégrales définies.

105 J. A. Grunert, Gr. Arch. B. 2. A. 1842. S. 266—323.
Ueber die neuesten Erfindungen in der Theorie der bestimmten Integrale.

106 W. R. Hamilton, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 20. A. 1842. p. 288—294.
On certain discontinuous Integrals, connected with the Development of the Radical which represents the Reciprocal of the Distance between two Points.

107 A. Cauchy, C. R. T. 16. A. 1843. p. 422—433.
Mémoire sur la théorie des intégrales définies singulières appliquées généralement à la détermination des intégrales définies et en particulier à l'évolution des Intégrales Eulériennes.

108 ———— C. R. T. 17. A. 1843. p. 779—787.
Mémoire sur les rapports entre les factorielles réciproques dont les bases varient proportionnellement, et sur la transformation des logarithmes de ces rapports en intégrales définies.

109 Wantzel, C. R. T. 27. A. 1843. p. 1191—1194.
Mémoire sur l'intégration des équations différentielles linéaires au moyen des intégrales définies.

110 W. R. Hamilton, Irish Trans. Vol. 19. A. 1843. p. 264—321.
On fluctuating Functions.

111 E. H. Dirksen, Ber. Berlin. A. 1843. S. 83—92.
Summation unendlicher Reihen, deren Glieder nach den Zahlenwerthen der Wurzeln transcendenter Gleichungen fortgehen.

112 ———— Ber. Berlin. A. 1843. S. 111—114.
Entwickelung von $(1-2\alpha t+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ mittelst bestimmter Integrale.

113 Balth. Boncompagni, J. v. Cr. Bd. 25. A. 1843. S. 74—96.
Recherches sur les intégrales définies.

114 J. L. Raabe, J. v. Cr. B. 25. A. 1843. S. 160—168.
Ueber die Summation der ohne Ende fortlaufend harmonisch-periodischen Reihen und über die Reduction des Integrals $\int_0^\infty \varphi\,(Sin.\,ax,\ Cos.\,bx)\,\frac{dx}{x}$.

115 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. Bd. 26. A. 1843. S. 81—87.
Ueber die Entwicklung des Ausdrucks

$$\{aa-2aa'\,\{Cos.\,\omega.\,Cos.\,\varphi+Sin.\,\omega.\,Sin.\,\varphi.\,Cos.\,(\delta-\delta')\}+a'a'\}^{\frac{1}{2}}.$$

116 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 3. A. 1843. S. 278—283.
Ueber die Integration unendlicher Reihen.

117 Ossian Bonnet, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 73—109.
Note sur la convergence et la divergence des séries.

118 J. Bertrand, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 110—112.
Détermination de l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{l.(1+x)dx}{1+x^2}$.

119 G. Boole, C. Math. Journ. V. 3. A. 1843. p. 216—224.
On the Transformation of definite integrals.

120 Delaunay, J. Ec. Pol. T. 17. Cah. 29. A. 1843. p. 37—120.
Mémoire sur le calcul des variations.

121 A. Cauchy, C. R. T. 18. A. 1844. p. 1072—1086.
Mémoire sur la substitution des fonctions non-périodiques aux fonctions périodiques dans les intégrales définies.

122 ——— C. R. T. 19. A. 1844. p. 1337—1344.
Mémoire sur quelques propositions fondamentales du calcul des résidus et sur la théorie des intégrales singulières.

123 C. J. Malmsten, N. Act. Upsal. T. 12. A. 1844. S. 155—176.
Mémoire sur les intégrales $\int_0^m \frac{1-p\,Cos.tx}{1-2p\,Cos.tx+p^2}\varphi(x)\,dx$ et $\int_0^m \frac{p\,Sin.tx}{1-2p\,Cos.tx+p^2}f(x)\,dx$.

124 ——— N. Act. Upsal. T. 12. A. 1844. S. 177—254.
Mémoire sur les intégrales définies entre $x=0$ et $x=\infty$.

125 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 4. A. 1844. S. 71—75.
Ueber einige bestimmte Integrale, deren Werthe durch doppelte Integration gefunden werden.

126 J. A. Grunert, Gr. Arch. B. 4. A. 1844. S. 104—109.
Beweis der Gleichung $\frac{d^{i-1}(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}} = (-1)^{i-1}\,1.3.5\ldots(2i-1)\,\frac{Sin.ix}{i}$ für $z=Cos.\,x$.

127 ——— Gr. Arch. B. 4. A. 1844. S. 113—126.
Ueber die neuesten Erfindungen in der Theorie der bestimmten Integrale. Zweite Abhandlung.

128 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 4. A. 1844. S. 316—329.
Ueber die Zerlegung der bestimmten Integrale in andere von kleineren Integrations-Intervallen.

129 ——— Gr. Arch. B. 5. A. 1844. S. 152—155.
Neues Theorem über eine gewisse Klasse periodischer Functionen.

130 U. H. Meijer, Gr. Arch. B. 5. A. 1844. S. 216—219.
Remarques faites à l'occasion du N°. XIII. T. 4. p. 113 de ce Journal.

131 J. A. Serret, J. de L. T. 9. A. 1844. p. 193—216.
Mémoire sur l'intégration d'une équation différentielle à l'aide des différentielles à indices quelconques.

132 A. Cauchy, C. R. T. 20. A. 1845. p. 481, 482, 552—554, 691—726.
Mémoire sur les approximations des fonctions de très-grands nombres.

133 J. R. Young, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 27. A. 1845. p. 362—366, 437—442.
On the Evaluation of the Sums of Neutral Series.

134 B. Bronwin, Mathemat. V. 1. A. 1845, p. 197—203.
On definite integrals.

135 ———— Mathemat. V. 1. A. 1845. p. 303—307.
On the reduction of certain integrals to more simple forms.

136 G. Boole, C. Math. Journ. V. 4. A. 1845. p. 82—87.
On the inverse Calculus of definite Integrals.

137 Timmermans, Bull. Brux. T. 13. P. 1. A. 1846. p. 140—151.
Note sur la convergence des séries.

138 Schaar, Bull. Brux. T. 13. P. 2. A. 1846. p. 30—42.
Sur la transformation de quelques intégrales définies.

139 A. Cauchy, C. R. T. 23. A. 1846. p. 251—255.
Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée.

140 ———— C. R. T. 23. A. 1846. p. 382—394.
Mémoire sur le changement de variables dans les transcendantes, représentées par des intégrales définies et sur l'intégration de certains systèmes d'équations différentielles.

141 ———— C. R. T. 23. A. 1846. p. 485—487, 529—537.
Mémoire sur la détermination complète des variables propres à vérifier un système d'équations différentielles.

142 ———— C. R. T. 23. A. 1846. p. 537, 557—562.
Mémoire sur les intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ change brusquement de valeur.

143 ———— C. R. T. 23. A. 1846. p. 563—569.
Mémoire sur les intégrales imaginaires des équations différentielles et sur les grands avantages que l'on peut retirer de la considération de ces intégrales, soit pour établir des formules nouvelles, soit pour éclaircir des difficultés, qui n'avaient pas été jusqu'ici complètement résolues.

144 ———— C. R. T. 23. A. 1846. p. 689—702.
Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée et sur celles qui sont prises entre des limites imaginaires.

145 ———— C. R. T. 23. A. 1846. p. 729—740.
Mémoire sur les diverses espèces d'intégrales d'un système d'équations différentielles.

146 ———— C. R. T. 23. A. 1846. p. 779—787.
Sur les rapports et les différences qui existent entre les intégrales rectilignes d'un système d'équations différentielles et les intégrales complètes de ces mêmes équations.

147 R. Rawson, Mem. Manchester. 2d Series. V. 7. A. 1846. p. 464—501.
On the Summation of Series and on Definite Integration.

148 C. Ramus, Danske Afhandl. (4e Raekke). T. 12. A. 1846. S. 111—184.
Om Ellipsoiders Tiltraekning og om de ellipsoidiske Liger aegtifigurer af flydende Masser.

149 O. Schlömilch, J. v. Cr. Bd. 33. A. 1846. S. 268—280
Note sur la variation des constantes arbitraires d'une intégrale définie.
150 J. A. Grunert, Gr. Arch. B. 7. A. 1846. S. 358—366.
Ueber eine Anwendung des in der Abhandlung Th. 2. S. 266. § 3 bewiesenen Hauptsatzes der Theorie der bestimmten Integrale.
151 W. Roberts, J. de L. T. 11. A. 1846. p. 210, 211.
Démonstration d'un Théorème de Poisson.
152 R. Moon, L. E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V 28. A. 1846. p. 136—143.
Reply to some Remarks contained in Prof. Young's recent Paper: On the Evaluation of the Sums of Neutral Series.
153 J. R. Young, L. E et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 28. A. 1846. p. 213—215
On Differentiation as applied to Periodic Series, with a few Remarks in Reply to Mr. Moon.
154 Schaar, Mém. Cour Brux. T. 22. A 1846, 1847. p. 1—25.
Mémoire sur les intégrales Eulériennes et sur la convergence d'une certaine classe de séries.
155 Young, Proceed. Irish R. S. V. 3. A. 1847. p. 27—49.
On Diverging Infinite Series and on certain Errors connected with them.
156 A. F. Svanberg, N. Act. Upsal. T. 13. A. 1847. S. 1—13.
Observations sur la transformation des intégrales multiples
157 N. G. de Schulten, Acta Fenn. Helsingfors. B. 2. A. 1847. p 317—346.
Considérations sur la relation, qui existe dans quelques cas particuliers entre la valeur d'une fonction uniforme d'une seule variable et celle de son coefficient différentiel du premier ordre.
158 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 9. A. 1847. S. 379—383.
Allgemeine Reductionsformel für gewisse bestimmte Integrale.
159 J. Dienger, Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 109.
Aufgaben.
160 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 424—428.
Ueber einige arithmetische Sätze.
161 — Gr. Arch. B. 10. A. 1847 S. 440—449
Algemeine Transformationsformeln für gewisse Integrale.
162 F. W. Newman, Mathemat. V. 2. A. 1847. p. 28—31.
On the general reduction of certain Integrals.
163 B. Bronwin, Mathemat. V. 2. A. 1847. p. 75—79.
On the reduction of certain definite integrals to more simple forms.
164 A. Cayley, C. et D. Math. Journ. V. 2. A. 1847. p. 122—128.
On certain formulae for differentiation, with applications to the evaluation of definite integrals.
165 E. Lamarle, J. de L. T. 12. A. 1847. p. 305—342.
Note sur la continuité considérée dans ses rapports avec la convergence des séries de Taylor et de Maclaurin.

166 B. Bronwin, L. E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 31. A. 1847. p. 12—20.
On the Inverse Calculus of Definite Integrals.

167 A. Cauchy, C. R. T. 26. A. 1848. p. 624—627, 666—673.
Mémoire sur les valeurs moyennes des fonctions d'une ou de plusieurs variables, et sur les fonctions isotropes.

168 — — C. R. T. 27. A. 1848. p. 6—12.
Mémoire sur les valeurs moyennes des fonctions et sur les fonctions isotropes.

169 G. Boole, Irish Trans. Vol. 21. A. 1848. p. 124—139.
On the Analysis of Discontinous Functions.

170 J. Arenstein, Haidinger's Naturw. Abhandl. B. 2. A. 1848. S. 43—115.
Was sind die imaginären Grössen, und welcher ist ihr analytischer und geometrischer Sinn.

171 J. L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 37. A. 1848. S. 356—362.
Ueber den richtigen Gebrauch vieldeutiger Functionen bei der Ermittelung bestimmter Integrale.

172 Dienger, J. v. Cr. Bd. 37. A. 1848. S. 363—369.
Ueber die bestimmten Integrale mit imaginären Grenzen.

173 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 11. A. 1848. S. 63—69.
Ueber die singulären Werthe bestimmter Integrale.

174 G. Boole, J. de L. T. 13. A. 1848. p. 111—112.
Théorème général concernant l'intégration définie.

175 A. de Morgan, Cambr. Phil. Trans. Vol. 8. A. 1849. p. 182—203.
On Divergent Series and various Points of Analysis connected with them.

176 J. R. Young, Cambr. Phil. Trans. Vol. 8. A. 1849. p. 429—440.
On the Principle of Continuity in reference to certain Results of Analysis.

177 G. G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. Vol. 8. A. 1849. p. 533—583.
On the Critical Values of the Sums of Periodic Series.

178 G. B. Airy, Cambr. Phil. Trans. Vol. 8. A. 1849. p. 595—599.
Supplement to a Paper on the Intensity of Light in the neighbourhood of a Caustic.

179 E. G. Bjoerling, Overs. Stockholm. Forhandl. A. 1849. S. 172—179.
Om integralen $\int \frac{dx}{a + b\,Cos.x + c\,Sin.x}$.

180 A. Steen, Danske Afhandl. (5e Raekke). T. 1. A. 1849. S. 333—353.
Om dobbelte bestemte Integralen.

181 Ossian Bonnet, J. de L. T. 14. A. 1849. p. 249—256.
Remarque sur quelques intégrales définies.

182 G. Boole, C. et D. Math. Journ. V. 4. A. 1849. p. 14—20.
On a general theorem in definite Integration.

183 O. Bonnet, Mém. Cour. Brux. T. 23. A. 1840—1850. p. 1—116.
Mémoire sur la théorie générale des séries.

184 Schaar, Mém. Cour. Brux. T. 23. A. 1848—1850. p. 1—17.
Mémoire sur une formule d'analyse.

185 A. Cauchy, Mém. Acad. Paris. T. 22. p. 39—180. A. 1850.
Mémoire sur le calcul intégral (avec 8 Notes.) (Prés. 27 Déc. 1824).

186 A. von Ettingshausen, Sitz. Ber. Wien. B. 5. A. 1850. S. 31—34.
Zur Nachweisung der Existenz der Wurzeln algebraischer Gleichungen.

187 C. F. Lindmann, Stockholm Handlingar. A. 1850. S. 343—364.
Om några definite integraler.

188 J. Dienger, Gr. Arch. B. 15. A. 1850. S. 119, 120.
Ueber das Integral $\int_0^{2\pi} f(re^{\varphi i})\, e^{-n\varphi i}\, d\varphi$.

189 V. Puiseux, J. de L. T. 15. A. 1850. p. 365—485.
Recherches sur les fonctions algébriques.

190 A. Meyer, Mém. Liège. T. 7. A. 1851. p. 1—510.
Exposé élémentaire de la théorie des intégrales définies.

191 A. Cauchy, C. R. T. 32. A. 1851. p. 68—75.
Mémoire sur les fonctions irrationnelles.

192 ——— C. R. T. 32. A. 1851. p. 126, 162—164.
Suite des recherches sur les fonctions rationnelles et sur leurs intégrales définies.

193 ——— C. R. T. 32. A. 1851. p. 207—215.
Mémoire sur l'application du calcul des résidus à plusieurs questions importantes d'analyse.

194 Puiseux, C. R. T. 32. A. 1851. p. 276—284.
(Rapport sur) Recherches sur les fonctions algébriques.

195 A. Cauchy, C. R. T. 32. A. 1851. p. 389—397.
Mémoire sur la sommation des termes de rang très-élevé dans une série simple ou multiple.

196 Hermite, C. R. T. 32. A. 1851. p. 442—450.
(Rapport sur) Mémoire relatif aux fonctions à double période.

197 Liouville et Cauchy, C. R. T. 32. A. 1851. p. 450—454.
Remarques à ce sujet.

198 L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 41. A. 1851. S. 54—56.
Ueber den Werth eines bestimmten Integrals aus den unbestimmten Integralfunction gezogen, falls dieselbe von der Form *Arctang* $f(x)$ ist: wo $f(x)$ eine eindeutige Function von x vorstellt.

199 Richelot, J. v. Cr. Bd. 42. A. 1851. S. 32—34.
Auszug eines Schreibens des Herrn Prof. C. G. J. Jacobi.

200 W. Smaasen, J. v. Cr. Bd. 42. A. 1851. S. 222—235.
Sur la sommation des suites infinies par des intégrales définies.

201 A. Cayley, C. et D. Math. Journ. V. 6. A. 1851. p. 136—140.
On certain definite integrals.

202 O. Werner, Gr. Arch. B. 18. A. 1852. S. 39—43.
Die Differentiation unter dem Integralzeichen.

203 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 18. A. 1852. S. 391—399.
Ueber die Substitution neuer Variabelen in unbestimmte und bestimmte Integrale.

204 G. Decher, Gr. Arch. B. 19. A. 1852. S. 403—407.
Ueber den Einfluss, welchen die Ordnung in der Ausführung der Integrationen auf den Werth eines doppelten Integrals hat.

205 R. L. E(llis), C. et D. Math. Journ. V. 7. A. 1852. p. 103, 104.
Solution of a Functional Equation.

206 W. H. L. Russell, C. et D. Math. Journ. V. 8. A. 1853. p. 157—159.
On definite integrals suggested by the theory of heat.

207 Genocchi, Bull. Brux. T. 21. P. 1. 1854. p. 64—95.
Sur quelques particularités de formules d'analyse mathématique.

208 A. Cauchy, C. R. T. 39. A. 1854. p. 129—135.
Sur une formule de M. Anger et sur d'autres formules analogues.

209 ——— C. R. T. 39. A. 1854. p. 214—218.
Sur les intégrales aux différences finies.

210 C. J. D. Hill, Stockholm Handlingar. 1854. S. 405—494.
Om Arithmetick Quadratur.

211 D. Bierens de Haan, J. v. Cr. B. 47. A. 1854. S. 221—224.
Ueber eine Sammlung von bestimmten Integralen.

212 L. Raabe, J. v. Cr. B. 48. A. 1854. S. 137—142.
Ueber Producte und Potenzen bestimmter einfacher Integral-Ausdrücke durch mehrfache dargestellt.

213 ——— J. v. Cr. B. 48. A. 1854. S. 161—166.
Ueber einen Hülfssatz zur Ausmittelung der Werthe bestimmter Integrale.

214 ——— J. v. Cr. Bd. 48. A. 1854. S. 178—189.
Ueber den gegenseitigen Zusammenhang einiger Functionen.

215 J. Toeplitz, Gr. Arch. B. 23. A. 1854. S. 241—263.
Die Theorie der periodischen Functionen, begründet durch die Betrachtung der Integrale zwischen imaginären Grenzen.

216 W. H. L. Russell, C. et D. Math. Journ. V. 9. A. 1854. p. 104—112.
On the Integration of linear differential equations.

217 ——— C. et D. Math. Journ. V. 9. A. 1854. p. 112—115.
On the Integration of linear partial differential equations.

218 D. Bierens de Haan, Verh. Akad. Amst. Dl. 2. A. 1855. blz. 1—54.
Note sur une méthode pour la réduction d'intégrales définies et sur son application à quelques formules spéciales.

219 A. CAUCHY, C. R. T. 40. A. 1855. p. 330—335, 373—376.
Note sur les conditions de convergence des séries qui représentent les intégrales générales d'un système d'équations différentielles.
220 W. H. RUSSELL, Proceed. Phil. Trans. V. 7. A. 1854—55. p. 174, 175.
On the Theory of Definite Integrals.
221 Phil. Trans. 1855. P. I. p. 157—178.
On the Theory of Definite Integrals.
222 A. WINCKLER, J. v. Cr. Bd. 50. A. 1855. S. 1—31.
Ueber die Reduction dreifacher Integrale auf Quadraturen.
223 E. HEINE, J. v. Cr. Bd. 50. A. 1855. S. 323, 324.
Directer Beweis der Gleichheit zweier bestimmten Integrale.
224 O. WERNER, Gr. Arch. B. 24. A. 1855. S. 110, 111.
Aufgaben
225 R. CARMICHAEL. L. E. et D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 9 A. 1855. p. 209—314.
Theorems on the Quadrature of Surfaces and the Rectification of Curves.
226 D. BIERENS DE HAAN, Verslagen Akad. Amst. D. 4. A. 1856. blz. 332—353.
Bijdragen tot de theorie der bepaalde Integralen.
227 A. CAUCHY, C. R. T. 42. A. 1856. p. 525—530.
Mémoire sur la réduction de classes très-étendues d'intégrales multiples.
228 ——— C. R. T. 43. A. 1856. p. 497—509.
Sur l'intégration définie d'un système d'équations différentielles.
229 G. G. STOKES, Cambr. Phil. Trans. Vol. 9. A. 1856. p. 166—186.
On the Numerical Calculation of a Class of Definite Integrals and infinite Series.
230 A. WINCKLER, Sitz. Ber. Wien. Bd. 21. A. 1856. S. 389—427.
Neue Theoreme zur Lehre von den bestimmten Integralen.
231 A. POPOFF, Mém. de Kasan. A. 1856. p. —156.
Principes du Calcul des Intégrales.
232 E. HEINE, J. v. Cr. Bd. 51. A. 1856. S. 382—401.
Der Uebergang von den unbestimmten zu bestimmten Integralen.
233 J. A. GRUNERT, Gr. Arch. B. 27. A. 1856. S. 362—364.
Ueber das Integral $\int\int \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dx dy$.
234 J. LIOUVILLE, J. de L. 2e Ser. T. 1. A. 1856. p. 445—450.
Démonstration nouvelle d'une formule de M. WILLIAM THOMSON.
235 A. CAYLEY, L. E. et D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 12. A. 1856. p. 354—361.
Second Note on the Theory of Logarithms.
236 D. BIERENS DE HAAN, Verh. Akad. Amst. D. 5. A. 1857. blz. 1—116.
Réduction des intégrales définies générales $\int_0^\infty F(x) \frac{Cos. px\, dx}{q^2+x^2}$, $\int_0^\infty F(x) \frac{Sin. px\, dx}{q^2+x^2}$, et application de ces formules au cas, que $F(x)$ a un facteur de la forme $Sin.^a x$ ou $Cos.^a x$.

237 J. Gomes de Souza, Proceed. Phil. Trans. V. 8. A. 1856, 57. p. 146—149, 376—379.
On the Determination of Unknown Functions, which are involved under Definite Integrals.

238 G. Boole, Proceed. Phil. Trans. V. 8. A. 1856, 57. p. 461, 462.
On the Comparison of Transcendents, with certain Applications to the Theory of Definite Integrals.

239 — — Phil. Trans. 1857. P. 3. p. 745—804.
On the Comparison of Transcendents, with certain Applications to the Theory of Definite Integrals.

240 Popov. Bull. Phys.-Math. Pétersbourg. T. 15. A. 1857. S. 307—313.
Sur la valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-ax} e^{(x^2+bx)i} dx$.

241 H. Scheffler, Gr. Arch. B. 28. A. 1857. S. 121—162.
Ueber das Wesen der Funktionen, insbesondere über Vieldeutigkeit, Unbestimmtheit, Veränderlichkeit, Differentiation und Stetigkeit.

242 W. R. Hamilton, L. E. et D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 14. A. 1857. p. 375—383.
On the Calculation of the Numerical Values of a certain Class of Multiple and Definite Integrals.

243 H. Enneper, Quart. Journ. V. 1. A. 1857. p. 272—276.
Elementary Demonstration of an equation between two transcendental functions.

244 D. Bierens de Haan, Verh. Akad. Amst. D. 4. 1848. blz. I—XXXII, 1—572.
Tables d'intégrales définies.

245 N. C. Schmit, Mém. Liège. T. 13. A. 1858. p. 289—327.
Intégrales définies — Etudes faites à l'occasion de recherches sur les fonctions de Legendre et sur les fonctions de Lamé.

246 Kinkelin, Mitth. Bern. 1858. S. 57—68.
Ueber Convergenz unendlicher Reihen.

247 — — Mitth. Bern. A. 1858. S. 89—104.
Ueber einige unendliche Reihen.

248 J. Dienger, Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 250—260.
Ueber einige bestimmte Integrale.

249 G. Zehfuss, Gr. Arch. B. 31. A. 1858. S. 246—248.
Uebungsaufgaben.

250 D. Bierens de Haan, Verh. Akad. Amst. D. 7. A. 1859. blz. 1—52.
Over eenige gevallen, bij de theorie van onstadige (discontinue) functien, waar men te onderscheiden heeft, of het oneindige van een even of oneven, van een geheelen of gebroken vorm zij.

251 Spitzer, C. R. T. 48. A. 1859. p. 746—752.
Note sur l'intégration des équations de la forme $x^m \frac{d^n y}{dx^n} = \epsilon y$ par des intégrales dé-

finies, ε désignant le nombre ± 1, m et n des nombres entiers et positifs, soumis à la condition $m > n$.

252 TH. CLAUSSEN, Bull. Pétersb. V. 1. A. 1859. p. 145—147.
Sur une faute dans les „Exercices de Mathématique par M. A. L. CAUCHY, 2de Série. 1827. p. 141, 197."

253 TCHEBYCHEFF, Bull. Pétersb. V. 1. A. 1859. p. 193—200.
Sur le developpement des fonctions à une seule variable.

254 J. PLANA, Mem. Torino. Serie 2a. T. 18. A. 1859. p. 499—503.
Note sur les pages 68, 69, 75 du 2d Volume des Opuscula Analytica D'EULER, publié en 1785.

255 BOUNIAKOWSKY, Mém. S. Pétersb. Sér. 7. V. 1. A. 1859. p. 1—18.
Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies.

256 MAX. MARIE, J. de L. 2e Sér. T. 4. A. 1859. p. 121—152, 305—328, 369—388.
Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.

257 O. SCHLÖMILCH, Schlömilch's Zeitschr. B. 4. A. 1859. S. 161—163.
Ueber die Discontinuität gewisser unendlicher Reihen

258 S. SPITZER, Schlömilch's Zeitschr. B. 4. A. 1859. S. 251—264.
Studien über Differentialgleichungen von der Form $(mx^2+nx+p)y''+(qx+r)y'+sy=0$.

259 O. SCHLÖMILCH, Schlömilch's Zeitschr. B. 4. A. 1859. S. 433—437.
Ueber eine transcendente Function.

B. INTÉGRALES DÉFINIES. — EVALUATIONS.

1 J. HERMANNUS, Act. Erud. A. 1719. p. 351—361.
Solutio duorum problematum, quorum alterum integrale ex data quadam formula differentiali per arcus circulares et hyperbolicas exhibendum postulat: alterum vero curvam projectorum in medio resistente construendum proponit. Accedunt duo nova Problemata Geometris vicissim proposita.

2 NIC. BERNOUILLI, Io. FIL. Act. Erud. A. 1720. p. 269—279.
Enodatio alicujus problematis Geometrici a cel. J. HERMANNO propositi atque de Inveniendis curvis algebraicis, ab eodem viro propositis, quae non sunt indefinite rectificabiles, habeant tamen aliquos arcus rectificationem admittentes.

3 ——————— Act. Erud. A. 1720. p. 279—285.
Responsio ad clar. TAYLORI querelas.

4 ——————— Act. Erud. Suppl. T. 8. p. 372—389. A. 1724.
Animadversiones in clar. J. HERMANNI solutionem pro primo duorum problematum Geometricorum ab ipso propositorum, editam in Act. Erud. 1723. m. April. Et

eorum communicatio Methodi curvas inveniendi Algebraicas indefinite non quadrabiles, habentes tamen datum numerum spatiorum absolute quadrabilium.

5 P. P. Elvius, Acta Upsal. T. 3. A. 1730—1734. p. 71—75.
Theorema de oscillationibus pendulorum in arcubus circularibus.

6 L. Euler, Misc. Ber. T. 7. A. 1743. p. 91—129. = A. 1.

7 — — Misc. Ber. T. 7. A. 1743. p. 129—171. = A. 2.

8 — — Misc. Taur. T. 3. P. 2. p. 146—178. A. 1762—1765.
Observationes circa integralia formularum $\int x^{p-1}\,dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ posito post integrationem $x = 1$.

9 H. Saladini, Comm. Bonon. T. 5. P. 2. p. 120—138. A. 1767.
Methodus Bernoulliana de reducendis quadraturis transcendentibus ad longitudinam curvarum algebraicarum, a quibus inutilis saepe redditur, i aginariis quantitatibus liberatur, atque ejusdem reductionis innumerae aliae viae indigitantur.

10 Vinc. Riccati, Comm. Bonon. T. 5. P. 2. p. 432—445. A. 1767.
De quadratura curvarum tradita per summas generales serierum.

11 J. Landen, Phil. Trans. Vol. 58. p 174—180. A. 1768.
A specimen of a new Method of comparing curvilinear Areas; by which many such areas may be compared as have not yet appeared to be comparable by any other Method.

12 L. Euler, N. Comm. Petr. T. 14. P. 1. A. 1769. p. 129—167. = A. 4.

13 J. Landen, Phil. Trans. Vol. 60. p. 441—443. A. 1770.
Some new Theorems for computing the areas of certain Curve Lines.

14 L. Euler, N. Comm. Petr. T. 16. A. 1771. p. 91—139. = A. 5.

15 — — N. Comm. Petr. T. 17. A. 1772. p. 173—204. = A. 6.

16 De la Grange, Misc. Taur. T. 5. P. 2. p. 167—232. A. 1770—1773.
Mémoire sur l'utilité de la methode de prendre le milieu entre le résultat de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités, et où l'on résoud différents problèmes relatifs à cette matière. $\left(\text{de} \int_0^\infty x^{m-1}\,a^x\,dx\right)$.

17 L. Euler, N. Comm. Petr. T. 19. A. 1774. p. 3—29. = A. 7.

18 — — N. Comm. Petr. T. 19. A. 1774. p. 30—65. = A. 8.

19 — — N. Comm. Petr. T. 19. A. 1774. p. 66—102. = A. 9.

20 — — N. Comm. Petr. T. 20. A. 1775. p. 59—79. = A. 10.

21 — — Acta Petrop. A. 1777. P. 2. p. 3—28. = A. 11.

22 — — Acta Petrop. A. 1777. P. 2. p. 29—47. = A. 12.

23 de la Place, Mém. Paris. A. 1778. p. 227—332.
Mémoire sur les Probabilités.

24 L. Euler, Mém. Paris. A. 1778. p. 603—609.
Extraits de différentes lettres à M. le Marquis de Condorcet.
25 de Condorcet, Mém. Paris. A. 1778. p. 609—614.
Démonstration des théorèmes précédents de M. Euler.
26 Nic. Fuss, Act. Petrop. A. 1778. p. 111—134. = A 13.
27 —— Act. Petrop. A. 1780. P. 2. p. 49—69. = A 15.
28 L. Euler, Act. Petr. A. 1781. P. 1. p. 3—47. = A 16.
29 de la Place, Mém. Paris. A. 1782. p. 1—88. = A 17.
30 A. M. Lorgna, Mem. Soc. Ital. Veronae. V. 1. A. 1782. p 268—373.
Nuova Investigazione della somma generale delle serie.
31 Legendre, Mém Paris. A. 1784. p. 370—389.
Recherches sur la figure des Planètes.
32 G. F. Malfatti, Mem. Soc. Ital. Veronae. V. 2. A. 1784. p. 749—786.
Delle formole differenziali, la sui integrazione dipende della rettificazione della sezioni Coniche.
33 L. Euler, N. Act. Petrop T. 3. A. 1785. p. 3—24. = A 18.
34 ——— N. Act. Petrop. T. 3. A. 1785. p. 25—46. = A 19.
35 ——— N. Act. Petrop. T. 4. A. 1786. p. 3—16. = A 20.
36 ——— N. Act. Petrop. T. 4. A. 1786. p. 17—54. = A 21.
37 M. Young, Irish Trans. T. 1. A. 1787. p. 31—40.
A Synthetical Demonstration of the Rule for the Quadrature of simple Curves per aequationes terminorum numero infinitas.
38 Chev. de Lorgna, Mém. Turin. A. 1786, 1787. p. 215—249.
Méthode pour sommer les séries réciproques de sinus ou cosinus d'arcs en progression arithmétique.
39 L. Euler, N. Act. Petrop. T. 5. A. 1787. p. 3—26. = A 22.
40 ——— N. Act. Petrop. T. 5. A. 1787. p. 86—117. = A 23.
41 ——— N. Act. Petrop. T. 5. A. 1787. p. 118—129. = A 24.
42 J. Monteiro de Rocha, Mem. Acad. Lisboa. T. 1. A. 1787, 1788. p. 218—245.
Additamentos á Regra de M. Fontaine. Para resolver por approximaçaõ os Problemas que se reduzem ás Quadraturas.
43 M. J. Coelho da Maia, Mem Acad. Lisboa. T. 1. A. 1787, 1788. p. 503—525.
Soluçaõ de Problema proposto pela Academia sobra o Methodo de approximaçaõ de M. Fontaine.
44 Malfatti, Mém. Turin. A. 1788, 1789. Mém. prés. p. 53—112.
Essai analytique sur l'intégration de deux formules différentielles et sur la somme générale des séries harmoniques à termes rationels.
45 L. Euler, N. Act. Petrop. T. 7. A. 1789. p. 64—82. = A 25.
46 ——— N. Act. Petrop. T. 8. A. 1790. p. 15—31. = A 26.
47 J. Ivory, Edinb. Phil. Trans. V. 4. p. 177—190. A. 1798.

A New Series for the Rectification of the Ellipsis with Observations on the Evolution of a certain Algebraic Formula.

48 G. S. Klügel, Hindenburgs Arch. B. 2. H. 5. S. 60—67. A. 1798.
Verschiedene arithmetische Zusammensetzungen des Kreises aus denselben Elementen.

49 W. Wallace, Edinb. Phil. Trans. V. 5. p. 253—270. A. 1805.
A New Method of expressing the Coefficients of the Developement of the Algebraic Formula $(a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,Cos.\varphi)^n$ by Means of the Perimeters of two Ellipses, when n denotes the Half of any odd Number.

50 M. A. Parseval, Mém. Prés. à l'Inst. Paris. T. 1. p. 567—586. A. 1806. = A 27.

51 — — Mém. Prés. à l'Inst. Paris. T. 1. p. 638—658. A. 1806.
Mémoire sur les séries et sur l'intégration complète d'une équation aux différences partielles linéaires du second ordre à coefficiens constants.

52 Laplace, Mém. Inst. Paris. T. 10. p. 353—415. A. 1809.
Mémoire sur les approximations des formules, qui sont fonctions de très-grands nombres et sur leur application aux probabilités.

53 Legendre, Mém. Inst. Paris. T. 10. p. 416—509. A. 1809. = A 28.

54 Laplace, J. Ec. Pol. T. 8. Cah. 15. A. 1809. p. 229—265.
Mémoire sur divers points d'analyse. — Sur les intégrales définies des équations à différences partielles.

55 C. F. Kausler, Mém. Pét. T. 3. A. 1809, 1810. p. 114—136.
De mutua integralium quorundam inter se relatione.

56 ——— Mém. Pét. T. 3. A. 1809, 1810, p. 137—151.
Summatio innumerabilium serierum ex principiis calculi integralis petita.

57 Poisson, Mém. Inst. Paris. T. 12. p. 1—92, 183—274. A. 1811.
Premier et second Mémoire sur la Distribution de l'Électricité à la surface des corps conducteurs.

58 Bidone, Mem. Torino. T. 20. A. 1811—13. p. 231—345. = A 30.

59 Fr. Carlini, Mém. Imp. Instit. Lombardo-Veneto. T. 1. A. 1812, 13. p. 167—178.
Sopra alcune funzioni exponenziali comprese nella formola x^{c^n}.

60 C. F. Gauss, Comm. Rec. Gott. T. 2. p. 1—46. A. 1811—1813.
Disquitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \frac{\alpha.\alpha+1}{1.2}.\frac{\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1}xx + \text{etc}$

61 Poisson, J. Ec. Pol. T. 9. Cah. 16. A. 1813. p. 215—246. = A 32.

62 L. Euler, Mém. Pet. T. 6. A. 1813, 14. p. 30—53.
De integralibus quibusdam inventu difficillimis $\int_0^1 \frac{dx\,lx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

63 Poisson, J. Ec. Pol. T. 10. Cah. 17. A. 1815. p. 612—631. = A 33.

64 Bessel, Abh. Berlin. 1816, 17. S. 49—56.
Analytische Auflösung der Kepler'schen Aufgabe.

65 Plana, Mem. de Torino. T. 23. p. 7—49. A. 1818. = **A** 34.
66 C. F. Gauss, Comm. Rec. Gott. T. 4. p. 21—48. A. 1816—1818.
Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si ejus massa per totam orbitam, ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispartita.
67 Poisson, J. Ec. Pol. T. 11. Cah. 18. A. 1820. p. 295—341. = **A** 36.
68 Cisa de Grésy, Mem. de Torino T. 26. p. 209—396. A. 1821. = **A** 37.
69 Sarrus, A. M. T. 12. A. 1822. p. 36—39.
Recherches sur les intégrales définies.
70 Poisson, Mém. Acad. Paris T. 6. p. 441—570. A. 1823.
Mémoire sur la théorie du magnétisme en mouvement.
71 Mém. Acad. Paris. T. 6 p. 571—602. A. 1823. = **A** 40.
72 A. Cauchy, Mém. Acad. Paris. T. 6. p. 603—612. A. 1823. = **A** 41.
73 N. H. Abel, Magazin Christiania. B. 2. A. 1823 p. 55—69, 205—216. = **A** 42.
74 Poisson, J. Ec. Pol. T. 12. Cah. 19. A. 1823. p. 404—509. = **A** 43.
75 Cauchy, J. Ec. Pol. T. 12. Cah. 19. A. 1823. p. 510—592. = **A** 44.
76 Bessel, Abh. Berlin. A. 1824. S. 1—52.
Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht.
77 N. H. Abel, Magazin Christiania. B. 6. A. 1825. S. 182—190.
Det endelige Integral $\Sigma^n \varphi(x)$, udtrykt ved et enkelt bestemt Integral.
78 H. Vernier, A. M. T. 15. A. 1825. p. 165—188. = **A** 46.
79 A. L. Cauchy, A. M. T. 16. A. 1826. p. 97—108. = **A** 48.
80 ——— Mém. Prés. Paris. T. 1. p. 1—312. A. 1827. = **A** 49.
81 Mém. Prés. Paris. T. 1. p. 599—799. A. 1827 = **A** 50.
82 N. H. Abel, Norske Vidensk Skrift Trondhjen. B. 2. P. 2. A. 1827. S. 177—208. = **A** 52.
83 J. v. Cr. B. 2. A. 1827. S. 22—30. = **A** 53.
84 Cauchy, A. M. T. 17. A. 1827. p. 84—127. = **A** 54.
85 Pagani, Nouv. Mém. Brux. Vol. 5. A. 1829. p. 1—55.
Mémoire sur le développement des fonctions arbitraires en séries dont les termes dérivent de la même fonction continue, en y faisant varier une constante ou paramètre.
86 A. L. Cauchy, Mém. Acad. Paris. T. 8. p. 97—129. A. 1829. = **A** 55.
87 Mém. Acad. Paris. T. 8. p. 130—138. A. 1829.
Mémoire sur le développement de $f(\zeta)$ suivant les puissances ascendantes de h, ζ étant une racine de l'équation $\zeta - x - h\pi(\zeta) = 0$.
88 J. D. Poisson, Mém. Acad. Paris. T. 8. p. 357—570. A. 1829.
Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques.
89 Lejeune-Dirichlet, J. v. Cr. B. 4. A. 1829. S. 94—98. = **A** 56.
90 N. Fuss, Mém. Pét. T. 11. Mém. posth. de L. Euler, F. T. Schubert et N. Fuss. A. 1830. p. 238—245.

De valore formularum $\int x^n dx\, e^{-\alpha x}\, Sin.\, \beta x$ et $\int x^n dx\, e^{-\alpha x}\, Cos.\, \beta x$ si integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$ usque extendantur.

91 C. J. D. Hill, J. v. Cr. Bd. 7. A. 1831. S. 102—104.
Theoremata et Problemata.

92 Th. Clausen, J. v. Cr. Bd. 7. A. 1831. S. 309—313.
Demonstrationes theorematum et solutiones problematum quorundam a ccl. Hill Vol. 7. p. 102 hujus operi propositorum.

93 Poisson, J. Ec. Pol. T. 13. Cah. 20. A. 1831. p. 222—248. = A 63.

94 Bessel, Astr. Nachr. B. 9. A. 1831. N. 204. S. 221—236.
Ueber den Einfluss eines widerstehenden Mittels auf die Bewegung eines Pendels.

95 A. F. Svanberg, N. Act. Upsal. T. 10. A. 1832. S. 231—288. = A 65.

96 J. A. Grunert, J. v. Cr. Bd. 8. A. 1832. S. 146—152.
Ueber die höheren Differentiale der Function $z = \frac{x}{x^2 + y^2}$, und über die Entwickelung einiger bestimmter Integrale.

97 Liouville, J. Ec. Pol. T. 13. Cah. 21. A. 1832. p. 71—162.
Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques.

98 A. Stern, J. v. Cr. Bd. 10. A. 1833 S. 209—216.
Ueber Summirung gewisser Reihen.

99 R. Lobatto, J. v. Cr. Bd. 11. A. 1834. S. 169—172.
Note sur les différentielles partielles de la fonction $\frac{x}{x^2 + y^2}$.

100 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. Bd. 12. A. 1834. S. 1—69.
De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant: una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicium.

101 ——— J. v. Cr. Bd. 12. A. 1834. S. 346, 347.
De fractione continua, in quam integrale $\int_0^\infty e^{-xx} dx$ evolvere licet.

102 J. Liouville, J. v. Cr. Bd. 13. A. 1835. S. 93—118.
Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes.

103 ——— J. v. Cr. Bd. 13. A. 1835. S. 219—232.
Mémoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de Fourier, dans le calcul des différentielles à indices quelconques.

104 N. Lobatschewsky, Mém. Kasan. 1836. 1. p. 3—166.
Application de la géométrie supposée sur quelques intégrales.

105 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. B. 15. A. 1836. S. 1—26. = A 73.

106 Poisson, Conn. des Temps. A. 1836. p. 3—31.

Sur le développement des coordonnées d'une planète dans son mouvement elliptique et de la fonction perturbatrice de ce mouvement.

107 Plana, Nouv. Mém. Brux. Vol. 10. A. 1837. Mém. Corr. p. 1—23.
Mémoire sur trois intégrales définies.

108 C. Ramus, Danske Afhandl. (4e Raekke). B. 6. A. 1837. S. 265—307. = A 76.

109 Lejeune-Dirichlet, J. v. Cr. Bd. 17. A. 1837. S. 57—67.
Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies.

110 E. E. Kummer, J. v. Cr. Bd. 17. A. 1837. S. 210—227, 228—242.
De integralibus definitis et seriebus infinitis.

111 Lobatschewsky, J. v. Cr. Bd. 17. A. 1837. S. 295—320.
Géométrie imaginaire.

112 Poisson, J. de L. T. 2. A. 1837. p. 184—188.
Note relative au Mémoire précédent de M. Lamé sur les surfaces isothermes.

113 — J. de L. T. 2. A. 1837. p. 224—228.
Remarques sur les intégrales des fractions rationelles.

114 G. Libri, Mém. Prés. à l'Acad. Paris. T. 5. p. 1—75. A. 1838.
Mémoire sur la théorie des nombres.

115 G. Lamé, Mém. Prés. à l'Acad. Paris. T. 5. p. 174—214. A. 1838.
Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température.

116 Poisson, Mém. Prés. à l'Acad. Paris. T. 5. p. 215—219. A. 1838.
Note relative au Mémoire précédent.

117 J. L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 18. A. 1838. S. 75—99.
Beiträge zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale nach der Methode der Quadraturen.

118 Ch. Delaunay, J. de L. T. 3. A. 1838. p. 355, 356.
Détermination de l'intégrale définie $\int_0^\pi log.(1-2a\,Cos.x+a^2)\,dx$.

119 Neumann, Astr. Nachr. B. 15. A. 1838. N. 355. S. 313—324.
Ueber eine neue Eigenschaft der Laplace'schen $Y^{(n)}$, und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phänomene, welche Funktionen der geographischen Länge und Breite sind.

120 Liouville, C. R. T. 8. A. 1839. p. 626.
Note sur quelques intégrales définies.

121 A. F. Svanberg, N. Act. Upsal. T. 11. A. 1839. p. 1—28. = A 81.

122 — N. Act. Upsal. T. 11. A. 1839. p. 29—202.
Disquisitionum in Theoriam Refractionum Astronomicarum Pars 2a.

123 A. L. Cauchy, Mém. Acad. Paris. T. 17. p. 249—768. A. 1840. = A 83.

124 Ostrogradsky, Bulletin Pétersb. T. 7. A. 1840. p. 362—364.
Sur une note relative aux intégrales définies déduites de la théorie des surfaces.

125 E. Catalan, J. de L. T. 5. A. 1840. p. 110—114.
Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{Cos.\,ax dx}{(1+x^2)^n}$.

126 R. Lobatto, J. de L. T. 5. A. 1840. p. 115—119.
Note sur l'évaluation de l'aire de l'ellipsoide à trois axes inégaux.

127 A. Cauchy, C. R. T. 12. A. 1841. p. 871—879.
Mémoire sur des formules générales qui se déduisent du calcul des résidus et qui paraissent devoir coucourir notablement aux progrès de l'analyse infinitésimale.

128 — — C. R. T. 12. A. 1841. p. 1145—1158. = A 90.

129 H. Moseley, Not. British Assoc. A. 1841. p. 35—39. = A 92.

130 C. J. Malmsten, Stockholm Handl. A. 1841. S. 65—74.
Om integralen $\int_0^\infty \frac{Cos.\,ax\,dx}{(1+x^2)^n}$.

131 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 1. A. 1841. S. 360—363.
Ueber Bernoullische Zahlen und die Secanten-Coefficienten.

132 J. Liouville, J. de L. T. 6. A. 1841. p. 36.
Sur l'intégrale $\int_0^\pi Cos.\,i\,(u - x\,Sin.\,u)\,dx$.

133 Ossian Bonnet, J. de L. T. 6. A. 1841. p. 238—240.
Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$.

134 E. Catalan, J. de L. T. 6. A. 1841. p. 419—440.
Problèmes de calcul intégral.

135 Cauchy, J. Ec. Pol. T. 17. Cah. 28. A. 1841. p. 147—248. = A 99.

136 R. L. E(llis), C. Math. Journ. V. 2. A. 1841. p. 282.
Note on the definite integral $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Log.\,Sin.\,\theta\,d\theta$.

137 A. Pioch, Mém. Cour. Brux. Vol. 15. P. 2. A. 1841, 1842. p. 1—74. = A 100.

138 A. Cauchy, C. R. T. 15. A. 1842. p. 554—556, 573—578.
Note sur la diffraction de la lumière.

139 Lobatschewsky, J. v. Cr. Bd. 24. A. 1842. S. 162—170.
Probabilité des résultats moyens d'observations repetées.

140 J. A. Serret, J. de L. T. 7. A. 1842. p. 114—119.
Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce.

141 W. R. Hamilton, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 20. A. 1842. p. 288—294. = A 106.

142 ——— Irish Trans. Vol. 19. A. 1843. p. 264—321. = A 110.

143 J. L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 25. A. 1843. S. 147—159.

Angenäherte Bestimmung der Factorenfolge $1.2.3\ldots n = \Gamma(1+n) = \int e^{-x}x^n\,dx$, wenn n eine sehr grosse Zahl ist.

144 Barn. Tortolini, J. v. Cr. Bd. 26. A. 1843. S. 277—287.
Sur les transformations et les valeurs de plusieurs intégrales définies, qui se rapportent aux surfaces et aux solidités des volumes.

145 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 3. A. 1843. S. 9—18.
Ueber die recurrirende Bestimmung der Bernoullischen Zahlen.

146 J. A. Serret, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 1—22.
Note sur quelques formules de calcul intégral.

147 J. Bertrand, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 110—112. = A 118.

148 Cellérier, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 255—262.
Note sur une classe particulière d'intégrales définies.

149 J. A. Serret, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 489—494.
Sur quelques formules relatives à la théorie des intégrales eulériennes.

150 W. R. Hamilton, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 23. A. 1843. p. 360—367.
On an Expression for the Numbers of Bernoully by means of a definite Integral: and on some connected Processes of Summation and Integration.

151 P. Q. R., C. Math. Journ. V. 3. A. 1843. p. 71—84.
On the uniform motion of heat in homogeneous solid bodies and its connexion with the mathematical theory of elasticity.

152 H. G., C. Math. Journ. V. 3. A. 1843. p. 168, 169.
On some definite integrals.

153 R. L. Ellis, C. Math. Journ. V. 3. A. 1843. p. 185—189.
Evaluation of certain definite integrals.

154 G. Boole, C. Math. Journ. V. 3. A. 1843. p. 216—224. = A 119.

155 G. Boole, Phil. Trans. 1844. P. 2. p. 225—282.
On a General Method in Analysis.

156 C. J. Malmsten, N. Acta Upsal. T. 12. A. 1844. p. 155—176. = A 123.

157 —— —— N. Acta Upsal. T. 12. A. 1844. p. 177—254. = A 124.

158 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 4. A. 1844. S. 23—38.
Ueber einige durch bestimmte Integrale summirbare Reihen.

159 —— —— Gr. Arch. B. 5. A. 1844. S. 90—101.
Analytische Aphorismen, N°. 5.

160 —— —— Gr. Arch. B. 5. A. 1844. S. 204—212.
Ueber einige merkwürdige bestimmte Integrale.

161 J. A. Serret, J. de L. T. 9. A. 1844. p. 436.
Note sur l'Intégrale $\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

162 B. Bronwin, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 24. A. 1844. p. 491—498.
On some Definite Integrals.

163 A. Cauchy, C. R. T. 20. A. 1845. p. 481, 482, 552—554, 691—726. = A 132.
164 C. R. T. 20. A. 1845. p. 907—927.
Mémoire sur la détermination approximative des fonctions représentées par des intégrales.
165 Liouville, C. R. T. 20. A. 1845. p. 927.
Remarques.
166 A. Cauchy, C. R. T. 20. A 1845. p. 970—999.
Note sur l'application des nouvelles formules à l'astronomie
167 — — C. R. T. 20. A. 1845. p. 1166—1180.
Mémoire sur les séries nouvelles, que l'on obtient quand on applique les méthodes exposées dans les précédentes séances au développement de la fonction perturbatrice et à la détermination des inégalités périodiques des mouvements planétaires.
168 G. Lamé, C. R. T. 21. A. 1845. p. 112—117.
Mémoire sur plusieurs théorèmes d'Analyse, démontrés par la théorie des surfaces orthogonales.
169 F. Arndt, Gr. Arch. B. 6. A. 1845. S. 187—194.
Ueber bestimmte Integrale und Summirung einiger Reihen.
170 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 6. A. 1845. S. 200—205.
Ueber einige Integrale, welche goniometrische Functionen involviren.
171 Gr. Arch. B. 6. A. 1845. S. 213—222.
Ein Paar allgemeine Eigenschaften der Euler'schen Integrale zweiter Art.
172 F. Arndt, Gr. Arch. B. 6. A. 1845. S. 431—439.
Ueber bestimmte Integrale.
173 J. A. Grunert, Gr. Arch. B. 6. A. 1845. S. 448.
Miscelle.
174 W. Roberts, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 453—455.
Note sur une intégrale définie.
175 J. R. Young, L, E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 27. A. 1845. p. 362—366, 439—451. = A 133.
176 A. Cayley, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 27. A. 1845. p. 424—427.
On the Transformation of Elliptic Functions.
177 ε, C. Math. Journ. V. 4. A. 1845. p. 143. 144.
Mathematical Note on $\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}dx$.
178 B. Bronwin, Mathem. V. 1. A. 1845. p. 197—203. = A 134.
179 Timmermans, Bull. Brux. T. 13. P. 1. A. 1846. p. 140—151. = A 137.
180 Schaar, Bull. Brux. T. 13. P. 1. A. 1846. p. 228—233.
Note sur les expressions des racines d'un nombre en produits infinis.
181 — — Bull. Brux. T. 13. P. 2. A. 1846. p. 30—42. = A 138.
182 A. Cauchy, C. R. T. 23. A. 1846. p. 271—275.
Mémoire sur les fonctions de variables imaginaires.

183 A. L. Cauchy, C. R. T. 23. A. 1846. p. 382—394. = A 140.
184 ———— C. R. T. 23. A. 1846. p. 537, 557—562. = A 142.
185 C. Ramus, Dauske Afh. (4e Raekke) B. 12. A. 1846. S. 111—184. = A 148.
186 Schaeffer, J. v. Cr. Bd. 30. A. 1846. S. 277—295.
De integrali $-\int_0^x \frac{log.(1-\alpha)}{\alpha} d\alpha$.
187 Barn. Tortolini, J. v. Cr. Bd. 31. A. 1846. S. 12—39.
Nuove applicazioni del Calcolo Integrale relative alla quadratura delle superficie curve e cubatura de solidi.
188 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. Bd. 32. A. 1846. S. 8—13.
Ueber den Werth, welchen das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-A\, Cos.\varphi - B\, Sin.\varphi}$ für beliebige imaginäre Werthe von A und B annimmt.
189 O. Schlömilch, J. v. Cr. Bd. 33. A. 1846. S. 316—324.
Note sur quelques intégrales définies.
190 ———— J. v. Cr. Bd. 33. A. 1846. S. 325—328.
Sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{d\varrho}{\varrho^2+a^2} e^{-x\varrho}$.
191 ———— J. v. Cr. Bd. 33. A. 1846. S. 353—361.
Développement de quelques intégrales définies renfermant des fonctions trigonométriques.
192 ———— Gr. Arch. B. 7. A. 1846. S. 38—45.
Ueber das Integral $\int_0^\infty e^{-ax} Sin.^m x\, dx$.
193 ———— Gr. Arch. B. 7. A. 1846. S. 100, 101.
Aufgaben N°. 2, 3.
194 Stegmann, Gr. Arch. B. 7. A. 1846. S. 107, 108.
Einige Bemerkungen über die Abhandlung Th. 6. S. 187.
195 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 7. A. 1846. S. 270—273.
Ueber die Integrale $\int_0^\infty \frac{Cos.bx}{x^2-a^2} dx$ und $\int_0^\infty \frac{x\, Sin.bx}{x^2-a^2} dx$.
196 F. Lefort, J. de L. T. 11. A. 1846. p. 142—152.
Expression numérique des intégrales définies qui se présentent, quand on cherche les termes généraux du développement des coordonnées d'une planète dans son mouvement elliptique.
197 W. Roberts, J. de L. T. 11. A. 1846. p. 157—173.
Sur l'évaluation de quelques intégrales définies par des fonctions elliptiques.

198 A. F. SVANBERG, J. de L. T. 11. A. 1846. p. 197—200.

Sur les intégrales définies $\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} x^{m-1} dx}{1+x^2}$, $\int_0^\infty \frac{Cos.\beta x. x^{m-1} dx}{1+x^2}$, $\int_0^\infty \frac{Sin.\beta x. x^{m-1} dx}{1+x^2}$.

199 W. ROBERTS, J. de L. T. 11. A. 1846. p. 343, 344.

Extrait d'une lettre à M. LIOUVILLE.

200 J. LIOUVILLE, J. de L. T. 11. A. 1846. p. 464, 465.

Sur l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx$.

201 W. ROBERTS, J. de L. T. 11. A. 1846. p. 471—476.

Sur l'intégrale définie $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Log.(1+n\,Sin.^2\varphi)}{\sqrt{(1-k^2\,Sin.^2\varphi)}} d\varphi$.

202 J. R. YOUNG, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 28. A. 1846. p. 213—215. = A 153.

203 SCHAAR, Mém. Cour. Brux. Vol. 22. A. 1846, 1847. p. 1—25. = A 154.

204 YOUNG, Proceed. Irish R. Soc V. 3. A. 1847. p. 27—49. = A 155.

205 G. BOOLE, Proceed. Irish R. Soc. V. 3. A. 1847. p. 182—184.

On Discontinuous Functions.

206 W. R. HAMILTON, Proceed. Irish R. Soc. V. 3. A. 1847. p. 305—308.

On a Definite Integral.

207 J. L. RAABE, Neue Denkschr. Zürich. B. 8. A. 1847. S. 1—19.

Ueber die Factorielle $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots\ldots k}$ mit der complexen Basis m.

208 DIENGER, J. v. Cr. Bd. 34. A. 1847. S. 75—100.

Die LAGRANGEsche Formel und die Reihensummirung durch dieselbe.

209 BARN. TORTOLINI, J. v. Cr. Bd. 34. A. 1847. S. 101—121.

Addizione alla Memoria intitolato: Nuove applicazioni del Calcolo Integrale relative alla quadratura delle superficie curve e cubatura de solidi, inscritta nel Tom. 31 di questo giornale pag. 12.

210 HEINE, J. v. Cr. Bd. 34. A. 1847. S. 285—328.

Untersuchungen über die Reihe

$$1+\frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)}x+\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})}{(1-q)(1-q^2)}\frac{(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}x^2+\ldots$$

211 L. OETTINGER, J. v. Cr. Bd. 35. A. 1847. S. 13—54.

Untersuchungen über die analytischen Facultäten.

212 C. J. MALMSTEN, J. v. Cr. Bd. 35. A. 1847. S. 55—82.

Sur la formule $hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}\Delta u^{\text{IV}}_x + \ldots$

213 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 9. A. 1847. S. 215—219.
Ueber die näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrales.

214 ——— Gr. Arch. B. 9. A. 1847. S. 307—313.
Zur Theorie des Integrallogarithmus.

215 J. Dienger, Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 109. = A 159.

216 F. Arndt, Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 225—232.
Ueber einige bestimmte Integrale.

217 ——— Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 233—240.
Ueber einige bestimmte Integrale, welche sich auf die beiden Integrale

$\int_\infty^p \frac{e^{-x}\,dx}{x}$, $\int_\infty^p \frac{Cos.\,x}{x}\,dx$ zurückführen lassen.

218 ——— Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 240—246.
Ueber eine gewisse Klasse bestimmter Integrale, bei welchen die Function unter dem Integralzeichen für einen Werth der Veränderlichen zwischen den Integrationsgrenzen unendlich wird.

219 ——— Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 247—250.
Ueber die Integrale $\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\,dx}{x^2-a^2}$ und $\int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\,dx}{x^2-a^2}$.

220 ——— Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 253—259.
Zwei Entwickelungen des bestimmten Integrales $\int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right) dx$.

221 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 340.
Aufgaben.

222 J. Dienger, Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 341, 342.
Aufgaben.

223 W. Mösta, Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 449—454.
Bemerkungen über einige bestimmte Integrale.

224 ——— Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 455.
Aufgaben.

225 F. Arndt, Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 455, 456.
Aufgaben N. 1—5.

226 A. Cayley, J. de L. T. 12. A. 1847. p. 231—240.
Sur quelques formules du calcul intégral.

227 W. Roberts, J. de L. T. 12. A. 1847. p. 449—456.
Note sur quelques intégrales transcendantes.

228 B. Bronwin, Mathem. V. 2. A. 1847. p. 75—79. = A 163.

229 F. W. Newman, Mathem. V. 2. A. 1847. p. 87—91.
On the general reduction of certain integrals.

230 B. Bronwin, Mathem. V. 2 A. 1847. p. 297—302.
On certain definite integrals expressible by means of elliptic functions.

231 F. W. Newman, C. et D. Math. Journ. V. 2. A. 1847. p. 75, 76.
Investigation of the value of $\int_0^\infty Sin.x \frac{dx}{x}$.

232 A. Cayley, C. et D. Math. Journ. V. 2. A. 1847. p. 122—128. = A 164.

233 Sarrus, Mém. Prés. à l'Acad. Paris. T. 10. p. 1—128. A. 1848.
Recherches sur le calcul des variations.

234 Ch. J. Hargreave, Phil. Trans. A. 1848. P. 1. p. 31—54.
On the Solution of Linear Differential Equations.

235 G. Boole, Irish Trans. Vol. 21. A. 1848. p. 124—139. = A 169.

236 E. H. Dirksen, Ber. Berlin A. 1848. S. 120—127.
Zur Transformation von $D_k^n = (1 - 2k\,Cos.\gamma + k^2)^{-\frac{1}{2}}$ in bestimmte Integrale.

237 O. Schlömilch, J. v. Cr. Bd. 36. A. 1848. S. 268—270.
Nouvelle démonstration des théorèmes de M. Fourier.

238 ——— J. v. Cr. Bd. 36. A. 1848. S. 271—276.
Transformation de quelques intégrales définies.

239 Schaefer, J. v. Cr. Bd. 37. A. 1848. S. 127—160.
Adnotationes ad seriem $1 + \frac{x}{y} v + \frac{x.x+1}{y.y+1} v^2 + \frac{x.x+1.x+2}{y.y+1.y+2} v^3 + \ldots$

240 J. L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 37. A. 1848. S. 345—355.
Die Doppelintegrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi\,(ax^m \pm by^n)\,x^{p-1}\,y^{q-1}\,dx\,dy\,,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,(ax^m \pm by^n)\,x^{p-1}\,y^{q-1}\,dx\,dy\,,$$

ihre gegenseitigen Beziehungen und die Reductionen derselben auf einfache bestimmte Integral-Ausdrücke.

241 F. Arndt, Gr. Arch. B. 11. A. 1848. S. 70—88.
Entwickelung bestimmter Integrale.

242 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 11. A. 1848. S. 174—180.
Ueber ein Paar Doppelintegrale.

243 J. R. Young, L. E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 32. A. 1848. p. 11—15.
On the Integral $\int \frac{dx}{x}$ and on some consequences that have been deduced from it.

244 Angelo, Astr. Nachr. B. 29. A. 1848. N. 639. S. 239, 240.
Schreiben.

245 H. Wilbraham, C. et D. Math. Journ. V. 3. A. 1848. p. 198—201.
On a certain periodic function.

246 W. Smaasen, Tijdschrift W. en N. Wetensch. Dl. 2. bl. 251—263. A. 1849.
Bepaling van de waarde der Integraal

$$\int_0^\infty \left\{\frac{a^n}{n!} - \frac{a^{n-1}}{n-1!}\frac{1}{q} + \frac{a^{n-2}}{n-2!}\frac{1}{q^2} - \ldots \pm \frac{1}{q^n} + \frac{1}{q^n}e^{-a\varphi}\right\}\frac{Sin.\,\varphi\,d\varphi}{\varphi}.$$

247 Meyer, Bull Brux. T. 16. P. 1. A. 1849. p 331—338.
Note sur quelques intégrales définies.

248 A. de Morgan, Cambr. Phil. Trans. Vol. 8. A. 1849. p. 182—203. = A 175.

249 S. Earnshaw, Cambr. Phil. Trans. Vol. 8. A. 1849. p. 255—268.
On the Values of the Sine and Cosine of an Infinite Angle.

250 J. R. Young, Cambr. Phil. Trans. Vol. 8. A. 1849. p. 429—440. = A 176.

251 G. G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. Vol. 8. A. 1849. p. 533—583. = A 177.

252 G. B. Airy, Cambr. Phil. Trans. Vol. 8. A. 1849. p. 595—599. = A 178.

253 G. G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. Vol. 8. A. 1849. p. 706—735.
Discussion of a Differential Equation relating to the breaking of Railway Bridges.

254 E. G. Björling, Overs. Stockholm Förhandl. A. 1849. S. 172—179. = A 179.

255 C. J. Malmsten, J. v. Cr. Bd. 38. A. 1849. S. 1—39.
De integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis.

256 L. Oettinger, J. v. Cr. Bd. 38. A. 1849. S. 162—184, 216—240.
Untersuchungen über die analytischen Facultäten.

257 J. Dienger, J. v. Cr. Bd. 38. A. 1849. S. 266—276, 331—352.
Anwendung der bestimmten Integrale zur Reihensummirung: nebst Bemerkungen über die unendlichen Reihen und die bestimmten Integrale überhaupt.

258 ——— Gr. Arch. B. 12. A. 1849. S. 97.
Theoreme über bestimmte Integrale, N. 1—4.

259 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 12. A. 1849. S. 198—203.
Ueber das Integral $\int_0^\infty \frac{x^\mu\,dx}{r^2 + 2r^2 x Cos.\,u + x^2}$.

260 ——— Gr. Arch. Bd. 12. A. 1849. S. 208, 209.
Aufgaben aus der Integralrechnung.

261 J. Dienger, Gr. Arch. B. 12. A. 1849. S. 210.
Aufgabe.

262 ——— Gr. Arch. B. 12. A. 1849. S. 409—414.
Ueber das Integral $\int \frac{dx}{a + b\,Cos.\,x + c\,Sin.\,x}$ und ähnliche Formeln.

263 ——— Gr. Arch. B. 12. A. 1849. S. 416, 417.
Aufgabe.

264 D. Bierens de Haan, Gr. Arch. B. 13. A. 1849. S. 193—221.
Note sur l'intégrale définie $\int_0^\pi l(1-2r\,Cos.\,x+r^2)\,Cos.\,nx\,dx$.

265 J. Dienger, Gr. Arch. B. 13. A. 1849. S. 424—433.
Ueber die Bewegung eines galvanischen Drahtes unter den Einfluss des Erdmagnetismus-Reduktion einiger Integrale auf elliptische Functionen.

266 Besge, J. de L. T. 14. A. 1849. p. 31—32.
Sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{Sin.\,ax}{x}\,dx$.

267 J. Liouville, J. de L. T. 14. A. 1849. p. 225—241.
Remarques sur une classe d'équations différentielles à l'occasion d'un Mémoire de M. Jacobi sur quelques séries elliptiques.

