中學生雜誌叢刊

6

數學與天才

開明書店印行

1

目次

數學與天才……陳建功（一）
學習數學的話……劉薰宇（七）
從升學預試得來的……劉薰宇（四二）
高中畢業生應當具有的數學能力……劉薰宇（六二）
算學原始掇要……章克標（七三）
數論中的若干簡單事項……章克標（九九）
談完全數……陳建功（一一〇）
「思索」的展開……劉薰宇（一一七）
擠來擠去……樊 熾（一三〇）

再談「擠來擠去」……樊　熾（一四六）
儲蓄與賭博……劉薰宇（一五七）
數位變換的一個小問題……劉薰宇（一六三）
數學的魔術……許莼舫（一六七）
兩種問題……樊　熾（一七六）

數學與天才

陳

許多人說：「學數學是要一種特別天資的，假如沒有這種天賦的資質，要想學點數學，一定弄得勞而無功了；數學是專配『天才』學的東西。」「天才」是怎樣底一種人，我們雖然並不十分清楚，大約是指着那些一聽就懂，一看就會，靈敏異常底一類人說的吧！世界上究竟有沒有一聽就懂，一看就會底人呢？這個問題，我們暫且不去討論；可是有些學生子，相信了上面所說的話，課堂上一回子聽不懂教師所講的數學，或是一時看不懂數學書上的理論，他們就以爲「我不是天才，用功和不用功的結果是一樣的，我何苦埋頭案上，自尋煩惱呢！」但是作者常常想着，以爲凡是經過了入學考試的學生，只要忠忠實實底去用功——書上所講底事情，仔仔細細的去看，一遍看不懂，再看一遍，決沒有看了四五次不懂的道理；遇着問題，個個做過，今天做不到，明天再來，千萬不要一個問題到

手，只想了五六分鐘，做不出來，就去問別人。——不但可以把學校的數學課程全部了解，並且自家還能夠發生出許多疑問來呢！這類的疑問，就是創造底曙光。

我們把歷史上的人物，隨便舉幾個出來談談吧。亞貝爾(Niels Henrik Abel, 1802-1829.)是十九世紀初葉，生在挪威國的一個青年，他在數學上的發明很多，所以無論怎樣簡單的數學史上，總略不去講亞貝爾的一頁。他在二十八歲的時候就死的，去年適逢他的百年祭，挪威的人民，舉國若狂的來紀念他，於是乎許多人就說：「亞貝爾是天才，亞貝爾是天才！」像這樣無條件的贊美，我們是不可以同聲相應的。推原這種贊美的動機，大約是只注意到他的偉大，和他的早死，而不注意到他所以能夠成功他的偉大的緣故。亞貝爾在二十歲的時候，進了大學，便天天把歐拉、(Leonhard Euler, 1707-1783. 瑞士人。)拉格命日、(Joseph Louis Lagrange, 1736-1813. 法國人。)勒戎德耳(Adrien Marie Legendre, 1752-1835. 法國人。)那些數學大家的著作來念；反覆熟讀的結果，就熟能生巧，發明了許多的東西。因此我們可以想得到亞貝爾的許多發明，不是從天上墜

下來的，乃是他用了苦功，並且深思不倦的結果。

亞貝爾臨死那一年，法國有一個青年名叫加羅維 (Evariste Galois, 1811–1832.)——巴黎高等工業學校的入學考試兩次落第之後——進了巴黎師範學校（中等程度）其第二年(1830)，加羅維因為參加了革命運動的緣故入獄數月；又二年(1832)他為戀愛問題決鬭一場就死。這樣說來，加羅維是一個活潑非凡的青年，而且在世界上只有二十一年的短期，似乎在學問方面他是一定落伍了。可是作者在學校裏念書的時候，天天見到這個加羅維的肖像，和牛頓 (Isaac Newton, 1642—1727.) 那些大家的肖像，掛在一塊兒；這分明加羅維也是一位數學大家。老實說，像加羅維那樣的大發明數學界中能有多少呢！無怪乎大凡懂一點加羅維的學說的人，都說他是天才。

但是歷史書上說：拉格命日、勒戎德耳、約哥比 (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804—1851. 猶太人。) 這些數學大家的著作，加羅維是常讀的。要知道這些數學家的著作，是很難懂的，而且分量也是非常多的；假如沒有仔仔細細的去攻鑽，非但得不到一點新意

見來，甚至於原著的眞意也不能理清楚吧！

加羅維或許比普通的人讀得快一點，然而總要用一翻苦功，纔能達到精通的領域吧！所以我們敢說：加羅維的發明，不是從天上墜下來的，乃是熟讀名著和深思不倦的結果。

當加羅維五歲時候，德國產生了一位大數學家，名叫淮耶司脫拉司，(Karl Weierstrass, 1815－1897.) 他做大學生的時候，並非念數學的，乃是法律科的學生，數學不過自修自修罷了；出了大學，他去當中學校的習字和體操教師；一直到了四十八歲的時候，纔做到柏林大學的數學教授。爲什麼緣故，一個學法律的人，能夠變成一個數學大家的呢？對於這個問題，只要記起他的一件軼事來，就可以明白一二了。淮耶司脫拉司做中學教師的時候，有一天，他把朝上八點鐘的課，忘記去上了，於是乎那中學的校長，就走進淮耶司脫拉司的房間，去查明缺課的緣故，校長看見他正在研究數學，熱心的了不得；淮耶司脫拉司一見校長進來，他就說：「莫非天已明了麼？」其實他對於他的一件重要創作，

第一天晚上，已經有了頭緒，不知不覺就弄到天明了，淮耶司脫拉司這樣的熱心研究，拚命用功，纔成了數學家，難道我們一定要把「天才」的頭銜加給他麼？

是作者的一個先生說的：他有一次在歐洲和十幾個數學家聚談，其中有一個人說：「現今的數學家，恐怕要算西爾伯脫（David Hilbert, 1862——. 德國 Göttingen 大學教授）為第一名了！」大家都無異議。於是又有一個人問「第二名是誰呢？」其中有一法國人說：「魯貝克（Henri Lebesgue 1875——. 法國巴黎大學教授）如何？」其中別一人起來反對，所以魯貝克的第二名，不能全體同意。一個丹麥人說：「波爾（Harald Bohr, 1887——. 丹麥國 Kóbenhavn 大學教授）如何呢？」其結果也不能得全體通過。又有一個美國人說：「褒各甫（George David Birkhoff, 1884——. 美國哈佛大學教授）如何呢？」大家都說：「褒各甫的數學雖然不錯，可是第二把椅子恐怕還輪不到他吧！」終於這個談話會沒有把這個問題決定。聽了這段故事，我們就可以知道：「西爾伯脫是當今的一位數學大家了。」可是作者還有一個先生，他有一次去見西爾伯脫，西爾伯脫

對他說：「我下星期因爲要到某處去講演一小時的數學，我豫備得一個星期了。」我們試想想看，這樣子的一位數學大家，去講一小時的數學，竟費了一星期的豫備功夫；可見西爾伯脫也並不見得是一看就會一聽就懂的吧！

拉拉扯扯，說得不少；讀者諸君，對於「數學和『天才』是有密切的關係的麽？」的質問，或許能夠回答牠幾句了吧！

一二，一九二九，浙江大學。

學習數學的話

劉薰宇

從問題到問題

就一般的意義說，學習的目的是要得到一些知識；但若尋根究底地問，一個人爲什麼要求知識，那就有兩方面可說：一是實用的，爲了解決生活問題——廣義的——一是超實用的，爲了滿足好奇心。人類知識的起源，第二種動機實在比較更爲重要些，遇到一種自己所不曾知到過的事象，若是不能得到相當的理解，心裏總覺不安，於是便力求理解，這是學習的基本。因此我們可以說「學習是解決問題。」那末問題一經解決便心安理得了麼？這卻又不然，當前的問題得到了解決的時候，新的問題立刻接着便發生出來了。往往因爲要解一個平凡的問題，反而引出更多的不平凡的問題來。這樣逐漸展開，我

們的知識便逐漸豐富。眞眞實實的好學不倦的人物，一定是滿腦子的問題，終於「齎志以沒」的。莊子說：「吾生也有涯，而知也無涯，以有涯隨無涯，殆已！」這是多少有點消極意味的說法。其實就是明明白白知道了是以有涯隨無涯而終不免於殆，人總是放不下還得去追求的。所以就人的本性說，還不如抱荀子所謂「學不可以已」，孔子所謂「學如不及」的態度來得合式些。

本了這個態度，我來和讀者諸君說幾句關於自習的話。徹底地說，學習本是「爲自己」、「靠自己」的事，有銅錢的少爺小姐們，進中學大學，看來是有教師在教，自己只處在受動的地位；但眞要學到一點什麼，也非靠自己不可。在學習的進程上，教師至多不過是他們的包車夫或轎夫老二，若他們坐在車上或轎裏只管打瞌睡，終於是一無所得的。在這意味上，有自習機會的人，反而更有希望，更是幸運，我以十二分的誠意爲諸君祝福！

閒話少說，言歸正傳，我來談談數學的學習吧。無論那一本普通的數學書裏總包括兩部份：一是法則、公式、例題，這是叫你知的；一是習題，這是叫你做的。將叫你「知」的都

理解了，記牢了；又將叫你「做」的都「做」完了。這自然算得是讀完那册書了。但也不過只算得讀完了那册書，至於學習的能事，並不能就算已盡；且以做習題爲例吧。比如有這樣一個習題：

有二位數，原數加上牠的兩位數字交換所成的數得八十八，減去牠的兩位數字交換所成的數得一十八；求原數。

題目上只有兩個數，一個是八十八，牠是從兩數相加得來的，就是兩數的「和」；還有一個是一十八，牠是由兩數相減得來的，就是兩數的「差」。認清楚了這一點，立刻就可以聯想起「和差算」的公式：

(和＋差)÷2＝大數，(和－差)÷2＝小數。

再留心看一看題目，牠是說原數「減去」牠的兩位數字交換所成的數得一十八，可知原數是比較的大，因此我們用第一個公式：

$(88+18)\div 2=106\div 2=53$

五十三就是所求的數。

假如是對付考試，到這一步，就算完了。但考試多少有些「爲八」的意味，若純然「爲己，」是在學習的話，這問題雖已解答，還不能就此罷休，必得要找出新的問題來。

第一，這個答數對麼？

回答這個問題，就得覆證。求得的數是五十三，牠的兩位數字交換所成的數是三十五。五十三加上三十五得八十八。五十三減去三十五得一十八。這末一步步地推較起來，和題目上所說的都相合，可知所求得的數是對了。

第二，這題的解法合式麼？

假如只以得到合題的答數爲目的，那末上面的解法已無可非議了。但若就題目仔細推較，則這個解法，卻不很妥當。題目上開首就提出「有二位數」四個字，上面的解法卻和這個條件無關。自然，我們很可以說，這四個字原是多餘的，不過已經有了，也許不是全然無用，這個問題還有別的解法麼？

先由二位數着想，所謂二位數就是由兩個數字所成的數，這是第一點。凡二位數都等於十位數字的十倍加上個位數字一倍，如 $37=3\times10+7\times1$, $29=2\times10+9\times1$ 等，這是第二點。由此可知道二位數的兩位數字交換所成的數等於原數的個位數字的十倍加上原數的十位數字的一倍，如 $73=7\times10+3\times1$, $92=9\times10+2\times1$ 等，這是第三點。原數加上牠的兩位數字交換所成的數等於原數兩位數字的和的十一倍，如 $37+73=110=(3+7)\times11$, $29+92=121=(9+2)\times11$，這是第四點。原數和牠的兩位數字交換所成的數的差等於原數的兩位數字的差的九倍，如 $37\sim73=36=(3\sim7)\times9$, $29\sim92=63=(2\sim9)\times9$，這是第五點。

由這五點，我們對於上面的題目可得下面的解法：

$88\div11=8$ …… 原數的兩位數字的和，

$18\div9=2$ …… 原數的兩位數字的差，

$(8+2)\div2=5$ …… 原數的一個數字，

$(8-2)\div2=3$……原數的又一個數字。

因爲照題上所說的原數較牠的兩位數字交換所成的數大，所以我們知道十位數當是5，個位數當是3，而所求的數應當是53。——照理論上說是由 $5\times10+3\times1=53$ 來的。

爲什麼這個解法比前一個合式呢？第一就是對於題上所給的條件全都用到了；第二，因爲這個緣故，可以利用牠來作基礎去研究關於「二位數」的其他問題。

第三，怎樣將這個問題推演出去呢？

先將這個解法分析一下，我們得出下面的五項：

1. 知道兩位數字的和的倍數（十一倍），
2. 因而知道兩位數字的和（八），
3. 知道兩位數字的差的倍數（九倍），
4. 因而知道兩位數字的差（二），

5. 先求的是兩個數字。

歸結起來，就是知道兩個數字的和同差而求這個數字。由此，我們第一步便可將已知的條件和要求的掉換而得下列各形式的問題：

1. 有二位數，兩位數字的和爲九，十位數字爲四，求這數。
2. 有二位數，兩位數字的和爲七，個位數字爲二，求這數。
3. 有二位數，十位數字比個位數字大三而十位數字爲七，求這數。
4. 有二位數，十位數字比個位數字大一而個位數字爲四，求這數。

這四個形式，都是基本的，就這基本的形式我們更可使牠漸漸地變複雜起來，如：

1. 有二位數，原數和牠的兩位數字交換所成的數的和爲九十九（就是兩數字的和的「十一」倍爲九），十位數字爲四，求這數。
2. 有二位數，若從七十七裏將牠減去，則差數恰爲原數的兩位數字交換所成的數，（就是原數和牠的兩位數字交換所成的數的和爲七十七，也就是兩數字的和的「十

一」倍爲七，個位數字爲二，求這數。

3.有二位數，從原數減去兩位數字交換所成的數得二十七（就是十位數字比個位數字大三）而十位數字爲七，求這數。

4.有二位數，從原數減去九，則兩位數字掉換，（就是原數和牠的兩位數字交換所成的數的差爲九，也就是兩位數字的差的「九倍」爲九）而個位數字爲四，求這數。

這個推究，還是就兩數字的和、差以及兩位數字的關係出發的，若轉過出發點，那更可得出其他的問題，如嚴濟慈所編的現代初中算術中就有下面的兩個習題：

1.有二位數，十位數字是個位數字的三倍（就是十位數字比個位數字大二倍），若從這數減七，兩位數字就相同，（就是兩數字的差爲四）求這數。

2.有二位數，個位數字是十位數字的四倍（就是個位數字比十位數字大三倍），若這個數加五，兩位數字就相同，（就是兩數字的差爲六）求這數。

這兩個習題是由兩數字的差出發而得的，若由別的方向出發，也可以得到一些問

題；即如「有二位數，兩數字的和爲十，個位數爲十位數字的四倍」便是。

你若這樣的推究，可以有無數的問題得出來，所以做一個練習題，只要肯想，就有無數的題目可以得到。

第四，這類的問題有什麼限制麼？

研究一個問題應有的限制也是很重要而且有趣味的。就這個問題說，我們可以想到下面的各點：

1. 二位數一共只有九十個。
2. 每位數字只能從一到九，（末位若是零，則兩位數字交換後，便不成二位數，在這類題中是無用的）。
3. 兩位數字的和最大是十八，最小是二。
4. 兩位數和牠的兩位數字交換所成的數的和最大是一百九十八，最小是二十二。

5. 兩位數字的差最小是零，最大是八。

6. 兩位數和牠的兩位數字交換所成的數的差最小是零，最大是七十二。

這樣地探究也是不容易有限制的。

照這樣地對於一個問題加以探究，不但可以增多練習的機會，還可以使你對於問題的認識逐漸深切，而且因了這探究，你可發現許多表面不同的題目的關係。還有一個好處，就是增進你的思索的能力。

對於一個問題能夠下這樣的工夫，這才算在自習。這種自習不但能得到書裏所給的知識，——這是有限的——你自己就可有新的發現，最少你可以訓練自己研究的能力。上面不過大略說一說，單就這個例題講，探索下去，也還有許多的好東西等着你去和牠們相見呢！

從算術到代數

一種學科的性質，非到將這學科學習得差不多的時候，是不會明白的；而事實上，能夠先理會了某種學科的性質，再去學習卻便利得多；學習需要指導，就在這一點。說到指導，平常都使人起一種嚴肅之感，這我卻愧不敢當；不過我們走在路上，有時迷了路或是原來就不認識，只好去找人問，問的人最好是黃包車夫，我就給諸位讀者當個指路的黃包車夫吧！

算術同着她的妹妹，代數，都是數學的一支派，因此，她倆的骨架神情，是相同的；然而一娘生九子，九子九個樣，大同之中畢竟有些小異，將她倆併在一淘來仔細端詳，異中求同，對於她倆的母親的丰格更容易理會了。「數學是使用符號來研究『關係』的科學」——參看拙著數學趣味中的數學是什麼——這個特性從算術跨到代數更加明顯，就是說在這一點上妹妹比較姊姊稟賦母親的氣分更加多。

所以學習代數，第一義是慣習符號的使用。

算術上說 3斤+5斤=8斤，3人+5人=8人，3日+5日=8日……代數上只要一個

$3a+5a=8a$就夠了。a是一個「應身佛」投生，是一個「善變的英雄」算狗肉賬牠便是斤，算工程賬牠就可以是人、是日……初和代數會面的人，見到 $a, b, c, d, \ldots\ldots x, y, z,$ 總要問牠們究竟是什麽？因爲在習慣上，對於 $3a$ 加 $5a$ 得 $8a$ 總找不到一個更具體一點的概念，其實這只是太執着了。小孩子學算術，你問他「三斤白糖加五斤白糖是幾斤白糖」他左手伸出五個指頭，右手伸出三個指頭，然後順着一數「一、二、三、四、五、六、七、八」便回答你「八斤白糖。」若是問他「三隻麻雀加五隻麻雀是幾隻麻雀，」他又是左手伸出五個指頭，右手伸出三個指頭，然後順着一數「一、二、三、四、五、六、七、八，」便回答你「八隻麻雀。」你無論問他「三××加五××是幾××，」他老是這一套把戲，後來回答你「八××，」他的指頭可以當白糖，可以當麻雀，還可以當××，臨機應變什麽都好當。朋友，你已不是小孩子了，若仍是用指頭變把戲，豈不怕人笑話？這一來想出一個取巧的法兒，遇着人家問你時，指頭屈着，在紙上畫個 a 字代替牠，這就成了代數，既冠冕堂皇，別人反而對你起敬，「老兄，眞學問淵博，不但懂得算術，又懂得代數。」然而朋友，倘使你受着

這樣的恭維居然得意起來，那卻糟天下之大糕了，不但你騙了別人，還騙了自己，你要知道伸指頭和寫 a 字在肯子裏沒有兩樣，分不出那一個是寒傖那一個是高雅。

話雖這樣說，因為上帝造的人只給下手指頭十個而人造的字母有 $a, b, c, d, \ldots\ldots$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots$ 還可以變花樣製出 $a', b', c', d', \ldots\ldots a'', b'', c'', d'', \ldots\ldots$ $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots\ldots$ $a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots\ldots$ 數目卻是無窮，所以使用起來毫無拘束。並且指頭雖隨帶在身上，但仍得勞煩腦力，a, b, c, d 寫在紙上便可省卻多少心思，有這二種好處，自從取了巧用字母代指頭以後，便宜實在不少。

在上節，我這樣說過：

「凡二位數都等於十位數字的十倍加上個位數字的一倍(1)……二位數的兩位數字交換所成的數等於原數的個位數字的十倍加上原數的十位數字的一倍(2)……原數加上牠的兩位數字交換所成的數等於原數兩位數字的和的十一倍(3)……原數和牠的兩位數字交換所成的數的差等於原數兩位數字的差的九倍

（4）……」

這四點，用話說起來，這夠多末囉嗦，若用符號表示，比如用 x 代十位數字，y 代個位數字，那末便是：

(1) 二位數 $=10x+y$，

(2) 兩數字交換所成的數 $=10y+x$，

(3) $(10x+y)+(10y+x)=11(x+y)$，

(4) $(10x+y)\sim(10y+x)=9(x\sim y)$。

在慣習了使用符號的人，這正如習音樂的看譜表，既簡單又明瞭，思索起來自然便當。這點便當關係非常重大，從數學史上看來，我覺得中國數學的進步不及歐洲各國，一部分的原因就在這一點。——參看拙著從數學說到我們的思想（見學習與鍛鍊）——上面的（3）和（4）不但表出一種關係，而且這關係的證明——在上節中只舉例並沒有證明——也輕輕巧巧地就得出來了；因爲，

$$(10x+y)+(10y+x)=10x+x+y+10y=11x+11y=11(x+y)$$

$$(10x+y)\sim(10y+x)=(10x-x)\sim(10y-y)=9x\sim9y=9(x\sim y)$$

由此可以知道代數比她的姊姊乖巧的所在。

在上節中我們還說過一些關於推演問題和探究問題的限制的話，這兩步工作若在代數中那就更加容易了。試另舉一個較明白的例來說，比如算術上計算複利息我們共有下面的七個公式：

(1) 本利和＝本銀×(1＋利率)$^{\text{期數}}$

(2) 複利息＝本銀×$\{(1+\text{利率})^{\text{期數}}-1\}$

(3) 本銀＝複利息÷$\{(1+\text{利率})^{\text{期數}}-1\}$

(4) 利率＝$\sqrt[\text{期數}]{\text{本利和}/\text{本銀}}-1$

(5) 利率＝$\sqrt[\text{期數}]{\text{複利息}/\text{本銀}+1}-1$

(6) 期數＝(log 本利和－log 本銀)/log (1＋利率)

(7) 期數$=\{\log(\text{複利息}+\text{本銀})-\log\text{本銀}\}/\log(1+\text{利率})$

這幾個公式所表示的算法，在一般的算術書上(6)和(7)是講不到的，(4)和(5)也只有在特殊的情形時可以計算，而在代數上，卻沒有這些限制，形式上雖有七個式子，依代數的方法演變，其實只要(1)這一個就夠了，所以若用S代本利和，p代本銀，r代利率，n代期數，我們所要記住的只有這末一個公式：

$$S=p(1+r)^n.$$

由這公式我們便可推知關於複利息計算的一切，這多少便利！

再就解應用問題說，既有一定的程序，除選擇一兩個未知數外，全是機械的，這又是何等的省力！

便利省力就是代數的恩惠，但她的好處還不只此，她比她的姊姊更大方，肯將更普遍的法則告訴你。她的姊姊只告訴你從大數中減去小數的方法，她卻告訴你無論怎樣兩個數的減法，像這些好處是說之不盡的。

儘管說些代數比她的姊姊的好處——便利——這似乎無關於學習。不過從此可以明白代數和算術的不同，因而可以知道學習牠的方法。一言以蔽之，便是把符號只當符號看。所謂當符號看有兩個要點：

第一，假如沒有特別的約定，$a, b. c, d,$ ……所代的是無論什麼數。

第二，但在同一個關係中，$a, b, c, d,$ ……所代的卻是各各只有一個數。

關於第一點，如 $a^n\times a^m=a^{n+m}$ 這一個式子，a 所代的數沒有什麼限制而 n 和 m 最初卻只限於正的整數，後來再擴充到負數、分數，像這些情形，一點兒也不容許放鬆的。又如因數分解的公式，$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$。x 和 y 是無論什麼數都可以的，所以只要見到一個式子牠所包含的是兩個數的平方的差，立刻就可分牠成兩個因數，一個是兩數的差，一個是兩數的和。

至於第二點，在一個式子中，a 所代的應當是同一的東西，不然忽天忽地，那就不成體統了；比如 $3a+5a=8a$ 若第一個 a 代的是一隻狗，第二個 a 代的又是一個人，第三

個a代的又是一匹牛，那麼就成了三隻狗碰上了五個人變成八匹牛，豈非笑話。

所以符號的使用要弄明白使用的條件，這一點含混不得。

將符號當作符號看，又明白了牠的使用的條件，再記清楚一切計算的程序和限制，那末代數就是比算術更容易學習的了。

所謂計算的程序，就如解一元一次的方程式，是(1)去分數，(2)去括弧，(3)移項，(4)集合同類項，(5)用未知數的係數除兩邊，這是一步亂不得的。所謂限制就如去分數不能用等於零的式子乘，去括弧要注意牠們前面的符號等等也是絲毫不容混亂的。

