陳蓋民編

簡易師範學校教科書

算學

第三册

幾何及三角

商務印書館發行

陳藎民編

簡易師範學校教科書

算學

第三冊

幾何及三角

商務印書館發行

中華民國二十九年一月初版
中華民國三十五年一月三版

(58707C)

簡易師範學校教科書 算學 第五冊

第三冊定價國幣捌角伍分
印刷地點外另加運費

編纂者 陳藎民
發行人 朱經農 上海河南中路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館 各地

(本書校對者 章德宜 徐鼎銘)

簡易師範學校教科書 算學第三册

（幾何及三角）

第一編　直覺幾何學

第二編　推理幾何學平面之部

第三編　推理幾何學立體之部

簡易師範學校教科書 **算學第三冊**

（幾何及三角）

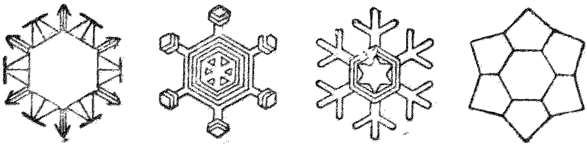
第一編　直覺幾何學

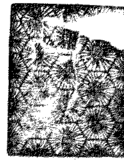
第一章　點，線，面，體，線段量法

§1.　直覺幾何學的目的　直覺幾何學的目的在使學者，由觀察和實驗的方法中，引起思想的分析，發現各種物體的形狀，大小和位置的關係，以得到幾何的智識，解決實用上幾何的問題。

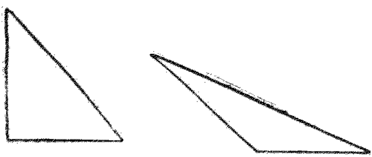
§2.　圖形　把物體的形狀，繪在紙上，叫做圖形，或簡稱為圖。我們研究物體形狀，為方便起見，每每繪成圖形來研究。物體的形狀，如桌面的圓形，方形，牆壁田地的正方形，長方形，三角形，多角形，亭、臺、池、沼的多角形，橢圓形，雪花蜂窩的六出，月亮的盈虛，看去好似千差萬別，極不一律，但是細加分析，即知極複雜的圖形，也不過由簡單的圖形集合而成；所以研究圖形都從簡單的圖形入手。

雪花　　蜂窩

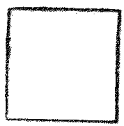




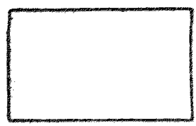
簡單圖形



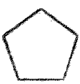
三角形



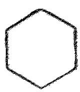
正方形



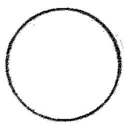
長方形



正五邊形



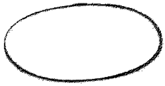
正六邊形



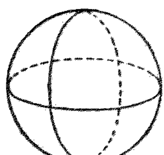
圓

圓分

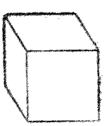
月形



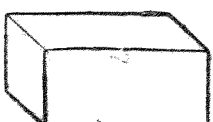
橢圓



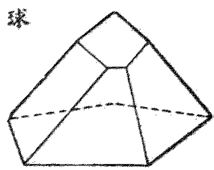
球



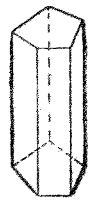
正方體(或立方體)



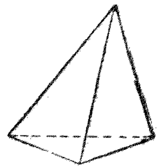
方體



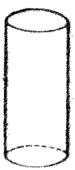
角錐台



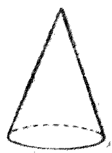
角柱



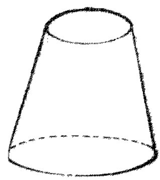
角錐



圓柱



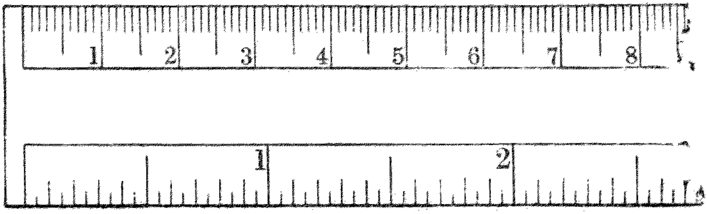
圓錐



圓錐台

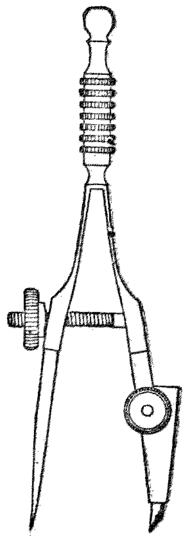
§3.　直覺幾何學所用的工具，除鉛筆，紙張及方格紙外，還有下列四種東西，頗爲重要。

公尺

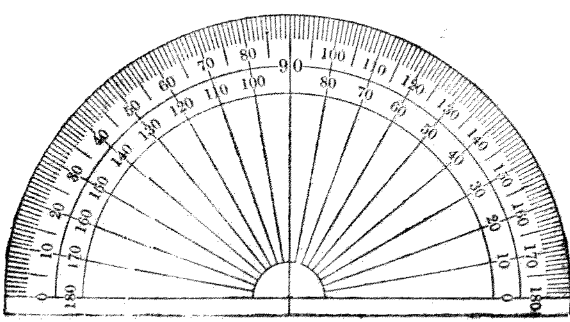


市尺

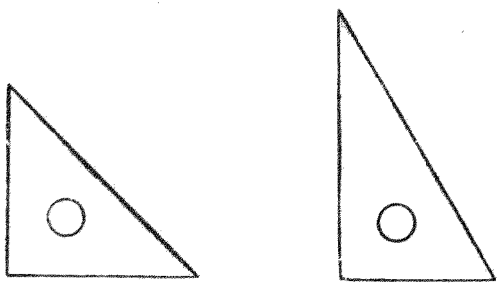
圓規



量角器


0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180
180 170 160 150 140 130 120 110 100 80 70 60 50 40 30 20 10 0

三　角　板



§4.　幾何的元素　像桌椅，講臺，墨水瓶……以及自然界中一切物體，都叫做立體。立體的外表，可以用眼看得見，或用手觸得着的，叫做面。

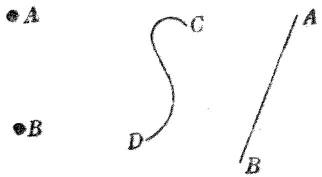
面是立體與空氣接觸的地方。譬如一杯水，水與杯接觸的地方，就是面，所以面無厚薄，祇有長寬。

通常的立體，都由幾個面包成，譬如立方體由六面包成，圓柱由三面包成。面與面相交的地方叫做線或立體的稜。因爲面沒有厚薄，所以面與面相交的線是沒有粗細，祇有長短。線分兩種，像正方體，長方體……的稜都是直線，圓柱的稜都是曲線。

線與線相交的地方叫做點，因爲線沒有粗細，所以線與線相交的點也沒有大小，祇有位置。

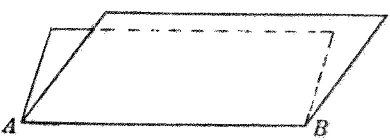
在幾何學上，通常都用很尖的鉛筆在紙上點一點，代表幾何學的點，並在點的近傍寫一字母，以使此點與彼點有所區別，又

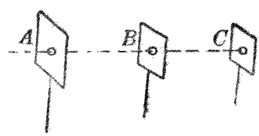
以很尖的鉛筆在紙上畫出來的痕跡如 AB, CD 代表幾何的線，



在線的兩端各寫一字母，以使此線與彼線有所區別。由是可知點運動可以成線，線運動可以成面．面運動可以成體。由點、線、面、體構成的圖形叫做幾何圖形。構成幾何圖形的點、線、面、體叫做幾何的元素。

§5.　直線　像光線，視線以及樂器上緊張的弦，一張紙的摺痕等等，都是直線，這種直線，雖然不是無粗細的幾何線，但是能給我們以『直』的概念，使我們得到直線的正確意義。現在再把『直』的概念，用下面的舉例多方說明如下：

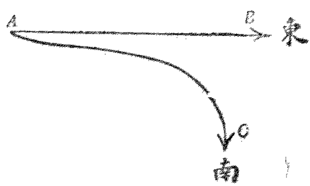




經過 A,B 兩孔的視線是直線，第三孔 C 與 A,B 同在一直線 AB 上。

1.　經過 A,B 兩孔的視線是直線。

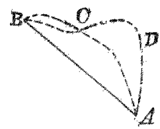
2.　假設有人從 A 點出發，沿着大街向東走，到了 B 點，仍舊是向東，那麼這條大街 AB 是直的。如若從

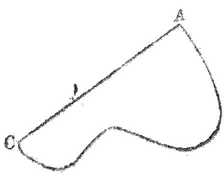


A 出發，要時時改變方向，纔能走到 C 點，於是 AC 是曲線。

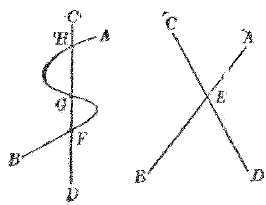
3. 假設有兩個市鎮，一個在 A 點，其他一個在 B 點，現在有人由 A 走到 B，問最短的路是什麼？這自然是通過 AB 的直線。通過 A、B 兩點，雖然有許多線可以作，但是直線卻祇有一條，所以兩點間最短的距離，是直線。

4. 假設一塊地 $ABCD$，有一部分的界是直線 AB，現在問其他的界也能夠是一條直線嗎？這自然是不可能的，因為我們已經知道，通過 A，B 雖然可以作許多線，但是直線祇能作一條。





5. 直線與直線相交祇有一點，譬如 AB 與 CD 相交，祇有一點 E，但是曲線 AB 與直線 CD 相交，就可以有兩點以上 F，G，H。



上面所舉的例，都是說明直線的性質，現在再把他摘述於下以醒眉目。

1. 通過兩點，祇能作一條直線。

2. 點在直線上運動的方向是不變的。

3. 兩點間最短的距離是直線。

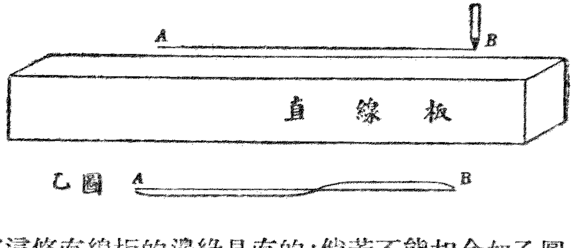
4. 兩條直線不能把空間包圍起來。

5. 兩條直線相交祇有一點。

習 題

1. 木匠試驗他所鏢得的木條是不是直的，常用一隻眼由木條之一端往他端看去。這是什麼道理？

2. 要試驗一條直線板的邊緣是否直的，常用鉛筆在直線板的邊緣畫一直線 AB，再把直線板掉頭和前同一邊緣在 AB 兩點間引一直線，倘若前後兩直線能相合，就可以斷



乙圖

定這條直線板的邊緣是直的；倘若不能相合如乙圖，就斷定這條直線板的邊緣不是直的，問這個判斷是根據什麼道理的？

3. 問至少要幾條直線纔可以把空間圍繞起來？

4. 兩條曲線能把空間包圍起來麼?

5. 一條曲線能把空間包圍起來麼? 試用鉛筆畫出幾條曲線證實你的回答。

§6. 平面　面有曲面和平面兩種,這兩種面的區別如下:以直線板的邊緣與面接觸,如若處處都能接觸,這個面就是平面;如若有接觸與不能接觸的地方,就是曲面。以直線板與圓柱或圓錐接觸,在某一方向可以處處接觸,但是不能在任何方向都可以處處接觸,所以圓柱及圓錐的面都是曲面,由是得平面的定義如下:

在面上,任意取兩點,作一直線,如若這條直線完全在這個面上,於是這個面就叫做平面。

§7. 線段的長　直線的一部分,如 AB, 叫做線段。

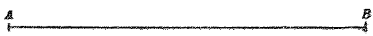
線段是位於直線上兩點之間的,以該兩點爲界,這兩點叫做線段的兩端。以長的單位公分或公寸測量 AB, 如若 AB 是 6 公分或 0.6 公寸;於是這個數:『6 公分』或『0.6 公寸』叫做線段 AB 的長。

公尺。公寸,公分,公釐的略號各爲 $m.$,$dm.$,$cm.$,$mm.$, 這在基本運算之練習中,已經講過,如 6 公分寫爲 6 $cm.$,或 0.6 $dm.$,

或 60 mm.。但是長的單位，常用的還有市尺，市寸等。我國的市尺，市寸並沒有略號，祇簡稱爲尺，寸。現在爲學者書寫方便起見，就借用英尺，英寸的略號『 ′ 』『 ″ 』。譬如 3 尺寫爲 3′ 或30″。又如 4 寸 7 分卽 4 寸又 10 分之 7 寸，寫爲 4.7″ *。

用許多線段連接起來如 $ABCD$, 叫做折線。

實驗1. 用寸分測量線段 AB, CD 的長。



實驗 2. 再用公分，公釐測出上面線段 AB,CD 的長。

實驗 3. 用寸，分量出 AB, BC 兩線段的長，以加法算出 AC 的長。再用寸，分直接度量 AC 的長，以與加法所得的結果相比較是否相同。

各種結果記錄如下：

直接量出	$AB=$	寸
直接量出	$BC=$	寸
由加法算得	$AB+BC=$	寸
再由直接量出	$AC=$	寸

* 凡採用英尺爲單位的建築師，工程師等都用這兩個略號代表英尺英寸。

實驗 4.　以公分量得 AC, BC 的長；用減法算出 AB 的長，再用市尺直接度量 AB 的長，以與減法所得結果相比較，並做上面記錄法寫出。

實驗 5.　用鉛筆畫兩條折線，使他們各段的長，各等於下列各排的數：

3.4 *cm.*,　7.2 *cm.*,　5.0 *cm.*,　0.8 *dm.*,　0.9 *cm.*,

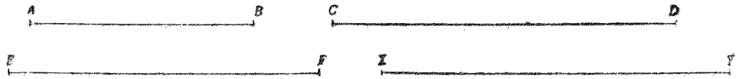
4.2″,　2″,　0.9″,　1.5″,　0.8″　1.4″。

實驗 6.　作一線段 AB，令其長爲 5 *cm.*，用經驗來觀察，求出 AB 的中點，令中點爲 M。再用公尺檢驗 AM 與 MB 是否等長。

（注意）　把 AB 分爲兩條相等的線段，有時簡略的說：『把 AB 二等分』。倣此，『把 AB 三等分』，『把 AB 四等分』……；就是把 AB 分爲三條相等的線段，四條相等的線段……。

實驗 7.　作一線段 CD，令其長爲 7.8 *cm.*，用觀察法把 CD 三等分，問每一分的長是多少？并用公尺檢驗觀察法所分結果是否正確。

實驗 8.　用觀察法把 AB 分爲四等分，CD 分爲五等分，EF 分爲六等分，XY 分爲七等分，并用公尺檢驗其正確與否。



實驗 9.　作一寸長的線段，用公尺度量此線段，看他一寸等於多少公分公釐。

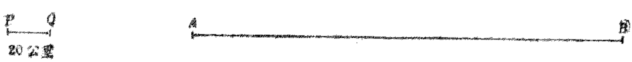
(注意)　我們知道，一寸等於$\frac{10}{3}$公分或$\frac{100}{3}$公釐。但$\frac{10}{3}$及$\frac{100}{3}$都是帶循環小數，所以這個題的準確答數是沒有的，他祇有近似值。

實驗 10.　作 3 寸長的線段 AB，用公尺度量此線段，看他等於多少公分，這個題能有正確值麼？

實驗 11.　京滬鐵路長 310 公里。倘若以 1 公分的線段表示 50 公里的路，問表示京滬鐵路長的線段，有多少長？并且把他畫出來。

(注意)　表示京滬鐵路長的線段，叫做京滬鐵路的縮小圖。這 1 公分長的線段，叫做 1 公分表 50 公里的縮尺，以 1 公分表 50 公里的縮尺，度量縮小圖所得的數與 50 公里相乘，即得實物的大小。

實驗 12.　設滬杭鐵路的縮小圖爲 AB，試用 1 公分表 20 公里的縮尺 PQ 度量 AB，以求滬杭鐵路的長。



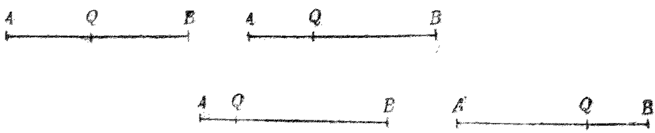
實驗 13.　我國長江長約 5733 公里，試以 1 公分表 63 公里的縮尺，畫出長江的縮小圖。

實驗 14.　有人第一小時向南走 8 公里，第二小時轉向東走 6 公里，試以 1 公分表 2 公里的縮尺，畫出此人所走路程的縮小圖，并以縮尺量出此人出發點離終點的距離。

實驗 15.　試以 1 公分表 2 市尺的縮尺，畫出本教室地板面積的縮小圖。

實驗 16.　有一塔在學校北邊 1.5 公里的地方，又有一塔在學校西邊 2 公里的地方，試以 1 市寸表 1 公里的縮尺，畫出兩塔與學校位置的縮小圖，并以縮尺量出兩塔的距離。

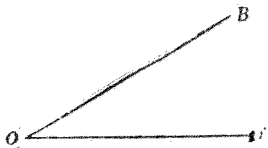
實驗 17.　下面的線段 AB，其長都是 1 市寸，試用觀察法先斷定 AQ 是 AB 幾分之幾，再用市尺檢驗觀察的結果是否正確。



實驗 18.　作 1 市寸長的線段 AB，先用觀察法在 AB 上面定一點 Q，使 AQ 之長爲 $0.1''$，$0.3''$，$0.4''$，$0.5''$，$0.6''$。再用公尺檢驗觀察結果是否正確。

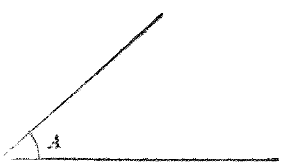
第二章　角及三角形

§8.　角　由平面上一點 O，引兩條直線 OA, OB，這兩條直線，好像圓規兩脚或鐘錶長短兩針的展開似的，這展開部分就叫做角。O 點叫做頂或角點，OA 及 OB 叫做角的邊。



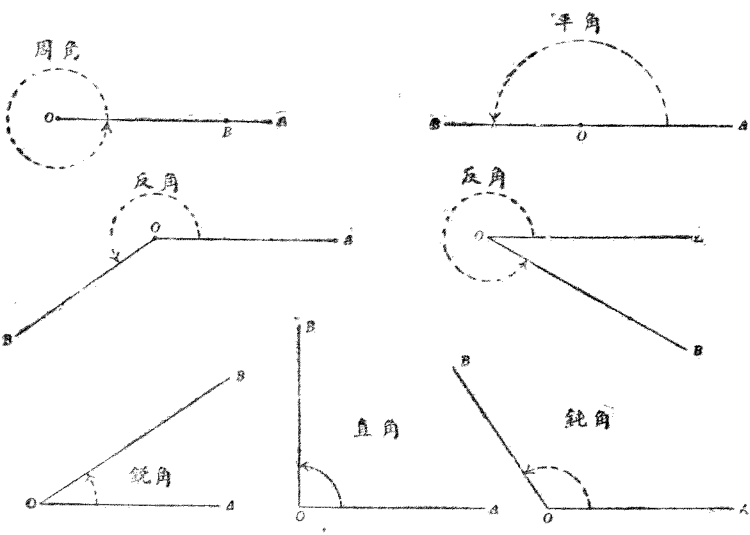
由這個說法，可知一個角，也可以看作是直線在平面上繞一端旋轉時所掃出來的面，所繞的一端就是頂，直線旋轉起訖的地方就是邊。譬如上圖的角，可以看作是直線 OB 繞 O 點由 OA 的位置轉到 OB 所掃出來的，或 OA 繞 O 點由 OB 轉到 OA 所掃出來的，如若作前一種看法，那麼 OA 就叫做始邊，OB 叫做終邊。

上圖的角，普通都記爲$\angle AOB$，或$\angle BOA$，或簡記爲 $\angle O$，讀爲『角，A,O,B』，或『角，B,O,A』，或『角，O』，有時也用一個字母或數碼寫在角的內部如下圖，記爲 $\angle A$，$\angle 1$。



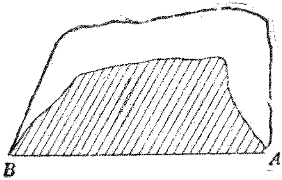
角是兩條直線展開的部分，或是直線旋轉出來的面，所以角

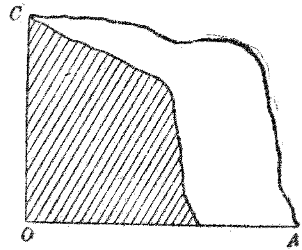
的大小與邊的長短是無關係的，祇與直線旋轉的大小有關係，旋轉一周所成的角，叫做周角。半周所成的角，叫做平角。即角的兩邊同在一直線上叫做平角。半個平角，叫做直角。小於直角的角，叫做銳角。大於直角而小於平角的角，叫做鈍角。大於鈍角而小於周角的角，叫做反角。



實驗 1.　作 AB,CD 兩直線，令其相交於 O 點。問 O 點的周圍有幾個角？把這幾個角，用記號寫出來，并且用等式表示這幾個角的和等於什麼角。

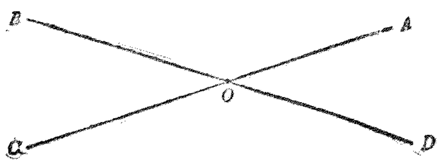
實驗 2.　取紙一張，摺成如下圖，問摺痕 AB，是什麼角(左圖)？又摺痕 OA，與 OC 所成的角是什麼角？





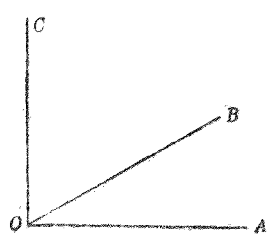
實驗 3.　試將時鐘3點，6點，9點，12點時候，兩針所成各角畫出來，並說出這些角的名稱。

§ 9.　對頂角　一角的兩邊，如若是他角兩邊的引長線，這兩個角叫做對頂角，如 $\angle AOB$ 與 $\angle COD$ 是對頂角，又 $\angle DOA$ 與 $\angle BOC$ 也是對頂角。

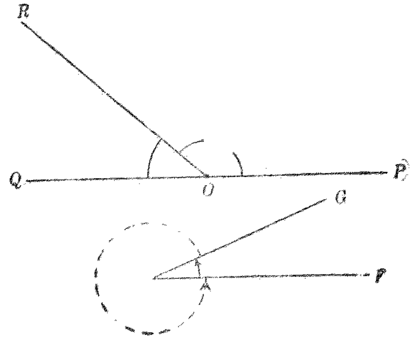


§ 10.　同頂角　凡同以一點爲頂的角，叫做同頂角，如上圖 $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$,……等都是同頂角。

§ 11.　鄰角　兩個同頂角，如若有一邊是公共的，這兩角就叫做鄰角。



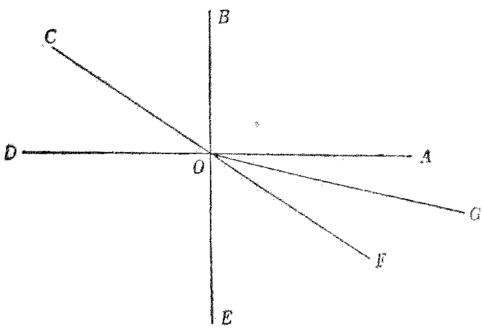
§ 12.　餘角，補角，配角　設 $\angle AOC$ 是直角，由 O 任意引一直線 OB，於是 AOB 及 BOC 兩角的和就等



於一直角，凡兩角的和等於一直角，其中任意一角，就叫做其他一角的餘角，或兩角互爲餘角。倣此，凡兩角的和等於一平角，如$\angle POR$及$\angle ROQ$，其中任意一角，叫做其他一角的補角，或兩角互爲補角。又凡兩角的和等於一周角，其中任意一角，叫做其他一角的配角，或兩角互爲配角。

§13.　鄰餘角，鄰補角　假設兩角互爲餘角，又爲鄰角，於是其中任意一角叫做其他一角的鄰餘角。又假設兩角互爲補角，又爲鄰角；於是其中任意一角叫做其他一角的鄰補角。

實驗 4.　察出下圖各角，用角的記號塡入下表。

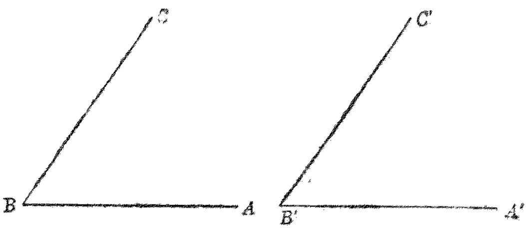


直　角	
平　角	
周　角	
對頂角	
鄰餘角	
鄰補角	

實驗 5.　從一點O，引直線OA，OB，OC，OD，OE，OF，

OG 七條,問這七條直線依次所夾的角的和等於多少?從一點任意引許多直線,這些直線依次所夾的角的和都等於四直角麼?

§14.　角的相等　把$\angle ABC$從紙上剪下來,放在$\angle A'B'C'$上面,使 B 點與 B' 點相合,又使 AB 落在 $A'B'$ 上面,倘若 BC 也落在 $B'C'$ 上面,我們就說這兩個角相等。把直角分爲九十個相等的角,每一角的大小叫做『度』,度分爲六十等份,每份的大小叫做『分』,分又分爲六十等份,每份的大小叫做『秒』。度,分,



秒都是量角的單位,他們的記號各爲『○』,『′』,『″』,譬如5度24分32秒寫爲 $5°24'32''$。

實驗 6.　有一車輪,每分鐘轉10轉,問每秒鐘轉幾度?試用量角器把這個角畫出來。

§15.　垂線　兩條直線所夾的角,如若是直角,我們就說其中一條是他條的垂線。

實驗 7.　在紙上畫一直線 AB, 由 AB 上面取一點 O, 使 B 對摺於 O 點,得一摺痕 OC, 問 OC 與 AB 是否垂直?

（注意）OC 與 AB 垂直，常寫爲 $OC \perp AB$，讀爲 OC 垂直於 AB.

實驗 8.　把實驗 7 所作 $\angle AOC$ 再對摺，用量角器度量摺痕與 OA 所成的角是否等於 $45°$。

實驗 9.　在平面上，畫兩條相交的直線，先用量角器證明下面定理是眞的，再把對頂角剪下，疊合起來檢驗下面定理眞僞。

定理　凡對頂角相等。

實驗 10.　用摺紙法證明下面兩定理的眞僞，并用量角器檢驗摺痕所夾的直角是否等於 $90°$，平角是否等於 $180°$。

定理 1.　凡直角都相等。

定理 2.　凡平角都相等。

實驗 11.　用摺紙法發現下面定理空白處應塡的數碼：

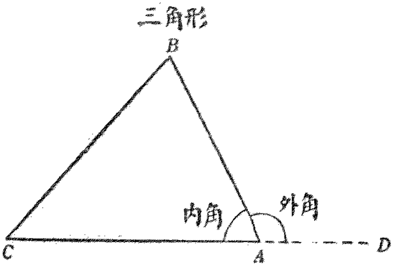
定理 1.　經過直線內一點，可作　　條垂線。

定理 2.　經過已知直線外一點，可作　　條直線垂直於已知直線。

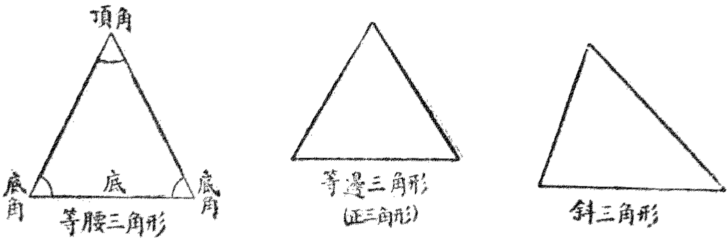
實驗 12.　取一紙片對摺再對摺，使他摺成直角，以所摺直角，與書的四角比較，看書的四角是否也是直角。

§ 16.　三角形　在平面上，任意取三點 A,B,C，假設這三點不同在一直線上，於是連結 AB,BC,CA 三線段所成的圖形就叫做三角形。每一個三角形都有三個角，三個頂，三個邊。延長三

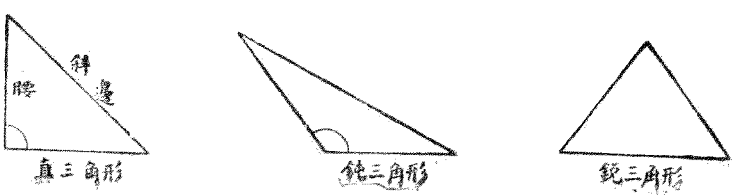
角形任意一邊，所得延長線與他邊所夾的角，叫做三角形的外角；



三角形各邊所夾的角，叫做內角；三角形的三邊及三內角，叫做三角形的六部。兩邊相等的三角形，叫做等腰三角形，或二等邊三角形。三邊都相等的三角形，叫做等邊三角形，或正三角形。三邊都不相等的三角形，叫做斜三角形。三角形ABC，常記爲$\triangle ABC$，讀爲『三角形 ABC』。

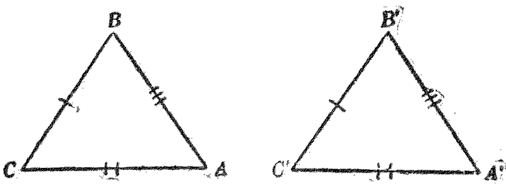


三角形的三角，如若其中有一角是直角，就叫做直角三角形或直三角形；如若其中有一角是鈍角，就叫做鈍三角形；如若三角都是銳角，就叫做銳三角形。



直角三角形對直角的一邊叫做弦，或斜邊，其他兩邊叫做腰。

§17.　相合形　取兩張紙片，疊在一處，剪成三角形，即得兩個能疊合的三角形。



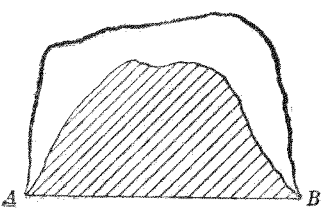
能疊合的兩個圖形叫做相合形或全等形，其中能疊合的邊叫做相當邊，能疊合的角，叫做相當角。就一般的講，能疊合的部分，叫做相應部。

由上面所說的話，可知相合形的相應部是相等的。上面能相合的兩三角形，常寫爲

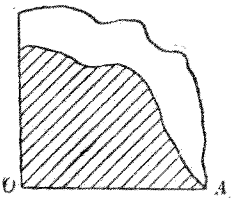
$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \quad 或 \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

這記號『$\equiv$』，『$\cong$』，讀爲『全等於』，或『疊合於』。

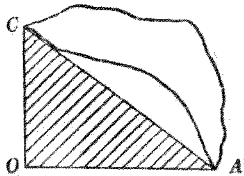
實驗 13.　取紙一張，先摺成如甲圖，再依 AB 對摺如乙圖，再將乙圖作一摺痕 AC 如丙圖。問這張紙打開後，所有摺痕所成的三角形是何種三角形？



甲圖



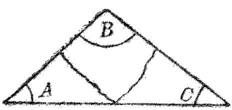
乙 圖

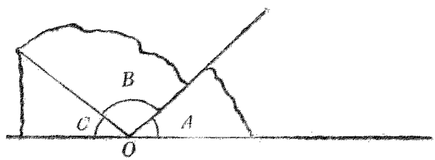


丙 圖

實驗 14. 在紙上任意畫一個三角形 ABC, 用量角器度量各內角的大小,看他三內角的和等於多少度。

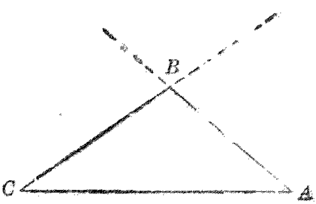
實驗 15. 取紙一張剪成三角形如左圖,把各角剪下,令各





角的頂集於一點 O 如右圖,問由這個實驗,能斷定三角形三內角的和等於多少度?

實驗 16. 畫一個三角形 ABC, 假設有人立在 A 點,他的面先向 C 點,後轉向 B 點,卽得此人所轉的角等於$\angle A$。又此人沿 AB 至 B 點,轉向 CB 方向,又得此人所轉的角等於 $\angle B$。再此人由 B 後退至 C, 又轉向 A 點,又得此人所轉的角等於$\angle C$,問此人所轉三角的和是多少度?



根據上面三種實驗的結果，發現下面定理空白處……碼用筆填入：

定理　三角形三內角的和等於　　度。

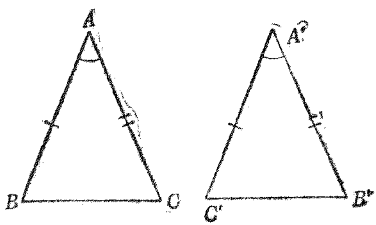
§18.　疊合法　把一個圖形疊在他圖形之上，看他能否完全疊合，這樣方法叫做疊合法。採用疊合法，最好把圖形各畫於薄紙上面來舉行疊合。

實驗 17.　用疊合法證明下面定理是眞的：

定理 1.　一個三角形的兩邊及其夾角，倘若各等於其他三角形的兩邊及夾角，這兩個三角形就全等。

定理 2.　一個三角形的兩角及兩角的夾邊，倘若各等於其他三角形的兩角及夾邊，這兩個三角形就全等。

§19.　演繹法　應用已知的原理，以推證新原理，這種方法叫做演繹法。演繹法在數學上是常用的方法，尤其在幾何學上用得更多，現在用演繹法證明下面定理於下：



定理 1.　等腰三角形的兩底角相等。

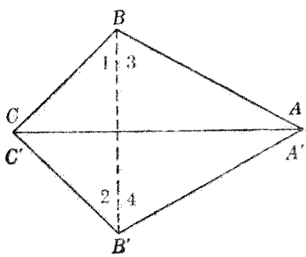
（假設）　設 ABC 是等腰三角形，他的腰 $AB=AC$。

（求證）　$\angle ABC=\angle ACB$

（證明）　把三角形 ABC 反轉來如 $A'C'B'$，這兩個三角形

因	$A'C'=AC=AB$	根據圖形反轉來，仍舊不變的道理及假設。
	$A'B'=AB=AC$	同上。
	$\angle A=\angle A'$	根據圖形反轉來不變的道理。
$\therefore$	$\triangle ABC\equiv\triangle A'C'B'$	§18.　定理 1.
而	$\angle ABC=\angle A'C'B'$	相當角。
但	$\angle A'C'B'=\angle ACB$	圖形反轉來仍舊不變的道理。
$\therefore$	$\angle ABC=\angle ACB.$	公理。

定理 2.　一個三角形的三邊倘若各等於其他三角形的三邊，這兩個三角形全等。



（假設）　設三角形 ABC 及 $A'B'C'$ 的各邊

$$AB=A'B'$$

$$BC=B'C'$$

$$CA=C'A'$$

（求證）　$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$

（證明）　把 $\triangle ABC$ 的邊 AC 與 $\triangle A'B'C'$ 的邊 $A'C'$ 相合，連結 BB'，即得

敍　述	理　由
等腰三角形 BCB'	原設　$BC=B'C'$
$\therefore\quad \angle 1=\angle 2$	等腰△的底角相等。
又　$\angle 3=\angle 4$	與上面同理。
$\therefore\quad \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$	公理
即　$\angle ABC=\angle A'B'C'$	公理
$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$	§18　定理 1.
并且各相當部相等。	

（注意）　由全等的定義，可知凡全等的圖形，他們的相當部都各相等。

實驗 18.　已知三角形各邊的長是 3.4 *cm.*, 2.8 *cm.*, 4 *cm.*, 用圓規把這個三角形作出來，并用量角器檢驗三內角的和是否等於 180 度。

實驗 19.　設 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 所對的邊長，用圓規作三角形 ABC, 使他的邊 a, b, c 等於下面所列的值。

$a=3$ *cm.*	$b=3$ *cm.*	$c=3$ *cm.*
$a=4$ *cm.*	$b=3$ *cm.*	$c=3$ *cm.*
$a=4.2$ *cm.*	$b=3.6$ *cm.*	$c=3.2$ *cm.*
$a=1.7''$	$b=1.2''$	$c=1.4''$
$a=1.7''$	$b=0.9''$	$c=1.1''$
$a=3''$	$b=4''$	$c=5''$

根據§16指出上面所作各三角形的名稱，用量角器度量他們的內角，以驗三角形三內角的和是否都等於180°。

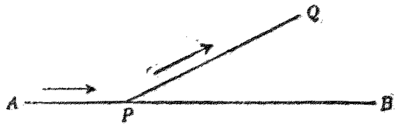
實驗 20. 作2寸長的線段 AB，在 AB 的一旁，以兩端 A,B 爲頂，用量角器各作70°及65°的角，問由這樣作得的三角形的第三角是多少度？這個答數與事實是否符合，試用量角器檢驗之。

實驗 21. 等邊三角形的內角是否相等？每一內角應當多少度？試作等邊三角，用量角器檢驗這兩個答案。

實驗 22. 正三角形的外角等於多少度？試作邊長 3 $cm.$ 的正三角形，用量角器檢驗這個答案。

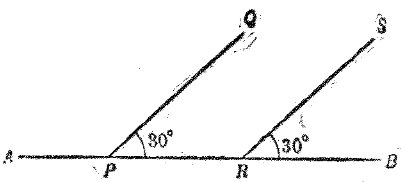
第三章　平行線

§ 20.　角與方向　假設有人，沿着直線 AB，由 A 向 B 走，到 P，由 P 轉向 PQ 走；於是這個人走路的第一次方向是 AB，第二次的方向是 PQ，BPQ 角就是這個人走路方向的變化。

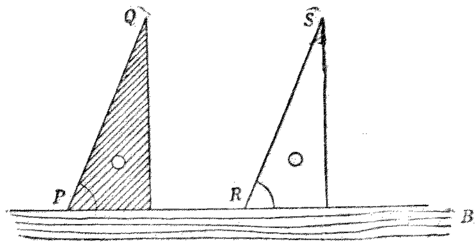


實驗 1.　有船一隻，起初向東駛，後向北轉 42°，現在把船行駛的方向及方向的變化畫出來。

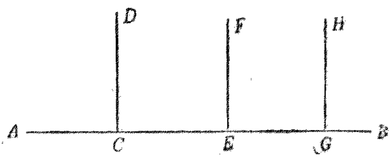
§ 21.　平行線　假設甲，乙兩人沿直線 AB，由 A 向 B 走，甲到 P 點向左轉 30°，卽沿直線 PQ 前進，乙到 R 點也向左轉 30°，沿直線 RS 前進，現在問甲，乙兩人能否相遇？問 PQ 與 RS 如若任意延長，能相遇否？像這樣同方向，無論如何延長，也不能相遇的直線，叫做平行線。兩條直線 PQ, RS，如若是平行線，我們常說 PQ 平行於 RS，或 RS 平行於 PQ。RS 平行於 PQ，簡寫爲 $RS // PQ$，讀爲 RS 平行於 PQ，QPB 及 SRB 兩角叫做同位角。



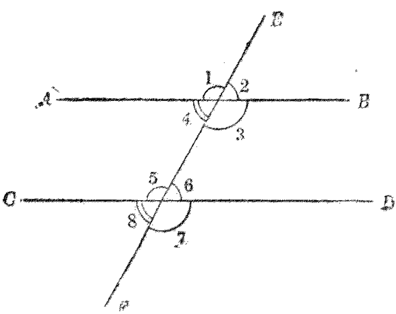
實驗 2.　以三角板緊接直線板，作一直線 PQ。三角板沿着 AB 移動，再作直線 RS。問 PQ 與 RS 是不是平行線？何以知道他們是平行線？



實驗 3.　取紙一張，疊一摺痕 AB，使摺痕 AC 落在 CB 上面得一摺痕 CD，依同樣方法，得摺痕 EF, GH。問 CD, EF, GH 何以與 AB 垂直？又問 CD, EF, GH 是否互相平行？



實驗 4.　用三角板及直線板，作一直線 $AB // CD$ 另外作一直線 EF 與 AB, CD 交成八個角，命這八個角爲 1, 2, 3, ……8。



(1) 問這八個角中，那幾對是同位角？

(2) 問 $\angle 4$ 與 $\angle 6$ 及 $\angle 3$ 與 $\angle 5$ 是否相等？ $\angle 4$ 與 $\angle 6$ 叫做內錯角。

(3) 問 $\angle 1$ 與 $\angle 7$ 及 $\angle 2$ 與 $\angle 8$ 是否相等？ $\angle 1$ 與 $\angle 7$ 叫

做外錯角。

(4) 問內錯角是否相等?

