

教育部審定

初審核定本

修正課程標準適用

新編

初中代數

第一冊

編者 高季可

校者 任誠



中華書局

修正課程標準適用

新編初中代數(全四冊)

◎第一冊

(郵運匯費另加)

編者

高季

可

校者

張鵬
任天

飛誠游

發行者

中華書局有限公司

印刷者

上海中華書局

總發行處

上海中華書局

分發行處

各埠中華書局

有 不 著 准 作 翻 權 印

修正課程標準適用

新編

初中代數第一冊

目次

第一篇 正數及負數

- | | |
|-----------------|------------------|
| 1. 正數負數.....1 | 4. 正負數的乘法.....11 |
| 2. 正負數的加法.....6 | 5. 正負數的除法.....14 |
| 3. 正負數的減法.....7 | |

第二篇 整式

- | | |
|------------------|---------------------|
| 6. 代數式.....20 | 11. 括號的用法.....36 |
| 7. 係數及指數.....25 | 12. 應用問題.....40 |
| 8. 代數式的項.....27 | 13. 整式的乘法.....45 |
| 9. 整式的加法.....28 | 14. 方程式及應用問題.....53 |
| 10. 整式的減法.....33 | 15. 整式的除法.....56 |

第三篇 一次方程式

第一章 一元一次方程式

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 16. 恆等式及方程式.....71 | 18. 方程式的應用問題.....80 |
| 17. 一元一次方程式.....73 | |

第二章 聯立一次方程式

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| 19. 聯立方程式.....90 | 22. 三元以上聯立一次
方程式的解法.....109 |
| 20. 二元一次聯立方程
式的解法.....92 | 23. 特例.....111 |
| 21. 應用問題.....104 | |

第三章 圖解法

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 24. 位標及圖解.....114 | 26. 二元一次聯立方程
式的圖解解法.....124 |
| 25. 二元一次方程式的
圖解.....120 | |

附 錄

中西名詞對照表

西中名詞對照表

修正課程標準適用

新編

初中代數第一冊

第一篇

正數及負數

1. 正數,負數

研究問題

1. 較 1 小的數是什麼? 舉幾個例.
2. 較 0 小的數是什麼? 也能舉幾個例嗎?

例一 某人每月薪俸 50 元,若支出 30 元,問還餘幾元?

$$50\text{元} - 30\text{元} = 20\text{元}.$$

答:還餘 20 元.

例二 若支出 50 元,問還餘幾元?

$$50\text{元} - 50\text{元} = 0,$$

即完全用盡,沒有剩餘.

例三 若支出 55 元,則如何?

收入祇有50元，而支出55元，結果不但現錢用盡，而且還要負債。 $55元 - 50元 = 5元$ 。所以算式可以寫做

$$50元 - 55元 = 50元 - 50元 - 5元 = 0 - 5元,$$

就是這人現有的錢較0還少5元，我們用“-5元”的符號來表示牠，讀做“負5元”。

這種較0還小的數，在代數學裏應用很廣，叫做負數。從前在算術裏所學的，都是較0大的數，叫做正數。正數於其數字前寫正號“+”，負數則於其數字前寫負號“-”，用來表示區別。

例如 較0大9的數，寫做+9；

較0小3的數，寫做-3；而較0小 $\frac{2}{5}$ 的數，寫做 $-\frac{2}{5}$ 。

因此 -0.2表示較0小0.2的數；

+7 $\frac{2}{11}$ 表示較0大7 $\frac{2}{11}$ 的數。

學習問題

1. $24 - 35 = ?$ $1.2 - 2.44 = ?$
2. 較0大 $2\frac{3}{4}$ 的是何數？較0小5.7的是何數？
3. -25表示何數？+14表示何數？

正數，零，負數，總稱為代數數。一個數是正數還是負數，藉牠前面的符號“+”或“-”來決定。

這前面的符號叫做性質符號；假如不計符號，單問一個數的數值是多少，那麼這數值，便叫這數的絕對值。

例如 “-8”裏面，“-”號是表示牠是負數的性質符號；8 便是牠的絕對值。

“+3”和“-3”是符號相異而絕對值相同的兩數。

設將正負整數，依照數值的大小，順次排列，便可得下圖：

小 大
 $\leftarrow \dots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4 \dots \rightarrow$

觀此易知關於數的大小，有下面幾條結論：

I 正數大於 0，負數小於 0，所以正數大於負數。

II 同為正數，則絕對值大的，其數大。

III 同為負數，則絕對值大的，其數反小。

例如 $+4 > 0 > -2,$

$+8 > +3, -8 < -3.$

前面說盈餘是正，負債便是負，實際上凡是性質相反的兩個量都可以用正負數來

們。例如獲利是正，虧本便是負，~~前進是正~~後退便是負；向東是正，向西便是負；幾年前是正，幾年後便是負等等。

若獲利100元記做+100元，則虧本100元就該記做-100元；反過來說，若虧本100元記做+100元，則獲利100元，便要記做-100元。

學習問題

1. 升高100尺記做+100尺，問下降60尺，如何記法？
2. 前進50尺記做-50尺，問後退30尺，如何記法？
3. 向東-30尺，-5年後，攝氏 -4° 等各爲何意？

練習問題一

1. 問下列各數較0大若干或小若干？
+7, -13, +0.004, $-\frac{3}{7}$, -0.785, +0.3
2. 試計算下列各式的值：

(1) $100-130$	(2) $37-21$
(3) 19尺-26尺	(4) $12-0$
(5) $0-11$	(6) 53里-80里
(7) $\frac{1}{2}-0.3$	(8) $7-5-10$
3. 試依大小的順序，排列下面兩組數：

(1) -8, +6, +12, -12, 0, -1, +2, $-\frac{4}{5}$

(2) $-3, -1, +0.1, -\frac{3}{4}, -0.5, +5, +\frac{1}{3}, -0.05$

4. 解釋下列各語句的意思：

(1) -1000 元的利益 (2) 欠債 -200 元

(3) 前進 -10 公里 (4) -4 小時後

5. (1) 甲數較 0 大 8 , 乙數較 0 大 3 , 問兩數的和較 0 大若干?

(2) 甲數較 0 大 8 , 乙數較 0 小 3 , 問兩數的和較 0 大若干?

(3) 甲數較 0 小 8 , 乙數較 0 大 3 , 問兩數的和較 0 小若干?

(4) 甲數較 0 小 8 , 乙數較 0 小 3 , 問兩數的和較 0 小若干?

6. (1) 甲數較 0 大 8 , 乙數較 0 大 3 , 問甲數較乙數大若干?

(2) 甲數較 0 大 8 , 乙數較 0 小 3 , 問甲數較乙數大若干?

(3) 甲數較 0 小 8 , 乙數較 0 小 3 , 問甲數較乙數小若干?

(4) 甲數較 0 小 8 , 乙數較 0 大 3 , 問甲數較乙數小若干?

7. (1) $+3$ 和 $+5$ 共若干?
 (2) $+8$ 和 -3 共若干?
 (3) $+12$ 較 $+4$ 大若干?
 (4) $+12$ 較 -4 大若干?

2. 正負數的加法

研究問題 某人經商兩日,損益的情形如下,

問兩日結算,損益何如?

- (1) 第一日獲利 7 元,第二日獲利 5 元;
 (2) “ ” “ ” 獲利 7 元,“ ” “ ” 損失 5 元;
 (3) “ ” “ ” 損失 7 元,“ ” “ ” 獲利 5 元;
 (4) “ ” “ ” 損失 7 元,“ ” “ ” 損失 5 元.

上列問題中,若設獲利是正,則損失應該是負,故得算式如下:

- (1) $(+7元) + (+5元) = 12元$ 的 益 $= +12元$;
 (2) $(+7元) + (-5元) = 2元$ 的 益 $= +2元$;
 (3) $(-7元) + (+5元) = 2元$ 的 損 $= -2元$;
 (4) $(-7元) + (-5元) = 12元$ 的 損 $= -12元$.

由此可推得正負數加法的法則如下:

I 同號二數的和等於二數絕對值的和,附以原有的符號;

II 異號二數的和等於二數絕對值的差，其符號和原數中絕對值大的相同。

例如：

$$(+3) + (+8) = +(3+8) = +11,$$

$$(-3) + (-8) = -(3+8) = -11,$$

$$(+9) + (-7) = +(9-7) = +2,$$

$$(-9) + (+7) = -(9-7) = -2.$$

學習問題

求下列各組數的和：

$$(+2) + (+6), \quad (-4) + (-5), \quad (-8) + (-7)$$

$$(+8) + (-3), \quad (+13) + (-17), \quad (-21) + (+5),$$

$$(+3.7) + (-2.2), \quad \left(-\frac{1}{2}\right) + (+1), \quad 0 + \left(-\frac{2}{3}\right).$$

注意：正數的性質符號有時省略；但負數的性質符號決不能省略。

3. 正負數的減法

下列語句，是何意義？

(1) “-9元”的利益……………答：“+9元”的損失。

(2) “-9元”的損失……………答：“+9元”的利益。

研究問題

1. 某人以+24元經商,損失+9元,問還餘幾元?

2. 某人以+24元經商,損失-9元,問還餘幾元?

上列兩項,因為是損失,所以都可依減法列式:

$$1. (+24元) - (+9元) = ?$$

但是“+9元”的損失,即等於“-9元”的**利益**,所以可改爲加法計算如下:

$$(+24元) - (+9元) = (+24元) + (-9元) = +15元.$$

$$2. (+24元) - (-9元) = ?$$

這裏“-9元”的損失,即等於“+9元”的**利益**,所以也可改爲加法計算如下:

$$(+24元) - (-9元) = (+24元) + (+9元) = +33元.$$

由上二例,可推得正負數減法的法則如下:

從甲數減乙數,可將乙數的符號變更後和甲數相加.

例如:

$$(+6) - (+9) = (+6) + (-9) = -3,$$

$$(+16) - (-12) = (+16) + (+12) = +28,$$

$$(-30) - (+15) = (-30) + (-15) = -45,$$

$$(-17) - (-23) = (-17) + (+23) = +6.$$

學習問題

1. 填下列各式的空白:

$$(1) (+13) - (+5) = (+13) + (\quad) =$$

$$(2) (-9) - (+6) = (-9) + (\quad) =$$

$$(3) (+10) - (-4) = (+10) + (\quad) =$$

$$(4) (-18) - (-15) = (-18) + (\quad) =$$

2. 求下列各組數的較:

$$(+9) - (+2), (+2) - (+9), (-9) - (-4),$$

$$(-4) - (+9), (-6) - (-6), (+6) - (-10),$$

$$(-12) - (+8), 0 - (+7), 0 - (-7).$$

在代數學裏,減固可以改用加法計算,即如算術裏含有加減的算式,也可改爲正數及負數的和。

$$\text{例如 } 7 - 3 + 5 - 10 = (+7) + (-3) + (+5) + (-10).$$

正數負數的和,叫做諸數的代數和。求代數和有時求絕對值的和,有時求絕對值的差,這是和算術求和不同的地方。

練習問題二

1. -5 與下列諸數相加,其和各爲若干?

$$7, -5, -4\frac{2}{3}, 9\frac{1}{3}.$$

2. 求下列各組數的代數和:

$$(1) \quad 11, -19, 10. \quad (3) \quad -\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, 5.$$

$$(2) \quad 48, -16, -12. \quad (4) \quad 7.38, -5.37, -8.3.$$

3. 由 -8 中減去下列諸數,其差各爲若干?

$$7, -5, -4\frac{2}{3}, 9\frac{1}{3}.$$

4. 求下列各式的結果:

$$(1) \quad (+316) - (-228),$$

$$(2) \quad -(-19) - (-31) - (+50),$$

$$(3) \quad 5.3 - (-2.98) - (-0.58),$$

$$(4) \quad \left(-3\frac{1}{3}\right) - \left(+2\frac{7}{12}\right) - \left(-3\frac{1}{3}\right).$$

5. 填下列各式的空白:

$$(1) \quad (-100) + (\quad) = 50,$$

$$(2) \quad (\quad) + (+45) = -135,$$

$$(3) \quad (-28) - (\quad) = 26,$$

$$(4) \quad (\quad) - (-32) = -333.$$

6. 求下列各式的結果:

$$(1) \quad 0 + (+3) + (+3) + (+3) + (+3) + (+3) = ?$$

$$(2) \quad 0 + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = ?$$

$$(3) \quad 0 - (+3) - (+3) - (+3) - (+3) - (+3) = ?$$

$$(4) \quad 0 - (-3) - (-3) - (-3) - (-3) - (-3) = ?$$

如這樣的問題,能有簡便的方法計算嗎?

4. 正負數的乘法

研究問題

1. 某人每年盈餘 500 元,問 3 年後的財產較現在多寡若何?

2. 某人每年盈餘 500 元,問 3 年前的財產較現在多寡若何?

3. 某人每年虧損 500 元,問 3 年後的財產較現在多寡若何?

4. 某人每年虧損 500 元,問 3 年前的財產較現在多寡若何?

設盈餘爲正,則虧損爲負;幾年後爲正,則幾年前爲負;財產較現在多爲正,則財產較現在少爲負。

第 1 題,我們知道這人的財產應該較現在多,所以可列式如:

$$(+500\text{元}) \times (+3) = +1500\text{元}.$$

第 2 題,財產應該較現在少,所以可列式如:

$$(+500\text{元}) \times (-3) = -1500\text{元}.$$

第 3 題,財產應該較現在少,所以可列式如:

$$(-500\text{元}) \times (+3) = -1500\text{元}.$$

第 4 題,財產應該較現在多,所以可列式如:

$$(-500\text{元}) \times (-3) = +1500\text{元}.$$

由上可知正負數乘法的法則如下：

- | | | |
|--|---|------------------------------|
| <p>I 同號相乘得正</p> <p>II 異號相乘得負</p> | } | <p>絕對值等於原數絕</p> <p>對值的積。</p> |
|--|---|------------------------------|

例如： $(+25) \times (+4) = +(25 \times 4) = +100,$

$$(-25) \times (-4) = +(25 \times 4) = +100,$$

$$\left(+\frac{9}{10}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{9}{10} \times \frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{5},$$

$$\left(-\frac{9}{10}\right) \times \left(+\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{9}{10} \times \frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{5}.$$

學習問題

1. 求下列各式的積：

$$(+3) \times (+5), \quad (-9) \times (-8), \quad (+12) \times (-3),$$

$$(-6) \times (+7), \quad \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{8}\right), \quad (-4) \times 0.$$

2. 問下列各式的相乘積，其性質符號為何？

$$(+5) \times (-6) \times (-3), \quad (-2) \times (+5) \times (-6) \times (-4).$$

由學習問題 2，知若干數相乘，若所含負數因數的個數為偶數，則其積為正；若負數因數的個數為奇數，則其積為負。

例如：

$$(-5) \times (-3) \times (-4) = -(5 \times 3 \times 4) = -60,$$

$$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4,$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8.$$

練習問題三

1. $(-3) \times (-15) \times (-28) = ?$

2. $(-1\frac{1}{4}) \times (-\frac{4}{15}) \times (-\frac{9}{13}) = ?$

3. $(-5) \times (+7) \times (-2) \times (-7) \times (+\frac{1}{5}) \times (-\frac{1}{2}) = ?$

4. 求下面的值:

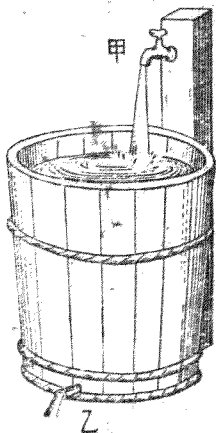
$$(-5)^2, (-3)^3, (-4)^4.$$

5. 求下列各式的結果:

(1) $(+12) \times (-3) \times (-4) - (-15) \times (+7) \times (-0)$

(2) $(+17) \times (-5) - (-16) \times (-10) + (+9) \times (-2)$

某水槽有甲乙二管,甲管每分鐘入水 7 升,乙管每



分鐘出水 5 升,問在下列各情形中,槽內水量應較現在多寡若何? 設入水爲正,出水爲負;幾分鐘以後爲正,幾分鐘以前爲負,試利用正負數的乘法以解之。

(假定在下列問題的範圍以內,槽裏面的水,沒有全空或全滿的時候。)

6. 單開甲管,

(1) 自今18分鐘後, (2) 自今11分鐘前,

7. 單開乙管,

(1) 自今16分鐘後, (2) 自今12.5分鐘前

8. 甲乙兩管齊開,

(1) 自今17分鐘後, (2) 自今21.5分鐘前,

5. 正負數的除法

研究問題

1. 試以適當的數,填在下列各式的括弧裏:

$$(+12) = (+4) \times () \dots\dots\dots (+12) \div (+4) = ()$$

$$(-20) = (-5) \times () \dots\dots\dots (-20) \div (-5) = ()$$

$$(-14) = (+2) \times () \dots\dots\dots (-14) \div (+2) = ()$$

$$(+30) = (-6) \times () \dots\dots\dots (+30) \div (-6) = ()$$

2. 由前題可以推得除法的法則嗎?

正負數除法的法則如下:

- | | |
|-----------|-----------------|
| I 同號相除得正 | } 絕對值等於原數絕對值的商. |
| II 異號相除得負 | |

例如: $(-24) \div (+8) = -3,$

$$(+18) \div (-7) = -2\frac{4}{7},$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{8}{15}\right) = +\left(\frac{4}{5} \times \frac{15}{8}\right) = +1\frac{1}{2}.$$

注意： 1. 0 除以任何數(除 0 外)皆等於 0。
 2. 0 除以 0, 可等於任何數。
 例如 $0 \div 0 = 3$, 因 $3 \times 0 = 0$ 。
 又 $0 \div 0 = 4$, 因 $4 \times 0 = 0$ 。
 3. 任何數(除 0 外)除以 0, 皆不可能, 因其商等於任何數, 都不能用乘法還原。

學習問題

求下列各式之商：

$$(+8) \div (+4), \quad (-8) \div (+4), \quad (-15) \div (-5),$$

$$(+28) \div (-7), \quad (-1) \div (+1), \quad (-54) \div 6,$$

$$100 \div (-25), \quad 0 \div (+9), \quad 0 \div (-8),$$

$$(-5) \div 0, \quad (-3) \div \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2} \div (-4).$$

練習問題四

1. 求下列各式之商：

$$(1) \quad (-84) \div (+4) \div (-7),$$

$$(2) \quad (-1) \div (-10) \div (-10),$$

$$(3) \quad 100 \div (-4) \div (-25),$$

$$(4) \quad \left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) \div \frac{5}{9}.$$

2. 求下列各式之結果： 0

$$(1) (-6)^3 \div 36 \times (-5)^2 \div (-75),$$

$$(2) \left\{ \left(-\frac{3}{4} \right) - \left(-1\frac{1}{2} \right) \right\} \div \left\{ \left(-3\frac{3}{8} \right) - \left(-1\frac{3}{4} \right) \right\}.$$

3. 二數相乘積的絕對值爲12,若一數是-4,問他一數是多少?

指示: 積爲+12或-12.

4. 二數的相乘積是 $-\frac{2}{5}$,如果有一數的絕對值是 $\frac{1}{2}$,問其他一數爲若干?

5. 試以適當的數填入下列各式的括弧裏:

$$(1) (-64) \div (\quad) = +8,$$

$$(2) (\quad) \div \left(-\frac{2}{3} \right) = -5\frac{3}{4},$$

$$(3) \left(-3\frac{1}{2} \right) \times (\quad) = 1\frac{4}{5},$$

$$(4) (\quad) \times 2.5 = -3.25.$$

6. 一旅人沿路向東而行,每時行3里,現在正經過某村,問此人,

(1) 在某村之東15里,在何時?

(2) 在某村之西15里,在何時?