268 Ossian Bonnet, J. de L. T. 14. A. 1849. p. 249—256. = A 181.

269 Schaar, Nouv. Mém. Brux. Vol. 25. A. 1850. p. 1—20.
Recherches sur la théorie des résidus quadratiques.

270 O. Bonnet, Mém. Cour. Brux. T. 23. A. 1848—1850. p. 1—116. = A 183.

271 Schaar, Mém. Cour. Brux. T. 23. A. 1848—1850. p. 1—17. = A 184.

272 C. F. Lindmann, Stockholm Handl. A. 1850. S. 343—364. = A 187.

273 Dienger, J. v. Cr. Bd. 39. A. 1850. S. 62—66.
Ableitung eines bestimmten Integrales aus den Formeln der Abhandlung N. 18 im 37ten Bande dieses Journals.

274 R. Hoppe, J. v. Cr. Bd. 40. A. 1850. S. 139—141.
Transformation d'une intégrale définie.

275 J. Dienger, Gr. Arch. B. 14. A. 1850. S. 223.
Aufgaben N. 1.

276 A. Meyer, Mém. Liège. Vol. 7. A. 1851. p. 1—510. = A 190.

277 Cauchy, C. R. T. 32. A. 1851. p. 389—397. = A 195.

278 J. Dienger, J. v. Cr. Bd. 41. A. 1851. S. 137—140.
Einige Reihensummirungen, vermittelt durch die bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,Cos.\,bx\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-ax}\,Sin.\,bx\,dx.$$

279 O. Schlömilch, J. v. Cr. Bd. 42. A. 1851. S. 125—130.
Développement de deux formules sommatoires.

280 J. Dienger, J. v. Cr. Bd. 42. A. 1851. S. 283—286.
Ueber das Integral $\int_0^1 \frac{1}{(a-nz)^{r+1}}\,\frac{dz}{(1-z)^{1-n}z^n}$.

281 L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 42. A. 1851. S. 348—367.

Zurückführung einiger Summen und bestimmter Integrale auf die Bernoullische Functionen.

282 F. Lindmann, Gr. Arch. B. 16. A. 1851. S. 94—103.
De Integralibus quibusdam definitis.

283 ———— Gr. Arch. B. 17. A. 1851. S. 455—462.
De integrali definito $\int_0^\infty \frac{Sin.^n x}{x^m}\, dx$.

284 A. Cayley, C. et D. Math. Journ. V. 6. A. 1851. p. 136—140. = A 201.

285 L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 43. A. 1852. S. 283—293.
Ueber die Factorielle $\left(\frac{m}{k}\right) = \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \ldots . m-k+1}{1. \quad 2. \quad 3. \ldots\ldots . k}$, in welcher die Basis m eine complexe Zahl von der Form $p+qi$ und i die imaginäre Einheit ist, p und q aber reelle Zahlen bezeichnen; desgleichen über einige bestimmte Integrale, die mit denselben im Zusammenhange stehen.

286 Th. Loschay, N. A. M. T. 11. A. 1852. p. 146—148.
Démonstration d'une formule (181).

287 A. Genocchi, Mém. Cour. Bruxelles. T. 25. A. 1851—53. p. 154.
Note sur la théorie des résidus quadratiques.

288 A. Cauchy, C. R. T. 36. A. 1853. p. 454—459.
Note sur les séries convergentes, dont les deux termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données.

289 ———— C. R. T. 37. A. 1853. p. 150—162.
Mémoire sur les coefficients limitateurs ou restricteurs.

290 Lindmann, Overs. Stockholm Förhandl. A. 1853. S. 1—5.
Om en definit integral.

291 ———— Overs. Stockholm Förhandl. A. 1853. S. 237—242.
Om ellipsen.

292 A. Winckler, J. v. Cr. Bd. 45. A. 1853. S. 102—167.
Ueber die Reduction doppelter Integrale auf Quadraturen.

293 Dedekind, J. v. Cr. Bd. 45. A 1853. S. 370—374.
Ueber ein Eulersches Integral.

294 J. Dienger, J. v. Cr. Bd. 46. A. 1853. S. 119—144.
Summen von Reihen, ausgedrückt durch bestimmte Integrale. Anwendungen dieser Sätze.

295 E. G. Björling, Gr. Arch. B. 21. A. 1853. S. 26—34.
Sur l'intégrale $\int \frac{dx}{a + b\, Cos.x + c\, Sin.x}$.

296 C. F. Lindmann, Gr. Arch. B. 21. A. 1853. S. 113—116.
De integrali quodam definito.

297 J. A. Grunert, Gr. Arch. Bd. 21. A. 1853. S. 359.
Miscelle.
298 W. H. L. Russell, C. et D. Math. Journ. V. 8. A. 1853. p. 157—159. = A 206.
299 Heine, Ber. Berlin. A. 1854. S. 564—572.
Bestimmung des Potentials eines Kreises.
300 A. Cauchy, C. R. T. 39. A. 1854. p. 129—135. = A 208.
301 ——— C. R. T. 39. A. 1854. p. 166—177.
Sur l'induction en analyse et sur l'emploi des formules symboliques.
302 Schläfli, J. v. Cr. Bd. 48. A. 1854. S. 292—300.
Ueber eine Function von drei Winkeln, deren erste Abgeleiteten ebenfalls als Winkel anzusehen und durch algebraische Relationen ihrer Cosinus zu denen der Unabhängigen bestimmt sind.
303 C. F. Lindmann, Gr. Arch. B. 23. A. 1854. S. 448—452.
De aliquot integralibus definitis.
304 ——— Gr. Arch. B. 23. A. 1854. S. 471, 472.
Aufgaben N. 2, 5.
305 ——— Gr. Arch. B. 23. A. 1854. S. 473—475.
Theoremata et Problemata N. 4.
306 W. H. L. Russell, C. et D. Math. Journ. V. 9. A. 1854. p. 104—112. = A 216.
307 D. Bierens de Haan, Verh. Akad. Amst. Dl. 2. A. 1855. blz. 1—54. = A 218.
308 Plarr, C. R. T. 24. A. 1855. p. 984—986.
Note sur une propriété commune aux séries dont le terme général dépend des fonctions X_n de Legendre ou des Cosinus et des Sinus des multiples de la variable.
309 W. H. L. Russell, Phil. Trans. A. 1855. P. 1. p. 157—178. = A 221.
310 C. Fr. Lindmann, N. Acta Upsal. Ser. 3a. T. 1. A. 1855. p. 137—146.
De functione quadam transcendente.
311 A. Winckler, J. v. Cr. Bd. 50. A. 1855. S. 1—31.
Ueber die Reduction dreifacher Integrale auf Quadraturen.
312 S. Spitzer, Gr. Arch. B. 25. A. 1855. S. 137—145.
Verschiedene mathematische Bemerkungen.
313 R. Carmichael, L, E. et D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 9. A. 1855. p. 209—214. = A 225.
314 D. Bierens de Haan, Versl. en Meded. Amst. D. 4. A. 1856. blz. 332—353. = A 226.
315 J. Liouville, C. R. T. 42. A. 1856. p. 500—508.
Détermination des valeurs d'une classe remarquable d'intégrales définies multiples, et démonstration nouvelle d'une célèbre formule de Gauss concernant les fonctions Gamma de M. Legendre.
316 E. Catalan, C. R. T. 43. A. 1856. p. 626—630.
Note sur quelques points de la théorie des séries.
317 G. G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. Vol. 9. A. 1856. p. 166—186. = A 229.

318 A. WINCKLER, Sitz. Ber. Wien. Bd. 21. A. 1856. S. 389—427. = A 220.

319 BJÖRLING, Overs. Stockh. Förhandl. A. 1856. S. 181, 182.

Bevis för formeln A: $\int_0^1 l\,\Gamma(x+p)\,dx = \frac{1}{2}\,l\,2\pi + plp - p$.

320 C. G. SUCKSDORFF, Acta Fenn. Helsingfors. T. 4. A. 1856. p. 121—127.

Note sur la quadrature de la surface courbe du cône.

321 ——————— Acta Fenn. Helsingfors. T. 4. A. 1856. p. 617—621.

Note sur les cônes quarrables.

322 B. WEILER, J. v. Cr. B. 51. A. 1856. S. 105—198.

Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei, drei, vier und mehr Veränderlichen (mit neuen Hülfmitteln bearbeitet).

323 ——————— J. v. Cr. B. 51. A. 1856. S. 198—208.

Anhang. Ueber eine besondere Classe linearer Differentialgleichungen von der n ten Ordnung.

324 E. HEINE, J. v. Cr. B. 51. A. 1856. S. 382—401. = A 232.

325 S. SPITZER, Gr. Arch. B. 26. A. 1856. S. 57—74.

Integration der Differentialgleichung $xy^{(n)} - y = 0$.

326 R. HOPPE, Gr. Arch. B. 27. A. 1856. S. 55—62.

Auflösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung durch bestimmte Integrale.

327 J. A. GRUNERT, Gr. Arch. B. 27. A. 1856. S. 99—112.

Ueber die Rectification der Ellipse.

328 C. F. LINDMANN, Gr. Arch. B. 27. A. 1856. S. 113.

Uebungsaufgaben.

329 V. A. LEBESGUE, J. de L. 2e Sér. T. 1. A. 1856. p. 377, 378.

Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-q^\alpha}{1-q}\,dq = \sum_1^\infty \left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right\}$ où $\alpha > 1$.

330 J. LIOUVILLE, J. de L. 2e Sér. T. 1. A. 1856. p. 421—424.

Sur l'intégrale $\int_0 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}\,dt$.

331 O. SCHLÖMILCH, Schlömilch's Zeitschr. B. 1. A. 1856. S. 21—28.

Ueber eine besondere Gattung von Reihen.

332 ——————— Schlömilch's Zeitschr. B. 1. A. 1856. S. 186—188.

Ueber das bestimmte Integral $\int_0^\infty \frac{Cos.\,2\beta x}{\alpha^2+x^2}\,e^{-\gamma^2x^2}\,dx$.

333 ——————— Schlömilch's Zeitschr. B. 1. A. 1856. S. 245—250.

Ueber die Functionen

$$\varphi(x) = -\int_0^x \frac{l(1-\zeta)}{\zeta}\,d\zeta \text{ und } \varphi(x) = \int_0^x \frac{l(1+\xi)}{\xi}\,d\xi = \varphi(-x).$$

334 D. Bierens de Haan, Verh. Akad. Amst. D. 5. A. 1857. blz. 1—116. = A 236.
335 G. Boole, Phil. Trans. A. 1857. P. 3. p. 745—804. = A 239.
336 R. del Grosso, Memor. R. Accad. Borbon. T. 2. A. 1856, 1857, p. 37—50.
Sulla funzioni generatrici di alcune rimarchevoli serie trascendenti.
337 Popov, Bulletin Pétersb. T. 15. A. 1857. p. 307—313. = A 240.
338 R. Lipschitz, J. v. Cr. B. 54. A. 1857. S. 313—328.
Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe.
339 O. Schlömilch, J. de L. 2e Sér. T. 2. A. 1857. p. 43—46.
Sur quelques intégrales Elliptiques.
340 ——————— J. de L. 2e Sér. T. 2. A. 1857. p. 47—55.
Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}$ — Extrait d'une lettre de O. Schlömilch —
Extrait d'une lettre de M. A. Cayley — Remarques de M. Liouville.
341 J. Liouville, J. de L. 2e Sér. T. 2. A. 1857. p. 279.
Sur l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}{\{1+\sqrt{[1+gx]}\}^{2p+2q}}$.
342 A. Cayley, L., E. et D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 13. A. 1857. p. 419—423.
On the Summation of a certain Factorial Expression.
343 W. R. Hamilton, L., E. et D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 14. A. 1857. p. 375—383. = A 242.
344 O. Schlömilch, Schlömilch's Zeitschr. B. 2. A. 1857. S. 49—56.
Ueber einige elliptische Integrale.
345 ——————— Schlömilch's Zeitschr. B. 2. A. 1857. S. 67, 68.
Notiz über die Entwickelung des Integrales $\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}}{(a+bt-ct^2)^{m+1}}\,dt.$
346 ——————— Schlömilch's Zeitschr. B. 2. A. 1857. S. 137—165.
Ueber die Bessel'sche Function.
347 A. Genocchi, Schlömilch's Zeitschr. B. 2. A. 1857. S. 414—420.
Ueber gewisse elliptische Integrale.
348 A. Enneper, Quart. Journ. V. 1. A. 1857. p. 276—279.
On the definite Integral $\int_0^\infty \frac{Sin.^q u}{u^m}\,du.$
349 D. Bierens de Haan, Verh. Akad. Amst. Dl. 4. A. 1858. blz. I—XXXII, 1—572. = A 244.
350 N. C. Schmit, Mém. Liège. T. 13. A. 1858. p. 289—327. = A 245.
351 J. Bertrand, C. R. T. 47. A. 1858. p. 434, 435.
Rapport sur: Bierens de Haan, Recueil d'intégrales définies.

352 LINDMANN, Overs. Stockh. Förhandl. A. 1858. S. 457—464.
Om definite integraler.

353 S. SPITZER, Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 81, 82.
Darstellung des unendlichen Kettenbruchs $\frac{1}{x+}\frac{1}{x+1+}\frac{1}{x+2+}\frac{1}{x+3+}\cdots$ in geschlossener Form nebst anderen Bemerkungen.

354 T. CLAUSEN, Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 166—170.
Beweis des von SCHLÖMILCH, Archiv Bd. 12. N. 35 aufgestellten Lehrsatzes, — über die Ableitung des Differentials von $Log.\ \Gamma\ x$; und über eine allgemeine Aufgabe über die Functionen von ABEL.

355 F. MINDING, Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 171—184.
Ueber den Werth des Integrals $\int_0^\infty \frac{Sin.x^m}{x^n}dx$, wenn m und n positive ganze Zahlen sind, und $m > n$ oder $m = n$ ist.

356 J. DIENGER, Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 250—260. = A 248.

357 S. SPITZER, Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 331—334.
Darstellung des unendlichen Kettenbruches $2a+1+\frac{1}{2a+3+}\frac{1}{2a+5+}\frac{1}{2a+7+}\cdots$ in geschlossener Form.

358 G. ZEHFUSS, Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 441.
Einfache Herleitung des GAUSS'schen Ausdrucks für $\Gamma(x)$.

359 ———— Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 465, 466.
Verschiedene Sätze und Resultate.

360 ———— Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 469.
Aufgabe.

361 ———— Gr. Arch. B. 31. A. 1858. S. 246—248. = A 249.

362 O. SCHLÖMILCH, Schlömilch's Zeitschr. B. 3. A. 1858. S. 180—187.
Ueber eine unendliche Reihe.

363 ———— Schlömilch's Zeitschr. B. 3. A. 1858. S. 115—119.
Transformation eines bestimmten Integrales.

364 R. HOPPE, Schlömilch's Zeitschr. B. 3. A. 1858. S. 173—175.
Auflösung der algebraischen Gleichungen in Form bestimmter Integrale.

365 S. SPITZER, Schlömilch's Zeitschr. B. 3. A. 1858. S. 178, 179.
Aufstellung derjenigen linearen Differentialgleichung, welcher genügt wird durch folgendes particulare Integrale

$$y = \int_\alpha^\beta e^{u(m+n)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,Log.[(m+n)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du.$$

366 D. BIERENS DE HAAN, Verh. Akad. Amst. D. 7. A. 1859. blz. 1—52. = A 250.

367 Schlömilch, Ber. Sächsen. B. 11. A. 1859. S. 109—138.
Ueber Facultäten-Reihen.

368 G. Bellavitis, Atti Adun. Ist. Veneto. Ser. 3a. T. 4. A. 1858, 1859, p. 413—420.
Sulle Tavole d' Integrali definiti compilati da D. Bierens de Haan.

369 R. Lipschitz, J. v. Cr. B. 56. A. 1859. S. 11—26.
Ueber die Darstellung gewisser Functionen durch die Euler'sche Summenformel.

370 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. B. 56. A. 1859. S. 149—165.
(Aus den hinterlassenen Papieren von) mitgetheilt durch E. Heine.
Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe.

371 R. Lipschitz, J. v. Cr B. 56. A. 1859. S. 189—196.
Ueber ein Integral der Differentialgleichung $\frac{d^2 I}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dI}{dx} + I = 0$.

372 C. F. Lindmann, Gr. Arch. B. 33. A. 1859. S. 486, 487.
Problemata.

373 Besge, J. de L. 2e Série. T. 4. A. 1859. p. 194.
Sur les intégrales trinômes.

374 S. Spitzer, Schlömilch's Zeitschr. B. 4. A. 1859. S. 37—49.
Studien über Integralgleichungen.

375 Schlömilch, Schlömilch's Zeitschr. B. 4. A. 1859. S. 390—415.
Ueber Facultätenreihen.

376 Th. Clausen, Bull. St. Pétersb. V. 1. A. 1859. p. 145—147. = A 252.

377 Tchebycheff, Bull. St. Pétersb. V. 1. A. 1859. p. 193—200. = A 253.

C. INTÉGRALES DÉFINIES MULTIPLES.

1 L. Euler, N. Comm. Petr. T. 16. A. 1771. p. 91—139. = A 5.

2 ——— N. Act. Petr. T. 7. A. 1789. p. 64—82. = A 25.

3 Poisson, J. Ec. Pol. T. 12. Cah. 19. A. 1823. p. 404—509. = A 43.

4 A. L. Cauchy, J. Ec. Pol. T. 12. Cah. 19. A. 1823. p. 510—592. = A 44.

5 ——— Mém. Prés. à l'Acad. Paris. T. 1. p. 1—312. A. 1827. = A 49.

6 ——— Mém. Prés. à l'Acad. Paris. T. 1. p. 599—799. A. 1827. = A 50.

7 N. Fuss, Mém. Pét. T. 11. Mém. posth. de L. Euler, F. T. Schubert et N. Fuss. A. 1830. p. 294—304.
Formularum quarundam integralium duplicatarum integratio.

8 Poisson, Mém. Acad. Paris. T. 12. p. 223—332. A. 1833.
Mémoire sur le calcul des variations.

9 J. Liouville, J. v. Cr. Bd. 13. A. 1835. S. 219—232. = B 103.

10 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. Bd. 15. A. 1836. S. 1—26. = A 73.

11 J. Liouville, J. de L. T. 1. A. 1836. p. 102—105.
Note sur une manière de généraliser la formule de M. Fourier.

12 ——— J. de L. T. 1. A. 1836. p. 197—210.
Note sur le calcul des inégalités périodiques du mouvement des planètes

13 Lamé, J. de L. T. 2. A. 1837. p 147—183.
Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température.

14 Poisson, J. de L. T. 2. A. 1837. p. 184—188. = **B** 112.

15 G. Lamé, Mém. Prés. à l'Acad. Paris. T. 5. p. 174—214. A. 1838. = **B** 115.

16 Poisson, Mém. Prés. à l'Acad. Paris. T. 5. p. 215—219. A. 1838. = **B** 116.

17 Chasles, J. de L. T. 3. A. 1838. p. 10—16.
Démonstration géométrique de la formule intégrale

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(\nu^2-\varrho^2)\,d\nu\,.\,\partial\varrho}{\sqrt{(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\varrho^2)(c^2-\varrho^2)}}=\tfrac{1}{2}\pi.$$

18 G. Lamé, J. de L. T. 3. A. 1838. p. 552—555.
Note sur les intégrales définies, déduites de la théorie des surfaces orthogonales.

19 Brassine, Mém. Toulouse. 2e Série. T. 5. P. 1. A. 1837—1839. p. 139—142.
Fragments d'un Mémoire sur l'intégration des équations différentielles.

20 J. G. Sylvester, L. et E. Phil. Mag. 3th Ser. V. 14. A. 1839. p. 298—300.
Notes on Definite Double Integration, supplementary to a former Paper on the motion and rest of Fluids.

21 Ostrogradsky, Bullet. St. Pétersbourg. T. 7. A. 1840. p. 362—364. = **B** 121.

22 Plana, Bull. Bruxelles. T. 8. P. 2. A. 1841. p. 68—71.
Note.

23 A. Cauchy, C. R. T. 13. A. 1841. p. 33—40.
Mémoire sur l'emploi de la transformation des coordonnées pour la détermination et la réduction des intégrales définies multiples.

24 E. Catalan, J. de L. T. 6. A. 1841. p. 81—84.
Théorème sur la réduction d'une intégrale multiple.

25 ——— J. de L. T. 6. A. 1841. p. 340—344.
Problème de calcul intégral.

26 Cauchy, J. Ec. Pol. T. 17. Cah. 28. A. 1841. p. 147—218 = **A** 99.

27 D. F. Gregory, C. Math. Journ. V. 2. A. 1841. p. 215—223.
On the Evaluation of a definite multiple Integral.

28 Pioch, Bull. Bruxelles. T. 9. P. 1. A. 1842. p. 296, 297.
Note Mathématique (Rapport sur).

29 ——— Bull. Bruxelles. T. 10. P. 2. A. 1843. p. 94—96.
Sur les fonctions arbitraires exprimées par des intégrales doubles.

30 Plana, Bull. Bruxelles. T. 10. P. 2. A. 1843. p. 303—309.
Note sur la formule d'Euler relative à la transformation des intégrales doubles.

31 W. R. Hamilton, Irish Trans. V. 19. A. 1843. p. 264—321. = **A** 110.

32 R. Abbott, Proceed. Phil. Trans. V. 4. A. 1837—43. p. 42.
On the Variation of a Triple Integral.

33 Barn. Tortolini, J. v. Cr. Bd. 26. A 1843. S. 277—287. = **B** 144.

34 Tchebichef, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 235—238.
Note sur une classe d'intégrales définies multiples.

35 E. Catalan, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 239, 240.
Note sur une formule relative aux intégrales multiples.

36 Cellérier, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 245—254.
Note sur la détermination d'une fonction arbitraire.

37 A. Cayley, C. Math. Journ. V. 3. A. 1843. p. 138—144.
On certain definite integrals.

38 G. Boole, C. Math. Journ. V. 3. A. 1843. p. 216—224. = **A** 119.

39 ——— C. Math. Journ. V. 3. A. 1843. p. 277—283.
Remarks on a theorem of Mr. Catalan.

40 A. Cauchy, C. R. T. 19. A. 1844. p. 1337—1344. = **A** 122.

41 G. Boole, Phil. Trans. A. 1844. P. 2. p. 225—282. = **B** 155.

42 J. L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 28. A. 1844. S. 19—27.
Reductionen des p-fachen Integral-Ausdrucks

$$\ldots\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(a_1 x_1^{n_1} + a_2 x_2^{n_2} + \ldots a_p x_p^{n_p})\, x_1^{r_1-1} x_2^{r_2-1} \ldots x_p^{r_p-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p$$

in welchem $a_1, a_2, \ldots a_p$, $n_1, n_2, \ldots n_p$, $r_1, r_2, \ldots r_p$, constante Grössen, $x_1, x_2, \ldots x_p$ die Integrations-Variabeln sind und φ eine beliebige Function ist, auf ein einfaches, dieselbe Function φ enthaltendes Integral.

43 A. F. Svanberg, Overs. Stockh. Förhandl. A. 1845. S. 228—231.
Om multiple integralers transformation.

44 W. Thomson, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 137—147.
Démonstration d'un théorème d'analyse.

45 R. L. Ellis, C. Math. Journ. V. 4. A. 1845. p. 1—7.
On the evaluation of definite multiple integrals.

46 G. Boole, C. Math. Journ. V. 4. A. 1845. p. 20—28.
On the transformation of multiple integrals.

47 R. L. E(llis), C. Math. Journ. V. 4. A. 1845. p. 64—66.
Note on a definite multiple integral.

48 ——— C. Math. Journ. V. 4. A. 1845. p. 116—119.
On a multiple definite integral.

49 Catalan, Bull. Bruxelles. T. 13. P. 1. A. 1846. p. 534—555.
Recherches sur les déterminants.

50 C. Ramus, Danske Afhandl. (4e Raekke). B. 12. A. 1846. S. 111—184. = **A** 148.

51 U. H. Meyer, Gr. Arch. B. 7. A. 1846. S. 386—401.
Applications des théorèmes relatifs à la théorie des fractions partielles.

52 W. Roberts, J. de L. T. 11. A. 1846. p. 201—209.
Note sur quelques intégrales multiples.
53 B. Bronwin, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 28. A. 1846. p. 373—379.
On certain definite multiple integrals.
54 G. Boole, Proceed. Irish R. S. V. 3. A. 1847. p. 182—184. = B 205.
55 ——— Proceed. Irish R. S. V. 3. A. 1847. p. 217, 218.
On a certain Definite Multiple Integral.
56 A. F. Svanberg, N. Acta Upsal. T. 13. A. 1847. p. 1—13. = A 156.
57 L. Oettinger, J. v. Cr. Bd. 35. A. 1847. S. 13—54. = B 211.
58 A. Cayley, J. de L. T. 12. A. 1847. p. 231—240. = B 226.
59 W. Thomson, J. de L. T. 12. A. 1847. p. 256—264.
Extraits de deux lettres à M. Liouville.
60 ——— C. et D. Math. Journ. V. 2. A. 1847. p. 109—122.
On certain definite integrals suggested by problems in the theory of electricity.
61 A. Cayley, C. et D. Math. Journ. V. 2. A. 1847. p. 219—223.
On a multiple integral connected with the theory of attraction.
62 Schaar, Bull. Brux. T. 5. P. 2. A. 1848. p. 501—506.
Sur la réduction d'un intégrale multiple.
63 Sarrus, Mém. Prés. à l'Acad. Paris. T. 10. p. 1—128. A. 1848. = B 233.
64 A. Cauchy, C. R. T. 26. A. 1848. p. 624—627, 666—673. = A 167.
65 ——— C. R. T. 27. A. 1848. p. 6—12. = A 168.
66 G. Boole, Irish Trans. V. 21. A. 1848. p. 140—150.
On a certain Multiple Definite Iutegral.
67 O. Schlömilch, J. v. Cr. Bd. 36. A. 1848. S. 268—270. = B 237.
68 J. L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 37. A. 1848. S. 345—355. = B 240.
69 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 11. A. 1848. S. 174—180. = B 242.
70 A. Cayley, J. de L. T. 13. A. 1848. p. 245—248.
Démonstration d'un théorème de M. Boole, concernant des intégrales multiples.
71 G. G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. Vol. 8. A. 1849. p. 533—583. = A 177.
72 A. Steen, Danske Afhandl. (5e Raekke). B. 1. A. 1849. S. 333—353. = A 180.
73 L. Oettinger, J. v. Cr. Bd. 38. A. 1849. S. 162—184. = B 256.
74 J. Dienger, Gr. Arch. B. 13. A. 1849. S. 286—296.
Ableitung einiger bestimmten Doppelintegrale.
75 Ossian Bonnet, J. de L. T. 14. A. 1849. p. 249—256. = A 181.
76 G. Boole, C. et D. Math. Journ. V. 4. A. 1849. p. 14—20. = A 182.
77 A. Cayley, C. et D. Math. Journ. V. 4. A. 1849. p. 51—65.
On the Attraction of an Ellipsoid.
78 J. Dienger, J. v. Cr. B. 39. A. 1850. S. 62—66. = B 273.
79 W. Roberts, J. de L. T. 15. A. 1850. p. 238—240.
Sur l'intégrale double $\int_b^c \int_0^b \frac{Log.(\mu^2-\nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}$.

80 A. MEYER, Mém. Liège. T. 7. A. 1851. p. 1—510. = **A** 190.

81 A. CAUCHY, C. R. T. 32. A. 1851. p. 207—215. = **A** 193.

82 A. CAYLEY, C. et D. Math. Journ. V. 6. A. 1851. p. 136—140. = **A** 201.

83 B. TORTOLINI, Atti Acad. Lincei Roma. T. 4. A. 1852. p. 53—71.
Sul valore della curvatura totale di una superficie, e sull' uso di questo valore nelle determinazione di alcuni integrali definiti duplicati.

84 A MEYER, J. v. Cr. Bd. 43 A 1852. S. 60—87.
Mémoire sur les fonctions arbitraires exprimées par des intégrales doubles et des séries de quantités périodiques.

85 L. OETTINGER, J. v. Cr. Bd. 44. A. 1852. S. 147—180.
Untersuchungen über die analytischen Facultäten.

86 R. CARMICHAEL, L., E. et D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 3. A. 1852. p. 129—141.
On Homogeneous Functions and their Index Symbol.

87 A. CAYLEY, C. et D. Math. Journ. V. 7. A. 1852. p. 174—178.
On certain multiple Integrals connected with the theory of Attractions.

88 A. CAUCHY, C. R. T. 37. A. 1853. p. 150—162. = **B** 289.

89 A. WINCKLER, J. v. Cr. Bd. 45. A. 1853. S. 102—167. = **B** 292.

90 ——— J. v. Cr. Bd. 45. A. 1853. S. 168—174.
Transformation dreifacher Integrale durch Aenderung der Integrationsfolge.

91 A. CAUCHY, C. R. T. 39. A. 1854. p. 166—177. = **B** 301.

92 L. RAABE, J v. Cr. B. 48. A. 1854. S. 137—142. = **A** 212.

93 ——— J. v. Cr. B. 48. A. 1854. S. 178—189. = A 214.

94 G. DECHER, Gr. Arch. B. 22. B. 1854. S. 413—435.
Ueber eine Klasse von Integralfunctionen zweier unabhängigen Veränderlichen, welche zwischen gewissen bestimmten Grenzen verschiedene Werthe geben, wenn die Ordnung in der Integration umgekehrt wird.

95 PEPIN, N. A. M. T. 13. A. 1854. p. 320—323.
Question 257.

96 W. H. L. RUSSELL, Phil. Trans. A. 1855. P. 1. p. 157—178. = **A** 221.

97 A. WINCKLER, J. v. Cr. Bd. 50. A. 1855. S. 1—31. = **A** 222.

98 S. SPITZER, Gr. Arch. B 25. A. 1855. S. 137—145. = **B** 312.

99 J. LIOUVILLE, C. R. T. 42. A. 1856. p. 500—508. = **B** 315.

100 ——— C. R. T. 42. A. 1856. p. 525—530.
Mémoire sur la réduction de classes très-étendues d'intégrales multiples.

101 J. A. GRUNERT, Gr. Arch. B. 27. A. 1856. S. 362—364. = **A** 233.

102 J. LIOUVILLE, J. de L. 2e Sér. T. 1. A. 1856. p. 82—88.
Détermination des valeurs d'une classe remarquable d'intégrales définies multiples, et démonstration nouvelle d'une célèbre formule de GAUSS, concernant la fonction Gamma de LEGENDRE.

103 ——— J. de L. 2e Sér. T. 1. A. 1856. p. 389—294.
Mémoire sur la réduction de classes très-étendues d'intégrales multiples.

104 J. Liouville, J. de L. 2e Sér. T. 1. A. 1856. p. 445—450. = **A** 234.
105 Schlömilch's Zeitschr. B. 1. A. 1856. S. 184—186.
Ueber ein bestimmtes vielfaches Integral.
106 Schlömilch's Zeitschr. B. 1. A. 1856. S. 256—263.
Ueber die Reduction gewisser vielfacher Integrale.
107 G. Boole, Phil. Trans. A. 1857. P. 3. p. 745—804. = **A** 239.
108 O. Schlömilch, Ber. Sachs. Gesellsch. B. 9. A. 1857. S. 67—73.
Reduction eines vielfachen Integrals.
109 W. Scheibner, J. v. Cr. Bd. 54. A. 1857. S. 77—81.
Ueber das Flächenpotential.
110 O. Schlömilch, J. de L. 2e Sér. T. 2. A 1857. p. 206—212.
Reduction d'une intégrale multiple.
111 W. R. Hamilton, L., E. et D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 14. A. 1857. p. 375—383. = **A** 242.
112 Schlömilch, Schlömilch's Zeitschr. B. 2. A. 1857. S. 49—56. = **B** 344.
113 A. Enneper, Quart. Journ. V. 1. A. 1857. p. 280—283.
A general theorem relating to multiple periodic series.
114 P. H. Blanchet, C. R. T. 46. A. 1858. p. 892, 893.
Mémoire sur les intégrales multiples.
115 Marie, C. R. T. 46. A. 1858. p. 738—742.
Note relative aux périodes d'une intégrale d'ordre quelconque.
116 E. Rouché, C. R. T. 47. A. 1858. p. 917—921.
Sur les fonctions X_n de Legendre.
117 Dahlander, Overs. Stockh. Förhandl. A. 1858. S. 207, 208.
Ellipsoidens conjugerade diametralplan.
118 Dahlander, Overs. Stockh. Förhandl. A. 1858. S. 49—54.
Telfördelning efter minsta quadratmetoden.
119 F. Minding, Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 171—184.
Ueber den Werth des Integrals $\int_0^\infty \frac{Sin.\, x^m}{x^n}dx$, wenn m und n positive ganze Zahlen sind, und $m > n$ oder $m = n$ ist.
120 J. Dienger, Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 250—260. = **A** 248.
121 G. Zehfuss, Gr. Arch Bd. 31. A. 1858. S. 246—248. = **A** 249.
122 Besge, J. de L. 2e Série. T. 3. A. 1858. p. 324.
Sur deux intégrales définies doubles.
123 —— J. de L. 2e Série. T. 3. A. 1858. p. 416.
Autre égalité d'intégrales doubles.
124 Schlaefli, Quart. Journ. V. 2. A. 1858. p. 269—301.
On the multiple integral $\int^n dx\, dy\, dz$, whose limits are $p_1 = a_1 x + b_1 y + \ldots + h_1 z > 0$, $p_2 > 0, \ldots p_n > 0$ and $x^2 + y^2 + \ldots + z^2 < 1$.

125 WINCKLER, Sitzungsber. Wien. B. 36. A. 1859. S. 454—469.
Auszug aus der Abhandlung: Allgemeine Transformation der bestimmten Doppelintegrale.
126 MAX. MARIE, J. de L. 2e Sér. T. 4. A. 1859 p. 121—152, 305—328, 369—388. = **A** 256.
127 J. LIOUVILLE, J. de L. 2e Sér. T. 4. A. 1859. p. 155—160.
Sur une intégrale définie multiple.
128 A. GENOCCHI, Schlömilch's Zeitschr. B. 4 A. 1859. S. 75, 76.
Bemerkung über ein vielfaches Integral.
129 O. SCHLÖMILCH, Schlömilch's Zeitschr. B. 4. A. 1859. S. 390—415. = **B** 375.

D. ÉVALUATION APPROXIMATIVE DES INTÉGRALES.

1 Acta Erud. A. 1707. p. 279—281.
M. CARRÉ, Methode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides etc. (Par. 1700. 4°. Plag 16).
2 LAGRANGE, N. Mém. Berlin. A. 1772. p. 185—221.
Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables.
3 J. MONTEIRO DE ROCHA, Mem. Lisboa T. 1. A. 1787, 1788 p. 218—245. = **B** 42.
4 M J. COELHO DA MAIA, Mem. Lisboa. T. 1. A. 1787, 1788. p. 503—525. = **B** 43.
5 C. F. GAUSS, Comment. Rec. Gott. T. 3. p. 39—76. A. 1814, 1815.
Methodus nova integralium valores par approximationem inveniendi.
6 KRAMP, A. M. T. 6. A. 1816. p. 281—302
Formules nouvelles pour l'intégration approchée de toute fonction différentielle d'une seule variable entre deux limites données quelconques.
7 GERGONNE, A. M. T. 6. A. 1816. p. 303—320.
Reflexions sur la méthode qui sert de base au précédent mémoire et applications diverses de cette méthode.
8 KRAMP, A. M. T. 6. A. 1816. p. 372—387.
Deuxième recueil de formules servant à intégrer toute différentielle quelconque proposée.
9 BÉRARD, A. M. T. 7. A. 1817. p. 101—116.
Méthode nouvelle pour quarrer les courbes et intégrer entre des limites données toute fonction différentielle d'une seule variable.
10 KRAMP, A. M. T. 7. A. 1817. p. 241—252.
Sur la manière d'intégrer par approximation, entre deux limites données, toute fonction différentielle d'une seule variable.
11 C. F. GAUSS, Comment. Rec. Gott. T. 4. p. 21—48. A. 1816—1818. = **B** 66.

12 Servois, A. M. T. S. A. 1818. p. 73—115.
Mémoire sur les quadratures et les séries.

13 Bérard, A. M. T. 8. A. 1818. p. 117—124.
Problème des quadratures. Rapport de M. Ampère.

14 Kramp, A. M. T. 9. A. 1819. p. 373—396.
Recherche des formules propres à intégrer par approximation, entre deux limites données quelconques, toute fonction différentielle d'une seule variable.

15 ——— A. M T. 10. A. 1820. p. 1—32.
Essai d'une méthode générale, servant à intégrer avec une approximation illimitée toute équation différentielle à deux variables

16 Poisson, Mém. Acad. Paris. T. 6. p 571—602. A 1823. = **A** 40.

17 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr Bd. 1. A. 1826 S. 301—308.
Ueber Gauss neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden.

18 F. Minding, J. v. Cr Bd. 6. A 1830. S. 91—95.
Ueber die Berechnung des Näherungswerthes doppelter Integrale

19 Th. Clausen, J. v. Cr. Bd. 6. A. 1830. S. 287—289.
Ueber mechanische Quadraturen.

20 A. von Ettingshausen, Baumgartner's Zeitschr. B. 7. A. 1830. S. 429—444.
Ueber Gauss's Methode zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale.

21 Dirksen, Abh. Berl. A. 1831. S. 117—159.
Ueber die Methoden, den Werth eines bestimmten Integrals näherungsweise zu bestimmen.

22 J. J. Löwenstern, Mém. Pét. Sav. Etr. T. 3. A. 1837. p. 279—290.
Anwendung der Gaussischen Integrations-Methode auf die vielfachen Integrale.

23 Schellbach, J. v. Cr. Bd. 16. A. 1837. S. 192—195.
Ueber die Gaussischen Formeln zur näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Integrals.

24 J. L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 18. A. 1838. S. 75—99. = **B** 117.

25 Ostrogradsky, Mém. Pét. Sér. 6. T. 4. P. 1. A. 1841. p. 309—336.
Mémoire sur les quadratures définies.

26 R., C. Math. Journ. V. 2. A. 1841. p. 81—84.
On Fresnel's method of finding by approximation the values of the definite Integrals $\int_a^b dx \left.\begin{matrix} Sin. \\ Cos. \end{matrix}\right\} \pi f(x)$, where $f\,(x)$ is any fonction of x expressible in a series of a finite number of terms.

27 H. T., C. Math. Journ. V. 2. A. 1841. p. 167—169.
Investigation of series for the approximate values of definite integrals.

28 de Saint-Venant, C. R. T. 17. A. 1843. p. 1108—1115
Mémoire sur une mode d'interpolation applicable à des questions relatives aux mouvements des eaux, et suppléant à l'intégration souvent impossible des équations aux dérivées partielles.

29 Ostrogradsky, Bull. St. Pétersb. V. 1. A. 1843. p. 113—118.
Sur les intégrales des fonctions algébriques.
30 A. Cauchy, C. R. T. 20. A. 1845. p. 907—927. = **B** 164.
31 Liouville, C. R. T. 20. A. 1845. p. 927. = **B** 165.
32 A. Cauchy, C. R. T. 20. A. 1845. p. 970—999. = **B** 166.
33 ——— C. R. T. 20. A. 1845. p. 1166—1180. = **B** 167.
34 Ostrogradsky, Bull. St. Pétersb. V. 4. A. 1845. p. 145—167, 286—306.
De l'intégration des fonctions rationnelles.
35 A. Cauchy, C. R. T. 23. A. 1846. p. 563—569. = **A** 143.
36 ——— C. R. T. 23. A. 1846. p. 617—619.
Note sur l'intégration d'un système d'équations différentielles et sur l'inversion de leurs intégrales.
37 R. Rawson, Mem. Manchester. 2d. Ser. V. 7. A. 1846. p. 464—501. = **A** 147.
38 L. F. Ménabréa, Mem. de Torino. Serie 2a. T. 8. p. 195—234. A. 1846.
Mémoire sur les quadratures.
39 Schaar, Mém. Cour. Brux. T. 22. A. 1846, 1847. p. 1—25.
Mémoire sur les intégrales eulériennes et sur la convergence d'une certaine classe de séries.
40 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 9. A. 1847. S. 215—219. = **B** 213.
41 Anger, Astr. Nachr. B. 29. A. 1848. N. 639. S. 239, 240. = **B** 244.
42 G. P. Bond, Mem. Am. Acad. Boston. New Ser. V. 4. A. 1849. p. 189—209.
On some Applications of the Method of Mechanical Quadratures.
43 S. Gherardi, Mem. Bonon. V. 2. A. 1850. p. 417—438.
Brevi considerazione sui vantaggi del metodo d'integrazione per serie infinite anche nei casi di nota integrazione finita e sopra qualche altro argomento.
44 G. Bellavitis, Atti Adun. Venet. Serie 2a. Vol. 1. A. 1850. p. 74—76.
Dimostrazione intorno all' equazione cui conduce un problema risolto del Prof. Turassa val calcolo numerico degli integrali.
45 J. A. Grunert, Gr. Arch. B. 14. A. 1850. S. 225—317.
Ueber die näherungsweise Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale.
46 Th. Hill, Proceed. Amer. Assoc. V. 5. A. 1851. p. 61, 62.
On a new Method of Geometrically constructing the Integration of Quadratures.
47 S. R. Minich, Atti Adun. Venet. Ser. 2a. V. 3. A. 1852. p. 7—11.
Sul calcolo degl'integrali definiti col methodo di Gauss, commentario, e sul metodo di Cotes perfecionato da Gauss, per calcolare per approssimazione il valore d'un integrale definito sunto del suddetto commentario.
48 P. A. Hansen, Astr. Nachr. B. 34. A. 1852. N. 799. S. 101—116, N. 800. S. 117—132, N. 801. S. 133—142.
Ueber die Berechnung der Störungen durch mechanische Quadraturen.
49 S. R. Minich, Atti Adun. Venet. Ser. 2a V. 4. A. 1853. p. 39—41.

Estenzione del metodo di GAUSS al calcolo degl'integrali definiti di un ordine comunque elevato.

50 C. J. D. HILL, Handl. Stockholm. A. 1854. S. 405—491. = A 210.

51 ZECH, Astr. Nachr. B. 37. A. 1854. Nr. 881. S. 295—300.
Ueber die Berechnung der Störungen durch mechanische Quadratur.

52 P. A. HANSEN, Astr. Nachr. B. 37. A. 1854. N. 882. S. 301—308.
Ueber die Berechnung der Störungen durch mechanische Quadraturen.

53 D. TURASSA, Mem. Instit. Venet. V. 5. A. 1855. p. 277—299.
Intorno all' uso dei compartimenti diseguali nelle ricerca del valore numerico di un dato integrale.

54 G. BELLAVITIS, Mem. Instit. Venet. V. 6. A. 1856. p. 91—111.
Sul calcolo approssimato degli integrali d'ordine superiori.

55 HILL, Overs. Forhandl. Stockholm. A. 1856. S. 15—37.
Om Quadratur.

56 TERQUEM, N. A. M. T. 15. A. 1856. p. 109—129.
Méthode de quadrature de CÔTES.

57 W. R. HAMILTON, L, E. et D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 14. A. 1857. p. 375—383. = A. 242.

58 E. B. CHRISTOFFEL, J. v. Cr. B. 55. A. 1858. S. 61—82.
Ueber die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben.

59 LIGOWSKY, Gr. Arch. B. 32. A. 1859. S. 241—249.
Ueber die Inhaltsberechnung der Körper.

60 STREHLKE, Gr. Arch. B. 32. A. 1859. S. 433—439.
Ueber eine Aufgabe vom Schwerpunkte, über die GAUSS'schen Auflösung des KEPLER'schen Problems und über dessen Methode der Quadraturen.

E. CALCUL DES RÉSIDUS.

1 Baumgartner's Zeitschr. B. 1. A. 1826. S. 342—359.
Ueber einen neuen der Infinitesimal-Rechnung analogen Calcul.

2 Baumgartner's Zeitschr. B. 2. A. 1826. S. 359—374.
Ueber die Anwendung des im vorhergehenden Aufsatzes vorgetragenen neuen Calculs auf die Summirung einiger Reihen.

3 A. CAUCHY, Mém. Acad. Paris. T. 7. p. 463—473. A. 1827.
Second Mémoire sur l'application du calcul des résidus aux questions de physique mathématique.

4 A. L. CAUCHY, Mém. Acad. Paris. T. 8. p. 130—133. A. 1829.
Mémoire sur le développement de $f(\zeta)$ suivant les puissances ascendantes de h, ζ étant une racine de l'équation $\zeta - x - h\pi(\zeta) = 0$.

5 COLLINS, Bulletin Pétersb. T. 1. A. 1836. p. 113—115.
Note sur la forme des résidus des polynômes entiers.

6 D. F. G., C. Math. Journ. V. 1. A. 1839. p. 145—155.
On the Residual Calculus.

7 A. CAUCHY, C. R. T. 12. A. 1841. p. 871—879.
Mémoire sur des formules générales qui se déduisent du calcul des résidus et qui paraissent devoir concourir notablement au progrès de l'analyse infinitésimale.

8 G. OLTRAMARE, C. R. T. 12. A. 1841. p. 953, 954.
Recherches sur le calcul des résidus.

9 ——— C. R. T. 13. A. 1841. p. 296—298.
(Rapport sur) Mémoire sur le calcul des résidus.

10 A. CAUCHY, C. R. T. 15. A. 1842. p. 255—269.
Théorie nouvelle des mouvements planétaires ou applications du calcul des résidus à l'astronomie.

11 ——— C. R. T. 15. A. 1842. p. 301—303.
Sur le nouveau développement de la fonction perturbatrice et sur diverses formules qui rendent plus facile l'application du calcul des résidus.

12 ——— C. R. T. 17. A. 1843. p. 372—381.
Mémoire sur l'application du calcul des résidus ou développement des produits composés d'un nombre infini de facteurs.

13 RADIKE, J. v. Cr. Bd. 25. A. 1843. S. 216—239.
Einige Bemerkungen über die Principien der CAUCHY'schen Residuenrechnung.

14 A. CAUCHY, C. R. T. 19. A. 1844. p. 1337—1344. = A 122.

15 ——— C. R. T. 23. A. 1846. p. 321—333.
Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la recherche des propriétés générales des intégrales dont les dérivées renferment des racines d'équations algébriques.

16 ——— C. R. T. 23. A. 1846. p. 382—394. = A 140.

17 ——— Mém. Acad. Paris. T. 22. p. 39—180. A. 1850. = A 185.

18 A. MEYER, Mém. Liège. T. 7. A. 1851. p. 1—510. = A 190.

19 A. CAUCHY, C. R. T. 32. A. 1851. p. 207—215. = A 193.

20 ——— C. R. T. 32. A. 1851. p. 267—276, 354—357.
Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la décomposition des fonctions transcendantes en facteurs simples.

21 ——— C. R. T. 32. A. 1851. p. 704, 705.
Sur les principales formules du calcul des résidus.

22 ——— C. R. T. 38. A. 1854. p. 945—952.
Formules générales sur la transformation des fonctions implicites en fonctions explicites.

23 A. Cauchy, C. R. T. 41. A. 1855. p. 41—43.
Considérations sur les résidus.
24 Allégret, C. R. T. 43. A. 1856. p. 860—863.
Théorèmes nouveaux relatifs à l'Algèbre et à la théorie des nombres.
25 Cauchy. C. R. T. 44. A. 1857. p. 406—416.
Théorie nouvelle des résidus.
26 G. Boole. Phil. Trans. 1857. P. 3. p. 785—804. = **A** 239.
27 J. Vieille. C. R. T. 49. A. 1859. p. 746—750.
Note sur la décomposition des fractions rationnelles.
28 E. Rouché, C. R. T. 49. A. 1859. p. 863—865.
Sur la décomposition des fractions rationnelles et la théorie des résidus.

F. FONCTIONS EULÉRIENNES.

1 L Euler, Comm. Petr. T. 11. A 1739 p. 3—21.
De productis ex infinitis factoribus ortis.
2 ——— N. Comm. Petr. T. 6. A. 1756, 1757, p. 115—154.
De expressione integralium per factores.
3 ——— Misc. Taur. T. 3. P. 2. p. 146—178. A. 1762—1765. = **B** 8.
4 ——— N. Comm. Petrop. T. 16. A. 1771. p. 91—139. = **A** 5.
5 Legendre, Mém. Inst. Paris. T. 10. p. 416—509. A. 1809. = **A** 28.
6 G. Bidone, Mem Torino. T. 20. A. 1811, 1812. p. 231—345. = **A** 30.
7 C. F. Gauss, Commentt. Rec. Gott. T. 2. p. 1—46. A. 1811—1813. = **B** 60.
8 Poisson, J. Ec. Pol. T. 11. Cah. 18. A. 1820. p. 417—489.
Sur la manière d'exprimer les fonctions par des séries de quantités périodiques et sur l'usage de cette transformation dans la résolution de différens problèmes.
9 Cisa de Grésy, Mem. de Torino. T 26. p. 209—396. A. 1821. = **A** 37.
10 Poisson, J. Ec. Pol. T. 12. Cah. 19. A. 1823. p. 404—509. = **A** 43.
11 Sturm, A. M. T. 14. A. 1824. p. 17—23
Deux théorèmes.
12 A. L Crelle, J. v. Cr. Bd. 7. A. 1831. S. 314—380.
Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques.
13 C. G J. Jacobi, J. v. Cr. Bd. 11. A. 1834. S. 307.
Demonstratio formulae

$$\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}\,dw = \frac{\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx \int_0^\infty e^{-x}x^{b-1}\,dx}{\int_0^\infty e^{-x}x^{a+b-1}\,dx} = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

14 G. Lejeune-Dirichlet, J. v. Cr. Bd. 15. A. 1836. S. 258—263.
Sur les intégrales Eulériennes.

15 J. Plana, J. v. Cr. Bd. 17. A. 1837. S. 1—34, 163—202.
Recherches analytiques sur les expressions du rapport de la circonférence au diamètre trouvées par M.M. Wallis et Brounker; et sur la théorie de l'intégrale Eulérienne

$$\int_0^1 x^{p-1}\,dx\,(1-x^n)^q.$$

16 Pagès, J. de L. T. 2. A. 1837. p. 437, 438.
Note sur une propriété des sections coniques.

17 E. Catalan, J. de L. T. 3. A. 1838. p. 508—516.
Note sur une équation aux différences finies.

18 Binet, C. R. T. 9. A. 1839. p. 39—45.
Mémoire sur les intégrales Eulériennes et sur leur application à la théorie des suites et à l'évaluation des fonctions de grands nombres.

19 Liouville, C. R. T. 9. A. 1839. p. 105—108.
Note sur l'évaluation approchée du produit $1.\,2\ldots n$.

20 Binet, C. R. T. 9. A. 1839. p. 156—159.
Note sur l'expression du logarithme de l'intégrale Eulérienne $\Gamma\,(p)$.

21 Brassine, Mém. Toulouse. 2e Série. T. 5. P. 1. A. 1837—1839. p. 139—142. = **C** 19.

22 J. Liouville, J. de L. T. 4. A. 1839. p. 317—322.
Note sur l'évaluation approchée du produit $1.\,2.\,3\ldots x$.

23 Binet, J. Ec. Pol. T. 16. Cah. 27. A. 1839. p. 123—343.
Mémoire sur les intégrales définies Eulériennes et sur leur application à la théorie des suites ainsi qu'à l'évaluation des fonctions de grands nombres.

24 S. S., C. Math Journ. V. 1. A. 1839. p. 11—21, 109—117.
On general differentiation.

25 C. Math. Journ. V. 1. A. 1839. p. 94—96.
Mathematical Notes. On differentiation.—Diagonal of a parallelopiped.— Ellipse.— Problem.—Theorem.

26 A. Stern, J. v. Cr. Bd. 21. A. 1840. S. 377—379.
Remarques sur les intégrales Eulériennes.

27 J. A. Grunert, Gr. Arch. B. 2. A. 1842. S. 266—323. = **A** 105.

28 J. A. Serret, J. de L. T. 7. A. 1842. p. 114—119. = **B** 140.

29 J. Binet, C. R. T. 16. A. 1843. p. 377—381.
Note sur la détermination de l'intégrale Eulérienne binôme $\int_0^1 x^{p-1}\,dx\,(1-x)^{q-1}$ dans le cas où l'un des arguments p et q est un nombre rationnel.

30 A. Cauchy, C. R. T. 16. A. 1843. p. 422—433. = **A** 107.

31 A. Cauchy, C. R. T. 17. A. 1843. p. 376, 377.
Recherches sur les intégrales eulériennes.

32 J. L. Raabe, J. v. Cr. Bd. 25. A. 1843. S. 147—159. = **B** 143.

33 J. A. Serret, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 1—22. = **B** 146.

34 ———— J. de L. T. 8. A. 1843. p. 489—494. = **B** 149.

35 A. Cauchy, C. R. T. 19. A. 1844. p. 67—73.
Note sur les intégrales eulériennes.

36 J. L. Raabe, J. v. Cr. B. 28. A. 1844. S. 10—18.
Angenäherte Bestimmung der Factorenfolge $1.2.3\ldots x = \Gamma(1+x) = \int x^n e^{-x} dx$ wenn x eine sehr grosse Zahl ist. (Fortsetzung).

37 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 4. A. 1844. S. 167—174.
Einiges über die Eulerische Integrale der zweiten Art.

38 G. Mainardi, Mem. Istit. Venet. T. 2. A. 1845. p. 401—424.
Sulla integrazione della formula $\frac{F}{E\sqrt{\psi}}$ essendo F, E, ψ funzioni intere di una medesima variabile.

39 C. Gudermann, J. v. Cr. Bd. 29. A. 1845. S. 209—212.
Additamentum ad functionis $\Gamma(a) = \int_0^x e^{-x} x^{a-1} dx$ theoriam.

40 Weddle, Mathem. V. 1. A. 1845. p. 143—146.
On the function $\Gamma(x+1)$.

41 O. Schlömilch, Gr. Arch. B. 6. A. 1845. S. 213—222. = **B** 171.

42 A. Cauchy, C. R. T. 23. A. 1846. p. 537, 557—562. = **A** 142.

43 O Schlömilch, J. v. Cr. Bd. 33. A. 1846. S. 268—280. = **A** 149.

44 Gr. Arch. B. 7. A. 1846. S. 348—353.
Ueber Legendre's Theorie von den Euler'schen Integralen zweiter Art.

45 Schaar, Mém. Cour. Brux. T. 22. A. 1846, 1847. p. 1—25. = **A** 151.

46 E. E. Kummer, J. v. Cr. Bd. 35. A. 1847. S. 1—4.
Beitrag zur Theorie der Function $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-v} v^{x-1} dv$.

47 L. Oettinger, J. v. Cr. Bd. 35. A. 1847. S. 13—54. = **B** 211.

48 F. Arndt, Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 250—253.
Ueber einen von Gauss gefundenen Ausdruck der Gammafunction.

49 A. Cayley, J. de L. T. 12. A. 1847. p. 231—240. = **B** 226.

50 M. Ohm, J. v. Cr. Bd. 36. A. 1848. S. 277—295.
Ueber das Verhalten der Gamma-Functionen zu den Producten äquidifferenter Factoren.

51 F. W. Newmann, C. et D. Math. Journ. V. 3. A. 1848. p. 57—60.
On $\Gamma(a)$, especially when a is negative.

52 R. Hoppe, J. v. Cr. Bd. 40. A. 1850. S. 152—159.
Remarques sur les réductions de la Fonction Gamma et sur la définition de cette fonction et des facultés analytiques par leurs propriétés.
53 A. Meyer, Mém. Liège. T. 7. A. 1851. p. 1—510. = A 190.
54 Liouville, C. R. T. 35. A. 1852. p. 317—322.
Note sur les fonctions Gamma.
55 A. Genocchi, Bull. Bruxelles. T. 20. P. 2. A. 1853. p. 392—397.
Démonstration élémentaire d'une formule logarithmique de M. Binet.
56 Dedekind, J. v. Cr. Bd. 45. A. 1853. S. 370—374. = B 293.
57 Genocchi, Bull. Bruxelles. Vol. 21. P. i. A. 1854. p. 64—95. = A 207.
58 A. Cauchy, C. R. T. 39. A. 1854. p. 129—135. = A 208.
59 J. Liouville, C. R. T. 42. A. 1856. p. 500—508. = B 315.
60 E. G. Björling, Övers. Stockholm Forhandl. A. 1856. S. 181, 182. = B 319.
61 O. Schlömilch, Schlömilchs Zeitschr. B. 1. A. 1856. S. 118, 119.
Zur Theorie der Gammafunction.
62 J. Liouville, J. d. L. 2e Série. T. 1. A. 1856. p. 445—450. = A 234.
63 Jacobi, N. A. M. T. 15. A. 1856. p. 337—352.
Sur la division du cercle et son application à la théorie des nombres.
64 Kinkelin, Mittheil. Gesellsch. Bern. A. 1857. S. 1—11.
Die Fundamentalgleichungen der Function Γ (x).
65 A. Enneper, Quart. Journ. V. 1. A. 1857. p. 393—405.
On the function Γ (x) with imaginary and complexe variable
66 N. C. Schmit, Mém. Liège T. 13. A. 1858. p. 289—327. = A 245.
67 E. Catalan, C. R. T. 47. A. 1858. p. 545—549.
Sur une application de la formule du binôme aux intégrales eulériennes.
68 O. Schlömilch, Schlömilch's Zeitschr. B. 3. A. 1858. S. 130—132.
Ueber eine Eigenschaft gewisser Reihen
69 T. Clausen, Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 166—170. = B 354.
70 Zehfuss, Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 441. = B 358.
71 R. Lipschitz, J. v. Cr. B. 56. A. 1859. S. 11—26. = B 369.
72 O. Schlömilch, Schlömilch's Zeitschr. B. 4. A. 1859. S. 431—433.
Entwickelung einer neuen Reihe für die Gammafunction.
73 Zehfuss, N. A. M. T. 18. A. 1859. p. 356.
Déduction simple de l'expression Γ (x) de Gauss.

G. FONCTIONS ELLIPTIQUES.

1 L. Euler, N. Comm. Petr. T. 8. A. 1760, 1761, p. 129—149.
Consideratio formularum quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolvi potest.

2 L. Euler, N. Comm. Petr. T. 10. A. 1764. p. 3—50.
De reductione formularum integralium ad rectificationem Ellipsis ac Hyperbolae.
3 d'Alembert, Misc. Taur. T. 4. P. 2. p. 127—162. A. 1766—1769.
Recherches mathématiques sur différents sujets.
4 J. Landen, Phil. Trans. Vol. 61. p. 298—309. A. 1771.
A Disquisition concerning certain Fluents, which are assignable by the Arcs of the Conic Sections, wherein are investigated some new and useful Theorems for computing such Fluents.
5 De la Grange, Misc. Taur. T. 5. p. 123—166. A. 1770—1773.
Sur la figure des colonnes.
6 J. Landen, Phil. Trans. Vol. 65. p. 282—289. A. 1775.
An investigation of a general Theorem for finding the Length of any Arc of a conic Hyperbola by means of two Elliptic Arcs, with some other new and useful Theoremas deduced therefrom.
7 Landenbeck, Schwed. Abh. (Kästner). B. 39. A. 1777. S. 138—143.
Rectification elliptischer und hyperbolischer Bogen.
8 A. J. Lexell, Act. Petr. A. 1778. P. 1. p. 58—101.
De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipseos et hyperbolae.
9 — Act. Petr. A. 1778. P. 2. p. 55—84.
Ad dissertationem de reductione formularum integralium ad rectificationem ellipseos et hyperbolae additamentum.
10 G. F. Malfatti, Mem. Societ. Ital. Veronae. V. 2. A. 1784. p. 749—786. = B 32.
11 De la Grange, Mém. Turin. T. 7. P. 2. p. 208—290. A. 1784, 1785.
Sur une nouvelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré.
12 Legendre, Mém. Paris. A. 1786. p. 616—643.
Mémoire sur les Intégrations par arcs d'ellipse.
13 — Mém. Paris. A. 1786. p. 644—683.
Second Mémoire sur les Integrations par arcs d'ellipse et sur la comparaison de ces Arcs.
14 F. Pezzi, Mem. Societ. Ital. Veronae. V. 6. A. 1792. p. 256—309.
Integrazioni in serie infinita della Formola etc.
15 R. Woodhouse, Phil. Trans. A. 1804. p. 219—278.
On the Integration of certain Differential Expressions with which Problems in physical Astronomy are connected.
16 C. F. Gauss, Commentt. Rec. Gott. T. 2. p. 1—46. A. 1811—1813. = B 60.
17 G. Bidone, Mem. de Torino. T. 23. p. 295—314. A. 1818.
Mémoire sur les transcendantes elliptiques.
18 — Mem. de Torino. T. 24. p. 255—274. A. 1820.
Mémoire sur les transcendantes elliptiques. 2^me^ Partie.

19 N. H. Abel, J. v. Cr. Bd. 2. A. 1827. S. 102—181.
Recherches sur les fonctions elliptiques.

20 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. Bd. 3. A. 1828. S. 86.
Addition au Mémoire de Mr. Abel sur les fonctions elliptiques inséré dans le Vol. 2 de ce Journal p. 101.

21 N. H. Abel, J. v. Cr. B. 3. A. 1828. S. 160—190.
Recherches sur les fonctions elliptiques (suite).

22 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. B. 3. A. 1828. S. 191.
Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre quarrés.

23 ——————— J. v. Cr. Bd. 3. A. 1828. S. 192—195, 303—310, 403—404.
Notices sur les fonctions elliptiques (extraits de lettres à l'Éditeur).

24 ——————— J. v. Cr. B. 3. A. 1828. S. 376—389
Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie.

25 N. H. Abel, J. v. Cr. Bd. 3. A. 1828 S. 394—401.
Sur le nombre de transformations différentes qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction donnée de premier degré.

26 J. v. Cr. Bd. 3. A. 1828. S. 402.
Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce.

27 C. G. J. Jacobi, Astr. Nachr. B. 6. A. 1828. N. 123. S. 33—38.
Extrait de deux lettres.

28 —— Astr. Nachr. B. 6. A. 1828. N. 127. S. 133—142.
Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis.

29 Legendre, Astr. Nachr. B 6. A. 1828. N. 130. S. 201—208.
Note sur les nouvelles propriétés des fonctions elliptiques découvertes par Jacobi.

30 N. H. Abel, Astr Nachr. B. 6. A. 1828. N. 138. S. 365—380, N. 139. S. 381—388
Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques.

31 J. Plana, Mem. de Torino. T. 33. p. 333—356. A. 1829.
Méthode élémentaire pour découvrir et démontrer la possibilité des nouveaux théorèmes sur la théorie des transcendantes elliptiques, publiés par Mr Jacobi dans le N. 123 du Journal Allemand intitulé Astronomische Nachrichten.

32 N. H. Abel. J. v. Cr. Bd. 4. A. 1829. S. 85—93.
Note sur quelques formules elliptiques.

33 C. G. J. Jacobi. J. v. Cr. Bd 4. A. 1829. S. 185—193.
Suite des Notices sur les fonctions elliptiques.

34 N. H. Abel. J. v. Cr. Bd. 4. A. 1829. S. 194—199.
Théorème sur les fonctions elliptiques.

35 J. v. Cr. Bd. 4. A. 1829 S. 236—277, 309—348.

Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.

36 C. G. J. JACOBI. J. v. Cr. Bd. 4. A. 1829. S. 371—390.
De functionibus ellipticis Commentatio.

37 GERGONNE, A. M. T. 19. A. 1829. p. 124—126.
Note sur un symptôme d'existence de racines imaginaires dans les équations algébriques.

38 N. H. ABEL, Astr. Nachr. B. 7. A. 1829. N. 147. S. 33—44.
Addition au Mémoire sur les fonctions elliptiques.

39 ——— J. v. Cr. Bd. 5. A. 1830. S. 336—343.
Mathematische Bruchstucke aus seinen Briefen. V.

40 ——— J. v. Cr. Bd. 6. A. 1830. S. 73—80.
Mathematische Bruchstücke aus seinen Briefen.

41 C. G. J. JACOBI, J. v. Cr. Bd. 6. A. 1830. S. 397—403.
De functionibus ellipticis commentatio altera.

42 POISSON, Mém. Acad. Paris T. 10. p. 73—118. A. 1831.
Rapport sur l'ouvrage de M. JACOBI, intitulé: Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum (et Notes).

43 J. IVORY, Phil. Trans. A. 1831. P. 2. p. 349—378.
On the Theory of the Elliptic Transcendents.

44 J. MAC CULLAGH, Irish Trans. V. 16. A. 1831. p. 79—83.
Geometrical Theorems on the Rectification of the Conic Sections.

45 C. G. J. JACOBI, J. v. Cr. B. 7. A. 1831. S. 41—43.
Note sur une nouvelle application de l'analyse des fonctions elliptiques à l'algèbre.

46 POISSON, J. Ec. Pol. T. 13. Cah. 20. A. 1831. p. 222—248. = A 63.

47 C. G. J. JACOBI, J. v. Cr. B. 8. A. 1832. S. 413—417.
Nachricht von LEGENDRE's 3es Supplement zur Théorie des fonctions elliptiques.