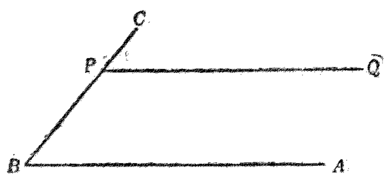
(5) 問外錯角何以能相等?

(6) 問這八個角中有幾對內錯角,有幾對外錯角? 由上面的研究,得:

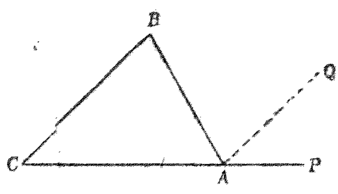
定理　兩條直線與第三條直線相交,如若內錯角或外錯角或同位角相等,那麼這兩條直線就平行。

實驗 5.　作 $AB//CD$,以 EF 與 AB 成 $60°$ 的角,與 AB 及 CD 相交,問如此交成的八個角 1, 2, 3, 4, 5,……8 每角多少度?

實驗 6.　設 ABC 是已知角,用量角器度量 $\angle ABC$ 的大小,根據上面定理同位角相等,則兩直線平行的道理,由 BC 上面一點 P 作 PQ,平行於 BA。



實驗 7.　設 ABC 是任意三角形,用量角器在 A 點作 PAQ 角,等於 ACB 角。

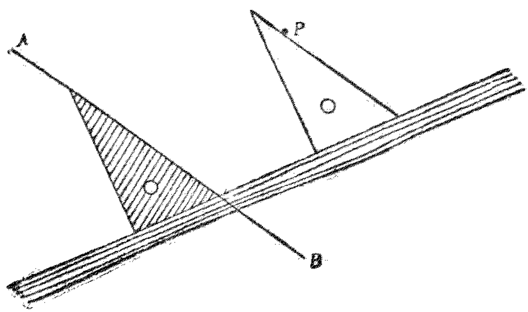


(1) 問 $\angle QAB$ 與 $\angle ABC$ 相等否?

(2) 利用這個圖,證明三角形三內角的和等於兩直角。

§ 22.　作圖題 1.　用三角板及直線板，由已知直線外一點，作直線平行於已知直線。

設 AB 是已知直線，P 是 AB 外面的已知點，現在求過 P 點作直線平行於 AB。

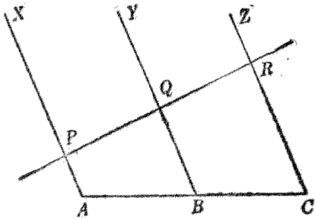


(作法)先使三角板的斜邊與 AB 相合，再使直線板與三角板的腰接觸，於是沿直線板移動三角板使斜邊落在 P 點上面，沿斜邊作直線即得所求直線。

實驗 8.　設 A,B 兩點相隔 7 $cm.$，通過 A 點任意畫一直線 AC，用直線板及三角板通過 B 點，作直線平行於 AC.。

實驗 9.　作 4 $cm.$長的線段 AB，用量角器在 A 點作 $\angle BAC$ 等於 72°。又在 B 點作直線平行於 AC。

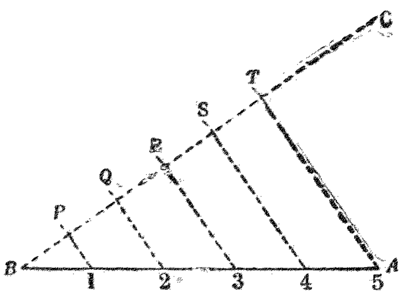
實驗 10.　作 4 $cm.$長的線段 AC，用公尺平分 AC 於 3 點，由 A, B, C 各點向任意方向引平行線 AX, BY, CZ 任意作直線



與各平行線相交於 P, Q, R,用公尺檢驗 PQ 與 QR 是否相等?做此，再任意畫直線與平行線相交於 L, M, N,比較線段 LM 是否與線段 MN 相等。

實驗 11. 作 6 cm. 長的線段AD,用公尺三等分 AD 於 B, C 兩點,由 A, B, C, D 各點引平行線,再任意引一條直線與各平行線相截,問被此等平行線所截得的線段是否都相等?試用公尺檢驗各線段的長是否相等。

§ 23. 作圖題 2.. 用圓規及直線板，分已知線段爲五等分。



假設 AB 是已知直線。求分 AB 爲五等分。

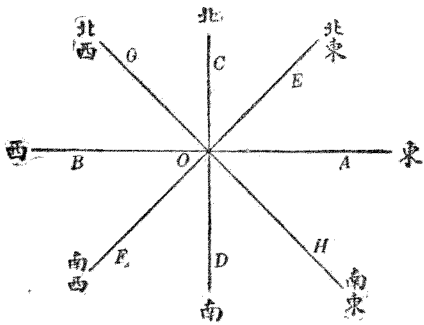
(作法)由 AB 的一端 B,任意作一角 ABC,用圓規截分 BC（不拘長短）五次於 P, Q, R, S, T,連結 TA,由 P, Q, R, S 各點各作直線平行於 TA, 交 BA 於 1, 2, 3, 4 各點，於是 AB 就被各平行線平分爲五等分。

實驗 12. 作 7 cm.長的線段 AB，先用圓規，直線板及三

角板分 AB 爲六等分，再用公尺檢驗所分各線段是否相等。

實驗 13. 作 $3.2''$ 長的線段 AB，先用圓規，直線板及三角板分 AB 爲八等分，再用市尺檢驗所分各線段是否相等。

實驗 14. 取紙片一張，對摺，即得平角 AOB。再對摺，即得直角 AOC, COB, BOD, DOA。再對摺，即得八個相等的角。問這八個角每角多少度？試用量角器檢驗答數是否準確。



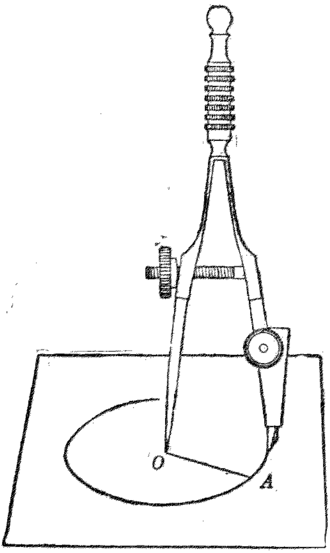
（注意） 假設有人立在 O 點，向四面觀察，凡 OA 方向叫做東，OB 方向叫做西，……東南西北四個方位叫做方位基點。我們中國一般人的習慣，以凡在 AOC 角以內的位置叫做東北，AOD 角以內的位置叫做東南，BOC 角以內的位置叫做西北，BOD 角以內的位置叫做西南。這四個名詞都是以東西爲主，南北爲輔，使他們拼合出來的，但是在航海羅盤上，都以北南爲主，東西爲輔，由北南及東西拼合種種不同名詞以表示其他方位。譬如 OE 方向叫做北東，OH 方向叫做南東，OG 方向叫做北西，OF 方向叫做南西。譬如有物在 OE 上面一點 E，就說 E 位於 O 的北東。

實驗 15. 有一馬位於牛的北西,相距 300 公尺,又有一羊位於馬的北東,相距 250 公尺,試以 1 cm.表 50 公尺的縮尺,畫出牛馬羊的位置,并用公尺度量牛與羊的距離。

實驗 16. 有人騎脚踏車向某方向前進 200 公尺,向左轉 $68°$,再前進行 300 公尺,後又向右轉 $68°$,前進 250 公尺,試以 1 cm.表 50公尺,畫出此人所經過的路程,并說明第一次前進方向與最後前進方向平行,并求出終點離出發點的距離。

第四章　常用曲線

§ 24.　圓周，圓　令圓規兩脚的兩尖端距離爲 3 *cm.*，以鋼質的一端固定在紙上一點 O，旋轉圓規，於是其他一端的鉛就畫出一條曲線如圖所示，這曲線叫做圓周，O 點叫做圓心。



假設尖端的鉛能永遠保持他原來那樣尖，於是圓周上任意一點與圓心的距離都是 3 *cm.*，由此，得圓周的定義如下：

定義　在平面內，離一點等距離的曲線叫做圓周。

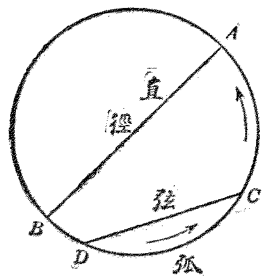
圓周上任意一點與圓心相連的線段叫做半徑。圓周所圍繞的部份叫做圓。圓與圓周原是有區别的；但在習慣上，每每把圓周叫作圓。學者對於兩個名詞的區别，應當特別注意。

實驗 1.　在紙上取一點 O，用圓規作 A, B, C, D, E, F, G 等點，令 OA, OB, OC, OD 的長都等於 3.5 *cm.*，OE 的長 3.2*cm.*，

OF的長 3.9 cm.，OG 的長 3.4 cm.。現在以 O 爲圓心，以 OA 爲半徑畫一圓，問 A, B, C,……等點，那些點在圓周上，那些點在圓周內或外？

實驗 2.　某牧童用蔴繩繫牛於草地的木樁上，從木樁至牛鼻的繩長 18 公尺，問牛能吃到草的範圍是什麼圖形？幷且以 1 公分表 6 公尺的縮尺，畫出這個範圍的縮圖。

實驗 3.　以 O 爲圓心，以 1.6 cm. 的長爲半徑，畫一圓周通過圓心 O 畫一線段 AB，不通過圓心畫一線段 CD，倘若 AB 與 CD 的兩端都以圓周爲界；於是 AB 叫做直徑，CD 叫做弦。圓周被 C, D 兩點所分的一部分，叫做弧。全圓的一半叫做半圓。大於半圓的弧叫做優弧，小於半圓的弧叫做劣弧，或簡稱爲弧。* 由是得弧，弦，直徑等定義如下：



定義　一部分的圓周叫做弧，由弧的兩端所連成的線段叫做弦，通過圓心的弦叫做直徑。

§ 25.　對稱圖　用墨水在紙上任意畫一圖，乘墨水未乾時，依某處摺疊，就立

* 普通讀弧，常照反時鐘的方向讀出，譬如圖中劣弧寫爲 $\overset{\frown}{DC}$，優弧寫爲 $\overset{\frown}{CD}$，初等幾何學中所記弧，常指劣弧而言。

刻又印出一圖，這兩個圖叫做對稱圖，或對稱形，這條摺痕叫做對稱軸。凡對稱圖，依對稱軸旋轉就可以疊合。

實驗 4. 每人各自任意作對稱圖，問所作對稱圖不依對稱軸旋轉(即依其他摺痕旋轉，或在平面內移動)也能疊合否？

實驗 5. 直徑分圓爲兩部分，這兩部分對於直徑是否對稱？試用摺疊法驗之。

實驗 6. 用圓規畫一個直徑 2 市寸的圓，在圓周上，任意取一點 P，用圓規由 P 作 1 寸長的弦，1.6 寸長的弦及 1.8 寸長的弦。問由 P 點可作最長的弦能有多少長？

實驗 7. 任意畫一圓，用圓規作兩條相等的弦，試用疊合法檢驗這兩條等弦所對的弧也相等否？

實驗 8. 同在一個圓上取兩個相等的弧，試用疊合法檢驗這兩個等弧的弦也相等否？

實驗 9. 以一點 O 爲圓心，作半徑長 2.3 *cm.* 的圓，半徑長 2 *cm.* 的圓及半徑長 1.8 *cm.* 的圓。試觀察這三個圓彼此相交否？幷察出這三個圓何以彼此不相交？

§ 26. 同心圓 凡圓心相同的諸圓，如實驗 9 所作的三個圓，叫做同心圓。

實驗 10. 作半徑長 3 *cm.*，3.2 *cm.*，3.4 *cm.*，3.6 *cm.*，諸同心圓。

實驗 11.　取薄紙兩張，各作半徑長 3 cm. 及 4 cm. 的圓。在各圓上取 6 cm. 長的弦，試用疊合法檢驗這兩條等圓所對的弧能相等否？何以不能相等？

實驗 12.　作半徑長 3 cm. 及 2 cm. 的兩個同心圓。由其中一個圓周上一點 A 至其他一個圓周上作線段 AB，問 AB 最短時候是多少長？

實驗 13.　作一線段 AB，使他的長等於 9 cm.，以 A 為圓心，作半徑長 3 cm. 的圓；再以 B 為圓心，作半徑 4 cm. 長的圓。問兩圓最短的距離是多少長？何以這兩圓不能相交？

實驗 14.　作一線段 AB，使他的長等於 5 cm.，以 A 為圓心，作半徑長 4 cm. 的圓；又以 B 為圓心，作半徑 3 cm. 長的圓。問兩圓何以要相疊？問兩圓相交有幾點？問相交點離 A, B 的距離是多少？

實驗 15.　作一線段 AB，他的長 7 cm.，以 A 為圓心，作半徑 4 cm. 長的圓；又以 B 為圓心，作半徑 3 cm. 長的圓。問兩圓相交否？兩圓相交的點在線段 AB 外還是內？相交有幾點？

兩個圓，像這樣的相交於一點，叫做相切。兩圓相切的交點，叫做切點。

實驗 16.　作一線段 AB，長 3 cm.，以 A 為圓心，作半徑 5 cm. 長的圓，又以 B 為中心，作半徑 2 cm. 長的圓。問這兩個圓

相交於何處?是否相切?

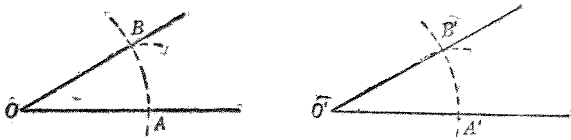
實驗 17. 作一線段 AB, 長 7 $cm.$,求一點離 A, B 的距離都等於 4 $cm.$,問這樣的點有多少點?

實驗 18. 有大炮兩尊,各置於河口的兩岸,相距 10 公里。設炮的射程能及 7 公里的遠,試以 1 公分表 2 公里的縮尺,畫出炮彈所能到的範圍。

§ 27. 作圖題 1. 用圓規及直線板,作一個角等於已知的角。

已知 一個角 O.

求作 一個$\angle O'=\angle O$



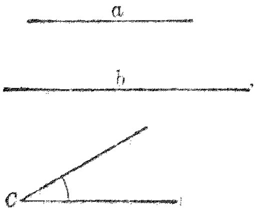
作法 畫一直線 $O'A'$, 在該直線上任意取一點 O', 以 O' 爲圓心,任意的長$O'A'$爲半徑,作一弧,交 $O'A'$ 於 A' 點。以同樣的半徑 $O'A'$ 繞 O 點作圓弧 AB 交 OA 於 A 點, OB 於 B 點。以 AB 的長爲半徑,以 A' 點爲圓心,作圓弧與圓弧 $A'B'$ 相交於 B' 點,連結 B' 點於 O' 點,於是$\angle A'O'B'$ 卽所求的角。

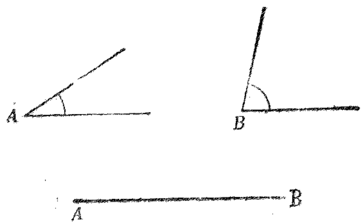
證明

(由學生用口述說明)

實驗 19. 已知三角形兩邊的長為 a, b, 兩邊所夾的角為 c, 求作這個三角形(下面左圖)。

實驗 20. 已知三角形兩角 A, B 及兩角公共的夾邊 AB, 求作這個三角形(下面右圖)。

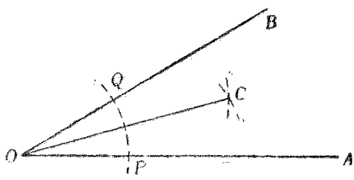




§ 28. 作圖題 2. 用圓規及直線板分已知角為二等分。

已知　一個角 AOB。

求作　一直線平分 $\angle AOB$。



作法　以 O 為圓心,以任意長為半徑,畫一弧,交 OA 於 P 點, OB 於 Q 點。以大於 PQ 弦一半的長為半徑,繞 P, Q 兩點各作一弧,兩弧相交於 C 點,連結 CO, 就是所求直線。

證明

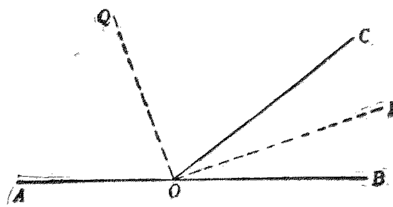
1. 由學生口述說明 $\angle AOC = \angle COB$。

2. 用摺疊法或量角器證明這兩角相等。

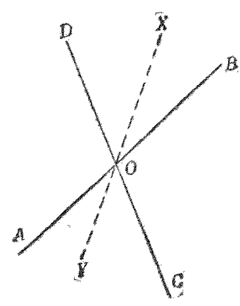
(注意) 直線 OC 叫做 AOB 角的平分線。

實驗 21. 用量角器 60° 的角 AOB, 再用圓規及直線板平分 AOB 角。

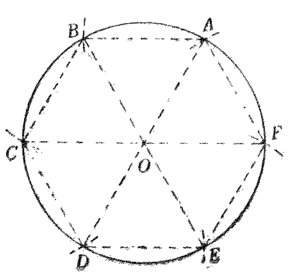
實驗 22. 作線段 AB, 在 AB 上面任取一點 O, 由 O 引一直線 OC, 即得鄰補角 AOC, COB。用圓規及直線板平分這兩個角。問這兩個角的平分線所夾的角是多少度? 試用量角器檢驗 $\angle POQ$ 是否與答數相符。



實驗 23. 作直線 AB 及 CD,相交於 O 點。用圓規及直線板平分對頂角 BOD, COA。設平分線爲 OX 及 OY, 問 $\angle XOD$, $\angle DOA$, $\angle AOY$ 的和等於多少度? 又問 OX 與 OY 是否在一直線上?



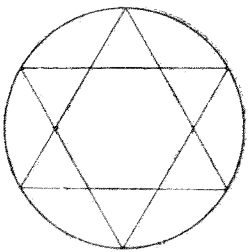
實驗 24. 以 2 cm. 長的半徑作一圓, 以原半徑的長在圓周上作弧,分圓周爲六等分。問 $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$,……等各等於多少度?又問$\triangle AOB$, $\triangle BOC$……等是什麼三角形。

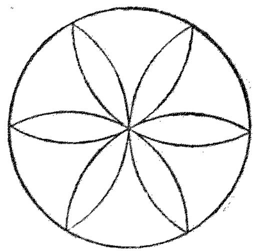


(注意) 以圓心爲頂,

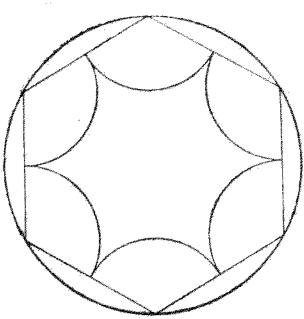
半徑爲邊的角叫做圓心角。

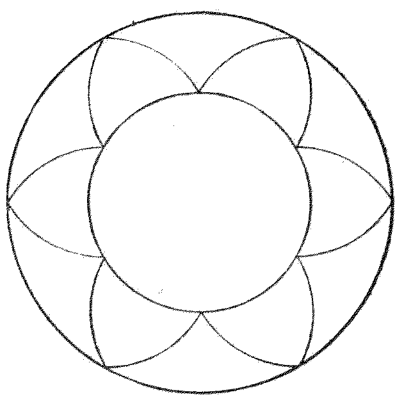
實驗 25. 畫一個圖兩倍於下面的圖：



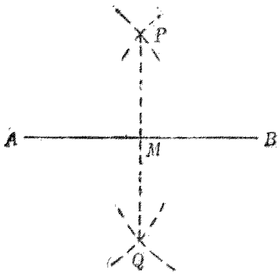


實驗 26. 倣畫下面的圖形。(左圖：圓的半徑計長 3 *cm.*，右圖：先畫內圓，及內圓周圍的星形，內圓及星形各弧的半徑計長 2 *cm.*。)





§ 29. 作圖題 3. 用圓規及直線板二等分已知線段 AB。



作法　以大於 AB 一半(何故?)的線段爲半徑,先繞 A 點作圓弧,再繞 B 點作圓弧,連結圓弧相交的兩點 P,Q,設直線 PQ 與 AB 相交於 M 點,於是 M 就是 AB 的中點。

證明

由學生口述證明。

(注意)　PQ 叫做 AB 的垂直平分線。

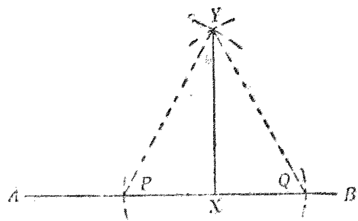
實驗 27.　作 2.3 寸長的線段 AB,用圓規及直線板平分 AB,再用市尺檢驗平分結果正確與否。

實驗 28.　作 3.5 寸長的線段 AB,用圓規及直線板四等分 AB,再用市尺檢驗平分結果準確與否。

實驗 29.　作 7 *cm*. 長的線段 AB,用圓規及直線板作 AB 的垂直平分線 PQ,問(1)PQ 被 AB 平分否?(2)$\triangle BPQ$ 與 $\triangle AQP$ 對稱否?(3)$\triangle BPA$ 與 $\triangle BQA$ 對稱否?

實驗 30.　作 8 *cm*. 長的線段 AB,用圓規及直線板求兩點 P, Q 離 AB 兩端的距離爲 7 *cm*.,依同樣方法求兩點 R, S 離 AB 兩端的距離爲 6 *cm*.,再依同樣方法,求兩點 X, Y 離 AB 兩端的距離爲 5 *cm*.,問 P, Q, R, S, X, Y 六點在什麼線上?又問離 AB 兩端 4 *cm*. 遠的點有多少?

§30.　作圖題4.　用圓規及直線板，由直線 AB 內一點 X 作垂線。

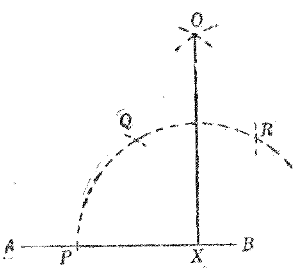


作法一　以 X 爲圓心，以任意長爲半徑（以所作的弧能與 AB 相交爲度）作弧，交 AB 於 P, Q 兩點。再以大於 PQ 一半的長爲半徑，繞 P, Q 兩點，各作一弧，相交於 Y 點，連結 XY，於是 XY 就是所求的垂線。

證明

由學生口述證明。

作法二　倘若 X 點在 AB 的一端，或離一端很近，就用下面方法：



以 X 點爲圓心，以任意長爲半徑作弧 PQR，交 AB 於 P 點，由 P 點，以原半徑截分 PQR 弧於 Q, R 點。以原半徑繞 Q, R 點各作一弧，相交於 O 點，連結 OX，就是所求的垂線。

證明

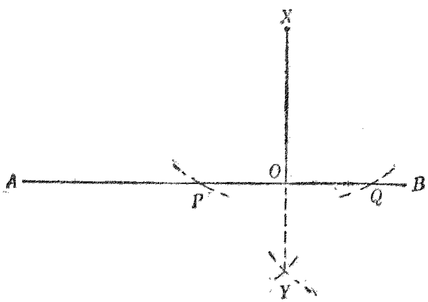
連結 QX, RX，問（1）$\angle PXQ$ 及 $\angle QXR$ 有多少度？

（2）$\angle QXO$, $\angle RXO$ 有多少度?

（3）$\angle AXO$ 有多少度?

§ 31. 作圖題 5. 由直線 AB 外面一點 X 到 AB 作垂線。(用圓規及直線板來作。)

作法　以 X 點爲圓心，以任意長爲半徑（以所作的弧能與 AB 相交爲度)作弧，交 AB 於 P, Q兩點，以大於 PQ 一半的長爲半徑，繞 P, Q 兩點，各作一弧，相交於 Y 點，連結 XY 交 AB 於 O 點，於是 XO 就是所求的垂線。



證明

由學生口述證明。

實驗 31. 作 5 cm. 長的線段 AB, 在 AB 的兩端各作一垂線。

實驗 32. 在線段 AB 上面一點 O, 用圓規及直線板作直線與 AB 所夾的角爲 $90°$, $45°$, $22\frac{1°}{2}$。

實驗 33. 作 $2''$ 長的線段 AB, 用圓規求出離 A, B 兩點 $1.6''$ 遠的點 P, 由 P 至 AB 作垂線 PM, 試用市尺度量 AM 的

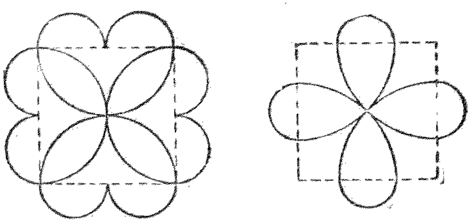
長是多少。

實驗 34. 作線段 AB, 在線段外面取一點 P，用圓規及直線板由 P 到 AB 作垂線 PX, 用公尺度量 PX 的長。在 AX 上面，任意取兩點 Y, Z, 連結 PY, PZ。問 PX, PY, PZ 三條線段那一條最短，那一條最長？又問自 P 至 AB 的最短距離是什麼？

實驗 35. 用三角板，由線段 AB 外面一點 O 到 AB 作垂線 OX, 以 O 爲圓心，以小於 OX 的長，等於 OX 的長及大於 OX 的長，作三個同心圓。問這三個同心圓與直線的關係如何？ 又問半徑與切線所夾的角是多少度？

（注意） 半徑等於 OX 的圓與 AB 相切，AB 叫做切線，X點叫做切點。

實驗 36. 求作兩倍大於下面的圖。



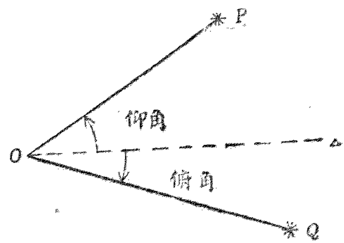
左圖，先畫正方形，其餘都是半徑大小相同或不相同的半圓。

右圖，也先畫正方形，以正方形各角點爲圓心，畫內部的圓弧。

§ 32. 鉛直線，水平線　取絲線或麻線一根，一端懸重物，他端握在手裏，這根線就向地面垂直。這根線向地面所指的方向叫做鉛直線。與鉛直線垂直的線叫做水平線。

實驗 37. 通過一點，能有多少鉛直線？一條鉛直線，能有多少水平線？

§ 33. 仰角，俯角　如圖，設 P 點或 Q 點是某物所在的位置，O 點是觀察者眼的位置，於是 OP 或 OQ 叫做視線。視線與水平線所夾的角在水平線上面，叫做某物的仰角，在水平線下面，叫做某物的俯角。

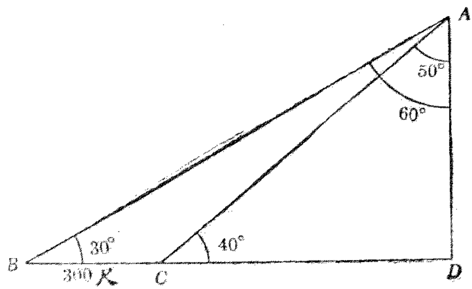


實驗 38. 有一塔，塔脚離觀察者 400′。塔頂的仰角 20°，問塔的高是多少？（先以 1 *cm.* 表 80′ 的縮尺畫圖，然後用公尺量圖上所表的塔高。）

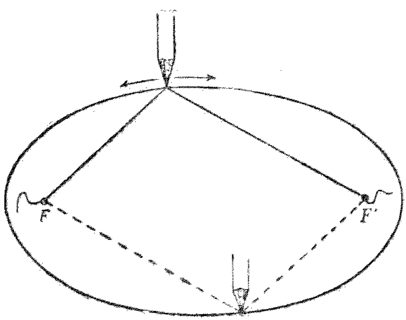
實驗 39. 有一旗桿，長 35 尺，他的影 15 尺，問太陽的仰角是多少度？（先以 1 *cm.* 表 5 尺的縮尺畫圖，然後以量角器量仰角。）

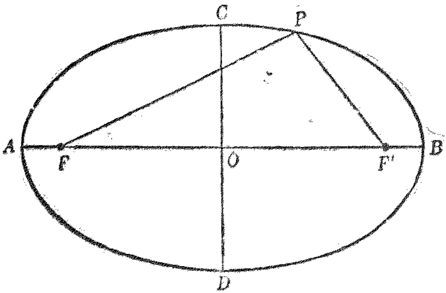
實驗 40. 設紙鳶的仰角是 30°，線長 240 尺，問紙鳶的高？（以 1 *cm.* 表 40 尺的縮尺畫圖。）

實驗 41. 有人在山頂 A，看山下有一株樹 B 的俯角是 60°，另一株樹 C 的俯角是 50°，已知兩樹的距離是 300 尺，問山高是多少尺？(以 1 $cm.$ 表 50 尺的縮尺畫圖，先作 BC，再在 BC 兩端各作 30°，40° 的角。)



§ 34. 橢圓　取絲線一根，一端用圖釘固定於黑板上一點 F，他端固定於一點 F'，以鉛筆緊張此線漸漸移動，畫出曲線如圖，這樣畫出來的曲線叫做橢圓。這兩固定點 F, F'，叫做焦點，連結焦點，以橢圓爲界的線段 A, B 叫做長軸，長軸兩端 A, B 叫做橢圓的頂，長軸的垂直平分線，交橢圓於 C, D，這線段 CD 叫做短軸，長短軸統叫做橢圓的軸，兩軸相交的點 O 叫做橢圓的心焦點，離心的距離 FO，叫做焦距，在橢圓上任意取一點 P，FP 及 $F'P$ 叫做 P 點的焦幅。由這樣畫橢圓的方法，得橢圓的定

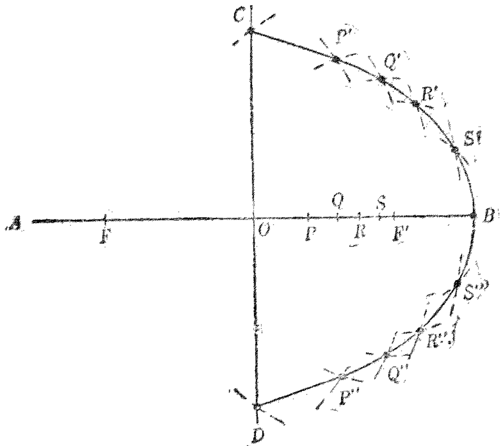




義如下：曲線上任何點，離兩定點距離的和倘若都等於一個定數，這曲線就叫做橢圓。

實驗 42　取馬糞紙一張，絲線一根，針一個，把絲線的一端用針穿過馬糞紙上一點 F，他端穿過馬糞紙上另一點 F'，使兩端在馬糞紙的下面連結在一處，於是在馬糞紙上面，用鉛筆緊張絲線作橢圓如上圖。(1)問橢圓上任何點的兩焦幅的和是否等於長軸？(2)問短軸的兩端離焦點的距離是多少？(3)以長軸的一半爲半徑，繞短軸的兩端各作一圓，問這兩圓相交於何處？(4)如若兩焦點合在一處成爲一點，問橢圓將變爲何種曲線？(5)通過橢圓的心，任意畫一直線，問橢圓對於這條直線是否對稱？問橢圓對於那幾條直線是對稱？(6)橢圓兩焦點的位置及長軸的長如若都有一定，問橢圓的形狀大小是否也有一定？(7)問 FA 與 $F'B$ 是否相等？

實驗 43.　畫 8 cm. 長的線段 AB，作爲橢圓的長軸，以 1.4 cm. 爲半徑，繞 A, B 各作一弧，交線段 AB 於 F 及 F' 點。命 F, F' 爲橢圓的焦點。於是這橢圓的形狀大小就有一定，現在用圓規及直線板把這個橢圓畫出來，其法如下：



在 AB 的中心 O, 作垂線 CD, 以 OF' 爲半徑, F' 爲圓心, 作圓弧, 交 CD 於 C 點及 D 點。

在 OF' 中間任意取一點 P, 以 PA 爲半徑, F 爲圓心, 作圓弧。再以 PB 爲半徑, F' 爲圓心, 作圓弧。由此得圓弧的交點 P' 及 P'' 點。

在 OF' 中間又取一點 Q, 以 QA 爲半徑, F 爲圓心, 作圓弧。再以 QB 爲半徑, F' 爲圓心, 作圓弧。由此得圓弧的交點 Q' 及 Q''。

在 OF' 中間又取 $R, S,$ ……等點, 做上面作法, 得 $R', S',$ ……及 R'', S''……等點。

(1) 問 $C, P', Q', R', S', B,$ ……等點在什麼曲線上?

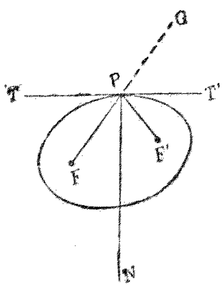
(2)連結 $C, P', Q', R', S', B \cdots\cdots D$ 等點何以就是橢圓的一半?

(3)問橢圓其他一半　能否用其他方法畫出來(不用上面方法)?

(4)我們畫橢圓，必須要畫多大的一部分，纔可以根據對稱形的道理,把其他部分印出來?

實驗 44.　設橢圓的長軸爲 9 $cm.$,焦距爲 3 $cm.$,倣實驗 43 方法把這個橢圓畫出來。

實驗 45.　倣上面方法,畫一個橢圓。在橢圓上,任意取一點 P, 延長 FP 至 G, 以 TT' 平分 GPF 角,作 PN 垂直於 TT'。



(1)問$\angle T'PF$ 與 $\angle TPF$ 何以能相等。

(2)問 $\angle FPN$ 與 $\angle F'PN$ 何以能相等?

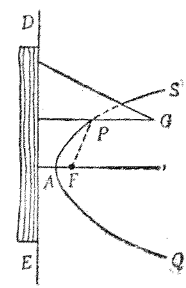
(3) TT' 是橢圓的切線,試觀察他們相交是否祇有一點。

(4)因 P 是橢圓與切線 TT' 的公共點，所以 F 點如若有光線射到橢圓上面一點 P，就好像射到切線上面的點 P 一樣，照光線反射定律，反射線必定通過 F' 點。所以凡 F 點發出的光，遇着橢圓反射後都通過 F' 點。現在問 F' 發出光線,遇着橢圓反

射後,將集中於何處?

實驗 46.　設橢圓的長軸爲 8 *cm.* 長,兩焦點的距離 5 *cm.*, 做實驗 43 方法,把這個橢圓畫出來,并根據實驗 45 在橢圓上任意一點 Q 作一切線。

§35.　拋物線　在平面上畫一直線 DE, 并取一點 F。以直線板的邊緣與 DE 相合,三角板的一腰也與 DE 相合,緊靠於直線板。取絲線一條,其長等於三角板他腰的長,以絲線的一端固定於三角板的角點 G, 他端固定於 F 點。用鉛筆緊壓絲線於三角板的腰,同時使三角板沿直線板滑動,於是鉛筆尖就畫出一曲線 SPA,

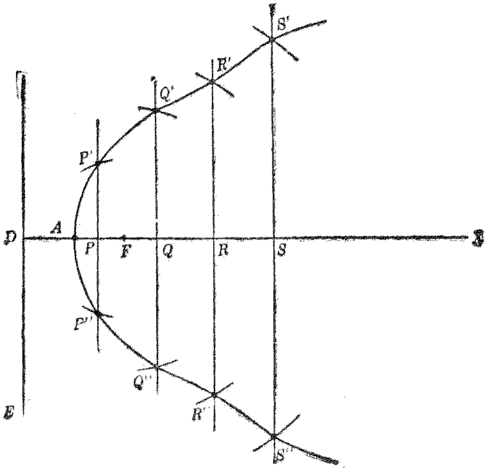


這曲線叫做拋物線,已知點 F 叫做焦點,已知直線 DE 叫做準線。由這個畫法,得拋物線的定義如下: 曲線上面任何點,如若離焦點的距離等於該點離準線的距離,這曲線就叫做拋物線。由焦點至 DE 所作的垂線 AF 叫做拋物線的主軸。A 點叫做頂。

實驗 47.　任意畫一準線 DE, 離 DE 2 *cm.* 遠處取一點 F 作爲焦點。於是以 DE 爲準線以 F 爲焦點的拋物線就有一定,其畫法如下:

由焦點至準線作垂線 DFX 平分線段 DF 於 A 點,於是 A 是拋物線上面一點。(何故?) 在 AX 上面作垂線 $P'P'$, $Q'Q''$,

$R'R''$, $S'S''$,……等,以 PD 爲半徑,焦點 F 爲圓心作圓,作 $P'P''$ 於 P' 及 P'' 點,於是 P' 及 P'' 也是拋物線上面的點。(何故?) 又以 QD 爲半徑,仍以 F 爲圓心作圓,交 $Q'Q''$ 於 Q' 及 Q'' 點,於是 Q' 及 Q'' 也是拋物線上面的點。(何故?)

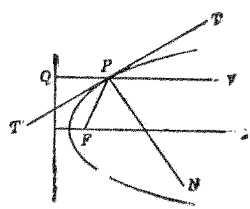


做此,R', S',……R'', S'',……等點也是拋物線上面的點,連結 A, P', Q', R', S'……及 P'', Q'', R'', S''……等點,卽得已定的拋物線。

實驗 48. 已知拋物線的焦點離準線的距離爲 $3.5\,cm.$,試做實驗 47 畫此拋物線。

(注意)由上面作法,可知拋物線對於他的主軸是對稱的。

實驗 49. 把焦點離準線的距離是 $0.6\,cm.$ 的拋物線畫出來,在拋物線上面任意取一點 P, 連結 PF, 由 P



點作 $PY//FX$, 作 FPQ 角的平分線 TT'。由 P 點引 PN 垂直於 TT'。

(1)問 $\angle TPY$ 與 $\angle T'PF$ 能相等不?

(2)問 TT' 是不是抛物線的切線?

(3)問 $\angle FPN$ 與 $\angle YPN$ 何以能相等?

(4)如若有發光體在焦點 F, 光線射到 P 點後，應當向那一個方向反射?

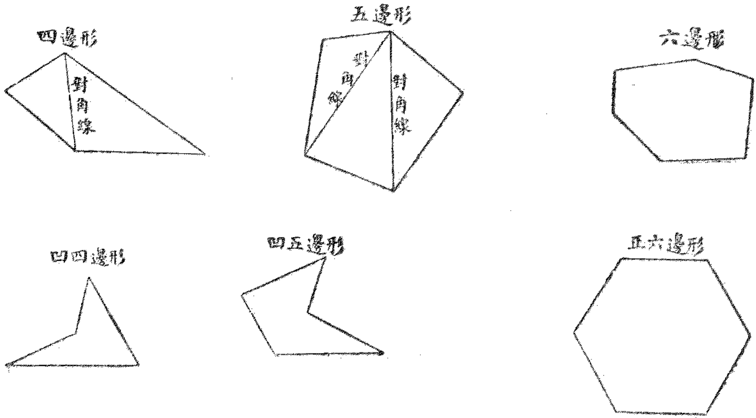
(5)我們常把太陽射到地球的光線，都看作是平行的，現在如若太陽光線射在抛物線上，問光線反射後將通過何處?

(6)把抛物線繞他的主軸旋轉 $180°$ 即得一抛物面，現在放發光體於焦點 F, 問光線遇到抛物面反射後進行的方向如何?

(7)問海上燈塔，汽車前面的大燈，……都放光源於抛物面的焦點上，何故?