把這些都留意到，學習代數眞是易如反掌了，其實學習代數所學習的也就是這些。

既然如此，前面的話不都是成爲廢話了麼？

不，有些人學習代數，並不去注意這些，卻在這些以外去別求奧妙，這就是越學越沒頭路的緣故！

關於幾何

幾何，這一個詞是譯Geo-的音的，在英文，幾何叫做Geometry，這個字由Geo同着metry拼成，牠們都是從拉丁文來的。在拉丁文Geo是「地」的意思；metry是「量」的意思；拼攏來便是量地。原來這一科在西方起於埃及，埃及人依賴尼羅河爲生。尼羅河一年一度地泛濫，從好的方面說，牠能使兩岸的土地肥沃，宜於耕種；從壞的方面說，兩岸地土上的建設和分割，一年總不免有一次破壞，破壞以後自然要重行建設和分割；這一來地面的測量法，便非常需要，幾何就是應了這需要而產生的。

因事實的某種需要而產生某種科學，這在科學史上是很常見的，不過產生雖是由於事實的需要，發展卻不一定如此；往往有些科學，愈發展和實用相去愈遠；幾何就是這樣。就一般的意義說，到了現在幾何已是超實用的了。因此，倘有人要問，學了幾何有什麼用，這實在很難回答。

許多人學習一種科目，在沒有找到他的實際用場的時候，總免不了興致索然。有機會進學校，親耳聽着別人講解的，已是這樣；獨個兒埋頭自修的，那更不用說了。爲了這樣，所以就大多數人說，學代數的趣味不及學算術的來得濃厚，而學幾何的趣味又不及學代數的來得濃厚。因爲算術裏所講的東西，大半是可以在日常生活中應用的，（這自然只是就初等的一部分說，）卽或不然，也和我們的經驗相接近。代數比算術就比較偏於符號的應用和式子的變化，在日常生活中既不容易找到應用的機會，和我們的經驗相去也較遠了。至於幾何，所論的雖是我們目所能見的「形，」但因爲只是抽象地研究「形」的諸性質的緣故，這在日常生活中也很不易找到應用的機會；所以，和代數一樣地比較難於使學習的人發生趣味。而幾何中所用的講述的方式和算術或代數中所用的也不同，這也是學了算術和代數初學幾何的人不易感到趣味的緣故。在算術和代數中，每每講了一種法則和公式就有例題，例題例題以後又有一些可以按照了例題「依樣葫蘆」地演習的問題。學習的人，在能夠依了法則、公式或例題處理問題的時候，就覺自己已經懂

得，已經能夠用，而感到一種愉快。其實這些例題和習題，只是法則和公式的應用，不過借牠們來供練習，並幫助法則和公式的理解和記憶。眞正地究習算術和代數，是要發見新的法則或公式，最少是要追尋那些別人已發見的法則和公式的演變。

在幾何中大部分是定義和定理。定義不必說只是要人硬記的，什麼叫直線，什麼叫垂直，什麼叫相似，這裏而並沒有理由可說，正如張三李四的叫張三李四一般。定理雖則是在以理推理。但是別人已做好了的，稍粗心學習的人，往往感到幾何上的定理的講法，有點滑稽或多事。隨便舉個例說；卽如下面的定理：

——二等邊三角形頂角的二等分線，垂直於底邊且二等分之。

其次，便將這定理，分作兩截，較明白地寫出來：

——設△ABC爲二等邊三角形(AB=AC)，線分AD爲頂角A的二等分線。——說明「二等邊三角形頂角的二等分線」這一截。

——求證 AD⊥BC 及 BD=CD——說明「垂直於底邊且二等分之」這一截。

最後就是證明了，所謂證明，便是將定理中前後兩截可以聯綴的理由敍述出來。

這種程序，在初學的人，往往莫明其妙。定理的假設和終結既非偶然拼合的，那末牠們拼合的理由，便應當在從假設發現終結的中間已經有了的，爲什麼在幾何中不由假設出發，按步就班地推出終結來，而要先提出假設和終結，然後將證明倒插進去呢？這不是滑稽多事麼？這不是故弄玄虛麼？

其實不是這樣的，幾何的敍述定理的方式同着人的思想的程序很能相合的。思想的程序是先有許多假定再找理由來批判這些假定，而確定那些是不對的那一個是對的。就是有時假定只有一個，但要牠能確立也須有理由去幫襯。再就上面所舉的定理說，若是我們先畫一個二等邊三角形ＢＡＣ，再畫牠的頂角Ａ的平分線ＡＤ和底邊ＢＣ交於Ｄ。我們憑肉眼看去，便覺到ＡＤ是垂直於ＢＣ，並且ＢＤ等於ＣＤ的。但這是肉眼觀察的結果，這結果究竟對不對，非有可靠的理由來說明，那就無從判定了。我們眼睛是不大可靠的，心理學上講到錯覺，常常就畫出許多圖來，使我們看了，本來相等或平行的

線覺得並不相等或並不平行。由觀察或實驗所能得出的只是一種假設，這假設在理論上能否成立，就看我們有沒有充足的理由來連鎖假設中所述的關係。

所以幾何中定理的敍述法，一來是依照思想自然的程序，二來是使學習的人容易將定理記住。但第二點，有利也有弊，定理便於記，固然是利；而容易不注意到定理成立的理由——證明的一段——卻是一件很大的毛病。有許多學習幾何的人，要他們證明一個題目，倒有把握，但將定理當題目要他們證明，卻往往沒法應付；就是由於不注意定理成立的理由的緣故。原來這些人，還是在用學算術和代數的態度學幾何。（學算術和代數的人大多數都只能算題，而不能還出算術代數中的法則和公式的來源，這本來是錯誤的，不過在初學的人還不算很大的毛病。）

學習幾何的人，不但要記熟定理，對於定理的證明也要理解也要記熟。

因了幾何中不能跟了定理就有例題，跟了例題就有相彷彿的習題，所以學幾何的人就覺得幾何中所說的只是一盤散沙。其實幾何中所供給的原是一般的證題的方法

和證題所需的材料。眞正的幾何中的題目也就是定理。不把牠們列入定理只是因爲牠們比定理應用的範圍較小的緣故。因此，學習幾何的人，自己做過的問題，也有記熟的必要。

非有眞憑實據勿下斷語

法國的大哲學家和大數學家笛卡爾曾經說過這樣的話：

「天下的事理，非見到極明白，不要遽然就下斷語。」

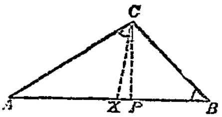
這一句名言，指示我們推斷事理應當十二分地小心，切不可憑了自己覺得怎樣就以爲一定是怎樣。這種沒有客觀的眞憑實據的判斷，只好算是武斷，卽或與眞理相合，也只是偶然碰上的，沒有什麼價值。

憑空地說，也許不容易明白，且就幾何來舉幾個比較有趣味的例吧。幾何的推證，應當是純客觀的，當我們證明一個題目的時候，每一句話都應當有眞實可靠的根據，切不

可把「想當然」的事實作根據，不然總會謬誤百出。下面的幾條證明，乍看去都言之成理，而實際是謬誤的，卻又無須證明都可以知道。那末，牠們的錯誤在那里呢？

(1)直線的一段等於牠的全長。

設AB爲一直線，以AB爲一邊作一三角形ABC。從C作CP垂直於AB。又從C作CX使C與A所成的角等於B角。則三角形ABC和三角形ACX中，A角是共通的，ACX角等於ABC角。依定理，兩個三角形若各有兩個角彼此相等，這兩個三角形就是相似的。所以：



$$\triangle ABC : \triangle ACX = \overline{BC}^2 : \overline{CX}^2。$$

而 $$\triangle ABC : \triangle ACX = AB : AX,$$

$$\overline{BC}^2 : \overline{CX}^2 = AB : AX,$$

或 $$\overline{BC}^2 : AB = \overline{CX}^2 : AX.$$

但 $$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \cdot AP,$$

$$\overline{CX}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AX}^2 - 2AX \cdot AP,$$

$$\because\quad \frac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2AB\cdot AP}{AB}=\frac{\overline{AC}^2+\overline{AX}^2-2AX\cdot AP}{AX}$$

即
$$\frac{\overline{AC}^2}{AB}+AB-2AP=\frac{\overline{AC}^2}{AX}+AX-2AP,$$

$$\therefore\quad \frac{\overline{AC}^2}{AB}-AX=\frac{\overline{AC}^2}{AX}-AB,$$

即
$$\frac{\overline{AC}^2-AB\cdot AX}{AB}=\frac{\overline{AC}^2-AB\cdot AX}{AX}$$

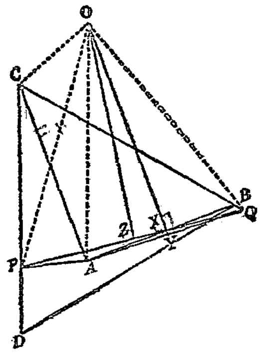
$$\therefore\quad \frac{1}{AB}=\frac{1}{AX}$$

而
$$AB=AX$$

這就是證明了直線ＡＢ的一段ＡＸ和牠的全長相等。然而數學的公理明明說過：全量總大於牠的一部份，而事實上ＡＢ比牠的一段ＡＸ長，也是三歲的小孩子都明白的。

（２）角的一部分等於牠的全體。

作一個直角三角形ＡＢＣ，並且照圖的樣兒，將這直角三角形的斜邊當一邊作一



個正三角形ＢＣＤ。

在ＣＤ上截ＣＰ等於ＣＡ。

過Ａ~~Ｑ~~Ｂ的中點Ｘ畫ＰＸ和ＣＢ的延長線交於Ｑ，並且把ＱＡ連起來。

畫ＱＡ的垂直平分線ＹＯ和ＱＰ的垂直平分線~~Ｙ~~ＺＯ。因為牠們各垂直於相交的兩直線中的一直線，所以一定相交，設牠們的交點是Ｏ。

連ＯＱ，ＯＡ，ＯＰ和ＯＣ。

因為Ｏ是ＱＡ的垂直平分線ＯＹ線上的一點，所以ＯＱ等於ＯＡ。

因為Ｏ是ＱＰ的垂直平分線ＺＯ上的一點，所以ＯＱ等於ＯＰ。

由此，我們知道ＯＡ等於ＯＰ。

但是ＣＡ和ＣＰ本來我們畫牠們是相等的，ＣＯ當然等於ＣＯ自己。

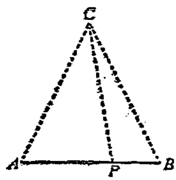
可見得三角形AOC和三角形POC就有三邊相應地是相等的，所以牠們是全等形。

所以ACO角等於PCO角。

這就證明了PCO角的一部分ACO角等於PCO角的全體。然而牠的不合理正同（1）一般。

（3）直線上任意一點都平分該直線。

在直線AB上任取一點P。又在AB上畫一個二等邊三角形ABC，AC等於BC，並且連結CP。



則在三角形APC和三角形PBC中，A角等於B角，AC等BC，PC和PC自己相等；所以牠們有三個互相獨立的（就是不是三個內角）相應地相等；因此牠們是全等的。

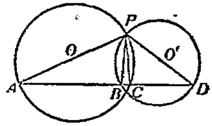
而AP便和BP相等。

這就證明了，P點平分AB直線，當然也是不合理不合事實的。

(4)從直線外的一點可作兩直線垂直於該直線。

設O和O′為相交兩圓的圓心。

設一個交點是P，畫直徑PA和PD。畫AD截兩圓周於B和C，並且連PB，PC。



因PCA角和DBP角都是內接於半圓周的弓形角，所以都是直角；就是PB和PC都垂直於AD。

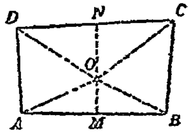
這就證明了，從AD直線外的一點P可畫兩直線PB和PC垂直於AD；然而牠和我們所證明過的定理是矛盾的。

(5)若四邊形有相對的兩邊相等，這四邊形就是等腰梯形，——不相等的那兩邊是平行的。

設ABCD四邊形中BC等於AD；求證AB平行於DC。

畫AB的垂直平分線OM和BC的垂直分平線ON，則OM和ON的關係，因了AB和DC的關係不同而有兩種情形。

假如AB平行於DC，自然OM和ON也就平行或合成一條直線；但這種情形，已是我們的題目上所要證明的，用不到去管牠。



假如AB和DC不平行，我們來證明這是不對的。AB和DC既不平行，則OM和ON各垂直於相交的兩直線中的一線，所以牠們應當相交，設交點是O。這又有兩種情形：一是O在四邊形裏面，二是O在四邊形以外；現在先就第一種情形證明。

連OA，OB，OC，OD。

因OM是AB的垂直平分線，所以OA等於OB。

因ON是CD的垂直平分線，所以OD等於OC。

因題目還給AD等於BC，所以三角形AOD和三角形BOC有三邊相應地相等；牠們應當全等。

所以，AOD角等於BOC角。

又直角三角形OCN和直角三角形ODN是全等的，所以角NOD等於角CON。

同樣地，直角三角形AMO和直角三角形BMO是全等的，所以角AOM等於角MOB。

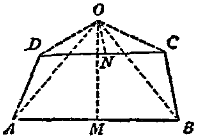
$$\therefore \angle NOD+\angle DOA+\angle AOM$$

$$=\angle CON+BOC+\angle MOB,$$

或 $$\angle NOM=\angle MON=180^\circ$$

所以MON成一直線而是AB和CD的公垂線，所以AB和CD平行。

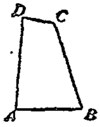
再來看第二種情形，O點在四邊形的外面。



這個證明前面的都和第一種的證明相同。最後可以得到：

$$\angle DON-\angle DOA-\angle AOM$$
$$=\angle NOC-\angle BOC-\angle MOB,$$

但這只有在角DON等於角DOM的時候可以成立。就是ON和OM非成一條直線不可。ON和OM既成一條直線，便是AB和CD的公垂線，所以AB和BC平行。



然而這個題的不正確，看上面的第三個圖就可以知道的，在圖中BC等於DA，而AB並不平行於DC。

* * *

以上五個題，不用說都是和事實不符的，但牠的證明中所含的錯誤點，實在很小，眞是失之毫釐，謬以千里；這可以見得證明題目應當要十二分地小心了。

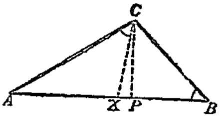
這五條證的錯誤在什麼地方呢？現在說明如下：

(1)直線的一段等於牠的全長。

這個證明是以下面的兩個等式開始的：

△ABC：△ACX＝$\overline{BC}^2$：$\overline{CX}^2$……(1)

△ABC：△ACX＝AB：AX……(2)

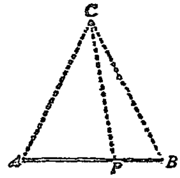


而這兩個式子中，(1)是成立的，因為兩相似三角形面積的比等於牠們的對應邊的平方比，這個定理我們已經證過，至於(2)卻不能成立，第一，兩相似三角形面積的比不等於牠們的對應邊的比；第二，在△ABC和△ACX中AB的對應邊是AC不是AX，AX是對應於△ABC中的AC的。(2)式既不能成立，以下的證明自然根本動搖了。

(2)角的一部分等於牠的全體。

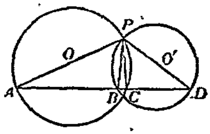
這個證明，在作圖以後的各段都沒有錯，但我們應當問一問，那樣的作圖法是可能的麼？實際我們若果依了那證明中的作法一步一步很仔細地作起來，我們得不出那證明中所用的圖來，因此就推證不出三角形ACO和三角形PCO全等。

（3）直線上任意一點都平分該直線。



這個證明是由三角形APC和三角形PBC全等而得出牠們的對應邊AP和BP相等來，斷定三角形APC和三角形PBC全等的根據，是牠們中間有二邊和「一角」相應地相等，實際兩三角形有兩邊相應地相等，必須這兩邊的「夾角」也相等，牠們纔是全等的，在這個證明中相等的角卻不是相應地相等的兩邊的夾角，所以不能就斷定二角形APC和三角形PBC全等。

（4）從直線外一點可作兩直線垂直於該直線。



這個證明的錯誤也在作圖上。證明上說：「……畫直徑PA和PD。畫AD截兩周於B和C，……」其實AD和兩圓周的交點就是這兩個圓的另一個交點，換句話說，便是B和C是合成一點的，所以PB和PC也合成了一條線，從直線外的一點仍然只能畫一條直線垂直於該直線。

(5)若四邊形有相對的兩邊相等，這四邊形就是等腰梯形。

這個證明的錯誤也在作圖上，讀者可以自已試試看。

總括上面的說明看來，可知錯誤的原因有兩種，一是引用的定理並不是定理，二是作圖不正確。這都是失之毫釐謬以千里的。

初學證幾何題是比較困難的，尤其是自學的人，但困難不算什麼，慢慢地總有豁然貫通的一日，所可怕的還是把習慣弄壞了，習慣壞了改正是極不容易的，因此在初學證題的人有幾點應當特別注意。

(1)看題務須將假設的條件和求證的事項分得十分明白。

(2)作圖要正確。

(3)應用的定理務須是書上已經有過的，而且一點不可含混，——因此記憶定理時，一點也不可馬虎。

從升學預試得來的

劉薰宇

一

有些應試的人常常會將出題、監場和閱卷的看成閻羅王一般的可怕。他們想着：出題的一定只是在極難的許多問題當中挑那最難的，其目的在難着應試者交白卷；監場的，那不用說，一副冷面孔就叫人害怕；至於閱卷的，當然，在他，分數比黃金還貴，要多給幾個「雞蛋」「燒餅」「湯圓」才顯得出他們的威嚴。

然而，這不是事實，最少我可以這般地自白。不管別人相信與否「憑了上帝的名字」，我是比應試的人還怕考試的。

除了學校中平時所舉行的考試而外，其餘的都多少含有點競爭性；明白點說，就是

對於應試的有一種淘汰作用。這，在我出題的當兒總感到非常的困難。出淺了，個個都可得一百分，在應試者固然幸運極了。但好比用篩石子的篩子篩米，怎能淘汰？如果出得太深了，還不說個個人都不及格，正如反過來用米篩子篩石子，就是在監試的時候，看着這個那個都垂頭喪氣，焦頭爛額，也是一件苦痛。最近有一次在某校的入學試驗場中，就大大的嘗到這種況味。因了接到學校的通知說是考初中畢業程度，便斟酌這種情形出了幾道題。而事情卻是這樣的不妙，到了臨場監視，看着二三十個姑娘只是將題紙翻來覆去地看，用鉛筆沒頭沒腦地寫，一點鐘快要過去，巡視一周，完全做對兩題的還一個沒有。天呵！有誰能體會得到我那時的心情麼？我腦裏不住地想，這怎好呢，這樣熱的天氣，讓這些姑娘們白喫一場苦還沒有結果？並且學校總不能讓她們「全軍覆沒」的，那末，又將用什麼標準來選擇呢？幾度腸迴，便決然地臨時改出幾道十分容易的題目。結果雖然並不就令人滿意，總算有大半數的姑娘不至於交白卷了。

至於監場，若只是站在考場的角落裏，看看有沒有夾帶幫搶，那還沒有什麼。倘使還

要不斷地巡視，看見了啃鉛筆的，明明弄錯的，簡直弄不出而發急的，這在我都好像是在受一種刑罰，恨不能拿過他的筆來替他寫下去。眞的，在若干年前，有一次我曾經對於一個最後留在場裏的人將題目所需要的回答全數告給過他，結果他終於被取錄了。原來他是連考了四次的。這在我的職務上，自然是說不過去，但我想着卽使到我受最後審判的一天，上帝將牠算成罪惡來加以責罰，我也甘受。

閱卷在精神上不會像監場那般地緊張，不過也夠苦了，就只講這次吧。那天眞是不幸，住屋的牆外汎着四五寸深的水，天還是陰森森的，雨還是剎剎剎的，而且空氣中一種熱鬱的氣分弄得人好似坐在不通風的熱水管正開着的浴室中一般。然而要看試卷，要憑我寫下的幾個數字決定一些人的不可知的命運。「筆下超生」，別人這樣說，我沒一分鐘忘掉過，我不找試卷中的錯處；只注意找好處。明知十六分和十五分沒有什麼兩樣，但只要勉強找得出可以多給一分的理由，我就多給一分，我沒這種天秤，所以我盡量地從寬。

實在這一大段的自白和本題並沒有多大的關係。我不能不說出的理由，是讓讀者知道我所以要寫這篇東西的原因，是想讀者多少得到一點鼓勵。我是對於這次的失敗者懷着很深的同情來寫的。

二

這次上海市教育局舉行的未立案和已停辦私立中學畢業生的升學預試，爲的是給這班八一個合法的投考大學的資格。應試的共有二百五十多人，其中有一部分已經當過了一年的大學旁聽生，倘若這次考試通得過，下學年就成爲大學二年的正式生了；通不過呢，那麼連高中畢業的資格都沒有。所以這次考試比他們學校中平時所舉行的關係大得多。我被派了出數學科的試題和評數學科的試卷。

所出的題目是下面的十個，師範科的作前八個，其他的作後八個：

算術一　求 $2-\cfrac{3}{9-\cfrac{7}{1+\cfrac{1}{2-\cfrac{3}{8}}}}$ 的值。

二　有銀三十六元，分給甲、乙、丙三人；甲乙所得的和比乙丙所得的和比甲丙所得的和是二比三比四，問各得幾何？

代數一　簡單下面的分數：

$$\frac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+6}-\frac{3x^2-14x-5}{3x^3-2x^2-10x-3}$$

二　已知 $1-2i$ 爲下列方程式的一個根，試解這個方程式：

$$2x^4-x^3+5x^2+13x+5=0$$

幾何一　試證直角三角形的內切圓的直徑等於牠的兩直邊的和同着斜邊的差。

二　已知三角形的頂角、底邊及他二邊的比，求作這個三角形。

三角一　若 $A+B+C=\pi$，試證：

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

二　三角形的邊各爲 $2x+3$, x^2+3x+3, x^2+2x；證明牠的最大角爲一百二十度。

解析几何

解析幾何一　A(−4,0) 和 B(4,0) 爲二定點，若 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=64$，求P點的軌跡。

二　$P_1(x_1,y_1)$ 爲橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的一點，求在 P_1 點和這橢圓相切的直線的方程式。

平心而論，這十道題，無論前八個或後八個，八個在三小時的時間要作完而且作得好，固然不很容易，但若眞是正格的高中畢業生，要得到六十分的及格分數，這不應當說是難事。本來這次的考試只是評定各應試人是否眞有高中畢業的學力，並沒有名額的限制，所以，能夠及格都可以通過。實際只要作對八分之三就可得到六十分的。還不只這樣，在

我評閱試卷之前還大略將所有試卷翻閱一過，覺得能及格的不很多，便決定每題給十分，若看去對於數學是有相當學力的便將其餘二十分加上。這二十分的增加並不管各題做得是否全然不錯，只看作的理法如何。所以即使八題都不全對，只要作得有條理，也可酌量增加。我以為這樣一來，若能作對一半的便可及格了。

結果是怎樣的呢？呵，是怎樣地出人意外呀！

這次報名的有二百五十多人，我看到的試卷只有二百四十五本。在這二百四十五本中，最多的是九十分，只有一個人，六十分以上的一共不過二十五個；反過來看，得零分的卻有五十三人，就全體說，中數只有十九分九釐九，這就是說有一百二十二人在二十分以下。

這種結果，能說不是出人意外麼？

我還來說一說這次的總評定。各科平均在六十分以上的不到二十人。為了這樣，所以在考試委員會開會時，怎樣放寬通過的標準實在成為極大的問題，我先聲明一句，會

場是充滿了「從寬發落」的空氣的。最後得到了一百七十多人通過的結果，最低的標準是平均在三十分以上，而有三門得四十分以上的。這很是一個有趣味的問題，考試的科目共五門，只要有一門得七十分，兩門得四十分，其餘兩門交白卷也能通過。再說得寒傖一點，就是三門得四十分，其餘兩門各得十五分也就行了。所以通過的一百七十多人當中，很有不少的有一門或兩門得零分的。這總不好算得嚴了吧。從此，那通不過的七十多人的成績就不難想像了。