又若這人是沿路向西而行的,現在正經某村,問他

(3) 在某村之東15里,在何時?

(4) 在某村之西15里,在何時?

試依正負數的除法以解之。

第一篇 提要

◎ 數 $\begin{cases} \text{正數} \\ 0 \\ \text{負數} \end{cases}$ 正數 $> 0 >$ 負數

◎ 二數的和

1. 同號二數的和等於絕對值的和，附以原有的符號。
2. 異號二數的和等於絕對值的差，其符號和原數中絕對值大的相同。

◎ 二數的差

1. 將減數變號後和被減數相加。

◎ 二數的積與商的符號

1. 同號相乘除得正，異號相乘除得負。

雜題 1

求下列各式的結果：

1. $-(+3)+(-5)+(+2)+(-4)$

2. $4-5+(3-7)+8-2$

3. $2 \times 3 - 3 \times 4 - 4 \times 5$

4. $9 \times (2-5) + 8 \times (5-7) - 7 \times (5-2)$

5. $8 + (-9) \times 3 - 7 \times (-2)$

6. $(-1)^5 - (-1) \times 9$
7. $0 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}\right)$
8. $(-3)^2 \times (-2)^2$
9. $21 - (-3) \times (-5) \times 7 \times (-2) + (-2) \times (-4)$
10. $25 \div (-5) + (-12) \div 4 + 8$
11. $(3-5) \times (7+3-15) + 10 \times (-2)^2$
12. $(-3)^2 \times (-1)^5 - (-4)^3 \div (-2)^2 + (-3)^2 \times (-3)^3$
13. $3\frac{1}{3} \times \left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(-2\frac{2}{5}\right)$
14. $12 \times \left(-\frac{5}{8}\right) \div 1.5 - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{6}{7}\right) \times 2\frac{1}{3}$
15. $\{25 + (-18) - (-12)\} \times (15 - 25)$
16. 有甲乙丙丁四人,作某種遊戲,其勝負的點數

如下表所記,問最後所得的數各若干?

人名 \ 次數	I	II	III	IV	V	合計
甲	35	-15	7	-28	34	
乙	-18	-24	43	17	15	
丙	-29	30	-36	28	-12	
丁	22	19	-4	-7	-27	

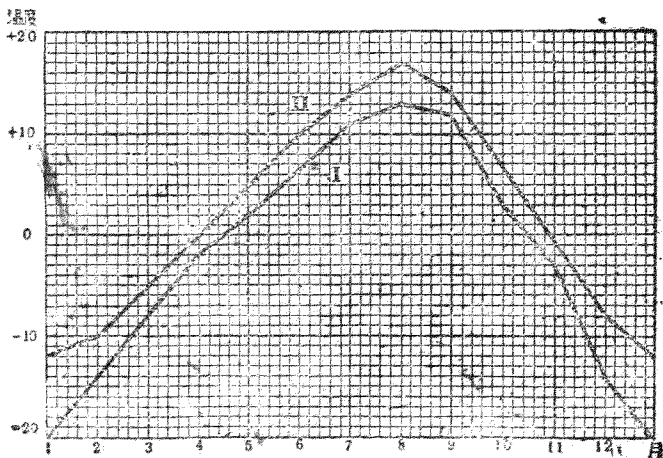
17. 有A,B,C,D,E五個地點,其高低的比較,測得如下表,問E地較A地高若干公尺? 又其他空白的地方

試皆填以適當的數量。

自 \ 至	B	C	D	E
A	3公尺			
B		-5公尺		
C			-2公尺	
D				1公尺

18. 設某地一年中各月的最低溫度,和平均溫度,如下圖所示,問

- (1) 每年最低溫度平均為若干?
- (2) 每年的平均溫度為若干?



I 各月最低溫度

II 各月平均溫度

第二篇

整式

6. 代數式

代數學中，爲列式的簡明計，常以文字代數，叫做文字數。

例如：

1. 矩形的面積等於縱 \times 橫。

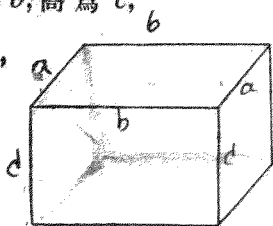


現在以 a 代縱，以 b 代橫，則矩形的面積等於 $a \times b$ 。普通省去乘號，單寫 ab 即可。

2. 設長方體的縱爲 a ，橫爲 b ，高爲 c ，則因其體積等於縱橫高的連乘積，故可以

$$abc$$

來表示牠。



3. 長方體的全面積爲 $2ab + 2bc + 2ca$ 。

4. 本金爲 A 元，年利率爲 r ，問 t 年後的本利和爲若干？

答：單利 $A(1+rt)$ 元；複利 $A(1+r)^t$ 元。

5. 每斤價 a 元的酒 x 斤和每斤價 b 元的酒 y 斤混合後，問每斤的平均價是多少？

答： $\frac{ax+by}{x+y}$ 元。

如上諸例所示，在代數學裏，除和算術一樣，應用數字而外，並且還應用文字代數。前面叫數字數，後面叫文字數。此種以計算符號連結數字數和文字數而成的算式，叫代數式。

如例 5，除數裏含有文字數的，叫分式；而例 1, 2, 3, 4 所得的代數式裏，都不含有文字數的除數，叫整式。

故 $\frac{2}{a}$, $\frac{y+4}{x+3}$ 爲分式，

至於 $\frac{a}{2}$, $\frac{ab-cd}{7}$ 雖然寫成分數的形式，但是因爲分母裏不含有文字數，所以仍然是整式。

在前面例 1, 2, 3 裏，設 $a=4$, $b=5$, $c=6$ ，則

1. $ab=4 \times 5=20$;

2. $abc=4 \times 5 \times 6=120$;

3. $2ab+2bc+2ca$

$$=2 \times 4 \times 5 + 2 \times 5 \times 6 + 2 \times 6 \times 4$$

$$=148.$$

像這樣，將一個代數式裏的文字，各各以牠們的數值代入，實行計算而求得的結果，便叫那代數式的數值，或單叫做值。

學習問題

1. 某書 a 冊的價為 b 元，問 m 冊的價為若干？
若 $a=12$, $b=16.2$, $m=15$, 則若何？

2. 某人每月收入 a 元，支出 b 元，問 n 月後可餘款多少？

若 $a=75$, $b=68$, $n=5$, 或 $a=55$, $b=71$, $n=4$, 則若何？

注意： 1. 數字數和若干文字數相乘，如果乘號不寫，那麼排列的次序，先數字後文字；至於文字和文字間除特別情形外，大都依照字母的順序排列。

例： $x \times 2$ 不寫 $x2$ 而寫 $2x$,

$2 \times b \times 3 \times a$ 不寫 $6ba$ 而寫 $6ab$.

2. 數字和數字相乘乘號不能省略，有時可用點（ \cdot ）代替，但這（ \cdot ）的位置要寫在正中，不能偏下，以免和小數點混淆。

例： $4 \times 5 \times 6 = 4 \cdot 5 \cdot 6$.

3. 在代數學裏除號應用很少，大都把除寫成分數的形式，被除數做分子，除數做分母。

例：
$$a \div b = \frac{a}{b}, (x-y) \div (x+y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

練習問題五

1. 甲乙共有銀 a 元，設甲有 x 元，問乙有幾元？

2. 哥哥比弟弟大 b 歲，假如弟弟是 x 歲，問哥哥幾歲？

哥哥幾歲？

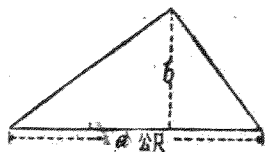
又哥哥是 x 歲，問弟弟幾歲？

3. 一個三角形，底邊是 a 公尺，高為 b 公尺，問牠

面積是多少，試作式以表之：

又若 $a=45$, $b=21$, 則若何？

4. 有一梯形，其上底為 a



尺，下底為 b 尺，高為 h 尺，問面

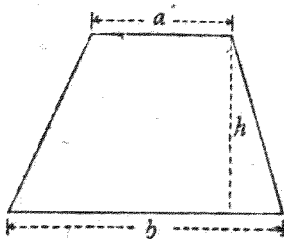
積為若干？

又若 $a=4$, $b=5$, $h=\frac{1}{2}$, 則

若何？

5. 有 a , b 二數，問其和

為其差的幾倍？試作分式以表之。



6. 有一個奇數爲 x , 問最靠近牠的偶數爲何?
(有二解)
7. 三個連續整數, 有一個爲 y , 問其餘兩個各是多少? (有三解)
8. 某人有一張 5 元的紙幣 a 張和每張 10 元的紙幣 b 張, 問這人共有銀多少?
9. 有一個二位數, 牠的十位數字爲 x , 個位數字爲 y , 問這數爲何?
10. a 時 b 分 c 秒等於若干分?
11. 用馬糞紙製一個無蓋的方盒. 假如盒的長爲 x 寸, 寬 y 寸, 高 z 寸, 問共需馬糞紙多少? 又若 $x=4$, $y=3$, $z=2$, 則如何?
12. 甲乙二人同時自同地同向進行, 甲每時行 x 公里, 乙每時行 y 公里, 問出發後 m 時, 兩人相隔多少公里? 若 $x=3$, $y=2.5$, $m=5$, 則如何?
13. 某人販入水菓 200 個, 每個買價 a 元, 其中腐爛的有 45 個, 如果以每個 b 元的價, 將其餘全部賣出, 問可賺錢多少? 若 $a=.15$, $b=.21$, 或 $a=.09$, $b=.11$, 則若何?
14. 某事, 甲作之 x 日可成, 乙作之 y 日可成, 問兩人合作一日可成全事的幾分之幾?

15. 前題中,若甲作 a 日,乙作 b 日,問還餘全事的多少?

7. 係數及指數

研究問題

1. 下列各式所表示的為何? 有什麼不同的地方?

$$(1) ab, \quad (2) 3xyz, \quad (3) x^2, \quad (4) -5x^2y^3.$$

若干數連乘而得積,則此諸數便叫做牠們的積的因數.

例如: a, b 都是 ab 的因數,

$3, x, y, z$ 都是 $3xyz$ 的因數.

連乘積中,文字因數以外的因數,即數字因數,叫做文字因數的積的數係數,或單叫係數.

所以 $3xyz$ 的係數為 3 ,

$-5x^2y^3$ 的係數為 -5 .

若干相同的因數連乘而為積,則此積叫做那因數的乘羈或單叫羈.

例如: 5×5 為 5 的二乘羈(平方),寫做..... 5^2

$5 \times 5 \times 5$ 為 5 的三乘羈(立方),寫做..... 5^3

aa 為 a 的二乘羈,寫做..... a^2

aaa 爲 a 的三乘器,寫做 a^3

$aaaa$ 爲 a 的四乘器 (四方) 寫做 a^4

右上角所寫的 2, 3, 4 等小字,是指示這個因數連乘的次數的,叫做羣指數或單叫指數.

所以 x^3 的指數是 3,

$-5x^2y^3$ 裏, x 的指數是 2, y 的指數是 3.

注意: 1. $1 \times a = a$, 所以文字前沒有數字的,牠的係數是 1.
2. $a^1 = a$, 所以文字的右上角沒有數字的,牠的指數是 1.

學習問題

1. 下列各式的指數和係數各是什麼?

$$3x^2, -\frac{3}{5}a^6, b, -c, \frac{x^2}{6}.$$

2. 試儘量將下列各式化爲簡單:

(1) $a + a + a + a$

(2) $-a - a - a - a$

(3) $-\frac{1}{7}a - \frac{1}{7}a - \frac{1}{7}a$

(4) $-b - b - b - b - b - b$

(5) $xyz + xyz + xyz$

(6) $3ab + 4ab + 5ab$

$$(7) \quad aaaa + aaaa + 3aaaa$$

$$(8) \quad -aabb - abbba - ababb.$$

8. 代數式的項

研究問題

1. 什麼叫代數和?

2. 下列諸式,各爲何式的代數和?

$$(1) \quad 9 - 12ab \qquad (2) \quad x^2 - 2xz + y^2$$

$$(3) \quad 3a^2 - \frac{1}{2}bc - 5cd - e^2 \quad (4) \quad -9a^2b^3.$$

一個整式,我們把牠看做許多數的代數和時,那麼這許多數各叫做這整式的項。

如上第 2 題裏面的第(4)例,僅由一項而成的整式,叫做單項式;如(1),(2),(3)例是由二項或不止二項合成的叫做多項式。多項式依所含的項數,又分爲二項式、三項式……等。

單項式和單項式,或是完全相同,或是除了係數而外,其餘文字因數完全相同的,都叫做同類項。

例如: a^2b , $-3a^2b$, $-\frac{4a^2b}{5}$ 是同類項,

而 $3x^3$ 及 $3x^2$ 不是同類項,因爲文字因數不完全相同。

練習問題六

下列諸式，各為幾項式，各項的係數若何？

又若 $a=3$, $b=4$, $c=5$, 則各式的數值若何？

1. (1) $a^2 - 2ab + b^2$, (2) $-\frac{ab}{2} - 4bc + \frac{5}{6}abc$,
 (3) $7(a+b+c)$, (4) $(a+b)^2 - (a-b)^2$.

2. (1) $a^3 - 1 - c^3 - 3ac$,
 (2) $a(b-c) - 2b(c-a)$,
 (3) $-\frac{1}{2}(a-b)(b-a)(c-a)$,
 (4) $a^2 - 7ac + 6c^2$.

試舉出下列各式的同類項：

3. $15x^2y + 7xy^2 - \frac{2}{3}xy^2 - 4x^2y - xy$.

4. $2x^2 - 5y^3 + 9 - 3y^3 - 7x^2 - 12 + 15x^4$.

5. $3(a-b) - \frac{2}{3}(c-a) - 8(a+b) - \frac{3}{5}(a-b) - \frac{5}{6}(c-a)$.

9. 整式的加法

I 單項式的加法

例一 求 a , $2a$, $3a$ 的和。

[解] 一個 a , 兩個 a 與三個 a 合共 $1+2+3=6$

即 6 個 a , 故其和為 $6a$. 列式如下:

$$a + 2a + 3a = (1+2+3)a = 6a, \quad \text{答: } 6a$$

例二 有某數為 x ，問牠的 4 倍和 -7 倍的和是少?

[解] x 的 4 倍為 $4x$ ， x 的 -7 倍為 $-7x$ ，故其和為 $4x + (-7x) = \{4 + (-7)\}x = (4 - 7)x = -3x$ 。

答： $-3x$ 。

學習問題

1. 求下列各式的和：

$$(1) \begin{array}{r} a \\ 5a \\ 4a \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{r} +12b \\ -11b \end{array}$$

$$(3) \begin{array}{r} -3m \\ -7m \\ +4m \end{array}$$

$$(4) \begin{array}{r} +3x \\ -9x \\ +6x \end{array}$$

$$(5) \frac{1}{2}ab, \frac{1}{2}ab, 99ab.$$

$$(6) -0.6y, 1.2y.$$

2. 計算下列各式：

$$(7) -5m + 2m.$$

$$(8) 6b + (-3b).$$

$$(9) (-3ab) + (-5ab).$$

$$(10) 7n^2 + 8n^2.$$

例三 求 $3x^2$ ， $-5x^2$ ， $8x^2$ ， $-4x^2$ 的和。

[解] $3x^2 + (-5x^2) + 8x^2 + (-4x^2)$

$$= (3 - 5 + 8 - 4)x^2$$

$$= 2x^2.$$

答： $2x^2$ 。

如此求若干同類項的和，可先求各項係數

的代數和而以文字因數附其後。這樣一來，可使若干同類項歸併成一項，所以這種方法又叫做同類項的簡約。

簡約同類項時，可變更代數中各項的次序，使得同類項集合在一處計算起來比較便當。

例四 求 $-3p^2, 6pq, 7p^2, -q^2, -6pq, -11q^2, -5$ 的和。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & -3p^2 + 6pq + 7p^2 - q^2 - 6pq - 11q^2 - 5 \\ & = -3p^2 + 7p^2 + 6pq - 6pq - q^2 - 11q^2 - 5 \\ & = 4p^2 - 12q^2 - 5. \end{aligned}$$

$$\text{答: } 4p^2 - 12q^2 - 5.$$

若干單項式相加，其法即將各單項式挨次連寫，然後觀察有無同類項，若有則簡約之。

學習問題

1. 求 $3a^2, -2b^2, -8ab, a^2, 16ab, 6b^2$ 的和。
2. $2x^2 + 8x^3 - 5x + 3x^2 - 8x^2 + 5x = ?$

II 多項式的加法

例五 求 $-2a + 3b + c, 3a - 5b, 7a - 6c$ 三式的和，並設 $a=1, b=2, c=3$ ，代入後以驗結果的正誤。

$$\text{[解]} \quad (-2a + 3b + c) + (3a - 5b) + (7a - 6c)$$

$$\begin{aligned}
 &= -2a + 3b + c + 3a - 5b + 7a - 6c \\
 &= -2a + 3a + 7a + 3b - 5b + c - 6c \\
 &= 8a - 2b - 5c.
 \end{aligned}$$

注意：括號內第一項沒有符號的，乃是正號的省略。

如上例所示，多項式的加法，先將各式，就原有的符號順次連寫然後再簡約同類項。

若列為縱式，則其運算及覆驗之法，可如下：

因 $a=1, b=2, c=3,$

$$\begin{array}{r}
 -2a + 3b + c = -2 + 6 + 3 = 7 \\
 3a - 5b \quad = 3 - 10 \quad = -7 \\
 7a \quad - 6c = 7 \quad - 18 = -11 \\
 \hline
 8a - 2b - 5c = 8 - 4 - 15 = -11
 \end{array}$$

學習問題

1. 求 $3ax - 2by + cz, 6ax + by, 4by - 5cz$ 的和。
2. 求 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y, y - \frac{1}{4}z, z - \frac{1}{5}x + 2y$ 的和并驗算。

練習問題七

1. 求下列各組的和：

(1) $-4a, +3, +7a, -9.$

(2) x 的 $13a$ 倍, ax 的 -7 倍, x 的 a 倍的 -4 倍。

$$(3) \quad -3(a+b), -4(a+b).$$

2. 簡約下列各式:

$$(1) \quad 6a^2 - 3ab - 2ac - 2ac + 3ab + 5ac + 7a^2.$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}xy - \frac{2}{3}x^2y - \frac{1}{3}xy + 2x^2y - 5x^2y^2.$$

$$(3) \quad 8(pr - q^2) - 3 + (pr - q^2) - 12 + 10(pr - q^2).$$

3. 求下列各式的和, 并設 $a=1$, $b=2$, $c=3$, 以驗算之.

$$(1) \quad 5a + 2b, 3a - 4b, -7a + 3b.$$

$$(2) \quad 2ab + 3ac - 4, 3ab - 3ac + 2, -5ab + 3ac + 8.$$

$$(3) \quad a^3 - 35a^2b, 7a^2 - b^2, a^3 + b^3.$$

4. 求下列各式的和:

$$(1) \quad -4x^2 + 3y^2 - 8z^2, 2x^2 - 3z^2, 2y^2 + 5z^2.$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y, \frac{1}{4}y - \frac{1}{3}x, \frac{1}{6}x - \frac{1}{10}y.$$

$$(3) \quad 6.45ax - 0.8y + 3.7, -6.5y - 1.3 - 2.38ay.$$

5. 求下列各式的和:

$$(1) \quad 2(a+b) + 3(x+y), 3(a+b) - 2(x+y), \\ (a+b) - (x+y).$$

$$(2) \quad 5(a+m) - 7(b-n) + \frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3}(a+m) - (b-n) - \frac{1}{2}.$$

6. 某甲有 10 元的紙幣 x 張及 5 元的紙幣 y 張,

某乙有10元的紙幣 $2x$ 張,5元的紙幣 $3y$ 張及1元的紙幣 $3x$ 張,某丙有10元的及5元的紙幣各 $3y$ 張又1元的紙幣 $4y$ 張。問三人共有若干元?