48 E. F. A. MINDING, J. v. Cr. B. 9. A. 1832. S. 295, 296.
Théorème relatif à une certaine fonction transcendante.

49 F. J. RICHELOT, J. v. Cr. Bd. 9. A. 1832. S. 407, 408.
Note sur le théorème relatif à une certaine fonction transcendante, démontré dans N°. 22 du présent volume.

50 SOHNKE, J. v. Cr. Bd. 10. A. 1833. S. 23—40.
Motus corporum coelestium in medio resistente.

51 G. LIBRI, J. v. Cr. B. 10. A. 1833. S. 167—194.
Mémoire sur la résolution des équations algébriques dont les racines ont entre elles un rapport donné et sur l'intégration des équations différentielles linéaires dont les intégrales particulières peuvent s'exprimer les unes par les autres.

52 R. LOBATTO, J. v. Cr. Bd. 10. A. 1833. S. 280—287.
Sur l'intégration de la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)}}$.

53 POISSON, J. v. Cr. B. 10. A. 1833. S. 342—347.

Rapport sur deux Mémoires de M. J. LIOUVILLE.

54 LIOUVILLE, J. v. Cr. B. 10. A. 1833. S. 347—359.

Note sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique.

55 —— J. de l'Ec. Polyt. T. 14. 1. Cah. 22. A. 1833. p. 124—148, 149—193.

1er (prés. 7 Déc. 1832) et 2d Mem. (prés. 4 Févr. 1833) sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique.

56 C. GÜTSLAFF, J. v. Cr. Bd. 12. A. 1834. S. 173—177.

Aequatio modularis pro transformatione functionum ellipticarum septimi ordinis.

57 L. A. SOHNKE, J v. Cr. Bd. 12. A. 1834 S. 178—180

Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum et undecimi et decimi tertii et decimi septimi ordinis.

58 C. GUDERMANN, J. v. Cr. Bd. 12. A. 1834. S. 362—364.

Lehrsätze zu beweisen und Anmerkungen zu dem Aufsatze N°. 15 im 12te Bande dieses Journals.

59 LIOUVILLE. J. Ec. Pol. T. 14. Cah. 23. A. 1834. p. 37—83.

Mémoire sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce considérées comme fonctions de leur amplitude.

60 C. G. J. JACOBI, J. v. Cr. B. 13. A. 1835. S. 353—355.

De usu theoriae integralium ellipticorum integralium et Abelianorum in analysi Diophantea.

61 J. TH. SANIO, J. v. Cr. Bd. 14. A. 1835. S. 1—50.

De functionum ellipticarum multiplicatione et transformatione, quae ad numerum parem pertinet, commentatio.

62 C. GUDERMANN, J. v. Cr. Bd. 14. A. 1835. S. 169—181, 185—235.

Integralia elliptica tertiae speciei reducendi methodus simplicior, quae simul ad ipsorum applicationem facillimam et computum numericum expeditum perducit. Sectionum conico sphaericarum quadratura et rectificatio.

63 J. LIOUVILLE, C. R. T. 3. A. 1836. p. 41—43.

Mémoire sur un nouvel usage des fonctions elliptiques dans les problèmes de Mécanique céleste.

64 TALBOT, Not. British Assoc. V. 5. A. 1836. p. 1—4.

Brief Account of some Researches in the Integral Calculus.

65 —— Phil. Trans. A. 1836. P. 1 p. 177—215.

Researches in the Integral Calculus. Part I.

66 E. E. KUMMER, J. v. Cr. Bd. 15. A. 1836. S. 127—172.

Ueber die hypergeometrische Reihe $1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} x + \frac{\alpha.\alpha+1}{1.2} \frac{\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1} x^2 + \text{etc.}$

67 J. L. RAABE, J. v. Cr. Bd. 15. A. 1836. S 191, 192.

Bemerkungen zum Principe der doppelten Substitution bei den elliptischen Functionen.

68 C. G. J. JACOBI, J. v. Cr. Bd. 15 A. 1836. S. 199—204.

Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales.

69 J. LIOUVILLE, J. de L. T. 1. A. 1836. p. 445—458.

Mémoire sur un nouvel usage des fonctions elliptiques dans les problèmes de mécanique céleste.

70 J. IVORY, Proceed. Phil. Trans. V. 3. A. 1830—1837. p. 60.

On the Theory of Elliptic Transcendents.

71 H. F. TALBOT, Proceed. Phil. Trans. V. 3. A. 1830—1837. p. 380—381, 417.

Researches on the Integral Calculus.

72 Phil. Trans. A. 1837. P. 1. p. 1—18.

Researches in the Integral Calculus. Part II.

73 C. RAMUS, Danske Afhandlingar (4e Raekke). B. 6. A. 1837. S. 249—264.

Reduction af en Classe af Integraler, beslaegtede med de elliptiske.

74 — Danske Afhandlingar (4e Raekke). B. 6. A. 1837. S. 265—307. = **A** 76.

75 C. GUDERMANN, J. v. Cr. Bd. 16. A. 1837. S. 78, 79.

Einige Bemerkungen über elliptische Functionen.

76 L. A. SOHNKE, J. v. Cr. Bd. 16. A. 1837. S. 97—130.

Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum.

77 C. GUDERMANN, J. v. Cr. Bd. 16. A. 1837. S. 366—372.
Bd. 17. A. 1837. S. 382—386.

Series novae, quarum ope integralia elliptica primae et secundae speciei computantur simul ea, quorum moduli sunt conjugati.

78 R. A. LUCHTERHANDT, J. v. Cr. B. 17. A. 1837. S. 248—256.

De transformatione expressionis $\frac{dx}{\sqrt{[\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)]}}$ in formam simpliciorem $\frac{dx}{M\sqrt{(1-xx)(1-\varkappa^2xx)]}}$ adhibita substitutione $x = \frac{a+a'y+a''y^2}{1+b'y+b''y^2}$.

79 G. LIBRI, Mém. prés. Paris. T. 5. A. 1838. p. 1—75. = **B** 114.

80 J. LIOUVILLE, Mém. prés. à l'Acad. Paris. T. 5. p. 76—102, 103—151. A. 1838. = **A** 78.

81 G. LAMÉ, Mém. prés. à l'Acad. Paris. T. 5. p. 174—214. A. 1838. = **B** 115.

82 C. GUDERMANN, J. v. Cr. B. 18. A. 1838. S. 1—54, 142—175, 220—258, 303—364.

Theorie der Modular-Functionen und Modular-Integrale.

83 VERHULST, Bull. Brux. T. 6. P. 1. A. 1839. p. 2.

Sur les fonctions elliptiques.

84 Bull. Brux. T. 6. P. 2. A. 1839. p. 424—426.

Note.

85 V. FLAUTI, Atti Acad. Borbonica. T. 4. A. 1839. p. 13—20.

Su la rettificazione dell' ellisse e gl'integrali che ne dipendono. Memoria, estratta de Mss. del fu N. FERGOLA.

86 C. Gudermann, J. v. Cr. B. 19. A. 1839. S. 45—83, 119—184, 244—285.
Theorie der Modular-Functionen und Modular-Integrale. (Fortsetzung).

87 G. Lamé, J. de L. T. 4. A. 1839. p. 100—125.
Mémoire sur les axes des surfaces isothermes du second degré considérés comme des fonctions de la température.

88 Verhulst, Bull. Brux. T. 7. P. 1. A. 1840. p. 322—328.
Traité des éléments des fonctions elliptiques (Rapport sur).

89 J. Liouville, C. R. T. 10. A. 1840. p. 2—4.
Mémoire sur les transcendantes elliptiques de première et seconde espèce considérées comme fonctions de leur module.

90 C. Gudermann, J. v. Cr. {B. 20. A. 1840. S. 62—87, 103—167. / B. 21. A. 1840. S. 240—292.}
Theorie der Modular Functionen und Modular-Integrale. (Fortsetzung).

91 Haedenkamp, J. v. Cr. B. 20. A. 1840. S. 97—100.
De transformatione integralis $\int\int \frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(Sin.^2 v - Sin.^2 \varphi\, Cos.^2 \psi)}}$.

92 J. Liouville, J. de L. T. 5. A. 1840. p. 34—36.
Note sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions de leur module.

93 J. de L. T. 5. A. 1840. p. 441—464.
Mémoire sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce considérées comme fonctions de leur module.

94 N. H. Abel, Mém. prés. à l'Acad. Paris. T. 7. p. 176—264. A. 1841.
Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes.

95 Haedenkamp, J. v. Cr. B. 22. A. 1841. S. 184—192.
Ueber Transformation vielfacher Integrale.

96 B. Bronwin, C. Math. Journ. V. 2. A. 1841. p. 263—267.
On certain integral transformation.

97 G. J. Verdam, Instituut. A. 1842. blz. 57—79, 136—168.
Over de tafelen van elliptische bogen, berekend door den Hoogleeraar Schmidt, alsmede over de herleiding van eenige voorname algemeene en bijzondere integraalformulen tot elliptische functien.

98 C. Gudermann, J. v. Cr. B. 23. A. 1842. S. 201—253.
Theorie der Modular-Functionen und Modular-Integrale. (Fortsetzung).

99 Ramus, J. v. Cr. B. 24. A. 1842. S. 69—79.
De integralibus differentialium algebraicorum.

100 Clausen, Astron. Nachr. B. 19. A. 1842. N. 442. S. 177—178.
Schreiben.

101 — Astron. Nachr. B. 19. A. 1852. N. 442. S. 181—184.
Beitrag zur Theorie der elliptischen Transcendenten.

102 J. A. SERRET, C. R. T. 16. A. 1843. p. 914—917.
Sur les fonctions elliptiques de première espèce.

103 HERMITE, C. R. T. 17. A. 1843. p. 82.
Mémoire sur la division des fonctions Abéliennes ou ultra-elliptiques.

104 — C. R. T. 17. A. 1843. p. 292—295.
(Rapport sur) Mémoire etc.

105 LIBRI et LIOUVILLE, C. R. T. 17. A. 1843. p. 295, 296.
Discussion.

106 LIOUVILLE, C. R. T. 17. A. 1843. p. 327—334.
Sur la division des fonctions elliptiques.

107 LIBRI et LIOUVILLE, C. R. T. 17. A. 1843. p. 334, 335, 431—449, 546—555.
Remarque et réponses.

108 A. CAUCHY, C. R. T. 17. A. 1843. p. 640—651.
Mémoire sur une certaine classe de fonctions transcendantes liées entre elles par un système de formules, qui fournissent comme cas particuliers les développements des facteurs elliptiques en série.

109 — — C. R. T. 17. A. 1843. p. 825—837.
Sur la réduction des rapports de factorielles réciproques aux fonctions elliptiques.

110 CHASLES, C. R. T. 17. A. 1843. p. 838—844.
Propriétés générales des arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable.

111 C. GUDERMANN, J. v. Cr. B. 25. A. 1843. S. 281—394.
Theorie der Modular-Funktionen und Modular-Integrale. (Fortsetzung u. Beschlusz).

112 C. G. J. JACOBI, J. v. Cr. Bd. 26. A. 1843. S. 93—114.
Zur Theorie der elliptischen Functionen.

113 R. HOPPE, Gr. Arch. B. 3. A. 1843. S. 265—268.
Ueber einen Reihenausdruck für den Umfang der Ellipse.

114 J. A. SERRET, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 145—154.
Note sur les fonctions elliptiques de première espèce.

115 W. ROBERTS, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 263, 264.
Sur une représentation géométrique des fonctions elliptiques de première espèce.

116 J. A. SERRET, J. d. L. T. 8. A. 1843. p. 495—501.
Propriétés géométriques relatives à la théorie des fonctions elliptiques.

117 J. LIOUVILLE, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 507—512.
Sur la division du périmètre de la lemniscate, le diviseur étant un nombre entier réel ou complexe quelconque.

118 B. BRONWIN, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 22. A. 1843. p. 258—262.
On M. JACOBI's Theory of Elliptic Functions.

119 A. CAYLEY, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 22. A. 1843. p. 358—360.
Remark on B. BRONWIN's Paper on M. JACOBI's Theory of Elliptic Functions.

120 B. BRONWIN, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 23. A. 1843. p. 89—92.
Reply to Mr. CAYLEY's Remark.

121 B. Bronwin, C. Math. Journ. V. 3. A. 1843. p. 123—133.
On Elliptic Functions.

122 C. Math. Journ. V. 3. A. 1843. p. 197—200.
Mathematical Notes.—Elliptic Integrals.—Geometrical Problem.

123 Chasles, C. R. T. 19. A. 1844. p. 1230—1261.
Construction géométrique des amplitudes dans les fonctions elliptiques. Propriétés nouvelles des sections coniques.

124 Liouville, C. R. T. 19. A. 1844. p. 1261—1263.
Remarques.

125 G. Eisenstein, J. v. Cr. Bd. 27. A. 1844. S. 75—79.
Théorème sur les formes cubiques, et solution d'une équation du quatrième degré à quatre déterminées.

126 — J. v. Cr. Bd. 27. A. 1844. S. 185—191.
Bemerkungen zu den elliptischen und Abelschen Transcendenten.

127 — J. v. Cr B. 27. A. 1844. S. 193—197.
Transformation remarquable de quelques séries.

128 — J. v. Cr. B. 27. A. 1844. S. 285—288.
Elementare Ableitung einer merkwürdigen Relation zwischen zwei ungleichen Produkten.

129 — J. v. Cr. Bd. 28. A. 1844. S. 36—40.
Transformations remarquables de quelques séries.

130 W. Roberts, J. de L. T. 9. A. 1844. p. 155—160.
Sur une représentation géométrique des trois fonctions elliptiques.

131 J. A. Serret, J de L. T. 9. A. 1844. p. 160.
Note à l'occasion du Mémoire précédent.

132 J. Booth, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 25. A. 1844. p. 18—39.
On the Rectification and Quadrature of the Spherical Ellipse.

133 A. Cayley, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 25. A. 1844. p. 352—354.
Investigation of the Transformation of certain Elliptic Functions.

134 A. Cauchy, C. R. T. 20. A. 1845. p. 481, 482, 552—554, 691—726. = A 132.

135 J. A. Serret, C. R. T. 21 A. 1845. p. 147—149.
Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques et ultra-elliptiques.

136 — C. R. T. 21. A. 1845. p. 281—284.
Mémoire (Rapport sur).

137 Liouville, C. R. T. 21. A. 1845. p. 1255—1264.
Note sur un Mémoire de M. Serret relatif à la représentation des fonctions elliptiques.

138 Hermite, Mém. Nancy. Acad. Stanislas. A. 1845. p. 201—211.
Principaux théorèmes de l'analyse des fonctions elliptiques.

139 G. Eisenstein, J. v. Cr. B. 29. A 1835. S. 96.
Theorema.
140 W. Roberts, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 177—193.
Application de la théorie des transcendantes elliptiques à la rectification d'une classe étendue de courbes planes.
141 J. A. Serret, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 257—286.
Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques et ultra-elliptiques.
142 ——— — J. de L. T. 10. A. 1845. p. 286—290.
Addition au Mémoire précédent.
143 J. Liouville, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 290—293.
Rapport sur le Mémoire de M. Serret.
144 J. de L. T. 10. A. 1845. p. 293—296.
Note.
145 W. Roberts, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 297—315.
Mémoire sur quelques propriétés géométriques relatives aux fonctions elliptiques.
146 J. A. Serret, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 351—363.
Développements sur une classe d'équations relatives à la représentation géométrique des fonctions elliptiques.
147 A. Cayley, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 385—420.
Mémoire sur les fonctions doublement périodiques.
148 J. A. Serret, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 421—429.
Note sur les courbes elliptiques de la première espèce.
149 C. G. J. Jacobi, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 435.
Sur l'application des transcendantes elliptiques à un problème connu de la géométrie élémentaire.
150 Eisenstein, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 445—450.
Remarques sur les transcendantes elliptiques et abéliennes.
151 J. Liouville, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 456—465.
Sur un Mémoire de M. Serret, relatif à la représentation des fonctions elliptiques.
152 B. Bronwin, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 26. A. 1845. p. 75—77.
On Jacobi's Elliptic Functions.
153 A. Cayley, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 26. A. 1845. p. 141—145.
On certain Results relating to Quaternions.
154 ——— L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 26. A. 1845. p. 208—211.
On Jacobi's Elliptic Functions in reply to Rev. B. Bronwin and on Quaternions.
155 B. Bronwin, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 27. A. 1845. p. 42—46.
Reduction of the four Forms of ω in Jacobi's General Transformation of an Elliptic Function to one Form only.

156 A. CAYLEY, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 27. A. 1845. p. 424—427. = **B** 176.

157 B. BRONWIN, C. Math. Journ. V. 4. A. 1845. p. 233—237.
On certain integral transformation.

158 A. CAYLEY, C. Math. Journ. V. 4. A. 1845. p. 257—277.
On the inverse elliptic functions.

159 R. LOBATTO, N. Verh. Ned. Inst. Dl. 12. bl. 119—166. A. 1846.
Mémoire sur les fonctions Elliptiques de première et de seconde espèce.

160 A. CAUCHY, C. R. T. 23. A. 1846. p. 321—333. = **E** 15.

161 C. R. T. 23. A. 1846. p. 382—394. = **A** 140.

162 — C. R. T. 23. A. 1846. p. 689—702. = **A** 144.

163 R. L. ELLIS, Reports British Assoc. A. 1846. p. 34—90.
On the recent Progress of Analysis.—Theory of the comparison of Transcendentals.

164 C. RAMUS, Danske Afhandlingar (4e Raekke). B. 12. A. 1846. S. 95—110.
Om nogle Curvens Rectification ved elliptiske functioner.

165 G. EISENSTEIN, J. v. Cr. Bd. 30. A. 1846. S. 185—210.
Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.
I Ableitung des biquadratischen Fundamentaltheorems aus der Theorie der Lemniscatenfunction nebst Bemerkungen zu den Multiplications- und Transformations-Formeln.

166 J. v. Cr. Bd. 30. A. 1846. S. 211—214.
Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.
II Neuer Beweis der Summationsformeln.

167 C. G. J. JACOBI, J. v. Cr. Bd. 30. A. 1846. S. 269, 270.
Ueber einige die elliptischen Functionen betreffenden Formeln.

168 G. EISENSTEIN, J. v. Cr. Bd. 32. A. 1846. S. 59—70.
Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.
III Fernere Bemerkungen zu den Transformationsformeln.

169 C. G. J. JACOBI, J. v. Cr. Bd. 32. A. 1846. S. 176—181.
Extrait d'une lettre adressée à M. HERMITE.

170 F. RICHELOT, J. v. Cr. Bd. 32. A. 1846. S. 219.
Beweis eines Satzes über elliptische Functionen.

171 ———— J. de L. T. 11. A. 1846. p. 25—40.
Application des transcendantes elliptiques aux polygones sphériques, qui sont inscrits à un petit cercle de la sphère et circonscrits à un autre petit cercle, simultanément.

172 J. A. SERRET, J. de L. T. 11. A. 1846. p. 86—95.
Théorie géométrique de la lemniscate et des courbes elliptiques de la première classe.

173 C. G. J. JACOBI, J. de L. T. 11. A. 1846. p. 97—103.
Extrait d'une lettre à M. HERMITE.

174 W. ROBERTS, J. de L. T. 11. A. 1846. p. 157—173. = **B** 197.

175 W. Roberts, J. de L. T. 11. A. 1846. p. 343, 344. = B 199.

176 B. Bronwin, L., E. et D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 28. A. 1846. p. 20—24.
Equations for the Determination of the Motion of a disturbed Planet by Means of Mr. Hansen's altered Time. Note.

177 A. Cayley, C. et D. Math. Journ. V. 1. A. 1846. p. 70—73.
On the reduction of $\frac{du}{\sqrt{U}}$, when U is a function of the fourth order.

178 J. A. Serret, C et D. Math. Journ. V. 1. A. 1846. p. 187—195.
Sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques de première espèce.

179 W. Roberts, Proceed. Irish R. S. V. 3. A. 1847. p. 77—80.
On some Geometrical Theorems relative to Elliptic Functions.

180 Mac Cullagh, Proceed. Irish R. S. V. 3. A. 1847. p. 371—372.
On the Rotation of a Solid Body.

181 C. J. Malmsten, Stockholm Handlingar. A. 1847. S. 71—80.
Bidrag till theorien om elliptiske functioner.

182 ——— Oversigt Stockholm Förhandl. A. 1847. S. 295, 296.
Om elliptiska functioners utveckling i continuerliga bråk.

183 F. Richelot, J. v. Cr. Bd. 34. A. 1847. S. 1—29.
Ueber die Substitutionen von der ersten Ordnung und die Umformung der elliptischen Integrale in die Normalform.

184 G. Eisenstein, J. v. Cr. Bd. 35. A. 1847. S. 137—146.
Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.
IV. Ueber einen allgemeinen Satz, welcher das Additionstheorem für elliptische Functionen als speciellen Fall enthält.

185 ——— J. v. Cr. Bd. 35. A. 1847. S. 147—152.
Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.
V. Ueber die Differentialgleichungen, welchen der Zähler und der Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln genügen.

186 ——— J. v. Cr. Bd. 35. A. 1847. S. 153—184.
Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.
VI. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelprodukte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhangenden Doppelreihen.

187 ——— J. v. Cr. Bd. 35. A. 1847. S. 185—274.
Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.
VII. Fortsetzung der vorigen Abhandlung.

188 J. Dienger, Gr. Arch. B. 9. A. 1847. S. 438—448.
Ueber die Rectification und Quadratur der Toroide.

189 W. Roberts, J. de L. T. 12. A. 1847. p. 435—448.
Note sur la rectification de quelques courbes.

190 W. Roberts, J. de L. T. 12. A. 1847. p. 479, 480.
Extrait d'une lettre à M. Serret.

191 J. A. Serret, J. de L. T. 12. A. 1847. p. 480—482.
Note au sujet de cette lettre.

192 A. Cayley, C. et D. Math. Journ. V. 2. A. 1847. p. 256—266.
On the Theory of elliptic functions.

193 B. Bronwin, Mathemat. V. 2. A. 1847. p. 297—302.
On certain definite integrals expressible by means of elliptic functions.

194 J. Plana, J. v. Cr. Bd. 36. A. 1848. S. 1—74.
Nouvelles formules pour réduire l'intégrale $V = \int \frac{T\,dx}{\sqrt{X}}$ à la forme trigonométrique des transcendantes elliptiques: les polynomes T et X ayant cette forme:

$$T = G + G'x + G''x^2 + \frac{H + H'\sqrt{-1}}{1+(K+K'\sqrt{-1})x} + \frac{H - H'\sqrt{-1}}{1+(K-K'\sqrt{-1})x};\; X = x^4 + \lambda x^3 + Ax^2 + Bx + D.$$

195 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. Bd. 36. A. 1848. S. 75—80.
Ueber die unmittelbare Verification einer Fundamentalformel der Theorie der elliptischen Functionen.

196 — ——— J. v. Cr. Bd. 36. A. 1848. S. 81—88.
Ueber die partielle Differentialgleichung welcher die Zähler und Nenner der elliptischen Functionen Genüge leisten.

197 — ——— J. v. Cr. Bd. 36. A. 1848. S. 97—112.
Ueber die Differentialgleichung, welcher die Reihen $1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 +$ etc., $2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} +$ etc. Genüge leisten.

198 A. Cayley, J. v. Cr. Bd. 37. A. 1848. S. 58—60.
Note sur les fonctions elliptiques.

199 C. O. Meyer, J. v. Cr. Bd. 37. A. 1848. S. 273—304.
Entwicklung der elliptischen Function

$$\Delta^{\pm r} am \frac{2K}{\pi} x.\, Cos.^{\pm s} am \frac{2K}{\pi} x.\, Sin.^{\pm t} am \frac{2K}{\pi} x.\, \int_0^x \Delta^2\, am \frac{2K}{\pi} x.\, dx$$

nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x.

200 J. Dienger, Gr. Arch. B. 11. A. 1848. S. 94—96.
Zurückführung des Integrals $\int_0^\varphi \frac{Sin.^n \varphi\, d\varphi}{(1 - k\, Sin.\, \varphi)\sqrt{(1 - k^2\, Sin.^2 \varphi)}}$ auf elliptischen Funktionen.

201 — Gr. Arch. Bd. 11. A. 1848. S. 395—418.
Theorie der Modular- (elliptischen) Funktionen.

202 A. Cayley, C. et D. Math. Journ. V. 3. A. 1848. p. 50, 51.
On the Theory of Elliptic Functions.

203 C. Hermite, C. et D. Math. Journ. V. 3. A. 1848. p. 54—56.
Note sur la théorie des fonctions elliptiques.
204 A. Cayley, C. et D. Math. Journ. V. 3. A. 1848. p. 286, 287.
On integral transformation.
205 Jacobi, C. R. T. 29. A. 1849 p. 97—103.
Rotation d'un corps.
206 Dupeyrous, Mém. Dyon. A. 1849. p. 11—80.
Premier Mémoire sur les fonctions elliptiques.
207 E. W. Grebe, Gr. Arch. B. 12. A 1849. S. 188—192.
Geometrische Beweise zweier bekannten Sätze über die elliptischen Functionen der ersten Art.
208 J. Dienger, Gr. Arch. B. 13. A. 1849. S. 1—35.
Theorie der Modular- (elliptischen) Funktionen.—Fortsetzung.
209 Gr. Arch. B. 13. A. 1849. S. 424—433. = B 265.
210 C. G. J. Jacobi, J. de L. T. 14. A. 1849. p. 181—200.
Mémoire sur l'équation différentielle à laquelle satisfont les séries
$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \dots \quad \text{et} \quad 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \dots$$
traduit par M. Puiseux.
211 C. J. Malmsten, C. et D. Math. Journ. V. 4. A. 1849. p. 286.
Comparison of Expressions for circular and elliptic Functions in Continued Fractions.
212 E. Brassine, Mém. Toulouse. 3e Série. T. 6. A. 1850. p. 252—254.
Sur les transformations modulaires de Lagrange.
213 J. Booth, Proceed. London. V. 5. A. 1843—1850. p. 797—800.
On the Application of the Theory of Elliptic Functions to the Rotation of a Rigid Body round a Fixed Point.
214 F. Peche, Haidinger's Abhandl. B. 4. A. 1850. S. 19—125.
Integration der elliptischen Functionen in geschlossener Form.
215 —— Haidinger's Berichte. B. 7. A. 1850. S. 25—27.
Lösung der elliptischen Integrale in geschlossener Form.
216 A. Cayley. J. v. Cr. Bd. 39. A. 1850. S. 16—22.
Note sur quelques formules qui se rapportent à la multiplication des fonctions elliptiques.
217 C J. Malmsten, J. v. Cr. Bd. 39. A. 1850. S. 116—121.
Note sur les fonctions elliptiques.
218 Heine, J. v. Cr. Bd. 39. A. 1850. S. 122—137.
Abriss einer Theorie der elliptischen Functionen.
219 L. Schläfli, Gr. Arch. B. 14. A. 1850. S. 395—450.
Ueber die Begründung der Theorie der elliptischen Functionen durch die Betrachtung unendlicher Doppelproducte.

220 W. Roberts, J de L T. 15. A. 1850. p 209—214.
Sur quelques applications géométriques du calcul intégral.

221 A. Cayley, C. et D. Math. Journ. V. 5. A. 1850. p. 201—204.
Note on elliptic functions.

222 A. Cayley, C. et D. Math. Journ. V. 5. A. 1850. p. 204—206.
On the Transformation of an elliptic integral.

223 A. Meyer, Mém. Liège T. 7. A. 1851. p. 1—510. = **A** 190.

224 A. Cauchy, C. R. T. 32. A. 1851. p. 267—276, 354—357. = **E** 20.

225 Hermite, C. R. T. 32. A. 1851. p. 443—450. = **A** 196.

226 Liouville et Cauchy, C. R. T. 32. A. 1851. p. 450—454. = **A** 197.

227 J. A. Serret, Mém. prés. à l'Acad. Paris. T. 11. p. 103—160. A. 1851.
Mémoire sur la représentation géométrique de fonctions elliptiques et ultra-elliptiques.

228 G. Rosenhain, Mém. prés. à l'Acad. Paris. T. 11. p 361—468. A. 1851.
Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe.

229 Somoff, Bull. phys. math Pétersbourg. T. 9 A. 1851. p. 97—100.
Sur la rectification graphique de l'ellipse.

230 A. Cayley, J. v. Cr. Bd. 41. A. 1851. S. 57—65.
Note sur l'addition des fonctions elliptiques.

231 ——— J. v. Cr. Bd. 41. A. 1851 S 85—92.
Note sur quelques formules, qui se rapportent à la multiplication des fonctions elliptiques.

232 Gudermann, J. v. Cr. Bd. 41. A. 1851. S. 93—136.
Entwickelung der Modular-Integrale oder der elliptischen Transcendenten aller Arten, nach Potenzen des Moduls, nach Functionen der Amplitude und nach neuen Functionen des Parameters; sammt einer Theorie dieser neuen Functionen.

233 U. H. Meyer, Gr. Arch. B. 16. A. 1851. S 365—408.
Sur les fonctions elliptiques.

234 ——— Gr. Arch. B. 17. A. 1851. S. 85—120.
Conséquences tirées des formules relatives à la transformation du module.

235 J. A Grunert, Gr. Arch. B. 17. A. 1851. S. 313—328.
Ueber die Quadratur elliptischer Sectoren.

236 U. H. Meyer, Gr. Arch. B. 17. A. 1851. S. 426—454.
Sur les intégrales des fonctions circulaires du second ordre.

237 J. Booth, Phil. Trans. A. 1852 P. 2. p. 311—416
Researches on the Geometrical Properties of Elliptic Integrals.

238 J Somoff, Bull. phys. math. Pétersbourg. T. 10. A 1852. p. 65—72.
Démonstration de quelques formules elliptiques de C. G. J. Jacobi.

239 Richelot J. v. Cr. Bd. 44. A. 1852 S. 277—294.
Einige Bemerkungen zum Euler'schen Additionstheorem der elliptischen Integrale.

240 J. A. Grunert, Gr. Arch. B. 18. A. 1852. S. 241—305.
Erweiterungen der Integralrechnung.

241 N. W. Schulze, Gr Arch. B. 19. A. 1852. S. 181—196.
Entwickelungen elliptischer Integrale in Reihen und der darauf gegrundeten Vergleichungen derselben.
242 O. Schlömilch, Ber. Sächs. Gesellsch. B. 5. A. 1853. S. 25—27.
Ueber ein neues Verfahren zur Entwickelung der elliptischen Functionen.
243 Richelot, J. v Cr. Bd. 45. A. 1853. S. 225—232.
Darstellung einer beliebigen gegebenen Grösse durch $Sin.\ am(a+w,k)$.
244 R. Krusemarck, J. v. Cr. Bd. 46. A. 1853. S. 189—233.
Zur Theorie der elliptischen Functionen
245 J. A. Grunert, Gr. Arch. B. 20. A. 1853. S. 207—237.
Ueber die Quadratur elliptischer Sectoren.
246 Essen, Gr. Arch. B. 21. A. 1853. S. 241—248.
Ergänzung des ersten Jacobi'schen Theorems von den elliptischen Functionen der ersten Art.
247 P. Buttel, Gr. Arch. B. 21. A. 1853 S. 342—345.
Verschiedene Bemerkungen.
248 Essen, Gr. Arch. B. 21. A. 1853. S 418—422.
Ergänzung des zweiten Jacobi'schen Theorems über die elliptischen Functionen. — Fortsetzung einer früher veröffentlichten Ergänzung des ersten Theorems.
249 J. Booth, C. & D. Math. Journ. V. 8. A. 1853. p. 65—79.
On the Trigonometry of the Parabola.
250 F. W. Newmann, C. & D. Math Journ V. 8. A. 1853. p. 190—227.
On the third elliptic integral.
251 Gennochi, Bull. Brux. T. 21. P. I. A. 1854. p. 64—95. = **A** 207.
252 J. Booth, Proceed. London. V. 6. A. 1850—1854. p. 143—145.
Researches on the geometrical Properties of Elliptic Integrals.
253 ——— Phil. Trans. A. 1854. P. 1. p. 53—70.
Researches on the Geometrical Properties of Elliptic Integrals.
254 Heine, Ber. Berlin. A. 1854. S. 564—572. = **B** 299.
255 N. Trudi, Mem Acc. Borbonica. T. 1. A. 1852—1854. p. 63—100.
Rappresentazione geometrica immediata dell' equazione fondamentale nella teorica delle funzioni ellittiche, con diverse applicazioni.
256 P. Tchebychev, Bull. phys. math. Pétersbourg. T. 12. A. 1854. p. 315, 316.
Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré.
257 Somoff, J. v. Cr. B. 47. A. 1854. S. 269—288.
Méthode du calcul des fonctions elliptiques de troisième espèce.
258 H. Hoffmann, J. v. Cr. B 48. A. 1854. S. 332—347.
Multiplications-Formeln für die elliptischen Functionen mit complexen Vielfachen des Arguments, und dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

259 J. DIENGER, Gr. Arch. B. 22. A. 1854. S. 362, 363.
Berichtigung der Berichtigung im Archiv, Th. 21. S. 344.

260 STREHLKE, Gr. Arch. B. 22. A. 1854. S. 444—447.
Bemerkungen über die Rectification der Ellipse.

261 ESSEN, Gr. Arch. B. 22. A. 1854. S. 474.
Schreiben an den Herausgeber.

262 U. H. MEYER, Gr. Arch. B. 22. A. 1854. S. 474—478.
Schreiben an den Herausgeber.

263 C. F. LINDMANN, Gr. Arch. 23. A. 1854. S. 445—448.
Adnotationes quaedam de variis locis hujus Archivi.

264 BOOTH, L., E. & D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 7. A. 1854. p. 213—215.
On a Particular Case of Elliptic Integrals whose Parameter are imaginary.

265 TH. WEDDLE, C. & D. Math. Journ. V. 9. A. 1854. p. 79, 80.
On a new and simple rule for approximating to the area of a figure by means of seven equidistant ordinates.

266 A. CAYLEY, C. & D. Math. Journ. V. 9. A. 1854. p. 163—165.
On a Theorem of M. LEJEUNE DIRICHLET'S.

267 CH. HERMITE, C. R. T. 40. A. 1855. p. 249—254, 304—309, 365—369, 427—431, 485—489; 536—541, 704—707, 784—787.
Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes.

268 BRIOT et BOUQUET, C. R. T. 41. A. 1855. p. 1229—1232.
Mémoire sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques.

270 O. SCHLÖMILCH, Abh. Sächs Gesellsch. B. 2. A. 1855. S. 395—470.
Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die ellipschen Functionen.

271 RICHELOT, J. v. Cr. B. 50. A. 1855. S. 41—51.
Ueber eine merkwürdige Formel in der Theorie der elliptischen Transcendenten, und eine Ableitung des Fundamentaltheorems.

272 C. LOTTNER, J. v. Cr. B. 50. A. 1855. S. 111—125.
Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punct rotirenden Revolutionskörpers, auf die elliptischen Transcendenten.

273 C. G. J. JACOBI, Astr. Nachr. B. 41. A. 1855. N. 974. S. 209—226.
Nouvelles formules de géodésie, communiquées par M. le Prof. LUTHER.

274 STURM, C. R. T. 42. A. 1856. p. 988—990.
Note sur les fonctions elliptiques.

275 J. LIOUVILLE, C. R. T. 42. A. 1856. p. 1084—1088.
Sur la théorie générale des équations différentielles.

276 C. WEIERSTRASS, J. v. Cr. B. 52. A. 1856. S. 285—380.
Theorie der ABEL'schen Functionen.

277 J. LIOUVILLE, J. d. L. 2e Sér. T. 1. A. 1856. p. 82—88. = C 102.

279 STURM, J. de L. 2e Sér. T. 1. A. 1856. p. 231—233.
Sur les fonctions elliptiques.

280 J. LIOUVILLE, J. de L. 2e Sér. T. 1. A. 1856. p. 289—294. = **C** 103.

281 BRIOT et BOUQUET, Journ. de l'Ec. Pol. T. 21. I. Cah. 36. A. 1856. p. 199—254.
Mémoire sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques.

282 O. SCHLÖMILCH, Schlömilch's Zeitschr. B. 1. A. 1856. S. 21—28. = **B** 331.

283 Schlömilchs Zeitschr. B. 1. A. 1856. S. 372—374.
Ueber das Additions-Theorem für elliptische Integrale erster Gattung.

284 C. G. J. JACOBI, Astr. Nachr. B. 42. A. 1856. N. 1006. S. 337—352, N. 1007. S. 353—358.
Ableitung der in seinem Aufsatze: Solution nouvelle d'un problème de géodésie fondamentale, enthaltenen Formeln: mitgeth. von E. LUTHER.

285 LAMÉ, C. R. T. 44. A. 1857. p. 953, 954.
Note.

286 KRONECKER, Ber. Berlin. A. 1857. S. 455—459.
Ueber elliptische Functionen, für welche complexe Multiplication Statt findet.

287 P. TCHEBYCHEV, Mém. St. Pétersb. 6e Série. V. 8. I. A. 1857. p. 203—233.
Sur l'intégration des différentielles, qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou quatrième degré.

288 E. HEINE, J. v. Cr. B. 53. A. 1857. S. 199—230.
Die Reduction der elliptischen Integrale in ihre kanonische Form.

289 C. G. J. JACOBI, J. v. Cr. B. 53. A. 1857. S. 335—341.
(Des manuscrits inédits de) par E. LUTHER.
Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie.

290 E. LUTHER, J. v. Cr. B. 53. A. 1857. S. 342—365.
C. G. J. JACOBI's Ableitung der in seinem Aufsätze: Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie, enthaltenen Formeln.

291 SCHELLBACH, J. v. Cr. B. 54. A. 1857. S. 59—67.
Mathematische Miscellen. X. Zur Theorie des Additionstheorems der elliptischen Integrale.

292 C. G. J. JACOBI, J. v. Cr. B. 54. A. 1857. S. 82—97.
(Aus den hinterlassenen Papieren von) mitgetheilt durch C. W. BORCHARDT.
Darstellung der elliptischen Functionen durch Potenzreihen.

293 O. SCHLÖMILCH, J. de L. 2e Série. T. 2. A. 1857. p. 43—46. = **B** 339.

294 — — Schlömilchs Zeitschr. B. 2. A. 1857. S. 49—56. = **B** 344.

295 A. GENNOCCHI, Schlömilchs Zeitschr. B. 2. A. 1857. S. 414—420. = **B** 347.

296 TCHEBICHEFF, Journ. de Liouv. 2e Série. T. 2. A. 1857. p. 1—42.
Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré.

297 HERMITE, C. R. T. 46. A. 1858. p. 171—175.
Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques.

298 Hermite, C. R. T. 46. A. 1858. p 508–515.
Sur la résolution de l'équation du cinquième degré.

299 —— C. R. T. 46. A. 1858. p. 715—722.
Sur la résolution de l'équation du cinquième degré.

300 —— C. R. T. 46 A. 1858. p. 961—967.
Sur quelques théorèmes d'Algèbre et la résolution de l'équation de quatrième degré.

301 L. Kronecker, C. R. T. 46. A. 1858. p. 1150—1152.
Sur la résolution de l'équation du cinquième degré.

302 Fr. Brioschi, C. R. T. 47. A. 1858. p. 337—341.
Sur diverses équations modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques.

303 C. J. D. Hill, Nova Acta Upsal. Ser. 3a. T. 2. 2. A. 1858. p. 391—405.
Analysis aequationum aliquot functionalium quae partim in theoria ellipticarum, partimque logarithmicarum magni sunt usus.

304 A. Cayley, J. v. Cr. B 55. A. 1858. S. 15—24.
Sur quelques formules pour la transformation des intégrales elliptiques.

305 C. Kupper, J. v. Cr. B. 55. A. 1858. S. 89—93.
Démonstration géométrique de cette proposition, que toute fonction elliptique de première espèce peut être remplacée par deux fonctions elliptiques de seconde espèce. Développement d'une formule relative à la rectification de l'hyperbole.

306 Hermite, J. de L. 2e Série. T. 3. A. 1858. p. 26—36.
Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques.

307 Schröder, J. de L. 2e Série. T. 3. A. 1858. p. 258—264.
Lettre.

308 Kronecker, J. de L. 2e Série. T. 3. A. 1858. p. 265—270.
Sur les fonctions elliptiques et sur la théorie des nombres.

309 V. A. Lebesgue, J. de L. 2e Série. T. 3. A. 1858. p. 391—394.
Note sur la résolution de l'équation du quatrième degré par les fonctions elliptiques.

310 A. Cayley, L., E. & D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 15. A. 1858. p. 363—365.
On the Cubic Transformation of an Elliptic Function.

311 C. W. Merrifield, L., E. & D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 16. A. 1858. p. 198—209.
On the Geometry of the Elliptic Equation.

312 F. W. Newman, Proceed. Phil. Trans. London. V. 9. A. 1857, 1858. p. 704—708.
The higher Theory of elliptic Integrals, treated from Jacobi's Functions as its Basis.

313 Le P. Joubert, C. R. T. 48. A. 1859. p. 290—295.
Note sur la résolution de l'équation du cinquième degré.

314 Hermite, C. R. T. 48. A. 1859. p. 940—948, 1079—1085, 1095—1102.
Sur la théorie des équations modulaires.

315 —— C. R. T. 49. A. 1859. p. 16—24, 110—118, 141—144.
Sur la théorie des équations modulaires.

316 Richelot, C. R. T. 49. A. 1859. p. 641—645.

Sur la théorie des fonctions elliptiques et sur les équations différentielles du calcul des variations.

317 CH. W. MERRIFIELD, Phil. Trans. V. 149. 1. A. 1859. p. 171—177.
On the Comparison of Hyperbolic Arcs.

318 SCHEIBNER, Ber. Sächs. B. 11. A. 1859. S. 159—161.
Ueber zwei auf die Theorie der elliptischen Functionen bezügliche Sätze.

319 G. BELLAVITIS, Atti Adun. Istit. Veneto. Ser. 3ª. T. 4. A. 1858, 1859. p. 1001—1003.
Sol „System elliptischer Bogen berechnet von T. G. SCHMIDT. Berlin. 1842."

320 E. HEINE, J. v. Cr. B. 56. A. 1859. S. 79—86.
Auszug eines Schreibens über die LAMÉ-schen Functionen an den Herausgeber.

321 ——— J. v. Cr. B. 56. A. 1859. S. 87—99.
Einige Eigenschaften der LAMÉ-schen Functionen.

322 O. RÖTHIG, J. v. Cr. B. 56. A. 1859. S. 197—203.
Ueber einige Gattungen elliptischer Integrale.

323 C. O. MEYER, J. v. Cr. B. 56. A. 1859. S. 314—325.
Ueber rationale Verbindungen der elliptischen Transcendenten.

324 G. F. W. BAEHR, Gr. Arch. B. 33. A. 1859. S. 354—368.
Sur la transformation des fonctions elliptiques de première espèce.

H. FONCTIONS ULTRA-ELLIPTIQUES. (ABÉLIENNES, ETC).

1 N. H. ABEL, J. v. Cr. B. 1. A. 1826. S. 185—221.
Ueber die Integration der Differentialformel $\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}}$, wenn ϱ und R ganze Functionen sind.

2 ——— J. v. Cr. Bd. 3. A. 1828. S. 313—323.
Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes.

3 C. G. J. JACOBI, Astr. Nachr. B. 6. A. 1828. N. 123. S. 33—38. = **G** 27.

4 ——— J. v. Cr. B. 9. A. 1832. S. 99.
De Theoremate Abeliano observatio.

5 ——— J. v. Cr. Bd. 9. A. 1832. S. 394—403.
Considerationes generales de transcendentibus Abelianis.

6 G. LIBRI, J. v. Cr. B. 10. A. 1833. S. 167—194. = **G** 51.

7 F. MINDING, J. v. Cr. Bd. 10. A. 1833. S. 195—199.
Sur les intégrales de la forme $\int \frac{dx\, P\sqrt{p}}{c-x}$, p et P étant deux polynômes entiers.

8 R. LOBATTO, J. v. Cr. B. 10. A. 1833. S. 280—287. = G 52.

9 F. MINDING, J. v. Cr. B. 10. A. 1833. S. 292.
Addition à l'Article 12 précédent.

10 POISSON, J. v. Cr. B. 10. A. 1833. S. 342—347. = G 53.

11 LIOUVILLE, J. v. Cr B. 10. A. 1833. S. 347—359. = G 54.

12 J. de l'Ec. Polyt. T. 14. I. Cah. 22. A. 1833. p. 124—148, 149—193. = G 55.

13 HILL, J. v. Cr. B. 11. A. 1834. S. 193—197.
Exemplum usus functionum iteratarum in theoria functionum integraliter transcendentium.

14 MINDING, J. v. Cr. B. 11. A. 1834. S. 373—383.
Recherches sur la sommation d'un certain nombre de fonctions transcendantes, dont les dérivées sont déterminées par des équations algébriques du troisième degré.

15 POISSON, J. v. Cr. B. 12. A. 1834. S. 89—104.
Théorèmes relatifs aux intégrales des fonctions algébriques.

16 F. J. RICHELOT, J. v. Cr. Bd. 12. A. 1834. S. 181—233.
De integralibus Abelianis primi ordinis commentatio prima.

17 C. G. J. JACOBI, J. v. Cr. Bd. 13. A. 1835. S 55—78.
De functionibus duorum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur.

18 J. LIOUVILLE, J v. Cr. B. 13. A. 1835. S. 93—118.
Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes.

19 C. G. J JACOBI, J. v. Cr. B. 13. A. 1835. S. 353—355. = G 60.

20 J. W. LUBBOCK, L & E. Phil. Mag. 3d Ser. V. 6. A. 1835. p. 116—125.
On some elementary Application of ABEL's Theorem.

21 F. RICHELOT, C. R T. 2. A. 1836. p. 622—627.
Essai sur une méthode générale pour déterminer la valeur des intégrales ultra-elliptiques, fondée sur des transformations remarquables de ces transcendantes.

22 H. F. TALBOT, Phil. Trans. A. 1836. P. 1. p. 177—215. = G 65.

23 C G. J. JACOBI, J. v. Cr. B. 15. A. 1836. S. 199—204. = G 68.

24 F J RICHELOT, Astr. Nachr. B. 13. A. 1836. N. 311. S. 361—366.
Ueber die auf wiederholten Transformationen beruhende Berechnung der ultra-elliptischen Functionen

25 J. v. Cr. Bd. 16. A. 1837. S. 221—284, 285—341.
De transformatione integralium Abelianorum primi ordinis commentatio.

26 J. LIOUVILLE, J de L. T. 2. A. 1837. p. 56—108.
Mémoire sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients.

27 G. LIBRI, Mém. prés. Paris. T. 5. A. 1838. p. 1—75. = B 114.

28 J. LIOUVILLE, Mém. prés. Paris. T. 5. A. 1838. p. 76—102, 103—151. = A 78.

29 J. Liouville, J. de L. T. 3. A. 1838. p. 523—546.
Suite du Mémoire sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients.

30 Jürgensen, J. v. Cr. B. 19. A. 1839. S. 113—116.
Sur la sommation des transcendantes à différentielles algébriques.

31 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. B. 19. A. 1839. S. 309—313.
Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution.

32 E. C. Catalan, J. de L. T. 4. A. 1839. p. 323—344.
Sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples.

33 Mém. Cour. Brux. T. 14. P. 2. A. 1839, 1840 p 1—49.
Mémoire couronné sur les transformations des variables dans les intégrales multiples.

34 O. J. Broch, J. v. Cr. B. 20. A. 1840. S. 178—188.
Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendantes.

35 N. H. Abel, Mém. prés. à l'Acad. Paris. T. 7. p. 176—264. A. 1841. = **G** 94

36 Broch, C. R. T. 12. A. 1841. p. 847—850.
(Rapport sur) Mémoire relatif à une certaine classe d'intégrales definies.

37 Haedenkamp, J. v. Cr. B. 22. A. 1841. S 184—192. = **G** 95.

38 Jacobi, J. de L. T. 6. A. 1841. p. 267—272.
De la ligne géodésique sur un ellipsoïde et des différents usages d'une transformation analytique remarquable.

39 Chr. Jürgensen, J. v. Cr. Bd. 23. A. 1842. S. 126—141.
Remarques générales sur les transcendantes à différentielles algébriques.

40 O. J. Broch, J. v. Cr. B. 23 A 1842. S. 145—195, 201—242.
Mémoire sur les fonctions de la forme $\int x^{s-rp-1}\,F(x^p)\big(R(x^p)\big)^{\pm\frac{s}{rp}}dx$.

41 F. Minding, J. v. Cr. Bd. 23. A. 1842. S. 255—274.
Propositiones quaedam de integralibus functionum algebraicarum unius variabilis, e principiis Abelianis derivatae.

42 Richelot, J. v. Cr. B. 33. A. 1842. S. 354—369.
Ueber die Integration eines merkwürdigen Systems Differentialgleichungen.

43 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. Bd. 24. A. 1842. S. 28—35.
Demonstratio nova theorematis Abeliani.

44 Ramus, J. v. Cr. B. 24. A. 1842. S. 69—79. = **G** 99.

45 Hermite, C. R. T. 17. A. 1843. p. 82. = **G** 103.

46 — — C. R. T. 17. A. 1843. p. 292—295. = **G** 104.

47 Liouville, C. R. T. 17. A. 1843. p. 327—334. = **G** 106.

48 Libri et Liouville, C. R. T. 17. A. 1843. p. 334, 335, 431—449, 546—555. = **G** 107.

49 A. Cauchy, C. R. T. 17. A. 1843. p. 640—651. = **G** 108.

50 Richelot, J. v. Cr. B. 25. A. 1843. S. 97—118.
Einige neue Integralgleichungen des Jacobischen Systems Differentialgleichungen.
51 Haedenkamp, J. v. Cr. Bd 25. A. 1843. S. 178—183.
Ueber Abelsche Integrale.
52 J. Liouville, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 502—505.
Rapport fait à l'Académie des Sciences de l'Institut au nom d'une Commission de M.M. Lamé et Liouville, sur un Mémoire de M. Hermite, relatif à la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques.
53 C. G. J. Jacobi, J. de L. T. 8. A. 1843. p. 505, 506.
Lettre à M. Hermite.
54 Hermite. C. R. T. 18. A. 1844. p. 1133—1148.
Sur la théorie des transcendantes aux différentielles algébriques.
55 C. G. J. Jacobi, Bull. Physic. Mathém. Pétersbourg. T. 2. A. 1844. p. 96.
Note sur les fonctions abéliennes.
56 G. Eisenstein, J. v. Cr. B. 27. A. 1844 S. 185—191. = G 126.
57 D. G. Rosenhain, J. v. Cr. Bd. 28. A. 1844. S. 249—278.
Exercitationes analyticae in theorema Abelianum de integralibus functionum algebraicarum.
58 Hermite, J. de L. T. 9. A. 1844. p. 353—368.
Sur la théorie des transcendantes à différentielles algébriques.
59 J. A. Serret, C. R. T. 21. A. 1845. p. 147—149. = G 135.
60 C. R. T. 21. A. 1845. p. 281—284. = G 136.
61 D. G. Rosenhain, J. v. Cr. B. 29. A. 1845. S. 1—18.
Exercitationes analyticae in theorema Abelianum de integralibus functionum algebraicarum (Continuatio).
62 F. J. Richelot, J. v. Cr. Bd. 29. A. 1845. S. 281—332.
Nova theoremata de functionum Abelianorum cujusque ordinis valoribus, quibus pro complementis argumentorum atque indicum dimidiis induuntur.
63 J. A. Serret, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 257—286. = G 141.
64 — J. de L. T. 10. A. 1845. p. 286—290. = G 142.
65 Eisenstein, J. de L. T. 10. A. 1845. p. 445—450.
Remarques sur les transcendantes elliptiques et abéliennes.
66 Liouville, J. de L. T. 10 A. 1845. p. 290—293. = G 143.
67 J. de L. T. 10. A. 1845. p. 456—465. = G 151.
68 A. Cauchy, C. R. T. 23. A. 1846. p. 485—487, 529—537.
Mémoire sur la détermination complète des variables propres à vérifier un système d'équations différentielles.
69 R. L. Ellis, Report British Assoc. A. 1846. p. 34—90. = G 163.
70 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. Bd. 30. A. 1846. S. 121—126.
Ueber die Additionstheoreme der Abelschen Integrale zweiter und dritter Gattung.

71 C. G. J. JACOBI, J. v. Cr. Bd. 30. A. 1846. S. 183, 184.
Note sur les fonctions Abéliennes, lue le 29 Mai 1843.

72 ——————— J. v. Cr. Bd. 32. A. 1846. S. 176—181. = G 169.

73 ——————— J. v. Cr. Bd. 32. A. 1846. S. 185—196.
Ueber die Vertäuschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der Abelschen und höheren Transcendenten.

74 ——————— J. v. Cr. Bd. 32. A. 1846. S. 220—226.
Ueber eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen.

75 CH. HERMITE, J. v. Cr. Bd. 32. A. 1846. S. 277—299.
Extraits de deux lettres à Mr. C. G. J. JACOBI.

76 C. G. J. JACOBI, J. de L. T. 11. A. 1846. p. 97—103. = G 173.

77 CAYLEY, C. & D. Math. Journ. V. 1. A. 1846. p. 70—73. = G 177.

78 J. R. MINNICH, Mem. Istit. Veneto. T. 3. A. 1847. p. 269—329.
Sugli integrali algebrici d'un sistema di equazioni differenziali, i cui termini sono integrabili per mezzo di trascendenti abeliane, e sulla proprietà fondamentale di simili trascendenti. — Note.

79 ——————— Atti Adun. Istit. Veneto. T. 6. A. 1847. p. 130—135.
Sopra alcune nuove proposizioni relative alle trascendenti Abeliane.

80 A. GÖPEL, J. v. Cr. Bd. 35. A. 1847. S. 277—312.
Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio brevis.

81 A. CAYLEY, C. & D. Math. Journ. V. 2. A. 1847. p. 51—54.
Notes on the Abelian Integrals. — JACOBI's system of differential equations.

82 HERMITE, Mém. prés. à l'Acad. Paris. T. 10. A. 1848. p. 563—573.
Sur la division des fonctions Abéliennes ou ultra-elliptiques.

83 JACOBI, Ber. Berlin. 1848. S. 384, 414—417.
Ueber quadratische Formen und hyperelliptische Functionen.

84 F. PECHE, Sitz. Ber. Wien. B. 1. St. 4. S. 127—132. A. 1848.
Abhandlung über die Bestimmung der Integrale
$\int \frac{x^{\pm n}\,dx}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3)}}$ und $\int \frac{x^{\pm n}\,dx}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)}}$, wenn n eine ganze Zahl vorstellt, in geschlossenen Formen.

85 A. STEEN, Danske Selskabs Skrifter. 5e Raekke. B. 1. A. 1849. S. 323—353.
Hovedsaetninger om de overelliptiske Functioner.

86 J. LIOUVILLE, J. de L. T. 14. A. 1849. p. 257—299.
Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels.

87 W. ROBERTS, Proceed. Irish R. S. V. 4. A. 1850. p. 288—291.
On different Applications of a Formula of M. LIOUVILLE.

88 ROSENHAIN, J. v. Cr. Bd. 40. A. 1850. S. 319—328, 335—346, 347—360.

Auszug mehrerer Schreiben an Herrn Prof. C. G. J. JACOBI über hyperelliptische Transcendenten. N°. I, III, IV.

89 J. A. SERRET, Mém. prés. à l'Acad. Paris. T. 11. A. 1851. p. 103—160. = G 227.

90 G. ROSENHAIN, Mém. prés. à l'Acad. Paris. T. 11. A. 1851. p. 361—468. = G 228.

91 J. DIENGER, Gr. Arch. B. 16. A. 1851 S. 67—93.
Ueber die Abelschen Functionen.

92 G. EISENSTEIN, J. v. Cr. Bd. 44. A. 1852. S. 261—269.
Auszug eines Schreiben von Herrn Prof. RICHELOT.

93 RICHELOT, J. v. Cr. Bd. 44. A. 1852. S. 269—272.
Schreiben von Herrn EISENSTEIN.

94 A. CAYLEY, L., E & D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 5. A. 1853. p. 281—285.
Note on the Geometrical Representation of the Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$.

95 ——— L., E. & D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 6. A. 1853. p. 103—105.
Note on the Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{(m-x)(x+a)(x+b)(x+c)}}$

96 ——— L., E. & D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 6. A. 1853. p. 414—418.
Geometrical Representation of an Abelian Integral.

97 P. TCHEBYCHEV, Bull. Phys.-Math. Pétersbourg. T. 12. A. 1854. p. 315, 316. = G 256.

98 C. WEIERSTRASS, J. v. Cr. Bd 47. A. 1854. S. 289—306.
Zur Theorie der ABEL'schen Functionen.

99 C. A. BORCHARDT, J. v. Cr. Bd. 48. A. 1854. S. 69—104.
Application des transcendantes Abéliennes à la théorie des fractions continues.

100 CH. HERMITE, C. R. T. 40. A. 1855. p. 249—254, 304—309, 365—369, 427—431, 485—489, 536—541, 704—707, 784—787. = G 267.

101 BRIOT et BOUQUET, C. R. T. 40. A. 1855. p. 342—344.
Recherches sur les fonctions doublement périodiques.

102 CAUCHY, C. R. T. 40. A. 1855. p. 511—518.
Sur la recherche des intégrales monodrômes et monogènes d'un système d'équations différentielles.

103 C. WEIERSTRASS, J. v. Cr. B. 52. A. 1856. S. 285—380. = G 276.

104 C. F. LINDMANN, Gr. Arch. B. 27 A. 1856. S. 1—12.
De formula $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(B'x^3 + C'x^2 + D'x + E')}}$.

105 BORCHARDT, Ber. Berlin. A. 1857. S. 301—311.
Eigenschaft der Potenzsummen ungerader Ordnung.

106 P. TCHEBYCHEV, Mém. St. Pétersb. 6e Série. V. 8. 1. A. 1857. p. 203—233. = G 287.

107 B. Riemann, J. v. Cr. B. 54. A. 1857. S 115—155.
Theorie der Abelschen Functionen.

108 Fr. Brioschi, C. R. T. 47. A. 1858. p. 310—313.
Sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes.

109 C. G. J. Jacobi, J. v. Cr. B. 55. A. 1858. S. 1—14.
(Aus der hinterlassenen Papiern von) mitgetheilt durch F. Richelot.
Ueber die Substitution $(a x^2 + 2 b x + c) y^2 + 2 (a' x^2 + 2 b' x + c') y + a'' x^2 + b'' x + c'' = 0$, und über die Reduction der Abel'schen Integrale erster Ordnung in die Normalform.

110 Brioschi, J. v. Cr. B. 55. A. 1858. S. 56—60.
Sur l'intégration des équations ultra-elliptiques.

111 Th. Clausen, Gr. Arch. B. 30. A. 1858. S. 166—170.
Beweis des von Schlömilch Arch. Bd. 12. N°. 35 aufgestellten Lehrsatzes über die Ableitung des Differentials von Log. Γx; und über eine algemeine Aufgabe über die Functionen von Abel.

112 C. Newmann, J. v. Cr. B. 56. A. 1859. S. 46—63.
De problemate quodam mechanico quod ad primum integralium ultra-ellipticorum classem revocatur.

I. LOGARITHME INTÉGRAL, SINUS INTÉGRAL, COSINUS INTÉGRAL, FONCTION BERNOUILLIÈNE, ETC.

1 G. Bidone, Mém. Turin. T. 16. Mém. Prés. p. 19—84. A. 1805—1808.
Recherches sur la nature de la transcendante $\int \frac{dz}{log. z}$.

2 Plana, A. M. T. 12. A. 1812. p. 145—257.
Eclaircissements sur la théorie de l'intégrale $\int \frac{dx}{Log. x}$.

3 A. M. T. 12. A. 1812 p. 365, 366.
Note à l'appui d'une réflexion de M. Plana, p. 145.

4 C. F. Gauss, Comment. Rec. Gott. T. 3. p. 39—76. A. 1814, 1815. = **D** 5.

5 C. A. Bretschneider, J. v. Cr. Bd. 17. A. 1837. S. 257—285.
Theoriae logarithmi integralis lineamenta nova.

6 Gr. Arch. B. 3. A. 1843. S. 27—34.
Berechnung der Grundzahl der natürlichen Logarithmen so wie mehrerer anderer mit ihr zusammenhängender Zahlwerthe.

7 O. Schlömilch, J. v. Cr. B. 33. A. 1846. S. 316—324. = **B** 189.
8 — — Gr. Arch. B. 9. A. 1847. S. 5—8.
Bemerkung zur Theorie des Integrallogarithmus.
9 — — Gr. Arch. B. 9. A. 1847. S. 307—313. = **B** 214.
10 F. Arndt, Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 225—232. = **B** 216.
11 — Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 233—240. = **B** 217.
12 — Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 240—246. = **B** 218.
13 — Gr. Arch. B. 10. A. 1847. S. 247—250. = **B** 219.
14 — — Gr. Arch. B. 11. A. 1848. S. 315—328.
Ueber die numerische Bestimmung der Constante des Integrallogarithmus.
15 O Schlömilch, Gr. Arch. B. 11. A. 1848. S. 389—395.
Ueber den Integralsinus und den Integralcosinus.
16 C. J. Hargreave, L., E. & D. Phil. Mag. 3d Ser. V. 35. A. 1849. p. 36—53.
Analytical Researches concerning Numbers.
17 A. Meyer, Mém. Liège. T. 7. A. 1851. p. 1—510. = **A** 190.
18 L. Raabe, J. v. Cr. B. 42. A. 1851. S. 348—367. = **B** 281.
19 R. Beez, Gr. Arch. B. 19. A. 1852. S. 419—441.
Beiträge zur Theorie des Integrallogarithmus.
20 C. J. Hargreave, L., E. & D. Phil. Mag. 4th Ser. V. 8. A. 1854. p. 114—123.
On the Law of Prime Numbers.
21 Hermite, C. & D. Math. Journ. V. 9. A. 1854. p. 172—217.
Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées.
22 Schlömilch, Schlömilch's Zeitschr. B. 1. A. 1855. S. 193—211.
Ueber die Bernouilli'sche Function und deren Gebrauch bei der Entwickelung halbconvergenter Reihen.
23 C. F. Lindmann, Gr. Arch. B. 29. A. 1857. S. 238—240.
De vero valore constantis, quae in logarithmo integrali occurrit.

TABLE D'AUTEURS.

ERRATA.

Page.	N°.	*au lieu de:*	*lisez:*
10	49	812	312
18	183	1840	1848
21	225	314	214
22	244	1848	1858

MÉMOIRE

SUR UNE

MÉTHODE D'APPROXIMATION

POUR LE

CALCUL DES RENTES VIAGÈRES.

PAR

R. LOBATTO.

§ 1. Tous ceux qui se sont occupés de calculs relatifs aux assurances sur la vie, savent que l'évaluation exacte du prix des rentes viagères, basée sur une table de mortalité adoptée à cet effet, implique des calculs assez prolixes.

Parmi les diverses méthodes de calcul proposées depuis longtemps, celle qui fait dériver la valeur relative à l'âge a de celle relative à l'âge $a + 1$, au moyen d'une formule assez simple due au géomètre anglais *Simpson* *, doit, à mon avis, mériter la préférence, surtout lorsqu'il s'agit de calculer une table complète de la valeur des rentes viagères pour tous les âges depuis la naissance jusqu'à l'extrémité de la vie.

La formule que nous venons de citer s'obtient de la manière suivante. Soient $v, v_1, v_2, \ldots v_n$ le nombre des vivants existants, d'après la table de mortalité, aux âges $a, a + 1, a + 2, \ldots a + n$. Désignons par A le prix ou la valeur actuelle d'une rente viagère égale à l'unité monétaire, constituée sur

* Voyez son ouvrage *Doctrine of Annuities and reversions*, 1742.

la tête d'un individu de l'âge a, et payable en son entier au bout de chaque année; par i le taux d'intérêt annuel du capital égal à l'unité, et posons pour simplifier $1 + i = r$. La valeur de A s'exprimera, d'après les principes connus, par la série

$$A = \frac{1}{\nu}\left\{\frac{\nu_1}{r} + \frac{\nu_2}{r^2} + \frac{\nu_3}{r^3} + \dots + \frac{\nu_{\alpha-1}}{r^{\alpha-1}}\right\} \dots\dots\dots\dots (1)$$

$a + \alpha$ étant l'âge où finit la table de mortalité, de manière qu'on ait $\nu_\alpha = 0$.

Soit A_1 le prix de la même rente pour un individu agé de $a + 1$ ans, on aura également

$$A_1 = \frac{1}{\nu_1}\left\{\frac{\nu_2}{r} + \frac{\nu_3}{r^2} + \dots + \frac{\nu_{\alpha-1}}{r^{\alpha-2}}\right\}.$$

Donc $$\nu r A = \nu_1 (A_1 + 1),$$

d'où l'on tire $$A = (A_1 + 1)\frac{\nu_1}{\nu}\cdot\frac{1}{r} \dots\dots\dots\dots (2)$$

formule propre à déduire la valeur A de celle A_1.

Si le montant de la rente annuelle s'élevait à la somme s, il n'y aurait qu'à changer A et A_1 en $\frac{A}{s}$ et $\frac{A_1}{s}$; et la formule (2) deviendrait dans ce cas

$$A = (A_1 + s)\frac{\nu_1}{\nu}\,\frac{1}{r} \dots\dots\dots\dots (3)$$

A et A_1 désignant alors les valeurs d'une rente viagère s relatives aux âges a et $a + 1$.

