Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 42

Normale Endomorphismen

Nach Satz 34.2 besitzt eine Isometrie über $\mathbb{C}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren und nach Satz 41.11 besitzt eine selbstadjungierte Abbildung (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) ebenfalls eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Wir suchen nach einer Verallgemeinerung dieser beiden Aussagen über $\mathbb{C}$. Das Ergebnis ist der *Spektralsatz für normale Endomorphismen*, siehe Satz 42.9. Da es sich dabei um eine äquivalente Formulierung für die Existenz einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren handelt, ist eine weitere Verallgemeinerung nicht möglich.

Definition 42.1. Lineare Abbildungen

$$\varphi, \psi \colon V \longrightarrow V$$

auf einem K-Vektorraum heißen *vertauschbar*, wenn

$$\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$$

gilt.

Definition 42.2. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Ein Endomorphismus

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

heißt *normal*, wenn φ und $\hat{\varphi}$ vertauschbar sind.

Es muss also

$$\varphi \circ \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \circ \varphi$$

gelten. Ein selbstadjungierter Endomorphismus ist trivialerweise normal. Bei einer Isometrie φ ist der adjungierte Endomorphismus nach Beispiel 41.2 gleich φ^{-1}, und somit ist eine Isometrie ebenfalls normal. Wenn der Endomorphismus φ bezüglich einer Orthonormalbasis durch die Matrix M gegeben ist, so lautet die Normalitätsbedingung

$$M\overline{M}^{\text{tr}} = \overline{M}^{\text{tr}} M.$$

Beispiel 42.3. In der zweidimensionalen Situation lautet die Normalitätsbedingung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

was für die Einträge übersetzt zu den beiden Bedingungen

$$b\overline{b} = c\overline{c}$$

und

$$a\overline{c} + b\overline{d} = \overline{a}b + \overline{c}d$$

führt. Neben Diagonalmatrizen und Drehmatrizen haben beispielsweise reelle Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

diese Eigenschaft.

Beispiel 42.4. Die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

besitze eine Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarproduktes) $u_1, \ldots, u_n$ aus Eigenvektoren, d.h. die beschreibende Matrix besitzt die Diagonalgestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann wird der adjungierte Endomorphismus nach Beispiel 41.4 durch die komplex-konjugierte Matrix

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \overline{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

beschrieben. Diese beiden Matrizen sind offenbar vertauschbar, d.h. es liegt ein normaler Endomorphismus vor.

Die dritte Eigenschaft des folgenden Lemmas erklärt die Bezeichung „normal“.

Lemma 42.5. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ und sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.

(1) *φ ist normal.*
(2) *Für alle $v,w \in V$ gilt*

$$\langle \hat{\varphi}(v), \hat{\varphi}(w) \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle .$$

(3) *Für alle $v \in V$ gilt*

$$|| \hat{\varphi}(v) || = || \varphi(v) || \,.$$

Beweis. Es ist

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle \;=\; \langle v, \hat{\varphi}(\varphi(w)) \rangle \;=\; \langle v, (\hat{\varphi} \circ \varphi)(w)) \rangle$$

und unter Verwendung von Lemma 41.7 (3) ist

$$\langle \hat{\varphi}(v), \hat{\varphi}(w) \rangle \;=\; \langle v, \varphi(\hat{\varphi}(w)) \rangle \;=\; \langle v, (\varphi \circ \hat{\varphi})(w)) \rangle \,.$$

Wenn φ und $\hat{\varphi}$ vertauschen, so gilt also auch

$$\langle \hat{\varphi}(v), \hat{\varphi}(w) \rangle \;=\; \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle$$

für beliebige $v, w \in V$. Wenn dies umgekehrt gilt, so ist

$$\langle v, (\hat{\varphi} \circ \varphi)(w)) \rangle \;=\; \langle v, (\varphi \circ \hat{\varphi})(w)) \rangle$$

für alle $v \in V$ und daher sind die Endomorphismen vertauschbar. Daher sind (1) und (2) äquivalent. Von (2) nach (3) ist eine Einschränkung. Umgekehrt kann man aus (3) auch (2) gewinnen, da man das Skalarprodukt gemäß der Polarisationsformel aus der Norm erhalten kann. □

Lemma 42.6. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann ist ein Untervektorraum $U \subseteq V$ genau dann φ-invariant, wenn das orthogonale Komplement $U^\perp$ invariant unter $\hat{\varphi}$ ist.