10. 整式的減法

1 單項式的減法

研究問題

- 從7減去+5,還餘若干?
從 $7a$ 減去 $+5a$,還餘若干?
- 從7減去-5,還餘若干?
從 $7a$ 減去 $-5a$,還餘若干?

從甲式減乙式,可將乙式的符號變更後和甲式相加。

例一 自 $-17xy$ 減去 $-25xy$,還餘若干?

$$[\text{解}] \quad -17xy - (-25xy) = -17xy + 25xy = 8xy.$$

答: $8xy$ 。

學習問題

求下列各式的結果:

$$7 - (+3), \quad -8 - (-4), \quad a - (-10),$$

$$a - (+b), \quad a - (-b), \quad 3ab - (-ab),$$

$$(-x^2) - (+5x^2), \quad a^2b - (-a^2b), \quad m - 2m - 3m,$$

$$a - (+b) - (-c), \quad x + (+2x) - (-7x) - (+10x).$$

II 多項式的減法

例二 自 $3a - 5b$ 減去 $-2a + 3b$, 還餘若干?

[解] 因多項式是單項式的代數和, 故

$$\begin{aligned} & (3a - 5b) - (-2a + 3b) \\ &= 3a - 5b - (-2a) - (+3b) \\ &= 3a - 5b + 2a - 3b \\ &= 5a - 8b. \end{aligned}$$

答: $5a - 8b$.

所以多項式的減法, 可將減式各項的符號完全變更後和被減式相加.

例三 求自 $a^3 + 5a - 3$ 減 $2a^3 - 4a^2 - 5$ 的差, 并設 $a=1$ 代入後以驗其結果的正誤.

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & (a^3 + 5a - 3) - (2a^3 - 4a^2 - 5) \\ &= a^3 + 5a - 3 - 2a^3 + 4a^2 + 5 \\ &= -a^3 + 4a^2 + 5a + 2 \dots\dots\dots \text{答.} \end{aligned}$$

若列為縱式, 則其運算及覆驗之法可如下:

設 $a=1$,

$$\begin{array}{r} a^3 \quad \quad \quad + 5a - 3 \dots\dots\dots 1 \quad \quad + 5 - 3 = 3 \\ 2a^3 - 4a^2 \quad \quad - 5 \dots\dots\dots 2 - 4 \quad \quad - 5 = -7 \\ \hline -a^3 + 4a^2 + 5a + 2 \dots\dots\dots -1 + 4 + 5 + 2 = 10 \end{array}$$

例四 自 $-4x^2+3y^2$ 減去 $2x^2-3z$, 更自其差裏, 再減去 $2y^2+5z$, 問還餘若干?

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & -4x^2+3y^2-(2x^2-3z)-(2y^2+5z) \\ & = -4x^2+3y^2-2x^2+3z-2y^2-5z \\ & = -6x^2+y^2-2z \dots\dots\dots \text{答.} \end{aligned}$$

如果列爲縱式, 可先將減式各項的符號變更後, 再依加法計算, 比較便當。

$$\begin{array}{r} -1x^2+3y^2 \\ -2x^2 \quad +3z \\ \quad -2y^2-5z \\ \hline -6x^2+y^2-2z \dots\dots\dots \text{答.} \end{array}$$

學習問題

1. 求自 $3x^3-13x^2-2x-8$ 減去 $4x^3-7+4x-5x^2$ 的差并驗算。

2. 自 $\frac{1}{2}ax-\frac{1}{3}by+\frac{1}{4}c$ 減去 $3by-\frac{1}{2}ax-\frac{5}{3}c$, 還餘若干?

練習問題八

下列各題中, 試從前式減去後式:

1. (1) $-\frac{2}{3}(a+b)$, $4\frac{1}{3}(a+b)$.

(2) $31x(x^2-y^2)$, $-15x(x^2-y^2)$.

$$(3) 15a^2(ax^2-5y), 20a^2(x^2-5y).$$

2. (1) $a+b, a-b.$ (2) $2x-y, 2x+y.$

(3) $0, a-2b.$ (4) $a+b, -c.$

3. (1) $4x-5y+12z, -2x+4y-8z.$

(2) $4a^2-2a+3, -3a+10a^2-10.$

(3) $l+3m-5n+7, -3l-9m+7n.$

(4) $3x^2-2x^2-7x, -2x^2+2x^2+7x-9.$

4. (1) $\frac{3}{5}x-\frac{2}{3}y, \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y.$

(2) $\frac{3}{2}x+y-\frac{5}{2}z, x-\frac{1}{2}y-2z.$

(3) $\frac{1}{3}ax-\frac{1}{2}by-\frac{1}{4}cz, \frac{1}{2}ax+3by-\frac{2}{3}cz.$

(4) $7.4a+5.2b-2.1c, 3.3b-2.8a-3.5c.$

5. (1) 自 $3x^2-2y^3-z^3+3xyz$ 中減去若干,則其餘爲 $8z^3+4xyz$?

(2) $4a+5b-\frac{1}{6}c$ 加何數,則其和爲0?

6. 自 $5x^2-6x+7$ 減 $4x^2+6x-10$,更從其差中減去 $x^2-6x+16$,問還餘若干? 又若 $x=\frac{2}{3}$,則何如?

11 括號的用法

研究問題

1. $a+(-b+c-d)=?$

$$2 \quad a - (-b + c - d) = ?$$

根據多項式加減的法則，知

$$1. \quad a + (-b + c - d) = a - b + c - d,$$

$$2. \quad a - (-b + c - d) = a + b - c + d.$$

而這兩式的左邊有括號，右邊沒有括號，比較其異同，可以得到撤去括號的法則如下：

I 括號前是正號“+”，撤去括號時，括號內各項的符號不變；

II 括號前是負號“-”，撤去括號時，括號內各項的符號全變。

例如：
$$a + (b - c) = \dots\dots\dots$$

$$a - (b - c) = \dots\dots\dots$$

$$a^2 - (a^3 - b^3) = \dots\dots\dots$$

若式中有幾重括號，普通去括號的方法，大都自內至外；但若自外至內，也未嘗不可。

例如：
$$3a - [2b + c - \{4c - (3b + 2a)\}]$$

$$= 3a - [2b + c - \{4c - 3b - 2a\}]$$

$$= 3a - [2b + c - 4c + 3b + 2a]$$

$$= 3a - 5b + 3c - 2a$$

$$= a - 5b + 3c.$$

但亦可演算如下：

$$\begin{aligned}
 & 3a - [2b + c - \{4c - (3b + 2a)\}] \\
 &= 3a - 2b - c + \{4c - (3b + 2a)\} \\
 &= 3a - 2b - c + 4c - (3b + 2a) \\
 &= 3a - 2b + 3c - 3b - 2a \\
 &= a - 5b + 3c.
 \end{aligned}$$

學習問題

1. $8a - 3b - [3b - \{4a + (a - 7b)\}] = ?$

在代數學裏，有時爲運算之便利計，往往在一個代數式裏插入括號，由前撤去括號的法則，反轉來，便可得到插入括號的法則：

I 括號前置正號“+”，包入括號內的各項，其符號不變；

II 括號前置負號“-”，包入括號內的各項，其符號全變。

例如：

1. $x + y - z + w = x + (y - z + w) = x + y + (-z + w).$

2. $x - y + z - w = x - (y - z + w) = x - y - (-z + w).$

學習問題

1. 把代數式 $12a - 15b - 20c - 5d + 7$ 除前二項外，

其餘括入括號內，而括號前置負號。

2. 填下式括號內的空白：

$$\begin{aligned} a+b-c-d-e+f &= a+(\quad)-d-(\quad) \\ &= a+b-(\quad)+f. \end{aligned}$$

注意：撤去括號前，如遇有同類項，應先行簡約。

練習問題九

試撤去下列各式的括號，并化簡之：

1. $3x-5y+(6x+y)$.
2. $3a+4b-(2a-3b)$.
3. $2a-\{b-(a-2b)\}$.
4. $x-\{3x-2y-(2x+3y)\}$.
5. $3a^2-5a-\{7a-(-2a^2+5a-8)\}$.
6. $x-\{8x-(2y-3x)+(2x-4y)\}$.
7. $7a-2b-\{3a-c-(2b-3c)-5\}$.
8. $2x-[x-\{y-(2x-y)+(x-y)\}-(y-x)]$.
9. $7a-(8a+5c)-[2a-\{3a-(5b-2c)\}]$.
10. $7a+4b-[3c+\{5a-2b-(c-\overline{4a-b}+5b)\}]$.

指示： $4a-b$ 上面的橫線，叫括線，作用和括弧相

同。

先將下列各式化簡，然後以 $a=3, b=0, c=-1$ ，代入結果以求其數值：

11. $a - [5b - \{a - (3c - 3b) - (a - 2b - c)\}]$.

12. $3a - [b - \{3c - (2a - 4b - 5c - a)\}]$.

13. 試將下列各式，自第三項以下，括入括號內，並於括號前置“+”號：

(1) $a - b + 3c - 11d + 7e$,

(2) $x^2 + xy - y^2 + x - y + 1$.

14. 試將下列各式，自第二項以下，括入括號內，並於括號前置“-”號：

(1) $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 6x + 3$,

(2) $x + 2y - 5z + 7$.

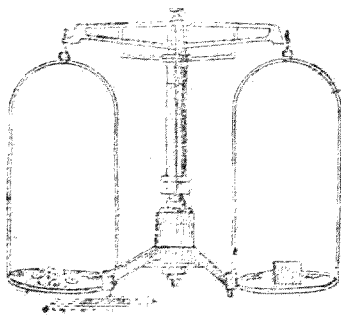
15. 填下列各式括號內的空白：

(1) $7 - 3a - 2b - 6c + 4d - 2 = 7 - (\quad) - 6c + (\quad)$,

(2) $a - 2x - 5y + 2z - t = a - \{ \quad + 5y - (\quad) \}$.

12. 應用問題

例一 用天平稱寶石的重，將等大的寶石 3 個置於一端的盤中，他端置 20 公分的法碼，因嫌太重，於是在置寶石的盤中，更加 5 公分的法碼，這樣天平恰好平衡。



問寶石每個的重爲若干?

〔解〕 設寶石每個的重爲 x 公分,則 3 個的重是 $3x$ 公分,加上 5 公分的法碼,共計 $(3x+5)$ 公分,這和 20 公分相等,故可得下式:

$$3x+5=20.$$

今若於天平的兩端各取去 5 公分,當然還是平衡。

所以

$$3x=20-5,$$

$$\text{即 } 3x=15.$$

3 個的重是 15 公分,所以每個的重是,

$$x=5,$$

$$\text{即 } 5 \text{ 公分.}$$

答: 5 公分。

注意: 一式的兩端相等,和天平的兩端相等一樣兩端同加若干或是同減若干,仍然相等。

學習問題

1. 從某數的 1 倍裏減去 14 還餘 10,求某數。
2. 有一塊周長 200 公尺的矩形地面,已知長是

寬的 3 倍,問長寬各若干?

指示: 設寬為 x 公尺.

練習問題十

1. 某數加 19 等於 14, 求某數.
2. 大小二數, 其差是 2, 其和是 28. 問小數是
多少?
3. 有三個連續數, 其和是 24, 問最小的一個數是
多少?
4. 有一塊矩形地, 長比寬多 15 尺, 如果周圍是 150
尺, 問長寬各若干?

下列各題裏的文字, 都是代表一個未知的“某數”的, 你看各式所表示的是什麼意思, 試先譯成語言, 然後再求“某數”的值:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 5. $x + 7 = 19$. | 6. $m + 33 = 33$. |
| 7. $n - 8 = 13$. | 8. $2x - 9 = 21$. |
| 9. $7 + 3x = -2$. | 10. $12x + 13 = 73$. |
| 11. $28k - 9 = 251$. | 12. $20x - 9x = 88$. |

例二 求適合下式的 x 之值:

$$5x + 21 = 7 - 2x$$

[解] $5x + 21 = 7 - 2x \dots\dots\dots(1)$

兩邊各加 $2x$, 則

$$5x + 21 + 2x = 7 \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{即 } 7x + 21 = 7 \dots\dots\dots(3)$$

又兩邊各減去 21 , 則

$$7x = 7 - 21 \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{即 } 7x = -14,$$

$$\text{故 } x = -\frac{14}{7},$$

$$\text{即 } x = -2.$$

答: -2 .

驗算: 左邊 $= 5 \times (-2) + 21 = 11,$

右邊 $= 7 - 2 \times (-2) = 11.$

若將本題的運算形式, 逐步加以觀察比較, 可見

I (1) 式右邊的 “ $-2x$ ” 到了 (2) 式的左邊, 變做 “ $+2x$ ”,

II (3) 式左邊的 “ $+21$ ” 到了 (4) 式的右邊, 變做 “ -21 ”.

像這樣, 將一項從等號的左邊遷到右邊, 或是從右邊遷到左邊, 叫做移項, 移項時必變號.

例三 求適合下式的 y 之值:

$$5y - 5 + 3y - 6 = 4y - 12 + 21.$$

$$[\text{解}] \quad 5y - 5 + 3y - 6 = 4y - 12 + 21.$$

移項,把含有 y 的各項一齊移到等號的左邊,不含 y 的各項一齊移到右邊:

$$5y + 3y - 4y = -12 + 21 + 5 + 6.$$

$$\text{歸併同類項,} \quad 4y = 20.$$

$$\therefore y = 5.$$

答: 5.

學習問題

1. 求適合 $18 - 5x = 33 - 8x$ 的 x 之值.
2. 求適合 $4y - (2y - 3) = 15$ 的 y 之值.

指示: 先撤去括號.

練習問題十一

求適合下列各式的 x 或 y 之值:

$$1. \quad 9 + 5x = 13 + 4x.$$

$$2. \quad 14y - 13 = 7y + 29.$$

$$3. \quad 4x - 9 = 6x - 3.$$

$$4. \quad 7y - (6y - 11) = 4.$$

$$5. \quad 3y - 7 - (5y + 17) = 0.$$

$$6. \quad 5x - (3x - 7) = 17.$$

$$7. \quad 14x - \{3x - (2 - x)\} = 22.$$

$$8. \quad 6x - [7x - (8x - 19)] = 3.$$

9. 有一數,牠的 5 倍與 21 的和,剛好等於從 7 減去牠 2 倍的差. 問這數是多少?

10. 有弟兄三人,長兄較次兄大 5 歲,弟較次兄小

3 歲。已知三人年齡的和是 32 歲，問各幾歲？

11. 以銀 60 元分給甲乙丙三人，乙所得的較甲所得的 2 倍少 10 元；丙所得的較甲乙兩人所得的和少 10 元。問各得若干元？

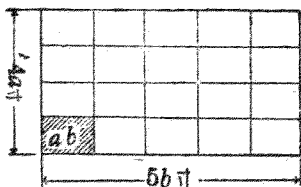
12. 分水菓給甲乙二人，甲所得的恰為乙所得的 4 倍，若甲給乙 15 個，則兩人所有的個數便相等。問兩人原有各若干？

13. 整式的乘法

I 單項式的積

研究問題

1. 有一矩形，長是 $4a$ 寸，寬是 $5b$ 寸，問牠的面積是 ab 平方寸的若干倍？



$$4a \times 5b = \dots\dots\dots$$

由此可知，求單項式的積，方法是先求係數的積，然後以文字因數的積附其後。

例一 試計算 $4x \times (-15a) \times \left(-\frac{3}{10}y\right)$ 。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad 4x \times (-15a) \times \left(-\frac{3}{10}y\right) \\ = 4 \times (-15) \times \left(-\frac{3}{10}\right) axy \end{aligned}$$

$=18axy$答.

學習問題

求下列各式的積:

- 1. $4a \times 5bc$.
- 2. $3 \times (-12xy)$.
- 3. $0.3l \times 6m \times \frac{4}{15}n$.
- 4. $-ax \times (-by) \times (-cz)$.

例二 求 a, a^2 及 a^3 的連乘積.

[解] $a \times a^2 \times a^3 = a(aa)(aaa) = a^{1+2+3} = a^6$.

由此可知同數諸冪的積仍為此數的冪,其指數等於原來諸冪指數的和.

設 m, n, p 為任何正整數,則

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$(A)

$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$(B)

此兩式中,不論 m, n, p 的數值若何,都可以成立,足以表示同數諸冪相乘指數的法則. 像這樣用來表示計算法則的代數式,叫做公式.

學習問題

求下列各式的積:

- 1. $x^7 \times x^8$.
- 2. $3x^4 \times 5x^6$.
- 3. $a \times a \times \frac{5}{7}a^6$.
- 4. $(-y)^3 y^9$.
- 5. $(-a^3)(-a)^5$.
- 6. xx^{m-1} .

$$7. (-1)^{11}. \quad 8. (-1)^{2n}. \quad 9. (-1)^{2n+1}.$$

例三 試計算 $(abc)^2$, $(abc)^3$, $(abc)^4$.

$$[\text{解}] (abc)^2 = (abc)(abc) = a^2b^2c^2,$$

$$(abc)^3 = (abc)(abc)(abc) = a^3b^3c^3,$$

$$(abc)^4 = a^4b^4c^4.$$

由此可推知,若 n 為任何正整數,

$$(abc)^n = a^n b^n c^n \dots\dots\dots (C)$$

又括弧內所含的文字若多於三個時,仍能

成立.

學習問題

1. 求下列各式的積:

$$(1) (3ax)^2. \quad (2) (-abc)^2.$$

$$(3) (-bac)^3. \quad (4) ab(bcd)^4.$$

$$(5) 4p^2\left(\frac{1}{2}q\right)^3. \quad (6) -x^2y^3(xy)^5z.$$

2. 設 $x = -2$, $y = 3$, 求下列各式的值:

$$(1) 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 12x - 5.$$

$$(2) x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

例四 問 $(a^3)^5$ 等於 a 的幾乘冪?

$$\text{解} \quad (a^3)^5 = a^3 a^3 a^3 a^3 a^3$$

$$= a^{3+3+3+3+3}$$

$$= a^{1 \times 5}$$

$$= a^5.$$

若 m, n 爲任何正整數, 則

$$(a^m)^n = a^{mn} \dots \dots \dots (D)$$

學習問題

試計算下列各式:

1. $(2^3)^2$. 2. $(-2^3)^2$. 3. $(3^2)^3$.
 4. $(a^5)^m$. 5. $(b^m)^5$. 6. $(a^5)^n(b^4)^n$.

練習問題十二

試計算下列各式:

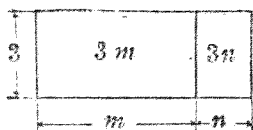
1. $4x^2y^3 \times (-5axy)$. 2. $a \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times (ab^2)^2$.
 3. $a^{n+1} \times a^{n-2} \times a$. 4. $3^a \times 3^{2a} \times 3^{3a}$.
 5. $\frac{1}{3}a \times \left(-\frac{3}{4}a\right)^3$. 6. $(a^m)^n \times (a^n)^m$.
 7. $(3a^2)^2(b^5)^2$.
 8. $(-2a)^3 \times ab \times (-30ab^4)$.
 9. (1) $7a^3b^2(abc)^2 - 4(ab)^4ac^2$,
 (2) $(abc)^2 - (cba)^2 + (cab)^2 + 7a^2b^3c^2$.
 10. (1) $7abc \times \left(-\frac{3}{14}a^2c\right) \times \left(-\frac{2}{3}b^3c^4\right)$,
 (2) $\frac{1}{5}pq \times \left(-\frac{30}{49}qr\right) \times (-7pq^3r)^2$.

11. $3(x+y)^2(x-y)^2(x+y)^2(x-y)^2$.

12. $(a+b)^2x(a^2+b^2)^2x^2y^2(a+b)^2y(a^2+b^2)$.