我們不要忘了這二百四十多人都是手裏拿着高中畢業文憑的；我們還不可不注意，其中有許多已在大學修習了一年。讀者從這兩點得到什麼感想呢？

我沒有機會將全部試卷看過，所以以下只說數學試卷中的花花絮絮。

怎樣的錯誤得令人難於索解，數學程度的如何欠缺，這我都不再說了，以下只從數學以外的附錄來說，全是從試卷中照抄下來的，不曾改動過一字。

(一)「三角未曾做過，未知可否在暑假補習。」

(二)「銀行專科未學過三角與解析幾何，請先生原諒我之不曉。」

(三)「學生在本校學英文幾何代數，對於中文命題皆未能全知，尙希諒察。」

(四)「至於其他題目，因前在校，所有代數幾何均採用英文本子，故對於此處名目不能領會，以致無從答覆為歉。」

(五)「我中學畢業後，便當小學校教員，卅多小時功課的小學教員，舊課多荒，尤其是數學科。這回我從遠道來，因所住的小學還未放假，又沒有充分的時間可以準備，所以如果試的壞點，還要先生放過。我是喫過黃連的人，往後當知補救，千祈不要給我絕路。」

(六)「我在滬江大一讀政治系，三角與幾何有二年不做了，放學後，我努力預備了一星期，今日的結果，我一半多沒有做出，先生原諒我吧，給我一個繼續升學的機會。」

(七)「先生：數學，我在中學時就無興趣，所以對這種科學沒有相當的心得。從去年考入大學以後（政治系），對於它更無暇去翻，也不願去翻。因為學政治可說用不着數學，正想專攻政治以期有益於社會，誰知道這畸形的教育，偏偏因為中學未立案，要經這

種數學的考試。反過來說，假如不及格，就有失學的危險！

「這次的白卷在我固然無這種能力應付，另一方面我也含着無數的悲哀。我們想想，日本最近教育制度的大改革，不論文憑，以學識爲進學校的標準，是多麼良善！因爲無錢的人既不能一步一步的由小學而中學，由中學而大學，努力自修若干時間，就有求學的機會。我們要回看中國的教育，就是進了大學也有失學的危險，是多麼慚愧呢！

「『普及教育』的口號，我開始有些疑惑了！

「先生，你覺得怎樣？　補白。」

（八）「我將自殺。」

從這八條「附錄」「補白」可以看出一些自知應付不過去的應試人的態度。

（一）和（二）所表示的只是一種事實，這責任原不該應試人自己負的，他們只是被犧牲者中的一個。可憐我們的中等教育界，這二十年來，永遠是在當試驗品，什麼制，什麼標準，什麼會議，天天有得聽到，因此也就弄得七零八落。這種現象可以說只有咱們中國

有的。「為什麼？」「天曉得！」我除了對於被犧牲者同情外，不願說什麼，——其實有什麼可說，本來不過這末一回事。

(三)和(四)是同一態度。這裏倒有點小小問題可以耐人尋味了。這，我沒有判斷的能力；究竟只讀過英文本子的對於上面的十個中文題目是否眞「不能領會，以致無從答覆。」雖是這樣，我總有些懷疑。難道「求……的值」一定要寫成 'Find the value of……'「簡單下面的分數」非寫成 'Simplify the following fraction' 就不能懂得麼？還有如三角的題目(一)只有「若」和「試證」不會寫為 'if' 和 'prove that'，其他和所謂英文本子上的有什麼兩樣？至於算術中的第二題，我想認得中國字的，略有點常識的都可知道，這和英文本子有什麼相干？

只就所已舉出的幾點，已夠證明即使在學校讀的是英文本子的人，眞把英文本子讀好，決不會不及格的。而實際看一看，我總覺得這十個題目，在中國受過十多年中國教育的中國人不應當不懂，絕不能將「讀英文本子」五個字來遮醜！我上面忘了提到一

句緊要的話，這兩本試卷的成績都是零分。這豈是「中文題」所可負全責的嗎？

(五)可以表出現時中等學校畢業生的情況，這裏面就有着所謂「出路」「職業」……這許許多多的問題。這是值得特別注意的。

(六)和(七)相對在一淘，非常有趣味。兩個都是大學一年級學生，兩個學的都是政治，至於成績，(六)是十分而(七)是零分。這不是因爲(六)的態度和緩的緣故，實在他並非白卷而且多少總做對一點，至於(七)那除了「補白」以外，就全是白的了。

就(七)的態度看，最少有三點是值得我們注意的：

第一，讀書的與趣問題；

第二，數學的效用問題；

第三，青年的態度問題。

對於各種科目有着一種偏向，這要算在中等學校最甚。「你爲什麼不學數學？」「我的性質不相近。」「你爲什麼不學英文？」「我對牠沒有與趣。」「你爲什麼不學音樂？」「牠沒

有什麼用處」表面看去，對於一種科目不去學習的理由好像有三種，所謂「性質不近」，「沒興趣」「無用處。」但追根到底，我認為這都是表面文章，若赤裸裸地說，只有一個「懶」字是眞的。

中等學校的課程不過能供給一點常識而已，這種基本的知識，一方面說來，是人人應有的，而從另一方面說，是人人能學的。所謂性質相近不相近，只是根基的厚薄和是否肯努力的問題。至於興趣，有時固然可以由別人提起來，但努力練習的結果，也會油然而生的。興趣本來就是由體會而得的。

說到用處，這眞難說。即如所謂「因為學政治可說用不着數學，正想專攻政治以期有益於社會，」這話何等冠冕堂皇！你難道能夠寫張「保單」給他，保證數學對於他的政治生涯有用麼？

我沒有讀過什麼關於政治的書，所以，數學對於牠有沒有用，不敢武斷。這位正專攻着牠的朋友既不曾見到數學和牠有什麼關連，這大約總可相信是眞的。不是麼？他抱着

「以期有益於社會」的宏願，斷然一點兒不肯馬虎的。

然而半部論語果眞還能治天下麼？所謂政治只是畫行、蓋印、開會、演說、賀喜、做壽、送喪麼？

我想，若果在中國，要擬出什麼不等於官樣文章的政策來，恐怕離不了數字的關係的。固然這和政治學的講義無關，講義上所給的不過幾個翻譯的名辭而已。

在這裏並不想專爲數學來辯解，鼓吹牠是百靈百驗的仙丹，所以我想不用再這樣地說下去。總結一句，一切科學雖都不能替讀者保證一定有用處，但也不能保證一定無用處。就在這意義上，所以卽使是純然功利的說法，中等學校也是應當各門都學一點的。就只在這一個意義上，數學的成績是零分的，總不好算是合格的高中畢業生。

這些都一概丟開，老實說，我這次想寫這篇東西的主要動機還是在(七)的後一大段和(八)。

某君說是在專攻政治，我很相信，最少他在形式上已很過得去了。不是麼？日本的教

育制度也曾留意到。

但從這段文字，很容易使我們認識某君太缺乏數學的訓練：文字形式上的欠妥貼還不用說，思想的矛盾也就毫不能掩飾。某君讚美日本最近教育制度的大改革，其主要點是「不論文憑，以學識爲進學校的標準。」在形式上說，中國現在的入學試驗，既要文憑還要試驗，這不得不說是也在採取學識作標準，其流弊只在委屈一些有學識無文憑的；然而某君不是這一類。一來某君是有文憑的，由他的得參與升學預試便可證明；二來某君的學識不夠標準，他的數學得零分這便是鐵證。所以，由某君的地位說，假如要行到日本的新制度，應當用自己證明文憑的無用。假如由此更進一步，認爲升學預試對於已立案的中學畢業生未免輕輕放過，這才算大公無私就事論事的推斷。可惜某君的不平只是在自己「進了大學也有失學的危險。」對於這一點，假如有人提出這般的反詰：「大學一年的學生不能通過高中畢業程度的試驗不是夠多末慚愧嗎？」我想某君將無辭以對的。

「普及教育」是一個問題，「充實教育」又是一個問題，以中國教育界的現狀而論，好像第二個問題比第一個還來得重要。誰不感到中國這幾年來大學的濫設只造成了多數的高等遊民，這些遊民頭上可以頂方帽子，但肩不能挑，手不能提，腦裏又非常貧弱，而地位慾、權勢慾卻非常發達，這樣的人物怎樣能夠有益於社會！

所以升學預試的取締私立學校，在原則上是無可非議的；就整個的教育行政說，缺點只在對於已立案的私立學校和國立、省立、市立的學校太寬容了。我們不難找出證據來證明，將這次升學預試的題目去考試已立案的私立學校和國、省、市立學校的高中畢業生，也不會就有差強人意的結果。這在「充實教育」這個問題上，不能不算是一個大大的遺憾。但這應當講求另外一個補救的方法，而不能成爲否認升學預試的理由。

退一步說，考試也許是不可靠的，然而這似乎要有通過考試的能力的人來主張才有力量。

這些話，不用再往下說了，我讀了某君的這段補白，所起的感想是中國的一般青年

正和中年人、老年人一樣，——這算中國的大不幸——凡事都只會找理由來替自己辯解。我以為這是我們中國的一個死症！你看，軍閥、政客、官僚，以至於流氓、地痞、劣紳，他們要發殺、搗亂、剝削、敲詐，都要找一個冠冕堂皇的藉口。明明是爭地盤，偏說在擁護什麼主義，為國為民；明明是燒殺擄掠，要說是替天行道；明明是苛捐暴征，要說是……人人都會做文章，也只會做文章，並且也只要會做文章。聖人不死，大盜不止，在這些意味上，實在是可以叫人寒心的！

我覺得，我們今後的唯一出路只是閉了嘴硬幹，幹得出的就是好的。比如逢到考試，一道題做不出，算數題也用不着抄，完完全全將白卷送上去，這就是英雄好漢。你若要問，難道對於考試這件事也不去思索，討論牠的是非麼？我的回答是這樣：「不，不問是要問的！」那末怎樣一個問法呢？我的回答仍然是一個「幹」字。你承認牠是對的，你回家去就努力，下次再來過，到了通過了為止。你以為牠是不對的，就置之不理。這將要喫虧了，不是麼？是的，我知道。在考試你的人有權威做後盾的，然而你對了權威有什麼道理可說，道理是

權威的產兒而不是牠的父親個人的權威，只有屈服和不理。倘然你懂得這點意義，你就會明白我所以主張閉了口硬幹的意味了。

這我要說到（八）「我將自殺」的話上去了！然而從何說起呢？

政府把一切的罪惡歸到教育不普及，所以雖然並不曾眞眞實實地在想做一些普及教育的事，但一個人不受教育好像就生活不下去的空氣卻弄得很濃厚了。這一來，不是全然無用的，最簡單的例證便是一個女兒要和闊人軋姘頭當第六、七、八個姨太太也非有張相當的畢業文憑不可。在中國喫飯的路，這算是天字第一號的捷徑，然而也非受教育不可，其他自然不言可知。於是乎牛馬一般地終天勞動的父母也只好將他們的兒女送到學校去，只要可以掙扎，總讓這些兒女由小學而中學而大學而「鍍銀鍍金」這是他們的希望。你不會忘記中學生雜誌上曾經介紹過因不能替兒子籌中學的學費而自殺的父親吧。

在這般空氣中，有什麼話可說，中學畢了業不能進大學或是已進了大學還有失學

的危險，前途前途，似乎再也不會光明了。誰是願意喫苦一世的？「自殺，自殺，」這不是大解脫麼？在現在我們中—國，不，我們的時代，除此而外，其實要叫你想到自殺的機會還不止此，你粗粗地留心每天每天的社會新聞看。

怎樣說呢？走頭無路的人是會讚美自殺的，雖然他們的絕命書上往往說是自己太弱，而活得過去的人卻又會找出些大道理來反對自殺，雖然他們並不能替要自殺的人想出能夠多過活一小時的方法。

我贊成一切想不過來的青年都自殺麼？不！不！不！那麼怎麼說？比如這位卷子上寫了「我將自殺」的某君是竭盡了能事才進大學的，是抱了一個大大的希望的——無論牠是怎樣的空幻——而且也很努力地預備應這次的考試，然而不幸，臨場失敗，大學將失學，他的希望終只好成泡影。他要自殺，你有什麼話去向他說？——我願意他這次通過了，不然，我也願意他說的只是憤激的話，不然，我還願意他會遇到別的救星。這是我的眞情，無關於自殺論的是非。

年來，青年們很有些，而且不幸還是比較要好的，容易在心上浮起一個自殺的念頭。我覺得各人所以這樣想的原因不同，所以沒有什麽普遍的話來勸慰他們。至於什麽哲學的、社會學的說法，那也未免道理太大了。就事實說，所謂自殺，不過自己當自己的劊子手。然而，在我們中國——，劊子手並不少，何必自己費神。所以你眞到走頭無路的時候，劊子手自然會光臨，決不會有人來憐憫你的。因此，我覺得，活不下去也無妨活下去，別人總會幫忙叫你死去。這一來，卻有一個便宜，至少到最後審判時，你還可以找到一個抵賴不去的被告。

朋友們！希望你們不要以爲我是開玩笑。

高中畢業生應當具有的數學能力

劉薰宇

本文單以高中爲對象，這有兩個小小的理由：一是因爲高中畢業後，有些人就將在大學裏和數學絕緣，然而畢竟只能在學校的科目上絕緣，並不能絕對地離開了牠「此後男婚女嫁各不相干；」一是以此例彼，初中的也可以得到雖不中還不遠的標準。

照例在學校裏擔任什麼課程的教師，便向學生說他所教的那種課程如何如何重要，口吻之間總讓你聽得出「萬般皆下品，」唯有那門高。自然這很欠公道，不過這好似帶誇張的教訓，並不一定出於教師的私心自用，而是他對於所教的那種課程造詣較深所知較多的緣故。我對於什麼趣味雖很淺但卻較廣泛，對於數學雖較偏好，但並不承認它「唯我獨尊」的資格。說句本心話，我寧願勸人無論對於什麼都下點工夫去弄一番，不願勸人特別在數學上費多大的力氣。在中等教育這階段中，與其某某二三科有九十

分以上的成績而別的只好勉強及格，無寧什麼科目都有六十五分的均一成績。中等教育所能給的本來只是各科的常識，一個人要在現代社會中生活或是想踏進學問的門牆裏去，這些常識都少不來的。我就本了這個標準來談談高中畢業生應當具有的數學能力。所謂「應當」是從兩方面說的：一，若沒有這一點起碼的能力，實在算不得貨眞價實的高中畢業生；二，要當規規矩矩的大學生，這點能力是少不來的。

去年教育部所頒佈的正式課程標準，高級中學算學科的目標有這六項：

(1)充分介紹形數之基本觀念，使學生認識二者之關係，明瞭代數、幾何各科呼應一貫之原理，而確立普通算學教育之基礎。

(2)切實灌輸說理推證之方式，使學生確認算學方法之性質。

(3)繼續訓練學生計算及作圖之技能，使益爲豐富敏捷。

(4)供給各學科研究上必需之算理知識，以充實學生考驗自然與社會現象之能力。

（5）算理之深入與其應用之廣闊，務使成平行之發展，俾學生愈能認識算理本身之價值，與其效力之宏大，而油然生不斷努力之趨向。

（6）仍據「訓練可爲相當轉移」之原則，注意培養學生之良好心習與態度，使之益爲鞏固。

這標準雖是就教師的教學立場說的，但由牠便可以明瞭高中數學教學對於學生的要求。正則地說來，必要合於這標準纔能算數學科有了高中畢業的程度。但在這裏還不想提出這般高的標準，因爲本文是爲了這期畢業的人們寫的，這個標準所提出來的，有許多都要靠平日細細地慢慢地培養方能達到，如「敏捷」「良好心習與態度」等，若是已經畢了業的人而並不會達到，這不是短期間可補救得來的，只好待諸異日了。還有學校的教育是班級制，一班最少也有二三十人各人的資稟素養全不相同，所以良好的學校教育只得照全班人的需要和能力所能擔負的最低公倍量供給，而要求於各個人的都是牠們的最高公約量。這里所要提出的應當具有的能力，也就是這最高公約量，而

且還是限於可以短期補救得來的。

高中所教學的數學分着代數、三角、幾何以及解析幾何四科。照新標準說，代數和幾何都是初中的延長和擴張，若照舊標準說，三角也是如此。今年的高中畢業生，過去所習的課程，大半還是照舊標準分配的，所以只有解析幾何是一種新科目。現在且不管科目的新舊，姑就這四種科目來總括地和分別地提出高中畢業應當具有的能力，以及缺乏這種能力的人的補救法。

各科目所共同的便是各種名稱的清晰的概念。什麼是方程式，什麼是恆等式，什麼是函數什麼是角，什麼是角的函數，什麼是軌跡，什麼是切線，什麼是直線方程式，什麼是圓錐曲線，……都須逐一弄個明白。關於這一點，讀者無妨老實一點，就算是傻一點也好，廢個半天的工夫，將各項名詞全集出來，能列成一個表更好。列舉完全以後，再自己逐一審查一番，看是否全都了然。若有一絲一毫覺得不甚有把握，便翻開已習過的書來查考一下，務必要弄到毫不含糊的地步。

其次便是要弄清楚而且記熟各法則的最基本的一個的來源和使用法。試分別舉例來說。

如代數解二元一次聯立方程式，通常都說到四種法則：(1)加減消去法，(2)相等消去法，(3)代入消去法，(4)公式代用法。能夠全都明白記清，自然是上乘，若是不能，那末，隨便弄明白一個，題目總可以計算得出，不過有時不免笨重一些，但也算過得去了。又如解一元二次方程式，有析因式法，配平方法，公式代用法，也是弄清一個就行的，不過這有一點卻要注意，解二元聯立一次方程式的四法中，任用一法都走得通，而解一元二次方程式卻不如此，析因式法就常常走不通，所以應當以公式代用法或配平方法爲基本。依此類推，對於其他的方法也一樣。凡是有幾種方法而可通用的，總是有些比較巧妙，有些比較繁重而平穩，對於這些法則，就應當先將那最一般最平穩的弄明白。比如求行列式的值，爲了計算便易，總是先將某某幾行相加、減或乘以什麼數再相加、減，弄到有一行含有若干個零再展開。但這種方法巧妙固然巧妙，卻因了這巧妙，若用不得法，反會弄巧

成拙。所以首先還是弄淸楚照子行列式逐步展開的方法，來得穩當。

次如三角，普通的平面三角所包含的不過四大部分，一是恆等式的證明，二是解方程式，三是解三角形，四是三角級數。在各部分中也和代數一般，總有些比較普遍的法則如證明恆等式和解方程式，將其中的各函數都變成正弦和餘弦的關係便是繁重而較平穩的。

至於幾何，在不熟習的人感到花樣繁多，毫無眉目可尋，而要急就地整理和溫習也比較困難。不過，也有一個最低的標準可得，那就是先不要管問題怎樣證，作圖怎樣作，只須將書中的定理例題全數弄淸楚，牠的假說、終結、證法、作法一點兒不放鬆，這就夠了。

解析幾何是連鎖幾何和代數的橋樑，也是解析數學的基石。牠的主要工作，是相反而適相成的兩個，一由方程式研究圖形的性質，二由圖形的性質而找表示這圖形的方程式。關於第一點，要總括起來而分別弄明白怎樣的方程式表示怎樣的圖形。如 $Ax+By+C=0$ 表示一條直線，牠和橫坐標軸所成的角的正切是 $-\frac{A}{B}$，和縱、橫兩坐標軸的

截距(intercept)是 $-\frac{C}{B}$, $-\frac{C}{A}$, 若A爲零，牠和橫坐標軸平行；B爲零，牠和縱坐標軸相平行；C爲零，牠通過原點；A和C都爲零，牠就是橫坐標軸；B和C都爲零，牠就是縱坐標軸。又如 $x^2+y^2=C$ 的圖形是圓，$Ax^2+By^2=C$（A、B、C都是正的）的圖形是橢圓，$Ax^2-By^2=C$ 的是雙曲線，$Ay^2=Bx$ 和 $Ax^2=By$ 的是拋物線，一般的二元二次方程式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 怎樣變成這幾個基本形式，這些基本形式的係數和圖形有什麼關係。其次由圖形尋找方程式，這不過是代數解方程式和代數的以及三角的恆等式的變化同着幾何的定理的應用。除此以外所應當知道的只是一些由代數式所推究出來的幾何性質的代數式的表法，若幾何的基礎靠得住，代數式的演變也清楚，便沒有什麼困難了。

因了篇幅的關係，上列各項都無法詳細說明，在我很覺抱歉。我望讀者能夠先下番列舉的工去，列舉以後，再將牠們組成系統，這樣自然能夠眉目清晰了。第二步就將所列舉的事項的來源去路還牠個明白，自然詳詳細細地做很是費時費事的，不過有了這一

步工夫，便可分別出牠們的幹、枝、花、葉；先從幹到枝再是花和葉，能夠弄清多少便算多少，這樣雖不必能夠盡其所有的都弄清楚，基本總不差，也就可以算過得去了。

末了，我得說明，這個起碼的標準和補救法，是爲了在過去的時期中對於數學未曾多下工夫而以後又未必再學牠的人說的。若是過去曾用過苦工，以後又還要和牠親近的人，那就應當多翻幾部書，多做些練習，已經做過的，也無妨再做，再試用別的方法去做，前面說過的方法用來自己測驗自己和整理已得的知識，也不是全無好處的。

爲什麼我對於在過去對於數學未曾多下工夫而以後又未必再學牠的人，有這末苛刻的要求呢？過去的未下工夫，這是一種應當急圖補救的過失，因爲以後雖未必學牠，卻不一定用不到牠，在這二十世紀所謂科學昌明的時代，和數學絕緣的學術實在很少。所以課程標準上說：「切實灌輸說理推證之方式；」「供給各學科研究上必需之算理知識，以充實考驗自然與社會現象之能力；」「培養良好心習與態度，使之益爲鞏固。」即使在學術的鑽研上，因了各人的趨向不同，直接和數學不發生關係；但在現在的生活上，也

很少能和牠絕緣。現代科學的產物，我們既生在現在，總應當盡量享受，點電燈，裝無線電收音機，乘汽車、飛機，處理疾病，乃至於防毒瓦斯，這些都須具有相當的科學知識。而這些必具的科學知識又都和數學有很密切的關係。再就社會現象說，生為社會的一員，對於這盪動自身的社會現象總不應當當作別人的事，毫不動心；然而要理解，就不容易，眞實的理解須把基礎築在現象的觀察和統計上。日本人為什麼拚命地要欺侮我們，這不只是幾個軍閥的野心的問題，更不是日本人喜歡欺侮弱者的問題。他們要這樣，而且敢於這樣，有着很大很深的經濟的和社會的背景。要澈底明瞭這背景，須得有較深的數學基礎。再說，比如上海灘上，近一二年來很有些貨色便宜得有點不像樣，一塊洋錢可以買兩丈布，大減價還要加贈品，同時電影場、跳舞場，十幾層的高大樓房卻一天多似一天。表面看去，這是何等的民安物阜的太平景象。然而絲綢廠、麵粉廠卻維持不下去，各色商店中人也都叫苦連天。年歲不好農人苦，年歲好農人更苦。這些社會現象，那一件不表現着矛盾。這矛盾是表面的看法，骨子裏卻存在着一個並不矛盾而很普遍的根苗。受過中等教

育的青年當然應認識這些根苗而負着打破這難關——其實是各人的生死關頭——的責任，然而這不單是靠文藝的地描寫或欣賞所能奏功的；必要的，還是科學的地去理解。所以上面所提出的最低度的數學能力標準，實在是生爲現代人所少不來的，以後未必再有機會學習數學的人，更應當在跨進大學校的門限以前弄清楚牠。原來，稍嚴格地說，只是這樣還不夠，若並此而無之，那還行呢？

也許讀者中會懷疑，現在成千成萬的人沒有這點數學能力的，也一樣地活得下去，以爲我的話未免太誇張了。但這和說成千成萬的人目不識丁也一樣地活下去，一個人何必要讀書識字一般。上面所提的標準，卽使做到了，也不過和學讀書識字的人有了寫信看報的能力一樣，我們要看的報並不只是綁案、自殺等等現象的記述，而是牠們後面的社會的、經濟的原因——牠們是可用數的關係答復出來的。