Beweis. Sei U invariant unter φ. Es sei $u \in U$ und $v \in U^\perp$. Dann ist

$$\langle u, \hat{\varphi}(v) \rangle \;=\; \langle \varphi(u), v \rangle \;=\; 0.$$

Die Umkehrung ergibt sich daraus, dass die Situation wegen Korollar 32.13 (3) und Lemma 41.7 (3) symmetrisch ist. □

Lemma 42.7. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus. Dann ist

$$\operatorname{kern} \varphi \;=\; \operatorname{kern} \hat{\varphi}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 42.6. □

Lemma 42.8. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) $\lambda \in \mathbb{K}$ *ist ein Eigenwert von φ genau dann, wenn $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von $\hat{\varphi}$ ist.*

(2) *Ein Vektor $v \in V$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ genau dann, wenn v ein Eigenvektor zu $\hat{\varphi}$ zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ ist.*

Beweis. Sei

$$\psi := \varphi - \lambda \operatorname{Id}_V,$$

dessen Kern der Eigenraum von φ zum Eigenwert λ ist. Der adjungierte Endomorphismus zu ψ ist unter Verwendung von Lemma 41.7

$$\hat{\psi} = \hat{\varphi} - (\lambda \operatorname{Id}_V)\hat{} = \hat{\varphi} - \overline{\lambda}\,(\operatorname{Id}_V)\hat{} = \hat{\varphi} - \overline{\lambda} \operatorname{Id}_V .$$

Nach Aufgabe 42.20 ist auch ψ normal und nach Lemma 42.7 ist somit

$$\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi) = \operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V) = \operatorname{kern}\left(\hat{\varphi} - \overline{\lambda} \operatorname{Id}_V\right) = \operatorname{Eig}_{\overline{\lambda}}(\hat{\varphi}) .$$

□

Satz 42.9. *Es sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann ist φ genau dann normal, wenn es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu φ gibt.

Beweis. Es sei zunächst $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthonormalbasis von V, wobei die u_i Eigenvektoren zu φ seien. Die beschreibende Matrix M ist dann eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge die Eigenwerte sind. Nach Lemma 41.6 wird der adjungierte Endomorphismus durch die konjugiert-transponierte Matrix beschrieben. Daher ist diese ebenfalls eine Diagonalmatrix und damit mit M vertauschbar. Also ist φ normal.

Die Umkehrung beweisen wir durch Induktion über die Dimension von V. Sei also φ normal. Der eindimensionale Fall ist klar. Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra gibt es einen Eigenvektor $v \in V$ von φ, den wir als normiert annehmen können. Nach Lemma 42.8 (2) ist v auch ein Eigenvektor zu $\hat{\varphi}$. Daraus folgt mit Lemma 42.6, dass $W = \mathbb{C}v^{\perp}$ invariant unter φ ist. Die Einschränkung von φ auf W ist wieder normal und die Induktionsvoraussetzung liefert die Behauptung. □

Die vorstehende Aussage ist im Reellen nicht richtig, wie jede Drehung (mit Ausnahme der Identität und der Halbdrehung) zeigt.

Hauptachsentransformation

Wir wenden nun die Ergebnisse der letzten Vorlesung auf hermitesche Formen an. Man spricht von *Hauptachsentransformation*, wobei sich dieser Begriff wohl erst in der nächsten Vorlesung klärt. Da wir im Komplexen arbeiten, erwähnen wir kurz, dass sich die Begriffe positiv definit, negativ definit und Typ, die wir für eine reell-symmetrische Bilinearform definiert haben, direkt auf komplex-hermitesche Sesquilinearformen übertragen. Auch der Sylvestersche Trägheitssatz gilt mit dem gleichen Beweis entsprechend, ebenso das Minorenkriterium.

Satz 42.10. *Es sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit einer hermiteschen Sesquilinearform $\langle -,-\rangle$ vom Typ (p,q). Dann ist die Gramsche Matrix von $\langle -,-\rangle$ bezüglich einer jeden Orthogonalbasis eine Diagonalmatrix mit p positiven reellen und q negativen reellen Einträgen.*

Daraus folgt auch unmittelbar, dass wenn man mit einer reell-symmetrischen Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^n$ startet und diese als hermitesche Sesquilinearform auf dem $\mathbb{C}^n$ auffasst, der reelle Typ mit dem komplexen Typ übereinstimmt. Der große Vorteil der komplexen Situation ist, dass der Fundamentalsatz der Algebra zur Verfügung steht, was die Existenz von Eigenwerten sichert. Selbst wenn man wie in Lemma 41.10 weiß, dass alle Eigenwerte reell sind, so wird deren Existenz erst über die komplexen Zahlen gesichert.