II 單項式與多項式的乘法

研究問題



1. 有一矩形，長為 $(m+n)$ 尺，寬為 3 尺，問面積為若干？

[解] 面積 = $3(m+n)$ 方尺，

但也可列式為 $3m$ 方尺 + $3n$ 方尺。

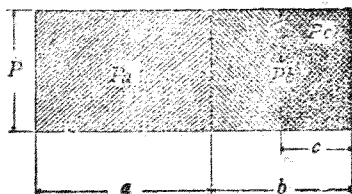
$$\therefore 3(m+n) = 3m + 3n.$$

2. 試計算 $p(a+b-c)$.

[解] 參看右圖，很

容易知道，

$$p(a+b-c) = pa + pb - pc.$$



由上可知，單項式與多項式的相乘積等於此單項式與多項式各項相乘積的代數和。

例五 $a^2 - 2ab + 3b^2$ 乘以 $4ab$ ，其積為何？

[解] $(a^2 - 2ab + 3b^2) \times 4ab$

$$= 4a^2b - 8a^2b^2 + 12ab^3 \dots \dots \dots \text{答.}$$

學習問題

1. $a^2b^3(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) =$

$$2. \quad 2x(3x-4y)+5y(3x-5y)=?$$

練習問題十三

試計算下列各式：

$$1. \quad (2x+3) \times 4x, \quad 2. \quad (x+y) \times (-xy).$$

$$3. \quad -4(x^2-3x-2), \quad 4. \quad (a-b+c) \times 7abc.$$

$$5. \quad 2\{a-1+5(3-2a)\}, \quad 6. \quad 4x-2\{x-3(2-x)\}.$$

$$7. \quad \frac{1}{2}(a-b) - \frac{1}{2}(a+b).$$

$$8. \quad \frac{1}{3}(2x^2+y^2) - \frac{2}{3}(x^2-y^2).$$

$$9. \quad 2(3x-2y) - 4(x+3y) + (2x-y).$$

$$10. \quad \frac{1}{3}(6ab-9ac) + \frac{5}{6}(18ac-12ab).$$

$$11. \quad \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}ax - \frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{10}{9}ax\right).$$

$$12. \quad x^2(x+y^2) - x(2y-1) - x(x^2-2y) - x^2y^2.$$

$$13. \quad x(x^2-yz) + y(y^2-zx) + z(z^2-xy).$$

$$14. \quad (1) \quad 3x(2x-3y) + 5y(2x-3y),$$

$$(2) \quad a^2(c^2+b^2-c^2) + b^2(a^2+b^2-c^2) + c^2(a^2+b^2-c^2).$$

III 多項式與多項式的乘法

例六 求 $a+b$ 與 $a-b$ 的積。

[解] $(a+b)(a-b)$

$$\begin{aligned}
 &= a(a+b) - b(a+b) \quad [\text{設想}(a+b)\text{爲一單項式}] \\
 &= a^2 + ab - ab - b^2 \\
 &= a^2 - b^2 \dots\dots\dots\text{答.}
 \end{aligned}$$

求兩多項式的積，可以第一式的各項與第二式的各項相乘而求諸積的代數和，若有同類項則簡約之。

例七 求 $a^2 - 2b^2 - 3ab$ 與 $4a^2 - 5b^2$ 的積。

[解] 先將前式的各項，依 a 的指數，自大至小，重行排列後再乘，

$$\begin{aligned}
 &(a^2 - 3ab - 2b^2)(4a^2 - 5b^2) \\
 &= 4a^2(a^2 - 3ab - 2b^2) - 5b^2(a^2 - 3ab - 2b^2) \\
 &= 4a^4 - 12a^3b - 8a^2b^2 - 5a^2b^2 + 15ab^3 + 10b^4 \\
 &= 4a^4 - 12a^3b - 13a^2b^2 + 15ab^3 + 10b^4 \dots\dots\dots\text{答.}
 \end{aligned}$$

在這個答案裏面， a 的指數，自左至右順次爲 4, 3, 2, 1，逐漸小下去，像這樣排列的方法，叫做 a 的降冪序。觀察 b 的指數，自左至右順次爲 1, 2, 3, 4，逐漸大起來，這樣排列的方法，叫做 b 的昇冪序。

多項式的乘法，若列爲縱式，須先將被乘式及乘式同依某文字的降冪序或昇冪序排列後，

再行運算比較便當。

例八 求 $x^3 + a^2 + ax$ 與 $-2a + x$ 的積，并驗算正誤。

[解] 依 x 的降冪序排列，則

被乘式爲…… x^3 $+ ax + a^2$

乘式爲…… $x - 2a$

$$\begin{array}{r} x^3 \qquad \qquad \qquad + ax + a^2 \\ x - 2a \\ \hline x^4 \qquad \qquad \qquad + ax^2 + a^2x \\ - 2ax^3 \qquad \qquad - 2a^2x - 2a^3 \\ \hline \end{array}$$

積爲…… $x^4 - 2ax^3 + ax^2 - a^2x - 2a^3$

驗算： 設 $x=1, a=1$ 。

被乘式的值是 3，乘式的值是 -1，所以積的值應該是 $(+3)(-1) = -3$ 。現在求得的積，其數值爲 $1 - 2 + 1 - 1 - 2 = -3$ ，故計算正確。

學習問題

1. 求 $3b - 2a$ 與 $a + 5b$ 的積。
2. 求 $4a^4 + 1 + 2a - 3a^3$ 與 $5a^2 - 3$ 的積，并設 $a=1$ 以驗算之。

練習問題十四

試計算下列各式：

1. $(x+6)(x+7)$.
2. $(a+b)(x-y)$.
3. $(2x+5)(3x+4)$.
4. $(2a-3b)(4a-5b)$.

5. $\left(\frac{1}{2}c - \frac{3}{4}d\right)\left(\frac{2}{3}c + 4d\right).$

6. $\left(\frac{1}{2}ab - \frac{1}{3}bc\right)\left(\frac{3}{4}ab + \frac{1}{3}bc\right).$

7. $(a^2 + ab + b^2)(a - b).$

8. $(x - y)(x^2 - xy + y^2).$

9. $(3a + 2b)^2.$ 10. $\left(\frac{1}{3}m - \frac{1}{2}n\right)^2.$

11. $(x^2 + x + 1)^2.$ 12. $(x^3 - x^2 + x - 1)(x + 1).$

13. $(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)(x + y + z).$

14. $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + b^2).$

15. $3(x^2 - 3x + 1) - (4x - 5)(1 - 6x).$

14. 方程式及應用問題

例一 有甲乙丙三數,乙數較甲數小 3,丙數較甲數小 4. 已知甲數的平方減 30 等於乙丙兩數的積,問甲數爲若干?

〔解〕 設甲數爲 x ,則乙數爲 $x - 3$,丙數爲 $x - 4$,

甲數的平方減 30 爲 $x^2 - 30$,

乙丙兩數的積爲 $(x - 3)(x - 4).$

因爲題目上說,甲數的平方減 30 等於乙丙兩數的積,所以得下式,

$$x^2 - 30 = (x - 3)(x - 4) \dots \dots \dots (1)$$

去括弧, $x^2 - 30 = x^2 - 3x - 4x + 12,$

移項, $x^2 - x^2 + 3x + 4x = 12 + 30,$

即 $7x = 42,$

$$\therefore x = \frac{42}{7},$$

即 $x = 6.$ 答: 甲數為 6.

驗: 甲數為 6, 則乙數為 $6 - 3 = 3$, 丙數為 $6 - 4 = 2$,
甲數的平方減 30 為 $6^2 - 30 = 36 - 30 = 6$,
又乙丙兩數的積為 $3 \times 2 = 6$, 和前相等, 所以“甲數為 6”
的答案不錯.

如(1)式, 含有某文字的兩個代數式相等, 僅限於這個文字等於某特殊數值時纔能成立的, 叫做方程式. 求這個特殊數的手續叫做解方程式.

學習問題

1. 解方程式 $7(2x - 3) - 11(5x - 4) = 64.$

2. 解方程式 $(x - 3)(2x + 5) = 2x^2 - 4x.$

例二 父年 45 歲, 子年 9 歲, 問幾年後父年為子年的 3 倍?

[解] 設自今 x 年後父年為子年的 3 倍, 到那時, 父年是 $45 + x$ 歲, 子年是 $9 + x$ 歲.

依題意得方程式：

$$45 + x = 3(9 + x).$$

解之， $45 + x = 27 + 3x,$

$$x - 3x = 27 - 45,$$

$$-2x = -18.$$

$$\therefore x = 9.$$

答：九年後。

驗：九年後父子的年齡各若干，父年是不是爲子年的 3 倍？

學習問題

1. 兄有銀 270 元，弟有銀 150 元，問兄給弟幾元，則弟有銀將要是兄有銀的 3 倍？ 答：165 元。

2. 父年 39 歲，長子 12 歲，次子 5 歲，問幾年後，兩子年齡的總較父年大 3 歲？ 答：25 年後。

練習問題十五

1. 某數加 1 與某數加 2 的乘積，等於某數減 3 與某數減 4 的乘積，問某數爲若干？

解下列方程式：

2. $2(x-2) = x-3.$ 3. $15+4(8+2x) = 7.$

4. $4(2x+3) - 3(2x+4) = 10.$

$$5. \quad 6x(2x+3) = (3x+2)(4x+3).$$

$$6. \quad 2(x-3) - 3(x-2) + 4(x-6) = 0.$$

$$7. \quad (x+3) - 3(x-2) = 2(x+1) - 3(x-1) - 18.$$

8. 母年34歲,子年10歲,問母年爲子年的7倍,在今幾年前?

9. 現在父年爲子年的5倍;七年後,父年爲子年的3倍,問現在父年幾歲?

10. 童子分桃,每人4個,則餘10個;每人6個,則不足6個,問童子幾人?

指示: 設童子 x 人,則桃數可作兩代數式以表之.

11. 某人攜款若干,往購每石價9元1角的米,到時米價已漲,每石要11元6角,祇好比豫定的少買14石,問豫定買米若干石?

12. 有一塊正方形的地面,若一邊加長2公尺,他邊加長3公尺,則所成的矩形比原來的正方形,面積加大66平方公尺,問正方形每邊的原長多少?

15. 整式的除法

I 單項式除以單項式

研究問題

1. 求下列各式的商:

$$3^5 \div 3^2 = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} = ?$$

$$a^5 \div a^2 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = ?$$

$$2^3 a^6 \div 2^2 a^2 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times a^5}{2 \times 2 \times a^2} = ?$$

同數兩幕的商，仍爲此數的幕，其指數等於被除數的指數減去除數的指數的差。

設 m, n 爲正整數，且 $m > n$ ，則

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

例一 $35a^5 \div (-5a^2) = \{35 \div (-5)\}(a^5 \div a^2) = -7a^3$

例二 $(-4a^8 b^{10}) \div (-14a^3 b^6)$
 $= \{(-4) \div (-14)\}(a^8 \div a^3)(b^{10} \div b^6)$
 $= \frac{2}{7} a^5 b^4$

單項式除以單項式的方法先求係數的商，然後以文字因數的商附其後。

注意： $a^4 \times 1 = a^4$ ，故 $a^4 \div a^4 = 1$ 。

公式， $a^m \div a^m = 1$ 。

學習問題

求下列各式的商：

1. $a^{10} \div b^4$ 2. $x^{15} \div x^5$ 3. $m^2 \div m^3$

4. $\frac{(4y)^7}{(4y)^4}$ 5. $\frac{a^{m+1}}{a^5}$ 6. $\frac{x^{2n}}{a^n}$
7. $a^{15} \div a^9 \div a^6$ 8. $x^6 y^7 \div x^4 y^5$ 9. $axy^3 \div ay^3$
10. $\frac{20ab}{5a}$ 11. $\frac{-7a^3}{2a^2}$ 12. $\frac{a^{2m}}{a^{m+n}}$

練習問題十六

試計算下列各式：

1. $(-a)^0 + a^0$ 2. $-2^{12} \div (-2)^9$
3. $x^{3m} y^{2m} \div (xy)^m$ 4. $(mnxy)^{20} \div m^{10} n^{17} x^3 y^9$
5. $5a \times 6b \div 10ab$ 6. $a^5 x^3 \div (-a^3 x) \times 9ax^2$
7. $-6a^2 b(x-y)^3 \div 4ab(x-y)^2$
8. $1\frac{2}{3}x^2 y^3 \div \frac{5}{6}xy^2 \times (-4xyz^2)$
9. $12abc \times acd \div (-2abcd) \times \left(-\frac{1}{6}ad\right)$

II 多項式除以單項式

研究問題

1. $(5x+2y) \times 3 = 15x+6y$,
 $(15x+6y) \div 3 = ?$
2. $(a+b-c)x = ax+bx-cx$,
 $\frac{ax+bx-cx}{x} = ?$

多項式乘以單項式既然是以此單項式遍

乘多項式的各項除法乃是乘法的還原，所以多項式除以單項式，乃以此單項式遍除多項式的各項而求諸商的代數和。

$$\begin{aligned} \text{例三} \quad (4xy - 6x^2y + 14xy^2) \div (-2xy) & \dots\dots\dots \\ & = -2 + 3x - 7y \dots\dots\dots \text{答。} \end{aligned}$$

例四 試以 $15abc$ 除 $15a^2bc + 30ab^2c - 45abc^2$ 。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & \frac{15a^2bc + 30ab^2c - 45abc^2}{15abc} \\ & = \frac{15a^2bc}{15abc} + \frac{30ab^2c}{15abc} - \frac{45abc^2}{15abc} \\ & = a + 2b - 3c \dots\dots\dots \text{答。} \end{aligned}$$

學習問題

求下列各式的商：

1. $(8x + 12y) \div 4$.

2. $(15am - 10bm - 20m) \div (-5m)$.

3. $\frac{5x^3y - 10x^2y^2 + 20xy^3}{5xy}$.

4. $\left(-\frac{5}{3}xy^2 + \frac{5}{3}xy + \frac{10}{3}x\right) \div \left(-\frac{5}{6}x\right)$.

練習問題十七

試計算下列各式：(1-6)

1. $(x^2yz - xy^2z - xyz^2) \div xyz$,

$$2. \quad (-12a^3b + 18a^2b^4 - 30a^2b^2c^2) \div 6a^2b^2.$$

$$3. \quad \frac{-8a^6y^6 + 12x^4y^9}{-4x^4y^3}. \quad 4. \quad \frac{3c + 9c^2 - 27c^3 - 81c^4}{-3c}$$

$$5. \quad \frac{ab - 2ac - 3ad}{a} + \frac{15 - 3ac - 45ab}{15}$$

$$6. \quad \frac{6x - 4x^2}{2x} - \frac{-2x^2y + 3xy}{xy^2}$$

$105a^2b^2c^2 - 21a^2b^2c^2 + 42a^2b^2c^2$ 以下列各式除,其

商若何?

$$7. \quad 7a.$$

$$8. \quad -3ab^2.$$

$$9. \quad -\frac{7}{2}a^2bc^2.$$

$$10. \quad \frac{3}{4}a^2b^2c^2.$$

下列各式,先行除法,然後去括號并整理:

$$11. \quad \{(a+b)^3 - 3(a+b)^2\} \div (a+b)^2.$$

$$12. \quad \{21(x-y)^7 - 35(x-y)^6\} \div \{-7(x-y)^5\}.$$

III 多項式除以多項式

研究問題

$$1. \quad 672 \div 32 = ?$$

$$2. \quad (6a^2 + 7ab + 2b^2) \div (3a + 2b) = ?$$

[解] 1.

$$\begin{array}{r} 21 \\ 32 \overline{)672} \\ \underline{64} \\ 32 \\ \underline{32} \\ 0 \end{array}$$

答: 21.

2. 多項式相除,和算術裏的長除法相似,

$$3a+2b \overline{)6a^2+7ab+2b^2}$$

先以除式的首項 $3a$ 除被除式的首項 $6a^2$,得商 $2a$,作為所求商式的第一項,寫如下:

$$\begin{array}{r} 2a \\ 3a+2b \overline{)6a^2+7ab+2b^2} \end{array}$$

以 $2a$ 乘除式,將所得的積寫在被除式的同類項下面,行減法,

$$\begin{array}{r} 2a \\ 3a+2b \overline{)6a^2+7ab+2b^2} \\ \underline{6a^2+4ab} \\ 3ab+2b^2 \end{array}$$

更以 $3a$ 除餘式的第一項 $3ab$ 得商 b ,作為所求商式的第二項,寫如下:

$$\begin{array}{r} 2a+b \\ 3a+2b \overline{)6a^2+7ab+2b^2} \\ \underline{6a^2+4ab} \\ 3ab+2b^2 \end{array}$$

以 b 乘除式,將所得的積寫在餘式的同類項下面,再行減法:

$$\begin{array}{r} 2a+b \\ 3a+2b \overline{)6a^2+7ab+2b^2} \\ \underline{6a^2+4ab} \\ 3ab+2b^2 \\ \underline{3ab+2b^2} \\ 0 \end{array}$$

因無餘數，故所求的商是 $2a + b$ 。

多項式除以多項式，其法爲：

I 先將被除式和除式同依某文字的降冪序或昇冪序排列，

II 以除式的首項除被除式的首項，所得的商是商式的首項，

III 以此商乘除式，將所得的積寫在被除式的同類項下面，行減法，

IV 更自被除式中，寫下必需的幾項，於是依前法除以除式，得商式的第二項，

V 如此繼續除下去，至被除式的各項，都用到爲止。

例五 以 $2a^2 - 3ab + 4b^2$ 除 $8a^4 - 22a^3b + 43a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4$

[解]

$$\begin{array}{r}
 4a^2 - 5ab + 6b^2 \\
 2a^2 - 3ab + 4b^2 \overline{) 8a^4 - 22a^3b + 43a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4} \\
 \underline{8a^4 - 12a^3b + 16a^2b^2} \\
 -10a^3b + 27a^2b^2 - 38ab^3 \\
 \underline{-10a^3b + 15a^2b^2 - 20ab^3} \\
 12a^2b^2 - 18ab^3 + 24b^4 \\
 \underline{12a^2b^2 - 18ab^3 + 24b^4} \\
 0
 \end{array}$$

答： $4a^2 - 5ab + 6b^2$ 。

學習問題

1. 以 $3-x+x^2$ 除 $2x^3+3x^2+x+15$.

例六 求 x^4-y^4 除以 $x+y$ 的商.

[解] 被除式裏面缺少 x 的 3, 2, 1 諸次幂, 列式時要豫留空地,

$$\begin{array}{r}
 x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 \\
 x+y \overline{)x^4} \\
 \underline{x^4 + x^3y} \\
 -x^3y \\
 \underline{-x^3y - x^2y^2} \\
 x^2y^2 \\
 \underline{x^2y^2 + xy^3} \\
 -xy^3 - y^4 \\
 \underline{-xy^3 - y^4} \\
 0
 \end{array}$$

答: $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$.

學習問題

1. 求 $x^4+x^2y^2+y^4$ 除以 x^2-xy+y^2 的商.

例七 試以 $1-x^2$ 除 x^3+x+x^2+1 .

[解] 若被除式和除式, 都依 x 的降幂序排列,

則

$$\begin{array}{r}
 -x-1 \\
 -x^2+1 \overline{)x^3+x^2+x+1} \\
 \underline{x^3 -x} \\
 x^2+2x+1 \\
 \underline{x^2 -1} \\
 2x+2
 \end{array}$$

答: 商 $-x-1$,
餘 $2x+2$.