算學原始綴要

章克標

倘使有人要問，算學的起源在何處何時，這是很難回答的。大概有了人類的活動也就有算學，其起源很是古遠，可以不難想像。試看無論那一國的歷史，在古代一定有關於算學的史實。即如我們中國，在距今約六七千年的伏羲氏時，已能觀察天象，測量地形，畫八卦；其後到了黃帝時，更命羲和占日，常儀占月，臾區占星氣，伶倫造律呂，大橈作甲子，隸首作算數，這是表示我們人類在遠古早有了算學知識。在西方最古文明國的埃及和巴比倫，也是很古時代就有關於算學的記錄，自十九世紀初期解明了象形文字、楔形文字之後，成爲頂確固的事實了。

這樣說來，算數的歷史的確起源極古，差不多和人類的起源相同，其中有許多有趣味的史實，都是後來才發見的，現在想把那比較頂著名的一說。我們先要講到埃及的象

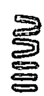
形文字，而解明此象形文字的惟一線索，卻是一塊叫做羅賽塔石(Rosetta Stone)的碑石。識得了埃及的象形文字，才能讀埃及遺留下來的古文獻，同時埃及的文化也可以知道了。

歐洲人的注目於埃及古代文化是比較古舊的事。在十七世紀末，已有許多埃及探檢隊，陸續從歐洲出發，去蒐集和發掘古代種種的遺物和破片，此種遺物上面都刻着些奇怪的花紋。推想來這些恐怕是含有什麼意思的一種推測，誰都可以有的，便有許多學者去從事研究探索，但經過了一世紀以上，也不曾有什麼結果。到了一七九八年，拿破崙的大軍事探檢隊從法國又開派出去了。這探檢隊中有許多科學家和藝術家參加，所以有了軍事以外的不少收穫，有題名 Description de l'Eiypte 的幾大册報告。這探檢隊中的一個技師，某日在尼羅河西岸人口約有一萬的小鎮叫羅賽塔地方掘得了一奇怪的石碑，仔細看去石質是玄武岩，一面上刻着些什麼。再仔細查閱，知道所刻的一部分是希臘文，所載的是僧侶的爲德萊美五世及其后姑斐巴祈冥福的禱文。別的一部分是埃

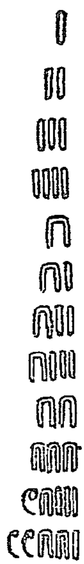
及的土語，所記載的意義和希臘文全然相同的。可是還刻着一種別的奇妙文字，那就是歐羅巴的學者費了一世紀以上的努力還不曾解明的埃及獨特的那種奇怪文字。大探檢隊中的許多學者自然也不曾有一人解釋了這祕密，但是在同一的刻石之中，希臘文和埃及土語二者是全然表着同一意義的文詞，那麼這第三種奇文也是表着那種意思吧的一種推測，誰都會想到的。頂早注目到這一點的是英國物理學者托馬斯楊（Thomas Young）。楊氏從這見地來把這石碑研究的結果，發見了此種奇妙的刻文是埃及的象形文字，而且同時成功了其一部分的翻譯。這是在一八一九年，是石碑出土的二十年之後了。其後由法國的埃及學者尙博利昂（Champollion）用這爲基礎而完成了此種研究，到了這時，才解明了一世紀以上的世界之謎，同時埃及的文化也得大白於世了。這塊羅賽塔石現在是收藏在倫敦的英國博物館中的。

由這羅賽塔石作爲唯一的線索，理解了象形文字之後，古代埃及的算學也漸漸明了。先從種種遺物及破片上的象形文字推察出來，埃及的數字是這樣的：

1
10
100
1,000
10,000
100,000
1,000,000
10,000,000

這裏表1的像豎立的桿棒，表 10,000 的像指點着的手指，表 100,000 的像名叫 Burbot 一種鳥，表 1,000,000 的像受驚的人，其他各個記號，意義不明。用此等記號表數，全用加法，卽對於所要之數，用記號並着記下來，例如23便記作  卽可。故用此等埃及數字把從1起的自然數記下來，卽如次樣：

1
2
3
4
10
11
12
13
20
30
113
221



埃及人還知道像目今的分數那樣的東西，不過埃及的分數全是要分子為一，而表示起來也不記分子，只記分母在上面加一點，以和普通的數區別，例如　　就是$113\frac{1}{2}\frac{1}{3}$即$113\frac{5}{6}$的意味。

其次，關於埃及算學的，有那著名的林特氏（Rhind）的巴比拉斯（Papyrus）的。這東西也是十七八世紀的探檢者所蒐集起來的埃及古文書，現在藏於英國博物館。巴比拉斯是生於尼羅河畔溼地的一種如同蘆葦的草，切薄了縱橫壓縮而成的，那是古代埃及人於石片及粘土板之後考案出來的紙的代用品，像粗糙的厚板紙。這些在發見的當初，當然誰也不明白那是什麼東西的，其後到了前述象形文字的研究漸漸進步時，於一八七七年愛生婁氏（Eisenlohr）有古埃及算學索引（Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter）之作，才使人知道巴比拉斯是古代埃及的學術記錄，其關於算學的，是距今三千六百年前的希古所斯（Hyksos）王時代的一個有名僧侶叫阿梅斯（Ahmes）所寫的。而且所記載的是在那時的再一千年前已知道的東西。由此可以知道

埃及在四千餘年前，算學已經很發達了，這記錄有個標題，其意為「求解一切不明物事的指針」內容大體由關於算術的方面及幾何的方面二者而成。在算術的部分載有分數計算所必要的種種表，及分數的變形法，以及與方程式相近似的東西。分數變形法是只載着分子為 2 分母在 99 以下的分數，作為分子是 1 的若干個分數之和的一種形式表示出來的式子，不加說明也不記載理由，只例示着，即如

$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232},\quad \frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{676}+\frac{1}{776}$$

之類。又所謂與方程式相近似的，即是如說某數與其 $\frac{1}{7}$ 的和的 19，則該數是 $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ 等等。這樣埃及人的分子是一定的數 1，那是和羅馬人的分母常是 12，巴比侖人常是 60，比較起來，很有興味的。同時也可以想到，像現在的一般分數，分子分母都可以為任意的數，古代人是很難理解的。又在這記錄中，未知數常用堆積意味的記號表示，加號用前進的脚步，減號用退後的脚步，等號則用∨表之。其屬於幾何學之部分，最初載測穀倉容積之例。當時埃及穀倉是怎麼一個樣子無從知道，而此中所載則當其三邊之長為 a, b, c時，容積常爲$a\times b\times(c+\frac{1}{30}c)$。次記有各種平面形的面積，其中有直徑 12 的圓面積爲$(12-\frac{1}{9}\cdot12)$，從這結果推測，可知埃及人的圓周率是3.1604，在這時代能有這數值，是很難能了。此外有論及關於金字塔及大方尖碑的傾斜面的斜度與後世三角法初步相似的東西。

此外，在這巴比拉斯上，還載日常生活所必要的各種表及計算，其中也有結果全是錯誤的。例如視二等邊三角形的面積等於一邊與底邊乘積之半，或梯形面積等於平行邊和之半與一邊的乘積等等。因爲此等巴比拉斯大概是輕理論而只記載着各個結果，所以會有這樣的錯誤，但是此古文書是現今推斷埃及古代算學的惟一根據，而且因爲有了這書之故，有人曾論到今日算學的發祥地是在埃及云云，卽可知其重要了。此外和這巴比拉斯同時代的，有在 Illahun 的金字塔南的Kahun 地方所發見的巴比拉斯，上面卻載着二次方程式的問題的，卽把已知面積爲 100 的分爲邊的比是 $1:\frac{3}{4}$ 的二個正方形。用現在的記法寫來，是 $x^2+y^2=100, x:y=1:\frac{3}{4}$，解這式子，在那巴比拉斯上是

用：設 $x=1$ 則 $y=\frac{3}{4}$, $x^2+y^2=\frac{25}{16}$, 但 $\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$, $\sqrt{100}=10$, 因之 $100\div\frac{5}{4}=8$, 想起來這是說 $x=8$, $y=8\times\frac{3}{4}=6$ 的。這裏面表平方根卻用着「的記號。

* * *

現在我們再來講巴比侖的古代楔形文字和勝開勒(Senkereh)書板。巴比侖人居於幼發拉底及底格里斯二河流域，其地被稱爲人類最早發生之處，故巴比侖的算學和其他文化都是在遠古已是很有可觀的了，這是誰都想像得到的。但因這是非常古遠之事，而且他們用着楔形文字，無人能識，所以一時很不容易明白其眞相，於是便有許多學者和探檢家，費了很大的苦心與犧牲，致力於此，到後來才有一點結果。

現在先講楔形文字的如何被人識得。在波斯的小都會希拉支(Shiraz)西北四十餘哩地方，有個名叫剌希曼(Mount Rachimet)的小山。這小山的前面，有個半圓形的高臺，其一半是天成自然的原狀，而別的一半卻顯然地殘留着古昔曾加着不少人工的痕跡，使人可以想像這該是大寺院或大宮殿的廢墟。一四七二年義大利威尼斯的一個商

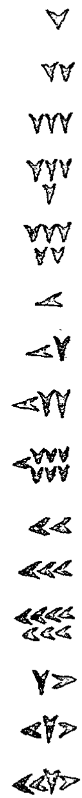
人，叫 Josophat Barbaro 的，遠出到波斯經商的旅中，某日經過這小山之前，忽然發見了廢墟的石垣上有些奇妙的雕刻。看去是同箭一般的記號，縱橫排列着。那是很奇怪的，但他不過是個商人，所以也不曾加以注意而通過了。不久回到故鄉之後，把這事講給近處鄰舍的人聽了，也沒有人特別加以注意的。此後過了一百五十年，也沒有人來訪尋這奇怪的刻文，徒任風雨的剝蝕罷了。但到了一六二一年，同是義大利的探檢家Pietro della Valle 再來尋這廢墟，調查那彫刻着的東西，當然也不知道那是什麼。沒有法子，就把那些模寫下來，介紹給當時的學者。恰巧那時是歐洲從中古的黑暗時代初解放出來，一切文化藝術在復興的初期，這奇怪的報告，喚起了許多人的注意，很挑動他們的好奇心。於是從這時起歐洲各地方陸續有探檢隊派遣到波斯巴比侖等地。十八世紀中葉，和刺希曼廢墟相類的遺跡刻文，被這些探檢隊陸續發現了不少。同時這些奇怪文字的如何讀法，在考古家學者之間成了很大的問題。經過種種苦心研究之後，到了十九世紀初，由德意志朮更鏗的中學校一教師葛羅戴芬 (Georg Friedrich Grotefend) 的勵精努力，方

得解決。葛羅戴芬於一七七五年生於哈諾華，二十歲入朮更鏗大學修言語學，後歷任朮更鏗法朗克福等地中學教師，一八二一年他四十六歲時，任故鄉哈諾華中學校長，在職二十八年，於一八四九年退職閒居，四年後死，享壽七十八歲。他在就職中學教師之始，即著手從事研究當時舉世所注目的波斯遺物，非常勵精刻苦的結果與不休不止的努力，才發見了此等奇怪的刻文是古代流行於巴比侖波斯的所謂楔形文字，而且又究明了此種楔形文字的組織構造。這樣幾千年來鎖在神祕之中的謎語是解破了，而人類發祥地的古代文化也由此而可以窺見一二。

楔形文字被葛羅戴芬所認得之後，在他死的次一年一八五四，又發見了有名的勝開勒的書板，於是巴比侖古代算學的情形，才可以見其大概。這書板是一種粘土的板，是從四千五百年前的巴比侖首都拉羅沙的遺跡中的勝開勒禮拜堂那裏發掘出來的，刻着關於算學的當時的記錄。由此種遺物以推定巴比侖的算學，先說記數的字。以縱的楔形▼表1，橫的楔形◀表10，縱橫的楔形並列者▼▶表100，要表示任意的數，只把此等記

號連續記出卽可。100以下的數，是用加法的數值大的記號寫在數值小的記號的左邊，100以上的數用乘法數值小的記號寫在100的左邊，例如  爲3， 爲23， 爲10×100卽1000。故今以此等數字從1起順次把自然數記出來卽便是：

1
2
3
4
5
10
11
12
16
20
30
70
100
1,000
10,000



這勝開勒的書板載有從1到60的自然數的平方的表，及1到32的自然數的立方的表，不過這有第二表的書板是損壞了一半的，所以推想起來，本來也是載着從1到60的立方數的。從這些表看來，巴比侖人在四千餘年前，是並用着十進法與六十進法的，卽表中從1到7的平方是1，4，9，16，25，36，49，用十進法記的；而8的平方則記着1.4，9的平方記着1.21，10的平方記着1.40，這分明表示那1.4卽是60+4=64，1.21

即是 60+21=81 1.40=60+40=100 等等，故可以知道巴比侖人是把十進法及六十進法並用而計數自然數。此種六十進法，在巴比侖行得很久，屬於勝開勒書板時期一千年後的遺物上，不但整數，即小數也用六十進法記載，分數也是把分母固定爲 60 的記法。現今測角度的六十分法，也就是巴比侖的遺物。

關於六十進法的起源，有種種說素。十進法是從人的指頭出來，別無異論。而在六十進法，則人體上並無暗示六十的物事。但古代巴比侖人以一年爲三百六十日，太陽每日行全圓周的三百六十分之一，而圓周把半徑去量起來，又恰好是六倍，這他們也知道的，因之對於一個半徑的角，適爲三百六十的六分之一，即是六十度，由這暗示了六十的數目，而且把不到一度的以一度的六十分之一來量，即是一分，不到分的又以一分的六十分之一即秒來算。有人說這樣的起源說，最初是得一般人相信了。其後漸漸研究起來，知道巴比侖人大概也曉得一年較三百六十日爲長，而且先明白了三百六十度，再從這裏生出度分秒來的想法，是和從低位到高位的數系列發達的一般原理不符的，所以現在

是把巴比侖的六十進法，看做是從前行着的十進法和六進法的混合物。總之，由葛羅戴芬的努力及勝開勒書板之發見，到了十九世紀末才知道了四千餘年前的太古巴比侖人已經用着平方、立方了。

再次，我們便要講到希臘。希臘的算學，大抵是從埃及的僧侶學來的。他們在幾何學方面更有天才，而於算術計算，則差不多沒有貢獻。當西曆紀元前七世紀頃，希臘和埃及之間已有頻繁之交通，希臘的學生到那個金字塔國去求學的很多，如泰勒斯(Thales)、安諾披第(Oenopides)、畢他哥拉斯(Pythagoras)、柏拉圖(Plato)、德莫克利托(Democritus)、攸獨克斯(Eudoxus)等人，都曾到埃及受過教育的。一切希臘的文化都承襲各方的遺產，不是他的獨創，算學也是如此。但對於希臘的幾何學，我們也另有可以稱揚的，那是他們的系統化、組織化，而幾何學成爲一種科學，卻是他們的功績。因爲埃及的算學只記載着各個特殊的事項特例，到了希臘人手裏，才用他們的閒暇及玄學的心思，即刻提高了程度，而專談理論了。埃及人的幾何全由迫於實用的必要而來，希臘人則以爲是

一種尊嚴的學問了。

希臘人的記數法，是用字母代表數字的，卽以α,β,γ……表1,2,3……，ι,κ,λ,μ,ν……表10,20,30……，ρ,σ,τ,υ,φ,χ,ψ……表100,200,300……，所以如ωλγ卽表833，而ψμα卽表741。這樣的記數法，在計算的時候，非常不便，所以這方面的學問，遠不如幾何學的進步。在幾何學上，有個叫歐幾里特(Euclid)曾把他那時代的算學知識編成原本一書，那是他爲教授用而編纂的，共分十五篇，其中第一、二、三、四及六篇是初等平面幾何學，第五篇是歐幾里特式的比例論，第七、八、九、十篇是數論，第十一篇是立體幾何學的簡單定理，第十二篇是角柱、角錐、圓柱、圓錐、球體等間的量關係，第十三篇是正多角形和正多面體，第十四、十五篇也是立體幾何，據說不是出於歐幾里特之手而是後來的人所增添的。這書的編成在紀元前三百年頃，卽距今是二千二百餘年之前，而到現在是還有大勢力的。現在學校所用幾何學的教本，有許多還遵循歐幾里特的體系和方法。其價值之久遠，可想而知了。

在初等幾何學裏有個叫畢他哥拉斯定理的，極爲有名，而且是人人知道，又是實際生活上所必要的。這定理在學術上也有很重大的意義，即是無理量的具體化，把無理量取入幾何學中，是一大進步。另一方面，這定理實是斐馬 (Fermat) 的大定理的前驅，所謂斐馬的定理，即 n 是 3 以上的時候，滿有滿足於方程式 $x^n+y^n=z^n$ 的正整數或分數，這是他在十七世紀中葉記在一冊論文稿册角上的，迄今三百餘年，全世界還不曾有一人能證明牠。這定理的 n 是 2 時，即是此畢他哥拉斯定理了，斐馬是從此定理得到暗示的，自不必說。可是這個定理並非畢他哥拉斯發明的，在他以前埃及、印度、巴比侖、中國都早就知道。

在埃及和印度地方，古時祭神的祭壇，其位置有嚴格的規定，即一邊須正指南北，他邊須正指東西，作爲是神的命令而不可侵犯的。因之要實行這規定，便常有作直角的必要了。這時，所用方法常是用一繩，取其三、四、五的長而折曲之，以作成一直角三角形，在埃及，四千年前且有專門以作此直角三角形爲職業的人。因之直角三角形斜邊之平方等

於他二邊平方之和，是在畢他哥拉斯很早以前就有人知道的。印度的三千年前的古文書 Salva sutra 中也有這定理。那麼，爲什麼這要叫做畢他哥拉斯定理呢？說是他第一個把這定理發明嗎？那也很可疑的。大約因爲他所創的畢他哥拉斯學派對於此定理直接有關的問題，特別多研究。而此學派的規則，是把一切研究的結果，都以開祖畢他哥拉斯的名來發表之故，因而這定理有了畢他哥拉斯的名字。這定理自畢他哥拉斯以來，二千五百年膾炙於人口，其證明方法也是很不少，其中最早發表的嚴格的證法是載在歐幾里特原本中的，歐氏較畢氏約晚二百年，故在歐氏以前許也曾有嚴格證明的。這證法在十九世紀初有三十二種，十九世紀終有四十六種，二十世紀初的一九一四年某人的調查得九十六種不同的方法，現在一定可超過一百種了，當然其中有並非根本的不同，而只有一二處不同的，也計算在內的。

羅馬人對於算學上是很少貢獻的，到了中世紀的黑暗時代，也沒有什麼進步，反而是印度、阿剌伯等地，在算學有很好的進步，足以促進歐洲近世算學的發達，實際是很靠

了印度和阿剌伯算學的感化的。這些是屬於較後的事，我們以後再談。

倘使對於算學史有興味者，可先購曹丹文譯初等算學史（商務印書館出版）閱看，原書為 Cajori 所著，中譯本價二元。

數論中的若干簡單事項

章克標

數論(Theory of number)是算學中很高深的一分科，牠的任務在於研究自然數的性質。古代，希臘的畢他哥拉斯(Pythagoras)、歐幾里特(Euclid)、亞幾默得(Archimedes)等人的著作中，也有論到數的性質的，而亞歷山大府(Alexendria)的狄奧芬都(Diophantus)對於這方面尤多貢獻。後來因算學解析(Mathematical analysis)之發達，此門學問大有進展，經斐馬(Fermat)、歐拉(Euler)、拉格侖日(Lagrange)等天才之努力，到了高斯(Gauss)、勒戎德耳(Legendre)而大完備，成立了一個分科，更由許多近代大數學者的發揚光大，這一分科更趨完備了。

但是我們現在不要講整個的數論，而且也沒有能力去講述和理會，我們只說說其中頂粗淺的若干事項。

我們先講一點數的分類。數可以由牠的性質而分類，並且因立脚點的不同，而可以分為種種。在代數裏，我們已知有什麼正數負數，什麼實數、虛數等等。這些我們且不去講到，我們把範圍限定了那1,2,3,4,……這樣下去的自然數(Natural numbers)，上面已說過，數論是研究自然數的性質的算學中一分科，所以這一種限制，在我們如同前記的一個題目之下，那是不言而喻的當有的限制。

卻說1,2,3,4,……這一個系列的自然數，因其各個數對於2的關係，我們可以分之為奇數及偶數，這是一種分類法。倘使有人喜歡英文字的，我不妨在此地註下了奇數即是Odd numbers，偶數即為Even numbers，這因為下面有許多名字，若不註上個外國名，就要不很分明的緣故，所以為紙面上的統一起見，此地也註下了。再說，數還可以由牠的分解因數(Factoring)的關係而分為質數(Prime 或叫素數)及複數(Composite 或叫合數。)複數由牠與牠各個因數之和的關係，又可分為完全數(Perfect numbers)及非完全數(Imperfect numbers)。非完全數又由其數之大於或小於牠的各個因數之

和，而分為兩種。其他還有什麼親和數(Amicable numbers)、定形數(Figurate numbers)、多角數(Polygonal numbers)等等，我們將於次一一加以說明。

奇數與偶數

在種種的數的分類之中，這奇數與偶數之分，是頂簡單而頂自然的了，這分類是建立於各個數與2的關係之上。偶數是2的倍數，而奇數是相反的非2的倍數。自然數的系列，是每數加1即循單元(Unit)而得次一數；在偶數的系列中，則每數加雙即2而得次一數。自然數的系列，從1開始而一個個數下去；偶數的系列，則以2開始，而以自然數序的隔開一個數下去；奇數的系列則也是隔開一個數下去的，但以1開始。還有，偶數的系列中，各數以2除之，則還原到得了個自然數的系列。

偶數又分做兩種：

（一）奇的偶數(Oddly even numbers)，如2, 6, 10, 14, ……

偶的偶數(Evenly even numbers)，如4, 8, 12, 16, ……。

奇數也再分做兩種：

偶的奇數 (Evenly odd numbers)，如1, 5, 9, 13, ……。

奇的奇數 (Oddly odd numbers)，如3, 7, 11, 15,

表偶數的公式是$2n$，表奇數的公式是$2n+1$。在奇的偶數中，n是奇數；在偶的偶數中，n是偶數。在偶的奇數中，n是偶數；在奇的奇數中，n是奇數。偶的奇數有$4n+1$的形式，而奇的奇數則有$4n+3$的形式。

關於偶數與奇數，很有許多有趣的定理，我們且把其中若干簡單的記述下來。

1. 凡質數，除2以外，皆是奇數。
2. 連續的二數之平方差，必爲奇數。
3. 兩個奇數或偶數之和或差，均爲偶數。
4. 一個奇數與一個偶數的和或差，均爲奇數。

5. 無論若干個偶數之和，必爲偶數；偶數個的奇數之和爲偶數，奇數個的奇數之和爲奇數。

6. 兩個奇數之積，爲奇數；兩個偶數之積，爲偶數；一個奇數與一個偶數之積爲偶數。

7. 偶數，若能被奇數整除，（或曰除盡，）牠的商是偶數。奇數，能以奇數整除的，牠的商是奇~~偶~~數，偶數能以偶數整除的，牠的商是奇數或偶數，不一定。

8. 奇數，不能被偶數整除，而且牠的餘數，也是奇數。

9. 若偶數，不能被一偶數整除，則牠的餘數是偶數。

10. 若偶數，不能被一奇數整除，則當其商爲偶數時，餘數也是偶數，商是奇數時，餘數也是奇數。

11. 若奇數，不能被一奇數整除，則當其商爲奇數時，餘數是偶數，而商是偶數時，餘數是奇數。

12. 若奇數能整除一偶數，則亦能整除此偶數之半；若偶數能被一奇數整除，則亦能爲此奇數之倍整除。

13. 偶數的不論若干次乘方，均是偶數；又其逆偶數的不論若干次根（卽開方），若能開盡，是偶數。

14. 奇數的不論若干次乘方，均是奇數；又其逆奇數的不論若干次根，若能開盡，是奇數。

15. 完全乘方數（卽開方能開盡之數）和牠的根之和或差，是偶數。

上記各項定理，可以很容易由普通算學上的理論而證明。例如上記的3，其證明如次：

設兩個偶數是 $2n$ 及 $2n'$，則牠的和是 $2n+2n'$ 卽 $2(n+n')$ 所以有 $2n$ 的形式，是偶數；牠的差是 $2n-2n'=2(n-n')$，也有 $2n$ 的形式，仍是偶數。又設兩個奇數是 $2n+1$ 及 $2n'+1$，則牠的和是 $2(n+n'+1)$ 有 $2n$ 的形式，是偶數；而牠的差是 $2n-2n'$ 卽 $2(n-n')$，