§ 2. La série (1) qui exprime la valeur de A est susceptible d'être présentée sous une autre forme, en y introduisant les décroissements du nombre des vivants d'après la table de mortalité, ou en d'autres termes, les nombres des décès annuels à chaque âge. En effet, désignons ceux ci par $\Delta\nu$, $\Delta\nu_1$, $\Delta\nu_2$ ... en sorte que l'on a $\nu_1 = \nu - \Delta\nu$, $\nu_2 = \nu_1 - \Delta\nu_1$, $\nu_3 = \nu_2 - \Delta\nu_2$ etc.

$$\nu_{\alpha-1} = \nu_{\alpha-2} - \Delta\nu_{\alpha-2}.\quad 0 = \nu_{\alpha-1} - \Delta\nu_{\alpha-1}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la form. (1), celle-ci deviendra

$$A = \frac{1}{\nu}\left\{\frac{\nu}{r} + \frac{\nu_1}{r^2} + \frac{\nu_2}{r^3} \dots\dots\dots + \frac{\nu_{\alpha-1}}{r^\alpha}\right\}$$
$$- \frac{1}{\nu}\left\{\frac{\Delta\nu}{r} + \frac{\Delta\nu_1}{r^2} + \frac{\Delta\nu_2}{r^3} \dots\dots + \frac{\Delta\nu_{\alpha-1}}{r^\alpha}\right\}$$

ou bien

$$A = \frac{1}{r}(A+1) - \frac{1}{\nu}\left\{\frac{\Delta\nu}{r} + \frac{\Delta\nu_1}{r^2} \ldots\ldots + \frac{\Delta\nu_{\alpha-1}}{r^\alpha}\right\},$$

d'où l'on déduit, en posant $\frac{1}{r-1} = \frac{1}{i} = p$,

$$A = p\left\{1 - \frac{r}{\nu}\left(\frac{\Delta\nu}{r} + \frac{\Delta\nu_1}{r^2} \ldots\ldots\ldots + \frac{\Delta\nu_{\alpha-1}}{r^\alpha}\right)\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

formule qu'on pourra écrire sous la forme simplifiée

$$A = p\left\{1 - \frac{r}{\nu}\,\mathrm{S}_1^\alpha\,\frac{\Delta\nu_{x-1}}{r^x}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

la somme S s'étendant depuis $x = 1$, jusqu'a $x = \alpha$.

En calculant la valeur de A à l'aide de cette derniere formule, on a l'avantage d'opérer sur des nombres plus petits que ceux qui entrent dans la formule (1).

§ 3. L'hypothèse la plus simple qui a dû se présenter d'abord pour obtenir une valeur approchée du prix des rentes viagères, consiste à supposer qu'à partir d'une certaine époque de la vie, le nombre des décès annuels reste constant jusqu'à extinction de la vie, ou, ce qui revient au même, que le nombre des vivants décroit en progression arithmétique.

Dans ce cas on a évidemment,

$$\Delta\nu = \Delta\nu_1 = \Delta\nu_2 \text{ etc.} \quad \nu = \alpha\Delta\nu;$$

$a + \alpha$ étant la limite de la vie pour un individu agé de a ans. L'hypothèse dont il s'agit change la formule (5) en celle ci

$$A = p\left\{1 - \frac{r}{\alpha}\,\mathrm{S}_1^\alpha\,\frac{1}{r^x}\right\}$$

où la quantité $\mathrm{S}_1^\alpha\,\frac{1}{r^x}$ désigne la valeur actuelle d'une annuité 1 payable pendant le terme de α années, et qu'on pourra remplacer au besoin par sa valeur connue $p\left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)$, ce qui donnera

$$A = \frac{p}{\alpha}\left\{\alpha - (p+1) + \frac{p}{r^{\alpha-1}}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Moivre fut le premier qui proposa cette hypothèse en fixant à 86 ans la limite de la vie, et la mortalité annuelle à 1, de sorte que le nombre a qui entre dans la formule précédente, devient égal à $86-a$. Soit par ex. l'age du rentier 36 ans, $r=1,04$, on aura $a=50$, $S\frac{1}{r^x}=21,48218$.

Donc

$$
\begin{aligned}
A &= 25\,\{1-0,0208\times 21,48218\} \\
&= 25\,(1-0,44683)=13,829.
\end{aligned}
$$

Suivant la table de mortalité de *Kersseboom*, qui se termine à l'âge de 96 ans, la valeur de A que nous venons de calculer répondrait à l'âge de $96-50=46$ ans. La valeur exacte de A basée sur cette table s'élève à 12,876, ce qui offre une différence d'environ une unité.

Si l'on calcule d'après la même hypothèse une table des valeurs de A pour les divers âges de la vie, on reconnaîtra qu'en fixant à 100 ans la limite de la vie, ces valeurs s'écarteront sensiblement de celles qu'on trouverait en appliquant la méthode rigoureuse à une des tables de mortalité, et qu'elles seront en général trop fortes d'une unité. Au reste, il était facile de prévoir le peu d'exactitude que doit comporter le procédé dont il s'agit, puisque l'hypothèse d'un décroissement uniforme changeant la courbe de mortalité en ligne droite, les ordonnées qui représentent les nombres des survivants aux divers âges, surpasseront en général celles de la courbe qui exprime plus exactement la loi de mortalité; donc la somme des termes de la série (1) sera nécessairement trop forte dans l'hypothèse de *Moivre*.

§ 4. *Simpson* suppléa par une idée heureuse au défaut d'exactitude que nous venons de signaler. Ayant remarqué que dans l'hypothèse de *Moivre*, la quantité a ordinairement désignée par *complément de vie*, est égal au double du nombre qui exprime la durée de la vie moyenne, il proposa, afin de se rapprocher davantage de la vraie mortalité, de remplacer dans la formule (6) le nombre a par le double de cette durée relative à l'âge donné et déduite de la table de mortalité. Pour calculer alors le prix de la rente qui se rapporte à l'âge de 46 ans, on prendra, en adoptant l'ordre de mortalité de *Kersseboom*, $a=43,48$; on obtiendra de cette manière, r étant égal à 1,04.

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{25}{43,48}\left\{43,48-26+\frac{25}{(1,04)^{42,48}}\right\} \\
&= \frac{25}{43,48}\,\{17,48+4,7246\}=12,767
\end{aligned}
$$

quantité qui se rapproche plus de la valeur exacte 12,876.

Si l'on avait fixé le taux d'intérêt à 5 p%., on trouverait

$$A = \frac{20}{13,48}\left\{43,48 - 21 + \frac{20}{(1,05)^{12,48}}\right\} = 11,4982$$

différant de 0,1125 de la valeur exacte de A = 11,6107.

Quoique la modification apportée par *Simpson* au procédé de *Moivre* doive nécessairement tendre à rapprocher les résultats de ceux donnés par la méthode rigoureuse, on remarquera cependant qu'en l'appliquant au calcul d'une table complète des valeurs des rentes viagères, l'accord entre les résultats obtenus par la méthode exacte et celle de *Simpson* est loin d'être aussi satisfaisant qu'on pourrait l'exiger dans la pratique des assurances sur la vie. C'est pourquoi nous avons cru faire une chose utile en exposant une nouvelle méthode d'approximation qui, ainsi qu'on va le voir, réunit à l'avantage d'un calcul peu laborieux celui de fournir des résultats s'écartant peu de ceux obtenus par un calcul rigoureux. Ce sera, ce nous semble, combler une lacune qui existe jusqu'ici dans la théorie des assurances sur la vie, et dont les géomètres qui ont traité la matière, ne semblent pas s'être occupés spécialement, au moins pour autant qu'il soit parvenu à notre connaissance *.

§ 5. Avant de procéder à l'exposition de notre méthode, nous allons entreprendre une recherche qui en forme la base, et qui a pour but de déterminer l'accroissement que la valeur précédemment désignée par A va subir, lorsque la rente, au lieu d'être acquittée en son entier au bout de l'année, doit l'être au bout d'intervalles plus petits, et seulement aux rentiers survivants à chaque époque de payement.

Pour cela, considérons le cas général où l'année se trouve partagée en n intervalles égaux, de sorte que le rentier touche au bout de chaque terme de payement la rente $\frac{1}{n}$. La table de mortalité ne donnant que les décès annuels, nous allons supposer que le décroissement pendant les divers intervalles adoptés s'opère d'une manière uniforme. Dans cette hypothèse le nombre

---

* Il est à remarquer que dans aucun des derniers ouvrages publiés sur cette matière, savoir celui de Mr. D. Jones, *On the value of annuities and reversionary payments* (dont Mr. R. Hattendorf a donné en 1859 une traduction allemande) et celui de Mr. le Dr. A. Zillmer, *Die mathematische Rechnungen bei Lebens- und Renten-Versicherungen*, 1861, il n'est fait la moindre mention de quelque procédé pour simplifier les calculs dont il s'agit.

de survivants qui touchent la rente aux n époques de payement, s'exprimera pour la première année par

$$v_1 + \left(\frac{n-1}{n}\right)\Delta v \ , \ \ v_1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)\Delta v \ \ldots \ v_1 + \frac{1}{n}\Delta v \ , \ \ v_1$$

pour la seconde année par

$$v_2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)\Delta v_1 \ , \ \ v_2 + \left(\frac{n-2}{n}\right)\Delta v_1 \ \ldots \ v_2 + \frac{1}{n}\Delta v_1 \ , \ \ v_2$$

et ainsi de suite.

Faisons $r = \varrho^n$, les valeurs actuelles d'une somme 1 payable au bout de chacun des n intervalles égaux, seront évidemment égales à

$$\frac{1}{\varrho} \, , \ \frac{1}{\varrho^2} \, , \ \frac{1}{\varrho^3} \ \ldots\ldots \ \frac{1}{\varrho^n} \ \text{ou} \ \frac{1}{r}.$$

Il en résulte que les sommes à payer aux survivants dans la première année, auront pour valeurs actuelles,

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \ \ldots\ldots + \frac{1}{\varrho^n}\right\} v_1 + \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{\varrho^{n-1}} + \frac{2}{\varrho^{n-2}} \ \ldots\ldots + \frac{n-1}{\varrho}\right\}\Delta v$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{r}\left(\frac{\varrho^n-1}{\varrho-1}\right) v_1 + \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1 + 2\varrho + 3\varrho^2 \ \ldots\ldots + (n-1)\varrho^{n-2}}{\varrho^{n-1}}\right\}\Delta v$$

Celles qui se rapportent à la seconde année auront pour valeur actuelle,

$$\frac{1}{n}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\varrho^n-1}{\varrho-1}\right) v_2 + \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1 + 2\varrho + 3\varrho^2 \ \ldots\ldots + (n-1)\varrho^{n-2}}{\varrho^{n-1}}\right\}\frac{\Delta v_1}{r},$$

et ainsi de suite.

Ajoutant toutes ces valeurs, et divisant la somme par le nombre des vivants v, on verra facilement que le prix de la rente aura pour expression

$$A' = \frac{1}{n}\left(\frac{\varrho^n-1}{\varrho-1}\right) A + \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1 + 2\varrho + 3\varrho^2 \ \ldots\ldots + (n-1)\varrho^{n-2}}{\varrho^{n-1}}\right\} \times$$

$$\frac{1}{v}\left\{\Delta v + \frac{\Delta v_1}{r} + \frac{\Delta v_2}{r^2} + \ldots\ldots\right\}.$$

Si l'on observe maintenant que la série

$$1 + 2\varrho + 3\varrho^2 \ \ldots\ldots + (n-1)\varrho^{n-2}$$

pourra être remplacée par

$$\frac{d\left(\frac{\varrho^n - 1}{\varrho - 1}\right)}{d\varrho} = \frac{(n-1)\varrho^n - n\varrho^{n-1} + 1}{(\varrho - 1)^2},$$

et que la série

$$\frac{1}{v}\left\{\Delta v + \frac{\Delta v_1}{r} + \frac{\Delta v_2}{r} + \ldots\ldots\right\}$$

a pour valeur $1 - \frac{A}{p} = 1 - (\varrho^n - 1)A$, en vertu de la formule (4), on obtiendra

$$A' = \frac{1}{n}\left(\frac{\varrho^n - 1}{\varrho - 1}\right)A + \frac{1}{n^2}\left(\frac{(n-1)\varrho^n - n\varrho^{n-1} + 1}{(\varrho - 1)^2\,\varrho^{n-1}}\right)(1 - (\varrho^n - 1)A),$$

ou bien, toutes réductions faites,

$$A' = \frac{1}{n^2}\frac{1}{\varrho^{n-1}}\left(\frac{\varrho^n - 1}{\varrho - 1}\right)^2 A + \frac{(n-1)\varrho^n - n\varrho^{n-1} + 1}{n^2(\varrho - 1)^2\,\varrho^{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

formule qui fournira la valeur de A' à l'aide de celle de A calculée par une des méthodes rigoureuses.

Il est aisé de s'assurer que le coéfficient qui multiplie A différera peu de l'unité. En effet, posons $\varrho = 1 + \delta$, la fraction δ sera alors assez petite pour qu'il soit permis de négliger dans le résultat les puissances supérieures à la seconde. On aura donc

$$\varrho^n - 1 = n\delta + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\delta^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{\varrho^n - 1}{n(\varrho - 1)} = 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)\delta + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3}\delta^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{\varrho^n - 1}{\varrho - 1}\right)^2 = 1 + (n-1)\delta + \left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3}\right)\delta^2 + \text{etc.}$$

$$= 1 + (n-1)\delta + \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(n - 2 + \frac{n+1}{6}\right)\delta^2 + \text{etc.}$$

$$\varrho^{n-1} = 1 + (n-1)\delta + \left(\frac{n-1}{2}\right)(n-2)\delta^2 + \text{etc.}$$

Par conséquent la différence entre la quantité $\frac{1}{n^2}\left(\frac{\varrho^n - 1}{\varrho - 1}\right)^2\frac{1}{\varrho^{n-1}}$ et l'unité s'élèvera à une très petite fraction.

Quant au second terme de la valeur de A′, on pourra la considérer comme une valeur approximative de l'augmention que le prix A de la rente 1 doit subir, en effectuant le payement en n parties égales au bout de chacun des n termes de l'année.

Supposons actuellement que la rente annuelle s'élève à n, et désignons toujours par A le prix d'une telle rente payable annuellement, la formule (7) deviendra alors

$$A' = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\varrho^n - 1}{\varrho - 1}\right)^2 \frac{1}{\varrho^{n-1}}\, A + \frac{(n-1)\varrho^n - n\varrho^{n-1} + 1}{n(\varrho - 1)^2 \varrho^{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Or, en examinant les diverses tables de mortalité publiées jusqu'ici, on remarquera qu'à partir de l'age de 15 ans, les décès annuels n'offrent en général que de légères différences pendant des périodes de peu d'étendue. On pourra donc sans crainte de trop s'écarter de la vérité, regarder comme uniformes les décroissements pendant des périodes quinquennales. Cela posé, on supposera que la rente 1 au lieu d'être acquittée annuellement, le soit au bout de chacune de ces périodes, en une seule fois, mais au montant quintuple. On établira alors le calcul rigoureux par la méthode de dérivation fournie par la formule (5), en prenant pour base une table de mortalité où les nombres des vivants ne procèdent que par périodes de cinq ans, et en réglant le taux d'interêt à r^5—1, attendu que les capitaux se sont accrus pendant chaque période dans le rapport de 1 à r^5 par l'accumulation des interêts composés. Les résultats que l'on obtiendra de cette manière seront rigoureusement applicables au cas où les payements de la rente 5 s'effectuent en son entier au bout de chaque période quinquennale, et cela seulement aux rentiers qui existeront à ces époques. Mais, à l'aide de la formule (8), on pourra alors rendre applicables ces résultats au cas d'un payement annuel au montant 1 ou par cinquièmes à effectuer aux rentiers survivants au bout de chaque année. Pour cela, il n'y aura qu'à faire $n = 5$ et $\varrho = r$; la valeur de A′ donnée par la formule (8) deviendra dans ces suppositions,

$$A' = \frac{1}{25}\left(\frac{r^5 - 1}{r - 1}\right)^2 \frac{1}{r^4}\, A + \frac{4r^5 - 5r^4 + 1}{5r^4(r-1)^2}$$

$$= \frac{p^2}{25}\left(\frac{r^5 - 1}{r^2}\right)^2 A + \frac{4p}{5} - \frac{p^2}{5}\left(1 - \frac{1}{r^4}\right)$$

En fixant le taux d'intérêt à 4 p$\frac{0}{0}$, on aura $r = 1{,}04$, $p = \frac{1}{r-1} = 25$, et l'on trouvera par un calcul facile,

$$A' = 1{,}003\,A + 1{,}8505 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

On obtiendra de la même manière

$$\text{pour } r = 1{,}035, \quad A' = 1{,}002\,A + 1{,}8665 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\text{pour } r = 1{,}03, \quad A' = 1{,}002\,A + 1{,}8860 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Si les valeurs précédentes sont mises sous la forme

$$A' = A + \delta,$$

il est évident que la correction δ ne sera pas une quantité constante, mais variera avec la valeur de A. Or, puisque le coëfficient de A dans la valeur générale de A' diffère peu de l'unité, et que la quantité A est toujours inférieure à $\frac{1}{r-1} = p$, la correction δ variera peu en passant d'une valeur de A à une autre. La table suivante qui se rapporte à trois divers taux d'interêt, et où l'on n'a évalué la correction qu'en centièmes de l'unité, pourra faciliter l'application de la formule (8).

Valeurs de A =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
									Valeurs de δ.											
$r = 1.03$	1.89	1.89	1.89	1.89	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.91	1.91	1.91	1.91	1.91	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92	1.93
$r = 1.035$	1.87	1.87	1.87	1.87	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.91
$r = 1.04$	1.85	1.86	1.86	1.86	1.87	1.87	1.87	1.87	1.88	1.88	1.88	1.89	1.89	1.89	1.90	1.90	1.90	1.90	1.91	1.91

Nous n'avons pas jugé nécessaire d'étendre la table précédente à d'autres valeurs de r, le taux d'intérêt adopté dans la pratique des rentes viagères ne sortant pas en général des limites 3 et 4 p$\frac{0}{0}$.

§ 6. Nous allons indiquer maintenant l'usage que l'on pourra faire de cette table pour parvenir à une évaluation approximative de la valeur des rentes viagères relatives aux divers âges de la vie.

Prenons d'abord pour base de calcul la table de mortalité de *Kersseboom*. Il faudra commencer par arranger celle-ci de manière à ne procéder que par intervalles de cinq années, on obtiendra alors les nombres suivants.

AGE.	NOMBRE DES VIVANS.	LOGARITHMES.	DIFFÉRENCES.
0	1400	3.14613	
5	964	2.98408	0.16205
10	895	2.95182	0.03226
15	856	2.93247	0.01935
20	817	2.91222	0.02025
25	772	2.88762	0.02460
30	711	2.85187	0.03575
35	655	2.81624	0.03563
40	605	2.78176	0.03448
45	560	2.74819	0.03357
50	507	2.70501	0.04318
55	446	2.64933	0.05568
60	382	2.58206	0.06727
65	315	2.49831	0.08375
70	245	2.38917	0.10914
75	175	2.24304	0.14613
80	100	2.00000	0.24304
85	45	1.65321	0.34679
90	10	1.00000	0.65321
95	1	0.00000	1.00000

où nous avons ajouté les logarithmes des nombres des vivants ainsi que leurs différences, afin de faciliter l'application de la formule (5) qui devient actuellement,

$$A = (A_1 + 5)\frac{v_5}{v} \times \frac{1}{(1,04)^5},$$

ou bien, en effectuant le calcul à l'aide des logarithmes,

$$\text{Log. } A = \text{Log. }(A_1 + 5) - \{\text{log. } v - \text{log. } v_5 + 0,08517\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (12)$$

Puisqu'on doit commencer le calcul par l'âge de 95 ans qui est le plus avancé de la table, la valeur de A relative à cet âge sera évidemment égale a zéro, l'extinction totale s'opérant déja avant l'âge de 100 ans. Donc il viendra pour la valeur relative a l'âge de 90 ans,

$$\text{Log. } A = 0,69897 - (1 + 0,08517) = 9,61380.$$

d'où

$$A = 0,4110.$$

En substituant cette valeur à la place de A_1, la form. (12) fournira celle relative à l'âge de 85 ans, et ainsi de suite. Voici maintenant le type du calcul complet pour tous les âges de la table précédente, tel qu'il peut être établi d'après la formule logarithmique exposée ci dessus. Nous avons cru utile de le reproduire en son entier, pourqu'on puisse comparer le travail exigé par notre méthode d'approximation à celui qu'il faudra exécuter, si l'on s'attache à l'une des méthodes rigoureuses.

AGES.			
	0.08517	Log.5 = 0.69897	
	1	1.08517	
90	1.08517	9.61380	0.4110
			5
	0.08517	0.73328	5.4110
	65321	73838	
85	0.73838	9.99490	0.9883
			5
	0.08517	0.77730	5.9883
	34679	43196	
80	0.43196	0.34534	2.2148
			5
	0.08517	0.85823	7.2148
	24304	32821	
75	0.32821	0.53002	3.3886
			5
	0.08517	0.92369	8.3886
	14613	23130	
70	0.23130	0.69239	4.9248
			5
	0.08517	0.99672	9.9248
	10914	19431	
65	0.19431	0.80241	6.3447
			5
	0.08517	1.05477	11.3447
	8375	16892	
60	0.16892	0.88585	7.6887
			5
	0.08517	1.10342	12.6887
	6727	15244	
55	0.15244	0.95098	8.9526
			5
	0.08517	1.14403	13.9326
	5568	14085	
50	0.14085	1.00318	10.0735
			5
	0.08517	1.17821	15.0735
	4318	12835	
45	0.12835	1.04986	11.2166

AGES.			
			11.2166
			5
	0.08517	1.20996	16.2166
	3357	11874	
40	0.11874	1.09122	12.3372
			5
	0.08517	1.23898	17.3372
	3448	11965	
35	0.11965	1.11933	13.1620
			5
	0.08517	1.25917	18.1620
	3563	12080	
30	0.12080	1.13837	13.7522
			5
	0.08517	1.27305	18.7522
	3575	12092	
25	0.12092	1.15213	14.1950
			5
	0.08517	1.28318	19.1950
	2460	10977	
20	0.10977	1.17341	14.9076
			5
	0.08517	1.29902	19.9076
	2025	10542	
15	0.10542	1.19360	15.6171
			5
	0.08517	1.31423	20.6171
	1935	10452	
10	0.10452	1.20971	16.2074
			5
	0.08517	1.32649	21.2074
	3226	11743	
5	0.11743	1.20906	16.1830
			5
	0.08517	1.32599	21.1830
	16205	24722	
0	0.24722	1.07877	11.9886

Les chiffres indiqués dans le calcul précédent en caractères majuscules expriment pour les divers âges auxquels ils se rapportent, les valeurs exactes d'une rente viagère au montant 5, payable en son entier au bout de chaque période quinquennale. Ces valeurs devront maintenant être corrigées en y ajoutant la quantité δ dont les valeurs ont été données ci dessus, pour en déduire celles relatives à une rente 1 payable en son entier aux survivants au bout de chaque année. En effectuant cette correction, il suffira en effet d'exprimer les valeurs de δ en centièmes de l'unité, les erreurs qui affectent ordinairement les tables de mortalité, et par suite les valeurs des rentes viagères rendant inutile de pousser plus loin l'exactitude de ce calcul.

§ 7. Nous allons réunir dans la table suivante les valeurs des rentes obtenues ci dessus, et celles corrigées de la quantité δ, en y mettant en regard les *valeurs exactes* des rentes viagères calculées d'après le même procédé de dérivation, ainsi que les différences ou les écarts entre ces dernières valeurs et celles fournies par notre méthode d'approximation, afin de mieux faire ressortir le degré d'exactitude dont elle est susceptible dans la pratique.

VALEURS DES RENTES VIAGÈRES D'APRÈS L'ORDRE DE MORTALITÉ DE KERSSEBOOM.

TAUX D'INTÉRÊT = 4 P $\frac{0}{0}$.

AGES.	VALEURS		VALEURS EXACTES.	DIFFÉRENCES.
	NON CORRIGÉES.	CORRIGÉES.		
0	11.9886	13.8786	13.5326	+ 0.3460
5	16.1830	18.0830	18.0638	+ 0.0192
10	16.2074	18.1074	18.1109	— 0.0035
15	15.6171	17.5171	17.5251	— 0.0080
20	14.9076	16.8076	16.8070	+ 0.0006
25	14 1950	16.0850	16.0850	0 0000
30	13.7522	15 6422	15.6401	+ 0.0021
35	13.1620	15.0520	15.0560	— 0 0040
40	12.3372	14.2272	14.2282	— 0.0010
45	11.2166	13.0966	13.1042	— 0.0076
50	10.0735	11.9535	11.9492	+ 0.0063
55	8.9326	10.8126	10.8041	+ 0.0085
60	7.6887	9.5587	9.5473	+ 0.0114
65	6.3447	8.2147	8.1803	+ 0 0344
70	4.9248	6.7948	6.7363	+ 0.0585
75	3.3886	5 2486	5.1569	+ 0.0917
80	2 2148	4.0748	3.8744	+ 0.2004
85	0.9883	2.8383	2.5293	+ 0.3090
90	0.4110	1.2610	1.6552	— 0.3941

En regardant la dernière colonne de la table précédente, on pourra s'assurer que les écarts des valeurs exactes sont en général assez faibles sur une étendue de vie depuis l'âge de 5 ans jusqu'à celui de 65 ans, et que l'accord entre les deux résultats pourra par conséquent être considéré comme satisfaisant sous le rapport de la pratique.

On devait s'attendre à une moindre concordance pour les âges plus avancés, attendu que l'hypothèse du décroissement uniforme, base de notre méthode, se vérifie moins exactement dans cette dernière période de la vie, et il doit en être de même à l'égard des premières années de la vie, à cause des irrégularités que présente alors la table de mortalité.

Quant aux valeurs pour les âges intermédiaires non compris dans la table, on pourra toujours les obtenir par voie d'interpolation ordinaire, et il est clair que les résultats offriront des écarts de même ordre de grandeur.

Nous ne nous sommes pas borné à faire l'essai de notre méthode sur la table de *Kersseboom,* mais nous l'avons en autre appliquée à deux autres ordres de mortalité, savoir celui de *Deparcieux,* et celui fourni par la table de *Brune,* basée sur l'expérience de la *Caisse des veuves,* établie à Berlin en 1776 *. Les résultats que nous avons obtenus par ces nouveaux calculs sont consignés dans les tableaux suivants.

VALEURS DES RENTES VIAGÈRES, D'APRÈS L'ORDRE DE MORTALITÉ DE DEPARCIEUX.
Taux d'intérêt à 3 p$\frac{0}{0}$.

AGES.	VALEURS NON CORRIGÉES.	VALEURS CORRIGÉES.	VALEURS EXACTES.	DIFFÉRENCES.	OBSERVATIONS.
0	14.3443	16.2543	15.7777	+ 0.4766	Les valeurs exactes données dans la quatrième colonne ont été prises dans l'ouvrage cité ci-dessous.
5	20.7100	22.6400	22.6118	+ 0.0282	
10	20.8640	22.7940	22.7842	+ 0.0098	
15	20.1330	22.0630	22.0613	+ 0.0017	
20	19.2637	21.1837	21.1860	— 0.0023	
25	18.4725	20.3925	20.3916	+ 0.0009	
30	17.6262	19.5462	19.5446	+ 0.0016	
35	16.5758	18.4958	18.4942	+ 0.0016	
40	15.2855	17.2055	17.2052	+ 0.0003	
45	13.7700	15.6800	15.6859	— 0.0059	
50	12.0708	13.9808	13.9823	— 0.0015	
55	10.2767	12.1867	12.1738	+ 0.0129	
60	8.5562	10.4562	10.4366	+ 0.0196	
65	6.8592	8.7592	8.7183	+ 0.0409	
70	5.0630	6.9630	6.8958	+ 0.0672	
75	3.3697	5.2597	5.1182	+ 0.1415	
80	2.1153	4.0053	3.7644	+ 0.2409	
85	1.0893	2.9793	2.5972	+ 0.3821	
90	0.1617	2.0517	1.2063	+ 0.8454	

* Cette table se trouve entre autres dans la traduction allemande de l'ouvrage de D. JONES, intitulé *On the value of annuities and reversionary payments,* déjà cité dans la note précédente.

VALEURS DES RENTES VIAGÈRES D'APRÈS L'ORDRE DE MORTALITÉ DE BRUNE.

Taux d'intérêt à 4 p%.

AGES.	VALEURS NON CORRIGÉES.	VALEURS CORRIGÉES.	VALEURS EXACTES.	DIFFÉRENCES.	OBSERVATIONS.
	SEXE MASCULIN.				
20	16.4470	18.3470	18.3574	— 0.0104	La table de M. Brune ne commence pour le sexe masculin qu'à l'âge de 21 ans, et pour le sexe féminin qu'à l'âge de 16 ans. Les valeurs exactes sont empruntées à l'ouvrage déjà cité.
25	15.6580	17.5580	17.5669	— 0.0089	
30	14.7231	16.6231	16.6315	— 0.0084	
35	13.6584	15.5484	15.5621	— 0.0137	
40	12.5090	14.3990	14.4068	— 0.0078	
45	11.2479	13.1379	13.1409	— 0.0030	
50	9.8744	11.7544	11.7582	— 0.0038	
55	8.3778	10.2578	10.2500	+ 0.0078	
60	6.8129	8.6829	8.6643	+ 0.0186	
65	5.3250	7.1950	7.1412	+ 0.0538	
70	3.8990	5.7590	5.6656	+ 0.0934	
75	2.7602	4.6202	4.4327	+ 0.1875	
80	1.6706	3.5306	3.3094	+ 0.2212	
85	0.5401	2.3901	1.9254	+ 0 4647	
	SEXE FÉMININ.				
15	15.6804	17.5804	17.5700	+ 0.0104	
20	15.6536	17.5536	17.5475	+ 0.0061	
25	15.3220	17.2220	17.2212	+ 0 0008	
30	14.7597	16.6597	16.6586	+ 0.0011	
35	14.0620	15.9520	15.9598	— 0.0078	
40	13.1825	15.0725	15 0800	— 0.0075	
45	12.0270	13.9170	13 9236	— 0.0066	
50	10.6285	12.5085	12.5211	— 0 0126	
55	9.0478	10.9278	10.9298	— 0.0020	
60	7.4448	9.3148	9.3085	+ 0.0063	
65	5.7785	7.6485	7.6150	+ 0.0335	
70	4.3059	6.1659	6.0858	+ 0.0801	
75	3.1282	4.9882	4.8345	+ 0.1537	
80	2.1030	3.9630	3.7484	+ 0.2146	
85	1.4328	3.2828	2.9026	+ 0.3802	
90	0.6995	2.5495	2.1275	+ 0.4220	

VALEURS DES RENTES VIAGÈRES D'APRÈS L'ORDRE DE MORTALITÉ DE BRUNE.

Taux d'intérêt à $3\frac{1}{2}$ p$\frac{0}{0}$.

AGES.	VALEURS. NON CORRIGÉES.	VALEURS. CORRIGÉES.	VALEURS EXACTES.	DIFFÉRENCES.	OBSERVATIONS.
		SEXE MASCULIN.			
20	17.9488	19.8488	19.8679	— 0.0191	
25	17.0072	18.9072	18.9252	— 0.0180	
30	15.9130	17.8130	17.8299	— 0.0169	
35	14.6855	16.5855	16.5981	— 0.0126	
40	13.3770	15.2670	15.2840	— 0.0170	
45	11.9615	13.8515	13.8637	— 0.0122	
50	10.4410	12.3310	12.3344	— 0.0034	
55	8.8088	10.6888	10.6905	— 0.0017	
60	7.1249	9.0049	8.9856	+ 0.0193	
65	5.5405	7.4205	7.3662	+ 0.0543	
70	4.0386	5.9186	5.8147	+ 0.1039	
75	2.8465	4.7165	4.5286	+ 0.1879	
80	1.7154	3.5854	3.3639	+ 0.2215	
85	0.5533	1.4233	1.9476	— 0.5243	
		SEXE FÉMININ.			
15	17.1891	19.0891	19.1319	— 0.0428	
20	17.1020	19.0020	19.0045	— 0.0025	
25	16.6731	18.5731	18.5813	— 0.0082	
30	15.9900	17.8900	17.8979	— 0.0079	
35	15.1590	17.0590	17.0659	— 0.0069	
40	14.1340	16.0240	16.0406	— 0.0166	
45	12.8206	14.7106	14.7269	— 0.0163	
50	11.2634	13.1534	13.1654	— 0.0120	
55	9.5324	11.4224	11.4239	— 0.0015	
60	7.7992	9.6792	9.6724	+ 0.0068	
65	6.0230	7.9030	7.8688	+ 0.0342	
70	4.4682	6.3382	6.2576	+ 0.0806	
75	3.2336	5.1036	4.9494	+ 0.1542	
80	2.1675	4.0375	3.8223	+ 0.2152	
85	1.4722	3.3422	2.9508	+ 0.3914	
90	0.7166	2.5866	2.1536	+ 0.4330	

§ 8. L'inspection des tableaux qui précèdent suffit pour s'assurer que notre méthode d'approximation conduit à des résultats assez satisfaisants pour pouvoir s'en servir dans la pratique, au moins jusqu'à l'âge de 60 ans. Quant aux valeurs des rentes relatives aux âges plus avancés, on aura remarqué qu'à partir de l'âge de 65 ans les résultats deviennent moins exacts, les écarts augmentant à mesure qu'on se rapproche de l'extrémité de la vie. Or, rien n'empêche d'obtenir par la même méthode, pour cette partie de la vie, des résultats qui s'écartent moins des valeurs exactes. A cet effet, il ne s'agira que de resserrer l'intervalle adopté de 5 ans, en le fixant à 3 ans, et de déterminer en conséquence les valeurs de la correction δ qui s'y rapporte.

La formule (8) deviendra dans ce cas,

$$A' = \frac{1}{9}\left(\frac{r^3-1}{r-1}\right)^2 \frac{1}{r^2} A + \frac{1}{3}\,\frac{2r^3-3r^2+1}{(r-1)^2 r^2}.$$

$$= \frac{1}{9}\left(r+1+\frac{1}{r}\right)^2 A + \frac{1}{3}\left\{\frac{2}{r}+\frac{1}{r^2}\right\}.$$

Fixant le taux d'intérêt à 4 p$\frac{0}{0}$, on trouvera facilement,

$$A' = 1{,}001\,A + 0{,}9492$$

d'où résulteront pour δ les valeurs suivantes,

$$A = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \qquad \delta = 0{,}95,$$

$$A = 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \qquad \delta = 0{,}96.$$

Appliquons ce second calcul à la table de *Kersseboom*, d'après laquelle on a les chiffres qui suivent.

AGE.	LOGARITHMES DES NOMBRES DES VIVANS.	DIFFÉRENCES.	AGE.	LOGARITHMES DES NOMBRES DES VIVANS.	DIFFÉRENCES.
60	2.58206		78	2.11394	0.12910
63	2.53529	0.04677	81	1.93952	0.17442
66	2.47857	0.05672	84	1.74036	0.19916
69	2.41330	0.06527	87	1.44716	0.29320
72	2.33646	0.07684	90	1.00000	0.44716
75	2.24304	0.09342	93	0.47712	0.52288

La formule de dérivation pour le calcul des rentes sera actuellement

$$A = (A_1 + 3)\,\frac{v_3}{v}\cdot\frac{1}{r^3},$$

où l'on mettra $A_1 = 0$ pour l'âge de 93 ans. Voici le calcul en son entier tel qu'il est basé sur cette formule.

AGES.			
	0.05110	Log. 3 = 0.47712	
	52288	57398	
90	0.57398	9.90314	0.8001
			3
	0.05110	0.57979	3.8001
	44716	49826	
87	0.49826	0.08153	1.2065
			3
	0.05110	0.62392	4.2065
	29320	34430	
84	0.34430	0.27962	1.9038
			3
	0.05110	0.69053	4.9038
	19916	25026	
81	0.25026	0.44027	2.7559
			3
	0.05110	0.76011	5.7559
	17442	22552	
78	0.22552	0.53459	3.4245

AGES.			3.4245
			3
	0.05110	0.80784	6.4245
	12910	18020	
75	0.18020	0.62764	4.2427
			3
	0.05110	0.85990	7.2427
	9342	14452	
72	0.14452	0.71538	5.1925
			3
	0.05110	0.91342	8.1925
	7684	12794	
69	0.12794	0.78548	6.1021
			3
	0.05110	0.95915	9.1021
	6527	11637	
66	0.11637	0.84278	6.9627
			3
	0.05110	0.99838	9.9627
	5672	10782	
63	0.10782	0.89056	7.7725

On déduira de ces résultats le tableau suivant.

AGES.	VALEURS NON CORRIGEÉS.	VALEURS CORRIGÉES.	VALEURS EXACTES.	DIFFÉRENCES.
63	7.7725	8.7325	8.7174	+ 0.0151
66	6.9627	7.9227	7.9031	+ 0.0196
69	6.1021	7.0621	7.0367	+ 0.0254
72	5.1925	6.1425	6.1189	+ 0.0236
75	4.2427	5.1927	5.1569	+ 0.0358
78	3.4245	4.3745	4.3174	+ 0.0571
81	2.7559	3.7059	3.6315	+ 0.0744
84	1.9038	2.8538	2.7766	+ 0.0772
87	1.2065	2.1565	2.0595	+ 0.0970
90	0.8001	1.7501	1.6552	+ 0.0949

d'où l'on voit que le plus grand écart reste encore inférieur à 0,1. On est donc en droit d'en conclure qu'il est possible d'obtenir des valeurs suffisamment exactes des rentes viagères pour tous les âges de la vie. A cet effet on établira d'abord le calcul pour les âges avancés de manière à procéder par des intervalles de trois ans, et l'on poursuivra ensuite le calcul pour des intervalles de cinq ans, en ayant égard aux corrections qui s'y rapportent respectivement. Seulement dans le passage d'un calcul à l'autre, il faudra avoir soin de réduire la dernière valeur donnée par le premier calcul à une valeur non corrigée qui puisse servir de base au second calcul, ainsi qu'il est aisé de comprendre d'après la nature de la méthode d'approximation exposée dans le présent mémoire.

§ 9. L'avantage qu'offre notre méthode sous le rapport de la pratique ne se borne pas au calcul des rentes viagères, mais il s'étend en même tems à l'évaluation approximative d'autres quantités qui se présentent dans la théorie mathématique des assurances sur la vie, et qui se trouvent directement liées aux prix des rentes viagères. Telles sont les valeurs des rentes différées et temporaires; celles d'un capital payable au décès de l'assuré, etc.

En effet, soit $\left(\overset{n}{\mathrm{A}}\right)$ la valeur d'une rente annuelle 1 différée de n ans, ou payable seulement après cet intervalle, aux rentiers survivants au bout de chaque année, on aura, comme l'on sait,

$$\left(\overset{n}{\mathrm{A}}\right) = \frac{1}{v}\left\{\frac{v_{n+1}}{r^{n+1}} + \frac{v_{n+2}}{r^{n+2}} + \text{ etc}\right\}.$$

Or, en désignant par A_n la valeur d'une rente ordinaire 1 relative à l'âge $a + n$, on parviendra facilement à la formule suivante,

$$\left(\overset{n}{\mathrm{A}}\right) = \frac{1}{r^n}\,\frac{v_n}{v}\,\mathrm{A}_n,$$

d'où il résulte qu'une erreur sur la valeur de A_n donnera lieu à une erreur d'autant plus petite sur celle de $\left(\overset{n}{\mathrm{A}}\right)$ que le facteur $\frac{1}{r^n}\,\frac{v_n}{v}$ toujours < 1, exprimera une quantité plus faible.

Il en sera de même de la valeur d'une rente temporaire, c'est à dire d'une rente touchée seulement pendant un nombre n d'années, pourvu que le rentier ne meure pas avant l'expiration de ce terme. La valeur d'une telle rente relative à l'âge a aura évidemment pour expression la différence entre la valeur d'une rente ordinaire et celle d'une rente différeé de n ans; elle sera donc égale à

$$A - \frac{1}{r^n}\frac{v_n}{v}A_n$$

et pourra se calculer également par la méthode d'approximation.

Considérons maintenant le cas d'une assurance sur la vie. Soit a l'âge de l'assuré, et 1 le capital exigible à son décès. Désignons par C la valeur ou le prix de cette assurance, on aura alors

$$C = \frac{1}{v}\left\{\frac{\Delta v}{r} + \frac{\Delta v_1}{r^2} + \frac{\Delta v_2}{r^3} + \text{etc.}\right\} = \frac{1}{v}\overset{\alpha}{\underset{1}{S}}\frac{\Delta v_{x-1}}{r^x}.$$

Si l'on compare cette valeur à celle de A donnée par la formule (5), savoir

$$A = p\left\{1 - \frac{r}{v}\overset{\alpha}{\underset{1}{S}}\frac{\Delta v_{x-1}}{r^x}\right\},$$

on en déduira immédiatement.

$$C = \frac{p-A}{pr} = \frac{p-A}{p+1} = 1 - \frac{A+1}{p+1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

Donc, en désignant par ΔC l'erreur que produira sur la valeur de C, une erreur ΔA sur la quantité A, on aura

$$\Delta C = -\frac{1}{p+1}\Delta A,$$

d'où l'on voit qu'en prenant pour base un taux d'intérêt égal à 4 p$\frac{0}{0}$, l'erreur sur C ne s'élèvera qu'au $\frac{1}{26}$ de celle sur A. On peut donc être certain que si l'on calcule les valeurs de C à l'aide de la formule (12), les résultats ne s'écarteront presque pas de ceux déduits des valeurs exactes de A.

§ 10. Il ne sera pas inutile de faire remarquer encore que l'hypothése qui a servi de base à notre méthode d'approximation, s'applique avec le même succès au calcul de la durée de la vie moyenne aux divers âges, ainsi que nous allons l'indiquer.

En exprimant toujours par v, v_n, v_{2n} etc. les nombres des vivants d'après la table de mortalité, aux âges a, $a+n$, $a+2n$ etc., nous pourrons, en adoptant l'hypothése d'une mortalité uniforme pendant un intervalle de n années, poser pour les nombres des vivants au bout des années consécutives

$$v\;,\quad v-\frac{1}{n}\Delta' v\;,\quad v-\frac{2}{n}\Delta' v\;,\quad v-\frac{3}{n}\Delta' v\;\ldots v-\frac{n-1}{n}\Delta' v$$

$$v_n\;,\quad v_n-\frac{1}{n}\Delta' v_n\;,\quad v_n-\frac{2}{n}\Delta' v_n\;,\quad v_n-\frac{3}{n}\Delta' v_n\;\ldots v_n-\frac{n-1}{n}\Delta' v_n$$

$$v_{2n},\quad v_{2n}-\frac{1}{n}\Delta' v_{2n},\quad v_{2n}-\frac{2}{n}\Delta' v_{2n},\quad v_{2n}-\frac{3}{n}\Delta' v_{2n}\ldots v_{2n}-\frac{n-1}{n}\Delta' v_{2n}$$

etc. etc.

$\Delta' v$ étant égal à $v-v_n$,

$\Delta' v_n$ v_n-v_{2n},

$\Delta' v_{2n}$ $v_{2n}-v_{3n}$.

etc.

Or, puisque la durée de la vie moyenne relative à l'âge a s'obtient en divisant la somme des survivants aux âges consécutifs à partir de l'âge a, par le nombre v, et diminuant le quotient d'une demi-année, il viendra en dénotant cette durée par (a), celle relative à l'âge $a+n$ par $(\overset{n}{a})$, et observant que

$$\Delta' v+\Delta' v_n+\Delta' v_{2n}+\text{etc.}=v,$$

$$(a)=n\frac{(v+v_n+v_{2n}+\ldots\text{ etc.})}{v}-\left(\frac{n-1}{2}\right)-\frac{1}{2},$$

ou bien

$$(a)=n\left\{\frac{v+v_n+v_{2n}+\ldots\text{ etc.}}{v}-\frac{1}{2}\right\}.$$

On aura de même pour l'âge $a+n$,

$$(\overset{n}{a})=n\left\{\frac{v_n+v_{2n}+v_{3n}+\ldots\text{ etc.}}{v_n}-\frac{1}{2}\right\}.$$

On déduit des deux formules précédentes,

$$v\left((a)+\frac{n}{2}\right)=n(v+v_n+v_{2n}+\text{ etc.})$$

$$v_n\left((\overset{n}{a})+\frac{n}{2}\right)=n(v_n+v_{2n}+v_{3n}+\text{ etc.})$$

$$v\left((a)+\frac{n}{2}\right)-v_n\left((\overset{n}{a})+\frac{n}{2}\right)=nv$$

Donc

$$(a)-\frac{n}{2}=\left((\overset{n}{a})+\frac{n}{2}\right)\frac{v_n}{v}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (13)$$

Faisant $n = 5$, on aura la formule

$$(a) = 2{,}5 + \left(\overset{5}{(a)} + 2{,}5\right)\frac{v_5}{v},$$

propre à dériver facilement la durée de la vie moyenne relative à un âge quelconque a, de celle relative à l'âge $a + 5$.

Appliquons ce procédé à la table de *Kersseboom*, en commençant par l'âge de 95 ans pour lequel on pourra prendre la vie moyenne égale à une demi-année. Les différences logarithmiques du nombres des vivants aux intervalles quinquennaux, étant déja obtenues au § 6, nous pourrons utiliser les mêmes chiffres dans le calcul actuel, ainsi qu'il suit:

AGE.			
95	0.5		
	2.5		
	3.0	Log.	0.47712
			1
	0.3		9.47712
	2.5		
90	2.8		
	2.5		
	5.3	—	0.72428
			65321
	1.1781		0.07107
	2.5		
85	3.6781		
	2.5		
	6.1781	—	0.79085
			34679
	2.7801		0.44106
	2.5		
80	5.2801		
	2.5		
	7.7801	—	0.89099
			24304
	4.4458		0.64795
	2.5		
75	6.9458		
	2.5		
	9.4458	—	0.97524
			14613
	6.7470		0.82911
	2.5		
70	9.2470		

AGE.			
70	9.2470		
	2.5		
	11.7470	—	1.06993
			10914
	9.1367		0.96079
	2.5		
65	11.6367		
	2.5		
	14.1367	—	1.15035
			8375
	11.6570		1.06660
	2.5		
60	14.1570		
	2.5		
	16.6570	—	1.22159
			6727
	14.2667		1.15432
	2.5		
55	16.7667		
	2.5		
	19.2667	—	1.28481
			5568
	16.9484		1.22913
	2.5		
50	19.4484		
	2.5		
	21.9484	—	1.34141
			4318
	19.8715		1.29823
	2.5		
45	22.3715		

AGE.			
45	22.3715		
	2.5		
	24.8715	Log.	1.39571
			3357
	23.0217		1.36214
	2.5		
40	25.5217		
	2.5		
	28.0217	—	1.44750
			3448
	25.8835		1.41302
	2.5		
35	28.3835		
	2.5		
	30.8835	—	1.48973
			3563
	28.4513		1.45410
	2.5		
30	30.9513		
	2.5		
	33.4513	—	1.52442
			3575
	30.8081		1.48867
	2.5		
25	33.3081		
	2.5		
	35.8081	—	1.55398
			2460
	33.8361		1.52938
	2.5		
20	36.3361		

AGE.			
20	36.3361		
	2.5		
	38.8361	—	1.58924
			2025
	37.0673		1.56899
	2.5		
15	39.5673		
	2.5		
	42.0673	—	1.62394
			1935
	40.2336		1.60459
	2.5		
10	42.7336		
	2.5		
	45.2336	—	1.65547
			3226
	41.9960		1.62321
	2.5		
5	44.4960		
	2.5		
	46.9960	—	1.67206
			16205
	32.3600		1.51001
	2.5		
0	34.8600		

Pour faire juger du degré d'exactitude de ce calcul, nous allons réunir les résultats dans le tableau suivant, en y joignant les valeurs exactes de la vie moyenne, exprimées seulement en centièmes de l'année, ainsi que cela se pratique ordinairement.

AGES.	VIE MOYENNE APPROCHÉE.	VIE MOYENNE EXACTE.	DIFFÉRENCES.
0	34.86	34.47	+ 0.39
5	44.50	44.45	+ 0.05
10	42.73	42.71	+ 0.02
15	39.57	39.55	+ 0.02
20	36.34	36.31	+ 0.03
25	33.31	33.28	+ 0.03
30	30.95	30.92	+ 0.03
35	28.38	28.36	+ 0.02
40	25.52	25.49	+ 0.03
45	22.37	22.34	+ 0.03
50	19.45	19.41	+ 0.04
55	16.77	16.72	+ 0.05
60	14.16	14.10	+ 0.06
65	11.64	11.56	+ 0.08
70	9.25	9.15	+ 0.10
75	6.95	6.81	+ 0.14
80	5.28	5.04	+ 0.24
85	3.68	3.34	+ 0.34
90	2.80	2.30	+ 0.50

On voit qu'entre les limites 5 et 60 ans, les écarts sont assez faibles pour pouvoir être negligés dans la pratique; ils n'excèdent pas un $\frac{1}{20}$ d'année. Cet écarts deviennent plus sensibles pour les âges avancés, ce qui tient à la même cause que celle dont il a été question au § 7 relativement aux valeurs approchées des rentes viagères.

Néanmoins si l'on désire obtenir des valeurs plus exactes pour les âges qui s'étendent au delà de 60 ans, on n'aura qu'à resserrer l'intervalle en prenant $n = 3$, la formule (13) donnera dans ce cas,

$$(a) = 1{,}5 + \left(\overset{3}{(a)} + 1{,}5\right)\frac{v_3}{v}.$$

L'application de cette formule à la même table de mortalité nous a fourni les résultats consignés dans le tableau comparatif qui suit.

AGES.	VIE MOYENNE APPROCHÉE	VIE MOYENNE EXACTE.	DIFFÉRENCES.
60	14.10	14.10	0.00
63	12.55	12.54	+ 0.01
66	11.09	11.07	+ 0.02
69	9.64	9.63	+ 0.01
72	8.22	8.20	+ 0.02
75	6.83	6.81	+ 0.02
78	5 68	5.65	+ 0.03
81	4.74	4.72	+ 0.02
84	3 63	3.65	— 0.02
87	2.73	2.79	— 0.06
90	1.95	2.30	— 0.35

d'où il ressort qu'à l'exception des âges qui se rapprochent de l'extrémité de la vie, les erreurs sont du même ordre que celles obtenues dans le tableau précédent pour ce qui concerne les âges inférieurs à 60 ans. Quant aux durées de la vie moyenne relative aux âges intermédiaires, on les calculera de même qu'il a été observé à l'égard des rentes viagères (§ 7).

§ 11. Les tables de mortalité renferment ordinairement une colonne indiquant la vie moyenne aux divers âges. Ces nombres n'ont servi jusqu'ici qu'à comparer entre eux les divers pays ou des classes d'individus sous le rapport de la mortalité. Personne cependant ne parait avoir remarqué encore qu'une table contenant seulement les chiffres de la vie moyenne est également propre à servir de base aux calculs qui se rattachent aux diverses assurances sur la vie. En effet, en vertu de la formule (15) les durées de la vie moyenne aux âges a et $a+1$ sont liées entre elles par l'équation

$$(a) - \frac{1}{2} = \left(\overset{1}{(a)} + \frac{1}{2}\right)\frac{v_1}{v}.$$

De même il existe entre les valeurs des rentes viagères aux âges a et $a+1$, la relation

$$A = (A_1 + 1)\frac{v_1}{v}\cdot\frac{1}{r}$$

d'où l'on déduit immédiatement la formule

$$\frac{A}{A_1 + 1} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{(a) - \frac{1}{2}}{(\overset{1}{a}) + \frac{1}{2}} \right\}$$

pouvant servir à dériver le prix relatif à l'âge a de celui relatif à l'âge $a + 1$, à l'aide des durées de la vie moyenne qui se rapportent à ces deux âges.

En commençant par l'âge le plus avancé de la table, pour lequel on a $A_1 = 0$, $(\overset{1}{a}) = \frac{1}{2}$, on pourra calculer la valeur de A et continuer de la sorte pour les âges inférieurs. Rien n'empêche d'y appliquer en même tems la méthode d'approximation, en procédant par intervalles de trois et de cinq ans, et en se servant à cet effet de la formule

$$\frac{A}{A_n + n} = \frac{1}{r_n} \left\{ \frac{(a) - \frac{n}{2}}{(\overset{n}{a}) - \frac{n}{2}} \right\},$$

où l'on fera successivement $n = 3$ et $n = 5$ *.

§ 12. Il ne sera pas inutile d'examiner en outre jusqu'à quel point la méthode d'approximation précédemment exposée serait susceptible d'être appliquée avec succès à l'évaluation des rentes viagères composées, c'est-à-dire des rentes constituées sur la vie jointe de deux individus.

On ne pourra pas s'attendre alors à un égal degré d'approximation que dans le cas des rentes simples, traité ci dessus. En effet, en formant une table de mortalité basée sur un nombre N de couples d'individus existants aux âges donnés, et désignant par N_1, N_2 . . . les nombres des couples survivants au bout de 1 . 2 . . . années, il est évident que l'hypothèse d'un décroissement uniforme dans ces nombres pendant chaque intervalle quinquennal, se rapprochera moins de la verité, que lorsqu'il s'agit de l'extinction successive d'un nombre N d'individus isolés.

Nous allons communiquer encore dans les tableaux suivants, les résultats comparatifs que nous avons obtenus par l'application de notre méthode aux rentes relatives aux vies jointes de deux personnes A et B de même ou de différents âges, et en prenant pour bases de calcul deux tables de mortalité différentes, savoir celle de *Kersseboom*, et celles de *Brune* avec distinction de sexe, A désignant dans ce dernier cas la personne du sexe masculin et B celle du sexe féminin.

* Il n'y a donc pas lieu, contrairement à l'opinion émise par M. le Dr. PH. FISCHER, à regarder comme inutiles les chiffres de la vie moyenne. Voyez son intéressant ouvrage publié en 1860 sous le titre *Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens*, pag. 19.

ORDRE DE MORTALITÉ D'APRÈS KERSSEBOOM ; VALEURS DES RENTES VIAGÈRES COMPOSÉES.

Taux d'intérêt = 4 p$\frac{0}{0}$.

ÂGE DE		VALEURS		VALEURS EXACTES.	DIFFÉRENCES.
A	B	NON CORRIGÉES.	CORRIGÉES.		
5	5	12.8135	14.7035	14.9503	— 0.2468
10	10	13.0867	14.9767	14.9683	+ 0.0084
15	15	12.4060	14.2960	14.2969	— 0.0009
20	20	11.5692	13.4592	13.4431	+ 0.0161
25	25	10.7640	12.6440	12.6194	+ 0.0246
30	30	10.4395	12.3195	12.2908	+ 0.0287
35	35	9.9662	11.8462	11.8283	+ 0.0179
40	40	9.2124	11.0924	11.0692	+ 0.0232
45	45	8.0822	9.9522	9.9321	+ 0.0201
50	50	6.9967	8.8667	8.8215	+ 0.0452
55	55	5.9996	7.8696	7.8166	+ 0.0530
60	60	4.9501	6.8201	6.7408	+ 0.0793
65	65	3.8569	5.7169	5.6011	+ 0.1158
70	70	2.7570	4.6170	4.4498	+ 0.1672
75	75	1.5744	3.4344	3.1730	+ 0.2614
80	80	0.8662	2.7162	2.2595	+ 0.4567
85	85	0.2046	2.0546	1.3360	+ 0.7186
90	90	0.0411	1.8911	0.8247	+ 1.0664
15	10	12.7341	14.6241	14.6208	+ 0.0033
20	15	11.9724	13.8624	13.8548	+ 0.0076
25	20	11.1511	13.0311	13.0152	+ 0.0159
30	25	10.5893	12.4693	12.4423	+ 0.0270
35	30	10.1850	12.0650	12.0414	+ 0.0236
40	35	9.5622	11.4422	11.4221	+ 0.0201
45	40	8.6074	10.4874	10.4614	+ 0.0260
50	45	7.4966	9.3666	9.3346	+ 0.0320
55	50	6.4525	8.3225	8.2737	+ 0.0488
60	55	5.4194	7.2894	7.2232	+ 0.0662
65	60	4.3356	6.1956	6.1030	+ 0.0926
70	65	3.2245	5.0845	4.9433	+ 0.1412
75	70	2.0615	3.9215	3.7089	+ 0.2126
80	75	1.1452	2.9952	2.6394	+ 0.3558
85	80	0.4185	2.2685	1.6894	+ 0.5791
90	85	0.0913	1.9413	1.0258	+ 0.9155

ÂGE DE		VALEURS		VALEURS EXACTES.	DIFFÉRENCES.
A	B	NON CORRIGÉES.	CORRIGÉES.		
20	10	12.2744	14.1644	14.1524	+ 0.0120
25	15	11.5244	13.4144	13.3978	+ 0.0166
30	20	10.9512	12.8312	12.8138	+ 0.0174
35	25	10.3057	12.1857	12.1647	+ 0.0210
40	30	9.7394	11.6194	11.5937	+ 0.0257
45	35	8.8964	10.7764	10.7525	+ 0.0239
50	40	7.9432	9.8132	9.7845	+ 0.0287
55	45	6.8688	8.7388	8.7022	+ 0.0366
60	50	5.7769	7.6469	7.5847	+ 0.0622
65	55	4.6891	6.5591	6.4697	+ 0.0894
70	60	3.5637	5.4237	5.3063	+ 0.1174
75	65	2.3612	4.2212	4.0355	+ 0.1857
80	70	1.4639	3.3139	3.0055	+ 0.3084
85	75	0.5412	2.3912	1.9086	+ 0.4826
90	80	0.1849	2.0349	1.2340	+ 0.8009
20	5	12.1160	14.0060	13.9717	+ 0.0343
25	10	11.8030	13.6930	13.6713	+ 0.0217
30	15	11.3024	13.1824	13.1735	+ 0.0089
35	20	10.6393	12.5193	12.5078	+ 0.0115
40	25	9.8306	11.7106	11.6872	+ 0.0234
45	30	9.0302	10.9102	10.8810	+ 0.0292
50	35	8.1726	10.0426	10.0168	+ 0.0258
55	40	7.2373	9.1073	9.0752	+ 0.0321
60	45	6.1069	7.9769	7.9278	+ 0.0491
65	50	4.9523	6.8223	6.7377	+ 0.0846
70	55	3.8064	5.6664	5.5625	+ 0.1039
75	60	2.5697	4.4297	4.2686	+ 0.1611
80	65	1.6348	3.4948	3.2044	+ 0.2904
85	70	0.6829	2.5329	2.1058	+ 0.4271
90	75	0.2348	2.0849	1.3559	+ 0.7289

ÂGE DE		VALEURS.		VALEURS EXACTES.	DIFFÉRENCES.
A	B	NON CORRIGÉES.	CORRIGÉES.		
25	5	11.6368	13.5268	13.4853	+ 0.0415
30	10	11.5582	13.4482	13.4274	+ 0.0208
35	15	10.9640	12.8440	12.8410	+ 0.0030
40	20	10.[illegible]310	12.0110	11.9972	+ 0.0138
45	25	9.0926	10.9726	10.9459	+ 0.0267
50	30	8.2674	10.1374	10.1063	+ 0.0311
55	35	7.4122	9.2822	9.2527	+ 0.0[illegible]95
60	40	6.3993	8.2693	8.2243	+ 0.0450
65	45	5.2005	7.0705	6.9987	+ 0.0718
70	50	3.9855	5.8455	5.7460	+ 0.0995
75	55	2.7171	4.5771	4.4289	+ 0.1482
80	60	1.7543	3.6143	3.3466	+ 0.2677
85	65	0.7520	2.6020	2.2019	+ 0.4001
90	70	0.2935	2.1435	1.4556	+ 0.6879
30	5	11.3880	13.2680	13.2315	+ 0.0365
35	10	11.1995	13.0795	13.0712	+ 0.0083
40	15	10.4241	12.3041	12.2983	+ 0.0058
45	20	9.3560	10.2360	11.2184	+ 0.0176
50	25	8.3058	10.1758	10.1163	+ 0.0295
55	30	7.4733	9.3433	9.3076	+ 0.0357
60	35	6.5232	8.3932	8.3504	+ 0.0428
65	40	5.4197	7.2897	7.2220	+ 0.0677
70	45	4.1591	6.0191	5.9330	+ 0.0861
75	50	2.8250	4.6850	4.5420	+ 0.1430
80	55	1.8377	3.6977	3.4427	+ 0.2550
85	60	0.8012	2.6512	2.2738	+ 0.3784
90	65	0.3196	2.1696	1.5000	+ 0.6696
35	5	11.0184	12.8984	12.8682	+ 0.0302
40	10	10.6327	12.5127	12.5026	+ 0.0101
45	15	9.6126	10.4926	11.4834	+ 0.0092
50	20	8.5344	10.4144	10.3848	+ 0.0296
55	25	7.4917	9.3617	9.3286	+ 0.0331
60	30	6.5549	8.4249	8.3768	+ 0.0481
65	35	5.4981	7.3681	7.3030	+ 0.0651
70	40	4.3111	6.1711	6.0896	+ 0.0815
75	45	2.9334	4.7934	4.6639	+ 0.1295
80	50	1.8985	3.7585	3.5084	+ 0.2501
85	55	0.8352	2.6852	2.3202	+ 0.3650
90	60	0.3389	2.1889	1.5356	+ 0.6533

ÂGE DE		VALEURS		VALEURS EXACTES.	DIFFÉRENCES.
A	B	NON CORRIGÉES.	CORRIGÉES.		
40	5	10.4470	12.3270	12.2947	+ 0.0323
45	10	9.7906	11.6706	11.6576	+ 0.0130
50	15	8.7566	10.6366	10.6160	+ 0.0206
55	20	7.6893	9.5593	9.5363	+ 0.0230
60	25	6.5592	8.4292	8.3832	+ 0.0460
65	30	5.5080	7.3780	7.3075	+ 0.0705
70	35	4.3526	6.2126	6.1336	+ 0.0790
75	40	3.0266	4.8866	4.7621	+ 0.1245
80	45	1.9622	3.8222	3.5856	+ 0.2366
85	50	0.8599	2.7099	2.3508	+ 0.3591
90	55	0.3520	2.2020	1.5571	+ 0.6449
45	5	9.6080	11.4880	11.4519	+ 0.0361
50	10	8.9069	10.7869	10.7612	+ 0.0257
55	15	7.8799	9.7499	9.7355	+ 0.0144
60	20	6.7277	8.5977	8.5618	+ 0.0359
65	25	5.5050	7.3750	7.3065	+ 0.0685
70	30	4.3502	6.2102	6.1250	+ 0.0852
75	35	3.0434	4.9034	4.7807	+ 0.1227
80	40	2.0152	3.8752	3.6439	+ 0.2313
85	45	0.8866	2.7366	2.3916	+ 0.3450
90	50	0.3615	2.2115	1.5707	+ 0.6408

ORDRE DE MORTALITÉ D'APRÈS BRUNE. VALEURS DES RENTES VIAGÈRES COMPOSÉES.

Taux d'intérêt = $3\frac{1}{2}$ p $\frac{0}{0}$.