若兩式都依 x 的昇幂序排列,則

$$\begin{array}{r}
 1+x+2x^2 \\
 1-x^2 \overline{) 1+x+x^2+x^3} \\
 \underline{1} \quad \quad -x^2 \\
 x+2x^2+x^3 \\
 \underline{x} \quad \quad -x^2 \\
 2x^2+2x^3 \\
 \underline{2x^2} \quad \quad -2x^4 \\
 2x^3+2x^4
 \end{array}$$

答: 商 $1+x+2x^2$, 餘 $2x^3+2x^4$.

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{驗: } (-x-1)(-x^2+1)+2x+2 \\
 (1+x+2x^2)(1-x^2)+2x^3+2x^4
 \end{array} \right\} \text{等於被除式否?}$$

多項式的除法,如若不能除盡,則因兩式排列的方法之不同,而所得的商數及餘數,亦隨之而異;但是無論如何,下列的關係式必定成立,所以可用牠來檢驗運算的正誤。

$$\text{商} \times \text{除式} + \text{餘式} = \text{被除式}$$

注意: 多項式的除法,除特別情形外,兩式均以依所含文字的降幂序排列為妥。
 若不能除盡時,除到餘式首項的指數小於除式首項的指數為止。

學習問題

1. 求 $(x^4 + 4x^2 - 5x + 2 - 3x^3) \div (1 - 2x + x^2)$ 的商及

除者驗算正誤:

(1) 依 x 的降冪序排列,

(2) 依 x 的昇冪序排列.(商至四項爲止)

練習問題十八

下列各題中,試以第二式除第一式:

1. $a^2 + 5a + 6, a + 3.$ 2. $x^2 - 12x + 36, x - 6.$

3. $34x^2 - 88y^2 + xy, 7x - 11y.$

4. $x^3 - 4x^2 + 3 - 20x, x + 3.$

5. $x^4 + 5x - 4x^2 + x^3 - 3, x^2 + 2x - 3.$

6. $8a^3 - 14a^2b - 3b^3 - 5a^2b^2 + 14ab^3,$

$3b^2 + 2a^2 - 5ab.$

7. $x^3 - 1, x^2 + x + 1.$ 8. $a^3 + 8, 2 + a.$

9. $x^6 - y^3, x - y.$ 10. $x^6 - 1, x^2 + x + 1.$

下列各題,先依所含文字的降冪序排列,然後以第二式除第一式求商及餘,并驗算其正誤:

11. $64x^2 + 1, 4x - 1.$

12. $2x^4 + x + 1 + x^3 + 4x^2, x^2 + 1 - x.$

下列各題,先依所含文字的昇冪序排列,然後以第二式除第一式,求商(至第四項)及餘并驗算其正誤:

13. $x^2 + 1, x + 1.$

14. $30a^4 + 11a^3 + 22 - 82a^2 - 15a, 1 + 2a + 3a^2.$

15. $(4x^4 - 7x^3 + 12x - 30) \div \{(x + 3)^2 - 5\} = ?$

16. 試證 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

第二篇 提要

◎ 指數法則

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 2. $(abc)^m = a^m b^m c^m$

3. $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 4. $(a^m)^n = a^{mn}$

◎ 括號用法

1. $+(a-b+c) \begin{matrix} \leftarrow \\ \rightarrow \end{matrix} a-b+c$

2. $-(a-b+c) \begin{matrix} \leftarrow \\ \rightarrow \end{matrix} -a+b-c$

◎ 整式的加減

1. $a - 2b - 3a + 4b = (1-3)a + (-2+4)b$
 $= -2a + 2b$

2. 多項式的加減，如遇同類項必簡約之。

◎ 整式的乘除

運算之前，先要將兩式排列，

1. 在乘法中，同依某文字的降冪序或昇冪序排列之。

2. 在除法中，同依某文字的降冪序排列之。

雜題 II

1. 若 $a=3$, $b=-2$, $c=-1$, 求下列兩式的值:

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

$$(2) \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

2. 先求 $5x^3 - 7x^2 + 9x + 6$ 與 $-4x^3 - 2x^2 + 6x - 7$ 的和,

然後再從這和中減去 $4x^3 + 13x^2 - 7x - 12$.

3. 試從 $5a^5 - 7a^3 + 8a^2 - 7 + 6a - 4a^4$ 中減去 $2a^5$

$-7 + 7a^2$ 與 $8a^5 + 2a^4 + 7a - 5a^2 - 4$ 的和.

4. 撤去下列的括號, 并化簡之:

$$(a-b) - \{3a - (a-b)\} + \{(a-2b) - (5a-2b)\}.$$

又若 $a = -\frac{4}{5}$, $b = \frac{1}{5}$, 則上式的數值若何?

5. 求 $x^4 - 5x^2y^2 - 7y^4 + 6xy^3 + 4x^3y$ 及 $2xy^2 - y^3 -$

$2x^2y + 4x^3$ 的積, 并設 $x=1$, $y=-1$ 以驗算之.

6. 化簡下列各式:

$$(1) \quad (x+y+z)\{x(y-z) + y(z-x) + z(x-y)\}.$$

$$(2) \quad 2a - \{3b + (2b - c) - 4c + [2b - (3b - 2b)]\}.$$

$$(3) \quad (2m+1-2m^2) + \{(m^2+3-5m) - (3m^2-4+3m)\}.$$

7. 試以後式除前式, 并驗算之:

$$(1) \quad 2x^3 + x^3 + 4x^2 + x + 1, \quad x^2 - x + 1.$$

$$(2) \quad 9x^4 + 2x - x^2 + 20, \quad 3x^2 + 4 - 5x.$$

8. 有一正方形，每邊長 a 尺，若一邊加 b 尺，一邊減 b 尺，改爲一長方形，問面積的增減若何？

9. 以 $x^2 + x + 1$ 除某式，得商 $x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ ，餘式爲 $11x - 7$ 。問某式若何？

10. 某式除 $6a^3 - a^2b - 10ab^2 + b^3$ 得商 $2a - 3b$ ，餘 $4b^3$ ，求某式。

11. 設 $a = 5x - 3y - 2z,$

$$b = 5y - 3z - 2x,$$

$$c = 5z - 3x - 2y,$$

問

$$a + b + c \text{ 等於若干?}$$

12. 試化簡下列各式：

$$(1) \quad (-[-\{(-a)^1\}^2]^3)^4.$$

$$(2) \quad (a^a b^b c^c)(a^b b^c c^a)(a^c b^a c^b).$$

13. 試證以 $x - 2$ 除 $x^3 - 3x^2 - 18x + 42$ 所得的餘數，和以 $x = 2$ 代入被除式的數值相等。

14. 證下列各式：

$$(1) \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a(a^2 - bc) + b(b^2 - ca) + c(c^2 - ab).$$

$$(2) \quad (x+y)(x-y) + (y+z)(y-z) + (z+x)$$

$$(z-x)=0,$$

$$(3) \quad (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab).$$

$$(4) \quad 2(a-b)(a-c) + 2(b-c)(b-a) + 2(c-a)(c-b) = (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2.$$

15. 下列各式,有錯誤沒有? 如有,即請改正:

$$(1) \quad (ab)^2 = a^2b^2.$$

$$(2) \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2.$$

$$(3) \quad (a \times b)^2 = a^2 \times b^2.$$

$$(4) \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2.$$

16. 試證 $x=1, 2$ 或 3 時, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 的值都是 0. 又若 $x=10$, 則牠的值若何?

17. 試證 $x=6$ 時, $\frac{1}{7}(3x-4) + \frac{1}{3}(5x+3)$ 與 $43-5x$ 相等.

18. 問 x 等於何數時, $(x+5)^2$ 和 $(x+3)^2 + 40$ 的數值相等?

19. 解下列方程式:

$$(1) \quad 8(x-1) + 17(x-3) = 4(4x-9) + 4.$$

$$(2) \quad 5x - (3x-7) - \{4-2x-(6x-3)\} = 10.$$

$$(3) \quad (x+1)^2 - (x^2-1) = x(2x+1) - 2(x+2)$$

$$(x+1)+20.$$

$$(4) \quad 2(x-4)-(x^2+x-20)=4x^2-(5x+3)$$

$$(x-4)-64.$$

20. 下列兩題,試先用算術解,然後再用方程式解:

- (1) 某工人搬運玻璃器 120 個,講明運到一個,得銀 8 分,破壞一個,賠銀 2 角 5 分,後來共得銀 7 元 2 角 9 分. 問破壞幾個?
- (2) 某甲有銀 504 元,某乙有銀 216 元. 每日甲用去 12 元,乙用去 8 元,問幾日後甲的餘銀恰爲乙餘銀的 3 倍?

第三篇

一次方程式

第一章 一元一次方程式

16. 恆等式及方程式

藉等號“=”表示兩代數式相等的,叫做等式,這兩式各在等號的一旁,叫等式的兩邊,在左的叫左邊,在右的叫右邊.

等式分爲兩種.

研究問題

1. 設 $m=3, n=1$ 或 $m=0, n=-1$ 或 $m=10, n=81$, 問等式 $3m+2n-2m-3n=m-n$ 兩邊的數值各若何? 又這式的左邊,如若歸併後,和右邊相同否?

2. 於等式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 中,任意設 a, b 等於何數,代入後看兩邊的數值是否相等.

如上二例,等式中所含的文字,不論牠數值爲何,代入後兩邊都能相等的,叫做恆等式.

3. 下式中, m 等於若干,則兩邊纔能相等?

$$3m+1=2m+4.$$

4. 由 -3 到 $+3$ 當中所有的整數,依次設為 x 之值,代入下式後,看何時兩邊的數值能相等.

$$(x+1)^2 = x+3.$$

第 3 題裏的 m 及第 4 題裏的 x ,並不是等於任何數代入後都能使原式的兩邊相等,不過僅限於某特殊的數值而已. 換句話說,這樣的等式,形式上雖有一個等號連接牠的左右兩邊,但實際上僅限於牠

所含的文字等於某特殊數值代入後纔能相等這樣的等式,叫方程式.

注意 1. 恆等式可由代數的運算,將兩邊化做相同,如雜題 II 裏第 14 題都是,但方程式是不能的,如本節第 4 題.

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, 而 $x^2 + 2x + 1$ 和 $x+3$ 不同.

2. 恆等式所用的等號,有時為明顯計,寫做“ \equiv ”.

學習問題

試判定下列各式,那個是方程式,那個是恆等式:

1. $7x-7=14$.
2. $(x-1)^2 - (x^2 - 2x) = 1$.
3. $3(z-1) = 9(1-z)$.
4. $5(y-2) = 10$.

$$5. (x-1)^2 - (x^2 + 2x) = 1.$$

$$6. (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2).$$

17. 一元一次方程式

如前節第 3 題中的 m 及第 4 題中的 x , 方程式裏所含的文字, 究竟等於什麼數, 代入後原式的兩邊纔能相等, 非經一番手續, 事前不能預知, 所以叫做未知數; 對未知數而言, 如 1, 2, 3, 4 等數值確定的, 叫做已知數。

一個式子裏面, 含有未知數的各項, 叫未知項, 不含未知數, 單含有已知數的, 叫已知項。

未知數通常都用 x, y, z, t, u, v, \dots 等表之。

方程式裏所含代表未知數的文字, 叫做元。祇含有一種未知數的, 叫一元方程式; 如果含有兩種、三種或三種以上的未知數, 便跟着叫二元方程式、三元方程式等。

例如: 前節例 3 和例 4 都是一元方程式,

$$3x^2 + 2y^2 = 5 \text{ 是二元方程式,}$$

$$5x - 3y = 7 + 6z \text{ 是三元方程式.}$$

研究問題

1. 下列諸式中, 各項所含的文字因數的個數如

何?

$$2x, -3y^3, 7a^2b^4c, a+b, x^2+5x+4.$$

單項式裏所含文字因數的個數,叫做單項式的次數。依次數的高低,單項式分爲一次式,二次式,三次式……等。

例如, $2x$ 是一次式,

$-3y^3$ 是三次式,

又 $7a^2b^4c$ 是 $2+4+1=7$ 次式。

多項式的次數以牠所含各項中次數最高的爲準。

例如, $a+b$ 是一次式,

x^2+5x+4 是二次式。

學習問題

1. 單項式的次數和牠所含的文字的指數有什麼關係? 試舉例說明。

2. 下列各式,各是幾次式?

$$5xyz-x+yz, x^5+x^4-\frac{2}{3}x-9$$

一元方程裏面所含的未知數,沒有高於一次的,叫一元一次方程式。能使方程式兩邊的數值相等的未知數的值,叫做那方程式的根,所

以“解方程式”便是求方程式的根。

解方程式時，要應用下列的等量公理：

I 等式的兩邊，同加一個數或同減一個數，仍然相等。

II 等式的兩邊，同以一個不等於零的任何數乘或除，仍然相等。

研究問題

1. 前面學過的移項變號，是根據什麼原理？

2. 假如 $3x=18$ ，則 $x=6$ ，這種變化是根據什麼原理？

例一 解方程式 $(x-3)^2 - (x+5)^2 = 8(1-x)$ 。

$$[\text{解}] \quad (x-3)^2 - (x+5)^2 = 8(1-x),$$

$$(x^2 - 6x + 9) - (x^2 + 10x + 25) = 8(1-x),$$

$$x^2 - x^2 - 6x - 10x + 8x = 8 - 9 + 25,$$

$$-8x = 24,$$

$$\therefore x = \frac{24}{-8}.$$

$$x = -3.$$

答： -3 。

驗： 若 $x = -3$ ，則原方程式的

$$\text{左邊} = (-3-3)^2 - (-3+5)^2 = 36 - 4 = 32,$$

$$\text{右邊} = 8 \times (1+3) = 32.$$

$32 = 32$, 所以 $x = -3$ 能適合原方程式.

這個例題的方程式裏面,雖然含有 x 的二次項,但將未知項集於一邊後,二次項即消去,結果仍然可照一次方程式的解法求得方程式的根,所以仍然是一次方程式.

最後所得的根是負數,叫做負根;對負根而言,如果根是正數,便叫正根.

學習問題

1. 解方程式 $7(3x-5) = 3(4x-3) + 1$.
2. 解方程式 $(1+6x)^2 + (2+8x)^2 = (1+10x)^2$.

練習問題十九

解方程式: (1-8)

1. $7x - 12 = 15 + 6x - 8x$.
2. $12x - 6x + 4x = 84 + 3x$.
3. $3(x-2) - (1-x) = 13$.
4. $2(x+1) - 5(x+1) = -18$.
5. $x(x-3) - x(x+5) + 1 = 0$.
6. $3x(x-5) + 3 = 3(x-2)^2 - 5x - 7$.
7. $(x+1)(x+1) = \{1 - (11-x)\}x - 8$.

$$8. \quad 2x^2 - x\{1 - 2(3 - x) - 8\} = x + 1.$$

9. 下列方程式是幾元或次? 若 $y = -5$, 則 x 應該是多少?

$$5x - 7y = 2xy.$$

10. 下列方程式是幾元幾次? 若 $x = 3$, 則 y 應該是多少?

$$(2x + y)^2 - (x + y)(y - 2x) = 0.$$

例二 解方程式 $x - 2 + \frac{2x - 1}{3} - \frac{4(x - 1)}{5} = \frac{14}{5}$.

[解] $x - 2 + \frac{2x - 1}{3} - \frac{4(x - 1)}{5} = \frac{14}{5}$.

去分母, 以諸分母的最小公倍數 15, 遍乘各項(根據什麼原理?), 則

$$15x - 30 + 5(2x - 1) - 12(x - 1) = 42.$$

$$15x - 30 + 10x - 5 - 12x + 12 = 42.$$

$$15x + 10x - 12x = 42 + 30 + 5 - 12.$$

$$13x = 65.$$

$$\therefore x = \frac{65}{13} = 5.$$

答: 5.

驗: 若 $x = 5$, 則原方程式的左邊

$$5 - 2 + \frac{10 - 1}{3} - \frac{4 \times 4}{5} = 3 + 3 - \frac{16}{5} = \frac{14}{5}, \text{ 和右邊相}$$

等.

注意：分數的分子分母間的橫線兼有括線的作用，所以去分母後最好先以括弧包分子，然後再撤去括弧，這樣符號纔不易弄錯。

學習問題

1. 解 $\frac{5}{2}x - 1 = x - \frac{5}{8}$.

2. 解 $\frac{3x-4}{2} - \frac{4x-3}{3} = x-6$.

練習問題二十

解下列方程式：

1. $x + \frac{x}{2} = 18$.

2. $x - \frac{3x}{8} = 5$.

3. $\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}x + 5 = 0$.

4. $\frac{x-2}{3} = \frac{3-x}{2}$.

5. $\frac{5z}{2} + 20 + (z-12) = 8$.

6. $\frac{r}{2} + \frac{r}{3} = \frac{r}{4} + 7$.

7. $\frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{3}(x-1) = 2$.

8. $\frac{x-3}{4} - \frac{2x-3}{3} = 2\frac{1}{6}$.

9. $\frac{8-x}{6} + \frac{2(x-1)}{3} = \frac{x+6}{2} - \frac{x}{3}$.

10. $\frac{1}{2}\{x+3-(3x-1)\} + \frac{11-x}{5} = 3\frac{1}{5}$.

11. $0.5x - 2 = 0.25x + 0.2x - 1$.

12. $0.24x - 2.1218 = 0.8x - 2.105$.

13. 下式中，若 $a = \frac{1}{2}$ ， $b = \frac{1}{3}$ ，問 c 的值該是多少？

$$a(b-c) - b(a^2 - c) = 0.$$

注意：解方程式的步驟：

1. 去分母——如若式中有分數的係數，先以諸分母的最小公倍數遍乘各項，藉此把分母去掉；
2. 去括號——如若兩式相乘，或是一式的冪，把牠乘開來，所有的括號，都把牠撤去；
3. 移項——把所有的未知項都移到左邊，已知項都移到右邊；
4. 歸併——簡約同類項；
5. 得根——拿未知數的係數除已知數，即得方程式的根；
6. 驗算——把求得的根，代入原方程式，看是否適合。

$$14. \quad 5x - 6(x - 5) = 2(x + 5) + 5(x - 4).$$

$$15. \quad 14x - (5x - 9) - \{4 - 3x - (2x - 3)\} = 0.$$

$$16. \quad x(x + 1) + (x + 1)(x + 2) = (x + 2)(x + 3) + x(x + 4) - 9.$$

$$17. \quad 20(2 - x) + 3(x - 7) - 2[x + 9 - 3\{9 - 4(2 - x)\}] = 22.$$

$$18. \quad 4(x + 5)^2 - (2x + 1)^2 = 3(x - 5) + 180.$$

$$19. \quad \frac{3}{16}(x - 1) - \frac{5}{12}(x - 4) = \frac{2}{5}(x - 6) + \frac{5}{48}.$$

$$20. \quad \frac{3x}{4} - \frac{6}{17}(x + 10) - (x - 3) = \frac{x - 7}{51} - 4\frac{3}{4}.$$

$$21. \quad x - \left(3x - \frac{2x - 5}{10}\right) = \frac{1}{6}(2x - 57) - \frac{5}{3}.$$

18. 方程式的應用問題

例一 父年40歲,子年10歲,問幾年後父年爲子年的六倍?

[解] 仿照 §14 例二,設 x 年後父年爲子年的六倍,那麼依題意可得方程式,

$$x+40=6(x+10).$$

解之, $x+40=6x+60,$

$$-5x=20.$$

$$\therefore x=-4.$$

即-4年後. 幾年後爲正,則幾年前爲負,所以“-4年後”的意思,就是“4年前”.

答: 4年前.

研究: 如答題目裏“幾年後”改爲“幾年前”,那麼方程式應當是:

$$40-x=6(10-x).$$

解之, $x=4.$

即4年前. 故知上面的解釋不錯.