第五章　多邊形

§ 36.　多邊形　　由四條或四條以上的線段在平面上圍成的部分，叫做多邊形或多角形，各線段叫做邊，由四邊圍成的叫做四邊形，五邊，六邊，七邊……的叫做五邊形，六邊形……。



多邊形的內角，其中有反角的叫做凹多邊形，沒有反角的叫做凸多邊形或簡稱多邊形。

多邊形的各角如若彼此相等，就叫做等角多邊形。如若各角彼此相等，各邊也彼此相等，就叫做正多邊形。

實驗 1.　任意畫一個四邊形，用量角器度量該四邊形四內角的和等於幾度，連結四邊形的對角線，分四邊形爲兩個三角形，

根據三角形內角的和等於兩直角，證明四邊形四內角的和等於四直角。

實驗 2.　畫一個任意五邊形，用量角器度量該五邊形的內角，看他的和等於多少度。由五邊形任意一個角點，到其他角點引對角線，分五邊形爲三個三角形，問如何證明五邊形各內角的和等於六直角？

實驗 3.　任意畫一個八邊形，由其中任意一角點到其他各角點引對角線，可分該八邊形爲幾個三角形？證明八邊形內角的和等於 12 直角。

實驗 4.　任意畫一個八邊形，由他的內部任意取一點與各角點連結，(一)問可得多少三角形？(二)根據這許多三角形證明八邊形內角的和等於 12 直角。

§37.　平行四邊形　四邊形的對邊，兩兩平行，叫做平行四邊形。

實驗 5.　任意畫一個平行四邊形 $ABCD$，用公尺度量各邊的長，并用量角器度量各角的大小以驗下面定理眞僞。

定理　平行四邊形的對邊，兩兩相等，對角也兩兩相等。

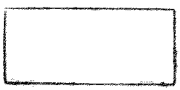
實驗 6.　連結平行四邊形的對角線，把他分爲兩個三角形，根據平行線的錯角相等以證明這兩個三角形相等及上面定理是

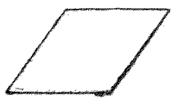
眞的。

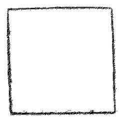
實驗 7. 已知平行四邊形 $ABCD$ 的邊 $AB=4.5\,cm.$, $AD=3.2\,cm.$, 又這兩邊所夾的角 $A=106°$, 求作這個平行四邊形。

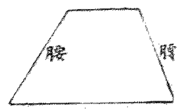
實驗 8. 作平行四邊形 $ABCD$, 使 $AB=2.8''$, $AD=1.7''$, $\angle A=90°$, 問 B, C, D 各角各等於多少度?

有一角等於 90° 的平行四邊形,叫做矩形或長方形。


矩形


菱形


正方形



梯形

四邊相等的平行四邊形,叫做菱形。

有一角等於 90° 的菱形,叫做正方形。

四邊形的對邊祇爲一對平行的叫做梯形, 不平行的兩邊相等的梯形叫做等腰梯形。

實驗 9. 作矩形,正方形,菱形,及任意平行四邊形各一個,命各形爲 $ABCD$, 連結各形的對角線,命各形兩對角線所交的點爲 O, 用尺度量,或用眼觀察,看這四個圖形,其中那幾圖是服從下面那幾個定理的?

1. 兩對角線互相平分。

2. 兩對角線相交成直角。

3. 兩對角線相等。

4. 每條對角線分圖形為兩個相等三角形。

5. 每條對角線分圖形為兩個對稱形。

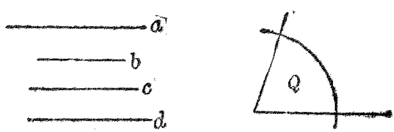
實驗 10. 用量角器及公尺畫一個菱形，邊長 5.3 *cm.*，一角的大 83°。

實驗 11. 用直線板及圓規作邊長 2.8″ 的正方形。

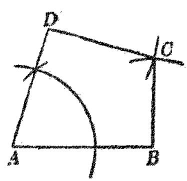
實驗 12. 有一個平行四邊形 $ABCD$，已知 $AB=6.5$ *cm.*，$AD=5.5$ *cm.*，$BD=9$ *cm.*，求作這個平行四邊形。(先用圓規作 $\triangle ABD$，再用三角板作 AB 及 AD 的平行線卽得。)

實驗 13. 作一個菱形，他的兩對角線各長 8 *cm.* 及 6 *cm.*。

§ 38. 作圖題 6. 知道四邊形四邊的長及一角，試用圓規及直線板作此四邊形。



設 a, b, c, d 是四邊形各邊的長，Q 角是 a, d 兩邊所夾的角。



作法　作線段 AB，其長等於 a。在 A 端作一角 BAD 等於 $\angle Q$。截取 AD 的長等於 d。以 b 為半徑，以 B 為圓心，作一弧；又以 c 為半徑，以 D 為圓心，作一弧，兩弧相交於 C 點。連結 BC，CD，於是 $ABCD$ 就是所求的四邊形。

（證明）　由學生口述證明。

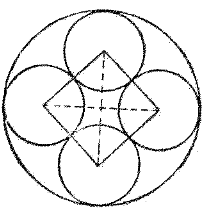
實驗 14.　設四邊形 $ABCD$ 的邊 $AB=3.5\,cm.$, $BC=3.0\,cm.$, $CD=2.5\,cm.$, $DA=2.0\,cm.$, $\angle BAD=78°$，試作此四邊形。

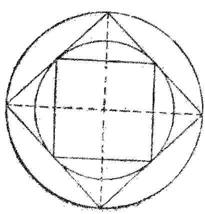
實驗 15.　設四邊形 $ABCD$ 各邊的長與實驗 14 相同，惟角 $BAD=100°$，試作此四邊形。

（注意）　僅知四邊形四邊的長，不能決定該四邊形的大小。

實驗 16.　設四邊形 $ABCD$ 的邊 $AB=1.0''$, $AD=0.6''$, $DC=0.8''$。$\angle BAD=81°$, $\angle ADC=109°$。問 AB 與 DC 平行否？

實驗 17.　畫一個圖兩倍於下面的圖。

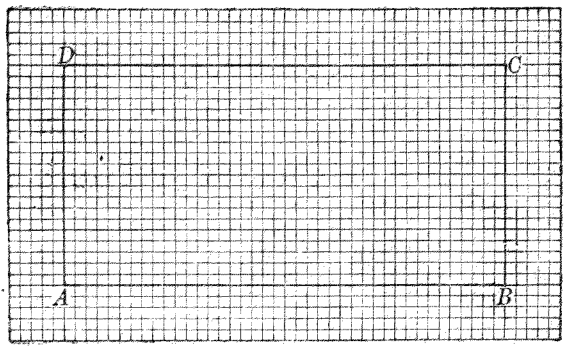




左圖：先畫大圓，次畫大正方形的對角線。右圖：先畫正方形的對角線，次畫小圓，最後畫大圓。

第六章　面積

§39.　面積　本章畫圖，概用方格紙。每個小方格的邊長代表一市寸，所以每個小方格代表一平方市寸。



設有長方形 $ABCD$，長 40 寸，寬 20 寸，他的縮圖如上圖，看他含有多少小方格，或平方市寸。

先觀察與 BC 平行各列，每列有多少平方寸，總共有多少列，這個長方形有多少平方寸。

再觀察，與 BC 平行各行，每行有多少平方寸，總共有多少行，這個長方形有多少平方寸。

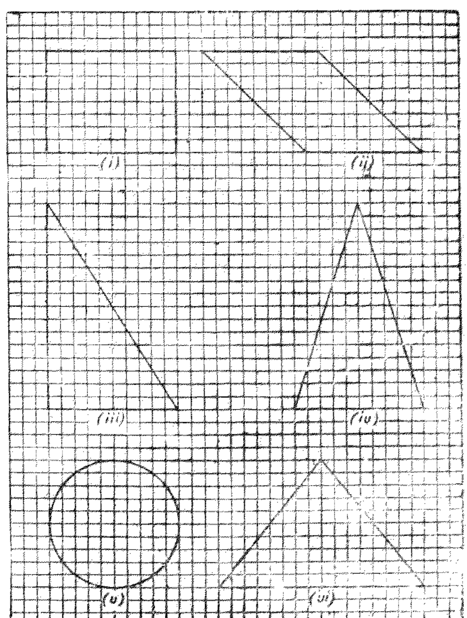
由這兩種觀察的結果，可知這個長方形有 40×20 或 20×40

平方寸。這個數『40×20 平方寸』，就是長方形的面積，也就是長方形含有 40×20 個平方寸。所以長方形的面積等於長乘以寬，或寬乘以長（寬與長的單位要相同），或底乘以高。

實驗 1. 設有長方形，長 15 寸，寬 10 寸；在方格紙上，畫他的縮圖。（1）看每列有多少小方格？（2）總共有多少列？（3）求出長方形的面積。

實驗 2. 已知長方形的長 12 寸，面積 84 平方寸，試在方格紙上畫出這個長方形。

實驗 3. 把右面方格紙上所畫各圖的面積，分別數一數，看這些圖的面積是否約略相等？數的時候凡遇圖上佔有半方格的面積就作為半平方寸；大於半方格的面積就作為一方格；小於半方格的就捨去不計算。



由這個實驗，可知形狀不相同的圖形，他的面積可以完全相等或約略相等。面積相等的兩個圖形，叫做等積形。

實驗 4.　畫兩條線段，一條長 2 寸，一條長 4 寸，在這兩條線段上，各作正方形，問這兩個正方形面積的大小？

實驗 5.　在方格紙上畫一矩形，長 12 寸，寬 8 寸。

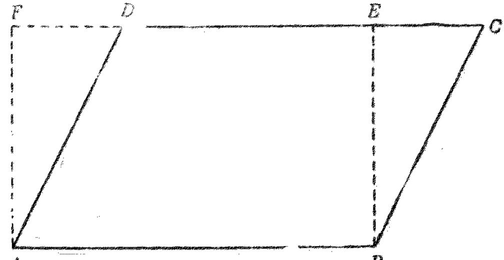
(1)問這個矩形的面積有多少？

(2)倘若寬不變，長增加一倍，即增加 12 寸，問這個矩形的面積增加多少？把這矩形畫在方格紙上。

(3)倘若長與寬各增加一倍，問這矩形的面積增加多少？把這矩形畫出來。

實驗 6.　某處有一矩形飛機場，長 4 公里，寬 3 公里，以 1 *cm.* 表 1 公里的縮尺把飛機場畫出來，問這飛機場有多少平方公里？多少平方公尺？

§40.　平行四邊形的面積　設 $ABCD$ 是平行四邊形，由 B 點到對邊作垂線 BE，由 A 點到對邊的延長線上，作垂線 AF。於是 $ABEF$ 是矩形，AF 及 BE 叫做



平行四邊形的高，因爲$\triangle AFD \equiv \triangle BEC$，(何故?)所以平行四邊形$ABCD$的面積等於同底等高的矩形面積。卽平行四邊形的面積等於底乘高。像上面的平行四邊形的底$AB=13$寸(設方格一邊的長表1寸)高$BE=8$寸，所以他的面積$=13$寸$\times 8$寸$=104$寸$^2=104$平方寸。

實驗 7.　在方格紙上，畫一個平行四邊形，底長4 *cm.*，高3 *cm.*，再畫一個矩形其面積等於這個平行四邊形。

(1)問面積等於這個矩形的平行四邊形有多少個?

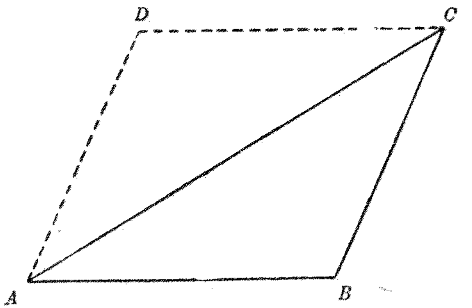
(2)平行四邊形的高與底有一定，他的面積也有一定嗎?他的形狀也有一定嗎?

實驗 8.　在方格紙上，畫一個矩形高2.5 *cm.*，底4.0 *cm.*；又畫與該矩形同底等高的平行四邊形四個，其底角各爲$80°$，$70°$，$60°$，$50°$(用量角器來量)。問這些平行四邊形的面積是多少?

實驗 9.　知道平行四邊形$ABCD$兩隣邊AB，AD的長各等於7 *cm.*，6 *cm.*，高等於4 *cm.*，求作這個平行四邊形幷求他的面積。

§41.　三角形的面積　任意畫一個三角形ABC，由A點引$AD//BC$，由C點引$CD//BA$，於是$ABCD$就是平行四邊形，AC就是對角線，$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$，所以$\triangle ABC$的面積等於平行四邊形面積的一半，就是:

三角形的面積$=\frac{1}{2}$底×高。



實驗 10.　在方格紙上，畫一個直角三角形 ABC，令直角在 B，$BC=2.2''$，$BA=1.4''$。再配成爲矩形 $ABCD$，問這矩形及三角形 ABC 的面積各若干?

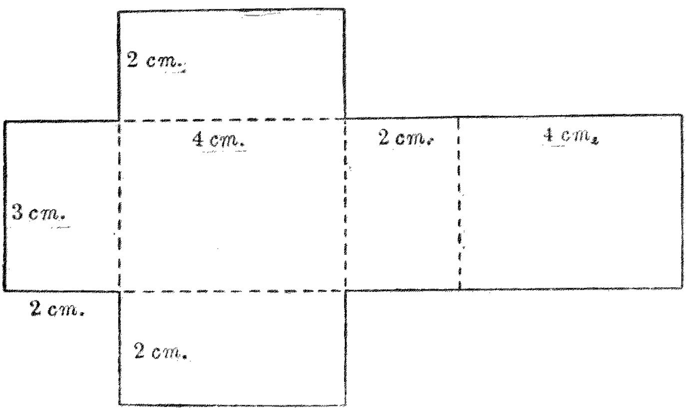
實驗 11.　在方格紙上，畫一個三角形，底長 $1.8''$，高 $1.2''$。(1)問這個三角形的面積是多少?(2)問這樣的三角形有多少個可畫?

實驗 12.　作三角形 ABC 令 $a=6\,cm.$，$b=7\,cm.$，$c=8\,cm.$。用公尺量得由 A 到 BC 的最短距離，求出這個三角形面積的近似值。

實驗 13.　任意畫一個三角形 ABC，平分底邊於 X 點，連結 AX，分 ABC 爲兩個三角形，問這兩個三角形 ABX，ACX 的面積是否相等?幷說出答案的理由。

第七章　簡單的立體

§ 42.　長方體　取硬紙一張，剪成如下圖的形狀與大小，依虛線摺成立體，叫做長方體。(1)問這個長方體的高、寬、長各有多少公分？(2)問這個長方體有多少面？(3)問面與面相交的稜有多少？(4)問稜與稜相交的頂點有多少？(5)問各面是什麼形？(6)指出長方體的教室、寢室……等。



長寬高都相等的長方體叫做立方體。

實驗 1.　作一個高長寬都等於 5 cm. 的立方體。

實驗 2.　畫一個高長寬都等於 1 cm. 的立方體。

實驗 3.　用厚紙作一個長 5 cm.，寬 4 cm.，高 3 cm. 的長方

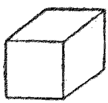
體。

實驗 4.　用筆在紙上畫一個長方體。

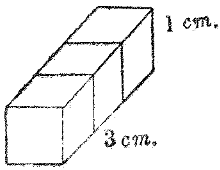
實驗 5.　用筆在紙上畫一個立方體。

§ 43.　長方體的體積　　設甲圖是表示稜長 1 *cm.* 的立

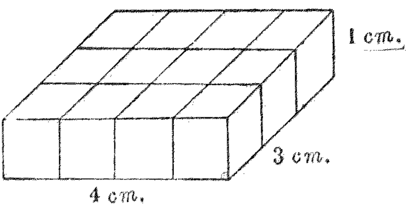
甲



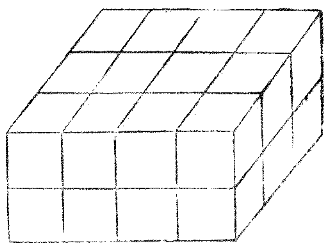
乙



丙



丁



方體，作為測度體積的單位，叫做一立方公分。於是長方體如乙圖的體積是 3 個立方公分，如丙圖的體積是 12 個立方公分，即 $4\,cm. \times 3\,cm. \times 1\,cm. = 12\,cm.^3 = 12\,c.c.$。如丁圖的體積是 $4\,cm. \times 3\,cm. \times 2\,cm. = 24\,cm.^3 = 24\,c.c.$，即丁圖長方體的體積 24 倍於甲圖的體積，由是得：

長方體的體積＝長寬高的連乘積。

實驗 6.　在紙上畫一個稜長1市寸的立方體。

實驗 7.　在紙上畫一個長5 *cm.*,寬4 *cm.*,高3 *cm.*的長方體,幷求其體積。

實驗 8.　用筆畫一個長7 *cm.*,寬4 *cm.*,高5 *cm.*的長方體,幷求其體積。

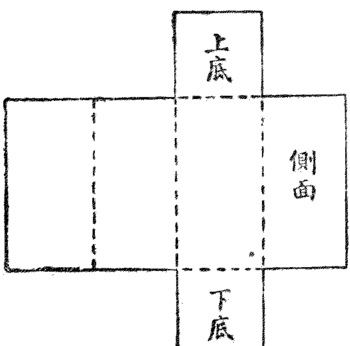
實驗 9.　用筆畫一個長4 *cm.*,寬4 *cm.*,高4 *cm.*的立方體幷求其體積。

實驗 10.　畫一個稜長3 *cm.*的立方體幷求其體積。

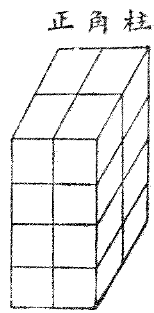
由上面兩個實驗,可知:

立方體的體積＝稜長的三方。

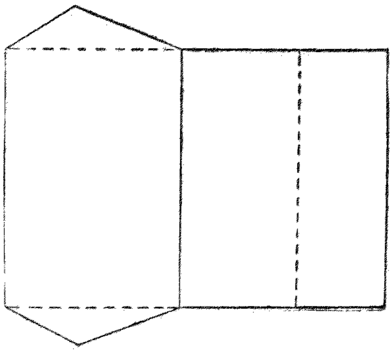
§44.　角柱的側面積及體積　　在硬紙上作一圖如甲或



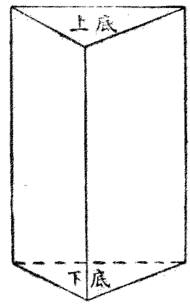
甲



乙



丙



丁

丙，用剪刀依實線剪下，依虛線摺成角柱如乙或丁。由是可知角柱側面積等於側面各長方形面積之和，即·

角柱側面積＝底周乘高。

設角柱乙的底面積是 4，高是 4，於是角柱乙的體積等於 $4\times4=16$，由是得

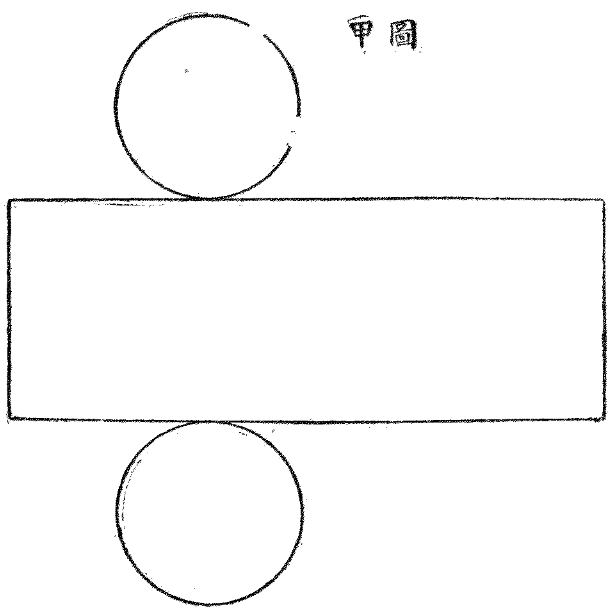
角柱的體積＝底面積乘高。

實驗 11.　畫一個角柱以高 3 *cm.* 長 4 *cm.* 的平行四邊形爲底，角柱的高爲 5 *cm.*。再畫一個角柱以長 4 *cm.* 寬 3 *cm.* 的長方形爲底，以 5 *cm.* 的長爲高。問這兩個角柱的體積各等於多少？問這兩個角柱的側面積相等否？

實驗 12.　畫一個角柱以高 2 *cm.* 底 3 *cm.* 的等腰三角形

爲上下底,以 4 *cm.* 的長爲該角柱的高,再畫一個角柱,以高 2 *cm.* 底 3 *cm.* 的任意三角形爲上下底,以 4 *cm.* 的長爲該角柱的高。問這兩個角柱的體積各等於多少?問這兩個角柱的側面積相等否?

§ 45. 圓柱的側面積及體積　在厚紙上畫兩個相等的圓及長方形,如甲圖,長方形的長等於圓周。用剪刀依實線剪下,連接長方形的兩端,以兩圓爲上下底,如乙圖的立體叫做正圓柱。

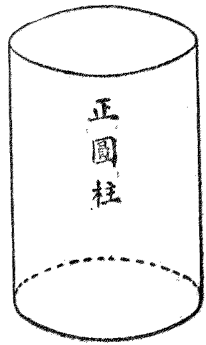


甲圖

正圓柱的側面就是長方形，所以他的側面積等於長方形面積，即

正圓柱的側面積＝底的圓周乘高。

乙圖



一個正角柱的上下底，如若是正多邊形，并且邊數增到無限時，這個正角柱就逼似正圓柱，所以正圓柱的體積可以作正角柱的體積來求，即

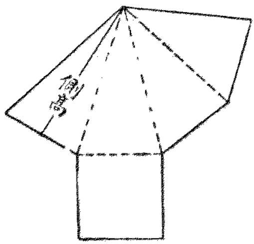
正圓柱的體積＝底面積乘高。

實驗 13.　在紙上畫一個正圓柱，高 5 *cm.*，底圓的半徑爲 2 *cm.*，求這個正圓柱的側面積及體積。

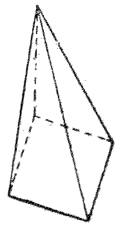
實驗 14.　以 1 *cm.* 表 4 市尺的縮尺，把高 12 市尺，底半徑 6 市尺的正圓柱形的汽油桶的縮圖畫在紙上，并問此桶能容汽油若干?

實驗 15.　以高 3 *cm.* 底半徑 1 *cm.* 的正圓柱形的木棍投入滿杯的水中，水即溢出，問所溢出的水是多少?

§ 46.　角錐的側面積及體積　　在厚紙上，畫一個正方形如甲圖，在正方形之一邊畫一個等腰三角形，再在這個等腰的兩腰各畫相等的等腰三角形如甲圖。用剪依實線剪下，再依虛線摺成立體如乙圖，這個立體叫做正角錐，由是可知正角錐的側



甲圖



乙圖

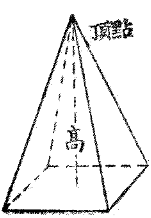
面積就是各等腰三角形面積的和，即

$$\text{正角錐的側面積} = \frac{1}{2}\text{底的周圍乘側高。}$$

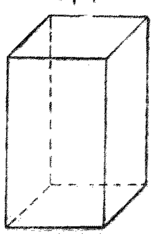
實驗 16. 在厚紙上畫一個三角形，各邊的長 3 *cm.*, 4 *cm.*, 5 *cm.*，在各邊上各畫高 7 *cm.* 的等腰三角形。用剪依所畫的線段剪下，再依三角形各邊摺成正角錐，問這個角錐的側面積是多少？

實驗 17. 在厚紙上畫一個五邊形，量出各邊的長是多少 *cm.*。在各邊上各畫高 5 *cm.* 的等腰三角形，用剪刀依所畫線段剪下，再依五邊形各邊摺成正角錐，問這個角錐的側面積是多少？

角錐



角柱



用厚紙作同底等高的角錐及角柱如圖。但是角錐不留底，角柱不留上底。

用麥粉裝滿角錐，倒入角柱內，這樣繼續做三次，即得角錐的體積等於角柱體積

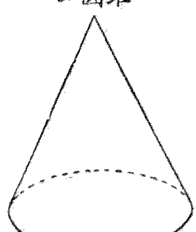
三分之一，由是得

$$角錐的體積=\frac{1}{3}底面積乘高。$$

實驗 18.　畫一個長 4 *cm.* 高 2 *cm.* 的長方形，以這個長方形為底畫一個高 5 *cm.* 的角錐。問這個角錐的體積是多少？再畫一個長 4 *cm.* 高 2 *cm.* 的平行四邊形，以這個平行四邊形為底畫一個高 5 *cm.* 的角錐。問這個角錐的體積是多少？又問這兩個角錐的體積相等否？又問他們的側面積相等否？

實驗 19.　畫一個等腰三角形，底長 6 *cm.*，腰長 5 *cm.*，以這個等腰三角為底，畫一個高 7 *cm.* 的角錐，問這個角錐的體積是多少？

§ 47.　正圓錐的側面積及體積　　一個正角錐的底，如若是正多邊形，并且邊數增到無限時，這個正角錐就逼似正圓錐，由是根據正角錐的側面積及體積求法，得



$$正圓錐的側面積=\frac{1}{2}底圓周乘側高。$$

$$正圓錐的體積=\frac{1}{3}底面積乘高。$$

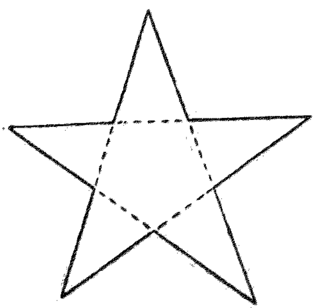
實驗 20.　畫一個高 5 *cm.* 底半徑 1.5 *cm.* 的正圓錐，問這個圓錐的側面積及體積是多少？

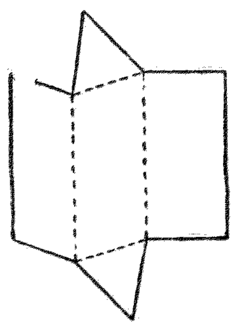
實驗 21.　畫一個高 6 *cm.* 底半徑 2 *cm.* 的正圓錐，問這個

圓錐的側面積及體積是多少?

實驗 22. 某塔頂上有一個銅質的正圓錐,外表高 100 *cm.*, 內高 90 *cm.*,底的外圓半徑 12 *cm.*,內圓半徑 8 *cm.*。問這個正圓錐需要多少銅可以鑄成?

實驗 23. 在硬紙上畫下面的圖,依實線剪下,再依虛線摺成五角錐及三角柱。



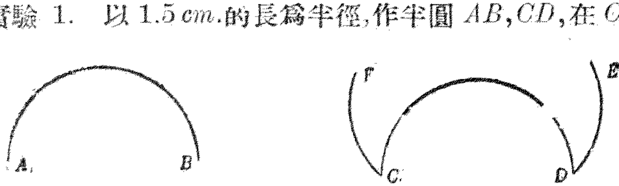


第二編　推理幾何學平面之部

第八章　推理的基礎

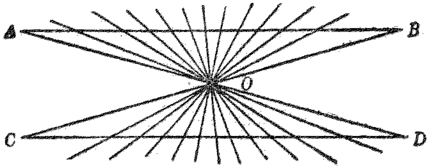
§48.　直覺幾何學的缺點　　第一編所講的直覺幾何學都是用度量及觀察的方法,認識圖形的性質及其彼此的關係。但是觀察常因圖形複雜而發生錯誤(看下面實驗1至實驗6便知道),度量祇能得到近似値,而得不到絕對的準確値。又度量祇能研究特例,而不能研究普遍的事理,譬如要研究三角形三內角的和等於多少度,雖然畫了一千個三角形,用量角器,量出每個三角形三內角的和都等於180°,但是不能說第一千零一個三角形的內角和也是180°。直覺幾何學有了這三種缺點,就不能不另用推理的方法以爲補救。

實驗 1.　以1.5$cm.$的長爲半徑,作半圓AB,CD,在CD兩



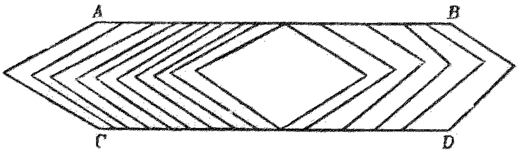
端各添一弧DE,CF。覺察這兩半圓相等與否?

實驗 2.　先畫兩條平行線AB,CD,再通過O點畫許多



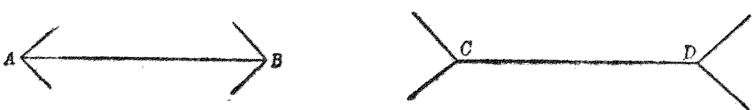
直線，看 AB 與 CD 仍舊平行否?

實驗 3. 先畫兩條平行線 AB, CD，再添其他各線如下圖：



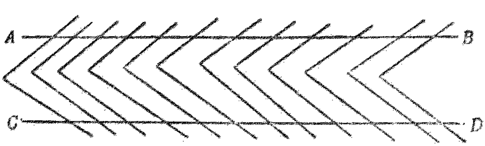
看 AB 與 CD 仍舊平行否?再看與實驗 2 的圖有何不同?

實驗 4. 畫 5 cm. 長的線段 AB, CD 各一條，在 AB 的兩



端各添人字形線段如左圖，又在 CD 兩端各添人字形線段如右圖，試看 AB, CD 仍舊相等否?

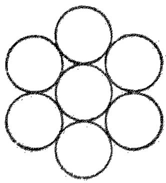
實驗 5. 畫兩條平行線 AB, CD，在中間添人字形線段如



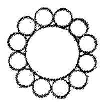
圖。看 AB 與 CD 仍舊平行否？

實驗 6.　觀察下面甲圖中央的圓與乙圖中央的圓是否相等？

甲圖



乙圖



§ 49.　幾何學的目的與方法　幾何學的目的在於研究圖形的性質，圖形各量的計算，以及適合於已知條件的作圖法。

幾何學所用的方法是演繹法*，推理幾何學就是用演繹法研究幾何圖形的科學，他是幾何學的正宗，沒有學過他的人，就不能算是學過幾何學。所以推理幾何學，甚爲重要，但是爲初學的人容易學習起見，先用觀察與度量的方法研究圖形，所以又有直覺幾何學。

直覺的與推理的幾何學的區別，並不在於所研究的對象，而在於所用的方法。他們所研究的對象都是圖形的性質，圖形各量的計算，以及圖形作法。但是所用方法前者爲度量與觀察，後者

* 舉演繹法中最簡單的三段論法以爲例如下：凡人皆死 孔子是人，所以孔子死了。第一句叫做大前提，第二句叫做小前提，末句叫做斷案。這在論理學上叫做三段論法。欲學演繹法可參考本書 §19。

爲演繹法。

§50.　推理幾何學的演繹根據　因爲推理幾何學是用演繹法研究圖形,所以他必須有幾個前提做演繹的根據纔行,否則,沒有前提,演繹就無從下手。推理幾何學的演繹根據就是幾個很淺顯而易懂的公理。* 這些公理都是人人所公認,無論受過教育或未受過教育的人都公認是眞的。

普通公理

1.　等量公理　諸量各等於某量,或各等於某某等量,則諸量相等。

2.　加法公理　等量加等量,其和相等。

3.　減法公理　等量減等量,其差相等。

4.　乘法公理　等量乘等量,其積相等。

5.　除法公理　等量除等量,其商相等。(但0不可以做除數。)

6.　代換公理　一個量可以用一個與他相等的量去代換。

7.　各部和的公理　各部的總和等於全部。

8.　部份公理　一部份小於全部份。

9.　三量比較公理　倘若第一量大於第二量,而第二量大於第三量,於是第一量大於第三量。

* 欲知公理的性質可參看編者所著非歐派幾何學前四章(商務出版)。

10.　兩量比較公理　兩個同類量，不是彼此相等，就是一大一小。

11.　不等量與等量的加減公理　不等式的兩邊各加等量或減等量，該不等式仍舊成立。

12.　不等量與等量的乘除公理　不等式的兩邊各以等量乘之或除之，該不等式仍舊成立。

13.　不等量相加公理　諸大量的和大於諸小量的和。

幾何公理

14.　直線公理　經過兩點可以作一條直線，并且祇能作一條。

15.　直線相交公理　兩條直線祇相交於一點。

16.　距離公理　兩點中間最短的距離是通過該兩點的線段。

17　平角公理　凡平角都相等。

18.　延長線公理　凡直線都可以任意延長。

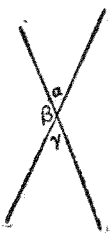
19.　平行公理　經過已知直線外一點，祇能作一條直線與該已知直線平行。

20.　移形公理　圖形可以任意移動，而不改變其形狀及大小。

21.　線段公理　可以作一個線段等於已知線段。

22.　畫圓公理　以任意一點做圓心，任意長爲半徑，可以在平面內作一個圓，但是祇能作一個。

23.　平分公理　線段可以被他中間一點平分，但是祇有一點，角可以被通過他頂點的直線平分，但是祇有一條平分線。



有了上面的公理，全部幾何學的定理，都可以由簡而繁的推演出來，譬如對頂角定理：『凡對頂角都相等』，就可以根據上面一部分的公理說明：

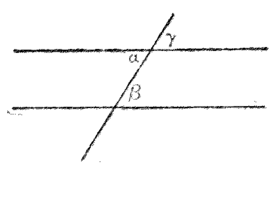
假設　α, γ 是對頂角。

求證　$\alpha=\gamma$。

證明

敍述	理由
1.　∵　$\alpha+\beta$ 是平角	1.　平角定義
2.　$\beta+\gamma$ 也是平角	2.　平角定義
3.　∴　$\alpha+\beta=\beta+\gamma$	3.　平角公理
4.　∴　$\alpha=\gamma$	4.　減法公理

又如這個定理『兩條直線與第三條直線相截，如若內錯角相等，於是同位角也相等』，也可以根據上面一部分公理證明。



假設　內錯角 α, β 相等。

求證　同位角 β, γ 相等。

證明

敍述	理由
1. $\because \quad \alpha=\beta$	1. 題設或假設
2. $\alpha=\gamma$	2. 對頂角定義及定理
3. $\therefore \quad \beta=\gamma$	3. 等量公理

由上面兩個定理的證明,可知幾何學的演繹根據,有下列四種:

1. 公理　例如平角公理,減法公理……等。
2. 定理　例如對頂角定理。
3. 定義　例如平角,對頂角的定義。
4. 題設　例如假設內錯角 α, β 相等。

§51. 命題　凡算理的敍述語都叫做命題。如公理,定理及作圖題等都是命題。

公理是人人所公認的道理,無須乎證明也無法證明的命題,定理是要證明纔能成立的命題。譬如『對頂角都相等』這個敍述語就是定理。作圖題是求作一個圖,能適合於已知條件的命題。譬如『求作一個三角形,各邊的長各等於已知線段的長』,這個敍述語就是作圖題。

每一命題,其中所敍述事項,常包含兩部分:(一)假設,(二)

結論。譬如『對頂角都相等』,這個定理的意思,就是『假設有兩個角是對頂角(這是假設),那麽這兩個角相等(這是結論)』。假設就是題設,結論就是求證部分。又如『三角形三內角的和等於180°』,這個定理的意思就是『假設這個圖形是三角形,那麽這個圖形的內角的和等於180°』,也是包含假設與結論兩部分。

習 題

辨別下列各命題的假設與結論,在假設的字句下加單線『——』,在結論的字句下加雙線『══』,以示區別。

1. 凡平角都相等。
2. 一個三角形的兩邊及其夾角倘若各等於另一三角形的兩邊及其夾角,這兩個三角形就全等。
3. 一個三角形的兩角及兩角的公邊,倘若各等於另一三角形的兩角及公邊,這兩個三角形就全等。
4. 等腰三角形的兩底角相等。
5. 三角形的各邊各等於其他三角形的各邊,這兩個三角形全等。
6. 平行四邊形的對邊,兩兩相等。
7. 平行四邊形的對角兩兩相等。
8. 平行四邊形的對角線互相平分。

9. 已知三角形的三邊,求作此三角形。

10. 平行四邊形的面積等於底乘高。

11. 三角形的面積等於底乘高的一半。

12. 長方體的體積等於長寬高的連乘積。

13. 角柱側面積等於底周乘高。

14. 角柱的體積等於底面積乘高。

§52. 證題的程序　初學的人證明一個定理應當記住下面證題的程序:

1. 細閱題意　認清題中的假設與結論。

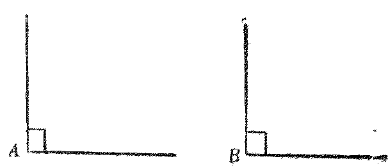
2. 按題畫圖　把命題所說的意思用圖形表示出來,換言之,就是命題的假設及結論都在圖形上表示出來。

3. 決定證法。

4. 寫出證法　把證明的敍述及理由都一一寫出來。

§53. 簡單的定理　直角,餘角,補角,垂直……等名詞的定義,早在直覺幾何學中講過,現在不再重述了,現在祇舉有關於他們的定理如下:

直角定理　凡直角都相等。



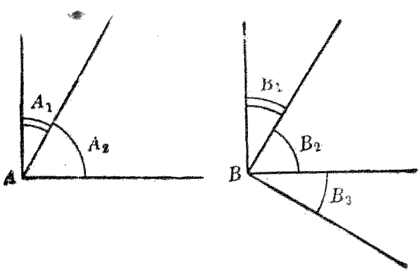
假設 A, B 都是直角,

求證　$\angle A=\angle B$。

證明

敍述	理由
1. ∵　平角＝平角	1. 凡平角都相等
2. ∴　$\frac{1}{2}$平角＝$\frac{1}{2}$平角	2. 除法公理
3. 但　$\angle A=\frac{1}{2}$平角	3. 題設及直角定義
4. 　$\angle B=\frac{1}{2}$平角	4. 題設及直角定義
5. ∴　$\angle A=\angle B$	5. 等量公理

餘角定理　等角或同角的餘角必相等。



假設(1)　$\angle A_1=\angle B_1$

$\angle A_1+\angle A_2=90°$

$\angle B_1+\angle B_2=90°$

(2)　$\angle B_1+\angle B_2=90°$

$\angle B_2+\angle B_3=90°$

求證(1)　$\angle A_2=\angle B_2$

(2)　$\angle B_1=\angle B_3$

證明

敍述	理由
1. ∵ $\angle A_1+\angle A_2=90°$	1. 題設
2. 　$\angle B_1+\angle B_2=90°$	2. 題設
3. ∴ $\angle A_1+\angle A_2=\angle_1 B+\angle B_2$	3. 等量公理
4. 但　$\angle A=\angle B_1$	4. 題設
5. ∴　$\angle A_2=\angle B_2$	5. 減法公理

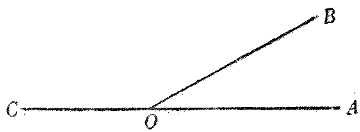
補角定理　等角或同角的補角必相等。

(倣餘角定理證法即得。)

鄰補角定理　鄰補角的外邊同在一直線上。

假設　AOB 與 BOC 是鄰補角。

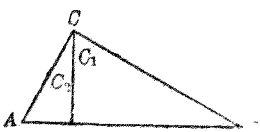
求證　OA, OC 都在一條直線上。



證明

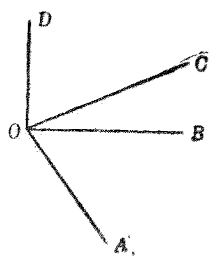
敍述	理由
1. ∵ $\angle AOB+\angle BOC=$平角	1. 題設
2. ∴ OA, OC 在一直線上	2. 平角定義 §8