Satz 42.11. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei Ψ eine hermitesche Form auf V, die dem selbstadjungierten Endomorphismus*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

im Sinne von Lemma 41.12 entspricht. Es sei (p,q) der Typ von Ψ. Dann ist p die Anzahl der positiven Eigenwerte und q die Anzahl der negativen Eigenwerte von φ, wobei man diese Anzahl mit der (algebraischen oder geometrischen) Vielfachheit nehmen muss.

Beweis. Nach Lemma 41.10 zerfällt das charakteristische Polynom von φ in reelle Linearfaktoren. Es seien $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ die positiven Nullstellen und $\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_s$ die negativen Nullstellen. Nach Satz 41.11 liegt eine direkte, bezüglich des Skalarproduktes orthogonale Summenzerlegung

$$V = \operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Eig}_{\lambda_r}(\varphi)\oplus\operatorname{Eig}_{\lambda_{r+1}}(\varphi)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Eig}_{\lambda_s}(\varphi)\oplus\operatorname{Eig}_0(\varphi)$$

vor (wobei $\operatorname{Eig}_0(\varphi)$ der Nullraum sein kann). Für Vektoren v_i und v_j aus verschiedenen Eigenräumen ist

$$\Psi(v_i,v_j) = \langle\varphi(v_i),v_j\rangle = \langle\lambda_i v_i,v_j\rangle = \lambda_i\langle v_i,v_j\rangle = 0,$$

so dass die Eigenräume auch bezüglich der Form Ψ orthogonal sind. Für

$$v = v_1+\cdots+v_r \neq 0$$

mit $v_i\in\operatorname{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)$ ist

$$\begin{aligned}\Psi(v,v) &= \Psi(v_1,v_1)+\cdots+\Psi(v_r,v_r)\\ &= \Psi_\varphi(v_1,v_1)+\cdots+\Psi_\varphi(v_r,v_r)\\ &= \langle\varphi(v_1),v_1\rangle+\cdots+\langle\varphi(v_r),v_r\rangle\\ &= \langle\lambda_1 v_1,v_1\rangle+\cdots+\langle\lambda_r v_r,v_r\rangle\\ &= \lambda_1\langle v_1,v_1\rangle+\cdots+\lambda_r\langle v_r,v_r\rangle\\ &> 0.\end{aligned}$$

Auf diesem Unterraum ist also die eingeschränkte Form positiv definit, so dass

$$p \geq \sum_{i=1}^{r} \dim\left(\operatorname{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)\right)$$

ist. Wäre p echt größer als diese Dimension, so würde es einen p-dimensionalen Untervektorraum $W \subseteq V$ derart geben, dass die Einschränkung von Ψ darauf positiv definit ist und so, dass nach Korollar 9.8

$$W \cap \left(\operatorname{Eig}_{\lambda_{r+1}}(\varphi) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}_{\lambda_s}(\varphi) \oplus \operatorname{Eig}_0(\varphi)\right) \neq 0$$

ist. Dies ergibt direkt einen Widerspruch, da auf dem rechten Raum die Form Ψ negativ semidefinit ist. Also ist

$$p = \sum_{i=1}^{r} \dim\left(\operatorname{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)\right).$$

Die Argumentation für q verläuft gleich. □

Wir können nun den Beweis zum Eigenwertkriterium für den Typ einer reell-symmetrischen Bilinearform nachtragen. Dieser ergibt sich unmittelbar aus Satz 42.11.

Der folgende Satz heißt *Satz über die Hauptachsentransformation.*

Satz 42.12. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei Ψ eine hermitesche Form auf V. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V (bezüglich des Skalarproduktes), die eine Orthogonalbasis bezüglich Ψ ist.*

Beweis. Nach Lemma 41.12 (2) und Lemma 41.12 (4) ist

$$\Psi = \Psi_\varphi$$

für einen selbstadjungierten Endomorphismus

$$\varphi\colon V \longrightarrow V.$$

Nach Satz 41.11 gibt es eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ aus Eigenvektoren zu φ mit den Eigenwerten λ_i. Für diese Basis gilt

$$\Psi(v_i, v_j) = \Psi_\varphi(v_i, v_j) = \langle \varphi(v_i), v_j \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle .$$

Daher liegt auch eine Orthogonalbasis bezüglich Ψ vor. □

In diesem Zusammenhang heißen die Eigengeraden von φ auch *Hauptachsen* von Ψ_φ und die Eigenwerte auch *Hauptwerte.*