負根的解釋 如上例解方程式時得到負根,應該研究這個負根能不能有適合題意的解釋. 如有,要註明在解答之下;如若沒有,那這負

根便捨棄不用。

例二 某校分高初中兩部，高中部學生較總數的 $\frac{1}{3}$ 多 150 人，初中部學生較總數的 $\frac{2}{5}$ 少 12 人，問學生總數若何？

〔解〕 設學生總數是 x 人，那麼高中部學生應該是 $\frac{1}{3}x + 150$ 人，初中部學生應該是 $\frac{2}{5}x - 12$ 人，故得方程式，

$$\frac{1}{3}x + 150 + \frac{2}{5}x - 12 = x,$$

解之， $5x + 2250 + 6x - 180 = 15x,$

$$-4x = -2070,$$

$$\therefore x = 517\frac{1}{2}.$$

即學生總數是 $517\frac{1}{2}$ 人，但人數不能為分數，所以本題不能有適當的解答，這是不合理的問題。

注意：解應用問題的步驟：

1. 充分了解題意後，選擇適當的未知數；
2. 研究未知數與問題中其他各數的關係；
3. 依題意作方程式；
4. 解方程式求方程式的根；
5. 研究所得的根是否與題意適合然後決定答。

練習問題二十一

1. 有大小兩數,相差14,大數的2倍較小數的3倍多11. 問兩數各若干?

2. 父年51歲,子年19歲. 問幾年後父年為子年的5倍?

3. 8年前父年是子年的4倍,8年後父年是子年的2倍. 問父子現在各幾歲?

指示: 設8年前的子年是 x 歲.

4. 甲有100元,乙有30元. 今因甲用去若干元為乙用去的2倍,甲所餘即為乙的4倍. 問各人用去幾元?

5. 甲的資本是乙的3倍;後來甲損失600元,乙獲利200元,甲所有即為乙的2倍. 問兩人原有資本各若干?

6. 試分100為兩部分,使一部分的 $\frac{3}{4}$ 較其他一部分的 $\frac{7}{9}$ 多20.

7. 有三個連續奇數,和是603. 問各是多少?

指示: 三數遞差為2.

8. 甲有90元,乙有40元. 今甲每月儲蓄20元,乙儲蓄10元,問幾月後甲所有為乙所有的3倍?

例三 有二位數，數字的和是 6，若此數加 18，則數字的次序顛倒。問此數為何？

[解] 設此數的個位數是 x ，那麼十位數是 $6-x$ ，因而這數的數值該是 $10(6-x)+x$ 。

又牠的顛倒數的數值是 $10x+(6-x)$ 。

題意：這數加 18 即等於顛倒數，故得方程式：

$$10(6-x)+x+18=10x+(6-x),$$

$$60-10x+x+18=10x+6-x,$$

$$-18x = -72,$$

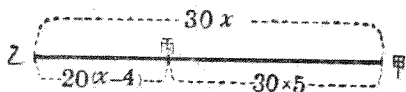
$$\therefore x = 4,$$

即個位數是 4，十位數是 $6-4=2$ 。

答：此數是 24。

例四 一火車以每時 30 哩的速度，從甲站向乙站進發，5 時後，因途中積雪，速度減為每時 20 哩，結果較豫定的時刻遲到 1 小時。問甲乙兩站相隔多少哩？

[解法 I] 設豫定的時刻是 x 時，則甲乙兩站的



距離是 $30x$ 哩。更設

火車到丙地時速度減為每時 20 哩，則甲丙間的距離是 30×5 哩。到乙站時，較豫定的時刻遲 1 小時，就是從甲到乙共費 $(x+1)$ 時，這裏

面由甲到丙費去 5 時，所以由丙到乙共費 $(x+1)-5$ 即 $(x-4)$ 時，所以知道丙乙的距離是 $20(x-4)$ 哩。

$$\text{甲乙} = \text{甲丙} + \text{丙乙}$$

$$30x = 30 \times 5 + 20(x-4).$$

解之， $x = 7.$

即豫定的時刻是 7 小時，所以兩站相隔 $30 \text{ 哩} \times 7 = 210$ 哩。

[解法 II] 設兩站相隔 x 哩，則豫定的時刻該是 $\frac{x}{30}$ 時。由甲到丙行 5 時，所以甲丙的距離是 $30 \text{ 哩} \times 5 = 150$ 哩，因而由丙到乙還餘 $(x-150)$ 哩，以每時 20 哩的速度來行車，共需 $\frac{x-150}{20}$ 時，因此由甲到乙實際上所費的時間是 $(5 + \frac{x-150}{20})$ 時，比較豫定時刻 $\frac{x}{30}$ 時多 1 時，故得方程式：

$$5 + \frac{x-150}{20} = \frac{x}{30} + 1.$$

解之， $x = 210.$

答：兩站相隔 210 哩。

9. 有二位數，個位數較十位數大 2；如若這數加 4，即等於數字和的 5 倍。求這數。

10. 有一三位數，數字的和是 15，百位數與個位數的差是 5。若顛倒數字的順序，則所成之數較原數的

3 倍小 39. 求這數.

11. 有一六位數,其左端的數字是 2. 如若將 2 移到牠的右端,則為原數的 3 倍. 求這數.

指示: 設此數是 $200000+x$, 將 2 移動後所成的數是 $10x+2$.

12. 某人乘火車從甲地到乙地,若火車每點鐘行 48 公里,就可比每點鐘行 44 公里,早到半小時. 問兩地相隔若干公里?

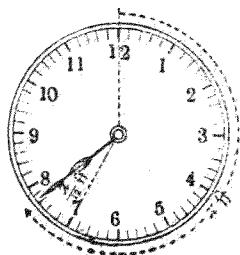
13. 發炮後隔 3 秒鐘聽到炮彈着地爆炸的聲音,若彈速每秒 150 公尺,音速每秒 340 公尺,問發炮地和着彈地的距離若何?

14. 7 時與 8 時間,鐘面兩針,相重在何時?

15. 4 時與 5 時間,鐘面兩針成 60° 的角在何時?

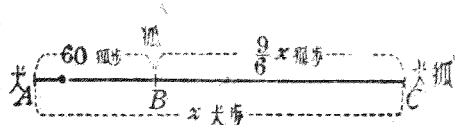
指示: 兩針成 60° 的角,在兩針相重的前後各有一次.

16. 有犬追狐,狐在犬前 60 步. 犬走 6 步時,狐可走 9 步;但是犬 3 步的長就和狐 7 步的長相等. 問犬要走幾步便可趕上狐?



[略解] 設犬走

x 步後趕上狐,那麼這
時候狐走了 $\frac{9}{6}x$ 步



圖中, $AB=60$ 狐步, $BC=\frac{9}{6}x$ 狐步, $AC=x$ 犬步 $=\frac{7}{3}x$ 狐步。
故得方程式如下:

$$\frac{7}{3}x = 60 + \frac{9}{6}x.$$

例五 上酒每斤價 9 角 5 分,下酒每斤價 4 角 5 分。
現在要拿這兩種酒混合成每斤價 6 角 3 分的酒
100 斤,問應該各取幾斤?

[解] 設下酒取 x 斤,則上酒該取 $(100-x)$ 斤。

下酒的價是 $45x$ 分,上酒的價是 $95(100-x)$ 分,上下酒的
共價應該和混合酒 100 斤的價相等,故得方程式:

$$45x + 95(100 - x) = 63 \times 100.$$

解之, $x = 64.$

又 $100 - x = 100 - 64 = 36.$

答: 上酒 36 斤,下酒 64 斤。

注意: 問題中如有複名數應化做單
名數。方程式的各項須用相
同的單名數。

例六 某兵隊原來列作正方陣,現在改爲長方陣,減少12排,但每排加多30人,問這兵隊共有若干人?

[解] 設原來的正方陣每邊是 x 人,那麼總人數是 x^2 人,改成的長方陣共 $(x-12)$ 排,每排 $(x+30)$ 人,所以總人數是 $(x-12)(x+30)$ 人,前後的人數并無增減,故得方程式,

$$x^2 = (x-12)(x+30),$$

$$x^2 = x^2 - 12x + 30x - 360,$$

$$x^2 - x^2 + 12x - 30x = 360,$$

$$-18x = -360,$$

$$\therefore x = 20,$$

即原來的方陣每邊20人,所以這兵隊共有

$$20^2 = 400 \text{ 人.}$$

17. 上茶每斤價2.16元,下茶每斤價1.96元,現在要合成每斤價2元的茶100斤,問應取幾斤?

18. 某種集會,有甲乙兩種會員,甲種會員每人繳會費6.5元,乙種會員每人繳會費4元,現在會員總數40人,共繳會費200元,問兩種會員各幾人?

19. 某人以2500元分做兩部,一部份作郵政儲金,年利率4分8釐;一部分存在銀行裏,年利率6分。一

歲後郵局方面的利息多 12 元，問存在兩處各幾元？

20. 純金在水裏減去重量 $\frac{1}{19}$ ，純銀在水裏減去重量的 $\frac{2}{21}$ 。現在有一塊金銀的合金，重 1 公斤，放在水裏稱，重 80 公分。問這塊合金裏面含有金銀各若干？

21. 有矩形地一塊，長是寬的 3 倍。如若長減 20 公尺，寬加 20 公尺，那麼面積便增加 800 平方公尺。問這地面的長和寬各是幾公尺？

22. 有一圓，若半徑加 1 寸，那麼面積便增加 280 平方寸。問這圓的半徑是多少？

但圓面積等於半徑的平方乘圓周率 $\left(\frac{22}{7}\right)$ 。

23. 有一塊正方形的運動場，在牠周圍築 3 尺寬的道路，共佔地面 696 平方尺。問這運動場每邊長若干？

24. 兵士若干人排成一個厚十一層的中空方陣，假如從內部抽出 4 層，站在方陣的外面，剛好可圍成兩層。問原有兵士多少人？

[略解] 設中空方陣的中空處最外層是 x 人，那麼內部 4 層的人數是 $(x+8)^2 - x^2$ 。又方陣外面後加兩層，共需的人數是 $(x+26)^2 - (x+22)^2$ 。所以得方程式如下：

$$(x+8)^2 - x^2 = (x+26)^2 - (x+22)^2.$$

解這個方程式, 求出 x 的值, 代入 $(x+22)^2 - x^2$ 即得原有兵士的人數。

25. 設將某數等分為二, 一部分用 6 除, 一部分用 8 除, 那麼所得兩商的和較用 7 除原數所得的商大 7, 問某數若何?

26. 有兩個三位數 $3\triangle 7$, $4\triangle 3$, 牠們的十位數字相同。問 \triangle 處要是什麼數, 那麼兩數的和便是 810?

27. 一米商以每元買米 1 斗 2 升的價買米若干, 後來照每斗 1 元的價全部賣出, 共計得利 200 元, 問他共買米多少?

28. 兵士若干人等分成兩隊, 一隊列作三層的中空方陣, 一隊列作五層的中空方陣, 並且五層的中空方陣剛好可以重入三層方陣的空處。問兵士的總數若何?

29. 某人從甲地到乙地, 預計如若步行, 要 9 時可到; 如若騎馬, 要 6 時可到。現在他一部分步行, 一部分騎馬, 共總費了 7 小時。問這人騎馬行全路的多少?

指示: 設騎馬而行的是 x , 那麼步行的是 $1-x$, 依題意可得方程式:

$$\frac{x}{1} + \frac{1-x}{1} = 7.$$

30. 某茶商以若干元，買每斤 2 元 4 角的下茶和每斤 3 元 2 角的上茶，買的斤數相等；如果把所有的錢，等分爲二，一部分買上茶，一部分買下茶，那麼總斤數可多得 1 斤。問這人原有若干元？

31. 試分 43 爲甲乙丙丁四部分，使甲的 2 倍加 8，乙的 3 倍，丙的 4 倍以及丁的 5 倍減 4 都相等。

指示：設牠們都等於 x 。

32. 某時鐘，若照定價出售，每座可賺錢 54 元 9 角 5 分。若照定價打八五折，則賣出 6 座所賺的錢等於照定價打九折賣出 5 座所賺的錢的 $\frac{3}{4}$ 。求這時鐘每座的定價。

第二章 聯立一次方程式

19. 聯立方程式

研究問題

1. 甲乙二人共有銀 5 元，問各有幾元？
2. 甲乙二人有的錢不等，已知甲較乙多 1 元，問各有幾元？
3. 甲乙二人共有銀 5 元，已知甲較乙多 1 元，問

各有幾元?

設甲有銀 x 元,乙有銀 y 元,則由問 1 可得方程式,

$$x + y = 5$$

解之,

$$y = 5 - x$$

即 x 不論爲何值, y 必有一對應的值,例如

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

則 $y = 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, \dots$

這裏面不論那一組 x, y 的值,都能適合原方程式,

即

$$\dots \left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ y=4, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ y=3, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array} \right. \dots$$

皆無不可。

所以二元方程式祇能表示兩個未知數的關係,而不能有確定的數值。

同理,由問 2 可得方程式,

$$x - y = 1$$

在這方程裏面,若

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

則 $y = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

即可得下列各組的解:

$$\dots \begin{cases} x=1 \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=2, \end{cases} \quad \dots$$

所以問題的答案,也不能確定。

但是在問 3 裏面 x, y 的值要同時適合兩方程式,

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

觀上可知,像這樣的數值,僅有一組即 $\begin{cases} x=3 \\ y=2, \end{cases}$

所以知甲有銀 3 元,乙有銀 2 元。

如此,含有若干未知數的兩個或兩個以上的方程式同時為一組或幾組未知數的數值所適合的,叫做聯立方程式。適合聯立方程式的未知數的數值叫做聯立方程式的根。

問 3 所得的兩個方程式,都是二元一次,所以叫做二元一次聯立方程式,牠的根是

$$x=3, y=2.$$

· 20. 二元一次聯立方程式的解法

1. 加減消去法

例一 解下列聯立方程式:

$$\begin{cases} x+y=5 \cdots \cdots (1) \\ x-y=1 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

【解】 (1),(2)兩式既然都是等式,所以根據等量公理,邊邊相加或邊邊相減,所得的和或差仍然相等,

若邊邊相加,則

$$\begin{array}{r} x+y=5 \\ +) x-y=1 \\ \hline 2x \quad =6 \\ \therefore x=3 \end{array}$$

若邊邊相減,則

$$\begin{array}{r} x+y=5 \\ -) x-y=1 \\ \hline 2y=4 \\ \therefore y=2 \end{array}$$

答: $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

例二 解下列聯立方程式:

$$\begin{cases} 2x+3y=19 \cdots \cdots (1) \\ 5x-7y=4 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

【解】 此式若仿照例一,逕行加減,那麼 x 與 y 任何一個都不能消去,因而也不能求得原方程式的根,所以在加或減之前,必須先將 x 或 y 的係數的絕對值變為相等。

若消去 y , 則

$$\begin{array}{r} (1) \times 7 \qquad 14x+21y=133 \\ (2) \times 3 \qquad 15x-21y=12 \\ \hline 相加, \qquad 29x \qquad =145 \end{array}$$

$$\therefore x = \frac{145}{29} = 5$$

若消去 x , 則

$$(1) \times 5 \qquad 10x + 15y = 95$$

$$(2) \times 2 \qquad 10x - 14y = 8$$

$$\text{相減,} \qquad 29y = 87$$

$$\therefore y = \frac{87}{29} = 3$$

$$\text{答: } \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$$

又用上法,先求得兩未知數中任何一個的值,然後代入(1)或(2)即可求得其餘一個的值,比較的簡便。

例如先求得 $x=5$, 代入(1)式中,

$$2 \times 5 + 3y = 19 \dots\dots\dots(3)$$

$$3y = 9$$

$$\therefore y = 3$$

就已知的方程式改作成未知數較少的方程式叫做消去未知數。例一例二的解法乃是將兩式邊邊相加或邊邊相減藉此消去一個未知數的,所以叫加減消去法。

注意：用加減消去法解聯立方程式：

1. 要消去那一個未知數，必定要這未知數在兩方程式裏，牠係數的絕對值相同；若不同，應先變為相同，所變成的值，是原來兩絕對值的最小公倍數。
2. 絕對值相同，其消去之法，究竟用加用減，看符號何如而定，即同號相減，異號相加。
3. 先求得一個未知數的值，其餘一個未知數的值，可以把求得的值代入任一原方程式解出。

學習問題

解下列聯立方程式：

$$1. \begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 4x + 9y = -1 \\ 5x + 7y = 5 \end{cases}$$

練習問題二十二

用加減消去法解下列各組聯立方程式：

$$1. \begin{cases} 2x + y = 14 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} u + 4v = 31 \\ 4u + v = 19 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 10x - 3y = 25 \\ 5x - 9y = -25 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 7x - 3y = 27 \\ 5x - 6y = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 5m - 2n = 23 \\ 13m - 3n = 51 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 9x - 7y = 2\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 5x - 9y = 1 \\ 8x - 10y + 5 = 0 \end{cases}$$

II 代入消去法

例一 解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x - 5y = -11 \dots\dots\dots(1) \\ 3x + 7y = 27 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

[解] 由(1)式, $2x = 5y - 11$

$$\therefore x = \frac{5y - 11}{2} \dots\dots\dots(3)$$

代入(2)式, $3\left(\frac{5y - 11}{2}\right) + 7y = 27$

如此變做單含 y 的一元一次方程式, 解之

$$15y - 33 + 14y = 54$$

$$29y = 87$$

$$\therefore y = 3$$

代入(3)式, $x = \frac{5y - 11}{2} = \frac{5 \times 3 - 11}{2} = 2$

$$\text{答: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

驗: 代入(2), $3 \times 2 + 7 \times 3 = 27$

如此將一方程式化做以乙未知數表甲未

知數的式，然後代入其他一方程式，藉此消去甲未知數的解法，叫做代入消去法。

注意：用代入消去法，宜先消去兩方程中係數最簡單的未知數。

學習問題

解聯立方程式：

$$1. \quad \begin{cases} 7x - y = 13 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$$

練習問題二十三

用代入消去法解下列各組聯立方程式：

$$1. \quad \begin{cases} x = y \\ 5x - 2y = 21 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} x = 2y - 3 \\ y = 2x - 15 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} x - 6y = 2 \\ 3y - 8x = 29 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} 7r + 6t = 63 \\ 9r + 2t = 13 \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} 4x - 5y - 12 = 0 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} 6x - 10y - 5 = 0 \\ 15y - 14x + 15 = 0 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} 9m + 8n + 6 = 0 \\ 12m + 10n + 7 = 0 \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} 3x + 7y = 22.4 \\ x - 5y = 6 \end{cases}$$

III 比較消去法

例一 解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x+6y=3 \cdots \cdots \cdots (1) \\ 6x+26y=5 \cdots \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

【解】 由(1)式, $2x=3-6y$

$$\therefore x = \frac{3-6y}{2} \cdots \cdots (3)$$

由(2)式, $6x=5-26y$

$$\therefore x = \frac{5-26y}{6} \cdots \cdots (4)$$

兩方程式既然是聯立,就是兩方程式中 x 的值應該相等,所以

$$\frac{3-6y}{2} = \frac{5-26y}{6}$$

去分母,(兩邊同乘以 6),

$$3(3-6y)=5-26y$$

$$9-18y=5-26y$$

$$8y=-4$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}$$

代入(3)(或(4)也可), $x = \frac{3-6(-\frac{1}{2})}{2} = 3$

$$\text{答: } \begin{cases} x=3 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

如此將兩方程式,都化成以乙未知數表甲未知數的式,然後等置這兩式(即連以等號),藉

此消去甲未知數的解法,叫做比較消去法。

學習問題

解聯立方程式:

$$1. \begin{cases} 8x+3y=24 \\ 2x-y=6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 4x-3y=-5 \\ 5x-4y=1 \end{cases}$$