習　題



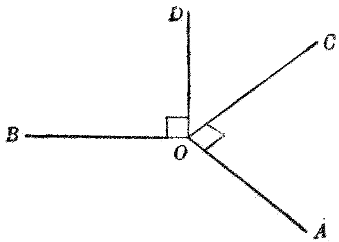
1. 假設　ACB 是直角，C_2 與 A 互爲餘角。

求證　$\angle C_1=\angle A$。



2. 假設 $AO\perp CO$，$BO\perp DO$。

求證　$\angle AOB=\angle COD$。



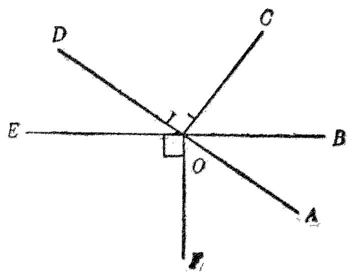
3. 假設 $AO \perp CO$,

$BO \perp DO$。

求證 $\angle AOB$ 與 $\angle COD$ 互成補角。

4. 假設 AD 及 BE 是直線，COD 及 EOF 都是直角。

求證 $\angle BOC = \angle FOA$。



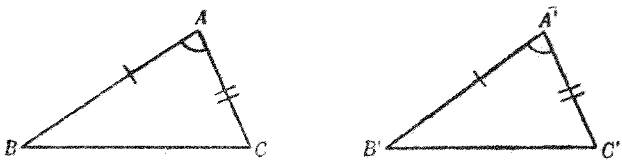
第九章　直線形的要性

§ 54.　直線形　由直線圍成的平面圖形，叫做直線形。譬如 § 16 所說的三角形及 § 36 所說的多邊形……等，都是直線形。他們的簡單性質早在直覺幾何學中，用實驗與觀察的方法研究過，本章再用演繹法來研究，并且由此推出更複雜的性質來。

§ 55.　任意三角形的全等　任意三角形的全等已在 § 18 及 § 19 講過，現在再以演繹的疊合法證明於下：

命題 1.　定理

一個三角形的兩邊及其夾角，倘若各等於其他三角形的兩邊及其夾角，這兩個三角形就全等（當這個定理用作理由時，可縮寫爲邊角邊＝邊角邊）。



假設　$\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 的邊 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$。

又　$\angle A=\angle A'$。

求證　$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$。

證明

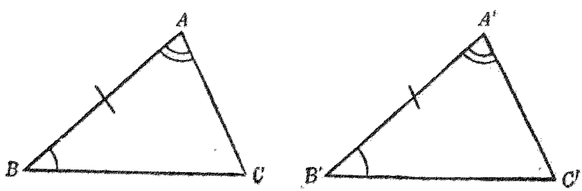
敍述	理由
1. 把$\triangle ABC$放在$\triangle A'B'C'$上面，使AB與$A'B'$相合	1. 移形公理；題設 $AB=A'B'$
2. 於是AC落在$A'C'$上面	2. 題設 $\angle A=\angle A'$
3. C點落在C'點上面	3. 題設 $AC=A'C'$
4. 因此 $AC=A'C'$	4. 直線公理
5. $\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$	5. 各部分都已相合，照§17全等形定義，應當全等。

系 1. 等腰三角形的兩底角相等(參看§19)。

系 2. 等邊三角形的各角相等。

命題 2. 定理

一個三角形的兩角及其夾邊，倘若各等於其他三角形的兩角及其夾邊，這兩個三角形就全等(當這個定理用作理由時，可以縮寫爲角邊角＝角邊角)。



假設 $\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$的$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$。

又邊　　$AB=A'B'$。

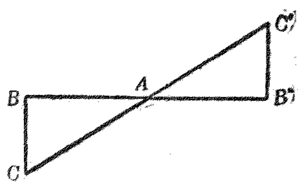
求證　　$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$。

證明

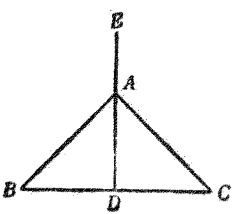
敍述	理由
1. 把$\triangle ABC$放在$\triangle A'B'C'$上面,使AB與$A'B'$相合	1. 移形公理；題設　$AB=A'B'$
2. 於是AC沿着$A'C'$落下	2. 題設　$\angle A=\angle A'$
3. 又BC沿着$B'C'$落下	3. 題設　$\angle B=\angle B'$
4. 因此C'點落在C點上面	4. 直線相交公理
5. $\therefore \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$	5. 全等形定義

習　題

1. 假設　A是BB'的中點，CC'是直線，$\angle ABC$及$AB'C'$都是直角。



求證　$\triangle ABC \equiv \triangle AB'C'$。

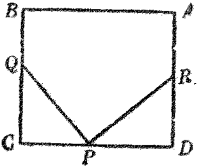


2. 假設 直線EAD垂直於BC，$\angle EAB$是$\angle DAC$的補角。

求證　$\triangle ABD \equiv ACD$。

（注意）　要證明線段相等或角相等，常常可以利用上面兩個命題來說

明，因為兩個全等的三角形，他的相當部各各相等的。

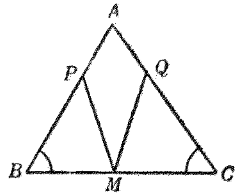


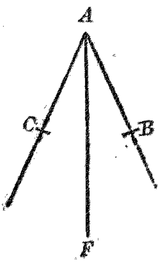
3．假設　$ABCD$ 是正方形，P,Q,R 是各邊的中點。

求證　$PQ=PR$。

4．假設　ABC 是等邊三角形，$\angle B=\angle C$，M 是 BC 的中點，$AP=AQ$。

求證　$PM=QM$。



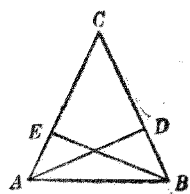


5．假設　AF 是 A 角的平分線，$AB=AC$，F 是 AF 上面任意一點。

求證　$BF=CF$。

6．假設　$AD\perp BC$，$BE\perp AC$，$\angle CAB=\angle CBA$。

求證　$AD=BE$。



7．假設　$\angle DAB=\angle EBA$，$\angle DAC=\angle EBC$，$AD=BE$。

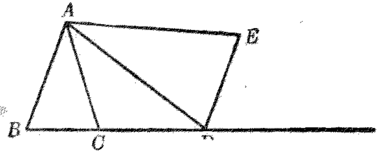
求證　$AE=BD$。

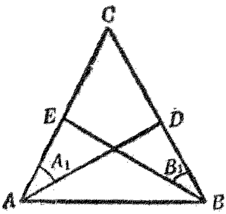
8.　假設　$AB=AC$,

$AD=AE$,

$\angle BAC=\angle DAE$,

求證　$BD=CE$。





9.　假設 $\angle A=\angle B$, $\angle A_1=\angle B_1$。

求證 $AD=BE$。

10.　假設 $AC=BC$, $\angle A_1=\angle B_1$。

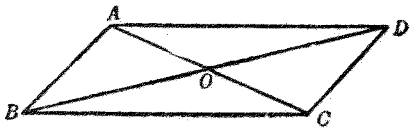
求證 $AD=BE$。

11.　假設 AC 與 BD 互相平分於 O 點。

求證　$AB=CD$,

$AD=BC$,

$\angle B=\angle D$。



12.　假設 $ABCD$ 是菱形，

求證　$\angle ABD=\angle ADB$,

$\angle CBD=\angle CDB$;

$\angle ABC=\angle ADC$。

13.　在 AB 的兩側各作等腰三角形 ABC, ABD。於是 $\angle CAD=\angle CBD$。

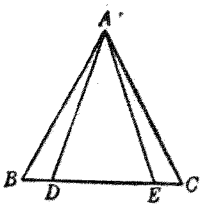
14. 在 AB 的一側作兩個等腰三角形 ABC, ABD。於是 $\angle CAD=\angle CBD$。

15. 倘若三角形 ABC 的邊 $AB=AC$, L, M, N 是各邊 AB, BC, CA 的中點，那麼

i $LM=NM$

ii $BN=CL$

iii $\angle ALM=\angle ANM$。

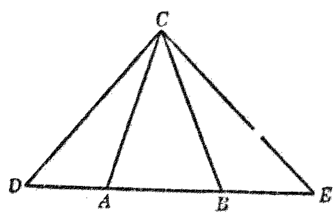


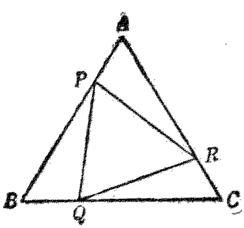
16. 假設 $AB=AC$, $CD=BE$。

求證 $AD=AE$。

17. 假設 $AC=BC$, $AD=BE$, 并且 $DABE$ 是一條直線。

求證 ABC 是等腰三角形。





18. 假設 ABC 是等邊三角形，$AP=BQ=CR$。於是 PQR 是等邊三角形。

19.　假設 PQR 是等邊三角形，

并且　$\angle ARP=\angle BPQ=\angle CQR$

求證　ABC 是等邊三角形。

20.　分等腰三角形的底爲三等分，分點與頂點相連結的兩線段相等。

命題 3.　定理

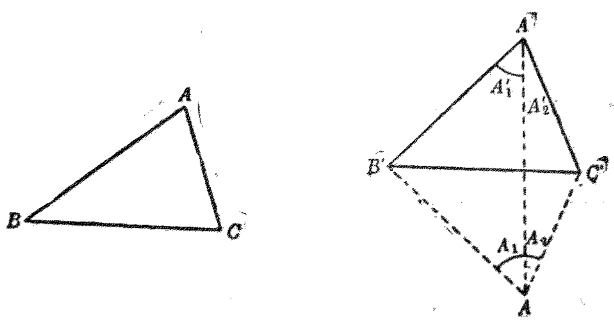
一個三角形的三邊倘若各等於其他三角形的三邊，這兩個三角形全等。（當這個定理用作理由時，可以縮寫爲各邊＝各邊。）

假設　$\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 的邊

$$AB=A'B',$$

$$AC=A'C',$$

$$BC=B'C'。$$



求證　$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$

證明

敍述	理由
1. 把 ABC 放在 $A'B'C'$ 的旁邊，使 BC 與 $B'C'$ 相合	1. 移形公理；題設 $BC=B'C'$
2. 連結 AA'	2. 直線公理
3. $\triangle A'B'A$ 是等腰$\triangle$	3. 題設 $B'A'=BA$
4. $\therefore\ \angle A_1=\angle A'_1$	4. 等腰$\triangle$的底角相等
5. $\triangle A'C'A$ 是等腰$\triangle$	5. 題設 $AC=A'C'$
6. $\therefore\ \angle A_2=\angle A'_2$	6. 與 4 同理
7. $\therefore\ \angle A_1+\angle A_2=\angle A'_1+\angle A'_2$	7. 加法公理
8. 卽 $\angle A=\angle A'$	8. 代換公理
9. $\therefore\ \triangle AB'C'\equiv\triangle A'B'C'$ 卽 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$	9. 邊，角，邊＝邊，角，邊

§ 56. 三角形的中線　由三角形某一邊的中點與該邊所對的角點連結而成的線段，叫做三角形的中線，或三角形某頂的中線。一個三角形有三個中線。

習題

1. 等腰三角形頂角的中線，平分頂角且與底垂直。

2.　四邊形的對邊倘若兩兩相等，他的對角也兩兩相等。

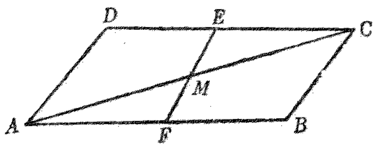
3.　等腰三角形兩腰的中線相等。

4.　菱形的兩對角線互相垂線平分。

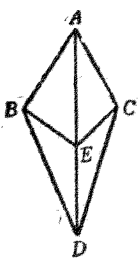
5.　有人要知道 A, B 兩點的距離，但 A, B 中間有一湖，不能直接度量，於是取一點 C, 量得 CA 的長爲 240 公尺，CB 的長爲 180 公尺，ACB 角爲 $50°$。試以 1 $cm.$ 表 30 公尺的縮尺，把這個圖形畫出來，然後量出 AB 的長，計算出 A, B 的距離。

（注意）要證明兩個三角形全等，每每先要證明其他兩個三角形全等，以完成前兩個全等的條件，下面各題卽屬於此例。

6.　假設四邊形 $ABCD$ 的對邊兩兩相等，通過對角線 AC 的中點 M 任意作一線段 EF。



求證　$EM=FM$。



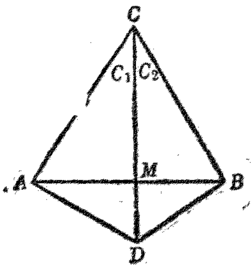
7.　假設 $AB=AC$, AD 平分 $\angle BAC$, 在 AD 上面任意取一點 E。

求證　$\angle EBD=\angle ECD$。

8.　一個三角形的兩邊，及兩邊中一邊的中線倘若各等於其他三角形的兩邊及相當邊的中線，於是這兩個三角形全等。

§57. 離兩點等距離的線 假設有一點 C，與兩點 A,B 所連結的線段 AC, BC 互相等，我們就說 C 離 A, B 等距離。

命題4. 定理



假設 C 點離線段 AB 兩端等距離，D 點離 A,B 也是等距離，於是直線 CD 垂直平分 AB。

假設 $CA=CB$, $DA=DB$。

求證 $CD\perp AB$, $AM=MB$。

證明

敍述	理由
1. $CA=CB$, $DA=DB$	1. 題設
2. $CD=CD$	2. 恆等
3. $\therefore$ $\triangle ADC\equiv\triangle BDC$	3. 各邊=各邊
4. $\therefore$ $C_1=C_2$	4. 全等形的相當部
由 $\triangle AMC$ 及 $\triangle BMC$ 得	
5. $CA=CB$	5. 題設
6. $CM=CM$	6. 恆等
7. $C_1=C_2$	7. 由上面 4
8. $\therefore$ $\triangle AMC\equiv\triangle BMC$	8. 邊角邊=邊角邊
9. $\therefore$ $\angle AMC=\angle BMC$	9. 全等形的相當部
10. $\therefore$ AMC 是直角	10. 直角定義
11. $\therefore$ $CD\perp AB$	11. 垂直定義
12. $AM=MB$	12. 全等形的相當部

系 1. 凡離 AB 兩端等距離的點都在 AB 的垂直平分線上面。

系 2. AB 的垂直平分線上的點都離 AB 兩端等距離。

§58. **平行線**　平行線的定義已在 § 21 講過，因爲他很重要，現在再敍述於下：

兩條直線同在平面內，與第三線相交，若其同位角相等，則此兩線叫做平行線。

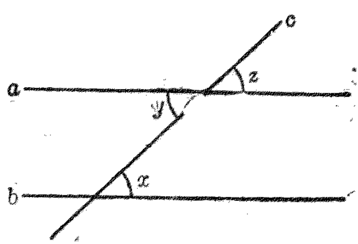
（注意）凡一個名詞的定義，逆說也是眞的，譬如平行線的定義可以逆說：倘若兩條直線是平行，這兩條直線必定是在一個平面內，并且與第三直線相交，其同位角相等。

命題 5. 定理

兩條直線同在平面內，被第三條直線所截，若內錯角相等，則此兩直線平行。

假設 a, b 兩直線與截線 c 相截，使 $\angle x=\angle y$。

求證　$a//b$。

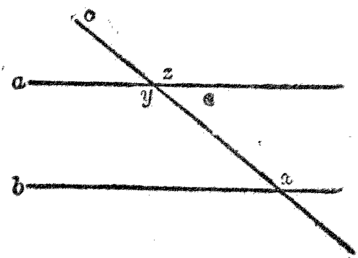


證明

敍述	理由
1. 因 $\angle x=\angle y$	1. 題設
2. $\angle y=\angle z$	2. 對頂角定理
3. ∴ $\angle x=\angle z$	3. 等量公理
4. ∴ $a//b$	4. 平行線定義

命題 6. 定理

兩條平行線與截線相截,其內錯角相等。



假設 $a//b$

求證 $\angle x=\angle y$

證明

敍述	理由
1. $\angle z=\angle x$	1. 題設 $a//b$ 所以同位角相等
2. 但 $\angle z=\angle y$	2. 對頂角相等
3. ∴ $\angle x=\angle y$	3. 等量公理

（注意）　上面命題 5 的假設就是命題 6 的結論，命題 5 的結論就是命題 6 的假設，這樣假設與結論互相對調的兩個命題，其中一個叫做其他一個的逆命題，其他一個叫做原命題。譬如上面兩個命題，倘若以命題 5 爲原命題，於是命題 6 就是命題 5 的逆命題；倘若以命題 6 爲原命題，於是命題 5 就是命題 6 的逆命題。

習　題

寫出下面各命題的逆命題，并且判斷此等逆命題的眞妄：

1.　凡直角都相等。

2.　等邊三角形的三角相等。

3.　電燈能亮，這就是有電流。

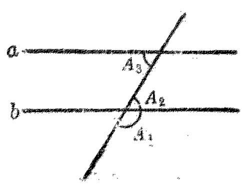
4.　正方形是四角都是直角的四邊形。

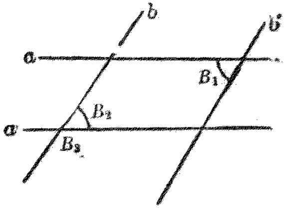
5.　正方形是四邊相等的四邊形。

6.　若甲乙兩角相等，則甲乙兩角的餘角相等。

口答下面各問題并說明答案的理由：

7.　倘若直線 $a // b$，問 A_1，A_2，A_3 各角大小的關係如何？





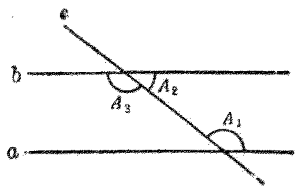
8. 倘若 $a // a'$, $b // b'$, 問 B_1, B_2, B_3 各角的大小關係如何?

9. 問兩平行線與截線相截,有幾對同位角,幾對內錯角,幾對外錯角?

10. 兩平行線與截線相截,有一對同位角是 45°,問其他各對同位角是幾度?

命題 7. 定理

一截線與兩直線相截,若兩直線互相平行,則截線一側的兩內角互為補角。



假設 $a//b$

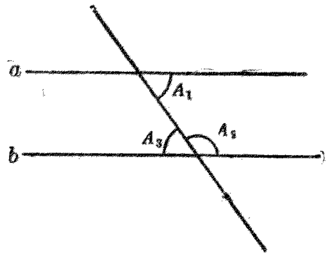
求證 A_1 與 A_2 互為補角。

證明

敍述	理由
1. $\angle A_2+\angle A_3=180°$	1. 各部和的公理
2. $\angle A_3=\angle A_1$	2. 平行線的內錯角相等
3. ∴ $\angle A_2+\angle A_1=180°$	3. 代換公理
4. ∴ $\angle A_1$ 與 A_2 互為補角	4. 補角定義

命題 8.　定理

一截線與兩直線相截，若截線一側的兩內角互爲補角，則兩直線互相平行。



假設　$\angle A_1+\angle A_2=180°$

求證　$a//b$。

證明

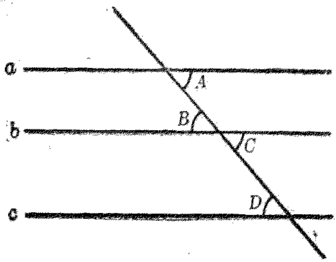
敍述	理由
1.　$\angle A_1+\angle A_2=180°$	1.　題設
2.　$\angle A_2+\angle A_3=180°$	2.　各部和的公理
3.　$\therefore$　$\angle A_1+\angle A_2=\angle A_2+\angle A_3$	3.　等量公理
4.　$\therefore$　$\angle A_1=\angle A_3$	4.　減法公理
5.　$\therefore$　$a//b$	5.　內錯角相等則兩線平行

系 1.　若兩直線同時垂直於第三直線，則兩直線平行。

系 2.　一直線垂直於兩平行線之一線，也垂直於其他一線。

命題 9.　定理

若兩直線各與第三直線平行，則兩直線平行。



假設 $a//c$, $b//c$

求證 $a//b$.

證明

敍述		理由
1. ∵	$a//c$	1. 題設
2. ∴	$\angle A=\angle D$	2. 平行線的內錯角相等
3. ∵	$b//c$	3. 題設
4. ∴	$\angle C=\angle D$	4. 與 2 同理
5. 由是	$\angle A=\angle C$	5. 等量公理
6. ∴	$a//b$	6. 平行線定義

習 題

證明下列各命題:

1. 若一角的兩邊各平行於他角的兩邊，則此兩角相等或互爲補角。

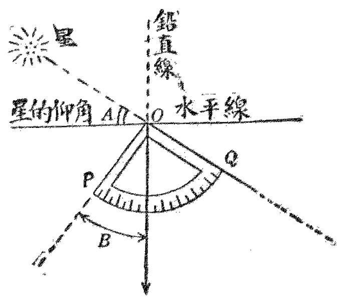
2. 若線段 AB 與 CD 互相平分於 O 點，則 $AC//BD$。

3. 若由一個角的平分線上任意一點引一直線平行於角的一邊，則此直線與其他一邊及平分線即形成等腰三角形。

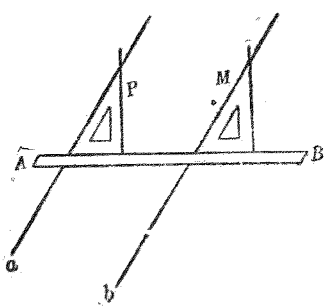
4. 若有一截線與兩平行線相截，則任意一對的錯角平分線互相平行。

寫出下列各應用題所引用的幾何原理:

5. 圖中 OPQ 是象限儀（一象限的量角器）測量星的仰角時，先使星在 OQ 直線上，然後觀察鉛直線與 OP 所夾的角 B，問 B 角何以能等於仰角 A?



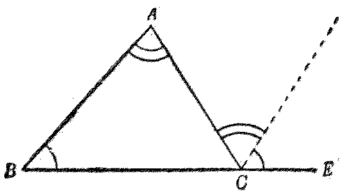
6. 要經過已知點 M 作直線平行於 a，可以用三角板及直線板來作，即先將直線 a 與三角板的斜邊相合，使三角板沿直線板移動，到了 M 點在三角板的斜邊上，畫一直線 b，於是 $b//a$。問 b 何以能平行於 a？



§59. 直線形的內角

命題 10. 定理

三角形三內角的和等於 180°。



假設 ABC 是任意三角形，

求證 $\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB=180°$

證明

敍述	理由
1. 過 C 點作 $CD // BA$	1. 平行公理
2. 於是 $\angle CAB=\angle ACD$	2. 平行線的內錯角相等
3. $\angle ABC=\angle DCE$	3. 平行線的同位角相等
4. $\therefore$ $\angle ABC+\angle CAB$ $=\angle DCE+\angle ACD$	4. 加法公理
5. 卽 $\angle ABC+\angle CAB$ $=\angle ACE$	5. 各部分的總和公理
6. $\angle ABC+\angle BAC+\angle CAB$ $=\angle ACE+\angle BAC$	6. 等量公理
7. 但 $\angle ACE+\angle BAC=180°$	7. BCE 爲直線
8. $\therefore$ $\angle ABC+\angle BAC$ $+\angle CAB=180$。	8. 等量公理

系 1. 三角形可以有一個角是直角或鈍角。

系 2.　直角三角形的兩銳角,互為餘角。

系 3.　甲三角形倘若有兩角各等於乙三角形的兩角,那麼他們的第三角也相等。

系 4.　等邊三角形的角都是 $60°$。

系 5.　從已知直線外一點可以作一條直線,垂直於已知直線,但是祇能作一條。

系 6.　四邊形的內角和等於 4 直角。

習　題

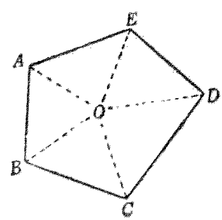
1.　問直角等腰三角形的銳角等於多少度?

2.　延長三角形 ABC 的一邊 BC 至 D, 倘若 $\angle ACD=134°$, $\angle BAC=42°$, 問三角形各內角的度數?

3.　延長三角形 ABC 的一邊 BC 至 D, 倘若 $\angle ACD=118°$, $\angle B=51°$, 問三角形內角 A 及 C 是多少度?

4.　由直角三角形 ABC 的直角角點到斜邊作垂線 CD, 求證 $\angle ACD=\angle B$。

命題 11.　定理



n 邊的多邊形, 其內角和等於 $(n-2)$ 平角。

假設 $ABCDE$……是 n 邊的多角形。

求證 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\cdots\cdots=(n-2)$平角

證明

敍述	理由
1. 在多邊形的內部取一點 O,使 O 與各頂點連結,卽得	1. 直線公理
2. n 個三角形	2. 每邊都是三角形的底
3. 多邊形內角的和＝各三角形底角的和	3. 各部份和的公理
4. 各三角形的內角和 ＝n 平角	4. 每三角形的內角和一平面
5. 各三角形的頂角和＝2 平角	5. 各部份和的公理
6. ∴各三角形的底角和＝$(n-2)$平角	6. 減法公理
7. ∴多邊形內角和＝$(n-2)$平角	7. 等量公理

習題

1. 問下面各多邊形的內角是多少平角?

6 邊形， 10 邊形， 15 邊形， 27 邊形， 39 邊形，73 邊形。

2. 已知多邊形的內角和是 100 平角，問該多邊形的邊數是多少?

3. 已知多邊形的內角和是 720°，問該多邊形的邊數是多少?

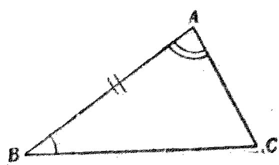
4. 問正六邊形每角是多少度?

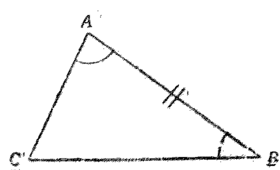
5. 問正八邊形每角是多少度?

§ 60. 再論三角形的全等

命題 12. 定理

甲乙兩三角形，若有一邊相等，并且該邊所對的角也相等，於是祇要他們還有一角相等，這兩個三角形就全等（當這個命題用作理由時，可以縮寫爲邊角角＝邊角角)。





假設 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 有一邊 $AB=A'B'$，并且

$\angle A=\angle A'$，

$\angle B=\angle B'$。

求證 $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$

證明

敍述	理由
1. $\because\ \angle A+\angle B+\angle C=180°$	1. 三角形三內角和$=180°$
2. $\therefore\ \angle C=180°-\angle A-\angle B$	2. 減法公理
3. $\therefore\ \angle C'=180°-\angle A'-\angle B'$	3. 與上面同理
4. 但 $\angle A=\angle A',\angle B=\angle B'$	4. 題設
5. $\therefore\ \angle C=\angle C'$	5. 等量公理
6. $AB=A'B'$	6. 題設
7. $\therefore\ \triangle ABC=\triangle A'B'C'$	7. 角邊角＝角邊角

系 1. 兩個直角三角形，若是斜邊彼此相等，并且有一個銳角也是彼此相等，於是這兩個直角三角形全等。（弦銳角＝弦銳角。）

系 2. 角的平分線上的點離角的兩邊等距離，離兩等距離的點都在平分線上面。

系 3. 兩個直角三角形若有一腰彼此相等，并且還有一個相應的銳角相等，於是這兩個直角三角形全等（腰相應銳角＝腰相應銳角）。

命題 13. 定理

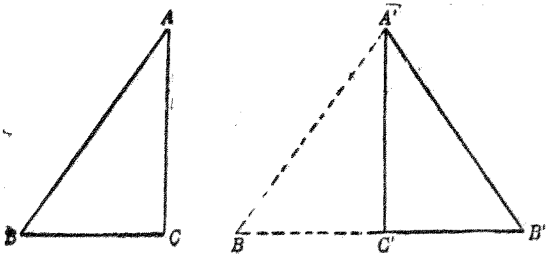
兩個直角三角形若是斜邊彼此相等，并且還有一腰彼此相

等，於是這兩個直角三角形全等(弦腰＝弦腰)。

假設 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C$ 都是直角三角形，并且直角在 C，

$$AB = A'B'$$

$$AC = A'C'$$



求證　　$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

證明

敍述	理由
1. 把 $\triangle ABC$ 放在 $\triangle A'B'C'$ 的一側，使 AC 與 $A'C'$ 相合	1. 移形公理 題設 $AC = A'C'$
2. $\because \angle A'C'B'$ 及 $\angle A'C'B$ 都是直角	2. 題設
3. $\therefore \angle BCB' =$ 平角	3. 一平角等於兩直角
4. $\therefore BCB'$ 是直線	4. 平角定義
5. $\therefore \triangle A'BB'$ 是等腰△	5. 題設 $AB = A'B'$
6. $\therefore \angle ABB' = \angle A'B'B$	6. 等腰△的底角相等
7. $\therefore \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$	7. 弦銳角＝弦銳角

習　題

1. 等腰三角形兩腰的中線相等。

2. 等邊三角形的三個高都相等。

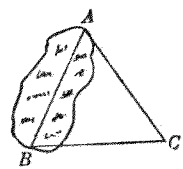
3. 等腰三角形兩腰的高相等。

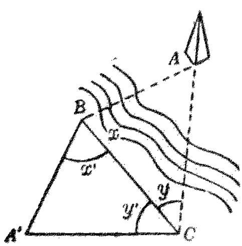
4. 從等腰三角形底邊的中點到兩腰上所作的垂線相等。

5. 從等腰三角形兩腰的中點到底上所作的垂線相等。

說出下列各應用題所引用的幾何原理:

6. 要知道池沼兩端的距離 AB,祇要選擇一點 C,使我們可以量得 CA, CB 的長,及 ACB 角的大小,就可以求出 AB 的長。

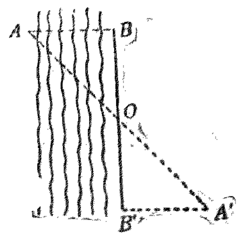


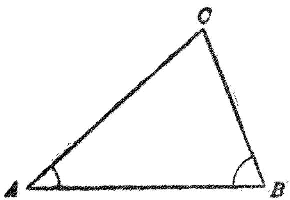


7. 要求河的隔岸一塔 A 離一點 B 的距離,祇要在河岸作一基本線 BC, 測得 $\angle ABC=\angle x$, $\angle BCA=\angle y$, 在BC的他側作$\angle x'=\angle x$, $\angle y=\angle y'$。於是 $A'B$ 就是所求的距離。

8. 這是童子軍求河闊 AB 的方法,在河的一旁先作一

基本線 $BB' \perp AB$。在 BB' 的中點 O 樹一樁，在 B' 點作 $B'A' \perp BB'$，由 $B'A'$ 上面察出與 O, A 同在一直線的點 A'，於是 $A'B'$ 就是所求的河闊。





9.　要知道天空輕氣球 C 的高，祇要在 A 點測得 $\angle CAB$，在 B 點測得 $\angle ABC$，及 AB 的長卽可求得。

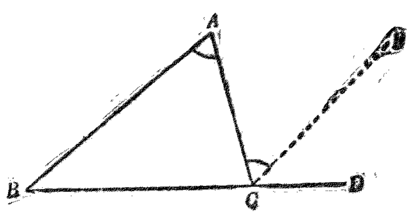
§ 61.　三角形的要性　前面所講兩個三角形全等的條件，就是決定一個三角形的大小的條件。三角形具有此等性質及內角和等於 $180°$ 外，倘有下列各命題所述的要性。

命題 14.　定理

三角形的外角等於兩內對角的和。

假設 ACD 是三角形 ABC 的外角。

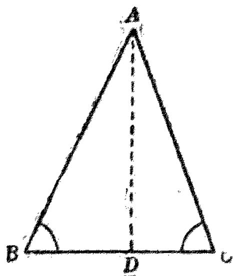
求證 $\angle ACD = \angle A + \angle B$。



證明

敍述	理由
1. 由 C 點引 $CE//BA$	1. 平行線公理
2. $\because\ \angle A=\angle ACE$	2. 平行線的內錯角相等
3. $\angle B=\angle ECD$	3. 平行線定義
4. $\therefore\ \angle A+\angle B=\angle ACE+\angle ECD$	4. 加法公理
5. 但 $\angle ACE+\angle ECD=\angle ACD$	5. 各部分的和等於全部
6. $\therefore\ \angle ACD=\angle A+\angle B$	6. 等量公理

系 1. 三角形的外角大於內對角。



命題 15. 定理

有兩角相等的三角形，就是等腰三角形。

假設　$\triangle ABC$ 的角 $B=\angle C$。

求證　$AB=AC$。

證明

敍述	理由
1. 作 $\angle A$ 的平分線 AD 交底邊 BC 於 D 點	1. 平分線公理
2. $\angle B=\angle C$	2. 題設
3. $\angle ADC=\angle ADB$	3. §59 系 3
4. $AD=AD$	4. 兩三角形的公邊
5. $\therefore\ \triangle ABD\equiv\angle ACD$	5. 角邊角＝角邊角
6. $\therefore\ AB=AC$	6. 相應部

系　等角三角形就是等邊三角形。

（注意）　命題 15 是命題 1 系 1 的逆命題，上面的系是命題 1 系 2 的逆命題。

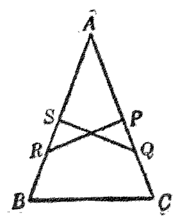
習題

1.　已知三角形的外角 102°，及一內對角 63°，問這個三角其他兩角是多少度？

2.　在三角形各角點各作一外角，於是這三外角的和等於 4 直角。

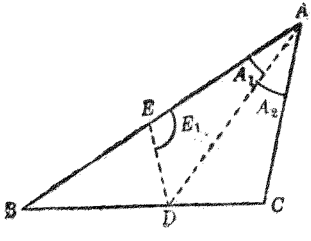
3.　等腰三角形頂點的外角平分線平行於底邊。

4.　等腰三角形兩底角的平分線與底形成一個新的等腰三角形。



5.　假設 SQ 及 PR 是等腰三角形兩腰的垂直平分線。

求證　　$PR=SQ$。



命題 16.　定理

三角形中大邊所對的角大於小邊所對的角。

假設 $\triangle ABC$ 的邊 $AB > AC$。

求證　$\angle C > \angle B$。

證明

敍述	理由
1. 作 A 角的平分線 AD	1. 平分線公理
2. 在 AB 上面取一點 E，使 $AE=AC$	2. 題設 $AB>AC$；線段公理
3. 連結 ED	3. 直線公理
4. $\because$ $AE=AC$	4. 作圖
5. $AD=AD$	5. 恆等
6. $\angle A_1=\angle A_2$	6. 作圖
7. $\therefore$ $\triangle ADE\equiv\triangle ADC$	7. 邊角邊＝邊角邊
8. $\angle E_1=\angle C$	8. 全等形的相應部
9. 但 $\angle E_1>\angle B$	9. E_1 是 $\triangle BED$ 的外角
10. $\therefore$ $\angle C>\angle B$	10. 代換公理

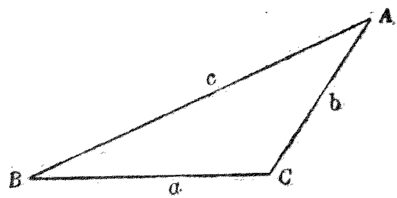
習題

1. 延長等腰三角形 ABC 的一腰 AB 到 D，於是 $\angle ABD>\angle ADB$。

2. 三角形 ABC 中，若 $AB>AC$，$\angle A=60°$，問這個△那一角最大。

命題 17. 定理(命題 16 的逆命題)

三角形中，大角所對的邊大於小角所對的邊。



假設　$\triangle ABC$ 的角 $C>\angle B$，

求證　$c>b$。

證明

敍述	理由
1. b 與 c 的大小關係不出於三種，$c=b$ 或 $c<b$ 或 $c>b$	1. 兩量比較公理
2. 若 $c=b$，則 $\angle C=\angle B$	2. 等腰△的底角相等
3. 這是不可能的	3. 題設 $\angle C\neq\angle B$
4. 若 $c<b$，於是 $\angle C<\angle B$	4. 大邊所對的邊大於小邊所對的角
5. 這是不合理的	5. 題設 $\angle C>\angle B$
6. $\therefore\quad c>b$	6. 其他兩種關係都不能成立所以第三種關係成立

系　由已知一點到已知直線引許多線段，其中以垂線爲最短。

（注意）　像這個命題的證法叫做間接證法，就是把 b, c 的關係都一一列出來，證明各關係（除求證的關係外）都不能

成立。

命題 18. 定理

三角形中，任意兩邊的和大於第三邊(距離公理)。

系　三角形任意兩邊的差小於第三邊。

習　題

1. 直角三角形以那一邊爲最大?

2. 鈍角三角形以那一邊爲最大?

3. 已知$\triangle ABC$的兩角A,B各爲$60°$,$50°$,問這個$\triangle$各邊大小的次序如何?

4. $\triangle ABC$若$AB>AC$, $\angle B=60°$, 問這個$\triangle$各邊大小的次序如何?

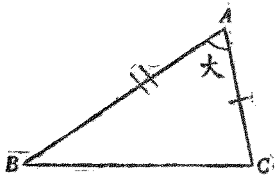
5. 由等腰$\triangle ABC$的一腰AB上面任意取一點, D與C相連結，求證$DC<DB$。

6. $\triangle ABC$的邊$AC>BC$,若A,B兩角的平分線相遇於D,求證$AD>BD$。

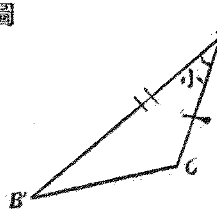
7. 三角形三個高的和小於各邊的和。

命題 19. 定理

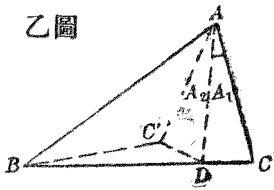
倘若一個三角形的兩邊各等於他三角形的兩邊，而兩邊所夾的角不相等，那麼夾角大的，所對的邊也大。



甲圖



乙圖



假設　$\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$

的邊 $AB=A'B'$

$AC=A'C'$

$\angle A>\angle A'$

求證　$BC>B'C'$

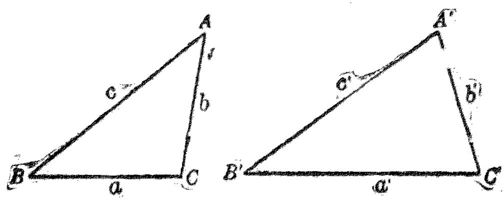
證明

敍述	理由
1. 把 $\triangle A'B'C'$ 放在$\triangle ABC$ 上面，使 $A'B'$ 與AB 相合如乙圖	1. { 移形公理 題設　$AB=A'B'$
2. $A'C'$落在 AB 與 AC 之間	2. 題設　$\angle A>\angle A'$
3. 作$\angle C'AC$ 的平分線AD，交 BC 於 D 點，連結 DC'	3. { 平分線公理 直線公理
4. $AC'=AC$	4. 題設
5. $\angle A_2=\angle A_1$	5. 作圖
6. $AD=AD$	6. 恆等
7. $\therefore\ \triangle AC'D\cong\triangle ACD$	7. 邊角邊＝邊角邊
8. $DC'=DC$	8. 全等形的相應部
9. $BD+DC'>BC'$	9. △的兩邊和＞第三邊
10. $\therefore\ BD+DC>BC'$	10. 代換公理
11. $\therefore\ BC>B'C'$	11. 代換公理

命題 20. 定理(命題 19 的逆命題)

倘若一個三角形的兩邊各等於他三角形的兩邊，而第三邊不相等，那麼大邊所對的角大於小邊所對的角。

假設 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 的邊 $b=b'$, $c=c'$, $a<a'$



求證 $\angle A<\angle A'$

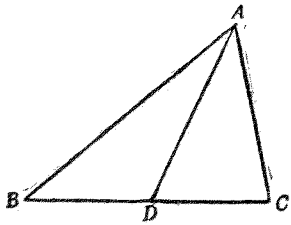
證明

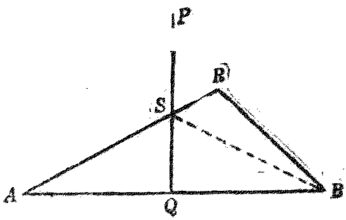
敍述	理由
1. A 與 A' 兩角的大小關係不出乎三種，即 $\angle A=\angle A'$, $\angle A>\angle A'$，或 $\angle A<\angle A'$	1. 兩量比較公理
2. 若 $\angle A=\angle A'$, 則 $a=a'$	2. 邊角邊＝邊角邊
3. 這是不合理的	3. 題設 $a<a'$
4. 若 $\angle A>\angle A'$, 則 $a>a'$	4. 命題 19
5. 這也是不合理	5. 題設 $a<a'$
6. $\therefore$ $\angle A<\angle A'$	6. 其他兩種關係不能成立，所以第三種成立。

習　題

1. 若 $\triangle ABC$ 的邊 $AB > AC$, 連結 BC 的中點於 D, 於是 ADB 是鈍角三角形。

2. 若 $\triangle ABC$ 的中線 AD 與 BC 所夾的角 ADC 是銳角，則 $AC<AB$，并且 $\angle B<\angle C$。

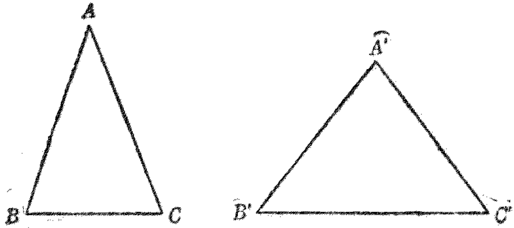




3. 假設 PQ 是 AB 的垂直平分線, R是 PQ 外面任意一點。

求證　$RA>RB$。

4. 假設 ABC 及 $A'B'C'$ 都是等腰$\triangle$，各以 BC, $B'C'$ 爲底,并且　$AB=A'B'$, $\angle B>\angle B'$。



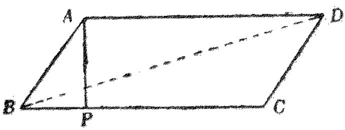
求證　$BC<B'C'$

5. 四邊形各邊的和大於兩對角線的和。

6. 由一點到直線作二垂線及兩條相等的斜線，求證這兩條斜線與垂線所夾的角相等。

7. 由一點到直線作垂線及斜線，求證斜線與垂線所夾的角愈大則斜線愈長。

§ 62. **平行四邊形** 平行四邊形的定義已在 § 37 講過，



我們常用記號『▱』表示他，譬如平行四邊形 $ABCD$ 常記爲▱$ABCD$，或 ▱AC，或▱BD。平行線的公垂線 AP 叫做平行線的距離。

命題 21. 定理

平行四邊形有下列各項要性：

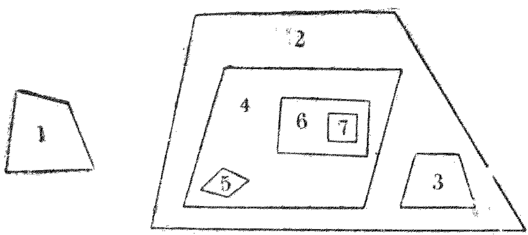
1. 被對角線分爲兩個全等三角形。
2. 對邊兩兩相等。
3. 對角兩兩相等。
4. 同在一邊的兩角互爲補角。
5. 兩對角線互相平分。
6. 對邊的公垂線都相等(可由學生自己證明)。

(注意) 矩形，菱形及正方形都是特殊的平行四邊形，所以上面命題所述的性質也是這些特殊平行四邊形的性質。

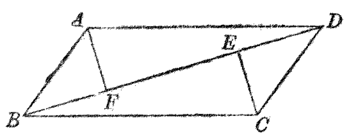
習　題

口答下列各問題,必要時查閱 § 36, § 37 的定義:

1. 下圖是表示四邊形逐步分類的情形,問任意四邊形與梯形 2 有何區別?問梯形 2 與 3 有何區別?梯形 3 叫什麽名詞? 問 3 與 4, 4 與 5, 5 與 6, 6 與 7 有何區別?問正方形,矩形,菱形及平行四邊形是什麽形的特別形?