也是個偶數。

另外的定理，都同樣可以證明的，此地不再多寫了。

質數與複數

質數與複數，是在數的分類之中，頂有名的了。這種分類是關於那數的合成，即看牠能否分解成別個因數(Factor)。複數是可以分爲由別的若干數的相乘積的形式的，而質數是不能的數。這個分別，也可以看做牠的存在是獨立或非獨立的。複數可以看做由別個的合成，而使牠得以存在；質數的存在，不能由別個數誘導出來，所以牠是獨立的自己存在。

關於質數和複數，在算術中的許多項目之中，是最引起歷來數學家的注意的。他們的目的，是要求得一個知道質數的一般方法，以及去決定一個已知的數是質數或複數。雖則許多有名的數學者，曾經絞盡了腦汁去想法子解決這問題，可是只有很少的收穫，

在某一程度以上，還不曾有回答。

確定質數的問題很早以前，亞歷山大府的數學者，即以第一個設法測量地球而著名的埃拉托色尼（Eratosthenes）時代，也曾經討論過。他曾想出一個方法來求得質數，即從自然數的系列中，把那些非質數除去，所殘剩的便是質數了。這是在羊皮紙上，連記了奇數的系列，再從其中把複數切去，到只剩質數。在那羊皮紙上，有了許多空洞像一隻篩子，所以方法叫做「埃拉托色尼的篩」（Eratosthenes sieve）。他的方法可以說明如次：——

假定我們寫下從1到99的中間的奇數了。因為這系列是以2遞加的，所以從3起的第三項，是$3+3\times2$；所以這第三項是可以被3整除的；因之每逢第三項必能以3整除，所以都是複數。照同樣的道理，我們可以知道，從5起的每第五項，必能以5整除，而是複數；同樣，從7起的每第七項，必能以7整除，而是複數。把這類的複數都劃去了，我們便得了100以內的質數全部。用這個方法，借了若干機械的計算，未茄（Vega）曾經實算過，

而做了一張從1到4,000,000的中間的質數表。

不過，這個方法是很麻煩而不便的，所以許多數學者，很熱心去研究質數與複數的性質，使得可以因以法定質數。以下所記的定理，是常用以發見，或決定質數的：——

1. 質數除2以外，都是奇數，所以末一個數字一定是奇的數字。這定理的逆，凡是奇數，都是質數的話，當然不成立的。

2. 質數除2及5以外，牠的末一個數字，必是1,3,7或9；餘外的都是複數。這是從奇數的單位數字系列中除去了5，因爲無論那一個數的最後數字若是5，必能以5整除。

3. 除2以外之各質數，若加以1，或減去1，各數必能以4整除。換言之，卽每個質數，除了2是個例外，有$4n \pm 1$的形式，這是可以證明的。

4. 除2及3以外之各質數，若加以1或減去1，各數必能以6整除。換言之，卽每個質數，除了2及3的例外，都有$6n \pm 1$的形式。這也是可以證明的。

5. 三個的質數，不能成等差級數的，除非牠的公差，是能被 6 整除；除了 3 是第一個質數，在這情形之下，有三項可以成個等差級數，但不多於三項。

6. 上述的定理是普遍地眞的，可以記述如次：——不能有 n 個的質數成等差級數，除非牠的公差，是能被 2, 3, 5, 7, 11, …… n 整除，除了 n 是級數的第一項，而在這情形之下，這級數可以有 n 項，但決不多於 n 項。

對於探求質數，雖則沒有一般普遍的方法，但有幾種法子，可以察知一個已知的數是否質數。有幾個可注意的公式，被發見了是包含了很多數的質數。x^2+x+41 一式中以 $x=0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ 遞次代入，可以得一個系列 41, 43, 47, 53, 61, 71, ……此系列之前四十項，均是質數。這個式子，是歐拉 (Euler) 在他的 Memoirs of Berin (1772) 中記載着的。另外二個式子 x^2+x+17 和 $2x^2+29$；第一式子，牠最初的十七項是質數，第二式則有二十九項。斐馬 (Fermat) 曾設定 2^n+1 常爲一質數，若 n 是取 1,2,4,8,16, ……的系列中的值；但是歐拉卻證明了 $2^{32}+1=641\times6700417$ 而不是質數。

斐馬曾發見了一個研究質數上頂重要的定理，就是現在叫做斐馬定理的。那定理即是：——若p是一質數，則與p是沒有共通因數的任何數牠的p−1次的乘方減去1，必能被p整除。用記號來寫出來，即$N^{p-1}-1$是p的倍數，當p與N沒有共通因子時。例如25^6-1是能被7整除的。

據說斐馬對於這定理是有證明的，不過歐拉卻是第一個發表出其證明的人。歐拉的第一個證明是很簡單的，普通的關於數論的書上，都記載着這定理的別個證明，拉格倫日(Lagrange)所貢獻出來的，有很大的價值。

勒戎德耳(Legendre)在他的 Essai sur la Théorie des Numbres 中，也曾證明過，每個等差級數，牠的首項和公差是沒有共通因數的，含有無限的質數。他還證明過，若N代表一任意數，那麼

$$\frac{N}{n.\log N-1{,}08366},$$

是表與小於N的質數之數有很相近的值。

另一有名定理，是由威爾遜(Sir John Wilson)發見了，就是叫做威爾遜定理的。那

定理卽是：小於一已知質數各整數的連乘積加以1，能爲此質數所整除。用記號寫來，卽是 $1+1.2.3.\cdots\cdots(n-1)$ 是能以 n 整除的，但 n 是質數，如 $1+1.2.3.4.5.6=721$ 是能爲7所整除的。

這定理初爲拉格侖日所證明，他的證法是很巧妙的。後由歐拉證明，高斯（Gauss）也證明，而且還加以擴張。在要決定一個數是否爲質數時，威爾遜的定理給了我們一個確實可靠的規則；因爲這性質分明是專屬於這些數，而對於別的數是不成功的。可是在實際的應用上，卻很少價值，因爲卽使對於一個不很大的數，那連乘積已是很可以的巨大了。

數論上以後的發展，證明了沒有代數的公式可以表出質數來的，也證明質數的數，是無限的。後一個陳述，是自明的樣子，而前一個，在沒有嚴格的證明以前，也由歸納法大概已決定其眞了。

質數的分布，不會依據何種著名的法則，但一定的間隔之間，質數的數，在開頭多而

往後愈少。在10000以下的質數有1230個，在10000到20000之間的爲1033個，在20000與30000之間的爲983個，而在90000與100000之間的則爲879個。已經知道的頂大的實際的質數，爲歐拉所發見的$2^{31}-1=2147483647$.

完全數非完全數及其他

把數的因數分解之後，我們可以知道，有些數的因數很多，有些數則不很多，把各因數之和，與原數相比較，有恰好相等的，也有或大或小的，又成立了一種數的分類法。一數所有的因數之和（該數本身不計在內）若與其數相等，叫做完全數（Perfect number）。沒有此性質的數，便因而叫非完全數（Imperfect number）。非完全數又分爲二，卽過數與缺數，看其數之小於或大於其因數的數目而定。

這一種的比較再擴張一點，可以想到有些數的因數之和，相互地等另一個數，這一種關係，稱兩數爲親和數（Amicable number）。完全數和非完全數，希臘的古算學家就

已知道，但近代的算學家，卻把牠再闡明了許多性質性。親和數是荷蘭的算學家范旭登(Van Schooten)第一個著手研究，他生於一五八一年，卒於一六四六年。

再舉若干實例，使得上面所述的更明白些。

完全數是一個數，恰等於該數所有各因數（但該數本身不計在因數之內）的和。例如 $6=1+2+3$；$28=1+2+4+7+14$。所以 6 和 28 便是完全數。

非完全數是一個數，與牠所有各因數之和是不相等的。非完全數有過數 (Abundant) 及缺數 (Defective)。過數，是指該數的因數之和大於該數；例如 $1+2+3+6+9>18$，18 便是過數。缺數是指該數的因數之和小於該數；例如 $1+2+4+8<16$，16便是缺數。

凡數之具有 $2^{n-1}(2^n-1)$ 之形式，而後一因數爲質數者，此數便是完全數。但要使 2^n-1 成爲質數的 n，已經知道的只有 $n=2, 3, 5, 7, 13, 17$ 及 31，所以只有十個完全數是知道的。把 2 以代式中的 n，得 $2(2^2-1)=6$，這是第一個完全數。第二個數是

$2^2(2^3-1)=28$。另外的幾個是 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128。這可以看見，每數之末尾，非 6 卽爲 28。

尋找完全數的難，還含有找有 2^n-1 的形式的質數之難在內。質數中的最大者，依芭洛(Barlow)所說是 $2^{32}-1=2147483647$ 是由歐拉所發見的。上舉的最後一個完全數，是依據這數而求得的。這是現在所知的完全數中之最大者，而且芭洛以爲那必是最大的了，因爲除了好奇之外，毫無實用，決不會有人再費了心血，去推算更大的別個。另外一個算家，卻舉出了別的二個完全數來，

2417851639228158837784576　　9903520314282971830448816128

但不知他的根據。

親和數是兩個數的因數之和，互相等於另一個，如 284 與 220。求親和數公式是 $A=2^{n+1}d$, $B=2^{n+1}bc$，在這裏，n 是整數，b, c, d 是質數而滿足於下列之條件的：

$$b=3\times2^n-1,\ c=6\times2^n-1,\ d=18\times2^{2n}-1.$$

設令 $n=1$，則得 $b=5, c=11, d=71$，代入上記公式中，則 $A=4\times71=284$，$B=4\times5\times11=220$. 這是第一對親和數。其次的兩對是 17296 與 18416；936358 與 9437056。

第一對數的 220 與 284 是范旭登所求得的，而親和數這名詞，也是他創造出來的，雖則路道爾夫 (Rudolphus) 和笛卡爾 (Descartes) 早已知道此種數的性質。親和數的一個公式，是由笛卡爾寫出的，其後歐拉及別的人加以擴張而普遍化。

定形數 (Figure Numbers)

先用一等差級數，其首項爲 1 而公差爲整數作爲基底。再順次取其首二項、首三項、首四項……之和，作成另一數列；對於此新成之數列，再施用如上的方法，而成第二個新的數列；再照老樣子進行。

例如以公差爲 1 的自然數列爲始，以 A 表之，照上述之方法行施，則得第二列 B，這便是定形數；從 B 的數列得的 C，也是一定形數。倘若不以自然數的系列開始，只要是以

A,	1	2	3	4	5	6	7
B,	1	3	6	10	15	21	28
C,	1	4	10	20	35	56	84
D,	1	5	15	35	70	126	210

1為首項而公差為整數的等差級數也同樣可以的。例如從奇數的數列1,3,5,7,9,……便得出1,4,9,16,25,……的一個定形數來。

一般可以把定形數看成一系列之數，各系列的一般項(General term)有次之公式

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\quad(n+m)}{1\times2\times3\times4\times\cdots\cdots\times(m+1)}$$

在這式中，m表數列的次數，n表所求項的地位。

定形數是以次數 (order) 分的；當 m=0, 則數列為第一次；m=1, 數列為第二次；m=2, 數列為第三次；以下準此。

在公式中令 m=0, 而以 1, 2, 3, ……依次代 n,則我們已見其一般項為 n, 故第

一次的定形數列卽是自然數列的 1, 2, 3,……

設m=1，則此數列之一般項爲$\frac{n(n+1)}{1\cdot2}$，若得 1, 2, 3,……依次代n，則得一數列爲 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28……這是第二次的定形數。

同樣，第三次和第四次的定形數列的一般項爲

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot3} \text{及} \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

從這式中，我們可以求出定形數列來，這已如上面所記的 C 及 D 等於數列便是。

在定形數列中，有項特殊的性質，卽某次數列中的第 n 項，若加以前一次的第n+1項，則卽得某次的第 n+1 項之數。例如C的系列中的第二項4，加了B的第三項6，卽得 C 的第三項 10 便是；C的第三項，加了B的第四項，卽得C的第四項，以下準此。

假使我們用1的系列開頭，那麼定形數的系列便可以依此方法而求得了。

1 的基本列 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

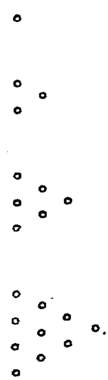
第1次	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
第2次	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	55.
第3次	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120,	165,	220.
第4次	1,	5,	15,	35,	70,	126,	210,	330,	495,	715.
第5次	1,	6,	21,	56,	126,	252,	462,	792,	1287,	2002.
第6次	1,	7,	28,	84,	210,	462,	924,	1716,	3003,	5005.
第7次	1,	8,	36,	120,	330,	792,	1716,	3432,	6435,	11440.

從這表看來，各斜行的數字，恰巧是 $a+b$ 的二項定理展開式的各項的數系數，牠的次數，即與此定形數的次數相同。定形數的研究，是由這個原因而促進的。

對於定形數的求出，由各次所有的公式可以做到，但芭洛卻提醒我們，以爲由其形式求定形數的產生，是比由其產生而求出公式來，更是簡單。前面所述的兩相鄰次數的定形數各項間的關係，是由 Fermat 首先說述的，他以爲這是一種很有趣的性質。

多角數 (Polygonal number)

定形數的一種，用多角形的邊來表出的，叫做多角數。如前記第二列的定形數 1, 3, 6, 10, …… 是叫做三角數 (Triangular number)，因爲各數的單元可以排成一個三角形的。



若我們先取 1, 3, 5, 7, 9, …… 的公差爲 2 的數列，而得一列的定形數 1, 4, 9, 16, 25, …… 這是叫做四角數，因爲可以配成正方形的。再若取 1, 4, 7, 10, 13, …… 的公差爲 3 的數列，而得一列的數 1, 5, 12, 22, …… 這便叫做五角數，因爲那是可以配成五角形的。照同樣的法子，可以求得六角、七角、八角……的數。多角數的邊數，一定比牠所由出的數的公差大 2。即公差爲 1 的等差級數，其各項之和成三角數。公差爲 2，各項之和爲四角

公差=1:	1,	2,	3,	4	5,	6
三角數	1,	3,	6,	10,	15,	21
公差=2:	1,	3,	5,	7,	9,	11
四角數	1,	4,	9,	16,	25,	36
公差=3:	1,	4,	7,	10,	13,	16
五角數	1,	5,	12,	22,	35,	51

數。公差為3各項之和為五角數。

這一種數叫做多角數，因為同數的點可以配置為相應的多角形。如五角數5, 12, 22, 35, 51, …… 各自可以排成一五角形；即5點為一五角形，12點為另一五角形而包了前者，22點為第三個五角形而又包了前二者，以下同此。

又有所謂角錐數(Pyramidal number)者，是可以拿牠來配置成角錐體的。這些數可從多角數各項之和再導出來，其方法如多角數的從等差級數各項之和得出來一樣。三角錐數，是三角數導出來的一種定形數，即從1, 3, 6, 10, 15, ……所得的1,4,10, 20, ……便是三角錐數(Triangular Pyramidal Number)。同樣四角錐數是可以從四角數導出的。

一九，七二。

談完全數

陳建功

1,2,3,4,5 五數之中，可以把6除盡的，就是1,2,3三數；將1,2,3三數相加起來，適等於6。又1,2,3,……27二十七數中可以把28除盡的數——1,2,4,7,14——相加起來，適等於28。像6和28一類的數，叫做完全數。嚴密的定義起來就是：「有一正整數a，將可以把a除盡而較小的數相加起來，其和若等於a，名a曰完全數。」從這個定義，我們立刻知道1,2,3,4,5,7,8,9,10等數，都不是完全數。讀者可試驗試驗看，496和8128乃是完全數。

把完全數來玩味的人，不是起於近代，二千幾百年前，畢他哥拉斯㊀的時代，已經有了。歐幾里特的幾何原理㊁第九卷裏，就有關於完全數的話頭。

上面所說的四個完全數 6,28,496,8128，可以寫做下列的形式。

$$6=2^{2-1}(2^2-1),\qquad 28=2^{3-1}(2^3-1),$$

$$496=2^{5-1}(2^5-1),\qquad 8128=2^{7-1}(2^7-1)。$$

看明白了這些數式，推想起來，假如有一數，可以寫做

$$2^{n-1}(2^n-1)\qquad (n\text{為正整數})$$

的時候，是否一定是一個完全數呢？答曰：否，試看 20, 24, 30, 60 諸數，都除得盡 120，把他們加起來，已經大於 120 了，可見得 120 並非是一個完全數。但是

$$120=2^{4-1}(2^4-1)。$$

調查上面四個完全數的數式裏面的 n，乃是 2, 3, 5, 7 ——都是質數。莫非 n 為質數的時候，

$$2^{n-1}(2^n-1)$$

一定表示完全數麼？這層推想，不幸又不中。何以見得呢？取 n 等於 11, 11當然是一個質數，我們算得

$$2^{10}(2^{11}-1)=2096128=1024\times 23\times 89,$$

$$23\times 89\ (2^5+2^6+2^7+2^8+2^9)\ +2^{10}\times 89$$

$$=2\,121760>2096128.$$

第二行裏所表示的六個數，都可以除盡 2096128，把他們加起來，已經大於後者，這就是表明後者並非是一個完全數。

兩種推想，統統失敗。我們再來調査上面四完全數的式子，得着

$$2^2-1=3,\qquad 2^3-1=7,$$

$$2^5-1=31,\qquad 2^7-1=127.$$

3, 7, 31, 127 都是質數。那末，

$$2^n-1$$

成一質數的時候，或許

$$2^{n-1}(2^n-1)$$

表示一個完全數了！這層推想是對了，歐幾里特的幾何原本裏有證明的。不但如是，假如有偶數爲完全數的時候，一定可以寫成

$$2^{n-1}(2^n-1)$$

之形式的。這個證明是歐拉[三]所做的。綜括起來：若 2^n-1 爲質數，則

$$2^{n-1}(2^n-1)$$

爲完全數。除此而外，無偶數爲完全數者。

最小的完全數，除上面所說的 6, 28, 496, 8128 而外，爲

$$2^{13-1}(2^{13}-1)=33550336,$$

$$2^{17-1}(2^{17}-1)=8589869056,$$

$$2^{19-1}(2^{19}-1)=137438691328,$$

$$2^{31-1}(2^{31}-1)=2305843008139952128.$$

這最小的八個完全數，是 1644 年（牛頓生後第三年）一個法國人[四]所算出的。第九個

完全數爲

$$2^{61-1}(2^{61}-1)$$

1885年算出的，㊄第十個完全數一直到了二十世紀1912年的時候，才知道的，其數適當於 n=89。㊅最近又知道 n=107 和 n=127 的時候，

$$2^{n-1}(2^n-1)$$

是完全數。㊆

上面所列舉的完全數，都是偶數。那末，

(一)有奇數爲完全數者乎？

據辭爾物思計㊇1888年的研究，假如有一奇數是完全數，那末，這個奇數至少要有五個以上的質數可以除得盡他；然而問題(一)未曾解決。——至今還沒有人能解決哩。

要探明某數是否是一個完全數，手續雖然麻煩，還可以做得。如果要尋得一個新完全數，那就不容易了。但是我們倒要問問看：

(二)完全數之個數，究竟有沒有限制？

對於這個問題，到如今也還沒有人能夠回答。一面，我們已經知道：「若 2^n-1 爲質數，則 $2^{n-1}(2^n-1)$ 爲完全數。」因此，和(二)相關聯的一個問題，就發生了：

(三)可以寫做 2^n-1 的形式的質數，其個數是否有限？

※ 如果(三)的回答是「無限」二字，那末，(二)就解決了，其回答也是「無限制」一語。設使(三)的回答是「有限」二字，(二)仍然不能得着確實的回答。

這(一)(二)(三)三個問題，至今還沒有人能夠解決，作者所以特地寫出來，報告給中學校裏的朋友們聽聽。

㊀ Pythagoras 希臘古時的一個學者。

㊁ 二千一二百年前希臘人 Euclid 集當時幾何學的大成，著幾何原本一書，我國在明朝時候，始有譯本。

㊂ Euler (1707—1783) 十八世紀的一位數學大家，晚年雙目都盲，研究仍然如舊，凡十七年而死。

㈣ Merseune。

㈤ 算出的人名 Seelhoff。

㈥ 發見的人名 Pewers。

㈦ 見 Kraitchik 的數論(1924)。

㈧ Sylvester (1814—1897) 英國的一位數學家。

「思索」的展開

劉薰宇

記得當學生的時候，曾經遇着一個如此這般的教師；頭銜是天算博士，人材卻很瘦小，我感到這不很調和，不過一對非常靈活的眼光卻使我覺得此人很聰明。頭銜終不是無用，同學們對他都有相當的信仰。然而頭銜也不全有用，同學們對他的信仰，往後便一天低似一天。這中間最大的原因，不是他的講書等於唸書，而是他常常不能很爽快地將同學所提出的練習題在黑板上做出來。有人問到他總是一看完了題目就動手，但總是一次兩次地做不出，錯了再來過，頂少要到三次纔能交卷——有一次，在他做錯了後重行做着的當口，同學們都笑了。他說：

「一做就對，給你們看了，你們沒有益處。」

同學們更笑了，以爲這是他巧於圓場，那時我也這樣想。現在呢，卻認爲不見得一定

如此。這位先生不大肯預備功課，大約是事實，題目做得不熟也是事實，然而他的話卻有點對。

碰着一個難題，想到頭昏腦脹，仍舊題目是題目，我是我，有人做了出來看，好比跑熱時喫杯冰淇淋，又甜膩，又涼爽，不過，這時除了感到輕鬆和驚異外，再沒有什麼。

「他怎樣會想出來的?」

囘答這個問題，這位先生的話是對的。

學一個題目的做法，不如學對於一個題目的思索法。

思索總是由錯誤到正確，不是生來一想就對的，而這錯誤的思索的過程不但正正經經的教科書上沒有，漂漂亮亮的教師也不會把這種醜像給你看。從教師讀書，不會有多大的效果，就在這一點。

有一次，一個朋友曾經向我說過這樣的呆話：

「我想去會會愛因斯坦，請他把發明相對論的經過告訴我；他一定不是一想就成

功的，要他告訴我最初怎樣想，結果怎樣失敗；第二次又怎樣想怎樣失敗，一直到後來怎樣成功。」

這位朋友後來雖然到過一次歐洲，但是不知爲什麼不會去會愛因斯坦。也許，他已經想到了，愛因斯坦未必能告訴他；已過的事，誰還能源源本本地回憶起來告訴別人！

教了十來年的數學，「題目怎樣想法的？」這種問題確實常常被問到，然而都苦於無從說起。這不是可以抽象地概括地回答的問題，最好將事實攤開來。

幾年前在日本翻譯的一册托爾斯泰的小說中曾經看到過一頁影印的托氏原稿，下面提着「大文豪の苦心」幾個字。那原稿改了又改，就原稿的原稿說，差不多改了一大半，這種稿子眞的假如看得懂，細細兒去看，比讀十篇印就的著作一定得益更多；因爲牠是思索的影片。

這里就是攤開我對於一個小小問題思索的過程，不過我不是什麼「家」，自然離開「豪」更遠，所以這裏面並沒有什麼苦心，只是小小的遊戲罷了。

新近在一個酷熱不堪的夜裏，和阿七對坐着，一直就是對坐着，話都想不起一句來說。屋子原很窄狹，佔不到一方丈的地面，然而在這沉悶的空氣中，好似沙漠一般的廣闊。怎樣打破這沉悶的空氣，各人心裏都努力這樣想。