練習問題二十四

用比較消去法解下列各組聯立方程式:

$$1. \begin{cases} x+2y=13 \\ 3x+y=14 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x+6y=17 \\ 6x+5y=16 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 15x+7y=29 \\ 9x+15y=39 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 21x-50y=60 \\ 28x-27y=199 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 6y-5x=18 \\ 12x-9y=0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 19x+17y=0 \\ 2x-y=53 \end{cases}$$

IV 雜例

聯立方程式的解法有加減消去法,代入消去法及比較消去法,上面已經學過。什麼樣的方程式應該用什麼方法去解,並沒有什麼一定的標準,祇有觀察方程式的性質,揀最便當的方法去做。過去所學的都是二元一次方程式最

簡單的,不過無論問題如何複雜,經過去分母撤括號以及移項歸併等各種手續後,終結可以化成那種最簡單的形式,然後就上述的三法,任意選一個適當的去解,原方程式的根,便不難得到。

例一 解下列聯立方程式:

$$\begin{cases} (x+3)(y+5) = (x+1)(y+8) \cdots \cdots (1) \\ (2x-3)(5y+7) = 2(5x-6)(y+1) \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

[解] 由(1)式,

$$xy + 3y + 5x + 15 = xy + y + 8x + 8$$

$$xy - xy + 5x - 8x + 3y - y = 8 - 15$$

$$-3x + 2y = -7$$

各項變號(即以 -1 遍乘各項)

$$3x - 2y = 7 \cdots \cdots (3)$$

由(2)式,

$$10xy - 15y + 14x - 21 = 10xy - 12y + 10x - 12$$

$$10xy - 10xy + 14x - 10x - 15y + 12y = -12 + 21$$

$$4x - 3y = 9 \cdots \cdots (4)$$

$$(3) \times 3 \qquad 9x - 6y = 21$$

$$(4) \times 2 \qquad 8x - 6y = 18$$

$$x \qquad = 3$$

代入(3)式, $3 \times 3 - 2y = 7$

$$\therefore y = 1$$

$$\text{答: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

學習問題

1. 解聯立方程式:

$$\begin{cases} 3(10-x) + 5(2+y) = 58 \\ (x-3)(y+2) = (x+4)(y-5) \end{cases}$$

例二 解下列聯立方程式:

$$\begin{cases} \frac{5x-6y}{5} + 3x = 4y - 2 \dots\dots\dots(1) \\ \frac{5x+6y}{6} - \frac{3x-2y}{4} = 2y - 2 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

[解] (1)式去分母,

$$5x - 6y + 15x = 20y - 10$$

即 $20x - 26y = -10$

以 2 遍除各項,

$$10x - 13y = -5 \dots\dots\dots(3)$$

(2)式去分母,以 12 遍乘各項,

$$10x + 12y - 9x + 6y = 24y - 24$$

整理, $x = 6y - 24 \dots\dots\dots(4)$

以(4)式代入(3)式,

$$10(6y - 24) - 13y = -5$$

$$60y - 240 - 13y = -5$$

$$47y = 235$$

$$\therefore y = 5$$

更由(4)式,

$$x = 6 \times 5 - 24 = 6$$

$$\text{答: } \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\text{驗: (1)式的左邊} = \frac{30 - 30}{5} + 18 = 18$$

$$(1)式的右邊 = 20 - 2 = 18$$

故所求的根適合(1)式.

$$\text{又 (2)式的左邊} = \frac{30 + 30}{6} - \frac{18 - 10}{4} = 10 - 2 = 8$$

$$(2)式的右邊 = 10 - 2 = 8$$

故所求的根,同時能適合(2)式.

學習問題

1. 解聯立方程式:

$$\begin{cases} \frac{r-s}{2} = \frac{25}{6} - \frac{r+s}{3} \\ \frac{r+s-9}{2} - \frac{s-r-6}{3} = 0 \end{cases}$$

注意 1. 等式的各項同時變號,仍得等式。如例一的(3)。
 2. 等式的各項,如若具有公共的數因數,可以拿這數因數遍除各項,使此等式化爲更簡單。如例二的(3)。

練習問題二十五

解下列各組聯立方程式:

$$1. \begin{cases} \frac{x-1}{6} + y = 6 \\ \frac{y-1}{4} + x = 8 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{5x-3y}{3} = 7 \\ x+4 = \frac{10+2y}{2} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x-1=1 \\ \frac{2x}{5} + \frac{3y}{4} = 5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = 4 \\ \frac{1}{7}x + \frac{1}{15}y = 3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2} = 3 \\ \frac{12x-7y}{13} = 3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{x-2}{3} + \frac{y-1}{3} = -1 \\ \frac{3x+1}{4} - \frac{3-y}{2} = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{3}{2}(x-y) + \frac{1}{5}(x+2y) = 4 \\ 2(x-y) + 3(x+2y) = 19 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \\ (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \end{cases}$$

$$9. \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{x+y+1}{5}$$

$$10. \quad \frac{6x-6y-7}{5} = 2x-3y-16 = -\frac{10-4x+5y}{11}$$

21. 應用問題

例一 某書上下兩冊,共 820 頁,若上冊的頁數增加 $\frac{1}{6}$,下冊的頁數減少 $\frac{1}{4}$,那麼兩冊共有的頁數是 765. 問這書上下冊各幾頁?

[解] 設上冊是 x 頁,下冊是 y 頁,那麼按照題意,可得下面的聯立方程式:

$$\begin{cases} x+y=820 & \dots\dots\dots(1) \\ \left(1+\frac{1}{6}\right)x+\left(1-\frac{1}{4}\right)y=765 & \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

由(2)式, $\frac{7}{6}x + \frac{3}{4}y = 765$

即 $14x + 9y = 9180 \dots\dots\dots(3)$

(3)-(1) $\times 9$, $5x = 9180 - 820 \times 9 = 1800$

$$\therefore x = 360$$

又 $y = 820 - x = 820 - 360 = 460$

答: $\begin{cases} \text{上冊 } 360 \text{ 頁} \\ \text{下冊 } 460 \text{ 頁} \end{cases}$

學習問題

1. 十年前 125 元可製成的木器,現在要 425 元.

據說材料的價現在比從前貴兩倍半,工價比從前貴兩倍。問十年前的材料和工價各幾元? 答材料 100 元,

例二 有矩形地一塊,若寬加 2 公尺,長減 3 公尺,那麼面積便增加 39 平方公尺;若寬減 5 公尺,長加 3 公尺,那麼面積便減少 240 平方公尺。問這矩形的長寬各是幾公尺?

[解] 設寬是 x 公尺,長是 y 公尺,那麼面積是 xy 平方公尺。寬加 2 公尺,就是 $(x+2)$ 公尺;長減 3 公尺,就是 $(y-3)$ 公尺,因而面積是 $(x+2)(y-3)$ 平方公尺,題意,這較原面積多 39 平方公尺,所以得方程式如下:

$$(x+2)(y-3) = xy + 39 \dots\dots\dots(1)$$

同樣,由題目上的第二句話,也可譯成一個方程式:

$$(x-5)(y+3) = xy - 240 \dots\dots\dots(2)$$

由(1)式, $xy + 2y - 3x - 6 = xy + 39$

即 $3x - 2y = -45 \dots\dots\dots(3)$

由(2)式, $xy - 5y + 3x - 15 = xy - 240$

即 $-3x + 5y = 225 \dots\dots\dots(4)$

(3)+(4), $3y = 180$

$$\therefore y = 60$$

代入(3)式, $3x - 2 \times 60 = -45$

$$3x = -45 + 120 = 75$$

$$\therefore x = 25$$

答: $\begin{cases} \text{寬 } 25 \text{ 公尺} \\ \text{長 } 60 \text{ 公尺} \end{cases}$

學習問題

1. 某講義原定每張寫若干行,每行寫若干字. 若每張多寫 3 行,每行多寫 2 字,則每張可多寫 110 字. 若每張少寫 2 行,每行少寫 3 字,則每張即少寫 100 字. 問原定每張寫幾行,每行寫幾字?

答: $\begin{cases} 22 \text{ 行} \\ 20 \text{ 字} \end{cases}$

注意 1. 本節所有的問題,都可用一元一次方程式來解,不過用二元聯立方程式,比較容易.
2. 聯立方程式的個數須和所設未知數的個數一樣. 比如兩個未知數,必定要有兩個方程式纔能解,多則類推.

練習問題二十六

1. 鉛筆 4 枝,鋼筆頭 12 個,共價 3 角 2 分. 鉛筆 7 枝,鋼筆頭 9 個,共價 3 角 8 分. 問鉛筆 1 枝,鋼筆頭 1 個的價各是多少?

2. 某人以銀 1 元 7 角 5 分給僕人,要他買五分的郵票和二分半的郵片各若干張;那僕人把張數弄錯,所以找回 2 角. 問如若不錯,郵票和郵片各該買多少張?

3. 龜鶴 65 頭,共有 210 隻脚. 問龜鶴各幾頭?

4. 某人將現款分存在利率不同的甲乙兩銀行裏,第一年甲銀行存 3000 元,乙銀行存 2000 元,共得利息 290 元. 第二年甲銀行存 2000 元,乙銀行存 3000 元,共得利息 285 元. 問這兩銀行的年利率各是多少?

5. 某人建築一所住宅,用去 4600 元. 據說,如若材料費減價 25%,工價打八五折,建築費祇要 3640 元. 問這人實際上工料費各費去多少元?

6. 一個代數式 $mx+n$,若 n 等於 5,牠的數值是 87;若 x 等於 12,牠的數值是 12. 問 m 及 n 各是多少?

7. 有一塊長方形的地面,周圍是 250 公尺,如若寬減 20 公尺,祇要長加 15 公尺,面積就不致減少. 問長寬各幾公尺?

8. 甲乙二人所有銀不等. 如若甲給乙 5 元,那麼乙有銀將為甲的 3 倍;如若乙給甲 5 元,那麼甲有銀將為乙的 2 倍. 求二人原有的銀數.

9. 有甲乙兩數,以乙除甲得商 2 餘 17,若以甲除乙的 10 倍,則得商 3 餘 45. 求兩數.

10. 以上茶 6 斤和下茶 2 斤混合所成的茶,每斤的平均價是 2.28 元. 如若以上茶 5 斤和下茶 3 斤混合,那麼所成的茶,每斤平均價是 2.22 元. 求上下茶每斤的原價.

11. 有二位數,如若加上 18,數字的次序就顛倒. 已知這數和牠倒位數的和是 132, 求這數.

12. 有二位數等於牠數字和的 4 倍,如若加 38,數字的次序就顛倒,問這數是多少?

13. 某火車全部通過長 167 公尺的鐵橋,要經 20 秒鐘;如若全部通過長 506 公尺的隧道,要經 50 秒鐘. 求這火車的長及牠每秒鐘的速度.

14. 學生若干人合開茶話會,若出席的多 10 人,每人又多繳 1 角,那麼總數可多收 19 元. 若出席的少 15 人,那麼即使每人多繳 3 角,總數仍然要少收 4.5 元. 問預定出席的人數和每人的會費是多少?

15. 某船以預定速度航行某距離,若每時多走 2 哩,可以早到 4 小時;若每時少走 2 哩,便要遲到 6 小時. 問航行的距離及預定的速度各若何?

指示：設預定的時間做一個未知數。

16. 拿鉛和錫的合金，做成一個重 4 公斤的球，在水裏面稱，祇有 401 公分重。已知純鉛 1 公斤，在水裏面稱重是 88 公分；又純錫 1 公斤，在水裏面稱重是 137 公分。問這球裏面含有鉛錫各多少？

22. 三元以上聯立一次方程式的解法

例一 解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 15 \dots\dots\dots(1) \\ 5x - 3y + 2z = 28 \dots\dots\dots(2) \\ -x + 3y + 4z = 24 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

[解] 先從三個式子裏面消去 z ,

$$(1) + (3) \qquad 2x + 5y = 39 \dots\dots\dots(4)$$

$$(1) + (2) \times 2 \qquad 13x - 4y = 71 \dots\dots\dots(5)$$

(4)和(5)是二元一次聯立方程式，解之

$$(4) \times 4 \qquad 8x + 20y = 156$$

$$(5) \times 5 \qquad 65x - 20y = 355$$

$$\begin{array}{r} 8x + 20y = 156 \\ 65x - 20y = 355 \\ \hline 73x \qquad = 511 \end{array}$$

$$\therefore x = \frac{511}{73} = 7$$

代入(4), $14 + 5y = 39$

$$\therefore y = 5$$

再拿 $x=7, y=5$ 代入 (1),

$$21 + 10 - 4z = 15$$

$$\therefore z = 4$$

$$\text{答: } \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \\ z = 4 \end{cases}$$

驗: 以求得的 x, y, z 的值代入 (2) 及 (3),

$$(2) \text{ 的左邊} = 35 - 15 + 8 = 28 \dots\dots\dots \text{等於右邊}$$

$$(3) \text{ 的左邊} = -7 + 15 + 16 = 24 \dots\dots\dots \text{等於右邊}$$

所以求得的根不錯。

何以不要代入 (1) 式驗算?

解三元一次聯立方程式的方法,先從原方程中消去一個未知數(例如 z),這樣便作成二元一次聯立方程式。解這方程式求牠所含的兩個未知數的值(例如 x, y),然後代入原方程式的任一個裏面,便可求得最初消去的那個未知數的值便是 z 。未知數不止三個時,也可照此類推。

學習問題

1. 解聯立方程式:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 4 \\ 3x + 5y - 7z = 12 \\ 5x - y - 8z = 5 \end{cases}$$

23. 特例

例一 解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 48 \dots\dots\dots(1) \\ \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = 38 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

[解] 把 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{y}$ 當做兩個未知數，

$$(1) \times 3 \quad \frac{45}{x} - \frac{12}{y} = 144 \dots\dots\dots(3)$$

$$(2) \times 2, \quad \frac{10}{x} + \frac{12}{y} = 76 \dots\dots\dots(4)$$

$$(3) + (4), \quad \frac{55}{x} = 220$$

$$\therefore \frac{1}{x} = 4 \quad \therefore x = \frac{1}{4}$$

$$\text{代入(2)} \quad 20 + \frac{6}{y} = 38$$

$$\therefore \frac{1}{y} = 3 \quad \therefore y = \frac{1}{3}$$

$$\text{答: } x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{3}$$

學習問題

1. 解聯立方程式：

$$\begin{cases} \frac{7}{x} + \frac{3}{y} = 18 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 3 \end{cases}$$

例二 解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} y + z = 5 \dots\dots\dots(1) \\ z + x = 9 \dots\dots\dots(2) \\ x + y = 6 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

[解] 三式邊邊相加，

$$2x + 2y + 2z = 20$$

$$\therefore x + y + z = 10 \dots\dots\dots(4)$$

$$(4) - (1), \quad x = 5$$

$$(4) - (2), \quad y = 1$$

$$(4) - (3), \quad z = 4$$

答： $x=5, y=1, z=4$.

或 $(2) + (3) - (1), 2x = 10, \therefore x = 5$

同法可求出 y, z 的值。

學習問題

1. 解聯立方程式：

$$\begin{cases} -x + y + z = 8 \\ x - y + z = 8 \\ x + y - z = 12 \end{cases}$$

練習問題二十七

解下列各組聯立方程式：

$$1. \begin{cases} 2x - 3y - z = 1 \\ 3x + 2y - 2z = 13 \\ 5x - 4y - 2z = 11 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2.5x + 2y + 1.5z = 11 \\ 15x + 10y + 6z = 53 \end{cases}$$

$$3. \frac{2x - y}{3} = \frac{3y + 2z}{4} = \frac{x - y - z}{5} = 4$$

$$4. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{3}{4} \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z + u = 9 \\ z + u + x = 8 \\ u + x + y = 7 \end{cases}$$

6. 某牧場有馬牛羊共 80 頭，其中馬數較牛數的 2 倍少 5 頭，又羊數較馬數多 10 頭。問馬牛羊各幾頭？

7. 有一個三位數，數字的和是 9，個位數與百位數的和是十位數的 2 倍，又牠的倒位數較牠大 198，求這數。

8. 有上中下三種酒，上酒 10 斤，中酒 6 斤，下酒 4 斤混合後，可成每斤價 6 角 8 分的酒；又上酒 6 斤，中酒 10 斤，下酒 12 斤混合後，可成每斤價 6 角的酒；又上酒 8 斤，中酒 4 斤，下酒 4 斤混合後，可成每斤價 6 角 7 分的酒。求三種酒每斤的價格。

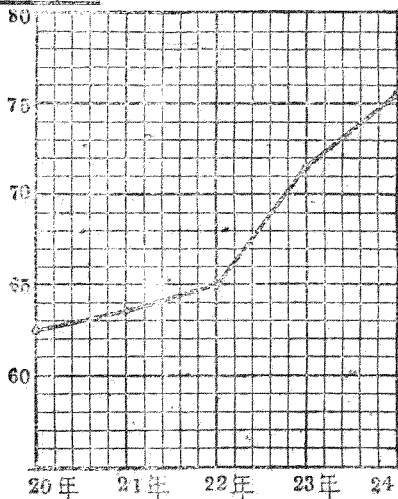
9. 一件事,甲乙兩個人做,5天成功;乙丙兩個人做,10天成功;甲丙兩個人做,6天成功。問若一個人做,各需幾天成功?

10. 某汽車在平地上走,每時30公里;上坡,每時15公里;下坡,每時35公里。現在走110公里的路程,計往費4時,回來費 $4\frac{16}{21}$ 時。問這路程中,平地及往時上坡下坡各幾里?

第三章 圖解法

24. 位標及圖解

研究問題



1. 某校近五年來入學試驗錄取學生算術的平

均成績如下表，試作一統計圖來表示牠。

年 度	二 十	二十一	二十二	二十三	二十四
成 績	62.5	63.4	65.0	71.3	75.6

2. 某病人一星期間體溫的變化如下，試作一統計圖來表示牠。

月, 日	3, 5	3, 6	3, 7	3, 8	3, 9	3, 10	3, 11
體 溫 (攝氏溫度)	39°7	40°1	39°7	39°3	39°1	38°8	38°4

兩種數量的關係可以藉統計圖來明白的表示牠。如第1例看了圖可以一目了然的知道入學試驗中，算術成績逐年進步的情形；而於第2例，這病人體溫升降的狀況，看作成的圖比較看表更容易明白。其他如貿易的盛衰人口的增減氣候的變遷以及經濟的出納等等都可以拿統計圖來表示。

統計圖有許多種，大家在算術裏已經學過，不過最足以明白表示數量變化的情形的，是如例1所示的折線圖。折線圖的作法可分下列三個步驟：

I 造表 先造成兩種數量的關係表，

II 定點 表裏面每組對應的數值,各各的用點表示出來,

III 聯線 順次聯結所定的各點,成爲折線,那便是要作的統計圖。

不過在算術裏所學的圖表,各量的數值都是正數,如果數值更擴充到負數的時候,定點的方法該是怎樣呢?