ÂGE DE		VALEURS		VALEURS EXACTES.	DIFFÉRENCES.
A	B	NON CORRIGÉES.	CORRIGÉES.		
20	20	14.2326	16.1226	16.1215	+ 0.0011
25	25	13.6207	15.5106	15.5159	— 0.0053
30	30	12.7530	14.6430	14.6471	+ 0.0041
35	35	11.7468	13.6368	13.6356	+ 0.0012
40	40	10.6222	12.5122	12.5051	+ 0.0071
45	45	9.2982	12.1782	11.1758	+ 0.0024
50	50	7.8202	9.7002	9.6845	+ 0.0157
55	55	6.2357	8.1157	8.0776	+ 0.0381
60	60	4.7034	6.5834	6.5061	+ 0.0773
65	65	3.2804	5.1504	5.0205	+ 0.1299
70	70	2.0832	3.9532	3.7178	+ 0.2354
75	75	1.2798	3.1498	2.7489	+ 0.4009
80	80	0.6351	2.5051	2.0082	+ 0.4969
85	85	0.1692	2.0392	1.1768	+ 0.8624

ÂGE DE		VALEURS		VALEURS EXACTES.	DIFFÉRENCES.
A	B	NON CORRIGÉES.	CORRIGÉES.		
20	15	14.0945	15 9845	15.9793	+ 0.0052
25	20	13 7090	13.5990	15.5991	— 0.0001
30	25	12.9876	14.8776	14.8820	— 0.0044
35	30	12.0303	13.9203	13.9202	+ 0.0001
40	35	10.9805	12.8705	12.8635	+ 0.0070
45	40	9.7967	11.6867	11.6746	+ 0.0121
50	45	8.4256	10.3056	10.2941	+ 0.0115
55	50	6.9016	8.7816	8.7542	+ 0.0274
60	55	5.3201	7.2001	7.1410	+ 0.0591
65	60	3.8980	5.7680	5.6655	+ 0.1025
70	65	2.5673	4.4373	4.2573	+ 0.1800
75	70	1.6020	3.4720	3.1424	+ 0.3296
80	75	0.8640	2.7340	2.2969	+ 0.4371
85	80	0.2201	2.0901	1.3550	+ 0.7351
25	15	13.5462	15.4362	15.4315	+ 0.0047
30	20	13.0330	14.9230	14.9220	+ 0.0010
35	25	12.2036	14.0936	14.0939	+ 0.0003
40	30	11.1874	13.0774	13.0716	+ 0.0058
45	35	10.0580	11.9480	11.9361	+ 0.0119
50	40	8.7988	10.6788	10.6676	+ 0.0112
55	45	7.3535	9.2335	9.2100	+ 0.0235
60	50	5.8105	7.6905	7.6421	+ 0.0484
65	55	4.3383	6.2083	6.1241	+ 0.0842
70	60	3.0012	4 8712	4.7189	+ 0.1523
75	65	1.9389	3.8089	3.5345	+ 0.2744
80	70	1.0545	2.9245	2.5606	+ 0.3639
85	75	0.2965	2.1665	1.4907	+ 0.6758
30	15	12.8527	14.7427	14.7367	+ 0.0060
35	20	12.2131	14.1031	14.0976	+ 0.0055
40	25	11.3079	13.1979	13.1920	+ 0.0059
45	30	10.1977	12.0877	12.0768	+ 0.0109
50	35	8.9738	10.8538	10.8431	+ 0.0107
55	40	7.6130	9.4930	9.4705	+ 0.0225
60	45	6.1246	8.0046	7.9607	+ 0.0439
65	50	4.6776	6.5576	6.4742	+ 0.0834
70	55	3.2899	5.1599	5.0258	+ 0.1341
75	60	2.2263	4.0963	3.8499	+ 0.2464
80	65	1 2501	3.1201	2.8115	+ 0.3086
85	70	0.3566	2.2206	1.6171	+ 0.6035

ÂGE DE		VALEURS		VALEURS EXACTES.	DIFFÉRENCES.
A	B	NON CORRIGÉES.	CORRIGÉES.		
35	15	12.0246	13.9146	13.9050	+ 0.0096
40	20	11.2903	13.1803	13.1692	+ 0.0111
45	25	10.2755	12.1655	12.1549	+ 0.0106
50	30	9.0600	10.9400	10.9304	+ 0.0096
55	35	7.7193	9.5993	9.5771	+ 0.0222
60	40	6.2921	8.1721	8.1288	+ 0.0433
65	45	4.8822	6.7622	6.6833	+ 0.0789
70	50	3.5069	5.3769	5.2538	+ 0.1231
75	55	2.4020	4.2720	4.0437	+ 0.2283
80	60	1.4064	3.2764	2.9962	+ 0.2802
85	65	0.4180	2.2880	1.7295	+ 0.5585
40	15	11.1036	12.9936	12.9780	+ 0.0156
45	20	10.2421	12.1321	12.1160	+ 0.0161
50	25	9.1080	10.9880	10.9782	+ 0.0098
55	30	7.7679	9.6479	9.6264	+ 0.0215
60	35	6.3496	8.2296	8.1864	+ 0.0432
65	40	4.9833	6.8633	6.7848	+ 0.0785
70	45	3.6304	5.5004	5.3818	+ 0.1186
75	50	2.5336	4.4036	4.1865	+ 0.2171
80	55	1.4933	3.3633	3.1011	+ 0.2622
85	60	0.4650	2.3350	1.8041	+ 0.5309
45	15	10.0660	11.9560	11.9350	+ 0.0210
50	20	9.0680	10.9480	10.9324	+ 0.0156
55	25	7.7969	9.6769	9.6548	+ 0.0221
60	30	6.3755	8.2555	8.2121	+ 0.0434
65	35	5.0102	6.8902	6.8122	+ 0.0780
70	40	3.6865	5.5565	5.4387	+ 0.1178
75	45	2.6038	4.4738	4.2613	+ 0.2125
80	50	1.5609	3.4309	3.1801	+ 0.2508
85	55	0.4894	2.3594	1.8451	+ 0.5143

ÂGE DE A	ÂGE DE B	VALEURS NON CORRIGÉES.	VALEURS CORRIGÉES.	VALEURS EXACTES.	DIFFÉRENCES.
50	15	8.9076	10.7876	10.7690	+ 0.0186
55	20	7.7558	9.6358	9.6090	+ 0.0268
60	25	6.3912	8.2712	8.2289	+ 0.0423
65	30	5.0220	6.9020	6.8245	+ 0.0775
70	35	3.6965	5.5665	5.4487	+ 0.1178
75	40	2.6325	4.5025	4.2908	+ 0.2117
80	45	1.5933	3.4633	3.2173	+ 0.2460
85	50	0.5093	2.3793	1.8763	+ 0 5030
55	15	7.6201	9.5001	9.4690	+ 0.0311
60	20	6 3551	8.2351	8.1876	+ 0.0475
65	25	5.0323	6.9123	6 8351	+ 0.0772
70	30	3.7018	5.5718	5.4548	+ 0.1170
75	35	2.6346	4.5046	4.2929	+ 0.2117
80	40	1.6056	3.4756	3.2300	+ 0.2456
85	45	0.5180	2.3880	1.8893	+ 0.4987

L'inspection des divers tableaux qui précédent montre que jusqu'à l'âge de 60 ans, relatif au plus âgé des deux conjoints, les différences sont encore de l'ordre de celles que l'on pourrait tolérer dans la pratique sans crainte de s'écarter trop des résultats exacts Quant aux âges plus avancés, il est presque inutile d'ajouter, d'après ce qu'on a déjà vu à l'égard des rentes ordinaires (§ 8), qu'en resserrant l'intervalle jusqu'à *trois* ans, on est certain d'obtenir pour cette partie de la vie, des résultats beaucoup plus rapprochés de la vérité.

Novembre 1861.

BIJDRAGE

TOT DE

TOEPASSING VAN HET BEGINSEL VAN D'ALEMBERT,

OVEREENKOMSTIG DE

REKENWIJZE VAN LAGRANGE.

DOOR

G. J. VERDAM.

De belangrijke leerstelling der Dynamica, bekend onder de benaming van het *grondbeginsel van* D'ALEMBERT of het *algemeen beginsel van* D'ALEMBERT, in verband gebragt met en uitgedrukt door het *beginsel der virtuele snelheden,* geeft eene betrekking, uit welke, naar een onveranderlijken regel, kunnen afgeleid worden de noodige vergelijkingen, ter ontbinding van elk voorstel aangaande de beweging, en de omstandigheden der beweging hetzij van een enkel stoffelijk punt, hetzij van eene groep van stoffelijke punten, die op eenige wijze verbonden zijn of gezamenlijk eenig geheel, — derhalve ook eene massa van zamenhangende stofdeelen, een ligchaam, of vereenigde ligchamen, — uitmaken. En zulks voor elk geval, in elke vooronderstelling, zoowel bij het vrijelijk kunnen bewogen worden van dat punt of van deze groep vereenigde punten, als indien de beweging niet geheel vrij is, maar dat verandering van plaats slechts op bepaalde wijze, slechts voorwaardelijk kan geschieden. Klaarblijkelijk moeten daartoe gegeven zijn *én* deze voorwaarden *én* de krachten, die op de punten werken en de beweging veroorzaken of ook wijzigen, terwijl, in het geval eener groep van vereenigde punten, de bepaalde wijze van onveranderlijk of veranderlijk verbonden zijn tot de voorwaarden behoort.

Lagrange leerde ons het meer uitgestrekt gebruik van het *beginsel der virtuele snelheden*. Ook het toepassen der leerstelling van d'Alembert door middel van dit beginsel is men aan hem verschuldigd. Hij gaf een eenvoudig voorschrift, een onveranderlijken regel, of liever eene wijze van doen of te werk gaan, eene methode, bestaande in eene eenvormige rekenwijze om, uit eene algemeene vergelijking of formule, op het beginsel der virtuele snelheden gegrond, en van het wezen van dit beginsel de analytische uitdrukking zijnde, alles af te leiden wat doel van eenig onderzoek of van eenige beschouwing in de *Statica* kan zijn. Maar dat voorschrift kan dan ook onveranderd gevolgd worden bij het zamennemen of verbinden van dit beginsel met dat van d'Alembert, ten einde dit laatste toe te passen ter ontbinding van eenig voorstel der *Dynamica*. De rekenwijze voert alsdan niet alleenlijk regtstreeks tot de differentiaal-vergelijkingen der beweging, maar zij doet bovendien bekend worden alle omstandigheden, die van de werking der krachten en van de beweging, zoo als deze plaats heeft, een gevolg zijn. Derhalve leert zij de bijzonderheden, die men zou kunnen verlangen te weten, of die men in eenig geval zou moeten nagaan, ten aanzien van drukking, spanning, wederstand, tegenwerking, als anderzins, uitgeoefend, veroorzaakt of teweeggebragt door de werkende krachten, door de traagheid der stof, door belemmeringen of beletsels, door voorwaardelijk verband, door gedwongene verplaatsing, enz. En dan geeft zij ook het juiste oordeel over krachten, welke in de plaats van die wederstanden en voorwaarden zouden kunnen gedacht worden, ten einde, zoo zij met de gegevene krachten zamenwerkten op de groep van punten, deze te kunnen beschouwen als eene groep van geheel vrije punten zonder eenig verband. De eenvoudige en eenvormige wijze, waarop dit alles in eene zelfde berekening of ontwikkeling kan bepaald worden, werd door Lagrange zelven aangemerkt als bij uitnemendheid aan zijne methode eigen te zijn, gelijk een bijzonder voordeel, verbonden aan haar gebruik.

De weg, dien men volgt bij het te werk gaan naar dit voorschrift, is zeker, doet niet falen. Alhoewel gemakkelijk en niet lang, is hij evenwel niet altijd de kortste. Men kan dan ook, bij het toepassen van het beginsel van d'Alembert, wel afwijken van den regel van Lagrange, wel nalaten om zijne rekenwijze in eenig opzigt te volgen, waar zij minder gepast of minder kort mogt zijn of mogt schijnen. Maar het afwijken heeft dikwijls geen voldoenden grond; het gedeeltelijk volgen kan doen twijfelen omtrent het algemeen zijn van de methode; het kan de meening doen ontstaan, dat hetgeen men zoekt, naar het loutere voorschrift niet regtstreeks of niet in allen deele zou kunnen gevonden worden.

In de werken van voorname wiskundigen, in geschriften, bestemd om als leiddraad voor de ordelijke beoefening der Dynamica te verstrekken, trof mij meermalen eene onregelmatigheid, onbestendigheid of onvolledigheid in dat opzigt of in dien zin. Zelfs bij de behandeling van eenvoudige voorstellen wordt de rekenwijze van Lagrange niet altijd vollediglijk toegepast, en van haar gebruik, ter oplossing van minder eenvoudige vraagstukken, wordt niet gewaagd, alsof zij daartoe niet zou kunnen althans niet zou moeten gevolgd worden. Het *niet moeten* kon grond hebben in het somtijds minder korte. Het *niet kunnen* mogt niet worden vooronderstelld, of zou slechts schijn wezen. Het *niet gewagen* kon te eerder bevreemden, omdat het nuttige en leerzame, dat het volgen der rekenwijze van Lagrange aanbiedt, niet in twijfel getrokken zal worden.

De opmerking van dit een en ander gaf mij eene stof ter ontwikkeling, namelijk het *overeenkomstig de methode van* Lagrange toepassen van het beginsel van d'Alembert, ter ontbinding van de twee in de Dynamica zeer gewigtige voorstellen, aangaande de *beweging van een vast ligchaam hetzij om eene vaste as, hetzij om een vast punt,* in de vooronderstelling dat het ligchaam op onveranderlijke wijze met die as of met dit punt is verbonden.

Met *toepassen ter ontbinding* wordt hier bedoeld het door die toepassing verkrijgen of vormen van de differentiaal-vergelijkingen der beweging, en het bepalen der functiën, die het oordeel geven over den wederstand, welken de as of het vaste punt moet kunnen bieden aan hetgeen door de bewegende krachten wordt uitgewerkt en door de beweging wordt veroorzaakt. Meer geeft de toepassing van het beginsel van d'Alembert niet, en meer kan het niet geven. In de wijze van toepassen echter, in het middel om van het beginsel te komen tot die vergelijkingen en functiën, kan onderscheid bestaan; daarin kunnen de oplossingen der genoemde voorstellen ook verschillen. In geene der mij bekende oplossingen is daartoe eeniglijk en doorgaand gebruik gemaakt van de rekenwijze van Lagrange. Intusschen is de oplossing naar deze methode niet onbelangrijk. Welligt kan zij, met betrekking tot kortheid, geen voorrang hebben. Maar Lagrange gaf zijne methode ook niet als een regel ter bekorting van de berekeningen. Moge zij dan geene kortere zijn, zij zal nogthans in andere opzigten vergelijking kunnen doorstaan.

§ I.

BEWEGING VAN EEN VAST LIGCHAAM OM EEN VASTE AS.

1. Zij eene vaste massa van bepaalde grootte en gedaante. Men kenne de plaats van hare punten of elementen door hunne coördinaten x, y, z of afstanden tot drie regthoekig op elkander gerigte en onbewegelijke coördinatenvlakken. Is m de grootte der massa, dan zal ∂m aanduiden de grootte van elk harer elementen of differentiaal-deelen. Is verder, voor de eenheid der massa, P de grootte eener beweegkracht, dan zal, voor de massa m, de overeenkomstige beweegkracht zijn $\mathrm{P}m$, en zij zal, voor het element ∂m, $\mathrm{P}\partial m$ wezen. Onderscheidene zoodanige krachten kunnen op een zelfde element ∂m werken. Deze krachten kunnen ook andere grootte hebben voor andere en andere elementen, en men kan in het algemeen aannemen, dat P afhangt van eene functie der coördinaten van het element waarop de kracht $\mathrm{P}\partial m$ werkt. Bij het gegeven zijn der krachten kent men zoowel rigting als grootte.

Elke der krachten op een zelfde element kan gedacht worden ontbonden te zijn evenwijdiglijk aan de coördinaten-assen. In de plaats van al de bij ontbinding verkregen krachten, welker rigtingen aan eene zelfde coördinaten-as evenwijdig zijn, kan, bij zamenstelling, eene enkele kracht gesteld worden, het geval namelijk uitsluitende dat deze zamenstelling een koppel zou opleveren. Op deze wijze zullen dan de krachten, op eenig element ∂m werkende, herleid zijn tot drie krachten, evenwijdig aan de coördinaten-assen gerigt, en ten aanzien van grootte aangeduid kunnende worden door $\mathrm{X}\partial m$, $\mathrm{Y}\partial m$, $\mathrm{Z}\partial m$. Tot elk element behooren dergelijke krachten. Zijn nu de elementen niet vrij, dan zal er, volgens het beginsel van D'ALEMBERT, *door het gegeven verband der elementen, en door de voorwaardelijke wijze van* *hunne verplaatsing of beweging*, evenwigt bestaan tusschen al deze beweegkrachten en andere, gelijk en regtstreeks tegenovergesteld aan de beweegkrachten,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m,$$

die op de elementen zouden moeten werken, om aan deze, zoo zij geheel vrij waren, dezelfde beweging te geven die zij, bij het vereenigd zijn en aan voorwaarden van verplaatsing onderworpen, werkelijk hebben of ontvangen. Dienvolgens moet, door het beginsel der virtuele snelheden,

$$\Sigma\left\{X\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right\}\delta x+\Sigma\left\{Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right\}\delta y+\Sigma\left\{Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right\}\delta z=0$$

zijn. Bijaldien de elementen onmiddellijk en overal onafgebroken aan elkander sluiten, zoodat het geheel of vereenigde als één massa, — deze moge vast zijn of niet, — kan aangemerkt worden, dan gaan de uitgedrukte sommen over in integralen, betrekking hebbende tot de geheele massa, dat is uitgestrekt over de geheele massa, en men zal moeten hebben:

$$\int\left\{X\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right\}\delta x+\int\left\{Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right\}\delta y+\int\left\{Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right\}\delta z=0,$$

of

$$\int\left\{\left[X\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right]\delta x+\left[Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right]\delta y+\int\left[Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right]\delta z\right\}=0. \quad (1)$$

In deze vergelijking, — welke is de *onbepaalde vergelijking der virtuele momenten*, — zijn δx, δy, δz de variatiën der coördinaten van de elementen der massa, — zij zijn symbolen der virtuele snelheden of der virtuele verplaatsingen van de elementen, — en de vergelijking is dán alleenlijk waar, indien men het verband of de betrekkingen in aanmerking neemt, tusschen deze variatiën moetende bestaan als de elementen niet volkomen vrij zijn, dat is zoo zij zijn verbonden en in wijze van beweging, als anderzins, door voorwaarden bepaald.

2. De behandeling der vergelijkingen (1) komt derhalve hierop neder, dat men vergelijkingen of functiën van de onbepaalde coördinaten x, y, z (onbepaald namelijk in het geval eener massa, welker elementen overal op dezelfde wijze aan elkander sluiten of zamenhangen, en dat er geene bijzondere of bepaalde punten zijn, waarop andere of bijzondere krachten werken, of ten opzigte van welke punten bijzondere voorwaarden moeten worden ver-

vuld) vorme, die de uitdrukkingen zijn van al de te vervullen voorwaarden, — deze voorwaardes-vergelijkingen variëre, — en met deze gevariëerde voorwaardes-vergelijkingen, of *voorwaardes-vergelijkingen der variatiën van de coördinaten,* uit de vergelijking (1) zoo vele variatiën eliminere als er voorwaardes-vergelijkingen zijn gegeven, kunnende het aantal van deze laatste nimmer overtreffen dat der onbepaalde of dat der onbepaalde en der bepaalde coördinaten. Op deze wijze komt men tot eene vergelijking, onafhankelijk van eenige voorwaarde; zij is de vergelijking der virtuele momenten bij welke al de voorwaarden zijn in rekening gebragt; derhalve de *bepaalde,* ofschoon vervormde, vergelijking der virtuele momenten. Zijn al de variatiën geëlimineerd, dan is deze verkregene vergelijking (zoo noodig, herleid zijnde) de eenige maar ook slechts de ééne noodzakelijke vergelijking der beweging. Zijn al de variatiën niet geëlimineerd, dan zijn de nog bestaande of overgeblevene onderling onafhankelijk en geheel onbepaald. En aangezien nu aan de vergelijking voldaan moet worden, onafhankelijk van elke variatie der coördinaten, zal de som van alle termen, die eene zelfde variatie tot factor hebben, aan *nul* gelijk gesteld moeten worden. Er komen op deze wijze zoovele afzonderlijke vergelijkingen als er variatiën, in de bepaalde vergelijking der virtuele momenten, waren overgebleven, en deze zullen zijn of, bij herleiding, opleveren de vergelijkingen der beweging.

5. Het regtstreeksch elimineren der variatiën δx, δy, δz ... uit de vergelijking (1) kan ingewikkelde berekeningen vereischen en moeijelijkheid veroorzaken. In de plaats hiervan stelde Lagrange eene rekenwijze, door hem genoemd *méthode des multiplicateurs.* Gelijk bekend is bestaat zij hierin, dat elke voorwaardes-vergelijking der variatiën, den vorm $\delta L = 0$ hebbende, met een onderscheiden doch onbepaalden factor λ vermenigvuldigd, gevoegd worde (door optelling) bij de onbepaalde vergelijking der virtuele momenten, en dat daarna de sommen der termen, die eene zelfde variatie tot factor hebben, aan *nul* gelijk worden gesteld. Alsdan uit de komende vergelijkingen de onbepaalde factoren λ wederom verdrijvende, zal men de begeerde differentiaal-vergelijkingen der beweging verkrijgen.

Heeft de vergelijking der virtuele momenten betrekking tot de elementen eener massa, bestaat zij derhalve uit sommen van uitdrukkingen of uit eene som van integralen, of is zij eene integraal, en zijn bovendien de vergelijkingen $\delta L = 0$ onbepaalde voorwaardes-vergelijkingen, dan moeten bij de vergelijking (1) niet gevoegd worden termen van den vorm $\lambda \delta L = 0$, maar sommen of integralen van soortgelijke termen, hetgeen nederkomt op het bijvoegen van termen $\lambda\,\delta\,L$ *onder het integraal-teeken.* Het aan *nul* gelijk stellen van sommen van termen, die met eene zelfde variatie worden vermenigvuldigd, heeft derhalve betrekking tot termen onder het integraal-teeken. Waren sommige vergelijkingen $\delta\,L = 0$ bepaald, hadden zij tot een enkel bepaald punt of tot enkele bijzondere punten der massa betrekking, dan zouden de overeenkomstige termen $\lambda\,\delta\,L$ moeten worden bijgevoegd *buiten het integraal-teeken.* Zoodanige termen buiten het integraal-teeken kunnen ook uit onbepaalde voorwaardes-vergelijkingen ontstaan, indien deze namelijk geen betrekkingen zijn tusschen variatiën van coördinaten, maar van differentialen der coördinaten. Want in dit geval moeten de termen $\lambda\,\delta\,L$, onder het integraal-teeken aanwezig, worden ontwikkeld, dat is, door het integreren bij gedeelten, afhankelijk worden gemaakt van *loutere* variatiën der coördinaten, zoodat er dan ook termen, vermenigvuldigd met variatiën en met differentialen van variatiën, buiten het integraal-teeken zullen treden. De regel van het aan *nul* gelijkstellen van de sommen der termen, die eene zelfde variatie tot factor hebben, zal dan eveneens moeten toegepast worden op de termen buiten het integraal-teeken. De vergelijkingen, welke hierdoor worden verkregen, moeten eensdeels dienen ter bepaling van de grenswaarden der ingevoerde onbepaalde vermenigvuldigers λ, anderdeels ter bepaling van standvastige grootheden, dewijl het kan gebeuren dat, voor het bovengenoemd elimineren dezer factoren λ, het integreren van vergelijkingen moet voorgaan.

4. De differentiaal-vergelijkingen der beweging zijn gevormd uit vergelijkingen, die van de factoren λ afhangen. Heeft men de differentiaal-vergelijkingen kunnen oplossen, dan zal men ook de uitdrukkingen van waarde der ingevoerde factoren λ kunnen vinden. Deze geven, naar de beschouwingen van Lagrange, het middel om de grootte van uitgeoefende drukkingen, van gebodene wederstanden, als anderzins, te leeren kennen. Zijn b. v. x_1, y_1, z_1 de coördinaten van een element of van een stoffelijk punt, dat bewogen wordt, of waarop zekere krachten vermogen uitoefenen, of dat wederstand biedt, — moet ten opzigte van dit punt eene voorwaarde, uitgedrukt door eene functie $L_1 = 0$ der coördinaten x_1, y_1, z_1, worden vervuld, — en is door de zoo even aangeduide vergelijkingen bevonden, dat λ_1 is de waarde van den factor, waarmede $\delta\,L_1 = 0$ was vermenigvuldigd, dan zal de grootte der drukking, botsing, spanning enz., geleden op of ter plaatse van

dat punt, en voor zoo verre dit een gevolg is van of onmiddellijk in verband staat met de voorwaarde $L_1 = 0$, bepaald worden door de uitdrukking

$$\pm \lambda_1 \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial z_1}\right)^2\right\}} = \pm \lambda_1 U_1, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

moetende het onderste teeken genomen worden, als de gevondene waarde of uitdrukking der waarde λ_1 is negatief. Zijn andere voorwaardes-vergelijkingen $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ enz. mede van dezelfde coördinaten x_1, y_1, z_1, gelijk van andere, afhankelijk, dan moeten ook met deze, doch alleenlijk met betrekking tot hetzelfde genoemde punt, de overeenkomstige uitdrukkingen $\lambda_2 U_2$, $\lambda_3 U_3 \ldots$ worden opgemaakt, en deze zullen eveneens de grootte leeren van de drukking, op dit punt uitgeoefend, of van de belemmering, ter plaatse van het punt bestaande, ten gevolge van het voldaan zijn aan de voorwaarden $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, enz. En kent men zoo de onderscheidene drukkingen of wederstanden voor een zelfde punt, of de vele dergelijke uitwerkingen voor verschillende punten van eene lijn, van een oppervlak enz., dan blijft nog overig het herleiden van deze alle tot één enkele of tot een kleinst aantal, om tot het juiste oordeel te komen over hetgeen eigenlijk wordt uitgewerkt of teweeggebragt. Deze herleiding geschiedt naar geen bijzonder voorschrift, dat is naar geen voorschrift, door de rekenwijze gegeven, of uitsluitend, gelijk een eigen deel, tot de rekenwijze behoorende; zij wordt op de gewone wijze volbragt door de regels voor het zamenstellen van krachten en van koppels.

Maar voor deze herleiding is het noodig, dat men de rigting kenne, in welke drukking geleden of wederstand geboden wordt. Daartoe zij opgemerkt, dat de producten $\lambda \delta L$, in de vergelijking der virtuele momenten opgenomen, zelve den vorm hebben van een virtueel moment. Zij moeten er ook de voorstelling van zijn, opdat deze vergelijking den zin behoude, dien zij uitsluitend en eeniglijk moet hebben. Aangezien nu

$$\lambda \delta L = (\lambda U)\frac{\delta L}{U} = (\lambda U) . \frac{1}{U}\left\{\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial z}\delta z\right\}$$

$$= (\lambda U)\frac{\frac{\partial L}{\partial x}}{U}\delta x + (\lambda U)\frac{\frac{\partial L}{\partial y}}{U}\delta y + (\lambda U)\frac{\frac{\partial L}{\partial z}}{U}\delta z$$

is, blijkt hieruit, dat $\lambda \delta L$ inderdaad komt in de plaats van de som der zamenstellende virtuele momenten eener kracht of eener uitwerking (λU), uitgeoefend op het punt, welks coördinaten zijn x, y, z, en daar ter plaatse in eene rigting, normaal tegen een oppervlak, hebbende $L = f(x, y, z) = 0$ tot vergelijking. Dit oppervlak kan gedacht worden de voorwaarde $L = 0$ te vervangen. Het bepaalt de gedwongene beweging van het punt. De baan, door het punt beschreven, of waarin het punt wordt bewogen, moet op dit oppervlak zijn. Door het teeken van U kent men de streek der normale rigting, waarin het gedachte oppervlak of de baan van het punt (als ware zij eene stoffelijke baan) wederstand biedt, en de regtstreeks tegenovergestelde streek bepaalt de rigting, waarin de drukking, als anderzins, op het punt wordt uitgeoefend.

De herinnering aan de hoofdpunten der rekenwijze van LAGRANGE is hier voorgegaan, ten einde te vermijden dat, bij het onthinden der voorstellen over de beweging van een ligchaam om eene as of om een punt, de redeneringen of berekeningen hier en daar zouden moeten worden afgebroken, om de te volgen of toe te passen deelen der rekenwijze te noemen en meer of minder in eenige bijzonderheden te verklaren.

5. Om de vergelijking der virtuele momenten te doen dienen, ter bepaling van de beweging en van de omstandigheden der beweging van een vast ligchaam om eene as, welke in de ruimte niet van plaats verandert en ook met het ligchaam onveranderlijk vereenigd is, merke men op, dat voor elk element der vaste massa *drie* voorwaarden moeten worden vervuld. *Vooreerst* heeft de beweging van elk element om de as in een cirkel plaats; elk element heeft derhalve of behoudt voortdurend een onveranderlijken afstand tot de as. *Ten tweeden* blijft elk element in een vlak, — het vlak van zijne cirkelvormige baan, — dat loodregt op de as is gerigt, of liever, indien door eenig punt van de as een vlak gedacht wordt, loodregt op de as gerigt, dan behoudt elk element ook voortdurend een onveranderlijken afstand tot dit vlak. *Ten derden* is de massa of het ligchaam *vast*, dat is de elementen sluiten niet alleen onafgebroken aan elkander, zij hangen niet alleenlijk zamen, maar zij kunnen ook niet gerekt, ingedrukt noch om elkander gebogen worden; zij moeten derhalve onderling onveranderlijk van plaats zijn; zij moeten ten opzigte van elkander dezelfde afstanden behouden. De elementen van een volkomen hard ligchaam verkeeren dienvolgens in dit geval. Niettemin is de beschouwing ook toepasselijk op een week of veerkrachtig ligchaam, zoo lang of zoo dikwijls, hetzij door de werking der krachten, hetzij ten

gevolge der beweging, geen de minste verandering in de onderlinge afstanden der elementen wordt veroorzaakt. Dit onveranderlijk zijn der afstanden tusschen de elementen is voor een gedeelte reeds in de twee eerste voorwaarden; hetgeen nog aan het volstrektelijk onveranderlijk zijn ontbreekt, is dat elk element, in het vlak zijner beweging om de as, dezelfde plaats behoudt ten opzigte van de overige in dit zelfde vlak gelegene elementen *.

Eenig punt der as van omwenteling worde als oorsprong der coördinaten van de elementen der massa aangenomen. De as zelve zij die der ordinaten z, waardoor dan tevens de stelling van het vlak der coördinaten x en y bepaald is. Is nu de afstand van eenig element tot de as van omwenteling $= r$, en de afstand van hetzelfde element tot het coördinaten-vlak xy, $= \zeta$, dan zullen, volgens de twee eerstgenoemde voorwaarden, r en ζ voor een zelfde element standvastig moeten zijn gedurende de beweging. De voorwaardes-vergelijkingen, door welke dit wordt uitgedrukt, zullen dienvolgens zijn:

---

* Deze Bijdrage, aan de Koninklijke Akademie van Wetenschappen aangeboden, was door Haar gesteld in handen van de Heeren LOBATTO en STAMKART, Leden der Akademie, ten einde over den inhoud verslag en oordeel uit te brengen. De verslagen dezer Heeren beoordeelaars behelsden ook eenige opmerkingen, welke aan den schrijver zijn medegedeeld geworden, opdat hij daarvan zoodanig gebruik zou kunnen maken als hem gepast zou voorkomen. Voor zoo ver dit niet geschied is om voorstelling, beschouwing of behandeling van enkele punten in de Bijdrage eenigzins te wijzigen, oordeelde de schrijver het voegzaam van de voornaamste der aanmerkingen en opmerkingen melding te maken, ter plaatse waar het behoort of waartoe zij betrekking hebben.

Ten opzigte van de hier in den tekst genoemde voorwaarden is door den Heer STAMKART aangemerkt,

„dat de derde voorwaarde, *door welke zou worden uitgedrukt dat elk element, in het*
„*vlak zijner beweging om de as, dezelfde plaats behoudt ten opzigte van de overige*
„*in dit zelfde vlak gelegene elementen*, niet geheel voldoende scheen te zijn, want zouden
„daarbij de verschillende vlakken met hunne elementen niet nog afzonderlijk om de as kun-
„nen draaijen?"

Indien men zich die vlakken afzonderlijk, op of tegen elkander geplaatst, wilde voorstellen, en er eene oneindig kleine tot *nul* naderende dikte aan toekennen, zouden toch de elementen in eenig vlak met die van het, aan de eene of andere zijde, daar tegen aansluitende in aanraking zijn. De in aanraking zijnde deelen of punten der elementen in het eene vlak en in het andere zouden dezelfde ordinaten z hebben. De vergelijking, welke het onveranderlijk geplaatst zijn dezer deelen in het eene vlak uitdrukt, zal dan ook gelden voor de overeenkomstige aansluitende deelen der elementen in het andere. Dienvolgens moeten deze deelen in het tweede vlak, en dan ook de elementen in dit vlak, onderling dezelfde plaatsen behouden als de overeenkomstige deelen en elementen in het eerste vlak, en dezelfde vergelijking, welke dit voor het eene der vlakken uitdrukt, sluit op deze wijze het onderling zamenhangen der beide vlakken in. Geen nieuwe voorwaardes-vergelijking is noodig; zij zou overtollig wezen en onbepaaldheid doen ontstaan.

$$L_1 = x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$L_2 = z - \zeta = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Hieruit de voorwaardes-vergelijkingen der variatiën van de coördinaten

$$\delta L_1 = 2x\,\delta x + 2y\,\delta y = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\delta L_2 = \delta z = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

De derde voorwaarde zal daardoor kunnen worden uitgedrukt, dat, terwijl de differentiaal-afstand ∂s van elke twee onmiddellijk aan elkander grenzende elementen, hebbende x, y, z en $x + \partial x, y + \partial y, z$ tot coördinaten, standvastig blijft, de afstand van het tweede dezer elementen tot de as, even zoo als die van het eerste, geen verandering ondergaat of kan ondergaan. Derhalve moet de variatie van

$$(x + \partial x)^2 + (y + \partial y)^2$$

nul zijn, dat is

$$2(x + \partial x)(\delta x + \delta\partial x) + 2(y + \partial y)(\delta y + \delta\partial y) = 0.$$

Hieruit, na ontwikkeling, en op $\delta\partial x = \partial\delta x$, $\delta\partial y = \delta\partial y$ lettende,

$$2(x\,\delta x + y\,\delta y) + 2\partial(x\,\delta x + y\,\delta y) + 2(\partial x\,\partial\,\delta x + \partial y\,\partial\,\delta y) = 0.$$

Maar $x\,\delta x + y\,\delta y$, volgens (5), $= 0$ zijnde, is ook $\partial(x\,\delta x + y\,\delta y) = 0$; derhalve komt deze derde voorwaardes-vergelijking der variatiën van de coördinaten

$$\delta L_3 = 2\,\partial x\partial\delta x + 2\,\partial y\partial\delta y = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

welke ook onmiddellijk zou hebben kunnen zijn afgeleid geworden uit $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 =$ *standvastig*, in aanmerking nemende, dat z standvastig of $\delta z = 0$ is *.

De voorste leden der vergelijkingen (5), (6), (7), elk met een onderscheiden doch onbepaalden factor λ_1, λ_2, λ_3 vermenigvuldigd, en de producten over de geheele massa genomen zijnde, moeten de vergelijkingen, daaruit ontstaan, opgeteld worden bij de onbepaalde vergelijking der virtuele momenten. De bij te voegen vergelijkingen zijn derhalve:

$$\int 2\lambda_1(x\,\delta x + y\,\delta y) = 0, \quad \int \lambda_2\,\delta z = 0, \quad \int 2\lambda_3(\partial x\partial\delta x + \partial y\partial\delta y) = 0$$

Maar de laatste worde eerst, door integreren bij gedeelten, herleid, zoodat

* Zie de aanteekening, aan het einde dezer Bijdrage.

de termen onder het integraal-teeken eeniglijk van loutere variatiën der coördinaten afhangen. Daartoe aannemende, dat λ''_3, λ'_3, $\partial x''$, $\partial x'$, $\partial y''$, $\partial y'$, $\delta x''$, $\delta x'$, $\delta y''$, $\delta y'$, zijn de waarden van λ_3, ∂x, ∂y, δx, δy aan de twee grenzen (einde en begin) der integraal, zal die laatste vergelijking overgaan in

$$0 = -\int 2\delta x \partial(\lambda_3 \partial x) - \int 2\delta y \partial(\lambda_3 \partial y) + 2(\lambda_3''\partial x'')\delta x'' + 2(\lambda''_3 \partial y'')\delta y'' - 2(\lambda'_3 \partial x')\delta x' - 2(\lambda'_3 \partial y')\delta y'.$$

Ofschoon het standvastig zijn der ordinaat z van eenig element, en het daarom *nul* zijn van hare variatie, vrijheid geeft om den derden term in het voorste lid der algemeene vergelijking (1) van de virtuele momenten te doen wegvallen, indien het alleenlijk te doen is om de differentiaal-vergelijking der draaijende beweging van de massa te hebben, zal die derde term nog behouden worden, omdat hij later, ter bepaling van eene der uitgeoefende drukkingen, dienen moet. Nogtans kan, zonder dat de algemeenheid der berekening worde verminderd, het tweede gedeelte van genoemden term, dat is $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, worden opgeheven; want de zamenstellende snelheid $\frac{\partial z}{\partial t}$, evenwijdig aan de as, is klaarblijkelijk *nul*, en daarom ook de versnelling $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$. Het optellen van de drie nu verkregene vergelijkingen bij de onbepaalde vergelijking (1) der virtuele momenten, zal, na de termen, die met eene zelfde variatie vermenigvuldigd worden, te hebben vereenigd, deze bepaalde vergelijking der virtuele momenten (eeniglijk nu op het geval der beweging eener vaste massa om eene vaste as toepasselijk zijnde) geven:

$$\int \left\{ \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \partial m + 2\lambda_1 x - 2\partial(\lambda_3 \partial x) \right\} \delta x +$$

$$\int \left\{ \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \partial m + 2\lambda_1 y - 2\partial(\lambda_3 \partial y) \right\} \delta y + \int \left\{ Z\partial m + \lambda_2 \right\} \delta z$$

$$+ 2(\lambda''_3 \partial x')\delta x'' + 2(\lambda''_3 \partial y'')\delta y'' - 2(\lambda'_3 \partial x')\delta x' - 2(\lambda'_3 \partial y')\delta y' = 0 \quad . \; . \; . \; (8)$$

In deze vergelijking zijn geen limieten van integralen aangeduid; zij moeten niettemin als bepaalde integralen worden beschouwd, als integralen over de geheele massa uitgestrekt, dat is tusschen de grenzen der massa genomen. De uitgedrukte variatiën, zoowel die in de termen *buiten* als die in de termen *onder* de integraalteekens, zijn thans als onderling onafhankelijke variatiën aan te merken. Derhalve wordt, overeenkomstig den regel, aan de vergelijking (8) voldaan door te stellen

$$\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m + 2\lambda_1 x - 2\partial(\lambda_3 \partial x) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

$$\left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial m + 2\lambda_1 y - 2\partial(\lambda_3 \partial y) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

$$Z\partial m + \lambda_2 = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

$$\lambda''_3 \partial x'' = 0, \quad \lambda''_3 \partial y'' = 0, \quad \lambda'_3 \partial x' = 0, \quad \lambda'_3 \partial y' = 0. \ldots \ldots (12)$$

De onbepaalde factor λ_1 komt alleenlijk voor in de vergelijkingen (9) en (10), en in geen van beide is de onbepaalde factor λ_2. Daarom is de vergelijking (11), waarin deze laatste vermenigvuldiger de eenige is, onnoodig ter behandeling van de twee eerstgenoemde, uit welke eene differentiaal-vergelijking moet kunnen afgeleid worden, die bevrijd zal zijn van λ_1 en λ_3 om de differentiaal-vergelijking der beweging te kunnen wezen. Vooreerst den factor λ_1 regtstreeks eliminerende, komt:

$$\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) y\partial m - \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) x\partial m + 2\{x\partial(\lambda_3 \partial y) - y\partial(\lambda_3 \partial x)\} = 0,$$

van welke vergelijking de onbepaalde integraal is

$$\int\left\{\left(\frac{x\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{y\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m - (xY\partial m - yX\partial m)\right\} + 2\lambda_3(x\partial y - y\partial x) = C. \ldots . (a)$$

Uit de vergelijkingen (12) volgt, dat de waarde van λ_3 aan de limieten der integraal *nul* is. Neemt men wijders de gewone vooronderstelling aan, dat aan de eene der limieten de integraal verdwijnt, dan wordt $C = 0$, en de voorgaande vergelijking, uitgestrekt zijnde over de geheele massa, zal deze bepaalde uitkomst geven:

$$\int\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m = \int(xY\partial m - yX\partial m). \ldots \ldots \ldots (13)$$

Deze is de bekende vergelijking der draaijende beweging eener vaste massa om eene onbewegelijke as, indien op de elementen dezer massa voortdurend krachten werken die, ontbonden zijnde in drie regthoekige rigtingen, van welke eene is evenwijdig aan de as, $X\partial m$ en $Y\partial m$ tot sommen van zamenstellende elementaire krachten, evenwijdig aan de beide andere rigtingen (met de as regte hoeken makende), zullen opleveren.

6. Daar de hoeksnelheid der draaijende beweging eene voorname grootheid is, welke men op eenig oogenblik der beweging moet kunnen weten, wordt

het eerste lid der vergelijking (13) gemeenlijk tot een anderen vorm herleid, zoodat het de hoek versnelling leert kennen, en dan verder, na het ten tweeden male integreren, de hoeksnelheid zelve. Deze herleiding kan op meer dan één wijze geschieden. Is b. v. ω de hoeksnelheid op eenig oogenblik, dan heeft een element der massa, op den afstand r $(r^2 = x^2 + y^2)$ van de as geplaatst of gelegen, de snelheid $r\omega$ in zijne cirkelvormige baan, waaruit, door ontbinding, de zamenstellende snelheden, evenwijdig aan de assen der coördinaten x en y,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = + x\omega, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = - y\omega,$$

en dan

$$x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t} = (x^2 + y^2)\omega = r^2\omega.$$

Gevolgelijk, wegens het, voor een zelfde element, standvastig zijn van r,

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = r^2\frac{\partial\omega}{\partial t},$$

waarmede het voorste lid der vergelijking (13) overgaat in

$$\int\frac{\partial\omega}{\partial t}r^2\,\partial m, \quad \text{dat is in} \quad \frac{\partial\omega}{\partial t}\int r^2\,\partial m,$$

omdat de integraal betrekking heeft tot al de elementen der massa, die, als onveranderlijk zamenhangende, ook alle op een zelfde oogenblik dezelfde hoekversnelling $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ hebben. Dienvolgens komt de formule

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}\int r^2\,\partial m = \int (x\mathrm{Y}\,\partial m - y\mathrm{X}\,\partial m), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

zijnde de bekende vergelijking, door welke de hoekversnelling $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ wordt bepaald, waarmede dan verder de hoeksnelheid ω in functie van t zal kunnen gevonden worden.

7. Klaarblijkelijk moet de vergelijking der beweging ook verkregen worden, door het regtstreeksch elimineren van zoo vele variatiën uit de vergelijking der virtuele momenten, als er voorwaardes-vergelijkingen der variatiën van de coördinaten gegeven zijn. Beschouwt men z als standvastig, $\delta z = 0$, en den derden term uit de vergelijking der virtuele momenten afwezig, zoodat zij eenvoudiglijk is

$$\int\left\{\left(X\,\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial m\right)\delta x+\left(Y\,\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\partial m\right)\delta y\right\}=0,$$

dan zijn er twee voorwaardes-vergelijkingen,

$$x\,\delta x+y\,\delta y=0 \quad \text{en} \quad \partial x\,\partial\,\delta x+\partial y\,\partial\,\delta y=0,$$

derhalve zoo vele vergelijkingen als variatiën. Van deze de uitdrukkingen der waarden uit de voorwaardes-vergelijkingen bepalende, en alsdan, na substitutie dezer waarden van δx en δy in de vergelijking der virtuele momenten, de uitdrukking onder het integraal-teeken aan *nul* gelijk stellende, zal de differentiaal-vergelijking der beweging moeten komen, of liever, men zal, eeniglijk door die substitutie, de uitgedrukte integraal van deze vergelijking hebben.

Om δx en δy uit de twee voorwaardes-vergelijkingen op te lossen, differentiëre men de eerste dezer vergelijkingen, en eliminere daarna δx en $\partial\,\delta x$ door middel van de beide voorwaardes-vergelijkingen, dan komt

$$(x\,\partial y-y\,\partial x)\,\frac{\delta y}{x}-(x\,\partial y-y\,\partial x)\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}=0,$$

dat is

$$\frac{\partial\delta y}{\delta y}=\frac{\partial x}{x}.$$

Bijgevolg

$$\delta y=C\,x,$$

en dan

$$\delta x=-\frac{y}{x}\,\delta y=-C\,y.$$

Hiermede gaat de vergelijking der virtuele momenten over in

$$\int\left\{-\left(X\,\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial m\right)C\,y+\left(Y\,\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\partial m\right)C\,x\right\}=0,$$

welke, den standvastigen factor C opheffende, na eenvoudige verschikking van termen juist de boven gevondene vergelijking (13) zal opleveren.

8. Zoo er geen krachten onafgebroken op de elementen der massa werken, maar dat het ligchaam is in beweging gebragt door de onherhaalde botsing eener kracht, of ook door een koppel van krachten, dat slechts een enkel oogenblik heeft gewerkt, zal, gelijk bekend is, de draaijende beweging

eenparig zijn. De vergelijking (14) leert dit ook; want $X\partial m$ en $Y\partial m$ *nul* zijnde, wordt deze vergelijking

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}\int r^2\,\partial m = 0,$$

aan welke alleenlijk kan worden voldaan door $\frac{\partial\omega}{\partial t} = 0$ te stellen, waardoor ω standvastig wordt. Nog zou men tot deze zelfde uitkomst zijn gekomen, door het voorstel voor het thans gestelde bijzondere geval evenzoo op te lossen als voor het geval der meer algemeene vooronderstelling. Daartoe moet men dan deze vergelijking der virtuele momenten behandelen

$$\int\left\{-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\,\delta x - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\,\delta y - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\,\delta z\right\} = 0.$$

Zij zal voeren, bij het eveneens te werk gaan als boven, tot dit stel van vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m + 2\lambda_1 x - 2\partial(\lambda_3\,\partial x) &= 0,\\ -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m + 2\lambda_1 y - 2\partial(\lambda_3\,\partial y) &= 0,\\ \lambda_2 &= 0. \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

En deze geven, door gelijkvormige berekening als in art. 5,

$$\int\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) = 0,$$

of

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}\int r^2\,\partial m = 0.$$

Alhoewel deze zelfde uitkomst, als welke de vergelijking (14) onmiddellijk geeft, te voorzien was, en daartoe dan ook het aanduiden der vergelijking van de virtuele momenten voor dit bijzonder geval, zoo mede dat der vergelijkingen, die er uit verkregen worden, geenszins noodig was, is dit nogtans niet nagelaten, omdat in een der volgende artikels op de vergelijkingen (15) wordt teruggekomen.

Leert evenwel deze berekening, even zoo als de algemeene vergelijking (14), dat ω standvastig is indien er geen krachten staande de beweging werkzaam blijven, zij leert ook niets meer. Noch zij, noch de vergelijking (14), doen de grootte van deze onveranderlijke hoeksnelheid kennen. Zij is die, welke bij den aanvang der beweging op eens of plotseling is medegedeeld door eene kracht, die slechts een oogenblik gewerkt heeft. Door deze andere vooronderstelling is de aard van het voorstel gewijzigd, en om het onbekende te vinden, moet worden uitgegaan van eene vergelijking der virtuele momenten, uitsluitend op deze bijzondere vooronderstelling gegrond.

Hoedanig ook de beweging aan de massa zij medegedeeld, hetzij door de werking eener enkele kracht of van een enkel koppel, hetzij door gelijktijdige werking van meer krachten of koppels, hetzij door aanbotsing als anderzins, altijd zal de uitwerking kunnen worden teruggebragt tot die, welke plaats heeft in het geval eener mededeeling van de beweging door eene enkele kracht. Zij P de grootte van zoodanige kracht, welke door botsing, schok of stoot, of door eene ontwikkelde hoeveelheid beweging, veroorzaakt heeft, dat de massa m om de vaste as draait. Klaarblijkelijk moet daartoe de rigting der kracht niet door de as gaan, er moet afstand zijn tusschen de rigtingen der as en der beweegkracht. Zij ook aangenomen, dat de kracht hebbe gewerkt op of tegen een bepaald en bekend punt der massa (of althans in eene rigting, gaande door zoodanig punt), alsmede dat het vlak, gaande door dit punt loodregt op de as, zij het vlak der coördinaten x, y van de elementen der massa. De geheele massa, dat is al de elementen ∂m gezamenlijk, door de kracht P in beweging gebragt zijnde, kan men, alhoewel deze kracht slechts op of tegen een enkel punt van het ligchaam haar vermogen heeft uitgeoefend, aannemen, dat deze werking over al de elementen verdeeld was. De kracht P bijv. ontbonden zijnde in hare drie zamenstellende X, Y, Z, evenwijdig gerigt aan de coördinaten-assen, kan elke dezer, in evenwijdige rigtingen, gedacht worden gelijkelijk verdeeld of ontbonden te zijn over alle elementen der massa, zoodat dan op elk element, en evenwijdig aan de coördinaten-assen, drie krachten werken, die door ∂X, ∂Y, ∂Z kunnen worden aangeduid.

Er zijn nu geen versnellende krachten; er worden hoeveelheden beweging medegedeeld, en deze moeten derhalve uitgedrukt worden door producten van massa en snelheid. De snelheid van beweging van eenig element, hebbende x, y, z tot coördinaten, evenwijdig aan de coördinaten-assen ontbonden zijnde, zullen de zamenstellende snelheden worden uitgedrukt door

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Daarom zal nu de vergelijking der virtuele momenten deze moeten zijn:

$$\int\left\{\left(\partial X - \partial m . \frac{\partial x}{\partial t}\right)\delta x + \left(\partial Y - \partial m . \frac{\partial y}{\partial t}\right)\delta y + \left(\partial Z - \partial m . \frac{\partial z}{\partial t}\right)\delta z\right\} = 0.$$

Verbindende met deze, op dezelfde wijze als welke in art. 5 gevolgd is, de voorwaardes-vergelijkingen der variatiën van de coördinaten

$$2x\delta x + 2y\delta y = 0 \quad \text{en} \quad 2\partial x\partial\delta x + 2\partial y\partial\delta y = 0,$$

dan komt men tot deze vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} &\partial X - \frac{\partial x}{\partial t}\partial m + 2\lambda_1 x - 2\partial(\lambda_3 \partial x) = 0, \\ &\partial Y - \frac{\partial y}{\partial t}\partial m + 2\lambda_1 y - 2\partial(\lambda_3 \partial y) = 0, \\ &\partial Z + \lambda_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

En hieruit, even zoo als de vergelijking (15) is verkregen,

$$\int\left(x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t}\right)\partial m = \int(x\partial Y - y\partial X).$$

Is ω de hoeksnelheid, in het enkel oogenblik der werking van de kracht P aan de massa medegedeeld, dan zal altijd

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega y, \quad \text{en} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = +\omega x$$

zijn, en de integraal in het eerste lid der voorgaande vergelijking alleenlijk betrekking hebbende tot de massa, zal deze vergelijking overgaan in

$$\omega\int r^2\partial m = \int(x\partial Y - y\partial X) = \int x\partial Y - \int y\partial X.$$

De integralen in het laatste lid zijn eigenlijk sommen van momenten, die, naar de aangenomene vooronderstelling, gelijk moeten zijn aan de momenten der onverdeelde zamenstellende krachten X en Y. Zoo derhalve, in het coördinaten-vlak xy, a en b zijn de coördinaten van het punt, waarop de kracht P heeft gewerkt, zal $\int x\partial Y = aY$ en $\int y\partial X = bX$ zijn, en daarom

$$\omega\int r^2\partial m = Ya - Xb \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

In deze vergelijking is het tweede lid een verschil van twee momenten.

In de plaats van dit verschil kan gesteld worden het moment der kracht $Q = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$. Is derhalve p de lengte der loodlijn, uit den oorsprong der coördinaten op de rigting der kracht Q getrokken (welke lengte p niet onderscheiden is van den afstand tusschen de rigtingen van de vaste as en der kracht P), dan is Qp de grootte van het moment der kracht Q; het is ook het moment der kracht P, voor zoo veel zij draaijende beweging mededeelt of kan mededeelen. En hiermede wordt de laatste vergelijking vervangen door

$$\omega \int r^2 \partial m = Qp \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(18)}$$

Deze is de vergelijking der beweging van een vast ligchaam om eene vaste as, bijaldien geen krachten op dit ligchaam werken of blijven werken, nadat het op een oogenblik is in beweging gebragt door eene kracht, hebbende een vermogen Q, of door welke eene hoeveelheid beweging, aangeduid door Q, kan worden ontwikkeld of medegedeeld. De vergelijking geeft de bekende uitdrukking voor de grootte der medegedeelde hoeksnelheid ω, waarmede het ligchaam zal blijven draaijen, zoo lang de beweging niet wordt belemmerd, hetzij door vreemde krachten, hetzij door eenigen wederstand.

9. Laat nu worden overgegaan tot het bepalen der grootte van de drukkingen, zoo bij de beweging, als ten gevolge van de werking der krachten, uitgeoefend op de elementen der massa, en dan ook geleden wordende door de as, die aan deze uitwerking wederstand moet bieden.

Ofschoon, naar de orde van het tot hiertoe behandelde, eerst zou moeten gelet worden op het algemeen geval der veranderlijke beweging, teweeggebragt door een voortdurend werken van krachten op de elementen der massa, worde nogtans eerstelijk en afzonderlijk overwogen hetgeen er, ten aanzien van drukking of schok, wordt uitgewerkt, zoowel bij of onder de eenparige draaijende beweging eener massa, als op het oogenblik dat deze beweging door eenige kracht aan haar wordt medegedeeld.

Bij de eenparige beweging der trage massa wordt, ten gevolge der beweging zelve, drukking of spanning uitgeoefend op de elementen, en van deze op de as. Deze drukking moet bepaald worden door den factor λ_1 uit de vergelijkingen (15), welke geven

$$\lambda_1 = \frac{1}{2x}\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m + 2\,\partial\,(\lambda_3\,\partial x)\right\} = \frac{1}{2y}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m + 2\partial\,(\lambda_3\,\partial y)\right\}.$$

Maar (zie boven)

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega y \quad \text{en} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = +\omega x,$$

derhalve

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega^2 x \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega \frac{\partial x}{\partial t} = -\omega^2 y,$$

en dan

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2x}\{\omega^2 x \partial m - 2\partial(\lambda_3 \partial x)\} = -\frac{1}{2y}\{\omega^2 y \partial m - 2\partial(\lambda^3 \partial y)\}.$$

Deze waarde van λ_1 heeft slechts betrekking tot een enkel element ∂m, dat met onmiddellijk aangrenzende elementen zamenhangt. Met betrekking tot zoodanig element zal de uitgeoefende of geledene drukking, naar aanleiding van de algemeene formule (2), bekend worden door

$$\pm \lambda_1 U_1 = \pm \lambda_1 \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial L_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial y}\right)^2\right\}},$$

dat is, uithoofde van $L_1 = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ (3), en verder lettende op het teeken van U_1 overeenkomstig het teeken der uitdrukking voor λ_1,

$$\lambda_1 U_1 = \lambda_1 \sqrt{\{(2x)^2 + (2y)^2\}} = \lambda_1 \sqrt{4(x^2 + y^2)} = 2\lambda_1 r$$

$$= \frac{r}{x}\{\omega^2 x \partial m - 2\partial(\lambda_3 \partial x)\} = \frac{r}{y}\{\omega^2 y \partial m - 2\partial(\lambda_3 \partial y)\}.$$

Deze drukking wordt uitgeoefend in eene normale rigting tegen de baan, door het element ∂m in de beweging gevolgd. En vermits deze baan is een cirkel, loodregt op de as van omwenteling gerigt en in deze as zijn middelpunt hebbende, zal de drukking uitgeoefend worden op het element in de rigting van den straal, van de as af naar het element. In deze zelfde rigting wordt dan de as gedrukt of getrokken, en in de tegenovergestelde rigting moet zij wederstand bieden. Duidt men deze elementaire drukking, loodregt tegen de as uitgeoefend, door d_r aan, dan is:

$$d_r = \frac{r}{x}\{\omega^2 x \partial m - 2\partial(\lambda_3 \partial x\} = \frac{r}{y}\{\omega^2 y \partial m - 2\partial(\lambda_3 \partial y)\}.$$

Denkt men deze drukking, in de rigting van den straal r uitgeoefend wordende, ontbonden in twee drukkingen, evenwijdig aan de assen der coördinaten x en y, dan blijkt dat de twee uitdrukkingen voor d_r juist die zijn, welke de zamengestelde drukking d_r zouden geven door middel der uitdrukkingen voor de zamenstellende drukkingen d_x en d_y. Maar dan volgt daaruit wederom dat op eenig element, hebbende x, y, z (z onbepaald maar standvastig zijnde onder de beweging) tot coördinaten, drukkingen worden uitgeoefend evenwijdig aan de assen der coördinaten x en y, in grootte bepaald door

$$\left.\begin{aligned} d_x &= \omega^2 x\,\partial m - 2\partial(\lambda_3\,\partial x), \\ d_y &= \omega^2 y\,\partial m - 2\partial(\lambda^3\,\partial y). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

De integralen van deze vergelijkingen, uitgestrekt over de geheele massa, zullen de totale zamenstellende drukkingen geven, en elke dezer zal ook gelijk zijn aan de zamengestelde of enkele drukking loodregt tegen de as uitgeoefend, de eerste in het coördinatenvlak xz, de tweede in het coördinatenvlak yz. Zoo dan deze drukkingen aangeduid worden door D_x en D_y, en dat λ_3, x en y aan de limieten der integralen zijn λ''_3, λ'_3, x'', x', y'' en y', zal

$$D_x = \omega^2 \int x\,\partial m - 2\left[\lambda''_3\,\partial x'' - \lambda'_3\,\partial x'\right],$$

$$D_y = \omega^2 \int y\,\partial m - 2\left[\lambda''_3\,\partial y'' - \lambda'_3\,\partial y'\right]$$

zijn. Maar (zie boven de vergelijkingen (12)) de waarden van λ_3 aan de grenzen der integralen zijn *nul;* gevolgelijk

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \omega^2 \int x\,\partial m = \omega^2 m x_1, \\ D_y &= \omega^2 \int y\,\partial m = \omega^2 m y_1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

indien namelijk x_1, y_1 zijn de coördinaten der projectie op het vlak xy van het zwaartepunt der bewogene massa, en betrekking hebbende hetzij tot eene bepaalde betrekkelijke stelling van het ligchaam (eene stelling bijv. met betrekking tot die bij het begin der beweging), hetzij tot een bepaald oogenblik des tijds eener geheele omwenteling der massa.

De drukkingen d_x, d_y worden oorspronkelijk uitgeoefend tegen of op het element ∂m. Denkt men ze overgebragt tegen de as in de coördinaten-vlakken xz en yz, dan ontstaan er tevens twee elementaire koppels, loodregt op de as van omwenteling (de as der ordinaten z), welke te zamen het enkel koppel $k_z = x\,d_y - y\,d_x$ geven. Er is derhalve ook een zamengesteld of totaal koppel K_z loodregt op de as van omwenteling, maar de beweging om de as onbelemmerd kunnende geschieden, zal dit zamengestelde koppel van drukkingen klaarblijkelijk *nul* zijn. De berekening leert dit ook. Want

$$K_z = \int (x\,d_y - y\,d_x) = \omega^2 \int (xy\,\partial m - y\,x\,\partial m) - 2\int (x\,\partial(\lambda_3 \partial y) - y\,\partial(\lambda_3 \partial x))$$

$$= 2\,\lambda''_3\,(y''\partial x'' - x''\partial y'') - 2\,\lambda'_3\,(y'\partial x' - x'\partial y') + 2\int \lambda_3 \partial y\,\partial x - 2\int \lambda_3 \partial x\,\partial y$$

$$= 2\,\lambda''_3\,(y''\partial x'' - x''\partial y'') - 2\,\lambda'_3 (y'\partial x' - x'\partial y'),$$

dat is $=$ *nul* omdat λ''_3 en λ'_3 *nul* zijn *.

Maar de elementaire drukkingen d_x en d_y tegen de as in de vlakken xz en yz overgebragt zijnde, werken op de verschillende punten der as, en wel elk paar op den afstand z van den oorsprong der coördinaten, indien z is de afstand van het element ∂m, waartoe deze drukkingen behooren, tot het coördinaten-vlak xy. Door elke dezer drukkingen bestaat derhalve eene poging om de as van omwenteling te draaijen om de twee andere coördinaten-assen, en het vermogen daartoe is evenredig aan het moment van die drukking ten opzigte van den oorsprong der coördinaten. De sommen dezer momenten moeten gelijk wezen aan de overeenkomstige momenten der totale zamenstellende drukkingen, en hieruit worden dan bekend de twee punten der as, waarop

---

* Met betrekking tot het hier beschouwde koppel van drukkingen K_z of k_z merkte de Heer Stamkart aan, dat „daar d_r eene drukking voorstelt in de rigting van den straal r, daaruit geen „koppel kan geboren worden."

Hiermede zal waarschijnlijk bedoeld zijn, dat het koppel K_z of k_z uit den aard der zaak *nul* is, of wel dat tot dit *nul* zijn terstond mogt worden besloten; dat dienvolgens het geven van bewijs, door opzettelijke berekening, overbodig was. Inderdaad zou ook in dezen zin zijn besloten, indien alleenlijk ware geredeneerd over de normale drukkingen tegen de elementen der massa, en dat deze drukkingen langs de normale rigtingen of stralen r waren overgebragt tegen de as, vervolgens ontbonden gedacht, enz. De schrijver stelde zich evenwel voor om het bewijs ook te geven uit de beschouwing der zamenstellende drukkingen op de elementen, voornamelijk om aan te toonen dat, overeenkomstig de strekking zijner Bijdrage, de naar de rekenwijze van Lagrange verkregene formulen, bij het gebruik maken van onbepaalde vermenigvuldigers, eveneens tot het besluit der waarheid moeten voeren.

Verder is door den Heer Stamkart de juiste opmerking gemaakt, dat tot $K_z = 0$ korter kan worden besloten, onafhankelijk van de grenswaarden van λ_3. Want uit de boven gevondene twee uitdrukkingen voor d_r volgt onmiddellijk $2\,y\,\partial(\lambda_3 \partial x) = 2\,x\,\partial(\lambda_3 \partial y)$ of $2\,\{x\,\partial(\lambda_3 \partial y) - y\,\partial(\lambda_3 \partial x)\} = 0$. Dienvolgens is elke der twee termen in het derde lid der vergelijking $K_z = \int (x\,d_y - y\,d_x) =$ enz. aan *nul* gelijk, en daarom $K_z = 0$. Het integreren bij gedeelten en het letten op de grenswaarden van λ_3 wordt daarbij onnoodig.

deze totale drukkingen worden uitgeoefend. Zijn z' en z'' de afstanden dezer punten tot den oorsprong der coördinaten, dan zal men hebben

$$z' = \frac{\int z\,\mathrm{d}_x}{\mathrm{D}_x}, \quad z'' = \frac{\int z\,\mathrm{d}_y}{\mathrm{D}_y}.$$

De uitdrukkingen voor D_x, D_y en K_z zijn uit die voor d_x en d_y gevonden, zonder dat het noodig was de algemeene waarde van λ_3 te kennen. Alleenlijk moesten de bijzondere waarden van λ_3 aan de limieten der integralen bekend zijn, en men had $\lambda''_3 = 0$ en $\lambda'_3 = 0$. Dit is evenwel ontoereikend ter bepaling van $\int z\,\mathrm{d}_x$ en $\int z\,\mathrm{d}_y$. Men vindt bijv.

$$\int z\,\mathrm{d}_x = \omega^2 \int xz\,\partial m - 2\int z\,\partial(\lambda_3 \partial x) = \omega^2 \int xz\partial m - 2\,(\lambda''_3 z''\,\partial x'' - \lambda'_3 z'\partial x') + 2\int \lambda_3\,\partial x\,\partial z,$$

dat is

$$\int z\,\mathrm{d}_x = \omega^2 \int x\,z\,\partial m + 2\int \lambda_3\,\partial x\,\partial z,$$

weshalve λ_3 bekend moet wezen ter bepaling van $\int z\mathrm{d}_x$, gelijk dit eveneens gevorderd wordt voor de bepaalde uitdrukkingen der waarden van de drukkingen d_x, d_y.