2. 在▱ $ABCD$ 中,若 $\angle A=60°$, 問其他各角是幾度?
3. 試證矩形的對角線相等。
4. 假設 $ABCD$ 是▱, $AF \perp BD$, $CE \perp BD$。
求證　$AF=CE$。



5. 平行四邊形的兩對角線如若相等,這個平行四邊形是矩形,試證明之。

6. 依次連結平行四邊形各邊的中點所得的圖形是平行四邊形,試證明之。

7. 以兩條平行線截兩條平行線,所截得的線段相等。

8. 菱形的對角線互相垂直。

命題 22. 定理

四邊形有下列各項之一,即成爲平行四邊形:

1. 對邊兩兩相等。

2. 對角兩兩相等。

3. 相隣的兩邊,各邊上的兩角互爲補角。

4. 兩對角線互相平分。

5. 有一對的對邊相等并且平行。

(由學生自己證明,祇要證明對邊兩兩平行即得。)

習 題

1. 平行四邊形的兩對角線如若相等,這個▱是矩形。

2. 平行四邊形的兩對角如若互爲補角,這個▱是矩形。

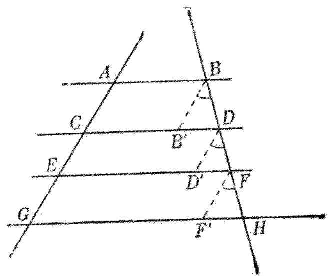
3. 平行四邊形的兩對角線如若互相垂直,這個▱是菱形。

4. 在 AB 的兩側各作一平行四邊形 $ABCD$ 及 $ABEF$,求證 $CDFE$ 是▱。

§ 63.　平行線所截的等線段

命題 23.　定理

直線與諸平行線相交時，若所截諸線段相等，於是諸平行線與其他直線相交時所截諸線段也相等。



假設 $AB//CD//EF//GH$，

并且 $AC=CE=EG$

求證　$BD=DF=FH$.

證明

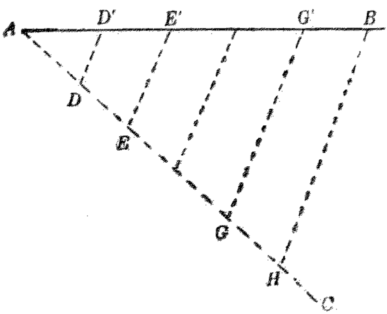
敍述	理由
1.　$AB//CD//EF//GH$	1.　題設
2.　$\therefore\ \angle BDB'=\angle DFD'$ $=\angle FF'H$	2.
3.　作 BB', DD', $FF'//AG$	3.　平行線公理
4.　$BB'//DD'//FF'$	4.　諸線平行於一線諸線也平行
5.　$\therefore\ \angle B'BD=D'DF$ $=\angle F'FH$	5.　平行線的同位角
6.　$BB'=AC$,　$DD'=CE$, $FF'=EG$	6.　平行四邊形的對邊
7.　$\therefore\ \triangle BB'D\equiv\triangle DD'F$ $=\triangle FF'H$	7.　邊角角＝邊角角
8.　$\cdot\ BD=DF=FH$	8.　全等形的相應部

系 1. 通過 $\triangle ABC$ 任意一邊 AB 的中點 M 引一直線平行於 BC，則此直線平分第三邊 AC。

系 2. 通過梯形一腰的中點引一直線平行於底邊，則此直線平分其他一腰。

命題 24. 作圖題

平分已知線段爲 n 等分。



假設 AB 是已知線段，

求分 AB 爲 n 等分。

作法 由 A 點任意引一直線 AC，用圓規在 AC 上面截取 n 條相等線段 $AD, DE, \cdots\cdots GH$，連結 HB，通過 $G, \cdots\cdots E, D$ 作 HB 的平行線與 AB 相截，於是 AB 卽被此等平行線分爲 n 等分。

證明

敍述	理由
1. $DD' // EE' // \cdots // HB$ 并且 $AD = DE = \cdots = GH$	1 作圖
2. $\therefore AD' = D'E' = \cdots = G'B$	2. 命題 23

§64. 再論三角形的要性

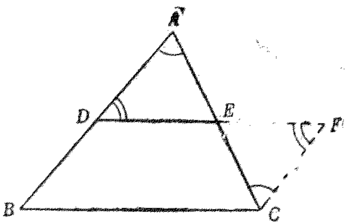
命題 25.　定理

連結三角形兩邊中點所得的線段必平行於第三邊且等於第三邊的一半。

假設 D, E 是 $\triangle ABC$ 兩邊 AB, AC 的中點,連結 DE,

求證　$DE//BC$,

$DE=\frac{1}{2}BC$。



證明

敍述	理由
1.　延長 DE 到 F,使 $EF=DE$	1.　延長公理
2.　連結 CF	2.　直線公理
3.　∵　$AE=EC$	3.　題設
4.　$DE=EF$	4.　作圖
5.　$\angle AED=\angle FEC$	5.　對頂角相等
6.　∴　$\triangle AED\equiv\triangle CEF$	6.　邊角邊＝邊角邊
7.　∴　$\angle ADE=\angle CFE$	7.　全等形的相應部
8.　∴　$DB//FC$	8.　錯角相等則兩線平行
9.　$DB=FC$	9.　全等形的相應部
10.　∴　$DBCF$ 是▱	10.　四邊形的對邊相等且平行
11.　$DE//BC$	11.　平行四邊形定義
12.　$DE=\frac{1}{2}DF$	12.　作圖
13.　∴　$DE=\frac{1}{2}BC$	13.　▱的對邊相等;代換公理

（注意） 上面 EF, FC 兩線段都是爲證明而作的，這種線段叫做補助線。如何作補助線纔可以使定理容易證明，這問題雖然很重要，但是並無一定方法。

習 題

1. 連結三角形各邊的中點可得四個全等三角形，試證之。
2. 依次連結四邊形各邊中點所得的圖形是平行四邊形，試證之。
3. 假設 D,E 是等腰三角形 ABC 兩腰 AB,AC 的中點，F 是底的中點，連結 DF,EF，求證 $ADFE$ 是菱形。
4. 等腰梯形的底角相等，并且兩對角線相等。
5. 依次連結等腰梯形各邊中點所得的圖形是菱形。
6. 連結梯形兩腰中點所得的中線等於上下底和的一半。
7. 等腰梯形的上底等於腰的長，下底兩倍於腰的長，求這個等腰梯形各角的度數。
8. 分已知線 CD 段爲六等分。
9. 分已知線段 MN 爲七等分。
10. 已知平行四邊形的兩邊及夾角，求作此平行四邊形。

命題 26. 定理

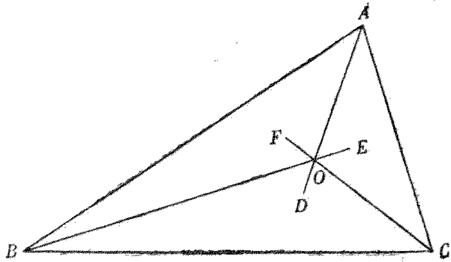
三角形各角的平分線相交於一點，該點離三角形各邊等距

離。

假設 AD, BE, CF 是$\triangle ABC$ 各角的平分線。

求證　(1) AD, BE, CF 相遇於一點 O。

(2) O 點離 AB, BC, CD 等距離。



證明

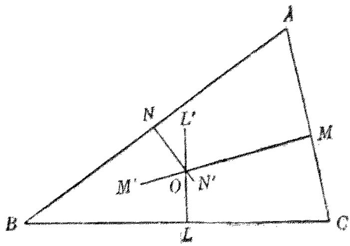
敍述	理由
1.　AD 與 BE 相交於一點 O	1.　$\angle OAB+\angle OBA\neq 180°$ 故相交
2.　O 點離 AB, AC 等距離	2.　命題 12 系 2
3.　O 點離 AB, BC 等距離	3.　命題 12 系 2
4.　$\therefore$ O 點離 AC, BC 等距離	4.　等量公理
5.　$\therefore$ O 在 CF 上面，即 AD, BE, CF 相交於一點 O	5.　命題 12 系 2
6.　O 點離 AB, BC, CD 等距離	6.　根據由上面 2,3 即得

(注意)　以 O 爲圓心，以 O 離邊 AB 的距離爲半徑可作一圓在 $\triangle ABC$ 內，這個圓叫做 $\triangle ABC$ 的內切圓。

命題 27.　定理

三角形各邊的垂直平分線相交於一點，并且此點離各邊等

距離。



假設　LL', MM', NN' 是 $\triangle ABC$ 各邊的垂直平分線。

求證　這三條垂直平分線相交於一點，交點離各邊等距離。

證明

敍述	理由
1. 設 LL' 與 MM' 相交的點爲 O	1. LL' 與 MM' 不同垂直於一直線
2. O 點離 A, C 等距離，離 C, B 也是等距離，即 O 點離 A, B, C 等距離	2. 題設及 § 57 系 2
3. 但是離 A, B 等距離的點都在 NN' 上面，即 NN' 與 LL', MM' 同交於 O 點，并且此點離 A, B, C 等距離	3. 題設及 § 57 系 1

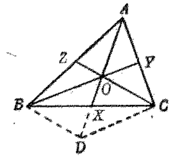
（注意）以 O 點爲圓心，以 O 離角點的距離爲半徑，可作一圓通過 $\triangle ABC$ 的角點，這個圓叫做 $\triangle ABC$ 的外接圓。

命題 28.　定理

三角形的三中線相交於一點，由該點至各頂點的距離各等

於該中線三分之二。

分析　設 ABC 是已知三角形，BY, CZ 是兩中線相交於一點 O, 連結 AO, 延長 AO 與 BC 相交於 X, 現在祇要求證



(1) AX 是三角形的中線。

(2) $AO=\dfrac{2}{3}AX$。

證明

敍述	理由
1. 通過 C 點作 $CD//YB$	1. 平行公理
2. 延長 AX 與 CD 相交於 D	2. 延長公理
3. 連結 BD	3. 直線公理
4. 在 $\triangle ACD$ 內 $\because$ $YB//CD$	4. 作圖
5. Y 是 AC 的中點	5. 題設
6. $\therefore$ O 是 AD 的中點	6. 命題 23 系 1
7. 在 $\triangle ABD$ 內，$\because$ Z, O 是 AB, AD 的中點	7. 由題設及上面 6
8. $\therefore$ $ZC//BD$	8. 命題 25
9. $\therefore$ $BOCD$ 是▱	9. ▱定義
10. $\therefore$ BC 與 OD 互相平分 卽 X 是 BC 的中點 卽 AX 是中線	10. 命題 21(5)
11. $\because$ $AO=OD=2OX$ $\therefore$ $AO=\dfrac{2}{3}AX$	11. 由上面 6 及 10

（注意） 三角形三中線的交點叫做三角形的重心。

習　題

1. 畫一個 $\triangle ABC$，用圓規及直線板作出這三角形的重心。

2. 畫一個 $\triangle ABC$，用圓規及直線板作這三角形的內切圓。

3. 畫一個 $\triangle ABC$，用圓規及直線板作這個三角形的外接圓。

4. 證明三角形一角的平分線與其他兩角的外角平分線相交於一點。

5. 證明等邊三角形的重心與外接圓圓心及內切圓圓心相合於一處。

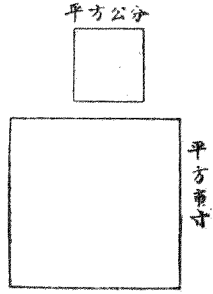
6. 假設直線 OA, OB, OC 相交於一點 O，求作一線段，其兩端在 OA, OC 上面，中點在 OB 上面。

7. 延長等腰三角形 ABC 的底 AB 至 D，連結 CD，

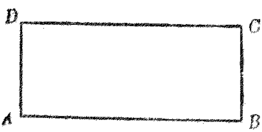
求證　$\angle BCD = \angle A - \angle D$。

第十章　直線形的面積

§ 65.　**面積的單位**　一個正方形,如若他的邊是長的單位,他就是面積的單位。譬如邊長 1 公分的正方形,他的面積就是一平方公分,邊長一市寸的正方形,他的面積就是一平方市寸,餘類推。平方市寸,平方公分常寫爲市寸^2,公分^2,讀爲『平方市寸』,『平方公分』。



§ 66.　**矩形的面積**　在 § 39 已經講過,『矩形的面積等於底乘以高』,這個結果是本章研究面積的基本概念,學者應當把 § 39 再重閱一遍。



因爲 AB, AD 能決定矩形的大小形狀,所以矩形 $ABCD$,每每以『矩形 AB, AD』,或『▭ AB, AD』代表他,或簡寫"$AB \times AB$"代表他。倣此,以 AB 爲邊的正方形,即以"AB^2"代表他。

習　題

1.　爲什麼(a) 1 市尺^2=100 市寸^2。

(b) 1 市丈^2=100 市尺^2=10000 市寸^2? 試以圖說明理由。

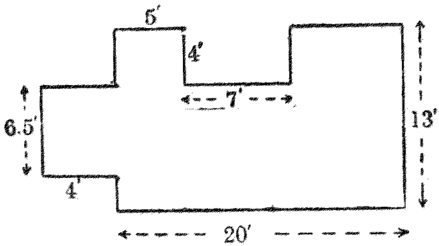
2. 試作一圖,顯示以某線段爲邊的正方形面積,四倍於以某線段一半爲邊的正方形面積。

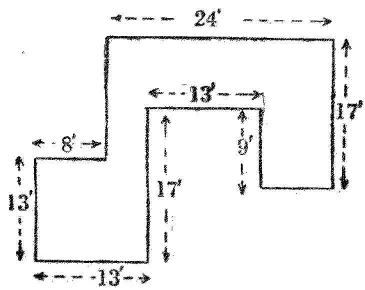
3. 假設 a 代表矩形的長, b 代表他的寬,按下列 a, b 的值求出矩形的面積。

(i) $a=4$ 市尺, $b=31$ 市寸 (ii) $a=7$ 公分, $b=3.2$ 公分

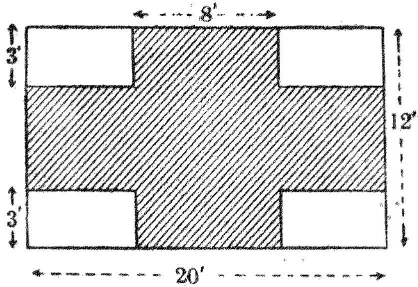
(iii) $a=8$ 公分, $b=23$ 公寸 (iv) $a=3$ 公尺, $b=6.2$ 公寸

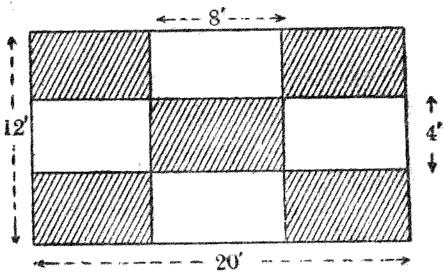
4. 求下面兩圖的面積,圖上各角都是直角,各邊所列的數是表示各邊的長,此處長的單位是市尺。





5.　求下面各圖中黑影的面積。

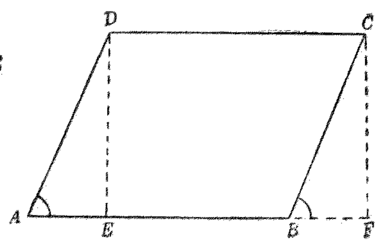




§ 67.　各種直線形的面積

命題 29.　平行四邊形面積定理

平行四邊形的面積等於底乘高。



假設 $ABCD$ 是□，在 AB 底上的高爲 DE。

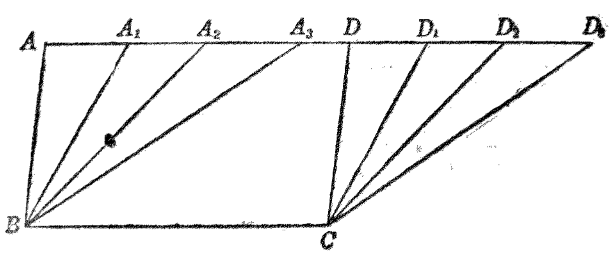
求證 $\square ABCD = AB \times DE$。

證明

敍述	理由
1. 延長 AB, 作 $CF\perp AB$	1. { 延長公理 由直線外一點可作一垂線垂直於該直線
2. 在直角三角形 AED 及 CFB 中, $\because$ $AD=BC$	2. 平行四邊形的對邊兩兩相等
3. $\angle DAE=\angle BCF$	3. 平行線的同位角
4. $\therefore$ $\triangle AED\equiv\triangle CFB$	4. 弦,銳角=弦,銳角
5. $\therefore$ $\square ABCD=\square DEFC$	5. 移形公理
6. 但 $\square DEFC=DE\times EF$	6. § 66
7. $\therefore$ $\square ABCD=DE\times EF$	7. 代換公理
8. 即 $\square ABCD=DE\times AB$	8. { $\because$ $AE=BF$ 代換公理

習　題

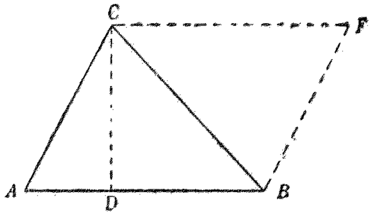
1. 問下圖諸平行四邊形 $ABCD$, A_1BCD_1, A_2BCD_2, A_3BCD_3 是不是等積形?



系 1.　同底等高的諸平行四邊形是等積形。

命題 30.　三角形面積定理

三角形的面積等於底乘高的一半。



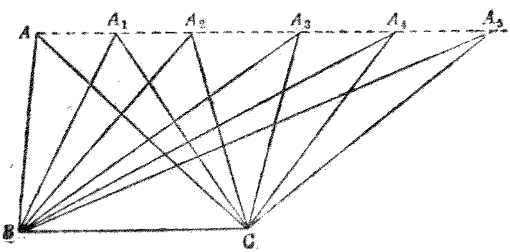
假設　ABC 是已知三角形，他的高是 CD。

求證　$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\times CD$

證明

敍述	理由
1.　作 $BF//AC$, $CF//AB$	1.　平行線公理
2.　$ABFC$ 爲平行四邊形	2.　平行四邊形定義
3.　$\triangle ABC\cong\triangle BCF$	3.　▱被對角線分爲兩個全等△
4.　$2\triangle ABC=\square ABFC$	4.　各部分的和公理
5.　$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\square ABFC$	5.　除法公理
6.　$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}AB\times CD$	6.　命題 29

習　題

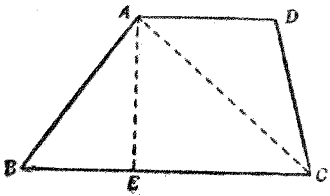


1.　問左圖諸三角形 ABC, A_1BC, A_2BC, ……A_5BC, 是不是等積形？

系 1. 同底等高的諸三角形是等積形。

命題 31. 梯形面積定理

梯形的面積等於高乘上下底和的一半。



假設 $ABCD$ 是已知的梯形,AE 是他的高。

求證 梯形 $ABCD$

$$=\text{高}\times\frac{\text{上底}+\text{下底}}{2}$$

(由學生按圖證明)

習題

1. 設 ABC 是已知三角形,由 AB 上面一點 X 作 $XY /\!/ BC$,交 AC 於 Y。

求證 i $\triangle ABY=\triangle ACX$

ii $\triangle BXY=\triangle CXY$

iii $\triangle XBC=\triangle YBC$

2. 求證三角形的中線分該三角形爲兩個等積形。

3. 用圓規及直線板分已知 $\triangle ABC$ 爲三個等積三角形(由一個角點引兩條直線卽得,但是這兩條直線如何引法)。

4. 求證平行四邊形被兩對角線分爲四個等積三角形。

5.　在$\triangle ABC$的中線AX上面任意取一點Y，連結BY，CY，求證$\triangle ABY=\triangle ACY$。

6.　假設$ABCD$是▱，由B, D到對角線AC作垂線BP，DQ，求證　i　$BP=DQ$，

在AC或AC的延長線上面任意取一點X，

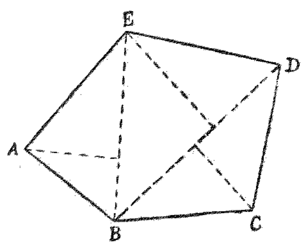
求證　ii　$\triangle ADX=\triangle ABX$，

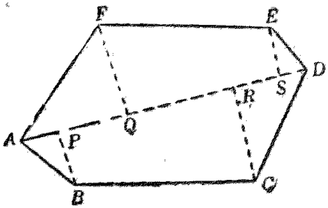
iii　$\triangle CDX=\triangle CBX$。

7.　假設甲三角形的兩邊各等於乙三角形的兩邊，兩邊所夾的角互為補角，求證這兩個三角形是等積形。

8.　依次連結四邊形各邊中點所得的平行四邊形，其面積等於四邊形面積的一半，試證明之。

（注意）　計算直線形的面積，每每把直線形分為若干個三角形計算，譬如右圖直線形$ABCDE$分為$\triangle ABE$, $\triangle BED$, $\triangle BCD$。求出這三個三角形面積的和即得直線形面積。但是也常用第二種方法：即在直線形上，取適當的兩角點連成線段，如下圖的AD，這個線段叫做基線。由其他角點到基線作垂線，於是直線形即分為若干個直角三角形及梯形。譬如求下圖$ABCDEF$的面積，其布算如下。





$AD=51\ cm.$

$AS=47\ cm.$　$ES=10\ cm.$

$AR=40\ cm.$　$CR=17\ cm.$

$AQ=20\ cm.$　$FQ=16\ cm.$

$AP=7\ cm.$　$BP=9\ cm.$

cm^2　cm^2

由是　$\triangle ABP=\frac{1}{2}AP\times BP=\frac{1}{2}\times 7\times 9=31.5$

$\triangle AQF=\frac{1}{2}AQ\times FQ=\frac{1}{2}\times 20\times 16=160$

梯形　$BPRC=PR\times\frac{BP+CR}{2}=33\times\frac{9+17}{2}=429$

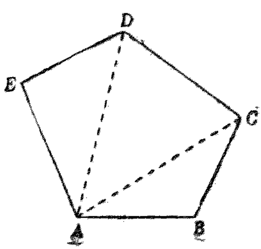
梯形　$FQSE=QS\times\frac{FQ+ES}{2}=27\times\frac{16+10}{2}=2160$

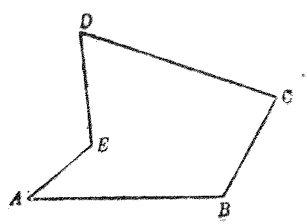
$\triangle CRD=\frac{1}{2}RD\times CR=\frac{1}{2}\times 11\times 17=93.5$

$\triangle ESD=\frac{1}{2}SD\times ES=\frac{1}{2}\times 4\times 10=20$

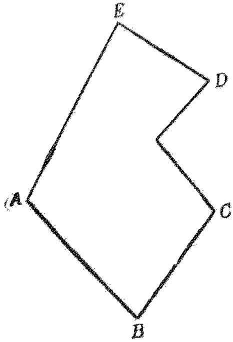
$\therefore$　$ABCDEF$ 的面積 $=2894\ cm^2$

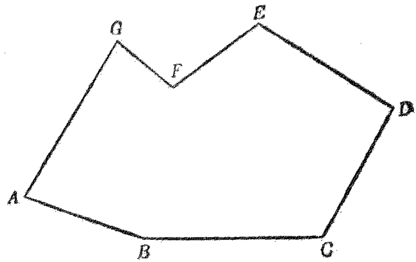
9. 計算下面甲,乙兩圖的面積(用上面注意所說第一法).





10. 用上面注意所說第二法，計算下面甲，乙兩圖的面積。

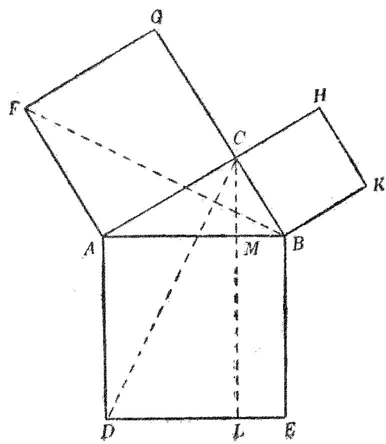




11. 凡通過平行四邊形對角線中點的直線，都分平行四邊形為兩個等積形，試證明之。

§ 68. 商高定理　這個定理，在基本運算之練習裏面，曾用割補法講過，現在再用演繹法證明他是眞的。

命題 32. 商高定理



直角三角形的弦方等於勾方加股方。

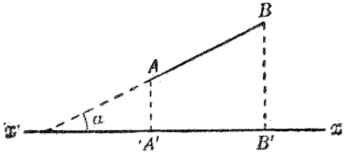
假設　ABC 是已知直角三角形，以 $\angle C$ 為直角。$ABED$, $BKHC$, 及 $CGFA$ 是各邊上面的正方形。

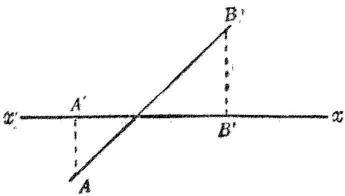
求證　$ABED = BKHC$
$+ CGFA$

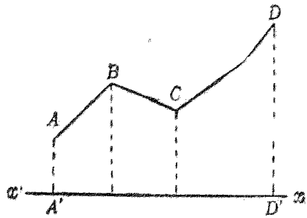
證明

敍述	理由
1. 由 C 點作 $CL \perp DE$, 交 AB 於 M	1. 由已知直線外一點可作一直線垂直於已知直線
2. 連結 BF, CD,在$\triangle ABF$, $\triangle ADC$ 內	2. 直線公理
3. $\because$ $AC=AF$, $AB=AD$	3. 題設
4. $\angle CAF=\angle BAD$	4. 凡直角都相等
5. $\angle BAF=\angle CAD$	5. 等量公理
6. $\therefore$ $\triangle ABF \equiv \triangle ADC$	6. 邊角邊=邊角邊
7. 但 $\triangle ABF=\frac{1}{2}AF\times AC$ $\triangle ADC=\frac{1}{2}AD\times AM$	7. △面積等於底乘高的一半
8. $\therefore$ $\frac{1}{2}AF\times AC$ $=\frac{1}{2}AD\times AM$	8. 等量公理
9. $\therefore$ $AF\times AC=AD\times AM$	9. 除法公理
10. $BC\times BK=BM\times BE$	10. 做上面步驟,連結 CE, AK 卽得
11. 但 $AD\times AM+BM\times BE$ $=AB\times AD$	11. 各部分和的公理
12. $\therefore$ $AB\times AD=AF\times AC$ $+BC\times BK$ 卽 $ABED=BKHC$ $+CGFA$	12. 代換公理

§ 69.　射影　由線段 AB 或折線 AD 的兩端到直線 $x'x$ 上面作垂線 AA', BB', DD'。於是 $A'B'$ 叫做 AB 投在直線 $x'x$ 上面的正射影，或簡







稱 AB 的射影。AB 與 $x'x$ 所夾的角叫做 AB 的斜度。

習　題

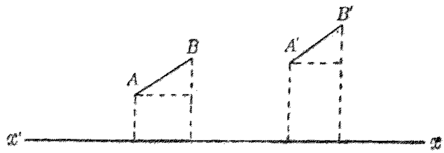
1　問線段在那一種情形時候，他的射影等於 0。

2.　問線段在那一種情形時候，他的射影等於他自己的長。

3.　設線段 AB 對於直線 $x'x$ 的斜度爲 α，照下列 α 的值畫出 AB 諸射影。

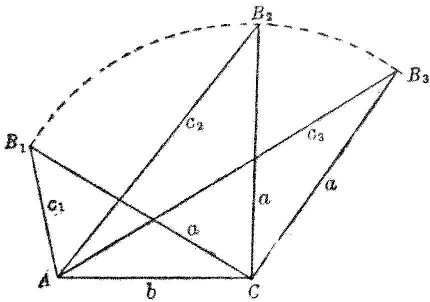
$\alpha=0°$，$\alpha=15°$，$30°$，$45°$，$60°$，$75°$，$90°$，$105°$，$120°$，$135°$，$150°$，$165°$，$180°$。

4.　兩線段如若平行，而長又相等，他們的射影也相等，



試證明之。

§ 70. 商高定理的擴充 假設 AC 是固定不動的，CB_1 可以繞 C 點旋轉，在 CB_2 或 CB_3 的位置上 ACB_2 是直角，ACB_1 是銳角，ACB_3 是鈍角。



設 $AC=b$,

$CB_1=CB_2=CB_3=a$,

$AB_1=c_1$ $AB_2=c_2$ $AB_3=c_3$

$\because$ $c_1<c_2<c_3$

$c_2^2 = a^2+b^2$

$\therefore$ $c_1^2 = a^2+b^2-$若干面積

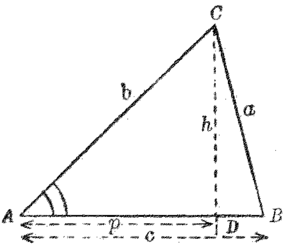
$c_3^2 = a^2+b^2+$若干面積

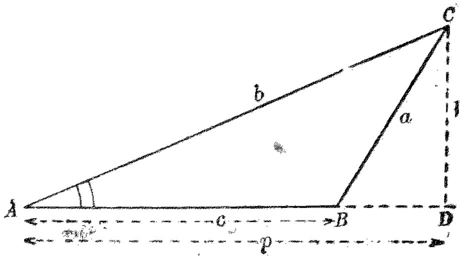
這裏所謂若干面積的實在數目，將由下列兩命題中指出。

命題 33. 定理

在三角形中，銳角所對的邊的平方等於夾邊的平方和減去其中一夾邊的兩倍乘他夾邊的射影。

假設　ABC 是已知三角形，如左圖或右圖。$\angle A$ 為銳角，設各角所對的邊長為 a, b, c。三角形的高 $CD=h$, AC 投在 AB 上面的射影 $AD=p$。





求證　$a^2=b^2+c^2-2cp$.

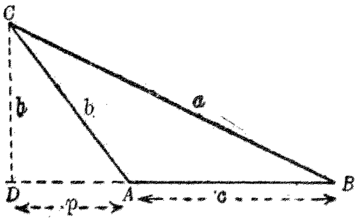
證明

敍述	理由
1.　在 $\triangle BDC$ 中	1. 商高定理
$\because$　$a^2=h^2+(c-p)^2$	左圖
$a^2=h^2+(p-c)^2$	右圖
2.　$\therefore$　$a^2=h^2+p^2+c^2-2cp$	2.　把上面兩式展開
3.　但是　$h^2+p^2=b^2$	3.　應用商高定理於左圖及右圖
4.　$\therefore$　$a^2=b^2+c^2-2cp$	4.　代換公理

命題 34.　定理

在三角形中，鈍角所對的邊的平方等於夾邊的平方和再加

其中一夾邊的兩倍乘他夾邊的射影。



假設 $\triangle ABC$ 的 $\angle BAC$ 是鈍角，各邊的長爲 a, b, c，高爲 h，b 邊投在 c 邊的射影爲 p。

求證 $a^2=b^2+c^2+2cp$.

證明

敍述	理由
1. 在直角 $\triangle BCD$ 中 $a^2=h^2+(p+c)^2$ 卽 $a^2=h^2+p^2+c^2+2cp$	1. 商高定理
2. 但是 $h^2+p^2=b^2$	2. 應用商高定理於 $\triangle ACD$
3. $\therefore\ a^2=b^2+c^2+2cp$	3. 代換公理

習 題

1. 假設 ABC 是等邊三角形，BA' 是 BA 投在 BC 上面的射影，i 若 $BA=2$, $BA'=?$

ii 若 $BA=6$, $BA'=?$

iii 若 $BA=7$, $BA'=?$

iv 若 $BA=25$, $BA'=?$

v 若 $BA=c$ $BA'=?$

2.　設 $\triangle ABC$ 各角所對的邊爲 a, b, c。

若 $b=8$,　$c=5$,　$\angle A=60°$，試求 a 的值。

若 $b=12$，$c=7$，　$\angle A=60°$，試求 a 的值。

若 $b=15$，$c=14$，$\angle A=60°$，試求 a 的值。

3.　設 $\triangle ABC$ 各角所對的邊爲 a, b, c。

若 $a=8$,　$b=7$,　$\angle C=120°$，求 c 的值。

若 $a=11$，$b=12$，$\angle C=120°$，求 c 的值。

若 $a=13$，$b=16$，$\angle C=120°$，求 c 的值。

4.　把下面兩個三角形畫出來，應用命題 33 及 34，求出他們的面積。

i　$a=2cm.$　$b=3cm.$　$c=4cm.$

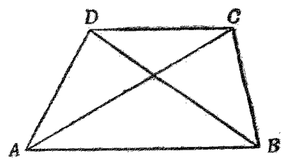
ii　$a=5$ 寸　$b=4$ 寸　$c=4$ 寸

5.　設假 $ABCD$ 是梯形，

AB, DC 是上下底，

求證 $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=$

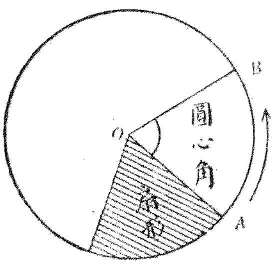
$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+2ABDC$。

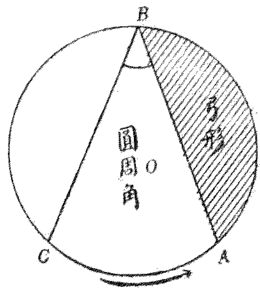


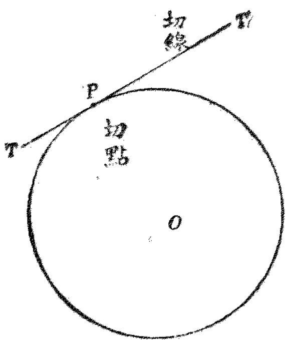
6.　設 ABC 是等腰三角形（$AB=AC$），由 B 到 AC 作垂線 BP，求證 $2\,AC\cdot CP=\overline{BC}^2$。

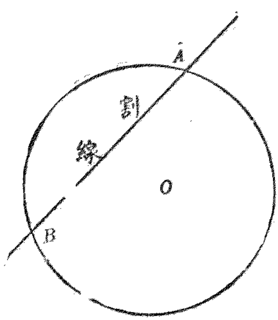
第十一章　圓的要性及面積

§ 71.　關於圓的各種名詞　關於圓的定義和圓周的區別以及半徑，直徑，優弧，劣弧，……等名詞的定義都在 § 24 裏面講過，本章研究圓的性質，除需用此等名詞外，還需要下列各名詞。學者要知道下列名詞之前，最好先把 § 24 複習一遍。









兩半徑所夾的角如 $\angle AOB$ 叫做圓心角。這時的劣弧 $\widehat{AB}$ 叫做圓心角所對的弧，或圓心角的夾弧。圓心角的兩邊及夾弧所圍成的形叫做扇形。

由圓周上一點引兩條弦如 BC, BA, 這兩弦所夾的角 CBA 叫做圓周角，他所對的弧叫做圓周角的夾弧，卽 $\widehat{CA}$。弦與所對的劣弧所圍成的形叫做弓形。

一直線與圓相交於一點且祇有一點，如 TT'，叫做切線，交點 P 叫做切點。

一直線與圓相交於兩點，如 AB，叫做割線。

§ 72.　圓的基本性質　下面的基本性質可以由圓的定義直接推出，此等性質也可以作爲幾何公理，加入 § 50 其他幾何公理中。

24.　圓的公理　等半徑的圓都相等。

25.　圓的公理　同圓或等圓的半徑都相等。

26.　圓的公理　同圓或等圓的直徑都相等。

27.　圓的公理　直徑能平分圓及圓周，圓對於直徑是對稱。

28.　圓的公理　平分圓或圓周的線段是直徑。

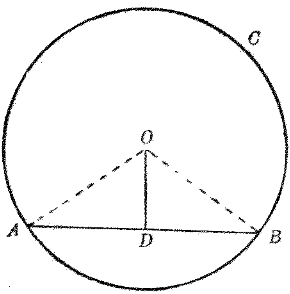
29.　圓的公理　一點在圓內，圓上，或圓外，隨該點離圓心的距離小於，等於，或大於半徑而定。

§ 73. 弦與圓心的關係

命題 35. 定理

由圓心到弦所作的垂線必平分弦。

逆定理



通過圓心的直線若是平分弦，則該直線垂直於弦。

假設 ABC 是以 O 爲心的圓，AB 爲已知的弦，由 O 作 $OD\perp AB$。

求證 D 是 AB 的中點。

證明

敍述	理由
1. 連結 OA, OB.	1. 直線公理
2. 在直角三角形 ODA 及 ODB 內	2. 題設 $OD\perp AB$
3. $\because$ $OA=OB$	3. 同圓的半徑相等
4. $OD=OD$	4. 恆等
5. $\therefore$ $\triangle ODA\equiv\triangle ODB$	5. 弦腰＝弦腰
6. $\therefore$ $AD=BD$	6. 全等形的相應部
卽 D 是 AB 的中點	

逆定理：　假設　OD 平分弦 AB 於 D 點。

求證　$OD \perp AB$.