研究問題

3. 經過某鎮有東西向和南北向的兩條馬路。

A, B, C, D 四村和某鎮的距離如下,試於方格紙上先作兩條直線表示馬路,然後作四點表示四村的地位。(假設每格爲 1 里)

A (向東 3 里,向北 5 里)

B (向西 4 里,向北 6 里)

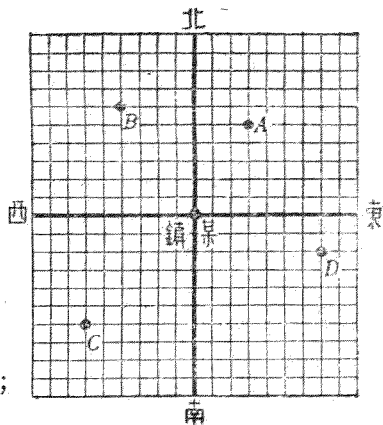
C (向西 6 里,向南 6 里)

D (向東 7 里,向南 2 里)

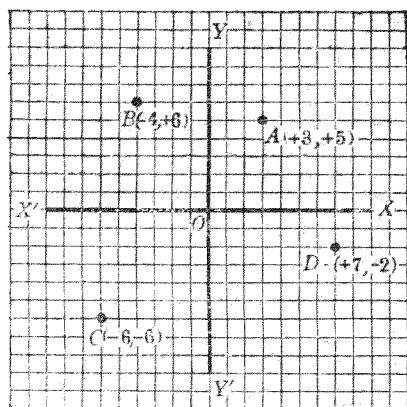
如應用第一篇所講的正負數的意義,以某鎮做起點,

向東是正,那麼向西是負;

向北是正,那麼向南是負。



這樣,四村的位置,可使很簡單的表示如下:



$$A (+3, +5)$$

$$B (-4, +6)$$

$$C (-6, -6)$$

$$D (+7, -2)$$

照這樣,先在圖中畫兩條互相垂直的直線 XX' , YY' 用來做各點位置的標準,叫做位標軸;兩直線的交點 O ,叫做原點。 XX' 叫做 X 軸,又叫橫軸; YY' 叫做 Y 軸,又叫縱軸。一點沿着橫軸和原點的距離,叫做橫標;沿着縱軸和原點的距離,叫做縱標。已知一點的橫標和縱標,那麼這點的位置便可決定,所以總稱這點的位標。

關於位標的符號和記法,有下面的規則:

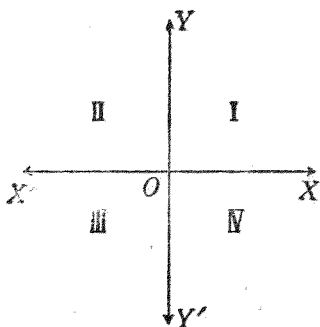
I 橫標在縱軸的右方是正,在左方是負;

縱標在橫軸的上方是正,在下方是負。

II 一點的位標并寫在括弧裏面,通常橫標

在前縱標在後,當中用一個“,”隔開。

如果將縱橫兩軸,向各方無限延長,便把全平面分做四部分,各部分叫做一象限。如下圖所示,四個象限,順次叫做第一象限,第二象限,第三象限,第四象限。問四象限中各點位標的符號如何?



象限	橫 標	縱 標
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

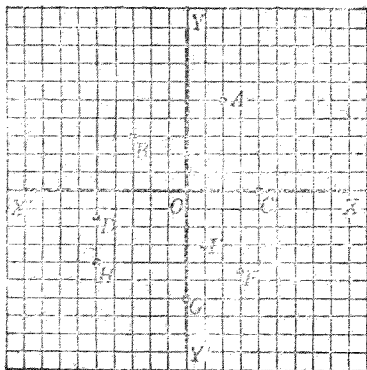
學習問題

1. 試於方格紙上先畫縱橫兩軸,然後決定下列各點的位置,

$A(+5, +3)$ $B(-3.5, +2)$ $C(2, -5.5)$ $D(-3.4, -4.5)$

$E(0, 5)$ $F(3, -4.2)$ $G(-4, 0)$ $H(5, 3.5)$

2. 在下圖中,各點的位標若何?



A(,) B(,)

C(,) D(,)

E(,) F(,)

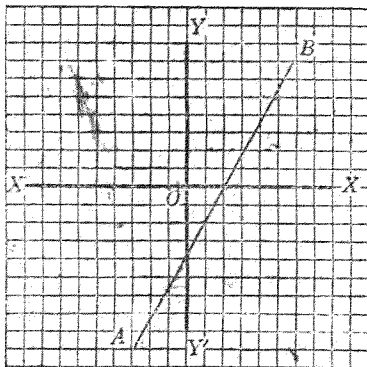
G(,) H(,)

練習問題二十八

1. 試定下列各點的位置:

A(3, 4) B(-2.5, 0) C(3.2, -1.5) D(0, -5.5)

E(1 $\frac{1}{2}$, -3 $\frac{1}{2}$) F(-7, 3 $\frac{1}{4}$) G(0, 0) H(-5.25, -1.25)



2. 在左圖的 AB 線上, 試求出下列各點, 并補填牠的橫標或縱標.

點	C	D	E	F	G
橫標	2		-0.5	-1	
縱標		5			-2

3. 假設方格紙上一個方格的面積是 1 平方尺,

問順次連結下列諸點所成的三角形或四邊形的面積各是多少？

(1) $P(-2, 3)$ $Q(-2, -6)$ $R(7, -6)$ $S(7, 3)$

(2) $A(-3, -5)$ $B(4, -5)$ $C(4, 10)$

4. 有 A, B, C, D, E 五點,牠們的位標如下表(x 爲橫標, y 爲縱標),試於方格紙上,先定各點的位置,然後順次連結起來作成一個折線圖:

點	A	B	C	D	E
x	-5	-1	2	4	6
y	-4	1	3	3.5	1.5

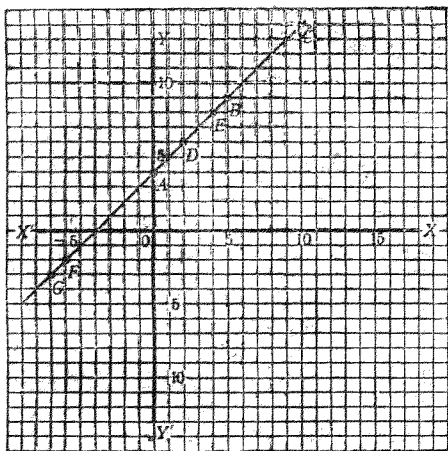
5. 有 A, B, C, D, E 五點,牠們的位標 x, y 都能適合方程式 $x-2y=1$. 試先填下表,然後在方格紙上定點,聯線,因而作成一個折線圖. 注意這個折線圖,有什麼特別的性質?

點	A	B	C	D	E
x	-5	-3	0	3	5
y					

25. 二元一次方程式的圖解

研究問題

1. 乙有錢較甲多 4 元。如果兩個人的錢同增若干或同減若干，他們所有錢的關係若何？試作圖表示之。



【解】

I 造表：

甲有錢	0元	5元	10元
乙有錢	4元	9元	14元

II 定點：在方格紙上先畫縱橫兩軸，然後以甲有錢做橫標，乙有錢做縱標，定 $A(0, 4)$ $B(5, 9)$ $C(10, 14)$ 三點的位置。

III 聯線：順次聯結這三點，所成的是一直線。

2. 在這直線上任意取其他幾點 D, E, F, G , 問這幾點的位標各若何? 試填入下表, 并研究乙所有錢較甲多若干元.

點	D	E	F	G
橫標 x (即甲有錢)				
縱標 y (即乙有錢)				

設甲有錢是 x 元, 乙有錢是 y 元, 那麼依題意可得二元一次方程式 $y = x + 4$.

前題所得直線上的各點, 其位標 x, y 的值, 都能適合這個方程式; 就是這方程式裏兩未知數 x, y 的值的關係, 可以用直線 ABC 來表示; 這條直線叫做 $y = x + 4$ 的圖解.

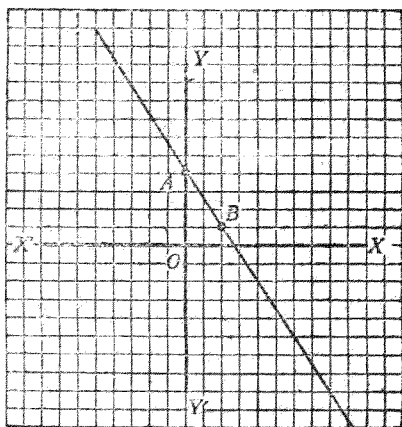
二元一次方程式的圖解是一直線

由幾何學的研究, 知道兩點即可以決定一直線, 所以要求二元一次方程式的圖解, 祇要先決定兩點的位置, 然後過這兩點作一直線即得.

例一 求二元一次方程式 $3x + 2y = 8$ 的圖解.

[解] 這既是二元一次方程式, 所以牠的圖解是一直線,

$$\therefore y = \frac{8 - 3x}{2}$$



$$\therefore A \quad x=0, \quad y=4$$

$$B \quad x=2, \quad y=1$$

先決定 A, B 的位置,然後過 A, B 作一直線,就是所求的圖解。

注意: 求兩點的位標時,爲運算簡便的緣故,普通先設 $x=0$, 求 y 的對應值,再設 $y=0$, 求 x 的對應值,不過在本題中,若 $y=0$, 那麼 $x = \frac{8}{3}$ 不是整數作圖不易準確,所以改設 $x=2$, 因之 $y=1$ 。

學習問題

1. 求 $2x+3y=18$ 的圖解。

2. 就以前題的縱橫軸做兩軸作 $2x - y = 2$ 的圖解。

3. 前兩題圖解的交點，其位標若何？試代入兩方程式中看是否都能適合。

26. 二元一次聯立方程式的圖解解法

例一 試用圖解法解 $\begin{cases} 2x + y = 7 & \dots\dots\dots(1) \\ 3x - y = 3 & \dots\dots\dots(2) \end{cases}$

[解] 在方程式 $2x + y = 7$ 裏面，

$$A \quad x=0, \quad y=7$$

$$B \quad x=3, \quad y=1$$

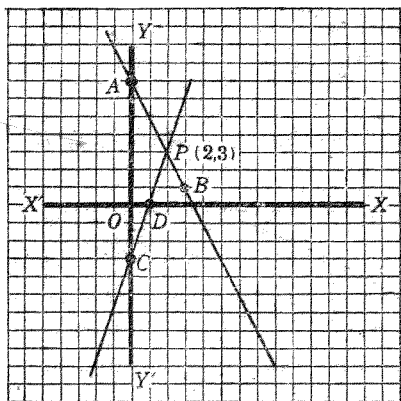
故直線 AB 是 $2x + y = 7$ 的圖解。

又在方程式 $3x - y = 3$ 裏面，

$$C \quad x=0, \quad y=-3$$

$$D \quad x=1, \quad y=0$$

故直線 CD 是 $3x - y = 3$ 的圖解。



直線 AB 上任意點的位標，能適合方程式(1)；直線 CD 上任意點的位標，能適合方程式(2)，所以兩直線的交點的位標，能同時適合(1)、(2)兩方程式，今交點 P 的位標是

(2, 3), 故所求聯立方程式的根是 $x=2, y=3$.

由此知二元一次聯立方程式的圖解是一點。

學習問題

1. 解聯立方程式(用圖解法)

$$\begin{cases} 4x+5y=28 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$$

練習問題二十九

求下列各方程式的圖解:

1. $x+y=5$

2. $3x+4y=24$

3. $5x+7y=12$

4. $7x-3y=6$

試應用圖解法解下列各組聯立方程式, 并驗算:

5.
$$\begin{cases} y=x-4 \\ y+x=6 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 3y=4x \\ x-2y-5=0 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x+2y+4=0 \\ x+3y+10=0 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} 2x+5y=10 \\ 3x=9+y \end{cases}$$

9. 設 a, b 都是已知數, 試說明:

I $x=a$ 的圖解和 Y 軸平行; $y=b$ 的圖解和 X 軸平行.

II $ax+by=0$ 的圖解必定通過原點 $O(0, 0)$.

第三篇 提要

◎ 方程式的解法

1. 應用原理

I 等式的兩邊,同以一數加或減,仍然相等;

II 等式的兩邊,同以一不等於零的數乘或除,仍然相等.

2. 一元一次方程式的解法

去分母,撤括號,移項,歸併,最後得

$$\text{係數} \times x = \text{已知項}$$

$$\therefore x = \frac{\text{已知項}}{\text{係數}}$$

3. 聯立方程式的解法

方程式的個數,要和未知數的個數相同纔能解,解的方法是:

I 二元一次

聯立的二式 $\left\{ \begin{array}{l} \text{加減} \\ \text{代入} \\ \text{比較} \end{array} \right\}$ 法, $\xrightarrow{\text{消去一}}$

$\xrightarrow{\text{未知數}}$ 一元一次方程式

II 三元一次

聯立的三式 $\xrightarrow{\text{二元一次聯立的二式}}$
消去一未知數

—————→ 一元一次
方程式

消去一未知數

◎ 應用問題解法的步驟

- I 充分了解題意後,選擇適當的未知數;
- II 研究未知數與問題中其他各數的關係;
- III 依題意作方程式;
- IV 解方程式,求方程式的根;
- V 研究所得的根,是否與題意適合,然後決定答案.

◎ 圖解

1. 二元一次方程式的圖解是一直線;
2. 二元一次聯立方程式的圖解是一點;
3. 二元一次聯立方程式可用圖解法解.

雜 題 III

1. 解下列方程式:

$$(1) \quad x - 2\{x - (1 - x)\} = 8x.$$

$$(2) \quad \frac{2x-1}{4} - \frac{5+x}{6} = \frac{2-x}{3} + \frac{1}{4}.$$

$$(3) \quad 5 - 4(x - 3) = x - 2(2x - 1).$$

$$(4) \quad 1.7(x - 2) - 0.3(2x + 1) = 0.8.$$

2. 解下列聯立方程式：

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1, \\ \frac{x}{4} - \frac{2y}{3} = 0. \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{x+y+1}{5}.$$

$$(3) \quad \begin{cases} (x-1)(y-2) - (x+2)(y-3) = 3, \\ (x+2)(y+2) - (x-2)(y-2) = 28. \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 4x + 3y + 6z = 21, \\ 7x - 5y - 6z = 10. \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 3, \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = -2, \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 0. \end{cases}$$

3. 求下列方程式的圖解：

$$(1) \quad 5x - 2y = 7, \quad (2) \quad x - 2 = 0.$$

$$(3) \quad 4x + 5y = 20, \quad (4) \quad 2x - 7y = 35.$$

4. 用圖解法解下列聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 6x + 5y = 39. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + 3y = 9, \\ 3x - 2y = 7. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 3x + 7y = 21, \\ y - 4z = 0. \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x + y = 9, \\ 5x - 4y = 9. \end{cases}$$

5. 男工 10 人,女工 15 人,每日工資共 7 圓。已知男工每日工資等於女工每日工資的 2 倍。問男女工每人每日的工資是多少?

6. 有大小兩個正方形,周圍相差 44 尺。如若大正方形的面積較小正方形大 187 平方尺,問這兩個正方形的面積各是多少?

7. 某人借錢買地 240 畝,每年每畝地可得租金 3 元,如若借錢的利率每年 5%,扣掉利息,每年還可賺 125 元。問地價每畝幾元?

8. 8 年前兄年是弟年的 3 倍,5 年後兄年較弟年的 2 倍多 16 歲。問現在兩人各是幾歲?

9. 7 時與 8 時間,鐘面兩針成直角在何時?

10. 買牛肉若干斤,共用去 8 元。若每斤的價便宜二成,這 8 元可買 5 斤。問每斤的價格若何?

11. 有二位數,數字的和是 15,假若把兩位數字顛倒,所成的數較原數小 9。求這數。

12. 有矩形地一塊，如若長加12尺，橫減6尺，或是長減10尺，橫加6尺，牠的面積都沒有變化。你看這塊地的面積究竟有多少？

13. 一人乘汽車到火車站趕車，如若汽車每時走20公里，到站時要等15分鐘纔開車；如若汽車每時走12公里，那麼到站時火車已開走15分鐘了。問這人的家離火車站幾公里？

14. 某商人出售甲乙兩種貨品，共得46元，計甲種得利20%，乙種虧本8元。如若乙種得利15%，甲種虧本3.4元，那麼預計可得53元。問兩種貨品的原價各若干？

15. 有某分數，分子較分母小16，分子的3倍較分母大14。求這個分數。

16. 甲每年的收入等於乙每年收入的半數，可是乙每年的支出較多500元。如此二年後，甲餘銀200元，乙餘銀400元。問兩人每年的收入各是多少？

17. 甲乙二人作800米的競走兩次，第一次甲先走4秒，而敗於乙6.4米；第二次甲先走20米而敗於乙12米。問兩人走800米，各需幾秒？

18. 有周圍是50尺的長方地一塊，沿四周有寬1

尺的道路,道路的面積是54平方尺,問這長方地的面積是多少?

19. $y = ax + b$ 中,若 $x = 3$ 則 $y = -5$; 若 $x = 4$, 則 $y = 9$, 若 $x = 2$, y 該是多少?

20. 試證 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ 的圖解和 x 軸相交的一點與原點的距離是 $+3$; 和 y 軸相交的一點與原點的距離是 $+4$.

附 錄

(一) 中西名詞對照表

	頁數		頁數
一 畫		加減消去法 Elimination by addition and subtraction	94
一元一次方程式 Equation of 1st degree in one unknown.....	70	六 畫	
二 畫		同類項 Similar terms	27
二元一次聯立方程式 Simultaneous equations of 1st degree in two unknowns.....	92	多項式 Polynomial	27
二項式 Binomial	27	七 畫	
三 畫		位標 Co-ordinates.....	117
三項式 Trinomial	27	位標軸 Co-ordinate axes	117
四 畫		八 畫	
方程式 Equation	54	性質符號 Sign of quality	3
文字數 Literal number	20	昇幂序 Ascending power.....	51
分式 Fraction.....	21	九 畫	
比較消去法 Elimination by comparison	99	恆等式 Identity	71
五 畫		指數 Exponent, Index.....	26
代入消去法 Elimination by substitution	97	係數 Coefficient	25
代數式 Algebraic expression ...	21	降幂序 Descending power	51
代數和 Algebraic sum	9	負根 Negative root	76
左邊 Left member	71	負號 Negative sign	2
右邊 Right member	71	負數 Negative number	1
正根 Positive root.....	76	十 畫	
正號 Positive sign.....	2	原點 Origin.....	117
正數 Positive number	1	十一 畫	
		移項 Transposing terms	43

十二畫

等式 Equality	71
等量公理 Axiom of equality ...	75
象限 Quadrants	118
絕對值 Absolute value.....	3

十三畫

單項式 Monomial	27
解方程式 Solving equation	54

十五畫

整式 Integral expression.....	21
冪 Power.....	25

十六畫

橫軸 Horizontal axis	117
橫標 Abscissa	117

十七畫

縱軸 Vertical axis.....	117
縱標 Ordinate	117

(二) 西中名詞對照表

A

Abscissa 橫標.....	117
Absolute value 絕對值.....	3
Algebraic expression 代數式 ...	21
Algebraic sum 代數和	9
Ascending power 昇冪序.....	51
Axiom of equality 等量公理 ...	75

B

Binomial 二項式	27
--------------------	----

C

Coefficient 係數.....	25
Co-ordinates 位標	117
Co-ordinate axes 位標軸	117

D

Descending power 降冪序	51
----------------------------	----

E

Elimination by addition and subtraction 加減消去法	94
Elimination by comparison 比較消去法.....	99
Elimination by substitution 代入消去法	97
Equality 等式	71
Equation 方程式	54
Equation of 1st degree in one unknown 一元一次方程式.....	74
Exponent 指數	26

F

Fraction 分式.....	21
------------------	----

H

Horizontal axis 橫軸	117
--------------------------	-----

I

Identity 恆等式	71
Index 指數	26
Integral expression 整式.....	21

L

Left member 左邊	71
Literal number 文字數.....	20

M

Monomial 單項式	27
--------------------	----

N

Negative number 負數	1
Negative sign 負號	2

O

Ordinate 縱標	117
Origin 原點.....	117

P

Polynomial 多項式	27
Positive number 正數	1
Positive root 正根.....	76
Power 冪.....	25

Q			
Quadrants 象限.....	118	Simultaneous equations of 1st degree in two knowns 二元一次聯立方程式.....	92
R			
Right member 右邊.....	71	Solving equation 解方程式.....	54
S		T	
Sign of quality 性質符號.....	3	Transposing terms 移項.....	43
Similar terms 同類項.....	27	Trinomial 三項式.....	27
		V	
		Vertical axis 縱軸.....	117