De factor λ_3 wordt bepaald door de twee eerste vergelijkingen (15). Maar terstond heeft men uit de vergelijking (a), waaruit (15) is verkregen, door $\mathrm{X}\partial m$, $\mathrm{Y}\partial m$ en C *nul* te stellen,

$$2\,\lambda_3\,(x\partial y - y\partial x) = \int\left(y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial m.$$

Zoo lang de integraal onbepaald is, heeft λ_3 geen betrekking tot elementen, aan de limieten geplaatst of gelegen, maar tot eenig element der massa. Tot welk element echter de integraal ook uitgestrekt mogt zijn, altijd zal zij *nul* wezen, vermits C nul zijnde (zie art. 5, na de vergelijking (a)), de uitdrukking onder het integraal-teeken steeds *nul* is. Immers $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\,\omega^2 x$ en $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\,\omega^2 y$, en daarom

$$y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\,\omega^2\,x\,y.$$

Het tweede lid der eerstvoorgaande vergelijking dan *nul* zijnde, moet elke

λ_3 *nul* zijn, gelijk te verwachten was, dewijl λ_3 betrekking heeft tot de voorwaarde van het onderling verband der elementen, en deze zamenhang kan hier, even zoo bij de beweging der massa, als wanneer zij is in rust, niets toebrengen tot het meer of minder zijn van de drukking tegen de as. Deze dan onafhankelijk van λ_3 zijnde, komen *vooreerst* in de plaats der uitdrukkingen (19) deze twee andere geheel bepaalde

$$\mathrm{d}_x = \omega^2 x \partial m \quad \text{en} \quad \mathrm{d}_y = \omega^2 y \partial m, \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (21)$$

welke zijn de bekende formulen of uitdrukkingen voor de grootte der zamenstellende drukkingen op eenig element, verbonden of niet verbonden met, maar sluitende aan de omringende elementen. *In de tweede plaats* heeft men nu ook, hetzij hiermede, hetzij regtstreeks door de uitdrukking voor $\lambda_1 U_1$, boven verkregen, de bekende uitdrukking voor de grootte der drukking op het element ∂m in de rigting van den overeenkomstigen straal r,

$$\mathrm{d}_r = \omega^2 r \partial m, \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (22)$$

tevens zijnde de uitdrukking van de middelpuntsvliedende kracht, door de beweging van ∂m geboren en de genoemde drukking veroorzakende. En *in de derde plaats* zullen nu ook de momenten $z\mathrm{d}_x$ en $z\mathrm{d}_y$ volkomen bepaald zijn, en dan ook de punten der as van omwenteling, die de totale zamenstellende drukkingen D_x, D_y lijden, of ter plaatse van welke de as in twee loodregte rigtingen gedrukt wordt (ten gevolge van de werking der ontwikkelde middelpuntsvliedende krachten). Want de plaatsen dezer punten heeft men nu door deze twee insgelijks bekende formulen:

$$z' = \frac{\int z\,\mathrm{d}x}{\mathrm{D}_x} = \frac{\omega^2 \int x z \partial m}{\omega^2 m x_1} = \frac{\int x z \partial m}{m x_1}; \; z'' = \frac{\int y z \partial m}{m y_1} \; \ldots\ldots \; (23)$$

Wordt $z'' = z'$ bevonden, dan wordt de as ook op een enkel punt gedrukt. Gelijk blijkt uit de formule (20), zal dan de enkele of zamengestelde drukking D_r gerigt zijn in het vlak, gaande door de as en door het zwaartepunt, terwijl hare grootte zal bepaald worden door de formule

$$\mathrm{D}_r = \omega^2 m \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} = \omega^2 m r_1 . \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (24)$$

De as wordt bijv. slechts op een enkel punt gedrukt, indien het ligchaam is eene stoffelijke schijf van zeer geringe dikte, zoodat zij als een stoffelijk plat vlak zou kunnen aangemerkt worden, en onder voorwaarde dat de as zij loodregt op dit vlak. Want alsdan hebben de ordinaten z van al de elementen ∂m zeer nabij eene zelfde grootte ζ, en de formulen (23) geven $z'' = z' = \zeta$, zoodat de enkele drukking $\omega^2 m r_1$ ook uitgeoefend wordt in de rigting der lijn r_1, uit het zwaartepunt der schijf loodregt op de as getrokken.

Is de as van omwenteling eene der drie hoofdassen van het ligchaam met betrekking tot den aangenomen oorsprong der coördinaten, — is derhalve het vlak der coördinaten x en y het vlak der beide andere hoofdassen, gaande door den oorsprong, dan worden z' en z'' *nul*, en de as wordt dan ook slechts in een enkel punt, ter plaatse namelijk van den oorsprong der coördinaten, gedrukt. Ligt bovendien het zwaartepunt op de as (zoo deze is eene hoofdas), dan zal de draaijende beweging der massa geen drukking op deze hoofdas veroorzaken, omdat x_1 en y_1 *nul* zijn, en bijgevolg ook $r_1 = 0$.

Is de as geen hoofdas, maar ligt het zwaartepunt ergens in de as, dan kunnen de voorgaande formulen niet regtstreeks worden toegepast. De coördinaten x_1 en y_1 nu *nul* zijnde, worden de zamenstellende drukkingen D_x en D_y (formulen (20)) *nul*. Dit *nul* zijn komt alsdan voort uit het bestaan van twee paren van gelijke en tegenovergestelde drukkingen, het eerste paar in het coördinaten-vlak xz, het tweede in het coördinaten-vlak yz, maar de drukkingen van elk paar worden tegen verschillende punten van de as uitgeoefend. Met andere woorden, er zijn alsdan twee koppels van drukkingen, die, tot een zelfden arm herleid, ook tot een enkel koppel kunnen zamengesteld worden. Het vlak van dit enkel koppel gaat door de as en maakt een hoek met de coördinaten-vlakken xz en yz, terwijl de punten der as, in welke zij door de twee krachten van het koppel worden gedrukt, elke twee verschillende punten der as kunnen zijn. De afstand toch dezer punten is de arm van het koppel, en van dezen kan de grootte willekeurig zijn, zoo slechts de grootte van het koppel, dat is het *moment* van het koppel, niet veranderd wordt. De grootte derhalve zoowel als de plaats van één der twee gelijke drukkingen is volstrektelijk onbepaald, en het bepaalde, dat men zou kunnen verlangen te weten, hangt eeniglijk af van den vorm des ligchaams, van de betrekkelijke rigting der as waarop het zwaartepunt ligt, en van bijzondere gestelde voorwaarden.

De derde vergelijking (15), — namelijk $\lambda_2 = 0$, — waarop nog niet is gelet, leert dat, onder de beweging en door de beweging, de elementen der massa, — en dan ook de massa zelve, — in de rigting evenwijdig aan de as geen drukking of spanning lijden. Derhalve wordt ook, bij de eenparige draaijende beweging der massa, de as in hare rigting niet gedrukt, gespannen of getrokken, zoo als uit den aard der zaak onmiddellijk kan worden opgemerkt.

10. De as wordt ook gedrukt of geschokt door de werking der kracht P, die de massa in beweging brengt, en door de tegenwerking der massa bij het ontvangen van den schok of stoot. Deze uitwerking heeft echter alleenlijk plaats bij het begin der beweging; zij duurt niet voort. Ter bepaling van hare grootte moeten de vergelijkingen (16) dienen, en wel, in de eerste plaats, de twee eerste dezer vergelijkingen. Zij geven:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2x}\left\{\partial X - \frac{\partial x}{\partial t}\partial m - 2\partial(\lambda_3\,\partial x)\right\} = -\frac{1}{2y}\left\{\partial Y - \frac{\partial y}{\partial t}\partial m - 2\partial(\lambda_3\,\partial y)\right\}.$$

Hierin $-\omega y$ in plaats van $\frac{\partial x}{\partial t}$ en $+\omega x$ voor $\frac{\partial y}{\partial t}$ stellende en daarna met $U_1 = -2r$ vermenigvuldigende, komt

$$\lambda_1 U_1 = \frac{r}{x}\{\partial X + \omega y\,\partial m - 2\partial(\lambda_3\,\partial x)\} = \frac{r}{y}\{\partial Y - \omega x\,\partial m - 2\partial(\lambda_3\,\partial y)\}.$$

Hier zou nu wederom dezelfde gang van rekenen als in art. 9 kunnen gevolgd worden, ter verkrijging van de uitdrukkingen voor de grootte der zamenstellende totale drukkingen en der koppels van drukkingen, maar om de plaats der punten van de as, in welke deze gedrukt wordt, te vinden, is de bepaling van λ_3 noodig, en het is korter dat deze bepaling vooraf geschiede.

Op de wijze, in art. 5 gevolgd om de vergelijking (*a*) te verkrijgen uit de vergelijkingen (9) en (10), zal ook uit de twee eerste der vergelijkingen (16), — en lettende op $\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega y$, $\frac{\partial y}{\partial t} = +\omega x$, $x^2 + y^2 = r^2$, — gevonden worden

$$2\lambda_3\,(y\,\partial x - x\,\partial y) = \int\{\omega r^2\,\partial m - (x\,\partial Y - y\,\partial X)\}.$$

De factor λ_3 heeft hier betrekking tot eenig element ∂m, en de integraal in het tweede lid dezer vergelijking is onbepaald. Zij kan gedacht worden uitgestrekt te moeten worden tot dat element ∂m, wáár ook binnen de massa gelegen, en dan is de integraal zoowel *nul* voor het gedeelte als voor de geheele massa. Moest zij worden aangemerkt alleenlijk betrekking te hebben tot eenig element, tot een enkel element, ook dan zou zij *nul* zijn, omdat de uitdrukking onder het integraalteeken *nul* zou wezen. Immers

$$\omega r^2 \partial m = x \partial Y - y \partial X$$

is de vergelijking der draaijende beweging van een enkel vrij element. Daarom dan $\omega r^2 \partial m - (x \partial Y - y \partial X) = 0$, en zoo dan, in elke vooronderstelling, $\lambda_3 = 0$. Men zou kunnen aanmerken, dat dit *nul* zijn van λ_3 had kunnen aangenomen worden uit het hieromtrent reeds ontwikkelde in art. 9. Het kwam evenwel niet geheel overbodig voor, zulks ook af te leiden uit de vergelijkingen (16), welke in het onderwerpelijk geval van beschouwing moesten worden behandeld.

Meer bepaaldelijk is derhalve

$$\lambda_1 U_1 = \frac{r}{x} \{\partial X + \omega y \partial m\} = \frac{r}{x} \{\partial Y - \omega x \partial m\} \dots\dots\dots\dots (25)$$

Deze uitdrukking geeft de grootte der drukking d_r, op eenig element ∂m uitgeoefend in het vlak der beweging van dit element en in de rigting van den voerstraal r. Men heeft hieruit, of door soortgelijke overwegingen als in art. 9,

$$d_x = \partial X + \omega y \partial m, \quad d_y = \partial Y - \omega x \partial m \dots\dots\dots\dots (26)$$

En dan, zoo x_1 en y_1 zijn de afstanden van het zwaartepunt des ligchaams tot de vlakken der coördinaten y, z en x, z,

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \int \partial X + \omega \int y \partial m = X + \omega m y_1, \\ D_y &= \int \partial Y - \omega \int x \partial m = Y - \omega m z_1. \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (27)$$

Indien men elke normale drukking d_r, tegen de as uitgeoefend, ontbonden denkt in twee drukkingen d_x en d_y, dan zijn de rigtingen van deze zamenstellende drukkingen in de coördinatenvlakken xz en yz gelegen, en dan zijn D_x en D_y ook de totale zamenstellende drukkingen tegen de as. De punten der as, waarop zij worden uitgeoefend, zijn dan nog onbekend. Om de plaats dezer punten evenwel op de meest algemeene wijze te bepalen, is het noodig eerst nog te letten op de drukkingen, welke evenwijdig aan de as op de elementen zouden worden uitgeoefend, indien men algemeen stelt dat de rigting der kracht P niet is evenwijdig aan het coördinaten-vlak xy, en dat deze kracht dienvolgens is ontbonden geworden in drie zamenstellende krachten X, Y, Z. De derde der vergelijkingen (16) geeft

$$\lambda_2 = - \partial Z.$$

De voorwaardes-vergelijking, waartoe λ_2 betrekking heeft, is

$$L_2 = z - \zeta = 0;$$

derhalve

$$U_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial L_2}{\partial z}\right)^2} = \pm \sqrt{1} = -1.$$

Elk element ondervindt dienvolgens in de rigting, evenwijdig aan de as, eene drukking

$$d_z = \lambda_2 U_2 = \partial Z, \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (28)$$

en de totale drukking evenwijdig aan de as is

$$D_z = \int \partial Z = Z. \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (29)$$

De gewone wijze van herleiden en zamenstellen nu volgende, kunnen de drie drukkingen op elk element vervangen worden door drie dergelijke drukkingen langs de overeenkomstige coördinaten-assen, en door drie koppels van drukkingen loodregt op deze assen. De som van alle drukkingen langs eene zelfde as zal de zamengestelde of totale drukking in de rigting van deze as geven. Deze zamenstelling geeft de drie drukkingen D_x, D_y, D_z, in grootte door de formulen (27) en (29) reeds bepaald, maar zij worden nu uitgeoefend tegen den oorsprong der coördinaten en in de rigting van de drie coördinaten-assen. De koppels, loodregt op eene zelfde coördinaten-as, kunnen mede tot een enkel totaal koppel, loodregt op dezelfde as, worden zamengesteld. Daaruit ontstaan drie koppels K_x, K_y, K_z, loodregt op de assen der coördinaten x, y, z. De beweging om de as der ordinaten z vrijelijk kunnende plaats hebben, zal het koppel K_z geen drukking te weeg brengen; het zal, als koppel van drukkingen, *nul* zijn, en het aan *nul* gelijkstellen van de uitdrukking voor de grootte van dit koppel, zal de reeds gevondene vergelijking der draaijende beweging van de massa wederom te voorschijn brengen. Maar de koppels K_x en K_y geen beweging der massa om hunne assen (de assen der coördinaten x en y) kunnende veroorzaken, zullen de krachten dezer koppels, nadat de koppels zelve evenwijdiglijk zijn verplaatst in de coördinaten-vlakken yz en xz, de as van omwenteling drukken. Het koppel K_x of de krachten of drukkingen van dit koppel dan zamenstellende met de drukking D_y, en eveneens de drukkingen van K_y met de drukking D_x langs de as der abscissen x, komen op nieuw, als zamengestelde drukkingen, de drukkingen D_y en D_x voort, maar nu tegen die punten der as, ter plaatse van welke zij werkelijk uitgeoefend worden. En indien dan z' en z'' zijn de afstanden van den oorsprong der coördinaten tot die punten der as van omwenteling, alwaar de drukkingen D_x en D_y worden geleden, zullen deze afstanden bekend zijn door de vergelijkingen $z'.D_x = K_y$ en $z''.D_y = K_x$. Voor een enkel element ∂m zouden de drie koppels van drukkingen k_x, k_y, k_z zijn

$$k_x = y\,d_z - z\,d_y,\quad k_y = z\,d_x - x\,d_z,\quad k_z = x\,d_y - y\,d_x,$$

dat is, door de formulen (26) en (28),

$$\left.\begin{aligned} k_x &= y\partial Z - z\partial Y + \omega x z\,\partial m,\\ k_y &= z\partial X - x\partial Z + \omega y z\,\partial m,\\ k_z &= x\partial Y - \omega x^2\,\partial m - y\partial X - \omega y^2\,\partial m = x\partial Y - y\partial X - \omega r^2\,\partial m. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (30)$$

De uitdrukkingen voor de grootte der zamengestelde koppels K_x, K_y, K_z zullen zijn de integralen der tweede leden van deze drie vergelijkingen (30). Let men nu, bij het nemen der integralen over de geheele massa, op hetgeen is aangemerkt in art. 8 bij het vormen der vergelijking (17), te weten dat $\int x\partial Y = aY$, $\int y\partial X = bX$ is, en stelt men bovendien, meer algemeen dan in dat artikel, dat het werkpunt der kracht P niet gelegen zij in het coördinaten-vlak xy, maar op eene verwijdering c van dit vlak, zoodat $\int z\partial X = cX$ en $\int z\partial Y = cY$ zij, dan komt

$$\left.\begin{aligned} K_x &= Zb - Yc + \omega\int xz\,\partial m,\\ K_y &= Xc - Za + \omega\int yz\,\partial m,\\ K_z &= Ya - Xb - \omega\int r^2\,\partial m, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

De uitdrukking voor K_z, aan *nul* gelijk gesteld, geeft de vergelijking (17) der draaijende beweging, en met de uitdrukkingen voor K_y en K_x zal men nu hebben:

$$\left.\begin{aligned} z' &= \frac{K_y}{D_x} = \frac{Xc - Za + \omega\int yz\,\partial m}{X + \omega m y_1},\\ z'' &= \frac{K_x}{D_y} = \frac{Zb - Yc + \omega\int xz\,\partial m}{Y - \omega m x_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Bij het mededeelen der beweging, dat is bij het begin der beweging, als de massa met eene hoeksnelheid ω zal aanvangen te draaijen, worden er dan, in het algemeen, drie drukkingen geleden. Eene, D_z, in de rigting der as, en twee andere loodregt tegen de as, te weten D_x in het coördinaten-vlak xz op een afstand z' van den oorsprong, en D_y in het coördinaten-vlak yz op een afstand z'' van den oorsprong der coördinaten. Onder de beweging zelve bestaan deze drukkingen niet. Echter kan het geval plaats hebben, dat het ligchaam, op eenig oogenblik der beweging, door eene kracht P' gebotst wordt en op nieuw in de eene of andere rigting een stoot ontvangt, zoodat de hoeksnelheid ω positievelijk of negatievelijk zou veranderen. De drukkingen, hieruit ontstaande en op dat oogenblik komende bij die, welke de middelpuntvliedende krachten overeenkomstig de nog onveranderde hoeksnelheid ω hebben te weeg gebragt (formulen (20)), worden eveneens door de voorgaande formulen bepaald, mits ω dan zij de positieve of negatieve aangroeijing der bestaande hoeksnelheid. Na den schok worden ook deze drukkingen niet meer geleden; vermits evenwel de hoeksnelheid alsdan eene andere grootte heeft, zal de uitwerking der middelpuntsvliedende kracht in andere mate dan vóór dezen schok bestaan, zoodat ook de drukkingen, hierdoor tegen de as veroorzaakt, eene andere grootte zullen hebben en tegen andere punten van de as zullen worden uitgeoefend.

Indien de afstanden z' en z'' bevonden worden gelijk te zijn, zullen de twee drukkingen D_x en D_y tot eene enkele drukking zamengesteld kunnen worden. Dit zal bijv. het geval zijn indien de vaste as is eene der drie hoofdassen van het ligchaam met betrekking tot den aangenomen oorsprong der coördinaten, en dat de kracht P is gerigt geweest in het vlak (xy) der beide andere hoofdassen. Want alsdan zijn de tellers der gebrokene uitdrukkingen (32) *nul*, en daarom ook $z' = 0$ en $z'' = 0$. De enkele drukking zal worden geleden tegen het punt der as, dat als oorsprong der coördinaten is aangenomen. Gaat de vaste as tevens door het zwaartepunt, dan is $D_x = X$ en $D_y = Y$, en de grootte der enkele zamengestelde drukking zal $= P$ zijn, gelijk ook de rigting, waarin zij wordt uitgeoefend, evenwijdig zal wezen aan de rigting, waarin de kracht P heeft gewerkt.

Eveneens zullen z' en z'' gelijk worden en de twee drukkingen D_x en D_y tot eene enkele drukking herleidbaar zijn, bijaldien de vaste as is eene der drie hoofdassen, welke tot het zwaartepunt behooren, derhalve eene der drie voorname hoofdassen, en dat de kracht P heeft gewerkt in eenig vlak, loodregt op de as gerigt. Want zoodanige as is, gelijk men weet, hoofdas met betrekking tot elk van hare punten, en men behoeft daarom het aangenomen coördinaten-vlak xy slecht evenwijdiglijk verplaatst te denken, zoodat het ga door het punt der as, alwaar deze door het pas genoemd loodregt vlak wordt gesneden, — of liever, zoodat het invalle met het vlak der kracht P, — om dit geval tot het voorgaande terug te brengen.

Is de rigting der kracht in een vlak, loodregt op de as van omwenteling, en is deze as eene hoofdas van het ligchaam met betrekking tot het punt, waarin zij genoemd vlak snijdt, dan worden de beide drukkingen op dit zelfde enkele punt uitgeoefend en kunnen tot één drukking worden zamengesteld. Deze enkele drukking grooter en kleiner kunnende zijn, zou ook *nul* kunnen wezen. Maar dan zijn ook D_x en D_y *nul*, en men heeft (27)

$$X = -\omega m y_1\,, \quad Y = +\omega m x_1\,;$$

weshalve

$$\frac{X}{Y} = -\frac{y_1}{x_1}.$$

Hieruit volgt, dat de rigting der kracht loodregt moet zijn op die der lijn r_1, vereenigende den oorsprong der coördinaten met de projectie van het zwaartepunt op het vlak xy (en gelijk zijnde aan den afstand van het zwaartepunt tot de as), waarin de kracht P heeft gewerkt. Derhalve moet de rigting der kracht loodregt zijn op het vlak, gaande door de as en het zwaartepunt der massa. Bovendien zal uit

$$\sqrt{(X^2 + Y^2)} = P = \omega m r_1 \quad \text{en} \quad (18) \quad Pp = \omega \int r^2 \partial m$$

volgen

$$p = \frac{\int r^2 \partial m}{m r_1},$$

voor den afstand tusschen de rigting der kracht en de as, opdat deze, en als de kracht de genoemde loodregte rigting heeft, *bij het plotselijk medegedeeld worden der beweging*, maar dan ook alleenlijk op dit oogenblik, noch gedrukt noch gebotst worde. De verkregene uitkomst is de bekende, ter bepaling van het zoogenaamd *middelpunt van botsing*.

Indien, eindelijk, de beweging niet is medegedeeld door eene enkele kracht P, maar door een koppel, welks as is de vaste as, of evenwijdig aan de vaste as, dan zijn X en Y *nul*, en de vaste as zal niet gedrukt worden als zij slechts door het zwaartepunt gaat.

11. Dezelfde gang van rekenen moet gevolgd worden, ter bepaling van de grootte en de plaats van de drukkingen, welke tegen de vaste as worden uitgeoefend bij eene veranderlijke beweging der massa. De formulen (9) en (10) geven

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2x}\left\{\left(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m - 2\,\partial(\lambda_3 \partial x)\right\} = -\frac{1}{2y}\left\{\left(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial m - 2\,\partial(\lambda_3 \partial y)\right\}.$$

U_1 is, als boven, $= -2r$, en daarom

$$\lambda_1 U_1 = \frac{r}{x}\left\{\left(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m - 2\,\partial(\lambda_3 \partial x)\right\} = \frac{r}{y}\left\{\left(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial m - 2\,\partial(\lambda_3 \partial y)\right\}.$$

Vermits $\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega y$ en $\frac{\partial y}{\partial t} = +\omega x$, zal, daar ω veranderlijk is,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -y\frac{\partial \omega}{\partial t} - \omega\frac{\partial y}{\partial t} = -y\frac{\partial \omega}{\partial t} - \omega^2 x, \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = +x\frac{\partial \omega}{\partial t} - \omega^2 y$$

zijn; weshalve

$$\lambda_1 U_1 = \frac{r}{x}\left\{X\partial m + \omega^2 x\partial m + y\partial m\frac{\partial \omega}{\partial t} - 2\partial(\lambda_3 \partial x)\right\} = \frac{r}{y}\left\{Y\partial m + \omega^2 y\partial m - x\partial m\frac{\partial \omega}{\partial t} - 2\partial(\lambda_3 \partial y)\right\}.$$

Hieruit blijkt, dat, vermits de drukking $\lambda_1 U_1$ uitgeoefend wordt in eene rigting, normaal zijnde voor het overeenkomstig punt der baan, door het element ∂m beschreven, dat is in de rigting des voerstraals r van de as naar het element, de zamenstellende drukkingen, evenwijdig aan de assen der coördinaten x en y zullen zijn

$$\left.\begin{aligned} d_x &= X\,\partial m + \omega^2 x\,\partial m + y\,\partial m\frac{\partial \omega}{\partial t} - 2\partial(\lambda_3\,\partial x), \\ d_y &= Y\,\partial m + \omega^2 y\,\partial m - x\,\partial m\frac{\partial \omega}{\partial t} - 2\partial(\lambda_3\,\partial y)\,.\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ (33)$$

Integrerende over de geheele massa, dan komt, naar dezelfde gronden, waarop in art. 9 de formulen (20) uit (19) zijn verkregen,

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \int X\,\partial m + \omega^2 m x_1 + m y_1\frac{\partial \omega}{\partial t}, \\ D_y &= \int Y\,\partial m + \omega^2 m y_1 - m x_1\frac{\partial \omega}{\partial t}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ (34)$$

En daar uit de vergelijking (11), art. 5, volgt $\lambda_2 = - Z\partial m$, zal, vermits $U_2 = -1$ is,

$$\lambda_2 U_2 = d_z = Z\partial m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

en dan

$$D_z = \int Z\partial m. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

zijn. Deze laatste drukking is standvastig gedurende de beweging, indien, gelijk voorondersteld is, dezelfde krachten op dezelfde elementen blijven werken. Maar de drukkingen D_x en D_y veranderen van oogenblik tot oogenblik. Zijn derhalve, voor eenig gesteld of gegeven oogenblik der beweging, de hoekversnelling en de hoeksnelheid door de formule (14) bepaald, dan zullen de formulen (34) de zamenstellende totale drukkingen voor dat oogenblik doen bekend worden. Bij den aanvang der beweging kan de hoekversnelling $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ aangemerkt worden te zijn de aanvankelijke hoeksnelheid; middelpuntvliedende krachten zijn er nog niet ontstaan, zoodat de termen $\omega^2 m x_1$ en $\omega^2 m y_1$ alsdan niet in rekening komen, en de formulen (34) zullen dan ook met de in art. 10 verkregene formulen (27) overeenstemmen. Is de beweging eenparig, zijn X, Y en $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ *nul*, dan gaan de formulen (34) over in de formulen (20).

Om de punten der vaste as, ter plaatse van welke deze gedrukt wordt, te vinden, moeten wederom, als boven, de drukkingen op de elementen overgebragt worden in de rigtingen der coördinaten-assen door middel of met tusschenkomst van koppels, loodregt op deze assen. Daartoe moeten de drukkingen d_x en d_y op de elementen nader worden bepaald, zoodat zij niet meer van λ_3 afhangen. Op de wijze als in art. 10, zal uit de vergelijking (a), art. 5 (en van welke vergelijking het tweede lid *nul* moet zijn), afgeleid worden dat λ_3, betrekking hebbende tot een enkel element, zamenhangende met de onmiddellijk aangrenzende elementen, *nul* is, zoodat dan de laatste termen der tweede leden van de vergelijkingen (33) wegvallen. Men kan nu de drukkingen d_x, d_y, d_z van het element, waarop zij worden uitgeoefend, overgebragt denken op den oorsprong der coördinaten en gerigt langs de assen der coördinaten x, y, z, mits alsdan bijkomen drie koppels k_x, k_y, k_z, loodregt op deze assen en in grootte bepaald door

$$\left.\begin{aligned} k_x &= y\,d_z - z d_y = y\,Z\,\partial m - z\,Y\,\partial m - \omega^2\,yz\,\partial m + \frac{\partial\omega}{\partial t}\,xz\,\partial m, \\ k_y &= z\,d_x - x d_z = z\,X\,\partial m - x\,Z\,\partial m + \omega^2\,xz\,\partial m + \frac{\partial\omega}{\partial t}\,yz\,\partial m, \\ k_z &= x\,d_y - y d_x = x\,Y\,\partial m - y\,X\,\partial m - \frac{\partial\omega}{\partial t}(x^2 + y^2). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (37)$$

Deze koppels, genomen over de geheele massa, geven de drie totale zamenstellende koppels:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \int (yZ - zY)\,\partial m - \omega^2 \int yz\,\partial m + \frac{\partial\omega}{\partial t}\int xz\,\partial m, \\ K_y &= \int (zX - xZ)\,\partial m + \omega^2 \int xz\,\partial m + \frac{\partial\omega}{\partial t}\int yz\,\partial m, \\ K_z &= \int (xY - yX)\,\partial m - \frac{\partial\omega}{\partial t}\int r^2\,\partial m. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (38)$$

Het laatste dezer koppels is, als koppel van drukkingen, *nul*, en de uitdrukking zijner grootte aan *nul* gelijk gesteld zijnde, geeft de vroeger reeds gevondene vergelijking (14) voor de draaijende beweging van het vaste ligchaam om de vaste as. De drukking D_z is, door het overgebragt zijn der drukkingen d_z in de rigting van de as der ordinaten z, de totale drukking langs de vaste as; zij ondergaat geene verandering. De drukkingen D_x en D_y evenwel, nu langs de coördinaten-assen x en y uitgeoefend, kunnen met de koppels van drukkingen K_y en K_x, loodregt op de assen der coördinaten, y en x of in de coördinaten-vlakken xz en yz werkende, zamengesteld worden, en daar noch de grootte dezer drukkingen, noch ook hare loodregte rigtingen tegen de as, verandering kunnen ondergaan, zal de plaats, waar zij worden geleden, veranderd worden. Zijn namelijk z' en z'' de afstanden van den oorsprong der coördinaten tot de twee punten der vaste as, ter plaatse van welke zij de drukkingen D_x en D_y moet ophouden, of alwaar zij eigenlijk gedrukt wordt, dan wordt de plaats van elk dezer punten bekend door de formulen:

$$\left.\begin{aligned} z' &= \frac{K_y}{D_x} = \frac{\int (zX - xZ)\,\partial m + \omega^2 \int xz\,\partial m + \frac{\partial\omega}{\partial t}\int yz\,\partial m}{\int X\,\partial m + \omega^2\,m x_1 + \frac{\partial\omega}{\partial t}\,m y_1}, \\ z'' &= \frac{K_x}{D_y} = \frac{\int (yZ - zY)\,\partial m - \omega^2 \int yz\,\partial m + \frac{\partial\omega}{\partial t}\int xz\,\partial m}{\int Y\,\partial m + \omega^2\,m y_1 - \frac{\partial\omega}{\partial t}\,m x_1}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (39)$$

Wanneer het oogenblik, voor hetwelk de uitgeoefende of geleden wordende drukkingen zullen bepaald worden, is dat van den aanvang der beweging, worden de termen, die ω^2 tot coëfficiënt hebben, *nul*, en daar, voor dit eerste oogenblik, $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ aangemerkt moet worden als aanvankelijke hoeksnelheid, zullen de formulen (39) voor dit geval overeenstemmen met of denzelfden vorm hebben als de formulen (32), in art. 10 gevonden.

Is de vaste as eene der drie hoofdassen met betrekking tot den oorsprong der coördinaten, en zijn wijders de werkende krachten zoodanig gerigt en verdeeld, of is de massa van zoodanigen vorm en zoodanig door de coördinaten-vlakken gedeeld, dat de sommen der momenten $z\mathrm{X}\,\partial m$ en $x\mathrm{Z}\,\partial m$, $y\mathrm{Z}\,\partial m$ en $z\mathrm{Y}\,\partial m$ gelijk zijn op eenig oogenblik, of ook dat elke dezer sommen *nul* ware, dan worden z' en z'' *nul*. De vaste as zal dan alleenlijk gedrukt worden ter plaatse van den oorsprong der coördinaten, en de twee drukkingen D_x en D_y zullen tot eene enkele drukking kunnen worden zamengesteld.

Ligt het zwaartepunt in den oorsprong of ook slechts ergens op de vaste as, en gebeurt het, door wijze van verdeeld zijn der krachten en door den vorm van het ligchaam, dat de sommen of integralen $\int \mathrm{X}\,\partial m$ en $\int \mathrm{Y}\,\partial m$ rekenkundig nul zijn, dan vinden de formulen (39) geen toepassing, dewijl dit nul zijn in het algemeen tot grond zal hebben het bestaan van twee koppels, die dan ook tot een enkel koppel zullen kunnen worden zamengesteld. Zijn evenwel deze sommen of integralen niet *nul*, en is derhalve, in het algemeen, $\mathrm{D}_x = \int \mathrm{X}\,\partial m$, $\mathrm{D}_y = \int \mathrm{Y}\,\partial m$, even zoo als in elk geval $\mathrm{D}_z = \int \mathrm{Z}\,\partial m$ is, dan blijkt dat het bewogen worden der massa niets toebrengt tot het grooter of kleiner zijn der drukkingen tegen de vaste as. Deze zal in de rigtingen, evenwijdig aan de assen der coördinaten x en y, bij de beweging evenveel gedrukt worden als wanneer er geen beweging plaats vond, maar dat niettemin dezelfde krachten op de elementen der massa werkzaam waren. Maar de punten der as, op welke de drukkingen worden uitgeoefend, zullen in het eene geval niet dezelfde wezen als in het andere, tenzij de vaste as tevens eene hoofdas is. Want de termen, welke alsdan uit de tellers der gebrokene uitdrukkingen (39) zullen wegvallen, zijn de termen, die moeten ontbreken ter bepaling van z' en z'' als de massa niet draait of niet zou kunnen draaijen, hetzij b. v. indien zij tegen de as zoo sterk ware aangeklemd, dat de werkende krachten niet zouden vermogen haar te bewegen, hetzij dat er, op andere wijze, eenig ander beletsel bestond.

---

§ II.

BEWEGING VAN EEN VAST LIGCHAAM OM EEN VAST PUNT.

---

1. Indien een vast ligchaam verbonden is met een vast punt, om hetwelk beweging van het ligchaam mogelijk is, kan men zich voorstellen de omstandigheden dezer beweging te bepalen, in de vooronderstelling dat zij plaats heeft ten gevolge eener onafgebrokene werking van krachten op de elementen van het ligchaam of der vaste massa, zoodat deze telkens, in verschillende rigtingen, nieuwe indrukken ontvangt, en genoodzaakt wordt sneller en minder snel, en meer of minder op- of neêrwaarts geneigd, om het vaste punt te draaijen.

Het voorstel ter bepaling van deze draaijende beweging zal opgelost zijn, indien men voor elk oogenblik weet of kan aanwijzen de stelling der massa met betrekking tot drie onderling regthoekig gerigte coördinaten-vlakken of coördinaten-assen, welke door het vaste punt gaan en in de ruimte niet van streek veranderen. Het zou dan genoeg zijn op elk oogenblik de stelling te kennen van twee bepaalde punten der massa, die met het vaste punt niet in dezelfde regte lijn gelegen zijn. Het vlak, gaande door deze twee punten en door het vaste punt, is als ware het een coördinaten-vlak voor de punten der massa, en eene der twee lijnen, uit het vaste punt naar de twee gedachte punten getrokken, kan als eene coördinaten-as worden aangemerkt. Kent men nu den stand, zoowel van deze lijn als van dat vlak, ten opzigte van de onveranderlijke coördinaten-vlakken, dan is hierdoor de stelling van het bewogen ligchaam ganschelijk bepaald. Maar het is eenvoudiger drie onderling regthoekig gerigte lijnen te denken, gaande door het vaste punt en binnen de massa, of ten opzigte van de elementen der massa, onveranderlijk gelegen zijnde. De vlakken der drie paren van deze lijnen kunnen als coördinaten-vlakken, en de lijnen zelve als de coördinaten-assen van de elementen der massa aangenomen worden. Zij hebben met de bovengenoemde onbewegelijke coördinaten-assen het vaste punt, als oorsprong der coördinaten, gemeen, maar zij deelen in de beweging van het ligchaam en zullen hier heeten *de coördinaten-assen der massa.*

Terwijl de elementen der massa onveranderlijk zamenhangen, behoudt elk element, bij de beweging van het ligchaam om het vaste punt, een onveranderlijken afstand van dit punt. De baan derhalve, door eenig element gevolgd of beschreven wordende, is voortdurend in het oppervlak van een zelfden bol, wiens middelpunt is het vaste punt. Bij de voorwaarde van het onveranderlijk zamenhangen der elementen bestaat hierin de voorwaarde hunner gedwongene beweging.

De beweging der massa kan alleenlijk eene draaijende beweging zijn. Daarom moet er eene lijn wezen, gaande door het vaste punt, om welke, als om eene as, deze beweging geschiedt. Maar is deze as eene lijn, door eenig element der massa en door het vaste punt gaande, dan is het wel mogelijk dat de draaijende beweging om haar voortduurt, als om eene vaste as; doch het geval, waarin dit kan plaats hebben, een zeer bijzonder geval zijnde, moet men in het algemeen stellen, dat deze as niet alleenlijk gedurig eene andere stelling ten opzigte van de vaste coördinaten-assen zal hebben, maar ook dat hare rigting ten aanzien van de coördinaten-assen der massa veranderlijk zal zijn. Is derhalve de lijn, door eenig element en het vaste punt getrokken, de as om welke, op zeker oogenblik, de massa eene draaijende beweging heeft, dan zullen, in de volgende oogenblikken, andere dergelijke lijnen, gerigt naar andere elementen, die opvolgend niet gelegen zijn in de rigting van een zelfden voerstraal, eveneens assen van omwenteling zijn of kunnen zijn. Gevolgelijk is de as van omwenteling niet slechts eene lijn, welke met de massa om het vaste punt bewogen wordt, maar ook hare plaats of rigting ten opzigte van de elementen der massa is niet bestendig. De beweging der massa is wel eene wentelende beweging om eene as, maar dit slechts, voor eene zelfde as, gedurende een differentiaal-oogenblik. In een volgend dergelijk oogenblik draait het ligchaam om eene andere as, oneindig digt nevens de eerste gerigt. De draaijende beweging gaat als ware het onophoudelijk van de eene as op eene onmiddellijk volgende over; de as van omwenteling is eene *onbestendige as*, eene *as voor een ondeelbaar oogenblik.*

Bij de beweging van een ligchaam om eene as, — hoe kort ook de duur der beweging zij, of hoe klein het boogje, door eenig punt van dit ligchaam beschreven, — bestaat hoeksnelheid van beweging om de as, of hoeksnelheid met betrekking tot de as. Deze snelheid kan ontbonden gedacht worden; en zoo dan de rigting der onbestendige as bekend ware ten opzigte van de coördinaten-assen der massa, zou de hoeksnelheid met betrekking tot de onbestendige as ook gedacht kunnen worden vervangen te zijn, door betrekkelijke hoeksnelheden, dat is door die van zamenstellende bewegingen om de coördinaten-assen der massa, even zoo als dit ten opzigte van de onbewegelijke coördinaten-assen kan worden begrepen. Wederkeerig, zoo men, voor eenig oogenblik der beweging, kende de zamenstellende hoeksnelheden, hetzij met betrekking tot de vaste coördinaten-assen, hetzij ten aanzien van de coördinaten-assen der massa, zou uit deze besloten kunnen worden én tot de grootte van de hoeksnelheid der ware beweging om de onbestendige as, én te gelijk tot de rigting dezer as. Zoo eenige lijn, door het vaste punt getrokken, en zekere bepaalde stelling ten opzigte van de elementen der massa hebbende, voor een oogenblik as van beweging kan zijn, kan dit ook op elke der coördinaten-assen van de massa toegepast worden. En zoo dan elke dezer assen op hare beurt onbestendige as ware, zou er werkelijk beweging om deze as en hoeksnelheid ten opzigte van eene coördinaten-as der massa bestaan. Maar het is duidelijk dat de hoeksnelheden met betrekking tot de coördinaten-assen der massa niet in dezen bijzonderen zin moeten gedacht worden, al ware het ook mogelijk dat eene dezer lijnen, onder de beweging, onbestendige as wierd. Van een anderen kant evenwel heeft de massa inderdaad beweging met betrekking tot hare coördinaten-assen. Deze assen toch worden met de massa bewogen, en als men de beweging nagaat gedurende den tijd δt, dan stelt men zich voor te onderzoeken, welke ligging of welken stand de assen der massa hebben op het einde van den tijd δt met betrekking tot dien, welken zij hadden bij den aanvang van dit oneindig klein tijdsdeel. De elementen der massa hebben na dezen differentiaal-tijd eene andere plaats, en alhoewel de coördinaten der elementen met betrekking tot de coördinaten-assen der massa steeds dezelfde zijn, ondergaan zij niettemin verandering, als men de verandering in rigting der coördinaten-assen in aanmerking neemt, dat is als men let op een volgenden stand met betrekking tot een onmiddellijk voorgaanden. Het is derhalve geoorloofd snelheid van beweging der elementen, verandering van snelheid of versnelling, verandering van de coördinaten der elementen of differentialen dezer coördinaten, te stellen of te rekenen met betrekking tot de coördinaten-assen der massa. Maar bij het onderzoek der beweging van deze assen zelve moeten klaarblijkelijk de vaste assen der coördinaten als rigtingen ter vergelijking worden aangenomen.

De differentiaal-beweging van de massa met betrekking tot hare coördinaten-assen, en de differentiaalbeweging dezer assen met betrekking tot de vaste coördinaten-assen, zijn bewegingen die gelijktijdig plaats hebben; zij zijn in eene zelfde beweging begrepen. Zij hangen echter in dier voege zamen, dat de laatste bepaald is door de eerste, van welke dan ook de omstandigheden als die eener onafhankelijke beweging kunnen worden onderzocht en gekend.

Men zal namelijk de stelling van de coördinaten-assen der massa kunnen vinden op eenig oogenblik der beweging, zoodra bekend zijn geworden de functiën of uitdrukkingen, die, voor zoodanig oogenblik, de grootte geven van de hoeksnelheden der beweging van de massa met betrekking tot hare coördinaten-assen. Deze functiën worden verkregen uit de differentiaal-vergelijkingen der beweging van de massa met betrekking tot hare coördinaten-assen. Het bepalen dezer differentiaal-vergelijkingen is een voornaamst gedeelte der oplossing van het voorstel der beweging van een vast ligchaam om een vast punt, en tot deze bepaling, door middel van het beginsel van d'Alembert, wordt nu in de eerste plaats overgegaan.

2. Aannemende, dat op al de elementen der massa krachten werken, — dat deze ontbonden zijn in rigtingen evenwijdig aan de coördinaten-assen der massa, — en dat, zoo doende, gelijk in art. 1 van § 1, de krachten op elk element vervangen zijn door drie krachten $X\,\partial m$, $Y\,\partial m$, $Z\,\partial m$, dan moet hier ook wederom worden uitgegaan van de algemeene vergelijking (1) der virtuele momenten. Om haar toe te passen, moeten de voorwaarden der variatiën van de onbepaalde coördinaten der elementen in rekening worden gebragt. Deze voorwaarden zijn die der gedwongene beweging van het ligchaam om het vaste punt, — door welke elk element denzelfden afstand ϱ tot het vaste punt (tot den oorsprong der coördinaten) behoudt, — en die van den onveranderlijken zamenhang der elementen van de massa, door

welk verband de onderlinge oneindig kleine afstanden tusschen opvolgende elementen dezelfde blijven.

De eerste dezer voorwaarden wordt uitgedrukt door de vergelijking:

$$L_1 = x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2 = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (40)$$

gevende deze eerste voorwaardes-vergelijking der variatiën van de coördinaten:

$$\delta L_1 = 2x\delta x + 2y\delta y + 2z\delta z = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (41)$$

Aangezien er slechts drie onbepaalde coördinaten x, y, z zijn, kan het aantal der voorwaardes-vergelijkingen niet meer dan *drie* bedragen. Moest alleenlijk de voorwaarde van zamenhang en onafgebrokene onveranderlijke opvolging of aansluiting der elementen in aanmerking komen, dan zouden daartoe *drie* vergelijkingen kunnen worden gesteld, uitdrukkende dat de variatiën der drie afstanden tusschen vier, in eenige kromlijnige of veranderlijke rigting, onmiddellijk opvolgende punten *nul* zijn. Twee zoodanige vergelijkingen reiken hier echter toe, vermits reeds eene (41) van de drie noodige bestaat. Deze twee kunnen naar den genoemden grond gevormd worden, doch men kan ze ook vinden uit dezelfde voorwaarde, door welke de vergelijking (41) is verkregen. Zijn toch de afstanden van drie onmiddellijk op elkander volgende elementen onveranderlijk, dan zullen ook de variatiën der afstanden van het tweede en derde dezer elementen tot het vaste punt, even zoo als de variatie van den afstand des eersten elements tot dit punt, *nul* zijn. Van drie opvolgende elementen of punten der massa zijn de coördinaten x, y, z; $x + \partial x$, $y + \partial y$, $z + \partial z$, $x + 2\partial x + \partial^2 x$, $y + 2\partial y + \partial^2 y$, $z + 2\partial z + \partial^2 z$, en gelijk dan de vergelijking (41) is verkregen uit

$$\delta\,(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

zullen de twee andere voorwaardes-vergelijkingen der variatiën van de coördinaten moeten voortkomen uit of ontwikkelingen en vervormingen moeten zijn van deze twee vergelijkingen:

$$\delta\,\{(x + \partial x)^2 + (y + \partial y)^2 + (z + \partial z)^2\} = 0,$$

$$\delta\,\{(x + 2\partial x + \partial^2 x)^2 + (y + 2\partial y + \partial^2 y)^2 + (z + 2\partial z + \partial^2 z)^2\} = 0.$$

De eerste ontwikkeld zijnde gelijk de overeenkomstige, uit welke de vergelijking (7) in art. 5 § 1 is afgeleid, zal geven:

$$\delta L_2 = 2\partial x \partial \delta x + 2\partial y \partial \delta y + 2\partial z \partial \delta z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

De tweede vergelijking wordt, bij ontwikkeling,

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2(x + 2\partial x + \partial^2 x)(\delta x + 2\partial\delta x + \partial^2\delta x) + 2(y + 2\partial y + \partial^2 y)(\delta y + 2\partial\delta y + \partial^2\delta y) + \\ & 2(z + 2\partial z + \partial^2 z)(\delta z + 2\partial\delta z + \partial^2\delta z) = (2x\delta x + 2y\delta y + 2z\delta z) + 2(2\partial x\delta x + \\ & 2x\partial\delta x + 2\partial y\delta y + 2y\partial\delta y + 2\partial z\delta z + 2z\partial\delta z) + 2(2\partial x\partial\delta x + 2\partial y\partial\delta y + 2\partial z\partial\delta z) \\ & + 2(4\partial x\partial\delta x + 2\partial^2 x\delta x + 2x\partial^2\delta x + 4\partial y\partial\delta y + 2\partial^2 y\delta y + 2y\partial^2\delta y + 4\partial z\partial\delta z + 2\partial^2 z\delta z + 2z\partial^2\delta z) \\ & + 2(2\partial^2 x\partial\delta x + 2\partial x\partial^2\delta x + 2\partial^2 y\partial\delta y + 2\partial y\partial^2\partial y + 2\partial^2 z\partial\delta z + 2\partial z\partial^2\delta z) + \\ & 2(\partial^2 x\partial^2\delta x + \partial^2 y\partial^2\delta y + \partial^2 z\partial^2\delta z) \\ = {} & \delta L_1 + 2\partial\delta L_1 + 2\delta L_2 + 2\partial^2\delta L_1 + 2\partial\delta L_2 + 2\partial^2 x\partial^2\delta x + 2\partial^2 y\partial^2\delta y + 2\partial^2 z\partial^2\delta z. \end{aligned}$$

Aangezien nu $\delta L_1 = 0$, $\delta L_2 = 0$ zijn, en daarom ook de differentialen dezer variatiën gelijk *nul*, komt, als derde voorwaardes-vergelijking der variatiën van x, y, z, *

$$\delta L_3 = 2\partial^2 x\partial^2\delta x + 2\partial^2 y\partial^2\delta y + 2\partial^2 z\partial^2\delta z = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (43)$$

Om de bepaalde vergelijking der virtuele momenten te hebben, moet de onbepaalde vergelijking (1) (§ I, art. 1) zamengenomen worden met deze drie vergelijkingen

$$\int \lambda_1 \delta L_1 = \int 2\lambda_1 (x\delta x + y\delta y + z\delta z) = 0,$$

$$\int \lambda_2 \delta L_2 = \int 2\lambda_2 (\partial x\partial\delta x + \partial y\partial\delta y + \partial z\partial\delta z) = 0,$$

$$\int \lambda_3 \delta L_3 = \int 2\lambda_3 (\partial^2 x\partial^2\delta x + \partial^2 y\partial^2\delta y + \partial^2 z\partial^2\delta z) = 0.$$

Vooraf echter kunnen de twee laatste, door het integreren bij gedeelten, worden herleid, zoodat de termen onder de integraal-teekens geen differentialen van de variatiën maar eeniglijk deze variatiën zelve tot factoren hebben. Daartoe, als vroeger, aannemende of stellende, dat λ''_1 λ'_1, λ''_2 λ'_2, λ''_3 λ'_3, $\partial x''$ $\partial x'$, $\partial y''$ $\partial y'$, $\partial z''$ $\partial z'$ enz. zijn de waarden van λ_1, λ_2, λ_3, ∂x, ∂y, ∂z enz. aan de grenzen der integralen, zal de tweede der voorgaande vergelijkingen moeten vervangen worden door deze andere:

* Zie de aanteekening, aan het einde dezer Bijdrage.

$$-\int\Big[2\,\delta x\,\partial(\lambda_2\,\partial x)+2\,\delta y\,\partial(\lambda_2\,\partial y)+2\,\delta z\,\partial(\lambda_2\,\partial z)\Big]+2\,\{(\lambda''_2\,\partial x'')\,\delta x''-(\lambda'_2\,\partial x')\,\delta x'\}$$
$$+\,2\,\{(\lambda''_2\,\partial y'')\,\delta y''-(\lambda'_2\,\partial y')\,\delta y'\}+2\,\{(\lambda''_2\,\partial z'')\,\delta z''-(\lambda'_2\,\partial z')\,\delta z'\}=0.$$

De laatste of derde van die vergelijkingen zal overgaan in:

$$0=\int\{2\delta x\partial^2(\lambda_3\partial^2 x)+2\delta y\partial^2(\lambda_3\partial^2 y)+2\delta z\partial^2(\lambda_3\partial^2 z)\}-2\,\{\delta x''\partial(\lambda''_3\partial_2 x'')-\delta x'\partial(\lambda'_3\partial^2 x')\}$$
$$-\,2\,\{\delta y''\,\partial(\lambda''_3\,\partial^2 y'')-\delta y'\,\partial(\lambda'_3\,\partial^2 y')\}-2\,\{\delta z''\,\partial(\lambda''_3\,\partial^2 z'')-\delta z'\,\partial(\lambda'_3\,\partial^2 z')\}+$$
$$2\,\{(\lambda''_3\,\partial^2 x'')\,\partial\,\delta x''-(\lambda'_3\,\partial^2 x')\,\partial\,\delta x'\}+2\,\{(\lambda''_3\,\partial^2 y'')\,\partial\,\delta y''-(\lambda'_3\,\partial^2 y')\,\partial\,\delta y'\}+$$
$$2\,\{(\lambda''_3\,\partial^2 z'')\,\partial\,\delta z''-(\lambda_3\,\partial^2 z')\,\partial\,\delta z'\}.$$

En hiermede komt dan deze bepaalde vergelijking der virtuele momenten:

$$0=\int\Big\{\Big[X\,\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m+2\,\lambda_1\,x-2\partial(\lambda_2\,\partial x)+2\partial^2(\lambda_3\,\partial^2 x)\Big]\delta x+$$
$$\Big[Y\,\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m+2\,\lambda_1\,y-2\partial(\lambda_2\,\partial y)+2\partial^2(\lambda_3\,\partial^2 y)\Big]\delta y+$$
$$\Big[Z\,\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m+2\,\lambda_1\,z-2\partial(\lambda^2\,\partial z)+2\partial^2(\lambda_3\,\partial^2 z)\Big]\delta z\Big\}$$
$$+\,2\{\lambda''_2\partial x''-\partial(\lambda''_3\partial^2 x'')\}\,\delta x''-2\{\lambda'_2\partial x'-\partial(\lambda'_3\partial^2 x')\}\,\delta x'+2(\lambda''_3\partial^2 x'')\partial\delta x''-2(\lambda'_3\partial^2 x')\partial\,\delta x'$$
$$+\,2\{\lambda''_2\partial y''-\partial(\lambda''_3\partial^2 y'')\}\,\delta y''-2\{\lambda'_2\partial y'-\partial(\lambda'_3\partial^2 y')\}\,\delta y'+2(\lambda''_3\partial^2 y'')\partial\delta y''-2(\lambda'_3\partial^2 y')\partial\,\delta y'$$
$$+\,2\{\lambda''_2\partial z''-\partial(\lambda''_3\partial^2 z'')\}\,\delta z''-2\{\lambda'_2\partial z'-\partial(\lambda'_3\partial^2 z')\}\,\delta z'+2(\lambda''_3\partial^2 z'')\partial\delta z''-2(\lambda'_3\partial^2 z')\partial\,\delta z'\,.\quad(44)$$

De integraal, in deze vergelijking voorkomende, wordt gedacht over de geheele massa uitgestrekt te zijn; zij is derhalve, alhoewel zonder bepaalde aanduiding, eene bepaalde integraal. Maar in deze zelfde vergelijking zijn nu al de variatiën, zoowel de bepaalde (buiten de integraal) als de onbepaalde (in de integraal) onderling onafhankelijk. Daarom wordt aan de vergelijking voldaan door den coëfficiënt van elke der variatiën gelijk *nul* te stellen. Derhalve zal men de navolgende vergelijkingen hebben:

$$X\,\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1\,x-2\,\partial(\lambda_2\,\partial x)+2\,\partial^2(\lambda_3\,\partial^2 x)=0;\;\ldots\ldots\ldots\;(45)$$

$$Y\,\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1\,y-2\,\partial(\lambda_2\,\partial y)+2\,\partial^2(\lambda_3\,\partial^2 y)=0;\;\ldots\ldots\ldots\;(46)$$

$$Z\,\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1\,z-2\,\partial(\lambda_2\,\partial z)+2\,\partial^2(\lambda_3\,\partial^2 z)=0.\;\ldots\ldots\ldots\;(47)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda''_2\partial x'' - \partial(\lambda''_3\partial^2 x'') = 0;\ \lambda'_2\partial x' - \partial(\lambda'_3\partial^2 x') = 0;\ \lambda''_3\partial^2 x'' = 0;\ \lambda'_3\partial^2 x' = 0.\\ \lambda''_2\partial y'' - \partial(\lambda''_3\partial^2 y'') = 0;\ \lambda'_2\partial y - \partial(\lambda'_3\partial^2 y') = 0;\ \lambda''_3\partial^2 y'' = 0;\ \lambda'_3\partial^2 y' = 0.\\ \lambda''_2\partial z'' - \partial(\lambda''_3\partial^2 z'') = 0;\ \lambda'_2\partial z' - \partial(\lambda'_3\partial^2 z') = 0;\ \lambda''_3\partial^2 z'' = 0;\ \lambda'_3\partial^2 z' = 0.\end{array}\right\} . (48)$$

Wanneer uit de vergelijkingen (45), (46), (47), twee aan twee genomen, de onbepaalde factor λ_1 wordt geëlimineerd, zullen de onbepaalde integralen der komende vergelijkingen, na herleiding door middel van het integreren bij gedeelten, bevonden worden te zijn:

$$\left.\begin{array}{l}\int\left\{\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial m - (y\mathrm{Z}\partial m - z\mathrm{Y}\partial m)\right\} - 2\{\lambda_2\partial y - \partial(\lambda_3\partial^2 y)\}z\\ \qquad + 2\{\lambda_2\partial z - \partial(\lambda_3\partial^2 z)\}y - 2\lambda_3(\partial z\partial^2 y - \partial y\partial^2 z) = \mathrm{C}_1;\\ \int\left\{\left(z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\partial m - (z\mathrm{X}\partial m - x\mathrm{Z}\partial m)\right\} - 2\{\lambda^2\partial z - \partial(\lambda_3\partial^2 z)\}x\\ \qquad + 2\{\lambda_2\partial x - \partial(\lambda_3\partial^2 x)\}z - 2\lambda_3(\partial x\partial^2 z - \partial z\partial^2 x) = \mathrm{C}_2;\\ \int\left\{\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m - (x\mathrm{Y}\partial m - y\mathrm{X}\partial m)\right\} - 2\{\lambda_2\partial x - \partial(\lambda_3\partial^2 x)\}y\\ \qquad + 2\{\lambda_2\partial y - \partial(\lambda_3\partial^2 y)\}x - 2\lambda_3(\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y) = \mathrm{C}_3.\end{array}\right\} \ldots (b)$$

De tweede leden C_1, C_2, C_3 dezer vergelijkingen zijn *nul*, vermits de integralen, in de eerste leden aanwezig, aan de eerste van hare limieten verdwijnen, terwijl ook de overige termen van die eerste leden aan dezelfde eerste limiet *nul* zijn, op grond van de vergelijkingen (48). Deze termen vallen insgelijks weg aan de tweede limiet der integralen. Worden derhalve de vergelijkingen (*b*) uitgestrekt over de geheele massa, dan blijven in de eerste leden alleenlijk de integraal-uitdrukkingen met betrekking tot de geheele massa, en er komen alzoo deze drie vergelijkingen, welke zijn de oorspronkelijke of onherleide vergelijkingen der beweging van een vast ligchaam om een vast punt:

$$\left.\begin{array}{l}\int\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial m = \int\left(y\mathrm{Z}\partial m - z\mathrm{Y}\partial m\right);\\ \int\left(z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\partial m = \int\left(z\mathrm{X}\partial m - x\mathrm{Z}\partial m\right);\\ \int\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m = \int\left(x\mathrm{Y}\partial m - y\mathrm{X}\partial m\right)\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (49)$$

5. De vergelijkingen der beweging kunnen ook verkregen worden door

eerst de vergelijkingen (45), (46), (47) te integreren, alsdan uit de onbepaalde integralen λ_2 te elimineren, en daarna, nogmaals integrerende, de integralen over de geheele massa te nemen; de factor λ_1 zal daarbij wegvallen. Uit de onbepaalde integralen van de vergelijkingen (45), (46), (47) zal volgen

$$\left.\begin{aligned} 2\{\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\} &= \int\left\{X\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m + 2\,\lambda_1\,x\right\}, \\ 2\{\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\} &= \int\left\{Y\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m + 2\,\lambda_1\,y\right\}, \\ 2\{\lambda_2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\} &= \int\left\{Z\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m + 2\,\lambda_1\,z\right\}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (50)$$

Aan de eerste limiet zijn de integralen *nul*, en volgens de vergelijkingen (48) zijn, voor deze limiet, ook de eerste leden dezer vergelijkingen *nul*; daarom behoeven geen standvastige termen of grootheden bijgevoegd te worden, of liever deze zijn *nul*. Strekt men de vergelijkingen (50) over de geheele massa uit, daarbij wederom op de vergelijkingen (48) lettende, dan heeft men deze andere vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} \int\left(X\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m + 2\,\lambda_1\,x\right) &= 0, \\ \int\left(Y\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m + 2\,\lambda_1\,y\right) &= 0, \\ \int\left(Z\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m + 2\,\lambda_1\,z\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

Elimineert men nu λ_2 uit de vergelijkingen (50), twee aan twee genomen, dan zullen er drie vergelijkingen komen, die men wederom zal kunnen integreren, en neemt men, op de drie zoo even verkregene vergelijkingen lettende, deze integralen over de geheele massa, dan zullen daaruit de vergelijkingen der beweging ontstaan. Het zij genoeg dit voor één dezer vergelijkingen aan te toonen. Men eliminere λ_2 b. v. uit de tweede en derde der vergelijkingen (50); dit zal geven

$$\partial y\int\left(Z\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial^2 t}\partial m + 2\lambda_1 z\right) - \partial z\int\left(Y\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m + 2\lambda_1 y\right) + 2\partial y.\partial(\lambda_3\partial^2 z) - 2\partial z.\partial(\lambda_3\partial^2 y) = 0,$$

en, bij gedeelten integrerende,

$$y\int\left(Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1 z\right)-z\int\left(Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1 y\right)-\int y\left(Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1 z\right)$$
$$+\int z\left(Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1 y\right)+2\lambda_3(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)=0.$$

Het tweede lid is *nul*, omdat aan de eerste limiet der integralen het geheele eerste lid *nul* is; de integralen toch, in dit eerste lid aanwezig, zijn, bij die limiet, nul, en de 3e, 4e, 7e, 8e, 11e en 12e der vergelijkingen (48) leeren, dat λ_3 zoowel aan de tweede als aan de eerste limiet *nul* is. Wordt nu de verkregene vergelijking met betrekking tot de geheele massa genomen, dan vallen, op grond van de vergelijkingen (51), de twee eerste der integralen in het voorste lid weg; ook vervalt de term, die λ_3 tot coëfficiënt heeft, en er blijft, na omkeering der teekens,

$$\int\left(yZ\partial m-y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1 yz\right)-\int\left(zY\partial m-z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1 yz\right)=0,$$

of

$$\int\left(yZ\partial m-zY\partial m-y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m+z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right)=0,$$

waaruit dan, door afscheiding enz., de eerste der vergelijkingen (49) voortkomt, en dat de beide andere op gelijkvormige wijze verkregen worden, zal wel geen verklaring behoeven.

4. Worden alleenlijk de vergelijkingen (49) der beweging gevraagd en niet meer, dan kunnen deze ook, zonder tusschenkomst van onbepaalde vermenigvuldigers, verkregen worden op de wijze, gevolgd in art. 7 van § I. Daartoe moeten, door middel van de voorwaardes-vergelijkingen der variatiën van de onbepaalde coördinaten, de algemeene waarden van δx, δy, δz worden bepaald. Deze waarden gesubstitueerd zijnde in de vergelijking (1), zal de noodzakelijke betrekking, welke tusschen de onbepaalde variatiën moet bestaan, in rekening zijn gebragt, en de vergelijkingen der beweging zullen dan onmiddellijk moeten verkregen worden. Het aantal dezer vergelijkingen is drie; de vraag rijst derhalve, hoe deze drie uit de enkele vergelijking (1) ontstaan? Men merke op dat, om δx, δy, δz te vinden, de vergelijkingen (42) en (43), in verband met (41), zullen moeten worden geïntegreerd. Hierdoor worden er willekeurige standvastige grootheden ingevoerd, die, van dezelfde orde moetende zijn als de te bepalen elementen δx, δy, δz, als variatiën, en wel als willekeurige en daarom onderling onafhankelijke variatiën,

zullen mogen en moeten beschouwd worden. Het aantal dier willekeurige standvastige grootheden zal blijken *drie* te zijn. De vergelijking (1) zal dienvolgens, door de substitutie der waarden van δx, δy, δz, herleid worden tot eene andere vergelijking, niet meer van onderling zamenhangende, maar van willekeurige variatiën afhangende. Al de termen van die herleide vergelijking (1) zullen eene zoodanige variatie tot factor hebben. Het vereenigen der termen, door eene zelfde willekeurige variatie vermenigvuldigd, zal drie sommen van termen opleveren. En de herleide vergelijking gelijk *nul* moetende zijn, onafhankelijk van elke waarde aan de willekeurige variatiën toe te kennen, zal er alleenlijk, met betrekking tot hetgeen men zoekt, voldaan kunnen worden door elke der drie sommen van termen gelijk *nul* te stellen; daaruit komen dan de drie vergelijkingen der beweging.

Laat, tot meerdere eenvoudigheid en duidelijkheid, δx, δy, δz aangeduid en vervangen worden door u, v, w, dan zijn de vergelijkingen (41), (42), (43), ter bepaling van u, v, w, deze:

$$xu + yv + zw = 0, \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

$$\partial x \partial u + \partial y \partial v + \partial z \partial w = 0, \quad \ldots \ldots \quad (\beta)$$

$$\partial^2 x \partial^2 u + \partial^2 y \partial^2 v + \partial^2 z \partial^2 w = 0. \quad \ldots \ldots \quad (\gamma)$$

De elementen, in deze vergelijkingen voorkomende, hebben alleenlijk betrekking tot coördinaten van punten der massa. De differentiaal van den tijd, welke in de differentiaal-vergelijkingen der beweging het onafhankelijk veranderlijk element is, komt hier in geen aanmerking. Daarom zou, voor het meer gemakkelijk integreren, eene der eerste differentialen, b. v. ∂x, als standvastig mogen aangenomen worden. Dit worde evenwel niet gedaan, zoodat dan ook de vergelijkingen (α), (β), (γ) den meer algemeenen vorm blijven behouden, onder welken zij ten opzigte van al hunne elementen x, y, z, u, v, w, ∂x, ∂y .... volkomen symmetrisch zijn.

De differentiaal van de vergelijking (α) is

$$x\partial u + u\partial x + y\partial v + v\partial y + z\partial w + w\partial z = 0. \quad \ldots \ldots \quad (\delta)$$

Wederom differentiërende, en op de betrekking (β) lettende, komt:

$$x\partial^2 u + u\partial^2 x + y\partial^2 v + v\partial^2 y + z\partial^2 w + w\partial^2 z = 0. \quad \ldots \ldots \quad (\varepsilon)$$

Uit (α), (β), (δ) w en ∂w eliminerende, zal verkregen worden:

$$(x\partial z - z\partial x)(z\partial u - u\partial z) + (y\partial z - z\partial y)(z\partial v - v\partial z) = 0. \quad \ldots \ldots \quad (\theta)$$

Eveneens, door eliminatie van w en $\partial^2 w$ uit (α), (γ), (ε),

$$(x\partial^2 z - z\partial^2 x)(z\partial^2 u - u\partial^2 z) + (y\partial^2 z - z\partial^2 y)(z\partial^2 v - v\partial^2 z) = 0. \quad \ldots \quad (\zeta)$$

Klaarblijkelijk hebben deze twee vergelijkingen (θ) en (ζ) den vorm

$$P.Q + R.S = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\iota)$$

$$\partial P.\partial Q + \partial R.\partial S = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\varkappa)$$

Zij hebben derhalve, ten opzigte van *vier* functiën, denzelfden vorm als de vergelijkingen (α), (β), ten opzigte van *zes* elementen, zoodat van de *drie* symmetrische vergelijkingen (α), (β), (γ) met *zes* veranderlijke grootheden als ware het is afgedaald tot *twee* symmetrische vergelijkingen met *vier* veranderlijke functiën, en uit deze twee komt men nu eveneens tot enkele vergelijkingen met *twee* van die veranderlijke functiën. Want uit de differentiaal van (ι), dat is uit

$$P\partial Q + Q\partial P + R\partial S + S\partial R = 0,$$

en uit (ι) en ($\varkappa$), S en ∂S eliminerende, komt

$$R(P\partial R - R\partial P)\partial Q - Q(P\partial R - R\partial P)\partial R = 0,$$

dat is

$$(P\partial R - R\partial P)(R\partial Q - Q\partial R) = 0.$$

Dienvolgens

$$\frac{\partial P}{P} = \frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial R}{R},$$

of

$$\frac{x\partial^2 z - z\partial^2 x}{x\partial z - z\partial x} = \frac{y\partial^2 z - z\partial^2 y}{y\partial z - z\partial y} = \frac{z\partial^2 u - u\partial^2 z}{z\partial u - u\partial z},$$

en dan ook

$$\frac{z\partial^2 v - v\partial^2 z}{z\partial v - v\partial z} = \frac{x\partial^2 z - z\partial^2 x}{x\partial z - z\partial x} = \text{enz.},$$

welke vergelijkingen onmiddellijk kunnen worden geïntegreerd. Men heeft b. v., uit $\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial R}{R}$, $Q = aR$, dat is

$$z\partial u - u\partial z = -a(z\partial y - y\partial z),$$

en van deze is de integraal

$$\frac{u}{z} = -a\frac{y}{z} + b; \quad \text{of} \quad u = -ay + bz,$$

zijnde a en b de willekeurige standvastige grootheden, door het integreren bijgekomen.