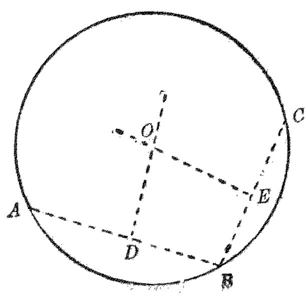
證明

敍述	理由
1.　連結 OA, OB	1.　直線公理
2.　$\because$　$OA = OB$	2.　同圓的半徑相等
3.　$OD = OD$	3.　恆等
4.　$AD = DB$	4.　題設 OD 平分 AB
5.　$\therefore$　$\triangle ADO \equiv \triangle BDO$	5.　各邊＝各邊
6.　$\angle ADO = \angle BDO$ 即 ADO 爲直角	6.　全等形的相應部
7.　$\therefore$　$OD \perp AB$	7.　垂線定義

系　弦的垂直平分線通過圓心。

命題 36.　定理

通過不同在直線上的三點可以作一個圓，但是祇能作一個。



假設　A, B, C 是已知的三點，這三點不同在一直線上。

求證　通過 A, B, C 可以作一個圓，但是祇能作一個。

證明

敍述	理由
1. 連結 AB, BC	1. 直線公理
2. 作 AB 的垂直平分線 OD, 則 OD 上面各點離 A, B 等距離	2. §57 命題 4 系 2
3. 作 BC 的垂直平分線 OE, 則 OE 上面各點離 B, C 等距離	3. 同上
4. 假設 OD 與 OE 的交點是 O	4. 題設 AB 與 BC 不同在一直線上，所以 OD 與 OE 不平行
5. $\therefore$ O 點離 A, B, C 等距離	5. 由敍述 2, 3, 卽得
6. 以 O 爲圓心，以 OA 爲半徑可作一圓	6. 畫圓公理
7. 但是離 A, B, C 等距離的點祇有一點 O, 所以通過 A, B, C 祇有一個圓	7. OD 與 OE 相交祇有一點

系 1. 通過三點的圓，他的大小與位置就由這三點決定。

系 2. 兩圓相交不能有三點，如若有三點，這兩圓就相合。

習　題

1. 一條直線祇兩個同心圓所截得的兩線段相等，試證明之。

2. 假設 A, B 是兩圓的心，C, D 是兩圓的交點，求證連結圓心 A, B 的直線是公弦 CD 的垂直平分線。

3. 假設 AB, AC 是圓內相等的兩弦，求證 BAC 角的平分線通過圓心。

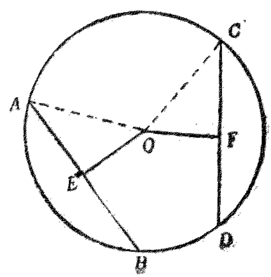
4. 用什麼理由可以說明外接於三角形的圓祇有一個？

5. 已知兩線段的長各為 r 及 c，以 r 為半徑，以 c 為弦作一圓；幷討論下列各情形：

(1)　$r<\frac{1}{2}c$,　　(2)　$r=\frac{1}{2}c$,　　(3)　$r>\frac{1}{2}c$.

6. 已知一線段 c 及一點 p，以 c 為弦通過 p 點作圓，問 p 與 c 在什麼關係時候，這個圓就不能作？

命題 37.　定理



在同圓或等圓裏，等弦離圓心的距離相等。逆理：在同圓或等圓裏，離圓心距離相等的弦就是等弦。

假設　AB, CD 是已知圓 O 的兩弦，設 $AB=CD$，由圓心 O 作 $OE\perp AB$, $OF\perp CD$。

求證 $OE=OF$。

證明

敍述	理由
1. 連結 OA, OC	1. 直線公理
2. 在直角三角形 OEA 及 OFC 內	2. 題設 $OE\perp CD$, $OF\perp AB$
3. ∵ $OA=OC$	3. 同圓的半徑相等
4. $AE=CF$	4. 命題 35, F, E 是 AB, CD 的中點；題設 $AB=CD$
5. ∴ $\triangle OEA\equiv\triangle OFC$	5. 弦腰=弦腰
6. ∴ $OE=OF$	6. 全等形的相應部

逆理：假設 $OE\perp AB$, $OF\perp CD$, $OE=OF$

求證 $AB=CD$

證明

敍述	理由
1. 連結 OA, OC	1. 直線公理
2. 在直角三角形 OAE, OCF 內	2. 題設 $OE\perp AB$, $OF\perp CD$.
3. ∵ $OA=OC$	3. 同圓的半徑相等
4. $OE=OF$	4. 題設
5. ∴ $\triangle OAE\equiv\triangle OCF$	5. 弦腰=弦腰
6. ∴ $AE=CF$	6. 全等形的相應部
7. ∴ $2AE=2CF$	7. 乘法公理
8. 但 $2AE=AB$, $2CF=CD$	8. 命題 35
9. ∴ $AB=CD$	9. 代換公理

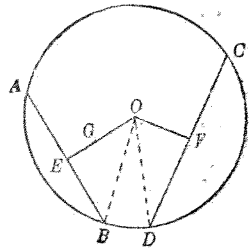
命理 38.　定理

在同圓或等圓裏,離圓心近的弦大於離圓心遠的弦。逆理:在同圓或等圓裏,大弦離心近,小弦離心遠。

假設　$OE\perp AB$, $OF\perp CD$,

$OE>OF$

求證　$AB<CD$



證明

敍述	理由
1. 連結 OB, OD	1. 直線公理
2. OEB 及 ODF 都是直角三角形	2. 題設　$OE\perp AB$, $OF\perp CD$
3. 在 OE 上面取一點 G, 令 $OG=OF$	3. 題設　$OE>OF$
4. 於是 $\overline{OB}^2=(\overline{OG}+\overline{GE})^2+\overline{BE}^2=\overline{OG}^2+2\overline{OG}\cdot\overline{GE}+\overline{GE}^2+\overline{BE}^2$	4. 商高定理
5. $\overline{OD}^2=\overline{OF}^2+\overline{DF}^2$	5. 同上
6. 但是　$OB=OD$	6. 同圓的半徑相等

7. $\therefore\ \overline{OG}^2+2\overline{OG}\cdot\overline{GE}+\overline{GE}^2+\overline{BE}^2=\overline{OF}^2+\overline{DF}^2$	7. 代換公理
8. $\because\ OG=OF$	8. 作圖
9. $\therefore\ 2\overline{OG}\cdot\overline{GE}+\overline{GE}^2+\overline{BE}^2=\overline{DF}^2$	9. 減法公理
10. $\therefore\ BE<DF$	10. 部份公理
11. $\therefore\ 2BE<2DF$	11. 不等量與等量的乘除公理
12. 但 $2BE=AB$ $2DF=CD$	12. 題設 $OE\perp AB$, $OF\perp CD$ 命理 35
13. $\therefore\ AB<CD$	13. 代換公理

逆理： 假設 $OE\perp AB$，$OF\perp CD$，

$AB<CD$

求證 $OE>OF$

（由學生證明）

習題

1. 連結兩弦交點與圓心的直線如若平分兩弦所夾的角，於是兩弦相等，試證明之。

2. 在同圓內，兩個等弦相交，其中一弦被交點所截得的兩線段各等於其他一弦被交點所截的兩線段。

3. 假設 O 是圓心，A 是圓內任意一點，試證明通過 A 點的諸弦以能與 OA 垂直的一弦為最短。

4. 在已知圓上畫一條弦，使該弦等於已知線段，且與已知線段平行。

5. 以 5 $cm.$ 長的線段做半徑作一圓，在該圓內作 3 $cm.$ 長的許多等弦，證明這些等弦的中點都在一個圓周上面。

6. 假設 AB, XY 都是已知圓的弦，如若 XY 的中點在 AB 上面，問 AB 是否大於 XY？

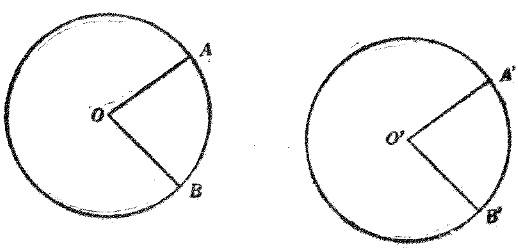
§ 74. 圓心角與弧的關係

命題 39. 定理

在同圓或等圓裏，等圓心角所對的弧相等 逆理：等弧所對的圓心角相等。

假設　O, O' 是已知的等圓，$\angle AOB = \angle A'O'B'$。

求證　$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$。



證明

敍述	理由
1. 把 O 圓放在 O' 圓上面，使 OA 與 $O'A'$ 相合	1. 移形公理；等圓的半徑相等
2. 於是 OB 落在 $O'B'$ 上面	2. 題設 $\angle AOB=\angle A'O'B'$
3. B 與 B' 相合	3. 等圓的半徑相等
4. $\therefore$ $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{A'B'}$ 相合 即 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$	4. 同上

逆理： 假設 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，求證 $\angle AOB=\angle A'O'B'$。

證明

敍述	理由
1. 把 O 圓放在 O' 圓上面使他相合	1. 移形公理；題設 O 與 O' 是等圓
2. 幷且使 A 與 A' 相合，B 與 B' 相合	2. 題設 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$
3. 於是 OA 與 $O'A'$ 相合，OB 與 $O'B'$ 相合 即 $\angle AOB=\angle A'O'B'$	3. 直線公理

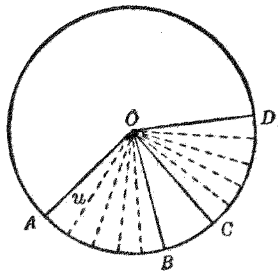
系 在同圓或等圓裏，兩個不相等的圓心角，大的所對的弧大於小的所對的弧，逆理也眞（用疊合法證明）。

命題 40.　定理

在同圓或等圓裏，兩圓心角的比等於所對兩弧的比。

假設　$\angle AOB$ 與 $\angle A'OB'$ 是同圓或等圓的圓心角，所對的弧是 AB, $A'B'$。

求證　$\dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}$

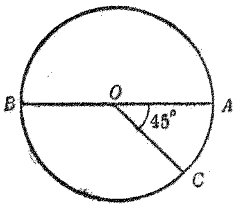


證明

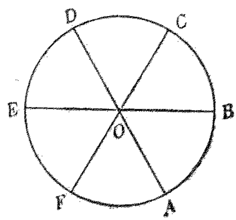
敍述	理由
1. 設 $\angle AOB$ 是單位角 u 的 m 倍，即 $\angle AOB=m\cdot u$。又 $\angle A'O'B'$ 是單位角的 n 倍，即 $\angle A'O'B'=nu$	1. 假設 $\angle AOB$ 與 $\angle A'O'B'$ 有一個公共的單位 u 角，至於沒有公共單位的兩個量的比，因限於程度略不討論，但是對於命題的眞，不發生影響。
2. $\therefore\ \dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\dfrac{m\cdot u}{n\cdot u}=\dfrac{m}{n}$	2. 除法公理
3. $\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{u}$，$\overset{\frown}{A'B'}=n\overset{\frown}{u}$	3. 由命題 39，就知道 m 個等角對 m 個等弧
4. $\therefore\ \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}=\dfrac{m\overset{\frown}{u}}{n\overset{\frown}{u}}=\dfrac{m}{n}$	4. 除法公理
5. $\therefore\ \dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}$	5. 代換公理

系　圓心角可以用他所對的弧度量(令 $\angle A'O'B$ 是角的單位卽得)。

習題

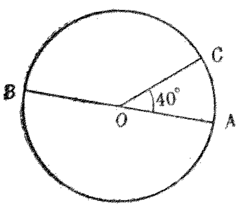


1.　左圖中，$\angle AOC=45°$，AB 是直徑，問 $\angle AOC$ 與 $\angle BOC$ 的比是多少？又 $\overset{\frown}{CA}$ 與 $\overset{\frown}{BC}$ 的比是多少？

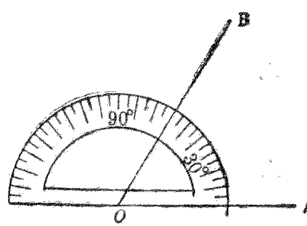


2.　右圖：$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FA}$，問各圓心角是若干度？問 $\overset{\frown}{AB}$ 與圓周的比是多少？

3.　兩個等圓相交，兩交點間的劣弧相等。



4.　假設 AB 是直徑，$\angle AOC=40°$，問 $\angle AOC$ 與 $\angle COB$ 的比是多少？又 $\overset{\frown}{AC}$ 與 $\overset{\frown}{CB}$ 的比是多少？



5.　要量 AOB 角，祇要使量角器如右圖位置放好，使 $\angle AOB$ 變爲圓心角，并看其一邊 OB 對於量角器

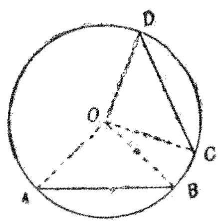
上所指的度數，即得 $\angle AOB$ 的度數。問這是什麼道理？

§75.　角的測度　由命題 39，40 及上面習題 5，可知無論圓的大小如何，角的度數與弧的度數總是相同的。我們把環繞一點的周角分為 360 等分，無論所畫的圓的大小如何，圓周也分為 360 等分。所以圓心角與弧雖然是不同的兩個東西，但是圓心角可以由他所對的弧度量，這猶如牛與牛頭，雖然是兩件事，但是每牛祇有一頭，牛的隻數，可以由牛頭的多少來度量，把幾隻牛說為幾頭牛。這也猶如桌上的飯碗與人雖然是兩件事，但是要知道這一桌吃飯的人數，祇要看這一桌飯碗的個數就成了（或知道筷子的雙數也成）。

§76.　弧與弦的關係　圓心角與弧的關係已在 §74 講過，現在講弧與弦的關係。

命題 41.　定理

在同圓或等圓裏，等弧的弦相等。逆理：等弦的弧相等。



假設　$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

求證　$\overline{AB} = \overline{CD}$

證明

敍述	理由
1. 連結 OA, OB, OC, OD	1. 直線公理
2. ∵ $OA=OC$ $OB=OD$	2. 同圓的半徑相等
3. $\angle AOB=\angle COD$	3. 題設 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ 命題 39
4. ∴ $\triangle AOB\equiv\triangle COD$	4. 邊角邊＝邊角邊
5. ∴ $\overline{AB}=\overline{CD}$	5. 全等形的相應部

逆理：　假設 $\overline{AB}=\overline{CD}$，求證 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

（由學生證明）

系 1.　在同圓或等圓裏，兩個不相等的弧，大弧所對的弦大於小弧所對的弦。

系 2.　在同圓或等圓裏，兩條不相等的弦，大弦所對的劣弧大於小弦所對的劣弧。

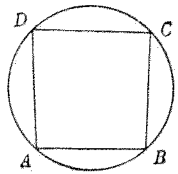
習　　題

1.　在同圓或等圓內，等圓心角所對的弦相等。

2.　在同圓或等圓內，等弦所對的圓心角相等。

3.　假設　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DA}$,

求證　$ABCD$ 是正方形。



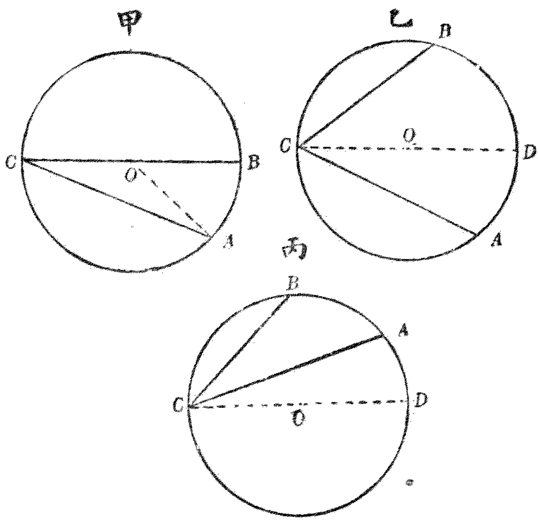
§ 77.　圓周角的測度

命題 42.　定理

圓周角可以用他所對的弧的一半測度之。

假設　ACB 是圓周角，因該圓周角與圓心的位置關係分為三款。(一)如甲圖圓心在圓周角的一邊上，(二)如乙圖圓心在圓周角內，(三)如丙圖圓心在圓周角之外。

求證　$\angle ACB$ 可以用 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ 測度。



證明

款一、圓心在圓周角的一邊上

敍述	理由
1. 連結 OA	1. 直線公理
2. $OA=OC$	2. 同圓的半徑相等
3. $\angle ACO=\angle CAO$	3. 等腰三角形的底角相等
4. $\angle AOB=\angle ACO+\angle CAO$	4. △的外角等於兩內對角的和
5. $\therefore\ \angle AOB=2\angle ACO=2\angle ACB$	5. 代換公理
6. $\therefore\ \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$	6. 除法公理
7. 但 $\angle AOB$ 可以用 $\overset{\frown}{AB}$ 測度	7. §75
8. $\therefore\ \angle ACB$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ 測度	8. 代換公理

款二、圓心在圓周角內

連結 CO，作直徑 CD，

於是 $\angle ACD$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ 測度　　(款一)

$\angle DCB$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{DB}$ 測度　　(款一)

$\therefore\quad \angle ACD+\angle DCB$ 以$\frac{1}{2}\left(\widehat{AD}+\widehat{DB}\right)$測度。　（公理）

卽　$\angle ACB$ 以$\frac{1}{2}\widehat{AB}$測度。

款三、圓心在圓周角外

作直徑 CD

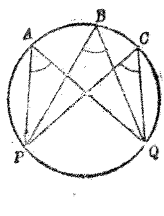
於是 $\angle ACD$ 以$\frac{1}{2}\widehat{DA}$測度，

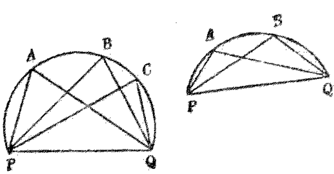
$\angle DCB$ 以$\frac{1}{2}\widehat{DB}$測度，

$\therefore\quad \angle DCB-\angle DCA$ 以$\frac{1}{2}\left(\widehat{DB}-\widehat{DA}\right)$測度。

卽　$\angle ACB$ 以$\frac{1}{2}\widehat{AB}$測度。

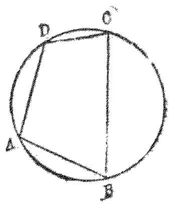
系 1.　在同圓或等圓內，等弧所對的圓周角相等。逆理：等圓周角所對的弧相等。





系 2.　同在弓形內的圓周角都是相等的。

系 3.　同在半圓內的圓周角都是直角。



系 4. 內接於圓的四邊形,他的對角互為補角。

習題

1. 上面命題 42 甲圖,若 $\angle ACB=42°$, 問 $\overset{\frown}{CA}$ 是多少度? 若 $\overset{\frown}{CA}=3\overset{\frown}{AB}$, 問 $\angle ACB$ 是多少度?

2. 上面命題 42 乙圖,若 $\overset{\frown}{CA}$ 等於圓周四分之一, $\overset{\frown}{BC}$ 等於圓周三分之一,問 $\angle ACB$ 是多少度?

3. 上面丙圖,若 B 是 $\overset{\frown}{CD}$ 的中點, A 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中點, 問 $\angle ACB$ 是多少度?

4. 假設 $ABCD$ 是內接於圓的四邊形, 若 $\overset{\frown}{AB}=82°$, $\overset{\frown}{BC}=98°$, $\overset{\frown}{CD}=79°$,問這個四邊形各角的度數是多少?

5. 在小於半圓內的圓周角是鈍角。

6. 在大於半圓內的圓周角是銳角。

7. 同在一個弓形內的圓周角的平分線,都相交於一點。

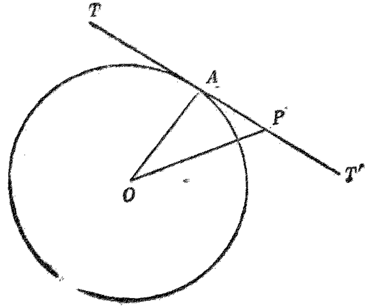
§ 78. 圓的切線

命題 43. 定理

垂直於半徑外端的直線是圓的切線。

假設　OA 是⊙的半徑，直線 TT' 與 OA 垂直於 A 點。

求證　TT' 是圓的切線。



證明

敍述	理由
1. 在 TT' 上面任意取一點 P 與圓心 O 連結	1. 取 P 點的目的，就是要證明 TT' 祇有一點 A 在圓周上面，其他任何點都在圓外。
2. ∵ $OP>OA$	2. 由直線外一點到直線作線段以垂線爲最短。
3. ∴ P 在圓外	3. 圓的公理 §72
4. ∴ TT' 是圓的切線	4. 切線定義

系 1.　圓的切線與圓的半徑垂直(逆定理)。

系 2.　與圓的切線垂直於切點的直線必通過圓心。

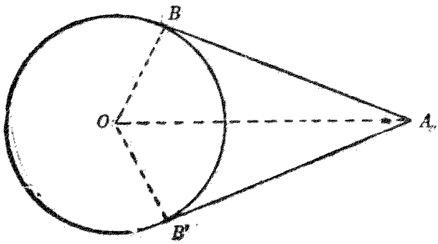
系 3.　由圓心到圓的切線作垂線必通過切點。

系 4.　圓周上一點祇能作一條切線。

定義　由圓外一點 A 到圓上作切線，與圓相切於 B 點，於是 AB 的長叫做切線的長。

命題 44.　定理

由圓外一點所引的兩切線的長相等。



假設　⊙ 是已知圓，由圓外一點 A 到圓上作切線 AB, AB'。

求證　$AB=AB'$

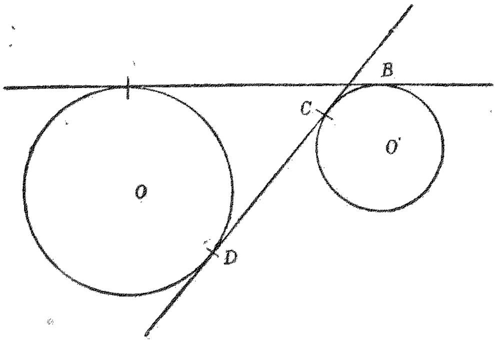
證明

敍述	理由
1.　連結 OA, OB, OB'	1.　直線公理
2.　$\angle OBA$ 及 $\angle OB'A$ 都是直角	2.　命題 43 系 1
3.　在直角三角形 OBA 及 $OB'A$ 內 $\because OB=OB'$	3.　同圓的半徑相等
4.　$OA=OA$	4.　恆等
5.　$\therefore \triangle OBA \equiv \triangle OB'A$	5.　弦腰＝弦腰
6.　$\therefore AB=AB'$	6.　全等形的相應部

系 1.　連結圓心與圓外一點 A 的直線必平分圓外一點

所引兩切線所夾的角(即 $\angle OAB = \angle OAB'$)。

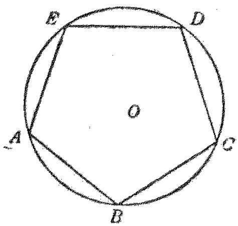
§ 79.　公切線　同時與兩個圓相切的直線叫做兩圓的公切線。如若兩圓同在公切線的一側,這條公切線就叫做兩圓的外

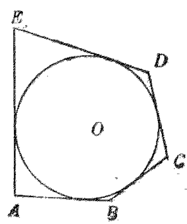


切線。如若兩圓分在公切線的兩側,這條公切線就叫做兩圓的內切線。

以公切線的兩切點爲端的線段叫做或公切線的長。

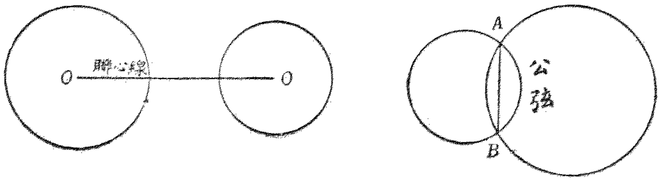
以弦爲邊的多邊形叫做內接多邊形。



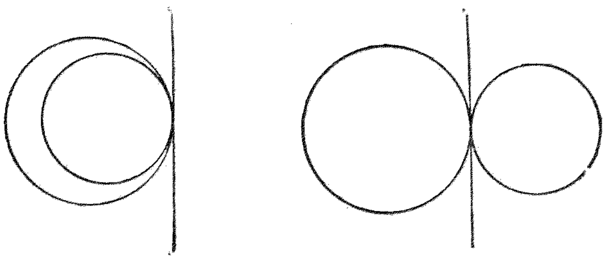


以圓的切線爲邊的多邊形叫做外切多邊形。

§80. 聯心線與公弦　聯結兩圓圓心的線段如 OO 叫做聯心線。連結兩圓交點的線段如 AB 叫做公弦。



§81. 相切圓　兩個圓,同時和一直線相切於一點,如下面的兩圓,這兩個圓叫做相切圓。



習　題

1. 兩圓內切線的長相等,試證明之。

2. 兩圓外切線的長相等,試證明之。

3. 連結圓外一點所引兩切線的切點, 所得的弦必與兩切線成等角,試證明之。

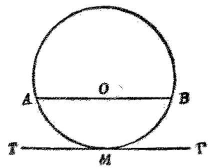
4. 在圓的外切四邊形中,對邊和等於對邊和。

5．　假設 $ABCDEF$ 是圓的外切六邊形，求證：

$$AB+CD+EF=BC+DE+FA。$$

6．　圓的外切直角三角形的弦長等於兩腰的和再加圓的直徑的長。

7．　假設　AB 是已知圓的弦；倘若 TT' 與圓相切於 $\overset{\frown}{AB}$ 的中點　M。求證　$TT'//AB$。



8．　以直徑兩端爲切點的切線必互相平行。試證明之。

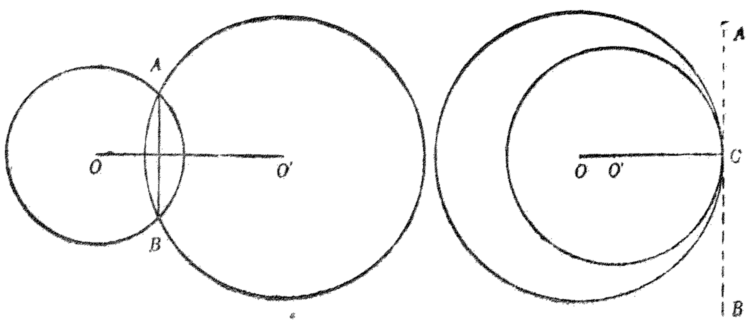
9　內切於等邊三角形的圓的半徑等於三角形高的三分之一，試證明之。

§82．　關於兩圓相交及相切的定理

命題 45．　定理

兩個相交的圓的聯心線是公弦的垂直平分線。

假設以 O, O' 爲圓心的兩圓相交於 A, B。



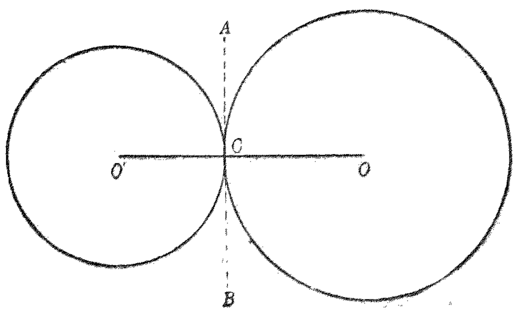
求證 OO' 是 AB 的垂直平分線。

證明

敍述	理由
1. O 點離 A, B 等距離	1. …………
2. O' 點離 A, B 等距離	2. …………
3. $\therefore$ OO' 是 AB 的垂直平分線	3. …………

命題 46. 定理

兩個相切的圓的聯心線必通過切點。



假設 OO' 是兩圓的聯心線，兩圓相切於 C 點。

求證 OO' 通過 C 點。

證明 在切點 C，作公切線 AB，并在 C 點作 AB 的垂線，於是這垂線必通過 O 及 O'。(何故?)

$\therefore$ OO' 必通過 C。(何故?)

習　題

1. 倘若兩圓聯心線的長是合於下列各項之一。問兩圓的位置如何?

(a) 等於兩半徑的和;

(b) 大於兩半徑的和;

(c) 小於兩半徑的和,但是大於兩半徑的差;

(d) 等於兩半徑的差;

(e) 小於兩半徑的差;

(f) 等於零。

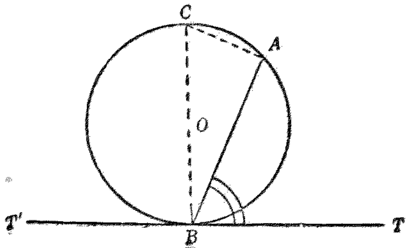
2. 由兩圓公切線上任意一點到兩圓上各作一切線,求證所作切線的長相等。

3. 圓的外切多邊形各角的平分線必會合於一點。

§ 83. 再論角的測度　把一個角看作是某圓的圓心角或圓周角,然後以所夾的弧度量他的大小,這在前面已經講過,現在再把一個角看作是弦與切線所夾的角(命題 47),或圓內兩弦所夾的角(命題 48),或由圓外一點所引兩割線所夾的角(命題 49),研究如下。

命題 47.　**定理**

切線與弦所夾的角可以用他所夾的弧的一半度量。



假設 AB 是 O 圓的弦，$T'T$ 與圓相切於 B 點。

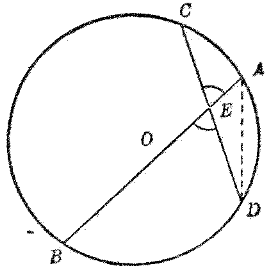
求證 $\angle ABT$ 可以用 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BA}$ 度量。

證明

敍述	理由
1. 作直徑 BC 及弦 CA	1. …………………………
2. $\angle BAC$ 是直角	2. …………………………
3. $\angle CBT$ 也是直角	3. …………………………
4. ∵ $\angle ACB$ 是 $\angle ABC$ 的餘角	4. …………………………
5. $\angle ABT$ 是 $\angle ABC$ 的餘角	5. …………………………
6. ∴ $\angle ACB = \angle ABT$	6. …………………………
7. 現在 $\angle ACB$ 可以用 $\overset{\frown}{BA}$ 量度	7. …………………………
8. 所以 $\angle ABT$ 可以用 $\overset{\frown}{BA}$ 度量	8. 等角有相同的度量

命題 48. 定理

圓內兩弦所夾的角可以用他所夾的兩弧和的一半度量。



假設　AB, CD 是 O 圓的弦，相交於 E 點。

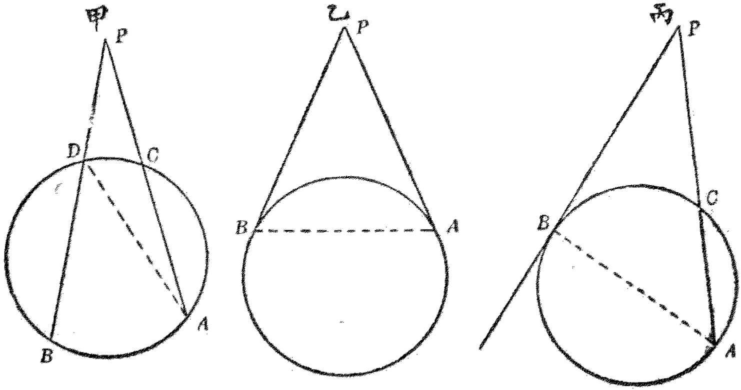
求證　$\angle AEC$ 可以用 $\frac{1}{2}\left(\overparen{AC}+\overparen{BD}\right)$ 度量。

證明

敍述	理由
1. 聯結 AD	1. …………………………
2. $\because$ $\angle BAD$ 可以用 $\frac{1}{2}\overparen{BD}$ 度量，$\angle ADC$ 可以用 $\frac{1}{2}\overparen{AC}$ 度量	2. …………………………
3 $\therefore$ $\angle BAD+\angle ADC$ 可以用 $\frac{1}{2}\left(\overparen{AC}+\overparen{BD}\right)$ 度量	3. …………………………
4. 但是 $\angle BAD+\angle ADC = \angle AEC$	4. …………………………
5. $\therefore$ $\angle AEC$ 可以用 $\frac{1}{2}\left(\overparen{AC}+\overparen{BD}\right)$ 度量	5. …………………………

命題 49.　定理

由圓外一點所引的兩割線，或兩切線，或一割線一切線所夾的角可以用他所夾兩弧差的一半度量。



款一（甲圖）

假設　PA, PB 是圓的割線。

求證　$\angle APB$ 可以用 $\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BA}-\overset{\frown}{CD}\right)$ 度量。

證明

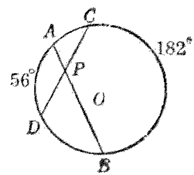
敍述	理由
1. 連結 AD	1. …………………………
2. $\angle APB=\angle ADB-\angle CAD$	2. 三角形的外角等於……… 減法公理
3. 但 $\angle ADB$ 可以用 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BA}$ 度量， $\angle CAD$ 可以用 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$ 度量	3. …………………………
4. 所以 $\angle APB$ 可以用 $\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BA}-\overset{\frown}{CD}\right)$ 度量	4. 代換公理

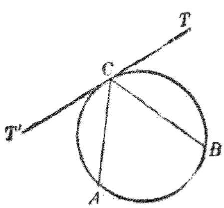
款二及款三由學生證明。

（注意）　命題 40 的系以及命題 42, 47, 48, 49 都是規定如何度量一個角的方法。此等方法雖然隨角點在圓內，圓上圓外而不同。但是歸納起來祇有一個方法，卽『一個角可以用他與任意圓所截兩個夾弧和的一半度量』。用這個方法時候，附帶的有一個約定：『從角點看夾弧，凸出的爲正，凹入的爲負。』卽『從角點看夾弧，凸正凹負』。

習　題

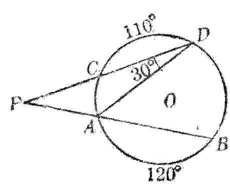
1.　假設 $\overset{\frown}{BC}=182°$, $\overset{\frown}{AD}=56°$, 問 APC 角是多少度？

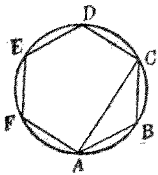




2.　假設 $T'T$ 與圓相切於 C 點，$\overline{AC}=\overline{BC}$, $\overset{\frown}{BC}=116°$, 問 ACB 角是多少度？又 $\angle ACT'$ 及 $\angle BCT$ 是多少度？

3.　假設 PB, PD 是割線，$\overset{\frown}{DC}=110°$, $\overset{\frown}{AB}=120$, $\angle ADP=30°$, 問 $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{BD}$ 及 $\angle BPD$, $\angle BAD$ 是多少度？





4. 假設 $ABCDEF$ 是圓的內接正六邊形，問$\angle ABC$, $\angle CAB$, $\angle DAB$ 各若干度？

5. 延長內接四邊形的一邊所成的外角等於他的內對角。試證明之。

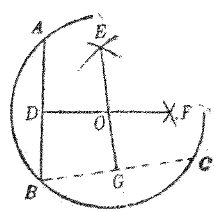
6. 除菱形外，沒有其他平行四邊形能外切於圓。

7. 直角三角形的內切圓的直徑等於斜邊與其他二邊和的差。

§84. 作圖題 解作圖題，每每假設圖已作出，尋求已知件與所求件的關係，然後決定作法。

命題 50. 作圖題

試求已知圓或圓弧的心。



假設 ABC 是已知的圓弧。

求作圓弧 ABC 的心。

作法 在圓弧上先作兩條弦 AB, BC, 再作 AB, BC 的垂直平分線 DF, GE。假設 DF 與 GE 的交點是 O, 於是 O 就是所求的心。

證明 DF 上面各點離 A, B 等距離，(何故?) GE 上面各點離 B, C 等距離，現在 O 點在 DF 及 GE 上面，所以 O 點離 A, B, C 等距離，但是通過 A, B, C 祇能作一圓，所以 O 點是已知圓弧的心。

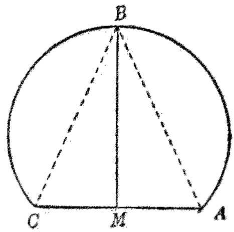
命題 51.　作圖題

分已知圓弧爲二等分。

假設　ABC 是已知的圓弧，

求分 ABC 爲二等分。

作法　連結 AC，作 AC 的垂直平分線 MB 交圓弧於 B 點，於是 $\overset{\frown}{AB}$ 等於 $\overset{\frown}{BC}$。

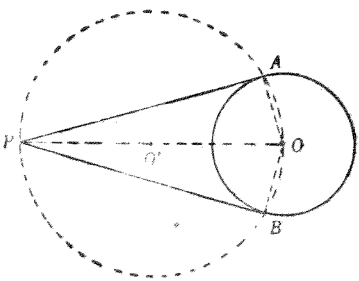


證明　連結 AB, CB, $\because$ $AB=CB$,

$\therefore$　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$。

命題 52.　作圖題

由圓外一點到已知圓作切線。



假設　P 是已知圓 O 外面的一點，

求作　自 P 至 O 圓的切線。

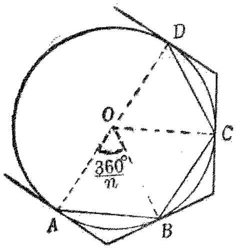
作法　聯結 PO，平分 PO 於 O' 點，以 O' 爲心，$O'O$ 爲半徑作一圓交已知圓於 A, B 兩點，聯結 PA, PB，於是 PA, PB 即所求的切線。

證明　聯結 AO, BO,　$\because$ $\angle OAP$ 及 OBP 是直角，

所以 $PA\perp OA$, $PB\perp OB$,　$\therefore$ PA, PB 與 O 圓相切。

命題 53. 作圖題

作正多邊形內接或外切於已知的圓。



假設 O 是已知的圓，

求作 n 邊的正多邊形。

分析　假設 AB, BC, CD……是內接正多邊形的邊，於是 $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$,……都等於$\frac{360^\circ}{n}$。

作法　在圓心 O 作一角 AOB 等於$\frac{360^\circ}{n}$，該角的兩邊交圓於 A, B, 用圓規，以 $\overline{AB}$ 爲半徑，分圓周爲 n 等分，聯結各分點，即得所求內接正多邊形。在各分點作切線，即得所求外切正多邊形。

習　題

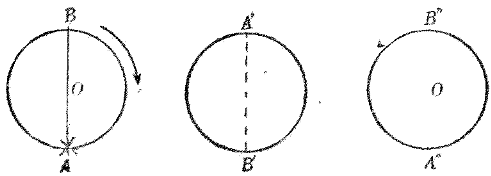
1. 已知圓的半徑爲 $4\ cm.$，作該圓的內接正六邊形及八邊形。

2. 已知圓的半徑爲 $3\ cm.$，作該圓的外切正六邊形及八邊形。

3. 求證內接正六邊形的面積等於外切正六邊形四分之三。

§ 85. 圓周與直徑的比　用圓規在厚紙上作一圓 O，（嘗

如在名片的紙上）測得直徑的長 AB,在 A 點作一記號“×”以剪得的圓 O 沿直線 $AB'A''$ 旋轉，旋轉開始時，圓與直線相切於 A 點，旋轉半周後圓與直線相切於 B'，旋轉一周後相切於 A''，



於是 AA'' 就是圓周的長。以尺量得圓周的長。倣此方法，作半徑大小不同的諸圓，可以求得

$$\frac{\text{圓周的長}}{\text{直徑的長}} \doteqdot \frac{22}{7} = 3.142857\cdots\cdots。$$

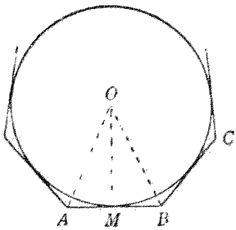
但是理論上圓周與直徑的比是無理數，也是寫不完的小數(但不是循環小數)，因此這個比常用希臘字母 π 來代表，在實用上，$\pi=3.1416$。假設圓周的長是 C，直徑的長是 $2r$，於是 $C=2\pi r$。

習　題

1.　假設有一條很細的絲線繞圓柱 20 轉，計長 75.4 寸，圓柱的直徑長 1.2 寸，求 π 的值。

2.　有一輛脚踏車，車輪的直徑 28 英寸，輪轉 400 轉，轉出路長 977 碼，問 π 的值是多少？

§ 86. 圓面積 假設 AB 是外切正多邊形一邊的長，外切正多邊形的邊數爲 n，圓的半徑爲 r，於是：

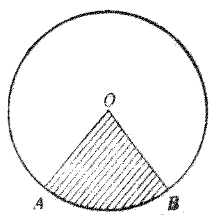


$$外切正多邊形的面 = n\triangle AOB$$
$$= n\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{OD}$$
$$= \frac{1}{2}n\overline{AB}\times r$$

這個等式，無論 n 是多大的數，都是成立的，當 n 逼近於無窮大時，$n\overline{AB}$ 就逼近於圓周 $2r\pi$。

$$\therefore\quad 圓面積 = \frac{1}{2}\times 2r\pi\times r = \pi r^2。$$

§ 87. 扇形面積 假設兩半徑所夾的角是 $1°$，於是所夾的弧就等於 $\frac{1}{360}\times$ 圓周。



因此所夾扇形的面積就等於 $\frac{1}{360}\times$ 圓面積，倘若 $\angle AOB$ 等於 D 度，於是

$$\widehat{AB} = \frac{D}{360}\times 圓周$$

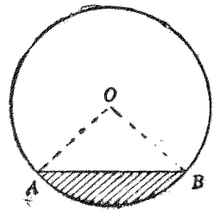
因此扇形 AOB 的面積 $= \frac{D}{360}\times$ 圓面積，

$$= \frac{D}{360}\times\frac{圓周}{2}\times 半徑 = \frac{1}{2}\widehat{AB}\times 半徑。$$

§ 88. 弓形面積 連結 OA, OB，即得

弓形面積＝扇形 AOB 面積 $-\triangle AOB$

$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\times$ 半徑 $-\triangle AOB$。



習　題

1. 已知圓的半徑爲 $4.5\ cm.$，求圓周的長，$m.m.$ 以下的數捨去不計。

2. 兩個同心圓所夾的環的面積等於一個圓的面積，這個圓的半徑等於自外圓至內圓所作切線的長，試證明之。

3. 地球近似球形，直徑約 8000 哩，問赤道有多少長？

4. 有一飛機繞赤道飛行一週，並保持 200 呎的高度，問所飛路程是多少哩？

5. 水桶的底上所受水的壓力每平方公寸 10 公斤，現在量得桶底的直徑長 45 $cm.$，問桶底的全壓力是多少？

第十二章　比例與相似形

§89. 比例　關於比，比例的定義及定理，曾在基本運算之練習裏面講過，也曾在代數裏面講過，所以這裏不再提了，最好，學者把代數所講的比例再複習一遍.其實，一個比例式

$$a/b=c/d \quad \text{或} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

不過是一個分數方程式而已，祇要學者懂得分數方程式運算的法則，比例式的運算也就一樣懂得了。下面有幾個習題，可以應用方程式的法則運算。

習　題

1. 已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，問應用什麼公理可以化爲$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$?