突然阿七開了抽屜，拿出一付撲克牌。

——來玩撲克。

——沒啥趣味，又是「圈特溫。」

——不是，我來教你一個新的玩法。

——有什麼新花樣？

——你翻開七張來擺起，A算一，大菩薩都算十，一點配九張，兩點配八張，三點配七張……配上去。配完了把剩的牌給我，我就曉得翻開的七張一共有幾何點數。

——啊！

——阿七動手來示範了。翻開的七張是：J、K、6、5、4、4、3。J、K都算10，6上配四張，5上配五張，4上配六張，3上配七張；一共連翻開的去了三十五張，五十二張還剩一十七張。阿七將剩的牌數了一遍便說：

——四十二點。

眞的，$10+10+6+5+4+4+3=42$．但，我想，這是自彈自唱；在配牌數牌的當兒，心裏暗算七個十以內的數的加法，是可能的。於是我動手做，叫阿七背轉臉去。

翻開的七張是K、Q、10、10、9、8、5，配好了，立刻把剩的牌交給阿七，阿七數了一遍便說：

——五十二點。

四十加九加八加五，一點不差，不是五十二，是什麼？我接過剩的牌一數，有二十七張。一連來過四、五次，結果都對。阿七接了牌，要做給我猜，我，我當然「莫名其妙。」

我開始想：「怎樣可以猜得出？」看了別人巧妙的戲法，總喜歡從笨處去想。

「五十二張牌中，一、二、三、四、五、六、七、八、九各四張，十有十六張。所以一共的點數是：

$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\times4+10\times16=180+160=340.$

將剩的牌的點數從 340 中減了去，就是那邊的點數了。

不對，這個想法實在太笨，而且是錯誤的。要知道剩的牌的點數，須一張張地隨數隨加，但阿七數牌的時候，我看得很清楚，不一定是把牌的正面向上，只好說阿七認識所有的牌了。然而這不但事實難能，而且我還可以斷定，阿七不是這遊戲的創造者，自然也不是靠這遊戲喫飯的，何苦去下這般蠻勁辨認五十二張相差很微細的牌，而且牢牢地把牠們記住。

再說，這想法根本就錯了。所猜的點數只是翻開的七張的，這從總點數減去所剩的牌的點數，不能得出來。

於是我開始來注意剩牌的張數和所猜的點數的關係，一共前後來過了八次，牠們的情形如左表。

次數	剩牌的張數	猜的點數
1	17	42
2	27	62
3	19	44
4	25	50
5	32	57
6	29	54
7	11	36
8	9	34

把剩牌的張數和猜的點數依次排列起來，可以看出牌越剩得多，猜的點數也越多。

牌數	差	點數
9		34
	2	
11		36
	6	
17		42
	2	
19		44
	6	
25		50
	2	
27		52
	2	
29		54
	3	
32		57

差	2	6	2	6	2	2	3

就這表看來，剩的牌差多少，猜的點數也差多少，由此我本着已有的一點數學知識，知道剩牌的點數和所猜的點數的差是一個常數；這好比父親的年歲和兒子的年歲的關係一樣，再來照這樣檢查上面的八對數。

$$34-9=36-11=42-17=44-19=50-25=52-27=54-29$$
$$=57-32=25.$$

我得供認不諱，這 25 的得出，當時不如這里的愼重，就是發現上表的相同也不是這般愼重。我只從 17 和 42,27 和 52 想出剩牌的張數差 10，猜的點數也差 10 以及 17 和 42,27 和 52 都差 25。

於是，我斷定 25 加上剩牌的張數就是那翻開的七張牌的點數。叫阿七做了兩次給我猜。好，都對。而這遊戲的祕訣便很明白，而且實在也很簡單。

「把剩的牌從二十六數起，數到末一張是多少，那七張牌的點數就是多少。」

這遊戲的門道我算懂得了，但是爲什麼要從二十六數起？那由實驗比較出來的常數差 25，從那兒來的？

於是我開始從最特殊的情形去想。要發現一般的法則，開始就從最特殊的情形去想，這比較危險；但若對於那法則已有了相當把握，再用最特殊的情形來檢討，卻比較便當。

最特殊的情形，有兩個：一，剩的牌頂多，——四十五張——二，剩的牌頂少，——一張不剩。

在第一種情形，不用說一共是七十點。由此便可以知道：

(1) 這種遊戲最大的點數是七十。

(2) 所剩的牌最多是四十五張。

(3) 七十減去四十五正是二十五。

在第二種情形，便是要將五十二張牌分配在七組裏，照遊戲的法則說，一點須配上

九張，兩點須配上八張，假如我們用1、2、3、……表示那七張的點數，用[1]、[2]、[3]、……表示配上的牌數，那末就是這樣配法：

1+[9]
2+[8]
3+[7]
4+[6]
5+[5]
6+[4]
7+[3]
8+[2]
9+[1]
10

五十二張牌配成七組，當然方法不止一種。我想看最小的點數是多少，於是我假定用了四張A！就是四個1——那末就用去了四十張牌。五十二張牌中只有四張A，所以只好再用2、3，最小的點數自然是用三張2，但這不可能，因為每張2得配上八張牌，每組就是九張，三九二十七，連同前面四組的四十張，一共要六十七張，不但三張2不可能，就是兩張2也不可能，因為四張A，兩張2，那一張就是十，一共也得要五十九張牌，所以只好用一張2，這就去了九張牌，連前共用去了四十九張。五十二張除去四十九張，只剩三張，這三張必需而且只要成功兩組，於是只好一張是9，一張是10，七組便是這樣的形式：

1+[9]
1+[9]
1+[9]
1+[9
2+[8]
9+[1]
10

實在巧極了，一張牌不剩，最小的點數恰好是二十五。這里我說：「最小的點數，」是最初的想法，其實五十二張牌，如法分配成七組，七張翻開的牌的總點數總歸是二十五。

為什麼知道是這樣？

假如將一張A改用一張2，就點數說固然變成了二十六，但2只須配上八張，所以多出了一張牌來，不得不把牠配到別的三組去，比如配到9+[1]這一組，那末9就得改成8，若配到2+[8]這一組，2就得改成1，配到10這一組，10就得改成9，總之，無論配到那一組，那組翻開的牌就得少一點，前面多一點，這里就得少一點。同樣地，將五十二張牌分配成七組，以前面的分配法作基礎，若有一組多兩點、三點……就得多出兩張、三張、……牌來，若不許多，只好從別的組的減去兩點、三點、……所以總數仍是二十五。

就從這個想法，不但知道了五十二張牌分配成七組，翻開的七張總歸一共只有二

十五點，而且多一點就要剩一張牌，多兩點、三點、……就要剩兩張、三張……牌來。換句話說，便是一張牌不剩是二十五點，剩一張便是二十六點，剩兩張、三張、……便是二十七、二十八……點。

這遊戲的謎，到此總算完全打破了！

不過這還只是從事實上觀察，歸納得來的；只能算得知道了牠是如此如此，至於牠為什麼如此，還須給出一個回答來。

仔細考察起來，七張翻開的牌的點數和所用的牌的張數，單就數目說，總和都是七十七。由此便得下面的關係：

點數＋所用牌的張數＝77……………………………………(1)

∴ 點數＝77－所用牌的張數……………………………………(2)

但 所用牌的張數＋所剩牌的張數＝52，

∴ 所用牌的張數＝52－所剩牌的張數……………………(3)

將(3)代(2)得，

$$點數=77-(52-所剩牌的張數)$$
$$=77-52+所剩牌的張數$$
$$=25+所剩牌的張數。$$

葉落歸根，到此地步，這遊戲可以說毫無奧妙。只有發現這種事實而將牠作成遊戲的人，倒是可以當得起妙人的尊稱。

總括這思索的過程，可以說是一套完整的三步曲。

一，想：怎樣一回事？(What?)

二，想：怎樣作法？(How?)

三，想：為什麼這樣做就能成功這末一回事？(Why?)

擠來擠去

樊𡒄

這裏要介紹給諸位一個數學遊戲，但並不是什麼新穎的玩意兒，卻是十九世紀的老戲法。這是美國一位有名的棋手 Sam Loyd 在一八七八年想出來的。在發明不久以後，這遊戲就傳遍了各國。他的英文原名是 Fifteenth Puzzle；傳到德國，德文叫做 Boss Puzzle，也有叫 Fünfzehnerspiel 的；在法國稱為 jen du taquin。可是這游戲在我國卻很少有人玩過，因此，我才敢大膽地把人家的老花樣搬到此地來當新鮮的玩意兒耍。

這游戲用的玩具是非常簡單，諸位只要做一隻木盒，他的底是一個每邊長四寸的正方形，至於高度倒可隨便，不過淺些比較合宜。此外，再用竹做十五塊正方形的竹牌，牌底的每邊都長一寸，牌的厚度隨便。這樣製就之後，把從1到15的十五個數目分寫在這十五塊竹牌的面上。

於是把這十五塊牌任意地鋪在木盒的底上，因爲木盒底的每邊長四寸，他的面積是十六方寸，所以這十五塊竹牌鋪了上去之後，一定還有一方竹牌大的地位空着；就因有了這塊地位空着，我們可以把這十五塊牌擠來擠去地移動，這就是說：這些牌在盒底的平面中擠動。現在我們想要從一個任意擺着的位置，用這樣平移的方法，把他排做圖一所示的標準位置。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(圖一)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	15
13	14	12	

(圖二)

諸位讀到此處，暫且停止往下看，先把你那製就的十五塊牌隨意地鋪在盒底上，你去試一下，把這隨意排着的位置，想法子移做標準位置。諸位試過之後，一定可以知道：不是隨便怎樣的位置，都可以移做標準位置的，舉個明顯的例子，譬如我們當初擺成圖二的形

狀，看去似乎這個位置擺得很巧，只有「12」同「15」的位置互易，其餘十三塊牌都在他們的標準位置。可是諸位，任憑你有天大的本領，你能把「12」同「15」用平移的方法對調過來嗎？

這事的可能與否，當然與原來的位置有關。那麼，諸位一定要發生這樣一個問題：任意排了一個位置，我們怎樣判斷這位置是否可以平移成標準位置？假若知道了可能，又怎樣移法呢？

爲說明方便起見，我們先把木盒底上十六個地位用「一」、「二」、「三」、……「十五」、「十六」等來區別。在標準位置時，竹牌「1」所佔的地位，我們用「一」表牠；竹牌「2」所佔的地位，我們用「二」表示，其餘仿此類推。至於在標準位置時空着的那地位，我們就用「十六」表牠。還有，各橫行、各縱列我們也用第一行、第二行……第一列等來區別；行的次序是由上而下，列的次序是自左而右。

現在假設隨便地把十五塊牌鋪在木盒底上，我們要開始移動，想法把牠們移成標

準位置，首先我們把「1」移到「一」上去，再把「2」也移到「二」的地位；我們知道：不論原來的位置如何，這兩步是一定可以做得到的，於是把「3」、「4」兩塊牌移到第三、第四兩縱列中的八個地位內來，而且使空白的地位也在此兩列中。如此，「3」、「4」兩塊牌一定可以移到「三」和「四」上去。在此，我們只要拿一個頂不湊巧的位置來看：假如「3」在「四」的地位，「4」在「三」的地位，如圖三所示。（在圖三中，我們把第一、二兩列省去不繪，因爲與說明無關，圖四、圖五、圖六和圖七也是如此。）現在要把「3」、「4」各移到「三」、

4	3
12	8
5	
6	14

（圖三）

8	5
3	
4	1
6	14

（圖四）

8	5
4	3
12	
6	14

（圖五）

4	8
12	5
	3
6	14

（圖六）

4	8
3	
5	12
6	14

（圖七）

「四」上去，我們只要在第三、四兩列中移動，而且連「6」、「14」兩塊牌也不必去動牠。從圖三的位置，很容易移成圖四的位置，只須把牌「5」、「12」、「4」、「3」、「8」順次在「三」、

「四」、「七」、「八」、「十一」、「十二」六個地位中移轉便是了。再把「12」、「4」、「3」三塊牌在「七」、「八」、「十一」、「十二」四個地位中移轉得出圖五所示的形狀。從圖五的形狀，把「12」、「4」、「8」、「5」、「3」五塊牌在「三」、「四」、「七」、「八」、「十一」、「十二」六個地位中一移卽得圖六。又把牌「12」、「5」、「3」在「七」、「八」、「十一」、「十二」四個地位中一移，化成圖七所示的位置。由圖七，只要把牌「3」、「4」、「8」在「三」、「四」、「七」、「八」四個地位中一轉，就可將「3」放在「三」上，「4」放在「四」上了；如此第一行已成標準位置，此後我們就不再去動第一行。其次，「5」和「6」兩塊牌很容易移到「五」、「六」上去，再把「7」、「8」移到「七」、「八」、「十一」、「十二」、「十五」和「十六」六個地位中，於是只須在這六個地位中作相當的移動，就能把「7」、「8」移到「七」、「八」上去，這與移「3」、「4」的方法完全相同。如此，第一、二兩行都已擺成了標準位置。「9」和「13」兩塊牌一定在第三、四兩行的八個地位中，而且這八個地位中一定有一個是空着的，那末照以前把「3」、「4」移到「三」、「四」上去的方法一樣，我們一定可以把「9」和「13」兩塊塊移到「九」

和「十三」的地位去。同樣的法子，可以把「10」和「14」也搬到「十」和「十四」上去。如此，我們還有「11」、「12」、「15」三塊牌和「十一」、「十二」、「十五」、「十六」四個地位，那我們一定可以把「15」先移定在「十五」的地方，剩下的「11」和「12」兩塊牌或許可以移成標準位置，不然，一定可以把「11」移在「十二」上，「12」移在「十一」上。

由此，我們得到第一個結論：任意一種位置，設若不能移成標準位置時，那一定可以移成圖八所示的位置。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	11
13	14	15	

（八 圖）

1	4	7	9
3	5	8	14
15	13	11	10
2	12	6	

（九 圖）

現在我們假定當初擺着的位置如同圖九那樣。那「1」湊巧已經在「一」上，「4」的地位卻不對，應當在牠前面的「2」和「3」都落在牠的後面了，這種小數落在大數後面，

我們叫牠做「倒置。」此例中，「1」沒有倒置，「4」有兩個倒置，「7」有四個倒置，就是「3」、「5」、「2」、「6」四塊牌落在「7」的後面，同樣，「9」有五個倒置，「3」和「5」各有一個倒置，…… 一共起來倒置的總數是：

$$0+2+4+5+1+1+2+6+6+5+3+2+0+1+0=38$$

由這個倒置的總數，我們立刻可以斷定：圖九的形狀，是可能移成標準位置的。

如果原來的位置中，空白是在「十六」的地方，那我們只要看這倒置的總數是偶數還是奇數。設是偶數，那原來的位置，一定能夠化成標準位置；設是奇數，那就一定不可能。諸位可以自己先去試試這話是否果眞靈驗。至於這祕訣的來由，請看下文：

在說明這祕訣以前，我們先想一想：竹牌的移動和倒置的總數有什麼關係？假如竹牌是在某一行中移動，那很明顯地可以知道，倒置數不因之而起變化，他們是「風馬牛不相及」的。假如竹牌是在某列中移動，那就和倒置的總數發生關係了。因爲竹牌在某列中向上或向下移動一步，實在就相當於將這牌跳前或跳後了三位。假設那被這牌跳

過前或跳過後去的三塊牌是A、B、C，移動的牌是X，那我們移動的情形，總離不了下列八種：

(1) X>A,B,C.
(2) X<A,B,C.
(3) X>A,B;X<C.
(4) X>A,C;X<B.
(5) X>B,C;X<A.
(6) X<A,B;X>C.
(7) X<A,C;X>B.
(8) X<B,C;X>A.

在第(1)種情形的時候，假如把X往上移了一步，那就增加了三個新的倒置，因爲A、B、C都比X小，本來X在A、B、C的後面，經一移之後，X跳到A、B、C的前面去了。假如把X往下移了一步，同樣的道理，比原來要減少了三個倒置。

在第(2)種情形，完全與第(1)種情形相彷彿，竹牌在某列中移了一步，倒置的總數或者增加了三個，或者減了三個。

在第(3)種情形之下，若把X移上一步，X跳到A、B、C的前面去了，於是便多出兩

個新的倒置來，因爲X比A、B大；但是同時原來的倒置又減少了一個，因爲C比X大，牠本來在X的前面，現在C卻在X的後面了；所以總起來只增了一個倒置。同理，若把X往下移一步，那便要減少一個倒置。

在第(4)、(5)、(6)、(7)、(8)種情形，全與第(3)種情形一樣，倒置的總數或者增了一個，或者減少了一個。

總括起來，我們得到第二個結論：竹牌在某行中移動，倒置的總數不受影響；竹牌在某列中移動一步，倒置的總數便起了一個奇數的變化。

那空着的地位，我們設想也有一塊牌鋪着，而且可以設想牠是「16」。如此，一塊牌若移到牠鄰近的空白上去，我們可以設想作是這牌和「16」對易。若原來的位置中空白是在「十六」，移動到後來的結果空白仍在「十六」的地位，那不論在行的方向中，或是在列的方向中，我們所設想的「16」與別的牌對調的次數，一定都是偶數。因爲若把「16」向上一換，你必須後來把「16」再向下一調，才能使末了的空白仍回原處。同樣，你若

把「16」向左換了三次;你總得把「16」向右換回三次,才會使結局空白仍在老地方。

所以若是在原來的位置和移動後的位置中,空白都在「十六」處,那不論是在行的方向,或是在列的方向牌所移動的步數,一定都是偶數。

現在若移動前和移動後的位置中,空白都在「十六」的地方,那一定經過了偶數次的列中移動(行的方向的移動我們不管,因為牠與倒置的總數無關。)而列中每移動一步,倒置的總數或者增加了一個奇數,或者減去了一個奇數,所以一共起來,倒置的總數加或減了一個偶數。這理由是因為n個奇數相加,n若是偶數,牠的和一定是個偶數,這話諸位若不能明白,只要回想「兩個奇數相加的和是偶數」的定理,現在n是偶數,n個奇數相加,我們可以先把n個奇數兩個兩個拼成一對2對加起來,而每一對的和都是偶數,又因偶數加偶數的和是偶數,所以總和還是偶數。

由此,我們又得出第三個結論:設若在原來和移動後的兩位置中,空白都在「十六」的地位,那原來的倒置總數之奇偶性和移動後的倒置數之奇偶性相同。這原因也很顯

明，因為在移動中倒置數只起了一個偶數的變化，但是我們知道：

奇數±偶數＝奇數，

偶數±偶數＝偶數．

從這兩個公式，而且我們可以知道：若有甲乙任意兩種位置，牠們的空白都在「十六」的地方而牠們的倒置總數之奇偶性不同，那由甲不能移成乙，由乙也沒法子移成甲。

現在我們拿圖一的標準位置來看，牠的空白是在「十六」處，倒置的總數是0，是一個偶數。再看圖八的位置，空白也在「十六」的地方，倒置的總數是1，是一個奇數。所以由圖八的形狀，無論如何也沒法子移成標準位置，而從標準位置也無論如何不能化成圖八的形狀；因為牠們的奇偶性不同。所以，任意擺了一個位置（空白在「十六」的地方）要是能夠移成標準位置，必須的條件是牠的倒置的總數要是一個偶數。所謂必須的條件，是說若是那隨便擺的位置能夠化成標準位置至少牠的倒置總數該是一個

偶數。

但是，諸位的思想若是精密一點，定要發生這樣一個問題：我們所擺的位置（空白在「十六」處）的倒置總數若是一個偶數，那就一定能夠移成標準位置嗎？是的，這確成一個問題，直到現在我們還沒有討論過。

且再回過頭去細細考察第一個結論：「任意一種位置，設若不能移成標準位置時，那一定可以移成圖八所示的位置。」這話實在還包含有下面的意思：「任意一種位置，設若不能移成圖八所示的位置，那一定可以移成標準位置。」

所以，一個位置的倒置總數若是偶數（空白在「十六」處），那就一定可以移成標準位置。這因了牠的倒置總數是一個偶數，不能化成圖八的形式，故必能化成標準位置。

把以上的話歸納起來，我們得到第四個結論：一個位置（空白在「十六」的地位）若能移成標準位置，牠的倒置總數必是偶數；一個位置（空白在「十六」的地位）的

倒置總數若是偶數，必能化成標準位置。這個結論自然還包含有下面的意思：一個位置（空白在「十六」的地位）若不能移成標準位置，牠的倒置總數必是奇數；一個位置（空白在「十六」處）的倒置總數若是奇數，必不能化爲標準位置。

現在你們要問：這種空白在「十六」處的位置，合標準位置計算在內，一共有多少種？欲求解決這問題，當然不能靠實驗的方法，諸君若習過代數中的「排列」（Permutation），當不難囘答這問題。此處假定諸位對於排列沒有相當的認識，把這問題簡單地解答在下面：

先假想這十五塊牌都放在木盒外面，現在我們任意取一塊牌去放在「一」上，再從其餘十四塊牌中隨便取一塊放在「二」上……如此，在「一」的地位，我們有十五種放法，或「1」、或「2」、……或「14」、或「15」，在「二」的地位，因爲有一塊牌已經放定在「一」上，剩下十四塊牌任你擇一個放到「二」上去，所以有十四種放法。同理，「三」處有十三種放法，「四」處有十二種放法，……輪到「十四」的地位，已經有十三塊牌放定了，只剩

兩塊牌由你選擇，所以只有兩種放法。在「十五」的地位，那就只有一種放法，因爲剩下的只有一塊牌，你只能拿這塊牌去塡「十五」，所以總共這十五塊牌的排法是：

$$15 \times 14 \times 13 \times \cdots\cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

這種從1起諸自然數的連乘積，數學中有一個特別的記號。從1起到n諸自然數連乘的積，簡單作 $\underline{|n}$ 或 $n!$ 諸君在此並可注意這件事實：$n \geqq 2$ 時，$\underline{|n}$ 是一個偶數。這事實簡單得不需要說明，因爲 $n \geqq 2$ 時，$\underline{|n}$ 至少有一個因子是2。現在這種空白在「十六」處的位置一共有 $\underline{|15}$ 種，種數是一個偶數；我們將證明這 $\underline{|15}$ 種位置中，有半數的位置可以化成標準位置（這是合標準位置計算在內），有半數的位置不能化成標準位置。

因了由1到15的十五個自然數的排列次序不同，我們得出不同的位置，因此我們把每種位置可以看作是一種「1、2、3、……14、15的排列」（Permutation）。排列中倒置的總數若是奇數，我們稱他爲「奇排列」，排列中的倒置總數若是偶數，稱爲他「偶排列。」我們容易知道：從1到n的n個自然數的排列共有 $\underline{|n}$ 種，我們還有下面的定理：

n個自然數1、2、3、……n排成的 $|\underline{n}$ 種排列中，偶排列和奇排列各居一半。

當n=2時，這定理的眞確很容易使你相信：總共的排列是 $|\underline{2}=1\times2=2$種，即是1,2和2,1。前者的倒置數是0，所以是一個偶排列；後者的倒置數是1，所以是一個奇排列。

當n=3時，1,2,3;2,3,1;3,1,2 三種排列都是偶排列；1,3,2;2,1,3;3,2,1 三種都是奇排列：而一共的排列就是這樣六種，因爲 $|\underline{3}=1\times2\times3=6$.