Men zou nu wel eveneens verkrijgen $v = -cx + dz$, maar de willekeurige standvastige grootheden kunnen niet alle onderscheiden wezen, want er moet aan de vergelijkingen (α) en (β) worden voldaan. Dit blijkt dan ook, van een anderen kant, door de gevondene eerste integraal $(z\partial u - u\partial z) = -a(z\partial y - y\partial z)$, dewijl, ingevolge deze, de vergelijking (θ) overgaat in

$$z\partial v - v\partial z = -a(x\partial z - z\partial x),$$

van welke de integraal is

$$v = ax + cz,$$

zijnde c eene derde willekeurige standvastige grootheid, voor welke het geoorloofd is te stellen $-c$, opdat de vorm der uitdrukking van waarde voor v aan die voor u gelijk zij, hetgeen, op grond der symmetrie, in de gegevene vergelijkingen ten opzigte van al de elementen bestaande, gepast is. Met $u = -ay + bz$, en $v = ax - cz$ geeft de vergelijking (α), $w = -bx + cq$. De begeerde uitkomst zal derhalve zijn (indien a, b, c gesteld worden onder den vorm van variatiën, b. v. δf, δg, δh,),

$$\delta x = -y\delta f + z\partial g, \qquad \delta y = x\delta f - z\delta h, \qquad \delta z = -x\delta g + y\delta h,$$

en met deze waarden zal dan de bepaalde vergelijking der virtuele momenten zijn:

$$\int\Big\{\Big[-yX\partial m + y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m + xY\partial m - x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\Big]\delta f$$

$$+\Big[+zX\partial m - z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m - xZ\partial m + x\frac{\partial^2 z}{\partial^2 t}\partial m\Big]\delta g$$

$$+\Big[-zY\partial m + z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m + yZ\partial m - y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\Big]\delta h\Big\} = 0.$$

In plaats van de enkele integraal van het geheele voorste lid dezer vergelijking, kan eene som van drie integralen van de drie termen, waaruit dat voorste lid onder het integraal-teeken bestaat, gesteld worden. Daar verder δf, δg, δh standvastig zijn en voor al de elementen der massa dezelfde waarde geacht mogen worden te hebben, zal het ook geoorloofd wezen deze grootheden vóór of buiten de integraal-uitdrukkingen te plaatsen. Alsdan zal aan de vervormde of gewijzigde vergelijking worden voldaan door de coëfficiënten van δf, δg, δh, dat is elke der drie bedoelde integralen, aan *nul* gelijk te stellen, en daaruit verkrijgt men dan terstond de drie begeerde vergelijkingen (49) der beweging.

5. De eerste leden der vergelijkingen (49) kunnen worden vervormd en herleid, zoodat zij afhangen van de hoeksnelheden of differentiale hoekbewegingen der massa om hare coördinaten-assen. De integralen zullen daarbij meer ontwikkeld kunnen worden, en indien dan, als coördinaten-assen der massa, de *hoofdassen der massa met betrekking tot het vaste punt* worden genomen, zullen de vergelijkingen (49) tot den eenvoudigsten vorm zijn gebragt, en als eerste differentiaal-vergelijkingen der beweging van het ligchaam om het vaste punt kunnen aangemerkt worden.

Laten p, q, r in rangorde aanduiden de grootten der hoeksnelheden van beweging der massa om of met betrekking tot de assen der coördinaten x, y, z. Eenig element hebbe tot de as der abscissen x een afstand s, zijnde $s = \sqrt{(y^2 + z^2)}$. Daar de hoeksnelheid met betrekking tot de as x is p, zal de volstrekte snelheid der draaijende beweging van het gedacht element ten opzigte van dezelfde as x zijn ps. De beweging van het element door een oneindig klein boogje van den cirkel, hebbende s tot straal, kan gedacht worden ontbonden te zijn in twee andere differentiaal-bewegingen, evenwijdig aan de assen der coördinaten y en z. Deze zamenstellende bewegingen zullen in grootte zijn:

$$\textit{evenwijdig aan de as van } \mathrm{y}, = -ps.\frac{z}{s} = -pz,$$

$$\textit{evenwijdig aan de as van } \mathrm{z}, = +ps.\frac{y}{s} = +py.$$

Hierbij is aangenomen dat de rigting der draaijende beweging is opwaarts in het octant der positieve coördinaten x. y, z, zoodat de ordinaat y kleiner, maar z grooter wordt, en de beweging geschiedt als ware het van de positieve zijde der as y tot of naar de positieve rigting van de as z.

Eveneens zal eene draaijende differentiaal-beweging qs' om de coördinaten-as y, en gerigt van de positieve rigting der as z naar de positieve zijde der as van de abscissen x, ontbonden gedacht kunnen worden in twee regtlijnige differentiaal-bewegingen, evenwijdig aan de assen der coördinaten x en z, en van deze bewegingen zullen de grootten zijn:

$$\textit{evenwijdig aan de as van } \mathrm{x}, = +qz,$$

$$\textit{evenwijdig aan de as van } \mathrm{z}, = -qx.$$

En de cirkelvormige differentiaal-beweging rs'' van hetzelfde element met betrekking tot de as der ordinaten z, en gerigt van de positieve streek der

35

as van x naar de positieve zijde van de as der ordinaten y, zal insgelijks twee zamenstellende regtlijnige differentiaal-bewegingen opleveren, te weten:

de eene, *evenwijdig aan de as van* x, $= - ry$,

de andere, *evenwijdig aan de as van* y, $= + rx$.

Denkt men derhalve de draaijende differentiaal-beweging van eenig element der massa om de onbestendige as ontbonden in drie dergelijke bewegingen om de coördinaten-assen der massa, en elke dezer wederom in regtlijnige differentiaal-bewegingen evenwijdig aan de coördinaten-assen, dan zullen de totale zamenstellende regtlijnige bewegingen zijn:

evenwijdig aan de as der abscissen x, $= qz - ry$,

evenwijdig aan de as der ordinaten y, $= rx - pz$,

evenwijdig aan de as der ordinaten z, $= py - qx$.

Maar deze zijn nu niet onderscheiden van de snelheden der beweging van het element met betrekking tot de genoemde assen, zoodat men mag stellen

$$\frac{\partial x}{\partial t} = qz - ry; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = rx - pz; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = py - qx. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

Hieruit zal volgen, dewijl al de bestanddeelen dezer vergelijkingen veranderlijk zijn,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= z\frac{\partial q}{\partial t} - y\frac{\partial r}{\partial t} + q(py - qx) - r(rx - pz), \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= x\frac{\partial r}{\partial t} - z\frac{\partial p}{\partial t} + r(qz - ry) - p(py - qx), \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= y\frac{\partial p}{\partial t} - x\frac{\partial q}{\partial t} + p(rx - pz) - q(qz - ry).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (53)$$

Deze uitdrukkingen moeten nu gesubstitueerd worden in de eerste leden der vergelijkingen (49). Laat dit b. v. geschieden in de eerste van die vergelijkingen, dan wordt zij

$$\int \Big\{ \frac{\partial p}{\partial t}(y^2 + z^2)\partial m - \frac{\partial q}{\partial t} xy\,\partial m - \frac{\partial r}{\partial t} xz\,\partial m + qr(y^2 - z^2)\partial m - (q^2 - r^2)yz\,\partial m$$

$$+ prxy\,\partial m - pqxz\,\partial m \Big\} = \int (yZ\,\partial m - zY\,\partial m).$$

De hoeksnelheden en hare veranderingen, dat is de hoekversnellingen, zijn voor al de elementen der massa dezelfde. Derhalve moeten zij, bij het nemen der integraal of wel der integralen van de termen des eersten lids over de geheele massa, als standvastig worden aangemerkt. Neemt men tevens die lijnen als coördinaten-assen der massa, welke zijn de *hoofdassen der massa voor of met betrekking tot het vaste punt*, dan worden de integralen der termen, die van de producten $xy\,\partial m$, $xz\,\partial m$, $yz\,\partial m$ afhangen, *nul*, en de vergelijking gaat over in

$$\frac{\partial p}{\partial t}\int(y^2+z^2)\,\partial m - qr\int(z^2-y^2)\,\partial m = \int(y\,Z\,\partial m - z\,Y\,\partial m).$$

De grootte der momenten van traagheid der massa met betrekking tot de opgenoemde hoofdassen mag, even zoo als de plaats of ligging dezer hoofdassen, als bekend of gegeven worden aangemerkt. Zijn A, B, C de grootten dezer momenten, genomen in de orde der coördinaten x, y, z, dan is

$$\int(y^2+z^2)\,\partial m = \text{A},\quad \int(x^2+z^2)\,\partial m = \text{B},\quad \int(x^2+y^2)\,\partial m = \text{C};$$

derhalve ook

$$\int(z^2-y^2)\,\partial m = (\text{B}-\text{C}).$$

Het tweede lid der onderwerpelijke vergelijking van de beweging der massa, drukt klaarblijkelijk uit het moment van een koppel van draaijende beweging om de as der abscissen x, namelijk van een koppel gelijk aan de som van al de koppels, loodregt op de as van x, en ontstaan uit de werkingen der krachten $X\,\partial m$, $Y\,\partial m$, $Z\,\partial m$ op de elementen der massa. Wordt de grootte of het moment van dit totale koppel aangeduid door L, dan zal de herleide eerste vergelijking der draaijende beweging van het vast ligchaam zijn

$$\text{A}\frac{\partial p}{\partial t} - (\text{B}-\text{C})\,qr = \text{L}.$$

De beide andere vergelijkingen kunnen op gelijkvormige wijze herleid worden, en wanneer M en N beteekenen de momenten der koppels, welke eene draaijende beweging aan het ligchaam om de coördinaten-assen y en z zouden kunnen mededeelen, gelijk aan die welke al de op de elementen werkende krachten gezamenlijk pogen te doen ontstaan, — of ook, en juister, gelijk aan die, welke men zal moeten verkrijgen door het ontbinden der eigenlijke koppels van beweging des ligchaams om de onbestendige as, — zullen in plaats van de drie vergelijkingen (49) deze drie andere herleide en meer eenvoudige vergelijkingen komen:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial p}{\partial t} &= (B-C)\,qr + L, \\ B\frac{\partial q}{\partial t} &= (C-A)\,pr + M, \\ C\frac{\partial r}{\partial t} &= (A-B)\,pq + N. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Zij zijn de bekende vergelijkingen der beweging van een vast ligchaam om een vast punt; zij hebben den vorm van differentiaal-vergelijkingen van de eerste orde, die gelijktijdig bestaan, en zij zijn daarom eerste differentiaal-vergelijkingen der beweging van het ligchaam. Door het integreren worden p, q, r in functie van den tijd bekend, en drie andere vergelijkingen, welker afleiding of vorming niet tot het onderwerp dezer Bijdrage behoort, dienen daarna om, met de waarden van p, q, r voor eenig oogenblik, de stelling der hoofdassen, gaande door het vaste punt, met betrekking tot de vaste coördinaten-assen te vinden. Daarmede zal het voorstel, voor zoo ver de beweging aangaat, opgelost zijn.

6. Ter bepaling van de hoegrootheid der drukking, door de werking der krachten en ten gevolge der beweging op het vaste punt uitgeoefend, heeft men *vooreerst* uit de vergelijkingen (45), (46), (47),

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2x}\left\{X\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\right]\right\} \\ &= -\frac{1}{2y}\left\{Y\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\right]\right\} \\ &= -\frac{1}{2z}\left\{Z\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial^2 t}\,\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Ten *anderen* is, door de vergelijking (40),

$$U_1 = \pm\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial L_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial z}\right)^2\right\}} = \pm\,2\varrho.$$

Derhalve komt voor de drukking $\lambda_1 U_1$ of $d\rho$, uitgeoefend op het element ∂m in de normale rigting op de baan, door dit element om het vaste punt beschreven, en dan ook uitgeoefend op het vaste punt zelve in de rigting van den voerstraal ϱ,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_\rho &= \frac{\varrho}{x}\left\{X\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\right]\right\} \\ &= \frac{\varrho}{y}\left\{Y\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\right]\right\} \\ &= \frac{\varrho}{z}\left\{Z\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Hieruit onmiddellijk

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}_x &= X\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\right], \\ \mathrm{d}_y &= Y\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\right], \\ \mathrm{d}_z &= Z\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\right], \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (55)$$

De drukking d_ρ bestaat oorspronkelijk op het element ∂m; vermits hare rigting is die van den voerstraal ϱ, kan zij ook gedacht worden als uitgeoefend tegen het vaste punt, en dan zijn d_x, d_y, d_z de drukkingen (met betrekking tot een enkel element, verbonden met de onmiddellijk aansluitende), uitgeoefend tegen het vaste punt in de rigting der coördinaten-assen. Men kan evenwel de drukking d_ρ op eenig element eerst, ter plaatse van dit element, ontbonden denken in de drukkingen d_x, d_y, d_z evenwijdig aan de coördinaten-assen, en ze alsdan overbrengen op of langs deze assen, maar dan ontstaan er tevens drie koppels k_x, k_y, k_z, loodregt op de coördinaten-assen. De uitdrukkingen der momenten van deze koppels zijn:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{k}_x &= y\,\mathrm{d}_z - z\mathrm{d}_y = (y\,Z\,\partial m - z\,Y\,\partial m) - \left(y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial m - \\ &\qquad - 2y\partial\left\{\lambda_2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\right\} + 2z\partial\left\{\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\right\}, \\ \mathrm{k}_y &= z\,\mathrm{d}_x - x\mathrm{d}_z = (z\,X\,\partial m - x\,Z\,\partial m) - \left(z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\partial m - \\ &\qquad - 2z\partial\left\{\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\right\} + 2x\partial\left\{\lambda_2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\right\}, \\ \mathrm{k}_z &= x\,\mathrm{d}_y - y\mathrm{d}_x = (x\,Y\,\partial m - y\,X\,\partial m) - \left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m - \\ &\qquad - 2x\partial\left\{\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\right\} + 2y\partial\left\{\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\right\}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (56)$$

Deze koppels, voor al de elementen te zamen genomen, zouden zijn koppels van drukkingen, indien de beweging der massa om de coördinaten-assen niet kon plaats grijpen. Maar terwijl een zelfde punt der massa voorwaardelijk in het vaste punt blijft of van plaats niet verandert, is de beweging der massa om elke van hare coördinaten-assen onbelemmerd of niet meer belemmerd. Daarom zijn de genoemde totale koppels van drukkingen *nul*, en de integralen (over de geheele massa genomen) der tweede leden van de vergelijkingen (56) moeten dienvolgens, aan *nul* gelijk gesteld zijnde, wederom de vergelijkingen (49) der beweging opleveren. Het zal voldoende zijn dit voor één der vergelijkingen (56) aan te toonen, b. v. voor de eerste dezer vergelijkingen. Bestonden in deze vergelijking de *derde* en *vierde* termen niet, dan zou de integraal, over de geheele massa uitgestrekt, en het eerste lid van de vergelijking gelijk nul gesteld, inderdaad van de eerste der vergelijkingen (49) niet onderscheiden zijn. Derhalve moet slechts blijken, dat de integraal der som van die derde en vierde termen *nul* is, als zij over de geheele massa wordt genomen. De onbepaalde integraal is

$$\int 2y\partial\{\lambda_2\partial z-\partial(\lambda_3\partial^2 z)\}-\int 2z\partial\{\lambda_2\partial y-\partial(\lambda_3\partial^2 y)\}=2y\{\lambda_2\partial z-\partial(\lambda_3\partial^2 z)\}$$
$$-2z\{\lambda_2\partial y-\partial(\lambda_3\partial^2 y)\}+2\int\{\partial y\partial(\lambda_3\partial^2 z)-\partial z\partial(\lambda_3\partial^2 y)\}.$$

Tusschen de limieten der massa genomen zijnde, zal de waarde van het eerste lid gelijk zijn aan den derden term van het tweede lid, tusschen dezelfde grenzen genomen; want volgens de vergelijkingen (48) zullen, aan deze grenzen, de eerste en de tweede termen van het tweede lid *nul* worden. De ontwikkeling van den derden term geeft, zonder nog op de limieten te letten,

$$2\int\{\partial y\partial(\lambda_3\partial^2 z)-\partial z\partial(\lambda_3\partial^2 y)\}=2\lambda_3(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y),$$

en vermits aan de limieten λ_3 gelijk *nul* is, (of eigenlijk $\lambda_3\partial^2 y=0$ en $\lambda_3\partial^2 z=0$, volgens (48)), zal de bepaalde integraal insgelijks *nul* zijn *.

Worden de tweede leden van de vergelijkingen (55) over de geheele massa

* Op het hier ontwikkelde is door den Heer STAMKART eene aanmerking gemaakt in denzelfden zin als op het behandelde in § I, art. 9, en met aanduiding eener soortgelijke bekorting in de berekening.

genomen (te weten door integreren), dan zullen, op grond van de vergelijkingen (48), de integralen van de derde termen dier leden wegvallen, en voor de totale zamenstellende drukkingen tegen het vaste punt verkrijgt men

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \int X\partial m - \int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m, \\ D_y &= \int Y\partial m - \int \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m, \\ D_z &= \int Z\partial m - \int \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m, \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

hebbende de integralen, alhoewel zonder bepaalde aanduiding, betrekking tot de geheele massa. Integreert men nu in dezen zin de tweede leden van de vergelijkingen (55), en substitueert men de uitkomsten in de tweede leden van de pas verkregene vergelijkingen, dan zal er, als x_1, y_1, z_1 zijn de coördinaten van het zwaartepunt der massa, komen:

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \int X\partial m + (q^2 + r^2) m x_1 - pq m y_1 - pr m z_1 + \frac{\partial r}{\partial t} m y_1 - \frac{\partial q}{\partial t} m z_1; \\ D_y &= \int Y\partial m + (p^2 + r^2) m y_1 - qp m x_1 - qr m z_1 + \frac{\partial p}{\partial t} m z_1 - \frac{\partial r}{\partial t} m x_1; \\ D_z &= \int Z\partial m + (p^2 + q^2) m z_1 - rp m x_1 - rq m y_1 + \frac{\partial q}{\partial t} m x_1 - \frac{\partial p}{\partial t} m y_1. \end{aligned}\right\} . (57)$$

Bijaldien derhalve geen krachten op de elementen van het ligchaam blijven werken, en dat het zwaartepunt is het vaste punt, zal dit punt gedurende de beweging niet gedrukt worden.

Zijn twee der hoeksnelheden *nul*, b. v. p en q, dan bestaat er slechts draaijende beweging om de as der ordinaten z, even alsof deze eene vaste as van omwenteling ware, en de vergelijkingen (57) zullen, gelijk behoort, overgaan in de vroeger verkregene vergelijkingen (54) en (56).

7. De vergelijkingen (57) kunnen tot een anderen vorm worden herleid, overeenkomende met dien van de vergelijkingen (54), en onder welken de termen der tweede leden eene meer bepaalde beteekenis hebben. Zij b. v. de eerste der vergelijkingen (57). Het vereenigde van de tweede, derde en vierde termen van het tweede lid kan aldus worden voorgesteld:

$$(q^2 + r^2) m x_1 - pq m y_1 - pr m z_1 = (p^2 + q^2 + r^2) m x_1 - p(p x_1 + q y_1 + r z_1) m.$$

p, q, r zijn de hoeksnelheden der draaijende beweging met betrekking tot de coördinaten-assen der massa. Wordt de hoeksnelheid der werkelijke beweging om de onbestendige as aangeduid door ω, dan zal, gelijk bekend is, of hetgeen als bekend mag aangenomen worden (zoo noodig, zou het ook door middel van de vergelijkingen (52) ligtelijk blijken), $p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$ zijn. Ook zullen $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}$ wezen de uitdrukkingen van grootte der *cosinussen* van de hoeken tusschen de rigtingen van de onbestendige as en der coördinaten-assen van de massa. Daarom zal dan de projectie van den voerstraal ϱ_1 des zwaartepunts op de onbestendige as eene grootte hebben $\doteq \left(\frac{p}{\omega} x_1 + \frac{q}{\omega} y_1 + \frac{r}{\omega} z_1\right)$. En deze projectie nu projecterende op de as der abscissen x, komt voor de abscis ξ_1 van het voetpunt der loodlijn, uit het zwaartepunt op de onbestendige as nedergelaten,

$$\xi_1 = \frac{p}{\omega}\left(\frac{p}{\omega} x_1 + \frac{q}{\omega} y_1 + \frac{r}{\omega} z_1\right),$$

zoodat dan

$$(p^2 + q^2 + r^2) m x_1 - p(p x_1 + q y_1 + r z_1) m = \omega^2 m x_1 - \omega^2 m \xi_1 = \omega^2 m (x_1 - \xi_1)$$

zal zijn. Eveneens zal, indien η_1 en ζ_1 zijn de twee andere coördinaten van het voetpunt der pasgenoemde loodlijn, gevonden worden,

$$(p^2 + r^2) m y_1 - q p m x_1 - q r m z_1 = \omega^2 m (y_1 - \eta_1),$$
$$(p^2 + q^2) m z_1 - r p m x_1 - r q m y_1 = \omega^2 m (z_1 - \zeta_1).$$

De vergelijkingen (57) zullen dienvolgens overgaan in deze:

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \int X \partial m + \omega^2 m (x_1 - \xi_1) + m\left(\frac{\partial r}{\partial t} y_1 - \frac{\partial q}{\partial t} z_1\right), \\ D_y &= \int Y \partial m + \omega^2 m (y_1 - \eta_1) + m\left(\frac{\partial p}{\partial t} z_1 - \frac{\partial r}{\partial t} x_1\right), \\ D_z &= \int Z \partial m + \omega^2 m (z_1 - \zeta_1) + m\left(\frac{\partial q}{\partial t} x_1 - \frac{\partial p}{\partial t} y_1\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (58)$$

Deze vergelijkingen hebben denzelfden vorm als de vergelijkingen (54), en de overeenkomstige termen der tweede leden hebben eene gelijke beteekenis. Elke term is de uitdrukking der grootte van een zeker gedeelte der uitgeoefende zamenstellende drukkingen. De *eerste* termen geven de aandeelen der drukkingen, te weeg gebragt door al de versnellende krachten. Door de draaijende beweging van het ligchaam ontstaan middelpuntsvliedende krachten, die onophoudelijk in grootte veranderen; deze drukken de onbestendige as en veroorzaken hare gedurige zwenking; maar zij oefenen dan ook drukking tegen het vaste punt uit; en van de grootte der hieruit afgeleide zamenstellende drukkingen zijn de *tweede* termen de uitdrukkingen. En de *derde* termen hebben betrekking tot de zamenstellende drukkingen, voortkomende uit de verandering of aangroeijing der hoeveelheden beweging van de elementen der massa.

Niet ongepast is het, hier ter plaatse op te merken of te herinneren, dat de termen van de differentiaal-vergelijkingen (54) der beweging, of die der uitdrukkingen van de aan nul gelijk gestelde totale koppels van drukkingen (uit de vergelijkingen (56) af te leiden), eene gelijkvormige beteekenis hebben. Terstond blijkt toch, dat de eerste leden, of de enkele termen die de eerste leden der vergelijkingen (54) zijn, als uitdrukkende producten van traagheidsmomenten en hoekversnellingen, gehouden kunnen worden te zijn rekenkundige voorstellingen van zamenstellende hoeveelheden versnellende beweging om de coördinaten-assen der massa; zij zijn dan ook uitdrukkingen der momenten van koppels van versnellende krachten, de zamenstellende zijnde van die, welke aan de elementen der massa, indien zij vrij waren, dezelfde differentiaal-beweging om de onbestendige as zouden mededeelen als die zij werkelijk hebben. Eveneens duiden de laatste termen der tweede leden de grootten of momenten aan van de zamenstellende koppels der werkende of versnellende krachten. En de zamenstellende koppels der ontwikkelde middelpuntsvliedende krachten hebben eene grootte, van welke de eerste termen der tweede leden de uitdrukkingen zijn. Dit laatste blijkt wel niet bij een blootelijk inzien van de vergelijkingen (54), maar de berekening, die tot deze uitkomst voert, is niet ingewikkeld. Men denke namelijk uit eenig element ∂m eene loodlijn l op de onbestendige as, en noeme de coördinaten van het voetpunt dezer loodlijn ξ, η, ζ. De drukking tegen de onbestendige as, veroorzaakt door de middelpuntsvliedende kracht van ∂m, zal $= \partial m\, l \omega^2$ zijn. ξ, η en ζ zijn bekend door uitdrukkingen, gelijkvormig aan die, welke hier boven voor ξ_1, η_1, ζ_1, zijn gevonden of aangewezen. $(x-\xi)$, $(y-\eta)$, $(z-\zeta)$ zijn derhalve mede bekend, en men vindt dan ook de uitdrukking voor l, van welke $(x-\xi)$, $(y-\eta)$, $(z-\zeta)$ de projectiën zijn. Hierdoor komt men tot de uitdrukkingen voor de zamenstellende drukkingen, evenwijdig aan de coördinaten-assen der massa. Verder tot die der koppels loodregt op deze assen. En deze koppels alsdan over de geheele massa nemende, tevens daarop lettende, dat de coördinaten-assen zijn hoofdassen, zullen de grootten der totale zamenstellende hier bedoelde koppels blijken te zijn: $(B-C)\,qr$, $(C-A)\,pr$ en $(A-B)\,pq$. Men kan ook vergelijken: Poinsot, *Nouvelle Théorie de la rotation des corps*, 2e partie, art. 75—76; en Briot, *Thèse sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe* (*Journal de mathématiques pures et appliquées, par* Liouville, Tome VII, p. 74).

De vergelijkingen (58) gaan wederom over in (54) als p en q nul zijn; want de hoofdas z alsdan omwentelings-as zijnde, worden ξ_1 en η_1 *nul*, en daar ζ_1 alsdan $= z_1$ is, wordt ook $(z_1 - \zeta_1) = 0$.

De enkele of zamengestelde drukking D_ρ op het vaste punt zal nu, zoo in rigting als in grootte, uit de zamenstellende drukkingen D_x, D_y, D_z bekend zijn. De algemeene uitdrukking of formule, welke de waarde van D_ρ geeft, is echter niet eenvoudig, en zij leert ook niets belangrijks.

8. Werken geen krachten onafgebroken op de elementen der massa, maar is het ligchaam in beweging gebragt door eene enkele kracht P', welke daarna heeft opgehouden te werken, dan kunnen grootte en rigting der drukking, hierbij op het vaste punt uitgeoefend, mede door de gevondene formulen worden bepaald. Want de beweegkracht P' in grootte, rigting en plaats van werking bekend zijnde, kent men ook de krachten X', Y', Z', waarin P', evenwijdig aan de coördinaten-assen der massa, is ontbonden, alsmede de koppels L', M', N', loodregt op deze assen, en bij de krachten X', Y', Z' moetende komen, als deze gedacht worden in of langs de coördinaten-assen op het vaste punt te zijn overgebragt. Bij het begin der beweging zijn p, q, r *nul*, maar er worden hoeksnelheden geboren, er zijn aanvankelijke hoeksnelheden p', q', r', en deze zijn bepaald door de formulen

$$p' = \frac{L'}{A}, \quad q' = \frac{M'}{B}, \quad r' = \frac{N'}{C}.$$

Dit volgt niet alleenlijk uit het toepassen van den regel, welke de hoeksnelheid der draaijende beweging eener massa leert vinden, als haar moment van traagheid ten opzigte van de omwentelings-as, gelijk ook het moment der bewegende kracht, of dat van het koppel bewegende krachten, met betrekking tot dezelfde as, gegeven zijn, maar het volgt ook uit de differentiaalvergelijkingen (54) der beweging, indien namelijk p, q, r *nul* worden gesteld, en L', M', N' in plaats van L, M, N. Want dan zullen ook de hoekversnellingen $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial q}{\partial t}$, $\frac{\partial r}{\partial t}$, niet onderscheiden wezen van de geboren wordende of aanvankelijke hoeksnelheden p', q', r'.

De drukkingen, uitgeoefend op het vaste punt in de rigting der coördinaten-assen op het oogenblik van de mededeeling der beweging, zullen derhalve bekend worden door de formulen (57) als men stelt p, q, r *nul*, of door de formulen (58) als ω *nul* gesteld wordt, mits ook in deze of in gene formulen X', Y', Z' substituerende in plaats van $\int X\partial m$, $\int Y\partial m$, $\int Z\partial m$, en p', q', r' voor $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial q}{\partial t}$, $\frac{\partial r}{\partial t}$. Er komt dan

$$\left.\begin{aligned} D'_x &= X' + m(r'y_1 - q'z_1),\\ D'_y &= Y' + m(p'z_1 - r'x_1),\\ D'_z &= Z' + m(q'x_1 - p'y_1). \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Is de plaats van het vaste punt tevens die van het zwaartepunt der massa, dan zijn de zamenstellende drukkingen eeniglijk X', Y', Z', en de enkele of zamengestelde drukking is juist gelijk aan die, welke de beweegkracht P' zou hebben uitgeoefend, indien zij, evenwijdig aan hare oorspronkelijke rigting, onmiddellijk op het vaste punt gewerkt hadde.

De koppels van drukkingen moeten, gelijk onder de beweging, zoo ook bij den aanvang der beweging, *nul* zijn. Noemt men a, b, c de coördinaten van het punt, waarop de kracht P' onmiddellijk heeft gewerkt (alswanneer $L' = Z'b - Y'c$, $M' = X'c - Z'a$, $N' = Y'a - X'b$ zal zijn), en neemt men, na in de vergelijking (56) de uitdrukkingen voor de tweede differentiaal-verhoudingen (55) te hebben gesubstitueerd, de integralen van de tweede leden dier vergelijkingen met betrekking tot den aanvang der beweging, — terwijl de eerste leden nul zijn, — dan zal er komen, zoo als behoort,

$$0 = L' - Ap'; \quad 0 = M' - Bq'; \quad 0 = N' - Cr'.$$

9. Is het zwaartepunt niet in het vaste punt, en werken er geen krachten op de elementen der massa, dan kan de beweging eene zoodanige wezen, dat is medegedeeld door eene kracht, in zoodanige streek en op een zoodanig gelegen punt gewerkt hebbende, dat het vaste punt niet gedrukt noch gebotst is geworden, zoodat dan ook, als dit punt niet vast maar

vrij ware, de aanvankelijke draaijende beweging van het ligchaam geen andere zou wezen dan die er werkelijk geboren wordt terwijl het punt vast is. Derhalve moeten, als dit plaats heeft of plaats zal hebben, de tweede leden der vergelijkingen (59) gelijk *nul* zijn, waaruit deze voorwaarden volgen:

$$\left.\begin{aligned} X' &= m(q'z_1 - r'y_1), \\ Y' &= m(r'x_1 - p'z_1), \\ Z' &= m(p'y_1 - q'x_1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Hieruit worden terstond deze vergelijkingen afgeleid:

$$\left.\begin{aligned} X'x_1 + Y'y_1 + Z'z_1 &= 0, \\ X'p' + Y'q' + Z'r' &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

door welke blijkt, dat de rigting der kracht P′ moet zijn *én* loodregt op de rigting van den voerstraal ϱ des zwaartepunts van het ligchaam, *én* loodregt op de rigting der as om welke de beweging aanvangt, en daarom loodregt op het vlak, gaande door het zwaartepunt en de rigting der aanvankelijke omwentelings-as. Gevolgelijk moet deze as eene *vrije* as van omwenteling zijn, en inderdaad, als in de tweede der vergelijkingen (61) de waarden $\frac{L'}{A}$, $\frac{M'}{B}$, $\frac{N'}{C}$ der hoeksnelheden p', q', r' worden gesubstitueerd, komt er

$$\frac{X'L'}{A} + \frac{Y'M'}{B} + \frac{Z'N'}{C} = 0,$$

zijnde de betrekking door welke de drie vergelijkingen (60) zamenhangen, maar tevens ook de uitdrukking der bekende voorwaarde voor het bestaan eener zoogenaamde *vrijwillige omwentelings-as.*

De vergelijkingen (60) zijn vergelijkingen eener regte lijn, hebbende x_1, y_1, z_1, tot doorloopende coördinaten van hare punten. Zij is de meetkundige plaats der punten, in welke of alwaar het zwaartepunt des ligchaams kan zijn, opdat het middelpunt van beweging (het vaste punt) geen drukking noch schok lijde. En de lijn, evenwijdig aan de genoemde door het vaste punt gerigt, zal dan ook zijn de plaats der punten, die aangenomen kunnen worden als middelpunten van beweging, waarop, bij de mededeeling der beweging, geen drukking noch schok zal uitgeoefend worden. Deze lijn kan derhalve geen andere wezen dan de lijn of as, om welke de beweging aanvangt. De vergelijkingen dezer aanvankelijke as zijn klaarblijkelijk

$$q'z - r'y = 0, \quad r'x - p'z = 0, \quad p'y - q'x = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

en zij zijn hier de vergelijkingen eener as, gaande door een middelpunt van beweging, dat niet vast behoeft te zijn. Maar zoo dit middelpunt gedrukt werd, en daarom niet vrij kon wezen, zouden deze vergelijkingen niettemin zijn de vergelijkingen der rigting van de omwentelings-as voor eenig oogenblik. En werkelijk zijn ook de vergelijkingen der onbestendige assen van omwenteling, bij de beweging van een vast ligchaam om een vast punt, onder de vorenstaande vormen bekend.

10. Opdat dan het vaste punt niet gedrukt of gebotst worde, of opdat de aanvankelijke omwentelings-as geen drukking lijde, moet de rigting der kracht loodregt zijn op het vlak, gaande door deze aanvankelijke as en het zwaartepunt des ligchaams. Maar hiermede is noch de rigting der as bekend, noch de rigting der kracht genoegzaam bepaald. Beide deze rigtingen moeten evenwel een regten hoek maken, en men kan stellen dat de rigting der kracht moet gelegen zijn in een vlak, loodregt op de rigting der as, dat is in het vlak, waarin ook gelegen is het element der baan, in het eerste oogenblik gevolgd door het punt, dat den indruk der kracht P′ onmiddellijk ontvangt. Daar verder geen der punten van de as wordt gedrukt, zal zij, als vrije of vrijwillige as, noodwendiglijk eene hoofdas moeten zijn. Zij kan echter geen hoofdas wezen met betrekking tot het vaste punt, tenzij hare rigting mogt invallen met die van eene der aangenomene coördinaten-assen, hetgeen niet wordt verondersteld, gelijk ook voor als nog wordt uitgesloten de bijzondere vooronderstelling dat het zwaartepunt zou kunnen zijn, hetzij in het vaste punt, hetzij op eene der coördinaten-assen van de massa. Maar ingevolge hetgeen voor het geval eener vaste as, welke, bij den aanvang der beweging, door eene botsende kracht niet gedrukt of geschokt zal worden, besloten is in art. 10 van § 1, zal men ook mogen stellen, dat in het onderwerpelijk geval van beschouwing, de ongedrukte as eene hoofdas zal moeten zijn met betrekking tot het punt van doorsnijding met het vlak, waarin de rigting der kracht is gelegen. De vraag is derhalve alleenlijk: kan er eene lijn aangewezen worden, getrokken door het vaste punt, en onderscheiden van elke der drie hoofdassen voor dit punt, welke eene hoofdas zal wezen met betrekking tot één van hare punten?

Uit de theorie der hoofdassen van ligchamen kan men besluiten, dat de begeerde lijn niet zal kunnen gaan door het zwaartepunt. Maar uit deze zelfde theorie is ook bekend, dat elke lijn evenwijdig gerigt aan eene der hoofdassen gaande door het zwaartepunt (voorname hoofdassen), eene hoofdas zal zijn voor het punt, waarin zij het vlak der beide andere voorname hoofdassen snijdt, zoodat dan ook in dit vlak de beide andere hoofdassen voor dat punt zullen gelegen zijn *. De rigtingen der voorname hoofdassen kunnen

* De hier uitgedrukte stelling is onbeperkt waar. Wordt ergens in een der vlakken van de drie paren voorname hoofdassen (en, in het algemeen, niet in eene dezer assen zelve) een punt gedacht of gegeven, en wordt gevraagd, hoe de hoofdassen, tot dit punt behoorende, zullen gerigt zijn, dan is het altijd waar, dat eene lijn, door het punt evenwijdig aan de derde hoofdas getrokken, de rigting eener hoofdas voor het gegeven punt zal wezen, en dat daarom de rigtingen der beide andere hoofdassen zullen zijn in het voorname hoofdvlak, waarin het punt ligt. Niettemin is het juister of meer algemeen te stellen, dat eerstgenoemde lijn de rigting eener hoofdas voor het gegeven punt *zal kunnen wezen*, of als de rigting van eene der drie hoofdassen voor het punt *kan* aangenomen worden. Want alhoewel met zoodanige lijn aan den eisch wordt voldaan, kan het ook gebeuren, dat andere lijnen, in andere rigtingen door het punt gaande, eveneens voldoen. Met andere woorden, de genoemde loodregte rigting voldoet aan den eisch, doch is niet altijd de noodzakelijke rigting voor eene der drie begeerde hoofdassen. Is het vlak, waarin het punt is genomen, dat der voorname hoofdassen van het kleinste en middelbare traagheidsmoment, dan liggen in dit vlak altijd *twee* der hoofdassen voor het gegeven punt, en de derde hoofdas is noodzakelijk evenwijdig aan de derde voorname hoofdas. Maar zoo het punt ligt in een der twee andere voorname hoofdvlakken (te weten, òf in dat der assen van het grootste en middelbare traagheidsmoment, òf in dat der assen van het grootste en kleinste traagheidsmoment, — deze momenten derhalve, in het algemeen, onderling ongelijk vooronderstellende), kan het onderscheidene bepaalde plaatsen hebben, voor welke slechts één der drie begeerde hoofdassen in dit vlak zal moeten liggen. De beide andere assen zullen dan assen van even groote traagheidsmomenten zijn, en alhoewel zij regthoekig op elkander moeten wezen, zal hare volstrekte stelling in het vlak, dat loodregt op die bedoelde eerste of éne hoofdas is, ganschelijk onbepaald zijn. Wel is er, onder de oneindig vele paren van assen, die alsdan tweede en derde hoofdassen kunnen zijn, één paar van hetwelk één der assen gerigt is in het vlak, waarin de eerste der drie hoofdassen ligt, — zoodat dan ook de tweede as van dit eenig paar is loodregt op dat vlak of evenwijdig aan de derde voorname hoofdas, — maar dit is dan ook slechts een paar, dat *kan*, en niet een paar dat *moet* aangenomen worden. Wij weten dit uit de nasporingen van Binet (*Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des moments d'inertie des corps; Journal de l'école polytechnique*, Cahier XVI) en van Ampère (*Mémoire sur quelques nouvelles propriétés des axes permanents de rotation des corps; Mémoires de l'Institut*, Tome V). Men kan ook raadplegen Gascheau, *Remarques sur la théorie géométrique des axes permanents de rotation* (*Journal de Mathématiques, par* Liouville, 1e Série, Tome VI). Doch het belangrijkste hieromtrent is op de meest volledige wijze onderzocht en gegeven door den Heer Badon Ghyben in het III^de Deel van de *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen.* Bij hetgene in den tekst wordt aangetoond, nopens de rigtingen van ongedrukte assen, behoeft op deze bijzondere gevallen, betrekkelijk de rig-

worden bepaald, en daarom als bekend aangemerkt, zoodra de plaats van het zwaartepunt, door de coördinaten x_1, y_1, z_1, bekend of gegeven is. Gevolgelijk zal elke der drie lijnen, die door het vaste punt evenwijdig aan de drie voorname hoofdassen, of loodregt door de drie vlakken der paren van voorname hoofdassen, kunnen getrokken worden, eene lijn zijn welke aan het begeerde kan voldoen. Elke dezer lijnen zal namelijk eene hoofdas wezen met betrekking tot het punt, waarin zij het overeenkomstig vlak van twee der voorname hoofdassen (het vlak waarop zij loodregt is) snijdt. Het vlak, gebragt door de rigting der kracht en loodregt op de rigting der ongedrukte as, zal derhalve van pasgenoemd vlak dier twee voorname hoofdassen niet onderscheiden wezen, of ook, opdat eenige der drie lijnen door het vaste punt loodregt op de vlakken der paren van voorname hoofdassen getrokken, de rigting eener aanvankelijke en ongedrukte as zij, moet de botsende kracht hare rigting hebben in hetzelfde vlak der twee voorname hoofdassen, waarop de rigting der omwentelings-as loodregt is. Daar wijders de rigting der kracht loodregt moet zijn op het vlak, gaande door de aanvankelijke as en het zwaartepunt, zal zij ook loodregt moeten zijn op de lijn, volgens welke dit vlak en dat der bedoelde twee voorname hoofdassen elkander snijden. Er blijft dan slechts nog overig te bepalen de plaats van het punt, in hetwelk deze lijn gesneden wordt door de rigting der kracht, en deze plaats zal bekend zijn door den afstand, welken de rigting der kracht moet hebben van de aanvankelijke en ongedrukte omwentelings-as.

11. Het bepalen van dien afstand is niet moeijelijk. Uit de formulen (60) merkt men ligtelijk op, dat X', Y', Z', waarden hebben, gelijk aan de zamenstellende aanvankelijke hoeveelheden beweging der geheele massa, vereenigd gedacht in haar zwaartepunt. Want naar aanleiding van de formulen (52) zijn de tweede leden der formulen (60) de producten van de massa m en der zamenstellende volstrekte snelheden (bij het begin der beweging) van het zwaartepunt. Daarom zal ook P' gelijk zijn aan de aanvankelijke hoeveelheid beweging der massa, vereenigd gedacht in haar zwaartepunt, dat is in het zwaartepunt des ligchaams. De afstand van dit zwaartepunt tot

tingen der hoofdassen, niet gelet te worden; zelfs kan dit, in het algemeen, in geen aanmerking komen; maar het scheen niet ongepast hier, in eene noot, van die bijzonderheden met een enkel woord te gewagen. Men kan ze ook in het breede ontwikkeld vinden in eene latere Verhandeling van den schrijver dezer Bijdragen (zie Deel XIV van de *Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen*).

de aanvankelijke as zij $= d$. Deze afstand is op de lijn van doorsnijding der twee vlakken, die beide door het zwaartepunt gaan, het eerste door de ongedrukte as, het tweede loodregt op deze as. De afstand van den oorsprong der coördinaten (het vaste punt) tot het laatstgenoemd vlak, — derhalve het gedeelte der aanvankelijke as, begrepen tusschen het vaste punt en het punt voor hetwelk deze as is eene hoofdas, — zij $= \delta$, dan zal, vermits ϱ is de voerstraal van het zwaartepunt, $d^2 = \varrho_1{}^2 - \delta^2$ zijn. Is nu ω' de hoeksnelheid om de aanvankelijke en ongedrukte as, dan zal $\omega' d$ zijn de aanvankelijke volstrekte snelheid van het zwaartepunt, en daarom $m(\omega' d)$ de aanvankelijke hoeveelheid beweging der geheele massa, zoo deze, als een enkel punt, in het zwaartepunt geplaatst ware. Gevolgelijk zal

$$P' = m(\omega' d) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

moeten zijn. De formulen (60) geven ook deze uitkomst. Let men namelijk daarop, dat de som der projectiën van de coördinaten x_1, y_1, z_1 des zwaartepunts op de ongedrukte as gelijk moet zijn aan δ, en dat men derhalve zal hebben

$$\delta = x_1 \frac{p'}{\omega'} + y_1 \frac{q'}{\omega'} + z_1 \frac{r'}{\omega'},$$

dan geven de formulen (60)

$$\begin{aligned} P'^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2 &= m^2 \{(q'z_1 - r'y_1)^2 + (r'x_1 - p'z_1)^2 + (p'y_1 - q'x_1)^2\} \\ &= m^2 (p'^2 + q'^2 + r'^2)(x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2) - m^2 (p'x_1 + q'y_1 + r'z_1)^2 \\ &= m^2 \omega'\varrho_1{}^2 - m^2 \omega'^2 \delta^2 = m^2 \omega'^2 (\varrho_1{}^2 - \delta^2) = m^2 \omega'^2 \delta^2. \end{aligned}$$

Opdat nu de beweegkracht P' het ligchaam met eene aanvankelijke hoeksnelheid ω' doe draaijen om de aanvankelijke as, zal altijd, hetzij deze as gedrukt worde hetzij niet, het moment der beweegkracht P' gelijk moeten zijn aan het product van hoeksnelheid en moment van traagheid der massa ten opzigte van de aanvankelijke as. Weshalve, zoo μ is de grootte van dit traagheidsmoment en l de afstand tusschen de rigting der kracht en die der aanvankelijke as,

$$P'.l = \omega'\mu$$

moet zijn. Maar opdat de as niet gedrukt of gebotst worde, zal de betrekking (63) $P' = m\,\omega' d$ in rekening moeten worden gebragt, en dan zal daaruit volgen

$$l = \frac{\mu}{dm}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

zijnde, gelijk te verwachten was, de bekende formule ter bepaling der plaats van het zoogenaamd *middelpunt van botsing*, zoowel bij de beweging eener niet zware massa om eene vrijwillige as als om eene vaste as (§ I, art. 10). Alleenlijk is het, in deze gevallen eener geheel vrije of eener vaste as, *in het algemeen* niet noodzakelijk, dat de rigting der kracht gelegen zij in een vlak van voorname hoofdassen, maar hierop wordt in art. 15 nader teruggekomen.

12. Het moment $P'l$ der beweegkracht kan ook begrepen worden in den zin van grootte of moment van een koppel, welks as is de aanvankelijke as. Maar indien L', M', N' zijn, als hiervoren, de momenten der koppels, loodregt op de coördinaten-assen, ingevoerd door het ontbinden der kracht P', bij het overbrengen der zamenstellende krachten X', Y', Z' op het vaste punt, geven deze een zamengesteld koppel loodregt op de aanvankelijke as, en welks moment bepaald is door de uitdrukking

$$L' \frac{p'}{\omega'} + M' \frac{q'}{\omega'} + N' \frac{r'}{\omega'}.$$

De uitwerking van dit koppel moet klaarblijkelijk aan die der beweegkracht gelijk zijn, en daarom zal men hebben:

$$L'p' + M'q' + N'r' = Ap'^2 + Bq'^2 + Cr'^2 = P'l\omega' = \mu\omega'^2 = mk^2\omega'^2 = m\,(k\omega')^2\,,\ .\ (65)$$

zijnde namelijk k de grootte van den arm van het traagheidsmoment μ. Deze uitkomst geeft de grootte van de som der levendige krachten van al de elementen der massa, in beweging gebragt door eene kracht, welke daarna heeft opgehouden te werken, en het is bekend dat deze som is onveranderlijk onder de beweging. Zij zal derhalve gedurende de beweging dezelfde grootte hebben als bij den aanvang der beweging. Gevolgelijk zal $\mu\omega'^2$ of $m(k\omega)^2$ eene standvastige hoegrootheid zijn, dat is, op het eenvoudigst, het product $k\omega'$ zal voortdurend eene zelfde grootte of waarde behouden. De beteekenis hiervan is deze. Op elk oogenblik der beweging, en welke ook de rigting der onbestendige as moge wezen, zijn er punten der massa, die eene zelfde volstrekte snelheid hebben als andere punten van het ligchaam op andere oogenblikken, en deze punten zijn gelegen op lijnen, evenwijdig aan de rigting der onbestendige as voor het gedacht oogenblik, en hebbende, *in de eerste plaats*, afstanden van de onbestendige as, gelijk aan de grootte van den arm van het traagheidsmoment der massa ten opzigte van deze zelfde onbestendige as. Dienvolgens zijn het al de punten van het regte en cirkelvormige cylindervlak, hebbende de onbestendige as tot meetkundige as, en den genoemden arm k van het traagheidsmoment tot straal van de regte doorsnede. Maar, *in de tweede plaats*, hebben dan ook, op eenig oogenblik der beweging, al die punten van het ligchaam eene zelfde volstrekte snelheid als andere punten op eenig ander oogenblik, welke, even zoo als deze andere punten, gelegen zijn in regte cirkelvormige cylindervlakken, binnen of buiten de eerstgenoemde (die $k_1, k_2, k_3 \ldots$ tot stralen van regte doorsneden hebben) beschreven, met deze dezelfde as hebbende, en alle evenveel, in meer of in minder, van deze verwijderd zijnde, zoodat de stralen der overeenkomstige cylindervlakken zullen moeten zijn *óf* alle $= k_1 + i, k_2 + i, k_3 + i, \ldots$ *óf* alle $= k_1 - i, k_2 - i, k_3 - i, \ldots$

Het standvastig zijn van het product $k\omega$ gedurende de beweging van het ligchaam (en altijd in de vooronderstelling dat er geen versnellende krachten werkzaam zijn, noch ook dat het ligchaam, na in beweging te zijn gebragt, op eenig oogenblik wordt belemmerd of op nieuw gebotst, enz.) leert ook, dat de hoeksnelheden om de opvolgende onbestendige assen in de omgekeerde reden zijn van de armen der traagheidsmomenten van de massa met betrekking tot deze assen. Wordt derhalve door het vaste punt, in eenige rigting, eene lijn gedacht of getrokken, en kan men het traagheidsmoment der massa met betrekking tot deze lijn bepalen of weten, dan zal men, kennende de grootte van k en ω voor eenig oogenblik, of kennende slechts de grootte van het product $k\omega$, ook terstond weten hoe groot de hoeksnelheid der beweging zal zijn op het oogenblik dat de gedachte of gegevene lijn onbestendige as is of zou kunnen wezen. En zoo kunnen daaruit nog andere, alhoewel minder belangrijke, gevolgen worden afgeleid. Het zal ook naauwelijks herinnerd behoeven te worden, dat het een en ander, in dit artikel opgemerkt of besloten, onafhankelijk is van het al of niet gebotst worden van de aanvankelijke omwentelingsas, zoodat het dan ook niet uitsluitend zamenhangt met hetgeen in het voorgaande artikel is behandeld.

15. Bij de algemeene beschouwingen in art. 8—11 werd vooronderstel̈d, dat de aanvankelijke as was *geen der drie hoofdassen*, gaande door het vaste punt, — dat de plaats van het zwaartepunt *niet* was die van het vaste punt, — dat het ook *niet* gelegen was op eene dier genoemde hoofdassen (coördinaten-assen der massa), *noch* ook in de rigting van eene der lijnen, gaande door het vaste punt en loodregt op een der vlakken van twee voorname

hoofdassen. Aangaande deze bijzondere gevallen moeten nog kortelijk eenige opmerkingen worden gemaakt.

Indien het zwaartepunt gelegen is op eene der loodlijnen, getrokken uit het vaste punt op de vlakken der paren van voorname hoofdassen, dan valt deze loodlijn klaarblijkelijk in met de rigting van de derde voorname hoofdas. De rigting van eene der voorname hoofdassen gaat derhalve door het vaste punt. Op grond van de bijzondere eigenschap, die aan de voorname hoofdassen toekomt, zal dan ook de bedoelde voorname hoofdas eene hoofdas zijn voor het vaste punt, hetgeen alleenlijk kan indien het zwaartepunt, — niet in het vaste punt zijnde, — gelegen is op eene der hoofdassen van het vaste punt, dat is op eene der coördinaten-assen. Er schijnen nogtans twee gevallen van uitzondering te bestaan, indien namelijk de traagheidsmomenten A, B, C óf alle gelijk zijn óf althans twee dezer momenten eene gelijke grootte hebben. Zijn namelijk A, B, C even groot, dan ligt het vaste punt noodwendiglijk op eene der voorname hoofdassen, en het zwaartepunt ligt dan wel op eene loodlijn, getrokken uit het vaste punt op een der drie vlakken van twee voorname hoofdassen, maar de rigting van deze loodlijn behoeft niet in te vallen met eene der drie hoofdassen voor het vaste punt, die men, uit de oneindig vele alsdan bestaande drieparen van hoofdassen, als coördinaten-assen zou hebben aangenomen. Hetzelfde heeft, ofschoon op meer beperkte wijze, plaats, indien voor twee der hoofdassen de traagheidsmomenten gelijk zijn, en dat eene der voorname hoofdassen gelegen is in het vlak dezer twee assen van even groote traagheidsmomenten; want ook in dit geval moet die voorname hoofdas door het vaste punt gaan. Maar het is niet moeijelijk om in te zien, dat deze gevallen van uitzondering als zoodanige slechts schijnbaar zijn, en dat hunne beschouwing ligtelijk teruggebragt wordt tot die van het geval, waarin het zwaartepunt gelegen is op eene der coördinaten-assen, terwijl deze zijn hoofdassen van ongelijke traagheidsmomenten. Zij b.v. het zwaartepunt gelegen op de as der ordinaten z; deze is alsdan eene voorname hoofdas, en de coördinaten van het zwaartepunt zijn $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = \zeta$. Zal deze as eene aanvankelijke omwentelingsas wezen, dan moeten, bij den aanvang der beweging, p' en q' *nul* zijn. Maar de vergelijkingen (60) geven dan, voor de onderstelling eener ongedrukte as, $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$; gevolgelijk $P' = 0$. Is nu de beweging medegedeeld door een schok, of liever door eene plotseling gewerkt hebbende kracht, dan moet deze wel gerigt zijn geweest in een vlak, loodregt op de as z, en daarom zal Z′ werkelijk *nul* zijn, maar X′ en Y′ kunnen niet *nul* wezen. De as zal dienvolgens ook geen ongedrukte as zijn, gelijk dit van elders bekend is en ook door de vergelijkingen (59) wordt bevestigd. De drukking, welke de as z lijdt, wordt uitgeoefend op het punt van doorsnijding dezer as met het *loodregt vlak*, waarin de kracht $P' = \sqrt{(X'^2 + Y'^2)}$ werkt. Ware de as geen voorname hoofdas, ook geen hoofdas voor het vaste punt, dan zou dit loodregt vlak door het zwaartepunt moeten gaan, bijaldien de as eene ongedrukte kon wezen. Nu de as z eene voorname hoofdas is, eene hoofdas voor al hare punten, is de plaats van genoemd loodregt vlak in zeker opzigt willekeurig. Denkt men dat het ga door het vaste punt of in te vallen met het vlak der coördinaten x en y, dan is de rigting der kracht P′ in dit coördinaten-vlak, en de drukking P′ zal tegen het vaste punt worden uitgeoefend. De as z zal derhalve nog wel gedrukt worden, maar deze drukking kan niet meer uitwerken dat de rigting der as bij de draaijende beweging wordt veranderd. Zij zal eene bestendige as van omwenteling zijn, vooral indien zij is de as van het grootste of van het kleinste der drie traagheidsmomenten A, B, C. Het *nul* moeten zijn van P′, bijaldien de as z eene ongedrukte as kon wezen, wordt ook geleerd door de vergelijking (65); want d is nul zoo het zwaartepunt op de aanvankelijke as zelve ligt. Niettemin zijn de uitkomsten der formulen (60) en (65) juist, zoo lang er geen bepaling is gesteld, dat de beweging door de plotselinge werking eener enkele kracht P′ zij medegedeeld. Want zoo hiertoe werkte een koppel van krachten, en dat de as van dit koppel ware geweest de as z, of evenwijdig aan de as z, zou werkelijk de zamengestelde kracht P′ rekenkundig *nul* zijn, en de as z zou inderdaad eene aanvankelijke ongedrukte as, en, onafhankelijk hiervan, altijd ook eene bestendige as zijn. Maar hetgeen, bij het in beweging brengen van het ligchaam door de plotselinge werking eener enkele kracht P′, niet mogelijk is ten aanzien van de as z, waarop het zwaartepunt verondersteld wordt te liggen, kan volkomen plaats hebben ten opzigte van elke der beide andere coördinaten-assen. Opdat er toch eene ongedrukte as zij, moet het vlak, waarin de rigting der kracht ligt, loodregt zijn op een vlak, gaande door het vaste punt en het zwaartepunt, maar tevens door eene lijn, mede door het vaste punt gaande en welke eene hoofdas voor één van hare punten zal wezen. Hieraan voldoen de vlakken xz en yz, gaande door de assen x en y, elke van welke eene hoofdas is voor het vaste punt. Zij b.v. de as y. Op deze as moet dan de rigting der kracht loodregt zijn, maar ook het vlak, waarin deze rigting behoort gedacht te worden; tevens moet dit vlak gaan door het punt der as y, voor hetwelk deze as is hoofdas; dit punt is het vaste punt; en hieruit volgt dan dat de rigting der kracht moet zijn in het vlak xz en loodregt tegen de as z, of evenwijdig aan de as x. Dit laatste leeren ook de formulen (60). Zal namelijk de coördinaten-as y eene aanvankelijke ongedrukte as wezen of kunnen wezen, dan moeten p' en r' nul zijn, en dewijl x_1 en y_1 *nul* zijn, worden de vergelijkingen (60), $X' = mq'\zeta$, $Y' = 0$, $Z' = 0$, en daarom $P' = X' = mq'\zeta$, welke waarde ook verkregen wordt door de formule (65), vermits ω' en d hier zijn q' en ζ. De afstand van de rigting der kracht P' tot de as y of wel tot het vaste punt, zal, voor het doen plaats hebben van de begeerde of uitgedrukte omstandigheid, bepaald moeten worden door de formule (64), welke geeft $l = \dfrac{B}{m\zeta}$.

Eveneens zal de as x, bij dezelfde voorwaarden en vooronderstellingen, eene aanvankelijke as van beweging kunnen wezen, die nergens eenige drukking, door het mededeelen der beweging, ondervindt. Maar de beweging aangevangen zijnde, hetzij om deze as, hetzij om de as y, zal om haar voortduren, vermits zij is eene hoofdas voor het vaste punt; dit zal althans moeten gebeuren, zoo het traagheidsmoment der massa ten opzigte van deze coördinaten-as niet is het middelbare der drie traagheidsmomenten A, B, C.

Ligt het zwaartepunt niet op eene der coördinaten-assen, maar in een der vlakken van twee coördinaten-assen, dan kan de derde coördinaten-as, loodregt op dit vlak, ongedrukte aanvankelijke as van omwenteling wezen. Daartoe moet dan de rigting der botsende kracht mede in hetzelfde coördinatenvlak zijn; maar het is niet noodzakelijk, dat eene der voorname hoofdassen zij loodregt op dit coördinaten-vlak of evenwijdig aan de derde coördinaten-as. Ligt het zwaartepunt in een der twee andere coördinaten-vlakken, dan kan dezelfde pas bedoelde derde coördinaten-as nog eene aanvankelijke ongedrukte as van beweging zijn, maar dan is het noodzakelijk dat geen der voorname hoofdassen zij evenwijdig aan deze coördinaten-as. De bewegende kracht moet hare rigting hebben in het coördinaten-vlak, waarop de genoemde derde coördinaten-as loodregt is, en die rigting moet tevens loodregt zijn op het coördinaten-vlak, waarin het zwaartepunt ligt. In dit geval zal derhalve het vlak van de rigting der kracht *niet* gaan door het zwaartepunt, gelijk in de andere gevallen, tot hiertoe overwogen, bleek noodzakelijk te zijn. En zoodanig geval van uitzondering bestaat ook, als het zwaartepunt heeft eene plaats naar welgevallen buiten de coördinaten-vlakken, mits de voorname hoofdassen niet zijn loodregt op de coördinaten-vlakken, hetgeen ook, zelfs voor eene enkele dezer hoofdassen, niet mogelijk is, bij eene geheel willekeurige stelling van het zwaartepunt. En zoo dan dit punt ergens buiten de coördinaten-vlakken is, zal elke der coördinaten-assen eene aanvankelijke en nergens gedrukte as van omwenteling kunnen wezen, indien de rigting der bewegende kracht is in het vlak der beide andere coördinaten-assen, loodregt op de lijn, getrokken door het vaste punt en door de projectie (op dat coördinaten-vlak) van het zwaartepunt, en op den afstand van het vaste punt, welken de formule (64) zal doen kennen; — b. v., voor de coördinaten-as z, $l = C : m\sqrt{(x_1{}^2 + y_1{}^2)}$.

Indien, eindelijk, het zwaartepunt is in het vaste punt, en dat de voorname traagheidsmomenten onderling ongelijk zijn, zullen de coördinaten-assen invallen met de voorname hoofdassen. De formulen (60) geven voor dit geval $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$, en daarom $P' = 0$, hetgeen alleenlijk kan, zoo de beweging op eens is medegedeeld door een koppel, welks as is óf eene der coördinaten-assen, óf evenwijdig aan eene der coördinaten-assen. Deze as zal dan ongedrukte en bestendige as van beweging zijn. Is P eene botsende kracht, hebbende hare rigting in het vlak van twee der voorname hoofdassen, dan zal er wel beweging aanvangen en voortduren om de derde hoofdas, maar de botsing zal, bij het begin der beweging, door het punt der as, dat tevens het vaste punt is, moeten geleden worden.

14. Alhoewel, voor hetgeen in art. 10 is besloten, toereikende gronden zijn aangevoerd, zal eene bevestiging door middel van eerst verkregene uitkomsten, en als ware het bij toets door berekening, niet overbodig mogen geacht worden.

Zal er eene ongedrukte as wezen, om welke, bij of door het gewerkt hebben eener botsende kracht P', de beweging van het ligchaam aanvangt, — vooronderstellende de plaats van het zwaartepunt willekeurig, en de rigting van de as der beweging in het algemeen onderscheiden van die eener hoofdas, gaande door het vaste punt, — dan is in art. 9 bewezen, dat daartoe de rigting der kracht een regten hoek moet maken met de rigting der as van omwenteling, dat ook deze rigting moet zijn in een vlak loodregt op de as, maar bovendien, dat dezelfde rigting loodregt moet zijn op het vlak, gaande door de as en door het zwaartepunt, hetwelk voorondersteld moet worden buiten de as gelegen te zijn. Wijders is het buiten twijfel, dat aan den eisch alleenlijk zal kunnen worden voldaan door eene as, welke is eene hoofdas voor een van hare punten, onderscheiden van het vaste punt. En nog mag, even zoo als in art. 10, en op grond van hetgeen in § I is gebleken, aangenomen worden, dat het vlak van de rigting der kracht, terwijl het loodregt is op de rigting der as, tevens ook de as snijde in het punt, voor hetwelk zij hoofdas is. Is de plaats van dit punt, door zijn afstand van den oorsprong der coördinaten, bekend of bekend geworden, dan is daarmede ook de plaats van het vlak van de rigting der kracht gevonden, en hetgeen dan nog te bepalen overig blijft, zal mede gevonden kunnen worden. Maar in stede van regtstreeks de plaats van genoemd punt te zoeken op de lijn, die de rigting der begeerde as zal wezen, kan men eenige lijn, gaande door het vaste punt, als rigting der begeerde as aannemen, en onderzoeken of een vlak, loodregt op deze lijn, en hebbende eenige bepaalde of bijzondere plaats, aan den eisch voldoet, te weten, dat het de lijn snijdt in een punt, voor hetwelk de lijn, beschouwd als as, eene hoofdas zal zijn. Wordt dit waar of mogelijk bevonden, dan zal, op grond van de waarheid, dat eenige willekeurig door het vaste punt gerigte lijn, zoo zij de rigting eener hoofdas kan wezen, slechts voor één enkel van hare punten hoofdas zal zijn, aan den hoofdeisch voldaan zijn, en daarmede kan worden overgegaan om het overige, dat men nog meer bepaald zou moeten weten, te vinden. Het is deze tweede weg, welke nu, *in de eerste plaats*, zal worden ingeslagen.

Het vlak, waarin de rigting der kracht moet gelegen zijn, en waaromtrent moet onderzocht worden of het aan den uitgedrukten eisch zal voldoen, hebbe die bijzondere of betrekkelijk bepaalde stelling, dat het ga door het zwaartepunt des ligchaams.

De vergelijkingen (62) zijn de vergelijkingen der aanvankelijke ongedrukte as van omwenteling. Wordt de voerstraal ϱ_1 van het zwaartepunt op deze as geprojecteerd, dan zal de grootte δ dezer projectie uitgedrukt worden door

$$\delta = \frac{1}{\omega'}(p'x_1 + q'y_1 + r'z_1) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (a)$$

De grootte dezer projectie is tevens die van den afstand van het vaste punt tot het vlak, gaande door het zwaartepunt loodregt op de aanvankelijke as. Derhalve zal de vergelijking van dit vlak zijn

$$\frac{p'}{\omega'}x + \frac{q'}{\omega'}y + \frac{r'}{\omega'}z = \delta, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (b)$$

dat is

$$p'(x-x_1)+q'(y-y_1)+r'(z-z_1)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$

Men denke door het zwaartepunt eene lijn, loodregt op dit vlak (V), dat is evenwijdig aan de rigting der aanvankelijke as. Zoo deze lijn eene hoofdas is, zal zij eene voorname hoofdas wezen, en dan zullen de twee andere voorname hoofdassen in dit vlak (V) moeten gelegen zijn. Maar dan zal ook de aanvankelijke as eene hoofdas wezen, en wel voor het punt, waarin zij het vlak (V) snijdt. Het vlak (V) zal dienvolgens het begeerde vlak zijn, het vlak door hetwelk de eisch vervuld wordt.