試用 $a=7$，$b=4$，$c=21$，$d=12$ 核驗之。

2. 已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，問怎樣可以化爲$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$?

試用 $a=5$，$b=7$，$c=25$，$d=35$ 核驗之。

3. 已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，問怎樣能化爲$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$?

試用 $a=7$，$b=4$，$c=21$，$d=12$ 核驗之。

4.　怎樣能把$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$化爲 $ad=bc$, 及 $ad=bc$ 化爲

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$。

5.　已知$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$,

證明　$b=\pm\sqrt{ac}$。

試用　$a=3$, $b=6$, $c=12$, 核驗之。

（注意）　本章所研究的線段，都不論方向，以後對於根號前的符號除特別聲明外，祇取正值，即 $b=\sqrt{ac}$。

§ 90.　無公度量　幾何學上所研究的比，如線段與線段的比，角與角的比，弧與弧的比，面積與面積的比，……似乎不是數的比，其實不然，譬如『在同圓或等圓裏面，兩圓心角的比等於所對的弧的比』，即：

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'OB'}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}$$

這在 § 74 命題 40 講過，就是假設 $\angle AOB$ 與 $\angle A'OB'$ 有一個公共的單位角 u, $\angle AOB=m\cdot u$. $\angle A'OB'=n\cdot u$. 又 $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{A'B'}$ 也有一個公共的單位弧，$\overset{\frown}{u}$, $\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{u}$, $\overset{\frown}{A'B'}=n\overset{\frown}{u}$, 所以上面的比例式還是表示數的關係。同樣假設線段 AB 與 BC 有一

個公共的單位，量得 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:8$;

又 $A'B'$ 與 $B'C'$ 也有一個公共的單位，量得 $A'B':B'C'=3:8$，即得：

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

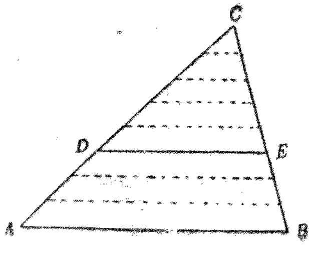
這也是表示四個線段的數量關係。

上面所舉的比例式，都是假設比的前後項是有公度量。其實前後項是無公度量，這種比例式也能成立，不過這種證法，比較繁瑣，所以本章命題的證法都把這一部分省略了。

§ 91. 三角形邊上的比例線段

命題 54. 定理

與三角形底邊平行的直線，如與兩腰相截，則所截線段成比例。



假設 ABC 是已知三角形，現在有一直線 $DE//AB$，并且與 AC, BC 相交於 D, E,

求證 $\frac{AD}{DC}=\frac{BE}{EC}$。

證明

敍述	理由
1. 假設 AD 是公度 u 的 m 倍，DC 是 u 的 n 倍	1. 因爲假設 AD, DC 是有公度量
2. 於是 $AD=m\cdot u$ $DC=n\cdot u$	2. 由上面 1
3. $\therefore\ \dfrac{AD}{DC}=\dfrac{m\cdot u}{n\cdot u}=\dfrac{m}{n}$	3. ……公理
4. 通過 AC 上面各分點作平行於 AB 的直線與 BC 相交	4. 平行線公理
5. 於是 BE, EC 各被平行線分爲 m, n 等分	5. ……………………………………
6. $\therefore\ \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{m}{n}$	6. 與上面 2, 3 同
7. $\therefore\ \dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BE}{EC}$	7. ……公理

系　$CD:CA=CE:CB$。

習　題

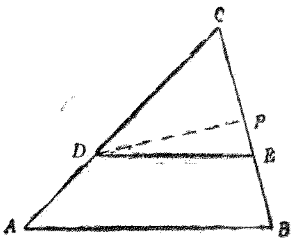
1. 若 $AD=3$ 寸，$DC=5$ 寸，$EC=35$寸，問 BE 的長是多少?

2. 若 $AC=7\frac{1}{2}$尺, $BC=\frac{21}{4}$, $BE=\frac{7}{4}$,問 AD, DC,及 EC 的長是多少?

3. 若 $AD=\frac{1}{4}AC$, $BC=\frac{31}{2}$尺,問 BE, EC 的長是多少?

命題 55. 逆定理

分三角形兩腰成比例的直線必平行於底邊。



假設 ABC 是已知三角形,直線 DE 截兩腰於 D, E 點, 并且

$$\frac{AD}{DC}=\frac{BE}{EC}。$$

求證 $DE//AB$。

證明

敍述	理由
1. $DE \not\parallel AB$ 或 $DE//AB$	1. 祇有這兩種情形
2. 若 $DE \not\parallel AB$,則過 D 可作 $DP//AB$	2. ………………公理
3. ∴ $\frac{AD}{DC}=\frac{BP}{PC}$	3. ………………………………………
4. 但是 $\frac{AD}{DC}=\frac{BE}{EC}$	4. 題設
5. ∴ $\frac{BP}{PC}=\frac{BE}{EC}$	5. ………………公理
6. $\frac{BP+PC}{PC}=\frac{BE+EC}{EC}$	6. 加 1 於 5 的比例式的兩邊通分即得

7. $\dfrac{BC}{PC}=\dfrac{BC}{EC}$	7. …………………………
8. 這個等式除 $PC=EC$ 外是不合理的	8. …………………………
9. 若 $PC=EC$, 則 DP 與 DE 相合	9. 若 $PC=EC$, 則 P 與 E 相合，再由直線公理 DP 與 DE 相合
10. $\therefore \quad DE//AB$	10. …………………………

系　若 $AC:AD=BC:BE$, 則 $DE//AB$。

習　題

1. 設 ABC 爲已知三角形，作 $XY//BC$, 同時 XY 與 AB, AC 的延長線相交於 X, Y。

   a. 若 $AB=4.5\,cm.$ $AC=3.5\,cm.$ $AX=7.2\,cm.$ 問 AY 的長是多少？

   b. 若 $AB=4$, $AX=11$, $AC=7$, 問 CY 是多少？

2. 連結梯形兩腰中點的線段平行於上下底。

3. 兩個三角形 ABC 與 DBC 的底同在直線 BC 上面，由 BC 上面任意一點 E 作 BA 的平行線及 BD 的平行線與 AC, DC 各交於 F, G。求證 $FG//AD$。

4. 一直線與 $\triangle ABC$ 各邊或各邊延長線相交於 D, E, F,

若該直線與 AB, AC 成等角，則 $BD:CD=BF:CE$，試證明之。

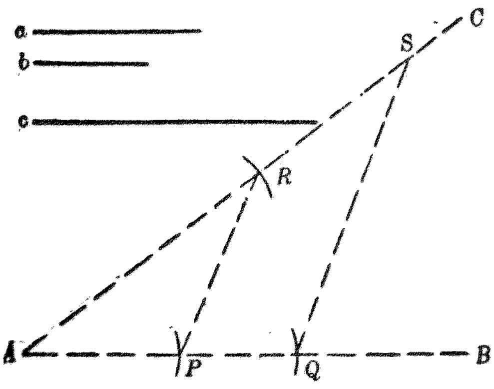
§ 92. 求比例第四項

命題 56. 作圖題

已知三線段 a, b, c, 求作 a, b, c 的第四項。

假設 a, b, c 三線段的長如下圖，

求作 線段 d, 使 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。



作法 任意作一角 BAC, 用圓規在 AB 上面截取 $AP=a$, $PQ=b$, 又在 AC 上面截取 $AR=C$, 通過 Q 點作 $QS//PR$, 於是 $RS=d$。

證明

敍述	理由
1. 在 $\triangle AQS$ 內得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	1. …………………………

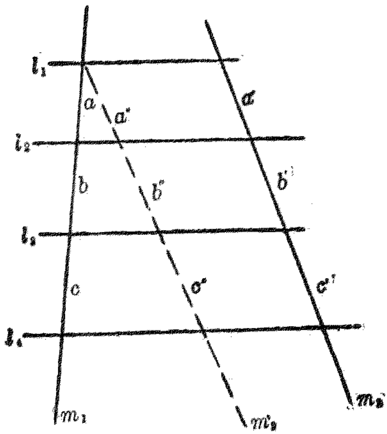
§ 93. 一組平行線所截的線段

命題 57. 定理

一組平行線與任意兩直線相截，其相應線段的比相等。

假設　l_1, l_2, l_3, l_4 ……… 是一組已知的平行線，這一組平行線與 m_1, m_2 兩直線所截得的線段各爲 $a, b, c,$………a', b', c'………。

求證　$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$……。



證明

敍述	理由
1. 由 l_1 與 m_1 的交點作 $m'_2//m_2$	1. ……………公理
2. 設 l_1, l_2, l_3…，截 m'_2 所得的線段爲 a'', b'', c'',…，於是 $a''=a', b''=b', c''=c'$,…	2. ………………………………………
3. ∴　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a''}{b''}=\dfrac{a'}{b'}$	3. 命題 55 $a''=a'$, $b''=b'$.
4. 即　$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$	4. 比項內項可以對換
5. 依同理 $\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$	5. 由 l_2 與 m_1 的交點作平行於 m'_2 的平行線
6 ∴　$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=$………	6. ………………………………………

習 題

1. **在上面圖裏：**

(i)若 $a=b=c$，而 $a'=4.5\,cm$。問 b'，c' 的長是多少？

(ii)若 $a=3\frac{1}{2}$ 寸，$b=3\frac{1}{4}$ 寸，$c=2$ 寸，$a'=5\frac{3}{4}$，

問 b'，c' 的長是多少？

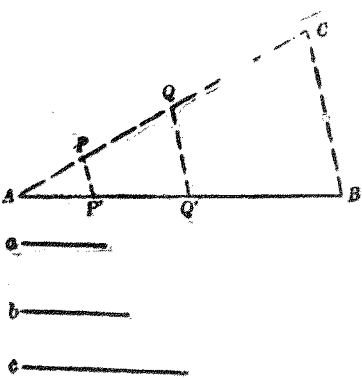
2. 設 a, b, c 為已知線段，求作線段其長為 $\frac{bc}{a}$。

3. 設 a, b 為已知線段，求作線段其長為 ab，又作一線段其長為 $\frac{a}{b}$。

§ 94. 作圖題

命題 58. 作圖題

截分已知線段成已知比。



假設　AB 及 a, b, c 都是已知線段。

求作　分 AB 為三分，使其成為　$a:b:c$。

作法　在 AB 的一端 A 任意作一角 BAC，在 AC 上面截取 $AP=a$，$PQ=b$，$QC=c$，

連結 BC, 通 Q, P 各作 $QQ'//CB$, $PP'//CB$, 分 AB 於 P', Q' 點，卽得 $AP':P'Q':Q'B=a:b:c$。

證明

（由學生自己證明）

習　題

1. 分已知線段爲 2, 4, 6 的比。
2. 分已知線段爲五等分。
3. 分已知線段爲 3, 7, 9 的比。
4. 已知矩形底邊的長爲 24 尺，高與底的比爲 $\frac{2}{3}$，試作此矩形。

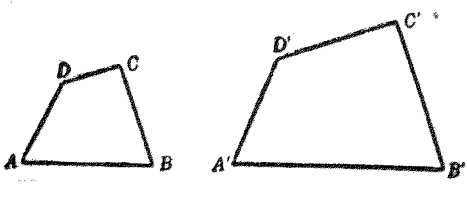
§ 95. 相似多邊形　相似多邊形，就是形狀相同的多邊形，但是這樣含糊的定義，在科學上是沒有價值的，所以我們要用下面的定義。

兩個多邊形，如若相當角相等，相當邊又成比例，就叫做相似多邊形。

『相似』或『相似於』的簡號爲 $\backsim$。譬如下面兩個相似四邊形：

$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$, 并且 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$。

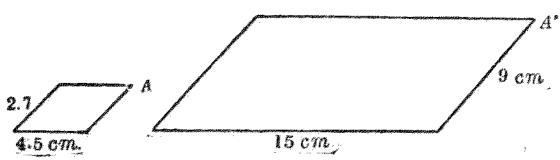
$\therefore\ ABCD \backsim A'B'C'D'$，讀爲『$ABCD$ 相似於 $A'B'C'D'$』。

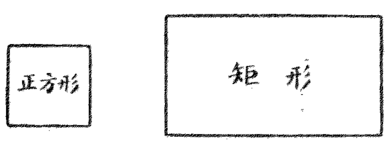


我們日常所用照相的放大，地圖的縮小，及比例圖，實物模型，都是應用相似形的例子。

習　題

1. 兩個平行四邊形如若有一角 $A=\angle A'$，並且各邊的長如圖所示，問這兩個平行四邊形是否相似？





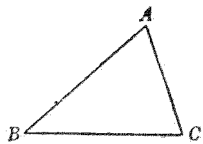
2. 問矩形與正方形能否相似？

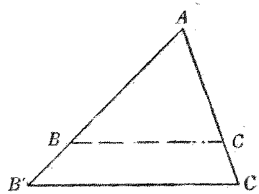
§ 96. 相似三角形的條件　由相似多邊形的定義，可知兩形相似，有兩個條件：(一)相當角相等。(二)相當邊成比例。但是三角形祗要有一個條件，其他一個就含在其中了。至於多邊形必

須這兩個條件同時成立，纔能相似。譬如矩形與正方形不能相似，就是因為他們缺少了一個條件。下面三個命題就是研究三角形相似的條件的：

命題 59.　定理

兩個三角形，祇要相當角相等，就是相似三角形。





假設 ABC 及 $A'B'C'$ 是已知三角形，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$。

求證　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

證明

敘述	理由
1.　把 $\triangle ABC$ 放在 $\triangle A'B'C'$ 上面，使 A 點與 A' 點相合，AC 落在 $A'C'$ 上面，於是 AB 落在 $A'B'$ 上面	1. $\begin{cases}\text{移形公理}\\ \text{題設 } \angle A=\angle A'\end{cases}$
2.　$\angle A'BC=\angle A'B'C'$	2. $\begin{cases}\angle ABC=\angle A'BC\\ \angle ABC=\angle A'B'C'\end{cases}$
3.　$\therefore$　$BC//B'C'$	3.　…………定義
4.　$\therefore$　$\dfrac{A'B}{A'B'}=\dfrac{A'C}{A'C'}$	4.　命題 54 系

5. 即 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$	5 $\begin{cases} A'B=AB, \\ A'C=AC \end{cases}$
6. 依同樣方法使$\angle B$與$\angle B'$相合,得 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$	6. 由上面的1至5
7. $\therefore$ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$	7. 代換公理
8. $\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$	8. 相當角相等，相當邊成比例

系 1. 兩個三角形祇要有兩個相當角相等,就是相似三角形。

系 2. 兩個直角三角形祇要有一個銳角相等,就是相似形。

系 3. 平行於三角形一邊的直線與三角形其他兩邊所成的三角形相似於原三角形。

習　題

1. 由直角三角形的直角頂到斜邊作垂線所得的兩個三角形與原直角三角形相似。試證明之。

2. 由直角三角形的直角頂到斜邊所作的垂線是斜邊被

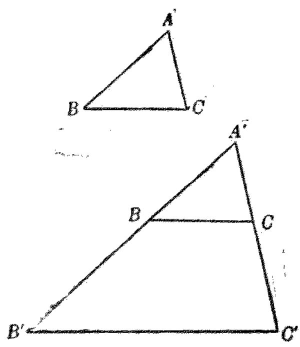
垂足所分兩線段的比例中項。試證明之。

3. 由圓周到直徑所作的垂線是直徑被垂足所分兩線段的比例中項。試證明之。

4. 設 a, b 是已知線段的長，求作 a, b 的比例中項。

命題 60. 定理

兩個三角形祇要一角彼此相等，并且角的夾邊成比例，就是相似三角形。



假設　ABC 及 $A'B'C'$ 是已知的兩個三角形， $\angle A=\angle A'$，

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}。$$

求證　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

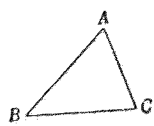
證明

敍述	理由
1. 把 $\triangle ABC$ 放在 $\triangle A'B'C'$ 上面，使 A 點與 A' 點相合，AB 落在 $A'B'$ 上面，AC 落在 $A'C'$ 上面	1. ……………公理 題 $\angle A=\angle A'$

2. $\because$ $\dfrac{A'B}{A'B'}=\dfrac{A'C}{A'C'}$	2. 題設 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$ $AB=A'B$, $AC=A'C$.
3. $\therefore \dfrac{A'B}{A'B'-A'B}=\dfrac{A'C}{A'C'-A'C}$ 即: $\dfrac{A'B}{BB'}=\dfrac{A'C}{CC'}$	3. $\dfrac{A'B'}{A'B}=\dfrac{A'C'}{A'C}$, 兩邊減去1, 再把前後項對調。
4. $\therefore$ $BC//B'C'$	4. …………………………………
5. $\therefore$ $\angle A'BC=\angle A'B'C'$	5. …………………………………
6. $\therefore$ $\angle ABC=\angle A'B'C'$	6. …………公理
7. $\therefore$ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$	7. $\because$ $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$

命題 61. 定理

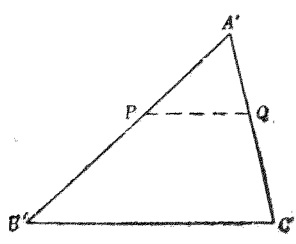
兩個三角形祇要相當邊成比例就是相似三角形。



假設 ABC 及 $A'B'C'$ 是已知的兩三角形,

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}。$$

求證 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$。



證明

敍述	理由
1. 在 $A'B'$ 上面截取 $A'P=AB$, 又在 $A'C'$ 上面截取 $A'Q=AC$.	1. 用圓規可作一線段等於他線段
2. 連結 PQ	2. ....公理
3. ∵ $\frac{A'P}{A'B'}=\frac{A'Q}{A'C'}$	3. 題設 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$; 作圖 $AB=A'P$, $AC=A'Q$
4. ∴ $PQ//B'C'$	4. 命題 55 系
5. ∴ $\triangle A'PQ\backsim\triangle A'B'C'$	5. 命題 59 系 3
6. ∴ $\frac{PQ}{B'C'}=\frac{QA'}{C'A'}=\frac{CA}{C'A'}$	6. 相似△相當邊成比例; $QA'=CA$
7. 但 $\frac{CA}{C'A'}=\frac{BC}{B'C'}$	7. 題設
8. ∴ $\frac{PQ}{B'C'}=\frac{BC}{B'C'}$	8. 由 6 及 7; ....公理
9. ∴ $PQ=BC$	9. 兩個相等的分數，如若分母相等,分子也相等
10. ∴ $\triangle ABC\equiv\triangle A'PQ$	10. 各邊＝各邊
11. ∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$	11. 把$\triangle A'PQ$代入上面的 5

習題

1. 兩個等腰三角形祇要他的頂相等，就是相似三角形。

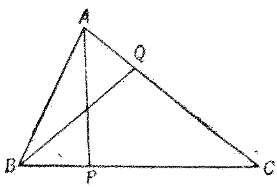
2. 兩個三角形的各邊，如若彼此平行，就是相似三角形。

3. 兩個三角形的各邊，如若彼此垂直，就是相似三角形。

4. 兩個相似三角形，相當的高的比等於相當邊的比。

5. 兩個相似三角形，相當的中線的比等於相當邊的比。

6. 兩個相似三角形，相當角的平分線的比等於相當邊的比。



假設　ABC 是已知三角形，

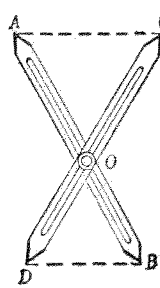
$AP \perp BC$, $BQ \perp AC$。

求證　$\frac{AP}{BQ}=\frac{AC}{BC}$。

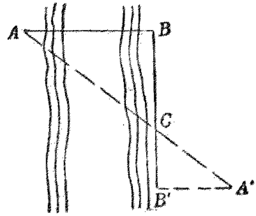
7. 梯形的對角線，互分成比例。

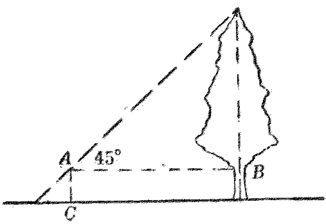
8. 右圖是畫圖用的「比例規」，兩邊 AB, CD 可以在 O 點固定，吾人所需的比。現在需要 $AC\frac{1}{2}$ 倍於 BD，問 O 點分 AB, CD 於何處？

即求 $\frac{OA}{OB}$ 及 $\frac{OC}{OD}$。



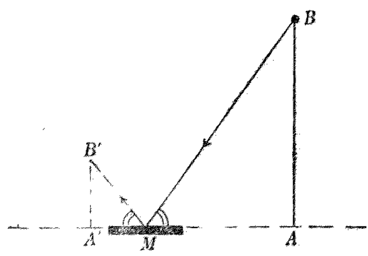
9.　有許多不能直接度量的線段都可以利用相似形來度量，譬如在河的一側，求河的闊 AB，如右圖就可以利用相似形來求。試指出圖上的已知件及計算法。





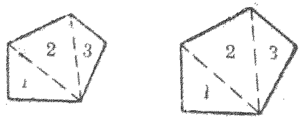
10.　設有一人自地至眼的高爲 AC，由 C 測得樹頂的仰角爲 45°，問樹高等於什麼線段？

11.　假設有一飛機在 B 點，測量者立在 A' 點，測量者的眼由 B' 注視反光鏡 M，用這個方法可以測出飛機的高 AB，這是什麼道理？試說明之。

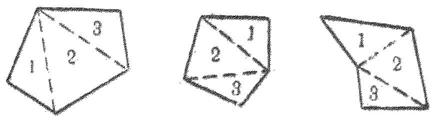


§ 97.　相似多邊形的條件　凡多邊形都可以分成若干個三角形，甲多邊形所分三角形的個數如若與乙多邊形所分三角形的個數相等，幷且彼此相似，我們就說『甲乙兩多邊形分爲同數相似三角形』，這些同數相似三角形如若按着相當位置排列，

就說他們『在相似位置』。



甲乙兩多邊形分爲同數相似三角形且在相似位置

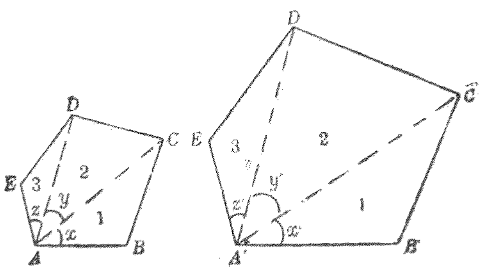


分爲同數相似三角形但不在相似位置

命題 62. 定理

兩個多邊形，祇要他們可以分成同數相似三角形，并且在相似位置，就是相似多邊形。

假設 $ABCDE$ 及 $A'B'C'D'E'$ 是已知多邊形，每個都由三個三角形組成，如圖。



$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

$$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$$

$$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$$

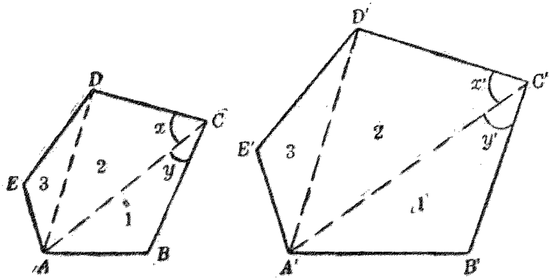
證明

敍述	理由
1. $\angle x=\angle x'$, $\angle y=\angle y'$, $\angle z=\angle z'$	1. 題設 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$ ·······
2. $\therefore \quad \angle A=\angle A'$	2. ···········公理
3. $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$	3. 照上面同樣證明
4. $\angle B=\angle B'$, $\angle E=\angle E'$	4. ··
5. $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$	5. ··
6. $\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AD}{A'D'}$	6. ··
7. $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{DE}{D'E'}=\dfrac{EA}{E'A'}$	7. ··
8. $\therefore \quad \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DE}{D'E'}=\dfrac{EA}{E'A'}$	8. ··
9. $\therefore \ ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$	9. ··

命題 63.　定理

兩個相似多邊形，可以分爲同數相似三角形，且在相似位置。

假設　$ABCDE$ 及 $A'B'C'D'E'$ 是相似多邊形，A 與 A'，B 與B'，D 與 D'，······都是相當的角點。



求證 這兩個多邊形可分爲同數相似三角形，且在相似位置。

證明

敍述	理由
1. 連結 $AC, AD, A'C', A'D'$	1. ⋯⋯⋯公理
2. 卽得同數三角形	2. 每個多邊形的三角形個數都比邊數少 2
3. $\angle B = \angle B'$	3. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯
4. $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$	4. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯
5. $\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$	5. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯
6. $\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$	6. 與上面同理
7. $\because \angle BCD = \angle B'C'D'$ $\angle y = \angle y'$	7. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯
8. $\therefore \angle x = \angle x'$	8. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯

9. $\frac{CD}{C'D'}=\frac{BC}{B'C'}$	9. …………………………
10. 但 $\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$	10. …………………………
11. $\therefore \frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}$	11. …………………………
12. $\therefore \triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$	12. …………………………
13. 各三角形在相似位置	13. 各相當角相鄰

習　題

1. 在正六邊形 $ABCDEF$ 內，連結 AC, AE, BD, BF, CE及 DF 各對角線，即得一新六邊形，與原六邊形相似。試證明之。

2. 兩個大小不等的圓，其圓周各分為 $50°$, $70°$, $130°$, $110°$，連結分點所得的圖形為相似四邊形。試證明之。

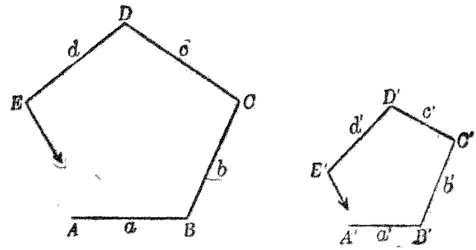
3. 由兩個相似三角形的相當角點到對邊作垂線分原形為相似三角形。試證明之。

§98. 相似多邊形周界的比　多邊形各邊的和叫做多邊形的周界，下面命題就是討論兩個相似多邊形周界的比，這個命題對於多邊形邊數的多少是無關係的。

命題 64.　定理

兩個相似多邊形周界的比，等於相當邊的比。

假設　$ABCDE\cdots\cdots$ 及 $A'B'C'D'E'\cdots\cdots$ 是 n 邊的相似多邊形，他們的周界各爲 p, p'。



求證　$\dfrac{p}{p'}=\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\cdots\cdots\cdots$

證明

敍述	理由
1.　∵　$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\cdots\cdots$	1.　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
2.　∴　$\dfrac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots}=\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\cdots\cdots$	2.　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
3.　即　$\dfrac{p}{p'}=\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\cdots$	3.　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

習　題

1.　兩個相似三角形的周界的長各爲 15 寸及 23 寸，甲三角形各邊的長爲 3 寸，7 寸，5 寸，問乙三角形各邊的長是多少？

2. 假設 $ABCD$ 四邊形周界的長爲 24 寸，$AB=5$ 寸，$CD=7$ 寸，$DA=6$ 寸。問周界是 28 寸的相似四邊形各邊的長是多少?

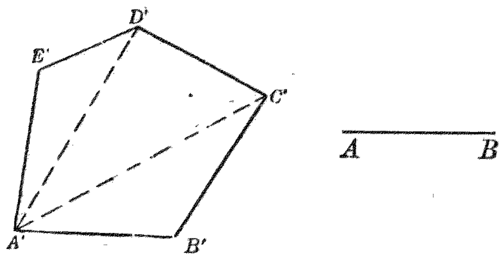
3. 設有直角三角形，斜邊的長是 $9\frac{1}{2}$ 寸，一腰的長是 $6\frac{1}{3}$ 寸，這個直角三角形與周界 $25\frac{1}{2}$ 寸的直角三角形相似。試求這個直角三角形的周界。

§ 99. 作圖題。

命題 65. 定理

求在已知線段上，作一個多邊形與已知多邊形相似。

假設 AB 是已知線段與已知多邊形 $A'B'C'D'E'$ 的一邊 $A'B'$ 相當。



求在 AB 上面作多邊形與 $A'B'C'D'E'$ 相似。

作法　由學生口述。

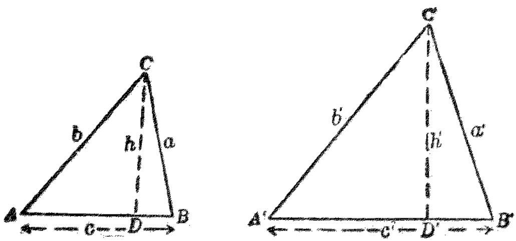
證法　由學生口述。

§ 100. 相似多邊形面積的比　三角形是多邊形的基礎，所以要研究相似多邊形面積的比，必須先研究相似三角形的面積的比，下面命題先講相似三角形面積的比就是這個理由。

命題 66　定理

兩個相似三角形面積的比等於相當邊的平方的比。

假設　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，他們的面積各爲 A, A'。



求證　$\dfrac{A}{A'}=\dfrac{C^2}{C'^2}$，

證明

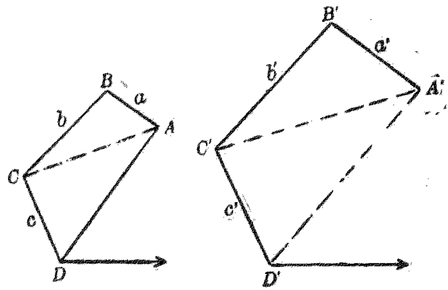
敍述	理由
1. 由△的角點 CC' 到對邊作垂線 $CD, C'D'$	1. …………
2. ∵　$\angle CDB=\angle C'D'B'$	2. 直角都相等
3. $\angle B=\angle B'$	3. 相似△的相當角
4. ∴　$\triangle CDB \backsim \triangle C'D'B'$	4. …………
5. ∴　$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{h}{h'}=\dfrac{c}{c'}$	5. …………
6. $\triangle ABC$的面積$=\frac{1}{2}h\times c$	6. …………
7. $\triangle A'B'C'$的面積$=\frac{1}{2}h'c'$	7. …………
8. ∴　$\dfrac{A}{A'}=\dfrac{hc}{hc'}$	8. …………
9. 即　$\dfrac{A}{A'}=\dfrac{c}{c'}\times\dfrac{c}{c'}=\dfrac{c^2}{c'^2}$	9. …………

命題 67.　定理

兩個相似多邊形面積的比等於相當邊的平方的比。

假設　$ABCD\cdots\cdots$ 及 $A'B'C'D'\cdots\cdots$ 是兩個相似多邊形，各邊的長各爲 $a, b, c, \cdots\cdots a', b', c', \cdots\cdots$ 面積各爲 A, A'。

求證　$\dfrac{A}{A'}=\dfrac{a^2}{a'^2}$。



證明

敍述	理由
1.　由相當角點各畫對角線，$AC, AD\cdots\cdots A'C', A'D', \cdots\cdots$	1.　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
2.　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$	2.　兩個相似多邊形可以分爲同數相似三角形
3.　$\therefore \dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{a^2}{a'^2}=\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}$	3.　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
4.　$\dfrac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'}=\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}$	4.　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
5.　$\therefore \dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'}$ $=\cdots\cdots=\dfrac{a^2}{a'^2}$	5.　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

6. $\dfrac{\triangle ABC+\triangle ACD+\cdots\cdots}{\triangle A'B'C'+\triangle A'C'D'+\cdots}=\dfrac{a^2}{a'^2}$	6. …………………………
7. 卽 $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{a^2}{a'^2}$	7. A 及 A' 各是諸△的和

習　題

1. 連結三角形各邊中點所形成的三角形，其面積等於原三角形$\frac{1}{4}$。試證明之。
2. 在直角三角形的各邊上，作等邊三角形，求證斜邊上的三角形面積等於其他兩邊上三角形面積的和。
3. 兩個相似三角形面積的比，等於相當高的平方的比。
4. 兩個相似三角形面積的比等於相當中線的平方的比。
5. 在直角三角形各邊上作相似多邊形，求證斜邊上多邊形面積等於其他兩邊上多邊形面積的和。
6. 依次聯結四邊形各邊中點所得的平行四邊形，其面積與原四邊形面積的比等於1：2。

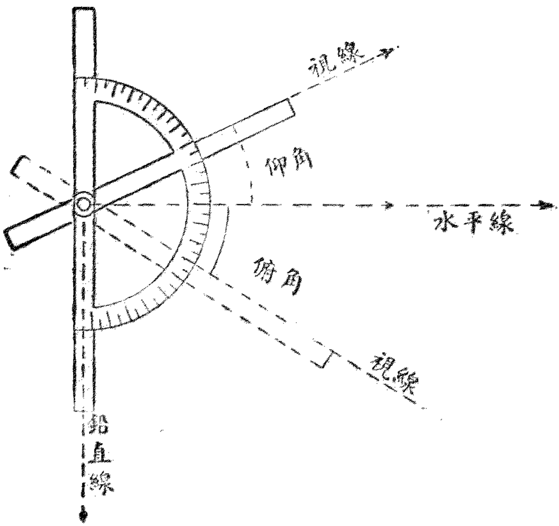
第十三章　數值三角

§ 101.　**直接度量與間接度量**　譬如要量一本書的長，一張桌的高，以及一個角的大小，都可以用尺及量角器直接去量；但是自然界中有許多量，如山高，河闊，就不能直接去量，祇有間接的計算，間接計算的方法，在命題 13 習題 7，8，9 講過，是利用縮圖來度量。又在命題 61 習題 9，10 是利用相似三角形相當邊成比例來計算。這兩種方法雖然不同，但是道理都是一樣的，現在仍舊利用相似三角形相當邊成比例的道理，研究出一個簡便的有系統的間接量度方法，叫做三角法。如本章各節所述。

§ 102.　**測角器及經緯儀**　測角器是測量角的最簡單的儀器，把他放在水平面上，可以測量水平面以內的角，把他放在鉛直面（即通過鉛直線所作的平面）內，就可以度量仰角及俯角。如下圖所示。

經緯儀是一種很精密的測角器，他有兩個量角度用的圓，一在水平面上，一在鉛直面上，并且有一個望遠鏡可以看遠處的目的物。

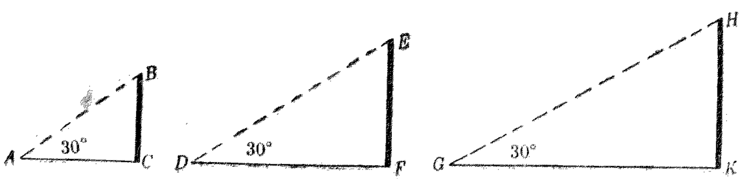
測角器



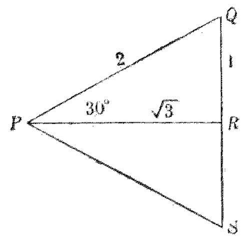
經緯儀

Ruch and Knight: Standard Service Algebra, p. 441。

§ 103. 正切 假設下列各圖的 BC, EF, HK 是電線桿的長，房屋的高或塔的高，……當太陽光線與地面成 30° 角的時候，



此等高的影子各爲 AC, DF, GK, 於是 $\angle A=\angle D=\angle G=30.°$ 又假設下圖等邊三角形 PQS 各邊的長爲 2，自 P 至對邊作垂線 PR, 於是 $PR=\sqrt{3}$, $\angle QPR=30°$。

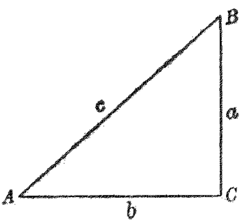


由是三角形 ABC, DEF, GHK, PQR 都是相似三角形。

$$\therefore\quad \frac{BC}{AC}=\frac{EF}{DF}=\frac{HK}{GK}=\frac{QR}{PR}=\frac{1}{\sqrt{3}}。$$

倘若我們量得電桿影子的長 $AC=84$ 尺，卽得電桿的長 $BC=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 84$ 尺 $=\sqrt{3}\times 28$ 尺，其他 EF, HK, 也可以照樣算出。

由上面這樣的研究，可知一個直角三角形 ABC*，如若 A 角的大小有一定，A 角的對邊與鄰邊的比 $a:b$ 也有一定，這個比 $\frac{a}{b}$ 不隨三角形大小而變，祇隨 A 角的大小而變。簡言之，A 角若有一定，則對邊與鄰邊的比 $a:b$ 是常數，這個比 $\frac{a}{b}$ 叫做 A 角的正切，記號爲 $\mathrm{tg}A$ 或 $\tan A$，讀爲『A 角的正切』或『正切 A』。依同樣道理 $\mathrm{tg}B=\frac{b}{a}$。由是得:

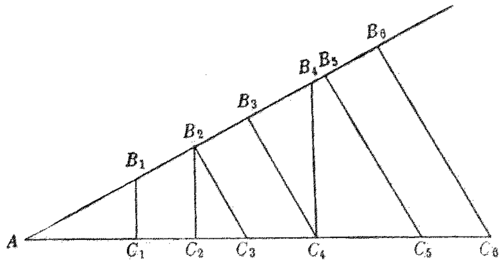


$$\mathrm{tg}A=\frac{A\text{ 角的對邊}}{A\text{ 角的鄰邊}}=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}。$$

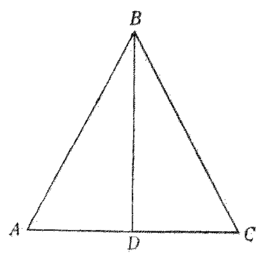
* 直角三角形 ABC 各角點的字母排列和時針的方向相同，而各邊的長 a, b, c 的排列和時針方向相反．這樣寫法的直角三角形，我們常叫他爲標準直角三角形。

習題

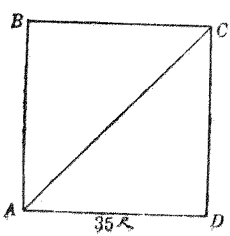
1. 假設有一個角 $A=30°$，由角的一邊至他邊作垂線



B_1C_1, B_2C_2, B_4C_4, C_3B_2, C_4B_3, ……… 問 $\frac{B_1C_1}{AC_1}$, $\frac{B_2C_2}{AC_2}$, $\frac{B_4C_4}{AC_4}$, $\frac{C_3B_2}{AB_2}$, $\frac{C_4B_3}{AB_3}$, $\frac{C_5B_5}{AB_5}$, $\frac{C_6B_6}{AB_6}$等比的值是多少？又問這些比可以叫做什麼？



2. 假設 ABC 是等邊三角形，各邊的長爲 2 尺，$BD\perp AC$，問 A 角及$\angle ABD$ 各若干度？又問這兩個比：tg 30° 及 tg 60° 是多少？



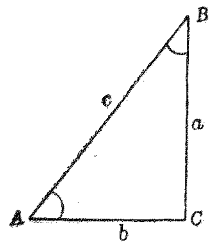
3. 假設正方形 $ABCD$ 各邊的長爲 35 尺，問 $\angle CAD$ 及 $\angle BAC$ 是多少度？

又問這個比 tg 45° 是多少?