可是一般的證明比較就要難得多了，不能把牠寫在此處，諸位現且相信這個不會證明的定理，將來在稍稍高深的數學中，就會學到的。

由這定理，我們知道：所有的 $|\underline{15}$ 種排列中，有半數是偶排列，半數是奇排列。這就是所有 $|\underline{15}$ 種空白在「十六」處的位置中，有半數的位置，其倒置總數是偶數；其餘半數的位置，倒置總數是奇數。

應用第四個結論，我們得出第五個結論：所有空白在「十六」處的位置，一共有 $|\underline{15}$ 種（合標準位置在內）其中有半數的位置可能移成標準位置；其餘半數的位置不能移

成標準位置。

到此，我們的問題才算完全解決。

二三，一，四。北大。

再談「擠來擠去」

樊 熾

不知道你們可曾想到這個問題：我們爲什麼一定要用十五張每邊一寸長的竹牌，鋪在一隻底的每邊長四寸的盒子裏弄這玩意兒？我們假使用八張這樣尺寸的竹牌，放在一隻底的每邊長三寸的盒子裏，不能同樣弄這把戲嗎？我們假使用三張這樣尺寸的竹牌，和一隻底的每邊長二寸的盒子，不也同樣地可以玩這遊戲嗎？是的，只要用 n^2-1 張這樣尺寸的竹牌放在一隻底的每邊長 n 寸的盒子裏，仍舊可以弄這玩意兒——上次我們說的，只是 $n=4$ 時的一個特別情形。

此處，我們先拿 $5^2-1=24$ 張牌來看，這時候的標準位置當然像圖一那樣，標準位置中，竹牌「1」、「2」、……「24」所佔的地位，各以「一」、「二」……「二十四」來表示；空白地位用「二十五」表示。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	

（圖一）

任意擺了一個位置，要是那位置是可以移成標準位置的話，該怎樣移法呢？這個好辦！你只要利用那塊空着的地位來移牌，先設法把第一行移成標準位置，以後就不再去動第一行，再把第二行、第三行也依次移成標準位置，末了再把第四、五行也移成標準位置，這種移法完全和上次所說的一樣，這裏不願意詳細說牠，諸君只要自己去試幾次也就會了。而且，你若試過之後，一定可以知道這事實：一個位置若不能移成標準位置，必定可以移成圖二的位置。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	24	23	

（圖二）

我們要問：怎樣判斷一個位置的可能移成標準位置與否？

假如竹牌是在某一行中移動，那很明顯地可以知道，倒置數不受影響，牠並不因之而起什麼變化。

但是假如竹牌在某一列中移動，那就和倒置的總數發生關係了。竹牌在某列中向上或向下移動一步，實在就相當於將這牌跳前或跳後了5－1

=4位。假想那被這牌跳過前或跳過後去的四張牌是A、B、C、D，移動的牌是X，那末我們移動的情形總不外下面的十六種:

(1) $X>A,B,C,D.$		(2) $X<A,B,C,D.$	
(3) $X>A,B,C;$	$X<D.$	(4) $X>A,B,D;$	$X<C.$
(5) $X>A,C,D;$	$X<B.$	(6) $X>B,C,D;$	$X<A.$
(7) $X>A,B;$	$X<C,D.$	(8) $X>A,C;$	$X<B,D.$
(9) $X>A,D;$	$X<B,C.$	(10) $X>B,C;$	$X<A,D.$
(11) $X>B,D;$	$X<A,C.$	(12) $X>C,D;$	$X<A,B.$
(13) $X>A;$	$X<B,C,D.$	(14) $X>B;$	$X<A,C,D.$
(15) $X>C;$	$X<A,B,D.$	(16) $X>D;$	$X<A,B,C.$

在第(1)種情形，如果把X往上移了一步，本來在A、B、C、D的後面的X，跳到牠們的前面去了；而A、B、C、D都比X小，所以這樣一來便增加了四個倒置，同理，X若往下移一步，倒置的總數少了四個。第(2)種情形與第(1)種情形完全相似。在這兩種情形中，竹牌在某列中移了一步，倒置的總數起了一個偶數的變化。

在第(3)種情形，X往上動一步時，A、B、C、D都跳到X的後面去了；A、B、C都比X

小，所以增加了三個倒置；但D比X大，現在X既從D的後面跳到前面，所以減少了一個倒置。結果是一共加了兩個倒置。你們當不難知道：在第（3）、（4）、（5）、（6）四種情形時，竹牌在列中動了一步，倒置的總數起了一個偶數的變化。

再看（7）、（8）……（11）、（12）這六種情形，有兩塊牌比X大，有兩塊牌比X小，（這是說牌上的數目比X大或小）竹牌往上移一步時，四塊牌原在X的前面的，落到X的後面去了。其中有兩塊比X大的，經此一移減少了兩個倒置，又有兩塊比X小的，經此一移增加了兩個倒置。算起總賬來，倒置的總數不變。倒置的總數不變，就是說倒置的總數加了一個0或者減了一個0。0是偶數，所以倒置的總數仍是起了一個偶數的變化。竹牌若往下移，結果亦同。

在（13）、（14）、（15）、（16）四種情形，有一塊牌比X小，有三塊牌比X大。竹牌往上移一步時，因了那塊比X小的牌，增加了一個倒置；又因了那三塊比X大的牌，減少了三個倒置，所以結果是減少了兩個倒置。這就是倒置的總數起了一個偶數的變化。竹牌若往

下移，也是如此。

這樣看來，不管什麼情形，竹牌在列中移動一步時，倒置的總數總是起了一個偶數的變化。由此可以知道：移動前和移動後的位置中，牠們的倒置總數之奇偶性必定相同。這就是說：一個位置任意移動後其倒置數之奇偶性不變。這事實的原理很簡單，因為

奇數±偶數＝奇數

偶數±偶數＝偶數

所以，兩個位置的倒置數之奇偶性若不同，一定不能用平移的方法從一個位置移成其餘那個。我們已經說過：一個位置若不能移成標準位置，必能移成圖二的位置。這話自然還包含有下面的意思：一個位置若不能移成圖二的位置，一定可能移成標準位置。在圖二所示的位置中，倒置總數是1，是奇數；所以一個位置的倒置數若是偶數，必不能化成圖二的形狀，而必能化成標準位置。反之，一個位置的倒置數若是奇數，必不能化成標準位置，這因為在標準位置中倒置數是0，是一個偶數。

這個結果看來和上次說的相同，可是有一點是不同的。上次說十五張牌的時候，我們的結論是：一個位置（空白在「十六」的地方）若能移成標準位置，牠的倒置總數必是偶數；一個位置（空白在「十六」處）的倒置總數若是偶數，必能化成標準位置。我們現在說二十四張牌的結論是：一個位置（空白不一定在「二十五」的地位；空白可以在任何地位）若能移成標準位置，牠的倒置總數必是偶數；一個位置（空白不一定在「二十五」的地位）的倒置總數若是偶數，必能化成標準位置。

*　　　　*

到此，我們已討論過兩種特別的情形：一種是 4^2-1 張牌，一種是 5^2-1 張牌。現在要來討論一般的情形。

假設有 n^2-1 張牌，牌的每邊還是一寸長，盒子底的每邊長 n 寸。那末，標準位置自然如圖三中所示。

1,	2,	............$n-1$,	n
$n+1$,	$n+2$,	.........$2n-1$,	$2n$
$2n+1$,	$2n+2$,	........$3n-1$,	$3n$
....	....	....	
$(n-1)n+1$,	$(n-1)n+2$,	...n^2-1.	

（圖三）

一個位置若能移成標準位置，移動的方法還是與前無異。還有，一個位置若不能移成標準位置，一定可以化成圖四所示的位置；（在圖四的位置中，除了n^2-2與n^2-1兩張牌的位置互易以外，其餘的牌都在牠們的標準位置。）這事實很容易看出來。

1	$2\cdots\cdots n-2$	$n-1$	n
$n+1$	$n+2\cdots\cdots 2n-2$	$2n-1$	$2n$
$2n+1$	$2n+2\cdots\cdots 3n-2$	$3n-1$	$3n$
⋯⋯	⋯⋯	⋯⋯	
⋯⋯	⋯⋯	⋯⋯	
$(n-1)n+1$	$(n-1)n+2\cdots n^2-1$	n^2-2	

（圖四）

現在又要來看：竹牌的移動，與倒置數有什麼影響。

當然，竹牌若在某行中移動，倒置數無變化。

竹牌X若在某一列中移動一步，那就相當於將這牌X跳前或跳後了$n-1$位。假設在這$n-1$張被X跳過前或跳過後的牌中，有m（$0\leqq m\leqq n-1$，即是m可為0與$n-1$間之任何正整數）張牌比X大，有$n-m-1$張牌比X小；（這自然是說牌上的數目比X大或小！）那末，竹牌在列的方面移動一步時，倒置數所增加或減少的數目是m與$n-m-1$之差，即是

$$|m-(n-m-1)|=|2m-n+1|；$$

此處$|a|$表示實數a的絕對值(Absolute value)a若是正數,$|a|$卽等於a；a若是負數,卽等於$-a$。例如2的絕對值是$|2|=2$,-2的絕對值是$|-2|=2$.

數目$|2m-n-1|$之奇偶性當然與數目$2m-n+1$之奇偶性相同,又因$2m$永遠是個偶數,所以$2m-n+1$之奇偶性與$1-n$之奇偶性相同；$1-n-5, 1-n+2n=1+n$之奇偶性當然亦同,所以:n若是奇數,X在列中移動一步時,倒置數起了一個偶數的變化；n若是偶數,X在列中移動一步時,倒置數起了一個奇數之變化。

話到此處,又要分開兩種情形來看。以下先討論n若是奇數時如何。

* * *

n若是奇數,竹牌在列中移動一步時,倒置數總起一個偶數的變化。由此可知:一個位置任意移動後,牠的倒置數之奇偶性不變。所以甲乙兩個位置的倒置數之奇偶性若不同時,由甲不能平移成乙,由乙也不能平移成甲。我們已經知道:一個位置若不能移成

標準位置，一定可以化成圖四所示的位置。那末，一個位置若不能化成圖四的位置，自然一定可能化成標準位置。圖四所示的位置中，倒置數是1，是奇數，所以：一個位置的倒置總數若是偶數，必不能化成圖四的形狀，但必能平移成標準位置，反過來說：一個位置若能平移成標準位置，其倒置數必是偶數，這是因為標準位置中倒置數是0，是偶數。

這個結論對於一切奇數 n 都能適合，當初我們論二十四張牌的時候，所得結果與此相符。

* * *

n 若是偶數，竹牌在列中移動一步時，倒置數必起一個奇數的變化。

若是原來的位置和移動的位置中，空白都在第 n^2 個地位處；那末，不論在行的方向，或是在列的方向，牌所移動的步數一定都是偶數，這理由很明顯，已在上次那篇講話中說過，此處不再嚕囌了。

現在若移動前和移動後的位置中，空白都在第 n^2 個地位處，那一定經過了偶數次

的列中移動，（行中的移動與倒置數無涉，我們可以不管。）但列中每動一步，倒置的總數便起了一個奇數的變化，所以一共起來，倒置的總數起了一個偶數的變化。這是因為 a 個奇數相加，a 若是偶數，相加的和必是偶數。由此可知：設若在原來和移動後的兩位置中，空白都在第 n_2 個地位處，那原來的倒置數之奇偶性和移動後的倒置數之奇偶性相同。而且我們還可以知道：甲乙兩種位置的空白若都在第 n_2 個地位處，而牠們的倒置數之奇偶性不同，則由甲不能移成乙，由乙也不能移成甲。

我們已經知道：一個位置若不能化成圖四所示的形狀，定可化成標準位置。在圖四所示的位置中，空白在第 n_2 個地位處，倒置數是1，是奇數。所以一個位置（空白在第 n_2 個地位上）的倒置數若是偶數，必不能化成圖四所示的形狀，而必能化成標準位置。反過來，一個位置（空白在第 n_2 個地位上）若能化成標準位置，其倒置數必是偶數；這是因為在標準位置中空白也在第 n_2 個地位處，而倒置數是0，是偶數。

這個結論對於一切偶數 n 都適合。上次講十五張牌的時候，所得結果與此符合。

至此，我們已把上次的問題推廣到一般的情形。不過，你們的思想要是周密一點的話，定會發生下面的問題：盒底爲什爲定要是正方形？用 $m \cdot n-1$ 張每邊一寸長的竹牌，再用一隻木盒，牠的底的一邊長 m 寸，另一邊長 n 寸；把牌鋪在盒子底上，不也是有一塊竹牌大的地位空着嗎？既有這塊地位空着，我們不也可以把牌在盒底的平面中擠來擠去地平移嗎？是的，這樣我們仍舊可以玩那套老把戲。那末，我們又要問了：在這時候，我們怎樣判斷一個位置的可能移成標準位置與否呢？諸君，這個問題的解答不難，祕訣還是在那倒置數的奇偶性上，你們且自己當做一個練習去想想吧！想的時候，可以分做兩種情形着手：

(1) m 是奇數；

(2) m 是偶數。

此處 m 是竹牌鋪在盒底上縱列的列數。

二十三年八月於北京大學。

儲蓄與賭博

劉薰宇

編輯先生：

受了廣告的誘惑，我在前年四月中加入了萬國儲蓄會爲全會會員，每月繳洋十二元，即按月有得獎五萬元的希望，十五年後且可領回本洋二千元。「既符儲蓄之本旨，又有鉅大之希望，」（廣告原文）計莫善於斯，當時我非常高興。後來有一位朋友告訴我說，這種儲蓄是非常喫虧的，照銀行中零存整取的辦法，滿十五年，可有一分左右的週息。若每月儲洋十二元，則十五年後本利可得洋四千元以上，所以我頗想到本年三月繳足兩年以後，實行退會。但退會時照章程只能領回洋九十七元七角五分（一百零三元九五折），與實繳之會本二百八十八元（利息不計，）相差一百九十元零二角五分之鉅，又覺喫虧太甚。現在我要請求先生代爲解決的，就是我還是繼續繳下去保持得獎的希望合算呢，還是放棄了這一百九十元而趕緊照零存整取的辦法存到銀行裏去合算呢？

萬國儲蓄會的魔力太大了，據最近的報告，已有全會十一萬個以上，可見入會的人不下二三十萬（因爲

一全會可以有四個人）像這樣普遍的問題，我覺得頗有公開的必要，故敢來函質疑，敬請解答為感。……（下略）

讀者沙曾績於杭州。 二月二十八日。

萬國儲蓄會的儲款辦法，只是利用人的賭博心理而暗中搾取。試就牠的規定來計算儲款人的損失，就可以看出來了。

全會每月十二元，照銀行中零存整取的辦法，繼續到十五年之久，年息確有一分左右，我們就依一分計算，那末月息便是一百二十分之一，比 0.008 還多，就照每月 0.008 的複利計算吧。依計算複利的公式：

$$本利和=本金\times(1+利率)^{時期}$$

現在本金每月是十二元，時間十五年，第一個月的存款的時期就是一百八十個月，所以牠到期的本利和（設為 P_1）應當是：

$$P_1=12元\times1.008^{180}$$

同樣地，各月存款到期的本利和，設為 $P_2, P_3, \ldots\ldots P_{180}$，依次是：

$$P_2=12\text{元}\times 1.008^{179}$$

$$P_3=12\text{元}\times 1.008^{178}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{178}=12\text{元}\times 1.008^{3}$$

$$P_{179}=12\text{元}\times 1.008^{2}$$

$$P_{180}=12\text{元}\times 1.008$$

因此，十五年的總本利和設是P,就應當是：

$$P=P_{180}+P_{179}+P_{178}+\cdots\cdots+P_3+P_2+P_1$$

$$=12\text{元}\times 1.008+12\text{元}\times 1.008^2+12\text{元}\times 1008^3+\cdots\cdots$$

$$+12\text{元}\times 1.008^{178}+12\text{元}\times 1.008^{179}+12\text{元}\times 1.008^{180}.$$

就上式看去，每一項和牠的後一項的比都是 1.008, 所以全體是一個幾何級數，幾何級數的總和的公式是：

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

在這裏 $a=12$元$\times 1.008$, $r=1.008$, $n=180$, 所以,

$$S=\frac{12\text{元}\times 1.008\times(1.008^{180}-1)}{1.008-1}$$

$$=\frac{12\text{元}\times 1.008\times(1.008^{180}-1)}{.008}$$

$$=1512\text{元}\times(1.008^{180}-1)$$

$$=1512\text{元}\times 3.1956$$

$$=4831\text{元}7\text{角}5\text{分}$$

照萬國儲蓄會的規定到期不過還本洋二千元，相差就有二千八百三十一元七角五分。這便是儲款人的損失。牠的所以誘惑人的是獎金。獎金從那兒來的呢？是全體儲款人所儲的款的二成半。所以一個全會每月就有三元提充了獎金，將「你的骨頭熬湯你喫，」牠眞是惠而不費了。在儲款人，自然可以當成賭博看，每月用洋三元去賭五萬元，這

不能不算好買賣。然而依牠的本年二月十五的會報上說，總共已有十一萬六千八百七十九全會，特獎五萬元不過一個；每人每月得到五萬元的希望只有十一萬六千八百七十九分之一。這是何等的渺茫！

在儲蓄會方面，就是公正無弊，照扣去了二成半作獎金，以及到期還本二千元計算，所得進的是：

$$4831.75元 \times \frac{3}{4} - 2000元 = 3623.81元 - 2000元$$
$$= 1623.81元$$

所以，十五年滿，每一全會就恭送萬國儲蓄會一千六百二十三元八角一分，這不是一所世界上最大的聚賭抽頭的機關麼？

總之，一般人的所以樂於去存儲，完全是想得到那五萬元的特獎，所以只是一種賭博。

上面所說的是一般的損失，現在再就尊問來討論。你本年三月以後退會，已繳二百

八十八元只得還九十七元七角五分，相差固然有一百九十元二角五。但這喫虧並不甚鉅。數字是不會騙人的，若爲一百九十元二角五看得見的損失不忍捨棄則十五年中看不見的損失是二千八百三十一元七角五分。還有一點，單就這次取囘的九十七元七角五分說，依年息一分，存十三年計算，到期的本利和是：

$$97.75\text{元}\times(1+0.1)^{13}=97.75\text{元}\times1.1^{13}$$

$$=337.43\text{元}$$

這樣看來，眼前雖然損失了一百九十元零二角五分，到十五年滿期實際還賺進四十九元四角三分（$337.43\text{元}-288\text{元}=49.43\text{元}$），喫虧在那裏？

數位變換的一個小問題

劉薰宇

編輯先生：

我有一個算學上的疑問。這疑問，我知其然而不知其所以然，已經許多時日了。現在我要請教於先生的，就是牠的「所以然。」隨便一個數目如 976，（十位、百位、千位、……均可）減去這數目百、十、單位的轉換數如 679，769（但轉換數，以不大於原數 976 為限）；此所得的差 297，和 207，裏任憑告訴我該差數目字中的任二個數字，如 2 或 9，0 或 7，我就可以斷定那差的別一數字是 7 和 2。這斷定的法子是從 9 或 9 的倍數，將那告我知道的數目之和減下去。

第一式　9之2倍減2和9＝18－(2＋9)＝7

第二式　9減去零和7＝9－7＝2

要是告訴我的數目數字之和為零或 9 時，那這別一數非 0 即 9 了

這是什麼理由呢？

廣東梅縣東山中學校

林馘盛上。 二三，二十五日。

這個問題很有趣味，雖然很簡單。

第一，我們所用的記數法是十進的，因此某一位數移進一位就是變大十倍，移進兩位就是變大一百倍，移進三位就是變大一千倍；一般地說移進 n 位就是變大 10^n 倍。反過來說，往後退一位變小十倍，退兩位變小一百倍，退三位變小一千倍，退 n 位變小 10^n 倍。

第二，所以某一位數和牠的變位數的差總是 9 的倍數，因爲

$$10-1=9,\ 100-1=99,\ 1000-1=999\ \cdots\cdots$$

$$10^n-1=999\cdots99\ \text{（一共 } n \text{ 位）}$$

$$100-10=90,\ 1000-10=990,\ 1000-100=900,\ \cdots\cdots$$

$$10^n-10^m=999\cdots\cdots000\ \text{（一共 } n-m \text{ 個 9, } m \text{ 個 0）}$$

第三，就每一位數說是這樣，而一個數我們可看成是牠的各位數字的十的倍數相加得來的，所以牠和數字轉位所成的數的差，就是各數字的9的倍數的和，本身當然是9的倍數。就來信所舉例說，便是這樣：

$$976=100\times9+10\times7+1\times6$$

$$=10^2\times9+10\times7+1\times6$$

$$679=10^2\times6+10\times7+1\times9$$

$$769=10^2\times7+10\times6+1\times9$$

$$\therefore\quad 976-679=(10^2\times9+10\times7+1\times6)-(10^2\times6+10\times7+1\times9)$$

$$=(10^2-1)\times9+(10-10)\times7-(10^2-1)\times6$$

$=9$的倍數$+9$的倍數-9的倍數$=9$的倍數

$$976-769=(10^2\times9+10\times7+1\times6)-(10^2\times7-10\times6+1\times9)$$

$$=(10^2-1)\times9-(10^2-10)\times7-(10-1)\times6$$

$=9$的倍數-9的倍數-9的倍數$=9$的倍數

第四，一個數若是「9的倍數，」則牠的各位數字的和也是「9的倍數，」例如 297 的2,9,7的和為 18;207的2,0,7的和為 9.

第五，依第三差數是9倍的數，依第四，所以這差數的各數字的和必是「9的倍數。」因而就三位數說，知道牠的兩個數字，從9的倍數（9就是9的一倍）將牠們的和減去，所餘的自然是另一個數字了。因為若$a+b+c=9$的倍數，則$a=9$的倍數$-(b+c)$.

數學的魔術

許蒓舫

「戲法人人會變，各自巧妙不同」這是一句很普通的諺話。雖如此，可是戳穿了總是一錢都不値的。惟有數學家的魔術，卻愈戳得穿，愈可以顯出牠的價値。這話，一定有人要懷疑，以爲數學家怎麼會魔術呢？其實是不用懷疑的，因爲數學家的確是一個大魔術家，他運用他的法寶——腦筋——把幾個數字變化得奇幻莫測，但終究還是戳穿了給大家看，所以大家雖稱牠做數學，其實也可以叫做「戳穿了還是有價値的魔術。」

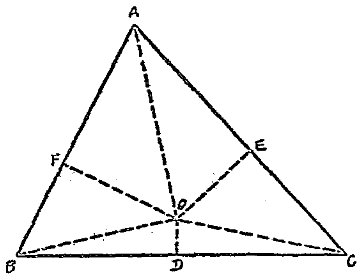
現在我來變一套不容易戳穿的魔術給諸位看。但是少不了也要學魔術家的通例，在未演大套魔術之前，先要來兩套小戲法，拉拉場子。下面就是一套代數的小戲法：

這裏有一個大數a同一個小數b，要把牠們變做一樣大方法是這樣：假使a, b的差是c，那末$a=b+c$，用$(a-b)$乘兩邊得$a^2-ab=ab+ac-b^2-bc$，移項得a^2-ab

$-ac=ab-b^2-bc$，分解因式得$a(a-b-c)=b(a-b-c)$，用$(a-b-c)$除兩邊得$a=b$。不是a同b變做一樣大了嗎？這裏面有一個小小的過門，我可以戳穿給諸位看諸位可還記得有一條公理：「等式的兩邊用不等於0的同數除了以後，仍是等式。」既然$a=b+c$，當然$a-b-c=0$，用$a-b-c$除等式的兩邊，本來是不合理的，無怪$a>b$要變做$a=b$了。

下面再來一套幾何的小戲法：

這裏有一隻不等邊三角形ABC，要把牠變做等腰三角形。方法是這樣：引∠A的平分線同BC的垂直平分線，兩直線相交於O，從O引AC, AB的垂線OE, OF，再連結OB, OC。



因　$\angle ODB=\angle ODC$,　$BD=CD$,　$OD=OD$,

∴　$\triangle ODB\cong\triangle ODC$,　$OB=OC$.

又 $\angle FAO=\angle EAO$, $\angle AFO=\angle AEO$, $AO=AO$,

$\therefore$ $\triangle FAO\cong\triangle EAO$, $FO=EO$, $AF=AE$.

又因 $\angle BFO=CEO$,

$\therefore$ $\triangle BFO\cong\triangle CEO$, $BF=CE$.

$\therefore$ $AF+BF=AE+CE$, 就是 $AB=AC$.