Om te onderzoeken of de gedachte loodlijn eene hoofdas met betrekking tot het zwaartepunt is, moet de oorsprong der coördinaten in het zwaartepunt verplaatst gedacht worden. Verder moeten, in het vlak (V), twee lijnen, elkander regthoekig in het zwaartepunt snijdende, als assen der nieuwe of andere coördinaten x' en y' worden aangenomen. Is daarbij de pas genoemde loodlijn de as der nieuwe of andere ordinaten z', dan zal, zoo deze werkelijk is eene hoofdas, de waarheid moeten blijken van deze twee vergelijkingen

$$\int x'z'\partial m=0, \quad \int y'z'\partial m=0;$$

en dit blijk zal gegeven zijn, indien aan deze vergelijkingen voldaan wordt met of als zij werkelijk identisch $0=0$ worden door de uitkomsten, in art. 8 en 9 verkregen.

De assen der coördinaten x' en y' zijn in het vlak (V). Het is hier onverschillig hoe, in dit vlak, de as x' zij gerigt. Zonder hierop te letten, neme men aan dat $\alpha, \alpha', \alpha''$ beteekenen de *cosinussen* der hoeken, welke de as der abscissen x' maakt met de oorspronkelijke coördinaten-assen x, y, z der massa. Eveneens beteekenen β, β', β'' de *cosinussen* der hoeken, tusschen de as der ordinaten y' en de eerste coördinaten-assen x, y, z, en door $\gamma, \gamma', \gamma''$ worden aangeduid de *cosinussen* $\frac{p'}{\omega'}, \frac{q'}{\omega'}, \frac{r'}{\omega'}$ der hoeken, tusschen dezelfde oorspronkelijke assen x, y, z en de as der ordinaten z'.

Tusschen deze *negen* cosinussen bestaan bekende betrekkingen. Van deze worden hier alleenlijk gebruikt deze twee:

$$\left.\begin{aligned}\alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''=0\,,\\ \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0\,.\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

De formulen, door welke de coördinaten x', y', z' bepaald worden uit de oorspronkelijke x, y, z, terwijl, met betrekking tot het vaste punt, x_1, y_1, z_1 zijn de coördinaten van den nieuwen oorsprong, zijn

$$x' = \alpha(x - x_1) + \alpha'(y - y_1) + \alpha''(z - z_1),$$
$$y' = \beta(x - x_1) + \beta'(y - y_1) + \beta''(z - z_1),$$
$$z' = \gamma(x - x_1) + \gamma'(y - y_1) + \gamma''(z - z_1).$$

Hiermede, voor het product $x'z'\partial m$,

$$\begin{aligned} x'z'\partial m = {} & \alpha\gamma x^2 \partial m + \alpha'\gamma' y^2 \partial m + \alpha''\gamma'' z^2 \partial m \\ & - 2\alpha\gamma x_1 x \partial m - 2\alpha'\gamma' y_1 y \partial m - 2\alpha''\gamma' z_1 z \partial m \\ & + (\alpha\gamma x_1{}^2 + \alpha'\gamma' y_1{}^2 + \alpha''\gamma'' z_1{}^2)\partial m \\ & + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) x y \partial m + (\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma) x z \partial m + (\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma') y z \partial m \\ & - (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)\{y_1 x \partial m + x_1 y \partial m\} + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) x_1 y_1 \partial m \\ & - (\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma)\{z_1 x \partial m + x_1 z \partial m\} + (\alpha\gamma' + \alpha''\gamma) x_1 z_1 \partial m \\ & - (\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma')\{z_1 y \partial m + y_1 z \partial m\} + (\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma') y_1 z_1 \partial m \quad \ldots \quad (d) \end{aligned}$$

Van de termen des tweeden lids moeten nu de integralen, uitgestrekt over de geheele massa, genomen worden, ten einde de juiste uitdrukking der waarde van de integraal des eersten lids, dat is van $\int x'z'\partial m$, te verkrijgen. Daarbij worde gelet op het navolgende:

1°. x_1, y_1, z_1 zijn, even zoo als $\alpha, \alpha' \ldots\ldots \gamma', \gamma''$, standvastig.

2°. $\int x\partial m = x_1 m$, $\int y\partial m = y_1 m$, $\int z\partial m = z_1 m$ en $\int \partial m = m$.

3°. $\int xy\partial m = 0$, $\int xz\partial m = 0$, $\int yz\partial m = 0$, vermits de coördinaten-assen der massa zijn hoofdassen.

4°. Als A, B, C aanduiden de grootten der momenten van traagheid met betrekking tot de oorspronkelijke coördinaten-assen of hoofdassen voor het vaste punt, kan de som der integralen van de drie eerste termen uitgedrukt worden door $-A\alpha\gamma - B\alpha'\gamma' - C\alpha''\gamma''$. Want

$$\alpha\gamma \int x^2 \partial m = \alpha\gamma \int (x^2 + y^2 + z^2)\partial m - \alpha\gamma \int (y^2 + z^2)\partial m$$
$$= \alpha\gamma \int (x^2 + y^2 + z^2)\partial m - \alpha\gamma A;$$

eveneens

$$\alpha'\gamma'\int y^2\,\partial m = \alpha'\gamma'\int (x^2+y^2+z^2)\,\partial m - \alpha'\gamma'\mathrm{B},$$

en

$$\alpha''\gamma''\int z^2\,\partial m = \alpha''\gamma''\int (x^2+y^2+z^2)\,\partial m - \alpha''\gamma''\mathrm{C},$$

waardoor dan, ingevolge de eerste der betrekkingen (c), de gestelde uitdrukking voor de som der integralen van de genoemde drie eerste termen der vergelijking (d) zal komen.

De vergelijking (d) dan geïntegreerd wordende zal geven:

$$\begin{aligned}\int x'z'\,\partial m &= -\mathrm{A}\alpha\gamma - \mathrm{B}\alpha'\gamma' - \mathrm{C}\alpha''\gamma'' - \alpha\gamma x_1{}^2 m - \alpha'\gamma' y_1{}^2 m - \alpha''\gamma'' z_1{}^2 m \\ &\quad - (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)x_1 y_1 m - (\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma)x_1 z_1 m - (\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma')y_1 z_1 m \\ &= -(\mathrm{A}\alpha\gamma + \mathrm{B}\alpha'\gamma' + \mathrm{C}\alpha''\gamma'') - m(\alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1)(\gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1).\end{aligned}$$

Maar (zie (a)) $\gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1 = \frac{p'}{\omega'}x_1 + \frac{q'}{\omega'}y_1 + \frac{r'}{\omega'}z_1 = \delta$; weshalve

$$\begin{aligned}-\int x'z'\,\partial m &= \mathrm{A}\alpha\gamma + \mathrm{B}\alpha'\gamma' + \mathrm{C}\alpha''\gamma'' + m(\alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1)\delta \\ &= \left(\mathrm{A}\frac{p'}{\omega'} + m x_1\delta\right)\alpha + \left(\mathrm{B}\frac{q'}{\omega'} + m y_1\delta\right)\alpha' + \left(\mathrm{C}\frac{r'}{\omega'} + m z_1\delta\right)\alpha''.\end{aligned}$$

Op dezelfde wijze zal gevonden worden

$$-\int y'z'\,\partial m = \left(\mathrm{A}\frac{p'}{\omega'} + m x_1\delta\right)\beta + \left(\mathrm{B}\frac{q'}{\omega'} + m y_1\delta\right)\beta' + \left(\mathrm{C}\frac{r'}{\omega'} + m z_1\delta\right)\beta''.$$

Zullen nu deze integralen *nul* zijn, dan moet, op grond der gevondene uitkomsten of betrekkingen, die bestaan als de aanvankelijke as van beweging geen drukking of botsing lijdt, de waarheid blijken van deze vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{A}p' + \omega' m x_1\delta)\alpha + (\mathrm{B}q' + \omega' m y_1\delta)\alpha' + (\mathrm{C}r' + \omega' m z_1\delta)\alpha'' = 0,\\ (\mathrm{A}p' + \omega' m x_1\delta)\beta + (\mathrm{B}q' + \omega' m y_1\delta)\beta' + (\mathrm{C}r' + \omega' m z_1\delta)\beta'' = 0.\end{aligned}\right\}\;\ldots\;(e)$$

Zijn a, b, c de coördinaten (met betrekking tot de coördinaten-assen der massa) van het punt in het vlak (V), dat gedacht kan worden den indruk der kracht P′, gerigt in het vlak (V), onmiddellijk te ontvangen, dan volgt uit het behandelde en verkregene in art. 8 en 9,

$$p' = \frac{L'}{A} = \frac{Z'b - Y'c}{A} = \frac{m}{A}(bp'y_1 - bq'x_1 - cr'x_1 + cp'z_1),$$

$$q' = \frac{M'}{B} = \frac{X'c - Z'a}{B} = \frac{m}{B}(cq'z_1 - cr'y_1 - ap'y_1 + aq'x_1),$$

$$r' = \frac{N'}{C} = \frac{Y'a - X'b}{C} = \frac{m}{C}(ar'x_1 - ap'z_1 - bq'z_1 + br'y_1).$$

Maar a, b, c zijn coördinaten van een punt in het vlak (V); daarom moeten $x = a$, $y = b$, $z = c$ voldoen aan de vergelijking (b), dat is men moet hebben

$$p'a + q'b + r'c = \omega'\delta,$$

waaruit volgt

$$bq' + cr' = \omega'\delta - ap',$$

en hiermede wordt de vorenstaande uitdrukking voor p',

$$p' = \frac{m}{A}\{(by_1 + cz_1)p' - (\omega'\delta - ap')x_1\} = \frac{m}{A}\{(ax_1 + by_1 + cz_1)p' - \omega'\delta x_1\}.$$

Eveneens komt

$$q' = \frac{m}{B}\{(ax_1 + by_1 + cz_1)q' - \omega'\delta y_1\},$$

$$r' = \frac{m}{C}\{(ax_1 + by_1 + cz_1)r' - \omega'\delta z_1\}.$$

Uit elke dezer uitdrukkingen kunnen wel waarden voor p', q', r', door oplossing worden verkregen, maar het doel is hier eeniglijk eene voegzame vervorming der vergelijkingen (e), en deze heeft men door de verkregene uitdrukkingen terstond. Want zij geven

$$\begin{aligned} Ap' + \omega' m\delta x_1 &= m.\ (ax_1 + by_1 + cz_1)p', \\ &= m\omega'(ax_1 + by_1 + cz_1)\gamma, \\ Bq' + \omega' m\delta y_1 &= m\omega'(ax_1 + by_1 + cz_1)\gamma', \\ Cr' + \omega' m\delta z_1 &= m\omega'(ax_1 + by_1 + cz_1)\gamma''; \end{aligned}$$

zoodat hiermede de vergelijkingen (e) overgaan in deze:

$$m\omega'(ax_1 + by_1 + cz_1)(\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'') = 0,$$
$$m\omega'(ax_1 + by_1 + cz_1)(\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'') = 0,$$

en op grond van de betrekkingen (c) zijn zij identisch $0 = 0$, dat is zij zijn *waar*. Dit alleen moest bewezen worden.

15. Men zou ook, *in de tweede plaats*, den weg kunnen volgen, welke eerstelijk in art. 14 werd aangewezen. Hij schijnt meer regtstreeks tot het doel te voeren, maar is, alles wel overwogen en te zamen genomen, minder kort.

De rigting der aanvankelijke as make, als boven, hoeken met de coördinaten-assen der massa, welker *cosinussen* zijn γ, γ', γ''. Zal zij ongedrukte as wezen, dan moet zij hoofdas zijn voor één van hare punten, maar dan moet ook de kracht gewerkt hebben of werken in een vlak, loodregt op de as en gaande door dit punt, of ook de kracht moet daartoe hare rigting hebben in het vlak der beide andere hoofdassen. Alles zal derhalve bepaald zijn of gemakkelijk bepaald kunnen worden, zoodra de plaats van het bedoelde punt der aanvankelijke as zal gevonden zijn.

Zij Δ de afstand van het vaste punt tot het begeerde punt — derhalve een afstand, gerekend langs de aanvankelijke as — en laat dit begeerde punt worden aangeduid door O. Het vlak, gaande door O en loodregt zijnde op de aanvankelijke as, heeft tot vergelijking

$$p'x + q'y + r'z = \omega'\Delta, \quad \text{of} \quad \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z = \Delta \;, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{W})$$

en de coördinaten van O zullen zijn

$$\xi = \gamma\Delta, \quad \eta = \gamma'\Delta, \quad \zeta = \gamma''\Delta.$$

Wordt de oorsprong der coördinaten verplaatst in O — wordt de rigting der aanvankelijke as van omwenteling aangenomen als die van de as der ordinaten z'' — worden de assen der coördinaten x'' en y'' gedacht in het vlak (W), en maken zij met de coördinaten-assen der massa hoeken, welker *cosinussen* zijn α, α', α'', β, β', β'' (waarbij nogtans niet gedacht worde aan de hoeken, welker *cosinussen* in art. 14 mede door $\alpha, \ldots \beta''$ zijn aangeduid), dan zijn de functiën voor de nieuwe coördinaten:

$$x'' = \alpha(x - \xi) + \alpha'(y - \eta) + \alpha''(z - \zeta),$$
$$y'' = \beta(x - \xi) + \beta'(y - \eta) + \beta''(z - \zeta),$$
$$z'' = \gamma(x - \xi) + \gamma'(y - \eta) + \gamma''(z - \zeta).$$

Zal de aanvankelijke as eene hoofdas voor het punt ξ, η, ζ, kunnen wezen, dan zal voldaan moeten worden aan de vergelijkingen

$$\int x''z''\partial m = 0, \quad \int y''z''\partial m = 0.$$

Volgende nu hier denzelfden gang van rekenen als in art. 14, dan zal gevonden worden:

$$
\begin{aligned}
-\int x''z''\partial m = &+ \mathrm{A}\alpha\gamma + \mathrm{B}\alpha'\gamma' + \mathrm{C}\alpha''\gamma'' \\
&+ 2m(\alpha\gamma\xi x_1 + \alpha'\gamma'\eta y_1 + \alpha''\gamma''\zeta z_1) - m(\alpha\gamma\xi^2 + \alpha'\gamma'\eta^2 + \alpha''\gamma''\zeta^2) \\
&+ \ m(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)\eta x_1 + m(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)\xi y_1 \\
&+ \ m(\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma)\zeta x_1 + m(\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma)\xi z_1 \\
&+ \ m(\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma')\zeta y_1 + m(\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma')\eta z_1 \\
&- \ m(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)\xi\eta - m(\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma)\xi\zeta - m(\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma')\eta\zeta \\
= &+ \ \mathrm{A}\alpha\gamma + \mathrm{B}\alpha'\gamma' + \mathrm{C}\alpha''\gamma'' \\
&+ \ (\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta)(\alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1)m \\
&+ \ (\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1)m \\
&- \ (\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta)m.
\end{aligned}
$$

Maar $(\gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1)$ is de uitdrukking der grootte δ van de projectie des voerstraals ϱ_1 van het zwaartepunt des ligchaams op de rigting der aanvankelijke as, en $(\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta) = \Delta$; derhalve

$$
\begin{aligned}
-\int x''z''\partial m = &+ \mathrm{A}\alpha\gamma + \mathrm{B}\alpha'\gamma' + \mathrm{C}\alpha''\gamma'' \\
&+ m\Delta x_1\alpha + m\Delta y_1\alpha' + m\Delta z_1\alpha'' \\
&+ m(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\delta - \Delta) \\
= &(\mathrm{A}\gamma + m\Delta x_1)\alpha + (\mathrm{B}\gamma' + m\Delta y_1)\alpha' + (\mathrm{C}\gamma'' + m\Delta z_1)\alpha'' \\
&+ m(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\delta - \Delta).
\end{aligned}
$$

Eveneens

$$
\begin{aligned}
-\int y''z''\partial m = &(\mathrm{A}\gamma + m\Delta x_1)\beta + (\mathrm{B}\gamma' + m\Delta y_1)\beta' + (\mathrm{C}\gamma'' + m\Delta z_1)\beta'' \\
&+ m(\beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta)(\delta - \Delta).
\end{aligned}
$$

Dienvolgens zal, $\frac{p'}{\omega'}$, $\frac{q'}{\omega'}$, $\frac{r'}{\omega'}$ in plaats van γ, γ', γ'' stellende, voldaan moeten worden aan de vergelijkingen

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\mathrm{A}p' + \omega' m\Delta x_1)\alpha + (\mathrm{B}q' + \omega' m\Delta y_1)\alpha' + (\mathrm{C}r' + \omega' m\Delta z_1)\alpha'' \\
&\qquad\qquad + \omega' m(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\delta - \Delta) = 0, \\
&(\mathrm{A}p' + \omega' m\Delta x_1)\beta + (\mathrm{B}q' + \omega' m\Delta y_1)\beta' + (\mathrm{C}r' + \omega' m\Delta z_1)\beta'' \\
&\qquad\qquad + \omega' m(\beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta)(\delta - \Delta) = 0.
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots (f)
$$

Wederom te werk gaande als in art. 14, mits hier a, b, c beteekenen de coördinaten van een punt in het vlak (W), en wel van eenig punt der rigting van de kracht P', zal gevonden worden

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}p' + \omega' m \triangle x_1 &= m(ax_1 + by_1 + cz_1)\omega'\gamma; \\ \mathrm{B}q' + \omega' m \triangle y_1 &= m(ax_1 + by_1 + cz_1)\omega'\gamma'; \\ \mathrm{C}r' + \omega' m \triangle z_1 &= m(ax_1 + by_1 + cz_1)\omega'\gamma''. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (g)$$

De twee voorgaande vergelijkingen zullen dan, na door $\omega' m$ te zijn gedeeld, worden:

$$(ax_1 + by_1 + cz_1)(\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'') + (\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\delta - \triangle) = 0,$$

$$(ax_1 + by_1 + cz_1)(\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'') + (\beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta)(\delta - \triangle) = 0.$$

Van deze vergelijkingen zijn de eerste termen *nul*, dewijl $(\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'')$ en $(\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'')$ *nul* zijn. Derhalve moeten ook de tweede termen *nul* zijn, waaraan voldaan wordt met $\triangle = \delta$, zoodat de plaats van het begeerde punt O zal zijn het voetpunt der normaal, uit het zwaartepunt op de rigting der aanvankelijke as van omwenteling getrokken, en het vlak (W) zal door het zwaartepunt gaan.

Men kan echter tegenwerpen, dat ook de genoemde tweede termen, onafhankelijk van $\triangle = \delta$, *nul* zijn, omdat, b.v. alleenlijk op eene der vergelijkingen lettende,

$$\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta = (\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'')\triangle$$

is. Deze moeijelijkheid, dit onbeslist blijven, schijnt alleenlijk op deze wijze opgeheven te kunnen worden.

Omdat, in elk geval, $(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\delta - \triangle)$ *nul* is, zal het eerste lid der vergelijking (f) n° 1 worden

$$(\mathrm{A}p' + \omega' m \triangle x_1)\alpha + (\mathrm{B}q' + \omega' m \triangle y_1)\alpha' + (\mathrm{C}r' + \omega' m \triangle z_1)\alpha''.$$

Is nu werkelijk $\triangle = \delta$, dan zal deze uitdrukking bevonden moeten worden *nul* te zijn, indien δ in plaats van $\triangle$ wordt gesteld. Dit is wel waar, naar aanleiding van hetgeen in art. 14 met betrekking tot de vergelijkingen (e) is aangetoond, maar in plaats van naar eene ontwikkeling, in het eerst gegeven bewijs voorkomende, te verwijzen, zou het dan korter zijn op de vergelijkingen (g) terug te komen, welker tweede leden niet regtstreeks van $\triangle$ afhangen, en derhalve ook gelden als δ komt in plaats van $\triangle$, mits dan ook de a, b, c in deze tweede leden gedacht worden te zijn coördinaten van een punt in het vlak (W), gaande nu, overeenkomstig het stellen van Δ gelijk aan δ, door het zwaartepunt. Heeft men op deze wijze aangetoond dat $\Delta = \delta$ aan den eisch voldoet, dan blijft nog overig te bewijzen dat het vlak (W), het vlak van twee der hoofdassen voor het punt O, tevens is een vlak van twee voorname hoofdassen. Hierin is wel geen bezwaar, door eenvoudige verplaatsing van den oorsprong der coördinaten, in het vlak (W), van het punt O in het zwaartepunt, doch het een en het ander maakt dit meer regtstreeks zoeken en bepalen van het begeerde omslagtiger dan het volgen van den weg, die in art. 14, naar eene vooraf gemaakte vooronderstelling, eerst gekozen werd.

AANTEEKENING.

De vergelijkingen (7), (42) en (43), verkregen in § I, art. 5, en in § II, art. 2, — en die de uitdrukkingen zijn der voorwaarde van het onveranderlijk zamenhangen der stofdeelen van de massa, dat is van het onveranderlijk zijn der onmiddellijke aansluiting en onderlinge betrekkelijke plaatsing der elementen van de massa, — kunnen langs korter weg worden gevonden.

Omdat de afstand ∂s van een punt (der massa), welks coördinaten zijn x, y, z, tot eenig ander der onmiddellijk rondom gelegene punten, hebbende $x + \partial x$, $y + \partial y$, $z + \partial z$ tot coördinaten, onveranderlijk is bij eenige oneindig kleine variatie der coördinaten, zal uit

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \partial s^2$$

terstond volgen

$$2\,\partial x\,\delta\,\partial x + 2\,\partial y\,\delta\,\partial y + 2\,\partial z\,\delta\,\partial z = 0,$$

of

$$2\,\partial x\,\partial\,\delta x + 2\,\partial y\,\partial\,\delta y + 2\,\partial z\,\partial\,\delta z = 0,$$

zijnde de vergelijking (42), welke tevens de vergelijking (7) insluit.

Voor den afstand $\partial s'$ van laatstgenoemd punt tot een ander, dat wederom volgt of onmiddellijk aansluit, en van hetwelk de cöordinaten zijn, $x + 2\partial x + \partial^2 x$, $y + 2\partial y + \partial^2 y$, $z + 2\partial z + \partial^2 z$, heeft men de vergelijking

$$(\partial x + \partial^2 x)^2 + (\partial y + \partial^2 y)^2 + (\partial z + \partial^2 z)^2 = \partial s'^2.$$

Uit deze en uit de eerste der voorgaande vergelijkingen volgt

$$2\,\partial x\,\partial^2 x + (\partial^2 x)^2 + 2\,\partial y\,\partial^2 y + (\partial^2 y)^2 + 2\,\partial z\,\partial^2 z + (\partial^2 z)^2 = \partial s'^2 - \partial s^2,$$

of

$$(\partial^2 x)^2 + (\partial^2 y)^2 + (\partial^2 z)^2 + 2\,\partial s\,\partial^2 s = \partial s'^2 - \partial s^2.$$

Omdat nu noch $\partial s'$ noch ∂s veranderen bij oneindig kleine variatie der coördinaten, zal men ook hebben

$$2\,\partial^2 x\,\delta\,\partial^2 x + 2\,\partial^2 y\,\delta\,\partial^2 y + 2\,\partial^2 z\,\delta\,\partial^2 z = 0,$$

dat is

$$2\,\partial^2 x\,\partial^2\,\delta x + 2\,\partial^2 y\,\partial^2\,\delta y + 2\,\partial^2 z\,\partial^2\,\delta z = 0,$$

en deze is de vergelijking (43).

Gaat men zoo voort, dan blijkt ligtelijk dat, voor zoo vele opvolgende punten men zou willen, ook in het algemeen

$$(\partial^n x)^2 + (\partial^n y)^2 + (\partial^n z)^2$$

geen variatie ondergaat bij het oneindig weinig variëren der coördinaten, en dat daaruit zal voortvloeijen de algemeene voorwaardes-vergelijking der variatie van de coördinaten

$$2\,\partial^n x\,\partial^n\,\delta x + 2\,\partial^n y\,\partial^n\,\delta y + 2\,\partial^n z\,\partial^n\,\delta z = 0 \ *.$$

* De hier voorgedragene kortere manier, om de voorwaardes-vergelijkingen voor den onveranderlijken zamenhang der elementen van eene vaste massa te verkrijgen, is gevolgd naar eene opmerking van den Heer Lobatto. De Heer Stamkart evenwel kon zich noch met deze wijze van afleiden, noch met die, welke in § I, art. 5, en in § II, art. 2, de noodige vergelijkingen heeft opgeleverd, noch ook in elk opzigt met de wijze van beschouwen en rekenen van Lagrange vereenigen. Hetgeen ZEd. over een en ander heeft aangemerkt, is genoegzaam woordelijk het navolgende met „ aangehaalde.

„De vergelijkingen (42) en (43), in welke ook (7) begrepen is, zijn gevonden door aan te nemen, dat „de variatiën van de uitdrukkingen

$$x^2 + y^2 + z^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (\mathrm{I}),$$

$$(x + \partial x)^2 + (y + \partial y)^2 + (z + \partial z)^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (\mathrm{II}),$$

$$(x + 2\,\partial x + \partial^2 x)^2 + (y + 2\,\partial y + \partial^2 y)^2 + (z + 2\,\partial z + \partial^2 z)^2 \ \ldots\ldots \ (\mathrm{III})$$

„gelijk *nul* moeten zijn. Naar het mij voorkomt kunnen de vergelijkingen (42) en (43) hieruit *niet* „worden afgeleid. Wanneer toch de uitdrukkingen (II) en (III) iets anders zullen beteekenen dan (I), moeten „∂x, ∂y, ∂z, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$ als eindige grootheden beschouwd worden, zoo klein men wil, maar „toch als *grootheden*, en niet als *oneindig kleinen*. Want zou hier b. v. ∂x oneindig klein zijn, dan is „$(x+\partial x)$ *niets meer of minder* dan x. ∂x heeft geen beteekenis dan alleenlijk met betrekking tot eene „andere differentiaal."

De aanmerking is op zich zelve juist, maar de wijze waarop in den tekst is te werk gegaan, is geen afwijking van hetgeen in de toepassingen der differentiaal-rekening meermalen geschiedt en als geoorloofd is aangenomen, te weten dat men, in plaats van eerst op eindige veranderingen opzettelijk te letten, deze als *differentiën* uit te drukken, en daarna, bij overgang tot de limieten, daarvoor in de plaats te stellen hetgeen behoort, onmiddellijk besluite tot dit laatste, en derhalve het eerste (het gebruik van eindige differentiën) nalate, daarbij slechts denkende hetgeen er bij gedacht moet worden. Wil men verder differentialen eeniglijk met betrekking tot andere beschouwen, dan kan men de differentiaal van eenige andere onafhankelijk veran-

Bij de oplossing der voorstellen over de beweging van een vast ligchaam om eene vaste as en om een vast punt, heeft men slechts te letten op *drie* onbepaalde variatiën δx, δy, δz. Daarom zijn er ook niet meer dan drie voorwaardes-vergelijkingen van de variatiën der

---

derlijke grootheid denken; zij behoeft niet genoemd of uitgedrukt te worden, gelijk dit b. v. somtijds wordt nagelaten in de variatie-rekening bij het variëren van eene integraal.

„In de plaats van ∂x komt dan Δx, voor $\partial^2 x$ komt $\Delta^2 x$, enz., zoodat men zal hebben:

$$x^2 + y^2 + z^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)},$$

$$(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 + (z + \Delta z)^2 \ldots\ldots\ldots \text{(II)},$$

$$(x + 2\Delta x + \Delta^2 x)^2 + (y + 2\Delta y + \Delta^2 y)^2 + (z + 2\Delta z + \Delta^2 z)^2 \ldots\ldots \text{(III)}.$$

„Van deze uitdrukkingen moeten de variatiën *nul* zijn. De eerste geeft

$$2x\,\delta x + 2y\,\delta y + 2z\,\delta z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

„De tweede heeft tot variatie

$$2(x + \Delta x)(\delta x + \delta\Delta x) + 2(y + \Delta y)(\delta y + \delta\Delta y) + 2(z + \Delta z)(\delta z + \delta\Delta z) = 0,$$

„dat is, op (41) lettende,

$$2\left\{\Delta x\,\delta x + x\,\delta\Delta x + \Delta y\,\delta y + y\,\delta\Delta y + \Delta z\,\delta z + z\,\delta\Delta z\right\} +$$
$$2\left\{\Delta x\,\delta\Delta x + \Delta y\,\delta\Delta y + \Delta z\,\delta\Delta z\right\} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

„Worden nu Δx, Δy, Δz steeds kleiner en kleiner, dan worden de termen, die in deze vergelijking „als een tweede gedeelte van het eerste lid zijn genomen, en die van de derde orde zijn, steeds kleiner „met betrekking tot de termen van de eerste groep, en die van de tweede orde zijn, zoodat, tot de „limieten overgaande, alleenlijk blijft

$$2\left\{\partial x\,\delta x + x\,\partial\delta x + \partial y\,\delta y + y\,\partial\delta x + \partial z\,\delta z + z\,\partial\delta z\right\} = 0,$$

„maar er volgt *niet* dat $2\left\{\partial x\,\partial\delta x + \partial y\,\partial\delta y + \partial z\,\partial\delta z\right\} = 0$ zou zijn met betrekking tot de grens- „waarde eener grootheid van de derde orde."

Maar $(\partial x\,\delta x + x\,\partial\delta x + \partial y\,\delta y + y\,\partial\delta y + \partial z\,\delta z + z\,\partial\delta z)$ is niet onderscheiden van $\partial(x\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z)$. Derhalve zou de uitkomst alleenlijk leeren, dat

$$\partial(x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z) = 0$$

ware. Dit *nul* zijn echter behoeft niet bewezen te worden, daar het een gevolg is van hetgeen de vergelijking (41) uitdrukt. Bovendien zou dan door de ontwikkeling van (II) niet meer of niets anders geleerd worden dan reeds door (I) bekend werd, terwijl er meer uit afgeleid moet kunnen worden Zou niet het begeerde verkregen worden als men vooraf opmerkte, dat

$$\Delta x\,\delta x + x\,\delta\Delta x + \Delta y\,\delta y + y\,\delta\Delta y + \Delta z\,\delta z + z\,\delta\Delta z$$

aan de limiet zal worden $= \partial(x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z)$, en daarom, op grond van (41), gelijk *nul*, zoodat dan, aan de limiet, de vergelijking (A) zal overgaan in

$$2\left\{\partial x\,\partial\delta x + \partial y\,\partial\delta y + \partial z\,\partial\delta z\right\} = 0?$$

„Meetkundig beschouwd geeft het standvastig zijn van de uitdrukkingen (I), (II), (III) slechts te „kennen, dat drie punten op de oppervlakken van drie verschillende bollen moeten zijn. Het al of niet coördinaten noodig, en van deze hebben òf slechts *één* òf *twee* betrekking tot de vooronderstelling van het vast zijn der bewogen wordende massa. Beschouwt of neemt men de voorwaarde van dit *vast* zijn afgescheiden van andere voorwaarden, tot wijze van beweging

---

„bij elkander geplaatst zijn dier punten wordt er niet door aangewezen. Twee dier punten kunnen „b. v. een afstand hebben $= r + r'$, r en r' de stralen van twee dier bollen zijn."

Maar bestaan de uitdrukkingen (I), (II), (III) dan niet uitsluitend onder de duidelijk genoemde en herhaaldelijk genoemde voorwaarde, dat zij alleenlijk betrekking hebben tot *aan elkander grenzende* of tot *onmiddellijk op elkander volgende* elementen der massa? De coördinaten der punten duiden dit reeds aan. De onderlinge plaatsing en verwijdering der punten op de drie spherische vlakken zijn derhalve geenszins willekeurig, vooral niet als men in aanmerking neemt, dat aan bepaalde teekens, hetzij dan $+$ hetzij $-$, vóór de differentialen van x, y, z, moet gedacht worden.

„De vergelijkingen (42) en (43) kunnen slechts afgeleid worden uit de overweging, dat de onderlinge „afstanden van eenig punt tot een tweede, van het eerste punt tot een derde, en van het tweede punt „tot het derde standvastig moeten zijn, dat is

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \textit{standvastig},$$

$$(2\,\Delta x + \Delta^2 x)^2 + (2\,\Delta y + \Delta^2 y)^2 + (2\,\Delta z + \Delta^2 z)^2 = \textit{standv.},$$

$$(\Delta x + \Delta^2 x)^2 + (\Delta y + \Delta^2 y)^2 + (\Delta z + \Delta^2 z)^2 = \textit{standv.},$$

„waaruit dan

$$(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2 = \textit{standv.},$$

„en uit deze en de eerste der drie voorgaande vergelijkingen zal dan volgen

$$2\left\{\Delta x\,\partial\Delta x + \Delta y\,\partial\Delta y + \Delta z\,\partial\Delta z\right\} = 0,$$

$$2\left\{\Delta^2 x\,\partial\Delta^2 x + \Delta^2 y\,\partial\Delta^2 y + \Delta^2 z\,\partial\Delta^2 z\right\} = 0,$$

„gevende, bij overgang tot de limieten, de vergelijkingen (42) en (43)."

Men wil de juistheid dezer wijze van beschouwen, om de voorwaarde van het onveranderlijk geplaatst zijn der elementen ontwijfelbaar uit te drukken, gaarne toegeven. Is zij echter niet in die van LAGRANGE begrepen? Er wordt hier bepaaldelijk gesteld of voorgeschreven, *den afstand van het tweede tot het derde punt mede in rekening te brengen*. LAGRANGE deed dit niet, of vond geene reden om het te noemen. Hij had geene drie voorwaardes-vergelijkingen noodig. Hij wilde er vele geven. Hij wilde ze alle geven, voor alle mogelijke afstanden tusschen paren van elementen, niet alleenlijk de afstanden van 1 tot 2, tot 3, tot 4, enz., maar, elk punt een eerste punt kunnende zijn, dan ook de afstanden van 2 tot 3, van 2 tot 4, enz. van 3 tot 4, enz. enz.

„Zelfs heb ik bedenking tegen de wijze, waarop deze vergelijkingen door LAGRANGE verkregen zijn. „Hij stelt (zie de vergelijkingen, in de Aanteekening der Bijdrage gemerkt (aa))

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \alpha,$$

enz. . . enz.

„Volgens mijne wijze van zien kunnen deze differentialen, zoo lang zij met x, y, z, door optelling, „of aftrekking verbonden zijn, slechts als eindige differentiën beschouwd worden. Men moet derhalve, „LAGRANGE volgende, stellen:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = \alpha,$$

$$(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2 = \beta.$$

als anderzins betrekking hebbende, — vraagt men derhalve alleenlijk voorwaardes-vergelijkingen, die den onveranderlijken zamenhang der deelen van de massa zullen uitdrukken, dan moet het aantal dezer vergelijkingen *drie* zijn, wel te verstaan met opzigt tot de elementen der massa in het algemeen, dat is bij het onbepaald blijven der plaats van de elementen in de uitgebreidheid der massa. Behalve de vergelijkingen

$$2\,\partial x\,\partial\,\delta x + 2\,\partial y\,\partial\,\delta y + 2\,\partial z\,\partial\,\delta z = 0\,,$$

$$2\,\partial^2 x\,\partial^2\,\delta x + 2\,\partial^2 y\,\partial^2\,\delta y + 2\,\partial^2 z\,\partial^2\,\delta z = 0\,,$$

behoeft men alsdan nog *één* vergelijking, welke, zoo als de tweede is gevonden door middel van de eerste, verkregen kan worden met de tweede en eerste vergelijkingen, en welke is

$$2\,\partial^3 x\,\partial^3\,\delta x + 2\,\partial^3 y\,\partial^3\,\delta y + 2\,\partial^3 z\,\partial^3\,\delta z = 0.$$

Men kan eene vierde, eene vijfde dergelijke vergelijking vormen, enz. Alle zullen begrepen zijn in de hiervoren gestelde algemeene, namelijk

$$2\,\partial^n x\,\partial^n\,\delta x + 2\,\partial^n y\,\partial^n\,\delta y + 2\,\partial^n z\,\partial^n\,\delta z = 0.$$

In het algemeen geval zijn er echter slechts *drie* dezer vergelijkingen noodig, voor zoo verre zij zijn onderling onafhankelijk. Want er zijn niet meer dan drie onbepaalde variatiën, en zoo men deze zou willen bepalen, dat is vinden hoe, bij het onbepaald blijven der coördinaten, de variatiën der coördinaten van de punten eener vaste massa zamenhangen met die coördinaten zelve, dan zouden daartoe drie zoodanige vergelijkingen toereiken. Al de overige gelijkvormige vergelijkingen zullen door dezelfde waarden der variatiën δx, δy, δz

---

„Om nu te bewijzen dat *de variatie van β nul* is, moet men hebben:

$$(2\,\Delta x + \Delta^2 x)^2 + (2\,\Delta y + \Delta^2 y)^2 + (2\,\Delta z + \Delta^2 z)^2 = \textit{standvastig},$$

„dat is

$$4\left\{(\Delta x^2) + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\right\} + 4\left\{\Delta x\,\Delta^2 x + \Delta y\,\Delta^2 y + \Delta z\,\Delta^2 z\right\} + \left\{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2\right\} = \textit{standv.}\,.\,(\mathrm{B})$$

„Maar nemende, volgens den regel, de differentie van α, dan komt, na met 2 vermenigvuldigd en met „4α vermeerderd te hebben,

$$4\alpha + 2\,\Delta\alpha = 4\left\{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\right\} + 4\left\{\Delta x\,\Delta^2 x + \Delta y\,\Delta^2 y + \Delta z\,\Delta^2 z\right\} +$$
$$+ 2\left\{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2\right\},$$

„of

$$4\alpha + 2\,\Delta\alpha - \left\{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2\right\} = (\mathrm{B}) = \textit{standv.},$$

„dat is

$$4\,\alpha + 2\,\Delta\alpha - \beta = \textit{standv.},$$

„waarvoor bij Lagrange komt

$$4\,\alpha + 2\,\partial\alpha + \beta.$$

„De uitkomst blijft nogtans dezelfde, namelijk deze: daar α standvastig is met betrekking tot de variatie „δ, is ook $\Delta\alpha$ in denzelfden zin standvastig; bij gevolg ook β, en daarom de variatie van β gelijk *nul*.

„Eene gelijksoortige opmerking geldt, naar het mij voorkomt, ook omtrent het bewijs, in de Aanteekening gegeven, en naar eene mededeeling van den Heer Lobatto gevolgd."

voldaan of identisch $0 = 0$ worden, door welke eenig drietal wordt voldaan, of die uit eenig drietal mogten zijn afgeleid, en waartoe dan klaarblijkelijk voorkeur wordt gegeven aan de drie eerste vergelijkingen, als, door lagere orde, de eenvoudigste.

Men is deze algemeene voorwaardes-vergelijkingen van het onveranderlijk verband der elementen van een vast ligchaam verschuldigd aan LAGRANGE, die er gebruik van gemaakt heeft om, naar zijne methode, de vergelijkingen te vinden voor het evenwigt van krachten, werkende op de elementen zoo van een onrekbaren en onbuigbaren draad, of eener massieve roede, als op die van een vast ligchaam (zie zijne *Mécanique Analytique, Première Partie. Sect.* V, *Chap.* III, § IV, *et Chap.* IV, *page* 159—173, *Edit.* 1811).

LAGRANGE denkt eene menigte op elkander volgende punten, bepaald door de opvolgende coördinaten x, y, z, $x+\partial x$, $y+\partial y$, $z+\partial z$, $x+2\partial x+\partial^2 x$, $y+2\partial y+\partial^2 y$, $z+2\partial z+\partial^2 z$, enz. De uitdrukkingen voor de quadraten der afstanden van het eerste punt tot elk der volgende worden ligtelijk gevonden. Zij zullen zijn

$$\alpha,$$
$$4\alpha + 2\partial\alpha + \beta,$$
$$9\alpha + 9\partial\alpha + 9\beta + 3(\partial^2\alpha - 2\beta) + 3\partial\beta + \gamma,$$

enz. enz.,

indien namelijk gesteld wordt

$$\left.\begin{array}{l} \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \alpha, \\ (\partial^2 x)^2 + (\partial^2 y)^2 + (\partial^2 z)^2 = \beta, \\ (\partial^3 x)^2 + (\partial^3 y)^2 + (\partial^3 z)^2 = \gamma, \\ \text{enz.} \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (aa)$$

De genoemde afstanden onveranderlijk moetende zijn, zullen de variatiën der tweede magten van de uitdrukkingen, door welke zij zijn bepaald, *nul* wezen, en daarom

$$\delta\alpha = 0;\ 4\delta\alpha + 2\delta\partial\alpha + \delta\beta = 0;\ 9\delta\alpha + 9\delta\partial\alpha + 3\delta\beta + 3\delta\partial^2\alpha + 3\delta\partial\beta + \delta\gamma = 0;\ \text{enz.}$$

En hieruit leidt men gemakkelijk af, dat aan de voorwaarde van het onveranderlijk aansluitend zamenhangen of volkomen vast zijn der deelen van het ligchaam voldaan zal worden door de vergelijkingen $\delta\alpha = 0$, $\delta\beta = 0$, $\delta\gamma = 0$, dat is door deze drie vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} \partial x\,\partial\,\delta x + \partial y\,\partial\,\delta y + \partial z\,\partial\,\delta z = 0, \\ \partial^2 x\,\partial^2\,\delta x + \partial^2 y\,\partial^2\,\delta y + \partial^2 z\,\partial^2\delta z = 0, \\ \partial^3 x\,\partial^3\,\delta x + \partial^3 y\,\partial^3\,\delta y + \partial^3 z\,\partial^3\delta z = 0. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (bb)$$

Werken er derhalve op de elementen van een vast ligchaam krachten, die, ontbonden zijnde in rigtingen evenwijdig aan aangenomene coördinaten-assen, tot zamenstellende krachten hebben $X\partial m$, $Y\partial m$, $Z\partial m$, dan zal, bij de onbepaalde vergelijking der virtuele momenten voor het evenwigt dezer krachten, gevoegd moeten worden de som der sommen (integralen over de geheele uitgebreidheid van het ligchaam) van de voorgaande vergelijkingen (die elke slechts tot een enkel element betrekking hebben), elke vooraf met een onbepaalden factor λ, μ, ν vermenigvuldigd zijnde. De voorwaarde van het vast zijn des ligchaams op deze wijze in rekening gebragt zijnde, heeft men de meer bepaalde vergelijking der virtuele momenten. Zij zal dienvolgens, onherleid, deze zijn:

$$0 = \int \Big\{ (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,\partial m + \lambda(\partial x\,\partial\,\delta x + \partial y\,\partial\,\delta y + \partial z\,\partial\,\delta z)$$
$$+ \mu(\partial^2 x\,\partial^2\delta x + \partial^2 y\,\partial^2\delta y + \partial^2 z\,\partial^2\delta z) + \nu(\partial^3 x\,\partial^3\delta x + \partial^3 y\,\partial^3\delta y + \partial^3 z\,\partial^3\delta z) \Big\} \; * \; . \quad (cc)$$

* De vergelijking (*cc*) zou kunnen vervangen worden door eene andere, geen onbepaalde factoren λ, μ, ν bevattende. Deze andere komt, door, uit de vergelijkingen (*bb*), de waarden der variatiën δx, δy, δz te bepalen (in functie van de onbepaalde coördinaten x, y, z en van willekeurige standvastige grootheden, die zelve als variatiën zijn aan te merken), en deze waarden alsdan in de onbepaalde algemeene vergelijking der virtuele momenten te substitueren. Dit is mede door Lagrange gedaan. Hij integreerde daartoe de vergelijkingen (*bb*), maar voor het meer eenvoudige der uitvoering nam hij aan dat ∂x standvastig zij, en daarom $\partial^2 x = 0$ en $\partial^3 x = 0$ (vergelijk, hiervoren, § II, art. 4). Lagrange vond (zie *Mécan. Anal.* p. 169 de la *Première Partie*)

$$\delta x = \delta l - y\,\delta N + z\,\delta M,$$
$$\delta y = \delta m + x\,\delta N - z\,\delta L,$$
$$\delta z = \delta n - x\,\delta M + y\,\delta L,$$

in welke δl, δm, δn, δL, δM, δN, *zes* willekeurige standvastige grootheden zijn, van dezelfde orde als δx, δy, δz. Deze eenvoudige formulen zijn de uitdrukkingen voor de variatiën der coördinaten van elk punt eener vaste massa, naar eenige voorwaarde bewogen of verplaatst kunnende worden.

Lagrange noemt Euler, als door wien deze formulen het eerst zouden gevonden zijn, ofschoon op andere en minder strikte wijze.

Euler gaf in het jaar 1750 (*Mémoires de l'Académie de Berlin*) zijne belangrijke verhandeling, getiteld „*Découverte d'un nouveau principe de Mécanique*," ten doel hebbende om een nieuwen en beteren weg aan te wijzen, ter oplossing van het toen nog zoo moeijelijk en niet genoegzaam opgelost Problema der beweging van een vast ligchaam om een vast punt. En inderdaad heeft Euler in deze verhandeling ook op het oog gehad om de voorwaarde van het vast zijn des ligchaams op bijzondere wijze in rekening te brengen. Ofschoon zich noch van de bewoording *variatie* noch van het teeken δ, ter aanduiding van eenige variatie, bedienende, kwam hij toch, bijkans volgens hetzelfde daaraan te hechten begrip, tot de uitdrukkingen voor de veranderingen bij het verplaatst worden van eenig punt der massa, dat met een oneindig nabij gelegen punt op onveranderlijke wijze is verbonden. Hetgeen Lagrange kon noemen *variatie* werd door Euler genoemd *snelheid in den tijd* ∂t. Zijn P, Q, R zoodanige snelheden, in de rigtingen der coördinaten-assen, dan komt Euler tot deze betrekkingen

$$Px + Qy + Rz = 0,$$
$$\partial P\,\partial x + \partial Q\,\partial y + \partial R\,\partial z = 0,$$

welke, als voorwaardes-vergelijkingen, volstrektelijk dezelfde zijn als de in deze Bijdrage gevondene vergelijkingen (41) en (42), zoo slechts $2\,\delta x$, $2\,\delta y$, $2\,\delta z$ in plaats van P, Q, R worden gesteld. Euler vindt evenwel slechts deze twee vergelijkingen. Eene derde, hoedanige de vergelijking (43) is, geeft hij niet, en dit is minder streng of minder volledig. Nogtans vindt hij, ofschoon niet regtstreeks, maar door bijzondere vooronderstellingen aan te nemen, Herleidt men deze vergelijking door integreren bij gedeelten, zoodat alle termen onder het integraalteeken van loutere variatiën (geen differentialen van variatiën) afhangen, — en onderscheidt men de bestanddeelen der termen, buiten het integraalteeken gekomen en alleenlijk tot de beide limieten der integraal betrekking hebbende, door accenten (b. v. λ'' en λ', μ'' en $\mu' \ldots . x''$ en x', enz., naar gelang zij gelden voor de tweede grens of voor de eerste, en bij welke eerste grens al de integralen, die in de beschouwing voorkomen, verdwijnen of *nul* zijn), — dan komt deze ontwikkelde en herleide vergelijking:

$$
\begin{aligned}
0 = \int \Big\{ & \Big[X\,\partial m - \partial(\lambda\,\partial x) + \partial^2(\mu\,\partial^2 x) - \partial^3(\nu\,\partial^3 x)\Big]\delta x \\
& + \Big[Y\,\partial m - \partial(\lambda\,\partial y) + \partial^2(\mu\,\partial^2 y) - \partial^3(\nu\,\partial^3 y)\Big]\delta y \\
& + \Big[Z\,\partial m - \partial(\lambda\,\partial z) + \partial^2(\mu\,\partial^2 z) - \partial^3(\nu\,\partial^3 y)\Big]\delta z \Big\} \\
& + \{\lambda''\partial x'' - \partial(\mu''\partial^2 x'') + \partial^2(\nu''\partial^3 x'')\}\,\delta x'' - \{\lambda'\partial x' - \partial(\mu'\partial^2 x') + \partial^2(\nu'\partial^3 x')\}\,\delta x' \\
& + \{\lambda''\partial y'' - \partial(\mu''\partial^2 y'') + \partial^2(\nu''\partial^3 y'')\}\,\delta y'' - \{\lambda'\partial y' - \partial(\mu'\partial^2 y') + \partial^2(\nu'\partial^3 y')\}\,\delta y' \\
& + \{\lambda''\partial z'' - \partial(\mu''\partial^2 z'') + \partial^2(\nu''\partial^3 z'')\}\,\delta z'' - \{\lambda'\partial z' - \partial(\mu'\partial^2 z') + \partial^2(\nu'\partial^3 z')\}\,\delta z' \\
& + \{\mu''\partial^2 x'' - \partial(\nu''\partial^3 x'')\}\,\partial\delta x'' + (\nu''\partial^3 x'')\partial^2\delta x'' - \{\mu'\partial^2 x' - \partial(\nu'\partial^3 x')\}\,\partial\delta x' - (\nu'\partial^3 x')\partial^2\delta x' \\
& + \{\mu''\partial^2 y'' - \partial(\nu''\partial^3 y'')\}\,\partial\delta y'' + (\nu''\partial^3 y'')\partial^2\delta y'' - \{\mu'\partial^2 y' - \partial(\nu'\partial^3 y')\}\,\partial\delta y' - (\nu'\partial^3 y')\partial^2\delta y' \\
& + \{\mu''\partial^2 z'' - \partial(\nu''\partial^3 z'')\}\,\partial\delta z'' + (\nu''\partial^3 z'')\partial^2\delta z'' - \{\mu'\partial^2 z' - \partial(\nu'\partial^3 z')\}\,\partial\delta z' - (\nu'\partial^3 z')\partial^2\delta z' \quad . (dd)
\end{aligned}
$$

LAGRANGE behandelt deze vergelijking verder, gelijk men, ter aangehaalde plaats, kan nagaan. Het is onnoodig daarvan hier meer te ontleenen of te geven voor hetgeen thans, tot besluit, nog zal worden bijgebragt als voorbeeld van toepassing dezer vergelijking, om het voorstel der beweging van een vast ligchaam om een vast punt op te lossen. Daartoe moeten vooreerst de onbepaaldelijk aangeduide krachten $X\,\partial m$, $Y\,\partial m$, $Z\,\partial m$, tusschen welke evenwigt zal bestaan, vervangen worden door die, welke, volgens het beginsel van D'ALEM-

---

$$P\,(=\delta x) = +\,Ay + Bz; \quad Q\,(=\delta y) = +\,Cz - Ax; \quad R\,(=\delta z) = -\,Bx - Cy,$$

in welke A, B, C willekeurige standvastige grootheden zijn (vergelijk de uitkomsten, door integreren verkregen in § II (art. 4) dezer Bijdrage). Het zijn deze vergelijkingen, welke LAGRANGE heeft kunnen bedoelen als het eerst door EULER gevonden. In vorm zijn zij niet onderscheiden van de door LAGRANGE gegevene formulen. Deze zijn algemeen, als geen betrekking hebbende tot eenig bepaald geval van beweging eener vaste massa, terwijl EULER zich had ten doel gesteld vergelijkingen of formulen te vinden, toepasselijk op het bijzonder geval of bepaald problema der beweging van een vast ligchaam om een vast punt; alsdan toch vervallen, bij het niet vrij zijn der massa, *die* van de *zes* willekeurige standvastige grootheden, die in de formulen van LAGRANGE aanwezig zijn en moesten zijn.

EULER gewaagt ook van de krachten, aan welke men, bij het in rekening brengen der voorwaarde van den onveranderlijken zamenhang der elementen van de massa, kan denken. Van een bepalen dezer krachten kon geen sprake zijn, gelijk ook, het voorschrift van LAGRANGE volgende, zoodanige bepaling, door het bepalen der waarden van de factoren μ en ν, uit den aard der zaak tot niets zou leiden. EULER merkt hieromtrent eenvoudiglijk op: „*or il est à remarquer que les forces internes se détruisent mutuellement.*"

BERT, evenwigt moeten maken door middel van de betrekkelijk gedwongene stelling van het te bewegen ligchaam, dat is, in de plaats van de termen $X\,\partial m$, $Y\,\partial m$, $Z\,\partial m$ komen deze andere

$$\left(X\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial m\right),\quad \left(Y\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\partial m\right),\quad \left(Z\,\partial m - \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}\,\partial m\right).$$

Vermits nu in de vergelijking (*dd*) al de variatiën onder het integraalteeken, of in de integraal-uitdrukking, als onderling onafhankelijk kunnen worden verondersteld, en de grootte van elke dezer variatiën, alhoewel ook oneindig klein, daardoor geheel onbepaald is en willekeurig, — daar verder aan de vergelijking, volgens den bekenden regel, voldaan wordt door én de integraal uitdrukking, én de som der termen buiten de integraal, afzonderlijk *nul* te stellen, — zal ook elke der drie integralen, die δx, δy, δz tot factoren hebben, *nul* zijn. Hierdoor heeft men, daar ook de integraalteekens kunnen weggelaten worden, in de eerste plaats, deze drie vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(X\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial m\right) - \partial(\lambda\,\partial x) + \partial^2(\mu\,\partial^2 x) - \partial^3(\nu\,\partial^3 x) = 0\,,\\
&\left(Y\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\partial m\right) - \partial(\lambda\,\partial y) + \partial^2(\mu\,\partial^2 y) - \partial^3(\nu\,\partial^3 y) = 0\,,\\
&\left(Z\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,\partial m\right) - \partial(\lambda\,\partial z) + \partial^2(\mu\,\partial^2 z) - \partial^3(\nu\,\partial^3 z) = 0\,,
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(ee)$$

De voorwaarde van het beperkt zijn der beweging bestaat in het verbonden zijn des ligchaams met een vast punt. Worden van dit punt af de coördinaten gerekend en ook (als beginpunt) de integralen, dan is, door deze laatste vooronderstelling, $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, en dan ook $\delta x' = 0$, $\delta y' = 0$, $\delta z'_{,} = 0$. Hierdoor vallen uit de vergelijking (*dd*) die termen weg, welke, buiten de integraal, met $\delta x'$, $\delta y'$, $\partial z'$ vermenigvuldigd worden, en de variatiën aan de limieten der integraal nu verder aan geene bijzondere voorwaarden onderworpen zijnde, kunnen de coëfficienten der onderscheidene variatiën en differentialen van variatiën, behoorende tot de termen buiten de integraal, alle gelijk *nul* worden gesteld. Daardoor komen, in de tweede plaats, deze tot de grenzen der integraal betrekking hebbende vergelijkingen of voorwaarden:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda''\,\partial x'' - \partial(\mu''\,\partial^2 x'') + \partial^2(\nu''\,\partial^3 x) = 0\,;\\
&\lambda''\,\partial y'' - \partial(\mu''\,\partial^2 y'') + \partial^2(\nu''\,\partial^3 y) = 0\,;\\
&\lambda''\,\partial z'' - \partial(\mu''\,\partial^2 z'') + \partial^2(\nu''\,\partial^3 z) = 0.\\
&\mu''\partial^2 x'' - \partial(\nu''\partial^3 x'') = 0\,;\ \mu''\partial^2 y'' - \partial(\nu''\partial^3 y'') = 0\,;\ \mu'\,\partial^2 z'' - \partial(\nu''\partial^3 z'') = 0\,;\\
&\mu'\partial^2 x' - \partial(\nu'\,\partial^3 x') = 0\,;\ \mu'\,\partial^2 y' - \partial(\nu'\,\partial^3 y') = 0\,;\ \mu'\,\partial^2 z' - \partial(\nu'\,\partial^3 z') = 0.\\
&\nu''\,\partial^3 x'' = 0\,;\ \nu''\partial^3 y'' = 0\,;\ \nu''\partial^3 z'' = 0\,;\ \nu'\partial^3 x' = 0\,;\ \nu'\partial^3 y' = 0\,;\ \nu'\partial^3 z' = 0\,;\\
&\text{dat is } \nu'' = 0 \text{ en } \nu' = 0.
\end{aligned}\right\}\;\ldots\;(ff)$$

De eerste integralen van de vergelijkingen (*ee*) zijn:

$$\left.\begin{aligned}
&\int\left(\mathrm{X}\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial m\right) - \lambda\,\partial x + \partial\,\{\mu\,\partial^2 x - \partial\,(\nu\,\partial^3 x\} = \mathrm{D},\\
&\int\left(\mathrm{Y}\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\partial m\right) - \lambda\,\partial y + \partial\,\{\mu\,\partial^2 y - \partial\,(\nu\,\partial^3 y\} = \mathrm{E},\\
&\int\left(\mathrm{Z}\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,\partial m\right) - \lambda\,\partial z + \partial\,\{\mu\,\partial^2 z - \partial\,(\nu\,\partial^3 z\} = \mathrm{F}.
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots \quad (gg)$$

Aan de eerste limiet zijn de integralen, dat is de eerste termen van de voorste leden dezer vergelijkingen, *nul;* ook zijn, aan dezelfde limiet, de derde termen der voorste leden *nul* (zie (*ff*)); derhalve komt:

$$-\lambda'\,\partial x' = \mathrm{D}, \quad -\lambda'\,\partial y' = \mathrm{E}, \quad -\lambda'\,\partial z' = \mathrm{F} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (hh)$$

Let men op de tweede limiet, dan hebben de integralen betrekking tot de geheele massa, en ingevolge de drie eerste vergelijkingen (*ff*) zullen de overige termen der voorste leden van de vergelijkingen (*gg*), te zamen genomen in elke vergelijking, *nul* zijn. Gevolgelijk zal men hebben met betrekking tot de geheele massa:

$$\int\left(\mathrm{X}\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial m\right) = \mathrm{D}, \quad \int\left(\mathrm{Y}\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\partial m\right) = \mathrm{E}, \quad \int\left(\mathrm{Z}\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,\partial m\right) = \mathrm{F}. \quad (ii)$$

Door eliminatie van λ uit de vergelijkingen (*gg*), twee aan twee genomen, kan men drie andere vergelijkingen vormen, die, wederom geïntegreerd zijnde (en zulks, waar het noodig of gepast is, bij gedeelten), deze tweede integralen zullen opleveren:

$$\left.\begin{aligned}
&y\int\left(\mathrm{X}\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right) - x\int\left(\mathrm{Y}\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right) - \int\left\{y\mathrm{X}\partial m - x\mathrm{Y}\partial m - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m + x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right\}\\
&\quad + \{\mu\partial^2 x - \partial(\nu\partial^3 x)\}\,\partial y - \{\mu\partial^2 y - \partial(\nu\partial^3 y)\}\,\partial x + \nu(\partial^2 y\partial^3 x - \partial^2 x\partial^3 y) = \mathrm{D}y - \mathrm{E}x + \mathrm{G};\\
&z\int\left(\mathrm{X}\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right) - x\int\left(\mathrm{Z}\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right) - \int\left\{z\mathrm{X}\,\partial m - x\mathrm{Z}\partial m - z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m + x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right\}\\
&\quad + \{\mu\partial^2 x - \partial(\nu\partial^3 x)\}\,\partial z - \{\mu\partial^2 z - \partial(\nu\partial^3 z)\}\,\partial x + \nu(\partial^2 z\partial^3 x - \partial^2 x\partial^3 z) = \mathrm{D}z - \mathrm{F}x + \mathrm{H};\\
&z\int\left(\mathrm{Y}\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right) - y\int\left(\mathrm{Z}\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right) - \int\left\{z\mathrm{Y}\,\partial m - y\mathrm{Z}\,\partial m - z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m + y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right\}\\
&\quad + \{\mu\partial^2 y - \partial(\nu\partial^3 y)\}\,\partial z - \{\mu\partial^2 z - \partial(\nu\partial^3 z)\}\,\partial y + \nu(\partial^2 z\,\partial^3 y - \partial^2 y\,\partial^3 z) = \mathrm{E}z - \mathrm{F}y + \mathrm{I}.
\end{aligned}\right\}(kk)$$

Aan de eerste limiet der integralen zijn $x = x' = 0$, $y = y' = 0$, $z = z' = 0$, $\nu = \nu' = 0$. De onbepaalde integralen zijn mede *nul*, gelijk ook, ingevolge de vergelijkingen (*ff*), de coëfficienten van ∂x, ∂y, ∂z in de termen buiten de integralen. En hiermede worden de willekeurige standvastige grootheden G, H, I gelijk *nul*. Voor de tweede limiet zullen de vergelijkingen (*kk*) betrekking hebben tot de geheele massa; desgelijks de vergelijkingen (*ii*).

Daarom zullen, b. v. van de eerste der vergelijkingen (kk), de twee eerste termen kunnen vervangen worden door $y''\mathrm{D} - x''\mathrm{E}$; maar zij worden dan opgeheven door de termen $\mathrm{D}y'' - \mathrm{E}x''$ in het tweede lid, en dit tweede lid wordt hierdoor *nul*. Daar verder ook $r = r'' = 0$, en eveneens de coëfficienten van ∂y en ∂x aan de tweede limiet *nul* zijn (zie (ff)), zal er alleenlijk, met betrekking tot de geheele massa, de derde term van het voorste lid overig blijven. Op dezelfde wijze komt dergelijk besluit voor de tweede en derde vergelijkingen (kk). Zij worden derhalve herleid tot drie integralen, elke gelijk *nul*, en deze geven dan terstond de drie vergelijkingen der beweging, namelijk de vergelijkingen (49), in art. 2 van § II gevonden.

Om de formulen voor de drukkingen tegen het vaste punt te verkrijgen, merke men op, dat de eerste der voorwaardes-vergelijkingen (bb) voor de variatiën der coördinaten (en van welke al de termen eigenlijk nog 2 tot factor zouden moeten hebben), voortgekomen is uit de eerste der vergelijkingen (aa), zoodat hier de niet gevariëerde of oorspronkelijke voorwaardes-vergelijking is

$$\mathrm{L} = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 - \alpha = 0,$$

zijnde eene functie, niet van coördinaten, maar van differentialen van coördinaten. Zij is de uitdrukking voor den afstand van eenig *eerste* punt der massa tot eenig onmiddellijk opvolgend *tweede* punt. Hiertoe heeft dan ook betrekking de onbepaalde factor λ, met welken de eerste der gevariëerde voorwaardes-vergelijkingen, dat is de eerste der vergelijkingen (bb), is vermenigvuldigd geworden. Het eerste punt, dat, ter bepaling van λ, als eerste punt voor de geheele massa in aanmerking komt, is klaarblijkelijk het punt aan de eerste limiet der integralen, derhalve het vaste punt. De voorwaarde $\mathrm{L} = \alpha$ — enz. zal dienvolgens betrekking hebben tot een punt, onmiddellijk grenzende aan het vaste punt, en λ' zal dan betrekking moeten hebben tot eene drukking, uitgeoefend tegen het vaste punt in de rigting van eenig regtlijnig differentiaal-element $\partial s'$; de hoegrootheid der drukking zelve zal $\lambda'\mathrm{U}'$ tot uitdrukking hebben. Voor de waarde λ' van λ, ter plaatse van het vaste punt, geven de vergelijkingen (hh), als in deze $2\lambda'$ gesteld wordt voor λ',

$$\lambda' = -\frac{1}{2\,\partial x'}\mathrm{D} = -\frac{1}{2\,\partial y'}\mathrm{E} = -\frac{1}{2\,\partial z'}\mathrm{F}.$$

Verder is

$$\mathrm{U}' = \pm\sqrt{\left\{\left[\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial(\partial x')}\right]^2 + \left[\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial(\partial y')}\right]^2 + \left[\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial(\partial z')}\right]^2\right\}} = \pm 2\sqrt{\{(\partial x')^2 + (\partial y')^2 + (\partial z')^2\}} = \pm 2\partial s';$$

weshalve de grootte der drukking, uitgeoefend tegen het vaste punt in eenige willekeurige rigting, zal bepaald zijn door

$$\lambda'\mathrm{U}' = \frac{\partial s'}{\partial x'}\,.\,\mathrm{D} = \frac{\partial s'}{\partial y'}\,.\,\mathrm{E} = \frac{\partial s'}{\partial z'}\,.\,\mathrm{F}.$$

Hieruit is blijkbaar dat D, E, F, kunnen aangemerkt worden als zijnde de grootten van drukkingen, uitgeoefend tegen het vaste punt in de rigting der coördinaten-assen van de massa. Derhalve zal men voor de zamenstellende totale drukkingen hebben (zie (*ii*)):

$$D_x = \int X \partial m - \int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \partial m,$$

$$D_y = \int Y \partial m - \int \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \partial m,$$

$$D_z = \int Z \partial m - \int \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \partial m.$$

Deze uitdrukkingen zijn dezelfde als de uitdrukkingen of formulen (*c*), in art. 6 van § II gevonden, en uit welke, door het ontwikkelen der integralen, verkregen zijn de formulen (57), die de nader bepaalde waarden voor de zamenstellende drukkingen doen bekend worden.

LEIDEN, 1860.