不是△ABC變做了等腰三角形了嗎？這裏面的過門是什麼呢？原來作的圖形根本錯誤了。因爲三角形的頂角平分線同底邊的垂直分平線，交點不在形內而在形外。現在當作牠們形內相交，無怪要得到這荒謬的結論了。

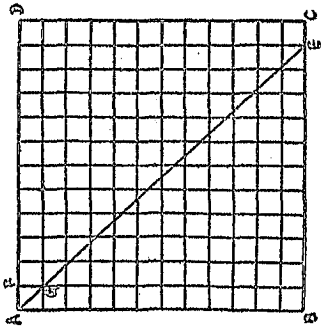
小戲法變過，下面就是大套魔術。在未變之前，先講一個杜撰的故事：

從前有一個人，到銀樓裏去買一張金葉，是正方形的，每邊長十二寸，面積當然是一百四十四方寸。拿回去之後，把牠剪開來，剪了兩刀，分成三塊，再拼成一個長方形。用尺一量，牠的長是十三寸，闊是十一寸，算一算牠的面積，已變做了一百四十三方寸。還有一方

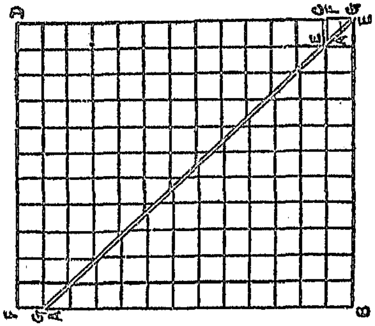
寸不知到那裏去了。當時這個人忿怒得了不得，以為店中人一定欺騙了他。立刻趕到銀樓裏去辦交涉，那銀樓中的人也弄得莫明其妙。沒有辦法，只好換一張金葉給他。這是一個長方形的，長十六寸，闊九寸，面積也是一百四十四方寸這個人心裏當然很滿意。拿了回去，再用剪刀剪了三刀，分成四塊，拼起來得到兩個長方形，大的一個長十三寸，闊九寸，面積是一百十七方寸；小的一個長七寸，闊四寸，面積是二十八方寸。合起來一算，卻又變做了一百四十五方寸，無端的竟會多出一方寸。於是這個人又很喜歡，以為店中人一定錯給他了。

這個故事不是很奇怪嗎？諸位倘然要知道牠的究竟，那末，我不妨來變給你們看。第一次只要把圖一的正方形 ABCD 照 AE,FG 兩條直線剪了兩刀，拼成圖二的形狀，就是。

粗看的確是很奇怪，本來是 $12\times12=144$ 方寸的面積，忽而變為 $13\times11=143$ 方寸，這一方寸究竟到那裏去了呢？其實仔細一研究，知道 FD 雖然不錯，是十一寸，而 FG



圖一



圖二

卻比一寸略多了一些可以應用相似形比例的定理據他算出來。

因　$\angle AFG=\angle ABE$,　$\angle FAG=\angle AEB$,　$\angle AGF=\angle EAB$,

∴　$\triangle AFG \backsim \triangle ABE$,　$BE:AB=AF:FG$.

但　$BE=11$寸,　$AB=12$寸,　$AF=1$寸,

$$\therefore\quad 11:12=1:FG,\qquad FG=\frac{12\times 1}{11}=1\frac{1}{11}\text{寸},$$

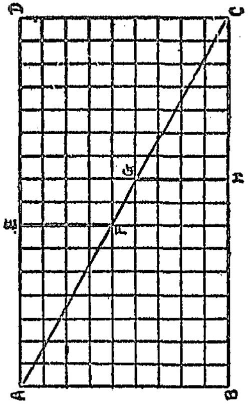
$$\text{於是}\quad DC+FG=12+1\frac{1}{11}=13\frac{1}{11}\text{寸},$$

$$\therefore\quad \text{五邊形 } FGECD+\triangle ABE+\triangle AFG=13\frac{1}{11}\times 11=144\text{方寸。}$$

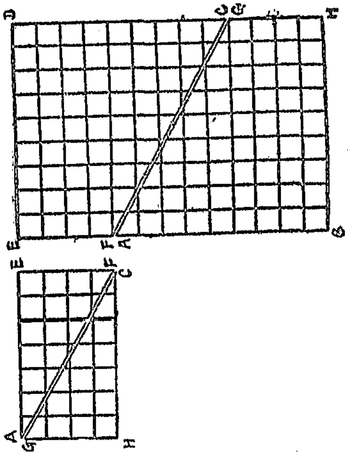
這不是一絲一毫也沒有缺少嗎?可見那個買金葉的人,太會吹毛求疵,竟去冤屈了銀樓中的人。

第二次再據圖三的長方形ABCD照 AC,EF,GH三條直線剪了三刀,拼成圖四的形狀就是。

據他算一算,圖三的面積是 $16\times 9=144$ 方寸,圖四的面積已變成了$7\times 4+13\times 9=145$方寸,這一方寸是怎樣不勞而獲的呢?仔細一研究,知道 AE 同 ED 的長是七寸同九寸,一點也不錯;但是 EF 同 GH 的長,卻都比四寸略少了一些。也可以用相似形比例來證明。



圖三



圖四

因 $\angle ABC = \angle GHC$, $\angle CAB = \angle CGH$, $\angle ACB = \angle GCH$

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle GHC$, $BC : AB = CH : GH$.

但 $BC = 16$寸, $AB = 9$寸, $CH = 7$寸,

$\therefore$ $16:9=7:GH$, $GH=\frac{9\times 7}{16}=3\frac{15}{16}$寸， 仿此 $EF=3\frac{15}{16}$寸，

於是 $\triangle AEF+\triangle GHC=7\times 3\frac{15}{16}=27\frac{9}{16}$方寸。

又因 $EF+AB=3\frac{15}{16}+9=12\frac{15}{16}$寸，

$\therefore$ 四邊形EFCD＋四邊形 ABHG$=9\times 12\frac{15}{16}=116\frac{7}{16}$方寸.

$\therefore$ 全面積$=27\frac{9}{16}+116\frac{7}{16}=144$方寸.

不又是一絲一毫沒有增多嗎?可見那買金葉的人，太自作聰明，竟是空歡喜了一場。

數學的魔術表演完了，最後還要向諸位表明一番。就是這篇稿子，請諸位不要把他當作遊戲的文字看。要知道學數學的人，時常會遇到這種因一時疏忽而得到的畸形的結果。這時候我們應該用沉着的頭腦，精密的思想去應付牠。藉此發見牠的特殊原因，揭破牠的祕奧之處，這樣才好算得了研究數學的三昧，才能夠顯出研究數學的精神。同時

還希望學習初等數學的人，注意下列的二點：

（一）當用含有文字的代數式來乘牠式或除牠式的時候，必先研究這代數式是否等於0，假使是0，就不能用牠來乘或除。

（二）當作幾何圖形時，應該作得準確，而且普遍。——譬如題目中假設的是任何三角形，而畫了一個特殊的直角三角形，就是不普遍。——否則一定會因誤會而發生畸形的結論。

兩種問題

樊畿

我自己在中學校念書的時候，我們那數學教員是一個很滑稽的人，他常弄些故事、笑話夾在教材裏講，使大家祇覺得數學是一樣很有趣的玩意兒。記得是初進中學的那年，第一年的數學是算術，有次講到四則的龜鶴問題，那題的意思是說：

「龜鶴同籠，共××頭，共有足××隻。問龜鶴各幾頭？」

我們那老師就用他鄉間的土話背了另外一道題給我們聽：

「一百饅頭一百和尚喫，
大和尚每人喫兩個，
小和尚兩人分一個，
剩下半個餵狗喫，

問你大小和尙多少個？」

他用那鄉間的土話，唱山歌似地背這題時，全堂的人都哄然大笑了。他說：「這是我們鄉間盡人皆知的一道題，種田的長工，放牛的孩子，每當空下來的時候，常拿這題來窘人的。其實，這也就是龜鶴問題，骨子裏是一樣的東西！」

那時，我立刻就想到小時候外祖母也曾告訴過我一道相似的難題，爲了那題我曾經想了整整的一個下午，湊來湊去還是沒有湊出來。所以當時我就把那題說給老師聽：

「一百銅錢買一百尊佛（泥菩薩），
韋馱三文錢一尊，
觀音七文錢一尊，
羅漢一文錢七尊，
問你每種買幾尊？」

我問老師這道龜鶴問題應當怎樣解，老師卻搖頭說：「不，這並不是龜鶴問題，」但

是，爲什麼這不是龜鶴問題，他又沒有明白告訴我。到後來，讀到算術的混合比例，老師把我這題反又提起來了，他說：「這是混合比例的題」於是，我那久懸心頭的難題，才得了解決。隔了一年，在代數中念到無定方程式，老師又提起我這道題來了，他說：「還可以用無定方程式來解」如此，對於這道向來視作極難極難的難題，我已學會了兩種解法；那時候我快樂得很，只恨外祖母已經去世，不然，我不是可以到她老人家面前去顯顯本領嗎？

到如今，我常常會想起這件故事，想到那時候得意洋洋的神情，頗覺可笑。其實，那道買泥菩薩的問題，爲什麼不是龜鶴問題，我那時始終沒有清楚。

讀者們，你們看來，這買泥菩薩的問題和那龜鶴問題，骨子裏是一樣的嗎？驟然看去，似乎骨子裏是一樣的東西。所謂「韋馱」、「觀音」、「羅漢」，不和龜鶴相當嗎？「一百尊佛」不是實在就和龜鶴的總數相當嗎？「一百銅錢」和龜鶴的足的總數不也是相當嗎？所不同的，籠裏面不祇關了兩種動物，而是三種，而且這三種動物中有一種動物是三隻脚

的，有一種是七隻脚的，還有一種動物是怪獸，七隻動物才公有一隻脚，可是，諸君若是相信這個問題便是龜鶴問題的變相，那就錯了，和我小時候犯的毛病一樣。

諸位大概都習過代數，一次方程式應用問題的解法，想來定是諸位的拿手好戲了。好，現在我們就用一次方程式來解決這兩道題，先解和尚喫饅頭的問題。

照例，首先用 x 來代表一個未知數，此處，我們假定

$x =$ 大和尚數，

於是 $100-x =$ 小和尚數。

因爲大和尚每人要喫兩個，小和尚兩人分喫一個，所以

$2x =$ 大和尚們所喫饅頭數，

$\frac{100-x}{2} =$ 小和尚們所喫饅頭數。

剩下的半個既然餵了狗喫，那末和尚們實在祇喫了九十九個半。諸位假若一粗心，算做和尚們喫了一百個饅頭，那豈不是寃枉了和尚們？於是我們有方程式：

$$2x+\frac{100-x}{2}=100-\frac{x}{2},$$

由此得

$$x=33,\quad 100-x=67.$$

所以我們知道大和尚是三十三人，小和尚是六十七人。

和尚喫饅頭的問題既經解決，我們接下去就要來解決買泥菩薩的問題。開始時照例要用 x 來表示一個未知數，我們且說：

x＝韋馱數。

那末，觀音和羅漢的數目是什麼呢？這可沒法子單用 x 和佛的總數 100 來表示了。諸君想已習過一次聯立方程式，定會想到再用

y＝觀音數。

這樣一來，就有

100－x－y＝羅漢數。

這裏既有x和y兩個未知數，當然要找出兩個一次方程式來，才能照一次聯立方程式的方法來解，諸位當從題意中去找方程式，因爲

$$3x = \text{買 }x\text{ 個韋䭾所化的錢},$$

$$7y = \text{買 }y\text{ 個觀音所化的錢},$$

$$\frac{100-x-y}{7} = \text{買}(100-x-y)\text{個羅漢所化的錢},$$

而一共是化了一百銅錢，所以

$$3x+7y+\frac{100-x-y}{7}=100,$$

化簡得 $5x+12y=150$ ……………………(1)

這是一個方程式，可是第二個方程式卻再也找不出來了。諸君或者會說：因爲一共買了一百個佛，我們有這方程式

$$x+y+(100-x-y)=100.$$

但是，那並不是方程式化簡一下便得出

$$100=100,$$

這是一個恆等式，毫沒用處的。如此，有兩個未知數，單有一個方程式，怎麼解呢？大概是此路不通吧？我們且換條路走，試用x、y、z三個未知數，令

x=韋馱數，y=觀音數，z=羅漢數。

我們再去試找三個一次方程式，可是又糟糕，找來找去祇能找到兩個方程式：

$$x+y+z=100 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$3x+7y+\frac{z}{7}=100 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此路又不通，怎麼辦呢？

其實，題意所給的條件實在是太少，你用兩個未知數x、y也好，你用三個未知數x、y、z也好，方程式的個數總得比未知數的個數少一個。但是，在普通一次方程式中是一

個方程式包含一個未知數，在一次聯立方程式中方程式的個數和未知數的個數也是相等的，現在碰着這種方程式的個數比未知數的個數少的題目，怎樣解答呢？

方程式的個數比未知數的個數少的方程，在代數中有專門的名詞叫做無定方程(Indeterminate Equations)，現在我們拿以前遇到的（1）來看，仔細一想，要解這方程式實在再容易沒有了。先任意令 x 等於一定的值，譬如說 $x=0$，再代入（1）中，就剔去了 x，只含 y 了，再解 y，得

$$y=\frac{150-5\times 0}{12}=\frac{25}{2},$$

所以 $x=0, y=\frac{25}{2}$ 是一個解答，同樣，$x,y=10,\frac{25}{3};\ 6,10;\ -6,15;\ 30,0;$ 等都能滿足原來的方程(1)。所以，無定方程有無窮多的解答，因爲你隨意定下 x 的值來代入方程中解出相應的 y 的值，就得到一組解答。同樣，那兩個聯立方程式（2）、（3）有三個未知數，是一組無定方程組，也有無窮多的解答。由此，諸君當可明白這名字「無定方程式」

的意義了！

這樣說來，我們這個問題，用一百銅錢買一百個佛的方法，不是有無數種嗎？我們再看看(1)的這些解答，譬如第一組解答是

$$x=0,\ y=\frac{25}{2};$$

這就是說：韋馱是0個，觀音是 $\frac{25}{2}$ 個。諸君一看，就可以知道這話好笑，不近情理，觀音的數目自然是一個整數，決沒有什麼半個的，所以這組解答沒有意義。第三組解答中 x 和 y 都是正整數：

$$x=6,\ y=10;$$

這就有意義了：韋馱是6個，觀音是10個，那末羅漢自然是 $100-6-10=84$ 個了，第四組解答是

$$x=-6,\ y=15;$$

當然也沒有意義，x原是表示韋馱的個數，現在說負6個韋馱，什麼意義？如此看來，(1)的解答雖有無數，我們所採取的卻僅是限於x與y都是正整數的；這樣一來，我們用一百銅錢買一百個佛的方法，自然沒有無數種了。

所以，無定方程式的解答雖有無數，它的正整數解答卻往往是有限的，而且也有無定方程沒有正整數解的。例如 $2x+3y=1$，諸位對於這個方程能找得出一組正整數的解答嗎？但是，也有無定方程式它的正整數解是無窮多的，如 $x-y=1$，諸君一望而知這方程有無數的正整數解。不過我們平常在應用問題中所遇着的無定方程，大部祇有有限數的正整數解。下面就論無定方程的正整數解。

* * *

例如有方程式

$$ax+by=c\text{……………………}(4)$$

此處的a、b、c都假定是整數，但不限是正整數。設若a與b有公因子d，而d不是c的

因子，那末（4）當然沒有整數的解答。這理非常淺顯，因爲如果（4）有一組整數解答$x=x_1$，$y=y_1$，那末$ax_1+by_1=c$，而且ax_1+by_1中有一個因子d，於是d必須也是c的因子，這和假設矛盾，所以（4）不能有整數解，當然在這情形之下，（4）也不能有正整數解，所以我們有定理：

定理一　設若a、b有公因子d，而d不是c的因子，則（4）沒有正整數解而且也沒有整數解。

現在，我們再假定（4）有整數解。如果a和b不是互質，它們的最大公因子是e，那末，因了（4）有整數解，由定理一，e也必須是c的因子，所以a、b、c的最大公因子也是e，我們可把方程（4）的兩端各以e一除，便得

$$\frac{a}{e}x+\frac{b}{e}y=\frac{c}{e},$$

這裏，$\frac{a}{e}$，$\frac{b}{e}$，$\frac{c}{e}$三個係數仍都是整數，可是$\frac{a}{e}$和$\frac{b}{e}$之間卻沒有公因子了，它們

倆是互質的。由此，我們已證明了下面的定理：

定理二：設若方程式（4）有整數解，而a和b不是互質，則方程（4）一定可以化作

$$a'x+b'y=c'$$

的形式，此處a'、b'、c'都是整數，而a'和b'互質。

在此，爲了證明第三個定理，我們要引用一個關於整數性質的定理「對於任何二互質數a、b一定有滿足方程$ap+bq=1$的兩個整數p、q存在。」要證p、q的存在，我們只須舉實例來看有了a、b如何去求p、q？我們取 $a=325$, $b=116$ a和b既是互質，a、b的最大公因子自然是1。所以我們將a、b作輾轉相除法時，最後的餘數必定是1，因爲我們知道：輾轉相除法中所得的最後的餘數便是a和b的最大公因子。諸位試作一番輾轉相除法：

```
116 | 325 | 2
    | 232
    --------
 r1 = 93 | 116 | 1
         |  93
         --------
     r2 = 23 | 93 | 4
             | 92
             ------
          r3 = 1
```

由此，我們有方程式：

$325=2\times116+93$，或 $93=325-2\times116$；

$116=1\times93+23$，或 $23=116-1\times93$；

$93=4\times23+1$，或 $1=93-4\times23$；

$$\therefore\quad 1=93-4\times 23$$
$$=93-4\times\{116-1\times 93\}$$
$$=5\times 93-4\times 116$$
$$=5\times\{325-2\times 116\}-4\times 116$$
$$=5\times 325-14\times 116.$$
$$\therefore\quad 5\times 325+(-14)\times 116=1.$$

從這例子諸君當可知道找 p、q 的方法，而且那定理也就可算是證明了。

在方程(4)中，a 和 b 假若是互質的話，那根據我們剛才證明的定理，一定有 p、q 兩個整數存在，它們能滿足方程

$$ap+bq=1,$$

那末，$p\cdot c$ 和 $q\cdot c$ 自然能滿足方程

$$a(p\cdot c)+b(q\cdot c)=c.$$

這就是說：$x=p\cdot c, y=q\cdot c$ 是（4）的整數解，於是我們有

定理三：方程（4）中的 a、b 若為互質，則（4）必有整數解。

諸位所當注意的定理三中祇說（4）有整數解，並不曾說（4）一定有正整數解。譬如方程式

$$2x+3y=1$$

中，2和3是互質，它必定有整數解，如 $x,y=2,-1;\ -4,3;\ 5,-3$ 等都是。可是，它決沒有正整數解。

我們還有下面的定理：

定理四：設若 $x=x', y=y'$ 是方程式（4）的一組整數解，則凡數之作形狀 $x=x'+bt, y=y'-at$（t為任何整數）者都是（4）的整數解。

這定理的證明很是容易。既然 $x=x', y=y'$ 是原方程的一組整數解，必有

$$ax'+by'=c,$$

$$ax'+abt+by'-bat=c,$$

$$\therefore\ a(x'+bt)+b(y'-at)=c.$$

最後的方程的意思就是說 $x=x'+bt$, $y=y'-at$ 是原方程的解答，又因 a、b、x'、y'、t 都是整數，所以是原方程的整數解。

反過來，我們有

定理五：假如 a、b 互質，且 $x=x'$, $y=y'$ 是(4)的一組整數解，則凡(4)的整數解，都能寫作形狀 $x=x'+bt$, $y=y'-at$ (t 爲一整數)。

欲證定理五，我們假定 $x=x_1$, $y=y_1$ 是(4)的任意一組整數解，於是我們有

$$ax'+by'=c,\quad ax_1+by_1=c,$$

把這兩式相減，得

$$b(y_1-y')=-a(x_1-x')\cdots\cdots\cdots(5)$$

所以 b 是乘積 $a\cdot(x_1-x')$ 的因子，但 b 與 a 是互質的，故 b 必須是 (x_1-x') 的因子，可

令

$$x_1 - x' = bt'，或\ x_1 = x' + bt'，\qquad y_1 = y' - at'$$

此處t'是一整數。再把此x_1的值代入(5)中化簡後得

如此，我們的定理五就已證明。

由定理三，a、b若是互質，方程(4)至少有一組整數解；再由定理四，(4)既有一組整數解，必有無數整數解，所以我們有

定理六：(4)中a與b若爲互質，(4)之整數解無窮。

以上這些定理都祇論無定方程的整數解，關於它的正整數解，從定理三、四、五我們很容易知道有下面的定理：

定理七：方程(4)中a、b若互質而異號，(4)的正整數解無窮；a與b若互質而同號，(4)的正整數解或者有限組，或者沒有。

我們已經講了一大批定理，讀者們或許要覺得太枯燥吧？好，我們不再談這些定理，

下面開始講無定方程式的解法，而且我們不願再用這些 a、b、c 來講，我們僅用數字的例子來說明。

* * *

例如已給方程 $7x+11y=47$，

則 $$x=\frac{47-11y}{7}=6-y+\frac{5-4y}{7}$$

這就是拿 7 除 $(47-11y)$ 得商 $(6-y)$，餘數是如 $(5-4y)$。如 x、y 都是整數，$\frac{5-4y}{7}$ 也必須是整數，我們在此用 z 表他，於是

$$z=\frac{5-4y}{7}，即\ 7z=5-4y，或\ 4y+7z=5.$$

此中 y 與 z 的係數已比原方程中的係數小了。仿前再以 4 除：

$$y=\frac{5-7z}{4}=1-z+\frac{1-3z}{4}=1-z+u,$$

此處u必是一個整數。由

$$u=\frac{1-3z}{4},$$

得 $$3z+4u=1,\quad z=\frac{1-4u}{3}=-u+\frac{1-u}{3},$$

若令 $u=1$，則 $z=-1$，因而 $y=1-z+u=3$, $x=6-y+z=2$ 故 $x=2, y=3$ 是原方程的一組整數解，方程的一組整數解既經求得，其餘諸解自然不難求得，因由定理四、五，凡數之作 $x=2+11t, y=3-7t$（t 爲整數）形式者都是原方程的整數解。若限定正整數解，那只有 $t=0$ 時纔可，所以 $x=0, y=3$ 是本題的惟一正整數解。

這例所用的方法，稱爲歐拉氏法(Euler's method)。此法先由所與方程得一係數較小的方程，由此再得一更簡單的方程，直做到一個極簡單的方程，於是一望而知當如何可使未知數是一個整數，便得一組整數解。

由上例我們可知：解無定方程式的時候，祇要想法子找出一組整數解來，其餘的就

容易了。至於找這組整數解，我們也可利用輾轉相除法，現在再用例來說明：

假設所與方程是 $5x+12y=2$，

x、y 的係數 5、12 互質，作輾轉相除時，最後的餘數必是 1。

$$\begin{array}{r|r|r|l} 5 & 12 & 2 & \\ & 10 & & \\ \hline & 2 & 5 & 2 \\ & & 4 & \\ \hline & & 1 & \end{array}$$

由此 $12=2\times5+2$，或 $2=12-2\times5$，

$5=2\times2+1$，或 $1=5-2\times2$.

$\therefore\ 1=5-2\times2=5-2\times(12-2\times5)$

$=5\times5-2\times12$.

$\therefore\ 1=5\times5+(-2)\times12$.

所以 $x=5,\ y=-2$ 必能滿足方程

$$5x+12y=1.$$

故 $x=5\times2=10,\ y=-2\times2=-4$ 必是原方程的一組整數解。於是，在

$$x=10+12t,\ y=-4-5t$$

中若令 t 一一盡取所有整數值，則原方程的一切整數解都可求得。x 若須正整數，t 必須適合條件 $t\geqq0$；y 若又須正整數，t 又須適合條件 $t\leqq-1$。但是 t 決不能同時適合這兩個條件，所以本題沒有正整數解。

解這種無定方程式，也有用連分數 (Continued fraction) 的。連分數諸位大概都不會習過，那解法此處自然也不能講。關於無定方程式理論的研究，需要較高深的數學，尤其涉及數論 (Theory of Numbers) 方面的很多，上面所說的，自然也僅是些極淺近的事實，還望讀者能很透澈地領會！

二十三年四月，於北

中學生雜誌叢刊

民國廿四年六月初版發行

實價大洋六角
（實價不折不扣　外埠酌加寄費）

中學生雜誌叢刊
“數學與天才”

編者　中學生社

發行者　章錫琛　上海福州路開明書店

印刷者　美成印刷公司　上海梧州路三〇九號

總發行所　上海福州路二七八　電報掛號七〇五四　開明書店

分發行所　廣州惠愛東路　漢口交通路　南京太平路　長沙南陽街　北平楊梅竹斜街　開明書店分店