§ 104.　餘切　A 角正切的倒數,叫做 A 角的餘切,記號爲『cot$A$』,讀爲『A 角的餘切』或『餘切 A』。由是得:

$$\cot A=\frac{1}{\operatorname{tg}A} \quad \text{或} \quad \cot A\ \operatorname{tg}A=1。$$

在標準直角三角形 ABC 中, $\operatorname{tg}A=\dfrac{a}{b}$,



$$\cot A=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}=\frac{A\text{ 角的鄰邊}}{A\text{ 角的對邊}}$$

$$=\frac{B\text{ 角的對邊}}{B\text{ 角的鄰邊}}=\operatorname{tg}B。$$

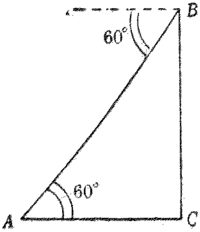
由此得一結論:一個角的正切等於他的餘角的餘切,或一個角的餘切等於他的餘角的正切。

習　題

1.　問 30° 角的正切等於幾度角的餘切?

2.　問 30° 角的餘切等於幾度角的正切?

3.　若 $A=23°, 35°, 47°, 56°, 73°, 15°, 12°, 8°, 5°$ 各值,根據 A 角的餘切等於 B 角的正切,問 B 的各值是多少?

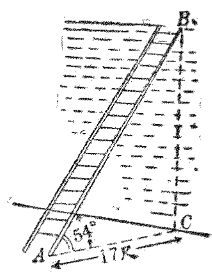


4.　有人在瞭望台上B點測得敵人在俯角$60°$的A點，瞭望台的高100尺，問敵人離台的距離AC是多少尺？

§105.　角的正餘切的表　一個角的正切及餘切，在實用上都很重要，數學家為實用上便利起見，曾把$0°$到$90°$中間各角的正切或餘切都列成一表，以供隨時查用。譬如要知道$tg\ 25°$是多少，祇須在表上一查卽得，$tg\ 25°=0.4663$，又$tg\ 25°12'=tg\ 25.2°=0.4706$，又$tg\ 36°30'=tg\ 36.5°=0.7400$。又$\cot 31°=1.6643$，餘倣此。

習　題

1.　設有一牆，不知其高，又有一梯，不知其長，祇知梯的上端與牆相接時，梯與地所夾的角是$54°$，梯的下端離牆脚17尺，問牆高是多少尺？



2.　用正餘切的表，查出下列正餘切的值：

$tg\ 15°$，$tg\ 24°30'$，$tg\ 35°15'$，$tg\ 47°$，$tg\ 63°12'$，

$\cot 75°$，$\cot 63°12'$，$\cot 54°30'$，$\cot 45°$。

正　弦　　**正餘切表**　　餘　弦

		.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0		表尾差 1 2 3 4 5
	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9			
											0.000000	90°	
0°	0.000000	001745	003491	005236	006981	008727	010472	012218	013964	015709	017455	89	175 349 524 698 873
1	01746	01920	02095	02269	02444	02619	02793	02968	03143	03317	03492	88	17 35 52 70 87
2	03492	03667	03842	04016	04191	04366	04541	04716	04891	05066	05241	87	17 35 52 70 87
3	05241	05416	05591	05766	05941	06116	06291	06467	06642	06817	06993	86	18 35 53 70 88
4	06993	07168	07344	07519	07695	07870	08046	08221	08397	08573	08749	85	18 35 53 70 88
5	08749	08925	09101	09277	09453	09629	09805	09981	10158	10334	10510	84	18 35 53 70 88
6	10510	10687	10863	11040	11217	11394	11570	11747	11924	12101	12278	83	18 35 53 71 89
7	12278	12456	12633	12810	12988	13165	13343	13521	13698	13876	14054	82	18 36 53 71 89
8	14054	14232	14410	14588	14767	14945	15124	15302	15481	15660	15838	81	18 36 54 71 89
9	15838	16017	16196	16376	16555	16734	16914	17093	17273	17453	0.17633	80°	18 36 54 72 90
10°	0.1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79	2 4 5 7 9
11	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78	2 4 5 7 9
12	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77	2 4 5 7 9
13	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76	2 4 6 7 9
14	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75	2 4 6 7 9
15	2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74	2 4 6 8 9
16	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73	2 4 6 8 9
17	3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72	2 4 6 8 10
18	3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71	2 4 6 8 10
19	3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	0.3640	70°	2 4 6 8 10
20°	0.3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69	2 4 6 8 10
21	3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68	2 4 6 8 10
22	4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67	2 4 6 8 10
23	4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66	2 4 6 8 10
24	4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65	2 4 6 8 11
25	4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64	2 4 6 9 11
26	4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63	2 4 7 9 11
27	5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62	2 4 7 9 11
28	5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61	2 5 7 9 11
29	5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	0.5774	60°	2 5 7 9 12
30°	0.5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59	2 5 7 9 12
31	6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58	2 5 7 10 12
32	6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57	2 5 7 10 12
33	6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56	3 5 8 10 13
34	6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55	3 5 8 10 13
35	7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54	3 5 8 11 13
36	7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53	3 5 8 11 14
37	7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52	3 6 8 11 14
38	7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51	3 6 9 11 14
39	8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	0.8391	50°	3 6 9 12 15
40°	0.8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49	3 6 9 12 15
41	8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48	3 6 9 12 16
42	9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47	3 6 10 13 16
43	9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	0.9657	46	3 7 10 13 17
44	0.9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1.0000	45°	3 7 10 14 17
45°	1.0000												

正餘切表(續)

正切	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9		餘切	表尾差 1	2	3	4	5
		.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0						
											1.0000	45°					
45°	1.0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	0355	44	4	7	11	14	18
46	0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	0724	43	4	7	11	15	18
47	0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	1106	42	4	8	11	15	19
48	1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	1504	41	4	8	12	16	20
49	1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	1.1918	40°	4	8	12	17	21
50°	1.1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	2349	39	4	9	13	17	22
51	2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	2799	38	5	9	14	18	23
52	2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	3270	37	5	9	14	19	24
53	3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	3764	36	5	10	15	20	25
54	3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	1.4281	35	5	10	16	21	26
55	1.4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	4826	34	5	11	16	22	27
56	4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	5399	33	6	11	17	23	29
57	5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	6003	32	6	12	18	24	30
58	6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	6643	31	6	13	19	26	32
59	1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	1.7321	30°	7	14	20	27	34
60°	1.732	1.739	1.746	1.753	1.760	1.767	1.775	1.782	1.789	1.797	1.804	29	1	1	2	3	4
61	1.804	1.811	1.819	1.827	1.834	1.842	1.849	1.857	1.865	1.873	1.881	28	1	2	2	3	4
62	1.881	1.889	1.897	1.905	1.913	1.921	1.929	1.937	1.946	1.954	1.963	27	1	2	2	3	4
63	1.963	1.971	1.980	1.988	1.997	2.006	2.014	2.023	2.032	2.041	2.050	26	1	2	3	4	4
64	2.050	2.059	2.069	2.078	2.087	2.097	2.106	2.116	2.125	2.135	2.145	25	1	2	3	4	5
65	2.145	2.154	2.164	2.174	2.184	2.194	2.204	2.215	2.225	2.236	2.246	24	1	2	3	4	5
66	2.246	2.257	2.267	2.278	2.289	2.300	2.311	2.322	2.333	2.344	2.356	23	1	2	3	4	5
67	2.356	2.367	2.379	2.391	2.402	2.414	2.426	2.438	2.450	2.463	2.475	22	1	2	4	5	6
68	2.475	2.488	2.500	2.513	2.526	2.539	2.552	2.565	2.578	2.592	2.605	21	1	3	4	5	7
69	2.605	2.619	2.633	2.646	2.660	2.675	2.689	2.703	2.718	2.733	2.747	20°	1	3	4	6	7
70°	2.747	2.762	2.778	2.793	2.808	2.824	2.840	2.856	2.872	2.888	2.904	19	2	3	5	6	8
71	2.904	2.921	2.937	2.954	2.971	2.989	3.006	3.024	3.042	3.060	3.078	18	2	3	5	7	9
72	3.078	3.096	3.115	3.133	3.152	3.172	3.191	3.211	3.230	3.351	3.271	17	2	4	6	8	10
73	3.271	3.291	3.312	3.333	3.354	3.376	3.398	3.420	3.442	3.465	3.487	16	2	4	6	9	11
74	3.487	3.511	3.534	3.558	3.582	3.606	3.630	3.655	3.681	3.706	3.732	15	2	5	7	10	12
75	3.732	3.758	3.785	3.812	3.839	3.867	3.895	3.923	3.952	3.981	4.011	14	3	6	8	11	14
76	4.011	4.041	4.071	4.102	4.134	4.165	4.198	4.230	4.264	4.297	4.331	13	3	6	10	13	16
77	4.331	4.366	4.402	4.437	4.474	4.511	4.548	4.586	4.625	4.665	4.705	12					
78	4.705	4.745	4.787	4.829	4.872	4.915	4.959	5.005	5.050	5.097	5.145	11					
79	5.145	5.193	5.242	5.292	5.343	5.396	5.449	5.503	5.558	5.614	5.671	10°					
80°	5.671	5.730	5.789	5.850	5.912	5.976	6.041	6.107	6.174	6.243	6.314	9					
81	6.314	6.386	6.460	6.535	6.612	6.691	6.772	6.855	6.940	7.026	7.115	8					
82	7.115	7.207	7.300	7.396	7.495	7.596	7.700	7.806	7.916	8.028	8.144	7					
83	8.144	8.264	8.386	8.513	8.643	8.777	8.915	9.058	9.205	9.357	9.514	6					
84	9.514	9.677	9.845	10.019	10.199	10.385	10.578	10.780	10.988	11.205	11.430	5					
85	11.430	11.664	11.909	12.163	12.429	12.708	12.996	13.300	13.617	13.951	14.301	4					
86	14.301	14.669	15.056	15.464	15.895	16.350	16.832	17.343	17.886	18.464	19.081	3					
87	19.08	19.74	20.45	21.20	22.02	22.90	23.86	24.90	26.03	27.27	28.64	2					
88	28.64	30.14	31.82	33.69	35.80	38.19	40.92	44.07	47.74	52.08	57.29	1					
89	57.29	63.66	71.62	81.25	95.49	114.59	143.24	191.0	286.5	573.0	∞	0°					
90°	∞																

此處之表尾差難得準確.

3．問以下列各值爲正切的各角是多少度？

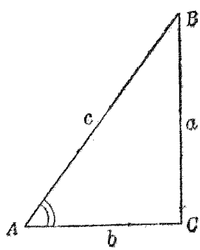
a. 0.3719，　*b*. 0.4791，　*c*. 0.5658，

d. 0.6873，　*e*. 0.8541，　*f*. 0.9827。

4．有人從塔脚向前走到120尺的遠處，回視塔頂，測得此時塔頂的仰角$37°10'$，問塔高多少尺？

5．已知海中燈塔的高是85尺，有人在船上測得燈塔的仰角是$9°$，問船離燈塔有多少遠？

§106．正弦　在標準直角三角形內，就A角講，除對邊比鄰邊的比外，還有其他的比，譬如對邊比斜邊的比：$\frac{a}{c}$，也像正切一樣，他的值不隨三角形的大小而變，祇隨A角的大小而變。A角有一定，這個比也有一定。這個比我們叫做A角的正弦，記號爲$\sin A$，讀爲『角的正弦』或『正弦A』。即：



$$\sin A=\frac{A\text{角的對邊}}{\text{斜邊}}=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}。$$

從$0°$到$90°$各角的正弦，也像正切一樣，有表可查。

正　切　　　　**正餘弦表**　　　　餘　切

		.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0		表尾差				
	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9			1	2	3	4	5
											0.000000	90°					
0°	0.000000	001745	003491	005236	006981	008727	010472	012217	013962	015707	017452	89	175	349	524	698	873
1	01745	01920	02094	02269	02443	02618	02792	02967	03141	03316	03490	88	17	35	52	70	87
2	03490	03664	03839	04013	04188	04362	04536	04711	04885	05059	05234	87	17	35	52	70	87
3	05234	05408	05582	05756	05931	06105	06279	06453	06627	06802	06976	86	17	35	52	70	87
4	06976	07150	07324	07498	07672	07846	08020	08194	08368	08542	08716	85	17	35	52	70	87
5	08716	08889	09063	09237	09411	09585	09758	09932	10106	10279	10453	84	17	35	52	69	87
6	10453	10626	10800	10973	11147	11320	11494	11667	11840	12014	12187	83	17	35	52	69	87
7	12187	12360	12533	12706	12880	13053	13226	13399	13572	13744	13917	82	17	35	52	69	87
8	13917	14090	14263	14436	14608	14781	14954	15126	15299	15471	15643	81	17	35	52	69	86
9	15643	15816	15988	16160	16333	16505	16677	16849	17021	17193	0.17365	80°	17	34	52	69	86
10°	0.1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79	2	3	5	7	9
11	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78	2	3	5	7	9
12	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77	2	3	5	7	9
13	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76	2	3	5	7	8
14	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	2588	75	2	3	5	7	8
15	2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74	2	3	5	7	8
16	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73	2	3	5	7	8
17	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72	2	3	5	7	8
18	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71	2	3	5	7	8
19	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0.3420	70°	2	3	5	7	8
20°	0.3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69	2	3	5	7	8
21	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68	2	3	5	6	8
22	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67	2	3	5	6	8
23	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66	2	3	5	6	8
24	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	4226	65	2	3	5	6	8
25	4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64	2	3	5	6	8
26	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63	2	3	5	6	8
27	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62	2	3	5	6	8
28	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61	2	3	5	6	8
29	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0.5000	60°	2	3	5	6	8
30°	0.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59	2	3	5	6	8
31	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58	1	3	4	6	7
32	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57	1	3	4	6	7
33	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56	1	3	4	6	7
34	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55	1	3	4	6	7
35	5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54	1	3	4	6	7
36	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53	1	3	4	6	7
37	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52	1	3	4	6	7
38	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51	1	3	4	5	7
39	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	0.6428	50°	1	3	4	5	7
40°	0.6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49	1	3	4	5	7
41	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48	1	3	4	5	7
42	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47	1	3	4	5	6
43	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46	1	3	4	5	6
44	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0.7071	45°	1	2	4	5	6
45°	0.7071																

正　弦　　　　## 正餘弦表（續）　　　　餘　弦

		.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0		表尾差				
	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9			1	2	3	4	5
											0.7071	45°					
45°	0.7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44	1	2	4	5	6
46	7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43	1	2	4	5	6
47	7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42	1	2	4	5	6
48	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41	1	2	3	5	6
49	7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	7660	40°	1	2	3	5	6
50°	0.7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	0.7771	39	1	2	3	4	6
51	7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38	1	2	3	4	5
52	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37	1	2	3	4	5
53	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36	1	2	3	4	5
54	8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	8192	35	1	2	3	4	5
55	8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34	1	2	3	4	5
56	8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33	1	2	3	4	5
57	8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32	1	2	3	4	5
58	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31	1	2	3	4	5
59	8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	0.8660	30°	1	2	3	4	4
60°	0.8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29	1	2	3	3	4
61	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28	1	2	2	3	4
62	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27	1	2	2	3	4
63	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26	1	2	2	3	4
64	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	25	1	2	2	3	4
65	9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24	1	1	2	3	4
66	9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23	1	1	2	3	3
67	9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	22	1	1	2	3	3
68	9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	21	1	1	2	3	3
69	9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	0.9397	20°	1	1	2	2	3
70°	0.9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455	19	1	1	2	2	3
71	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18	1	1	2	2	3
72	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17	1	1	2	2	3
73	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16	0	1	1	2	2
74	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659	15	0	1	1	2	2
75	9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14	0	1	1	2	2
76	9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13	0	1	1	2	2
77	9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	12	0	1	1	2	2
78	9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	11	0	1	1	1	2
79	9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	0.9848	10°	0	1	1	1	2
80°	0.9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	9	0	1	1	1	1
81	9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8	0	1	1	1	1
82	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7	0	0	1	1	1
83	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6	0	0	1	1	1
84	9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962	5	0	0	1	1	1
85	9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4	0	0	0	1	1
86	9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	3	0	0	0	0	1
87	9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	2	0	0	0	0	0
88	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0.9998	1	0	0	0	0	0
89	0.9998	9999	9999	9999	9999	1.0000	0000	0000	0000	0000	1.0000	0°	0	0	0	0	0
90°	1.0000																

習題

1. 用上面的表,求出下列各比的值:

$\sin 5^\circ$, $\sin 28^\circ 30'$, $\sin 34^\circ 12'$, $\sin 43^\circ 40'$,

$\sin 60^\circ$, $\sin 69^\circ 10'$, $\sin 85^\circ 50'$, $\sin 89^\circ 48'$。

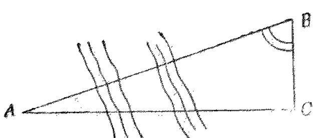
2. 求以下列各數爲正弦的各角:

0.2419, 0.3272, 0.4131, 0.5750,

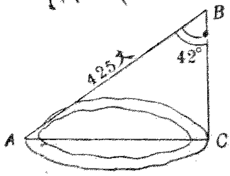
0.6833, 0.7071, 0.9097, 0.9999。

3. 測得紙鳶的仰角 43°, 線長 250 尺,問紙鳶的高是多少?

4. 在飛機上,偵察敵情,垂直下視爲某廟,斜視,測得敵軍的俯角爲 56°, 飛機高 3000 尺, 問敵軍離某廟的距離是多少尺。



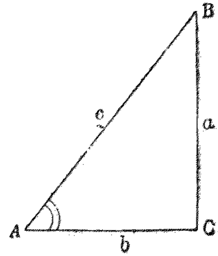
5. 有 B,C 兩鎮同在河的一傍,已知$AB=$45 里,$\angle BAC=35^\circ$, 問 B,C 兩鎮的距離是多少?



6. 左圖 AC 是表示湖的長, 測得 $AB=425$

丈，$\angle ABC=42°$，問湖長 AC 是多少丈？

§ 107.　**餘弦**　在標準直角三角形 ABC 中，就 A 角講，還有一個比$\dfrac{鄰邊}{斜邊}$，即 $\dfrac{b}{c}$ 他的值也不隨直角三角形的大小而變，祇隨 A 角的大小而變，這個比我們叫做 A 角的餘弦，記號爲 $\cos A$，讀爲『A 角的餘弦』或『餘弦 A』。



即：　$\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{鄰邊}{斜邊}$。

從 0° 到 90° 各角餘弦的值，都列在上面正餘弦的表中。正弦與餘弦的關係也像正切與餘切的關係似的，『一角的正弦等於他的餘角的餘弦』。

即：　$\sin A=\cos B$。

習　題

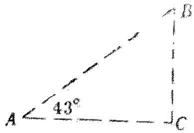
1.　由上面的表查出下列各比的值：

$\cos 41°20'$，　$\cos 29°30'$，　$\cos 22°12'$，　$\cos 15°6'$，

$\cos 9°5'$，　$\cos 4°25'$，　$\cos 3°$，　$\cos 2°$。

2.　求以下列各值爲餘弦的諸角：

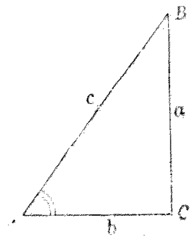
0.1891，　0.2723，　0.4818，　0.5990，　0.6909，



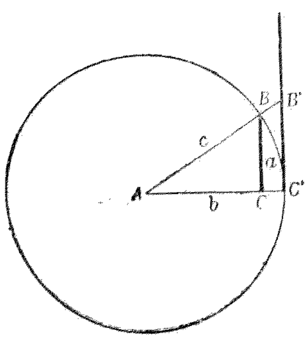
0.7059,　0.7071。

3.　A, B, C 三個市鎮的位置，如左圖所示，B 在 A 的東北 43°，並且 $AB=32$ 里，C 在 A 的正東，問 AC 兩市鎮的距離是多少里？

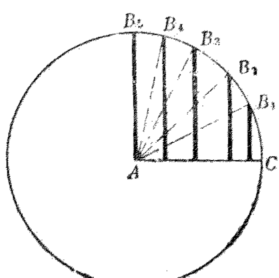
§ 108.　三角函數的圖示法　在標準直角三角形 ABC 中，就 A 角講，有三個不同的比：$\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}=\frac{a}{b}$，$\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\frac{a}{c}$，$\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}=\frac{b}{c}$。這三個比叫做三角比，他們的比值各隨 A 角的大小而變，所以也叫做三角函數。正弦，餘弦及正切是三角函數中最重的函數，他們隨角的大小而變的情形，也可以用半徑等於一的圓，叫做單位表示出來。



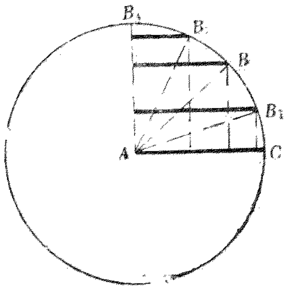
單位圓



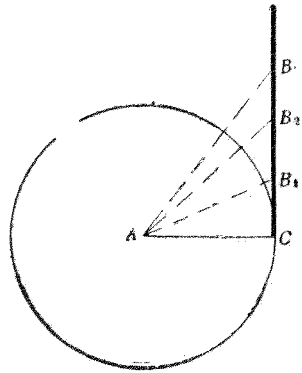
正弦，sin A



餘弦，$\cos A$



正切，$\mathrm{tg}A$



在單位圓裏，$\sin A=\frac{a}{c}=a$，$\cos A=\frac{b}{c}=b$，$\mathrm{tg}A=\frac{a}{b}=\frac{a}{b}=\frac{B'C'}{AC'}=B'C'$。這就是在單位圓上，這三個比值可以用線段 a，b，$B'C'$ 的長來表示。

我們現在用不着大於 $90°$ 的角，所以祇要在單位圓的第一象限裏來研究 $0°$ 到 $90°$ 各角的三角函數。

在正弦的圖上，可以看出正弦的值隨角的增加而增加，正弦的值最大是 1，最小是 0。

在餘弦的圖上，可以看出餘弦的值隨角的增加而減少，他的最小值是 0，最大值是 1。

在正切的圖上，可以看出正切的值隨角的增加而增加，角增加到 $90°$，他的值就變爲無窮大，他的最小值爲 0。

這三個三角函數的最小値都是 0，正餘弦的最大値爲 1，正切的最大値可近於無窮大。

三角函數除這三個函數外，還有正割，餘割及餘切。餘切已在前面講過，正割是餘弦的倒數，餘割是正弦的倒數，正割的記號爲 $\sec A$，讀爲『A 角的正割』或『正割 A』；餘割的記號爲 $\csc A$，讀爲『A 角的餘割』或『餘割 A』。由是：

$$\sin A=\frac{1}{\csc A} \quad 或 \quad \sin A\ \csc A=1$$

$$\cos A=\frac{1}{\sec A} \quad 或 \quad \cos A\ \sec A=1$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{1}{\cot A} \quad 或 \quad \operatorname{tg} A\ \cot A=1$$

正割及餘割在應用上不甚重要，這裏爲節省篇幅計，就不研究了。

習題

1. 由單位圓，證明下面兩個恆等式：

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1, \qquad \operatorname{tg} A=\frac{\sin A}{\cos A}。$$

2. 證明下列各種關係：

$$\operatorname{tg} A\frac{\cos A}{\sin A}=1; \qquad \operatorname{tg}^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}-1;$$

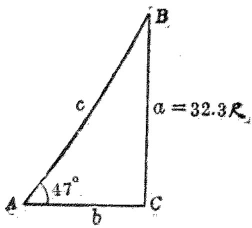
$$\cot^2 A=\frac{1}{\sin^2 A}-1;$$

$$(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2。$$

§109.　直角三角形解法　由直角三角形相等的定理，可知一個直角三角形，祇須知道一邊及一銳角或兩邊，其他各部就可以求出來。求其他各部的值叫做解，解直角三角形時候，最好先畫一個標準直角三角形，標出已知部分，然後求解。現在舉例如下，但其中有未完成的計算由學者自己算出填入。

款一：　知道一邊及一銳角　已知 $a=32.3$尺，$\angle A=47°$，

求　$B, b, c.$



〔解法〕(1) $\angle B=90°-\angle A$

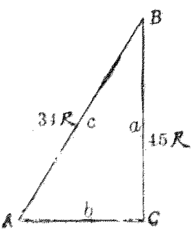
$=90°-47°=43°;$

(2) $\because$　$\operatorname{tg}B=\dfrac{b}{a}$,

$\therefore$　$b=a\operatorname{tg}B=\cdots\cdots\times\cdots\cdots$

(3) $\because$　$\sin A=\dfrac{a}{c}$,　$\therefore$　$c=\dfrac{a}{\sin A}=$ ——

款二：　知道兩邊　已知 $a=45$ 尺，$c=34$ 尺，求 $A, B, b.$



〔解法〕(1)　$\sin A=\dfrac{a}{c}=$ —— $=$

(至四位小數)

$\therefore$　$\angle A=$　　(準確至0.1°)

(2)　$\angle B=90°-\angle A=90°-$　　$=$

(3) $\because$　$\cos A=\dfrac{b}{c}$,

$\therefore$　$b=c\ \cos A=$　　$\times$　　$=$

習題

根據下列各題中已知部分，求出各未知部分：

1. $\angle B=38°30'$, $c=112$ 尺。

2. $\angle B=57°12'$, $b=84$ 尺。

3. $\angle A=73°$, $b=69$ 尺。

4. $\angle A=62°$, $a=76.2$ 尺。

5. $a=329$ 尺, $b=235$ 尺。

6. $a=232$ 尺, $c=456$ 尺。

7. $b=356$ 尺, $c=432$ 尺。

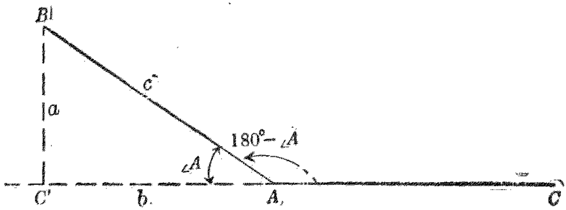
解下列各應用題：

8. 在樓上，測得塔頂的仰角爲 $37°25'$，塔脚的俯角爲 $28°$，已知樓與塔的距離爲 78 尺，問塔有多少高？

9. 以長 45 尺的竹桿斜靠牆壁，竹桿與地面所成的角爲 $72°$，問竹桿靠牆之處離地多少高？

10. 軍用輕汽球上升 3600 尺處，測得敵軍的俯角爲 $41°$，問敵軍離球上升處距離是多少？

§ 110. 鈍角的三角函數　前面所講的三種基本的三角函數 $\sin A$, ,$\cos A$, 及 $\mathrm{tg}A$，都是祇限於直角三角形的銳角，但是看下面的圖，可知這些函數也可以由銳角推廣到鈍角的。



設 $\angle CAB$ 是鈍角，由 AB 邊上一點 B 到 CA 的延長線上作 $BC'\perp CA$，於是 CAB 角的對邊爲 BC'，斜邊爲 BA，鄰邊爲延長線 AC'。但 AC' 與 AC 方向相反，所以 b 爲負值。

由是：
$$\sin\angle CAB=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\frac{a}{c}=\sin\angle A,$$

即：
$$\sin(180^\circ-\angle A)=\sin\angle A。$$

同理
$$\cos\angle CAB=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}=\frac{-b}{c}=-\cos\angle A,$$

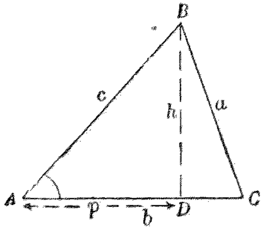
即：
$$\cos(180^\circ-\angle A)=-\cos\angle A。$$

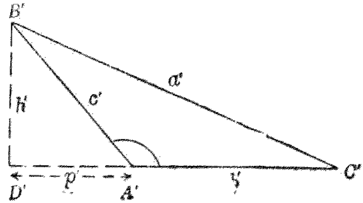
同理
$$\operatorname{tg}\angle CAB=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}=-\operatorname{tg}\angle A,$$

即：
$$\operatorname{tg}(180^\circ-A)=-\operatorname{tg}\angle A。$$

由是得一結論：　鈍角的正弦等於他的補角的正弦，鈍角的餘弦及正切，等於他的補角的餘弦及正切，但記號相反。

§ 111.　餘弦定律　由命題 33 及 34 得：





(1) $a^2=b^2+c^2-2bp$;

(2) $a'^2=b'^2+c'^2+2b'p'$。

現在由三角法,在直角三角形 ADB 及 $A'D'B'$ 內得:

(1) $\cos A=\dfrac{p}{c}$ 即 $p=c\cos A$.

(2) $\cos\angle C'A'B'=-\cos\angle B'A'D'=-\dfrac{p'}{c'}$。

即 $p'=-c'\cos C'A'B'$。

$\therefore$ (1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;

(2) $a'^2=b'^2+c'^2-2b'c'\cos\angle C'A'B'$。

由(1)(2)兩式可知:無論 A 角是銳角或鈍角,都有這樣一個結論:

在任意三角形中,一角的對邊的平方等於兩鄰邊平方的和,減去兩倍兩鄰邊及該角餘弦的連乘積。

這個結論叫做餘弦定律。用算式表示這個定律,即:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C。$$

習　題

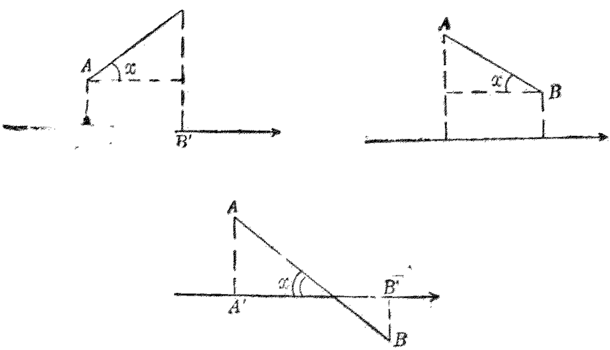
1. 已知 $a=3.1$,　$b=4.3$,　$c=7.5$,　求 A,B,C。

2. 已知 $a=8$ 寸,　$b=7$ 寸,　$c=6$ 寸,　求 A,B,C。

3. 已知 $b=8$ 寸,　$c=5$ 寸,　$\angle A=60°$, 求 a 的長。

4. 已知 $a=4$,　$b=6$,　$\angle C=112°$, 求 c 的長。

5. 證明下面三個圖都合於這個結論: 線段 AB 的射影

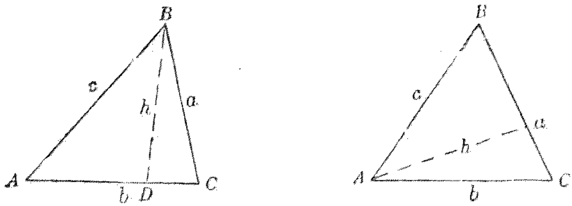


等於 AB 自己乘他與影軸所夾的角的餘弦, 即:

$$A'B'=AB\cos\angle x。$$

§112.　正弦定律　三角形的各邊與他所對的角的正弦成比例。

即：
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}。$$



（證明）　由角點 B 到對邊作垂線 $BD\perp AC$，於是在直角三角形 ADB，BDC 内得：$\sin A=\dfrac{h}{c}$，$\sin C=\dfrac{h}{a}$。

$$\therefore\quad c\sin A=a\sin C,\quad 即\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}。$$

由角點 A 到對邊作垂線，依同理得：

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

習　題

1. 若三角形的 A 角是鈍角，問正弦定律仍舊能成立否？
2. 已知 $\angle A=30°$，$\angle B=75°$，$C=4.2\,cm$. 應用正弦定律求出其他部分的值。
3. 有人在輪船碼頭上高出水面 $14\frac{1}{2}$ 尺之處，測得某船的桅頂的仰角為 $2°$，已知桅桿頂高於水面 65 尺，問

船離碼頭多少遠?

4. 有一橋高於他下面的水流 30 尺,某人在橋上測得上流有一木塊的俯角爲 6°,若經過 1 分 30 秒,此木塊流至橋下,問水流速度是多少?

5. 山坡上有一塔,塔和山坡所夾的角爲 110°,由塔脚向山下前進 110 尺,測得塔頂的仰角爲 44°,問塔的高是多少?

6. 從山脚一點測得山頂的仰角是 40°,沿斜度 10° 的路向山頂前進 $\frac{4}{3}$ 里,又測得山頂的仰角是 45°,問山高有多少尺?

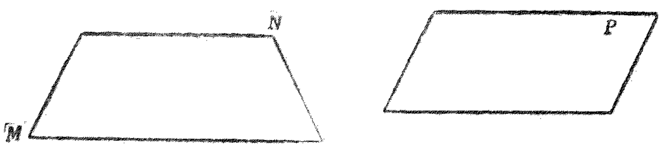
7. 有槓桿式的起重機,臂長 28 尺,問當他和水平線成 54° 的角時,臂的上端比下端高多少?

第三編　推理幾何學立體之部

第十四章　空間的直線和平面

§ 113.　立體幾何　平面幾何是研究平面內的圖形，這在前面已經講過。至於立體幾何，他是研究空間的點，線，面以及由點線面所組成的立體。

§ 114.　平面的畫法　一個平面，可以向四周無限的擴張(參看 § 6 平面定義)。所以我們要把全平面畫出來，這是不可能



的。在幾何學上，常用一個多邊形表示一個平面，普通都用梯形或平行四邊形，並且在這些圖形上寫一個字母或兩個字母以示平面與平面的區別。

§ 115.　平面公理　立體幾何所用的公理，除平面幾何的公理外，還要增添下面兩個平面公理，做推理的根據。

平面公理 A.　通過不在一直線上的三點，可以作一個平面，

但是祇有一個可作。

平面公理 B.　兩平面相交處是一條直線。

平面公理 C.　通過一直線可以作許多平面。

命題 1.　定理

(注意)　本編因限於篇幅及學生學習時間，把簡單定理，如『線段投在平面上的射影仍舊是一條線段』，『兩直線各與第三直線平行，則兩直線平行』等都略省去，教師可看學生程度及教授時間隨時酌量補充。

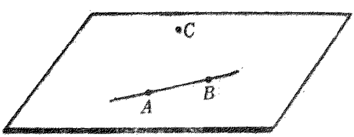
§ 116.　下面三款，每款都可以決定一個平面。

1.　通過一直線及直線外一點。

2.　通過兩條相交的直線。

3.　通過兩條平行線。

款一



假設 AB是空間任意一直線，C 是 AB 外面的一點。

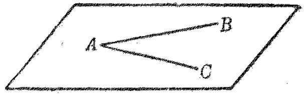
求證 AB與C 可以決定一平面。

證明

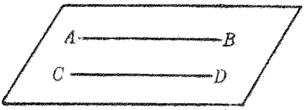
在直線 AB 上面任意取兩點 A, B, 於是通過 A, B, C 三點可以作一平面並且祇有一平面(平面公理 A)。直線 AB 完全在

該平面內(平面定義)所以 AB 與 C 能決定一平面。

款二



(由學生自己證明)。



款三

由平行線定義卽證明。

習　題

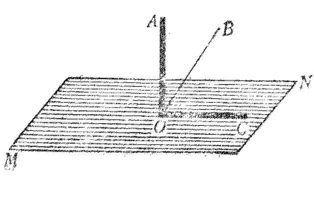
1.　問不同在一個平面上的四點,可作幾個平面?

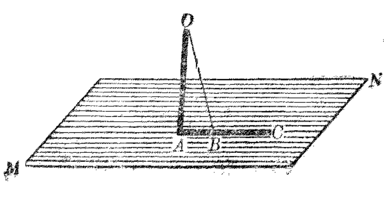
2.　爲什麼照相架及茶几等至少要三隻脚?

§117.　定義　直線 AB 與平面 P 相交於一點 B,倘若在該平面 P 內,由交點 B 所引諸直線都與直線 AB 垂直,我們就說直線 AB 與平面 P 垂直或平面 P 與直線 AB 垂直,縮寫爲 $AB\perp$平面 P,或平面 $P\perp AB$。

命題 2.　定理

§118.　由已知平面內(或外)一點,可作一條垂線,與已知平面垂直,但是祇能作一條。

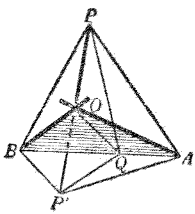




（證明） 假設 OA, OB 都垂直於平面 MN，於是通過 OA, OB 可作一平面與 MN 相交於一直線。（命題 1 及公理 B）即由 O 點可作兩條線與該直線垂直，這與平面幾何上命題相抵觸，所以由 O 點祇有一條直線與 MN 垂直。

命題 3. 定理

§ 119. 一直線，若與兩條相交直線垂直於交點，則該直線也與這兩條相交直線所在的平面垂直。



假設 $PO \perp OA$, $PO \perp OB$,

求證 $PO \perp$ 平面 AOB.

證明 在平面 AOB 內，由 O 點任意引一直線 OQ，聯結 AB，設 AB 與 OQ 相交的一點爲 Q，延長 PO 至 P'，令 $PO = P'O$。聯結 PB, PA, PQ, $P'A$, $P'B$, $P'Q$。於是

$BP = BP'$, $PA = AP'$ （何故？）

$\therefore$ $\triangle ABP \equiv \triangle ABP'$ （何故？）

$\therefore$ $\angle PBQ = \angle P'BQ$, （何故？）

$\therefore$ $\triangle PBQ \equiv \triangle P'BQ$ （何故？）

$\therefore$ $PQ = QP'$

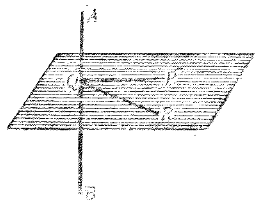
$\therefore$ $QO \perp OP$

因 QO 是在平面 AOB 內通過 O 點的任意一直線，所以在平

面 AOB 內凡通過 O 點的直線都與 PO 垂直。因此 $PO\perp$平面 AOB (定義)。

系　通過已知一點可作一平面垂直於一直線。

(1) 設 Q 是已知點，AB 是已知直線，於是通過 AQ 作兩個平面 AQR, AQP, 在這兩個平面內，各作 $RQ\perp QA$, $PQ\perp QA$。由是 $AQ\perp$平面 PQR。



(2) 設 P 是已知點，AB 是已知直線，於是作 $PQ\perp QA$，通過 AQ 作一平面 AQR, 在該平面內作 $RQ\perp QA$，即得 $AQ\perp$平面 PQR。

§ 120.　定義　倘若一直線 AB 與一平面 P，無論如何延長或擴張都不相交，我們就說這條直線與平面平行，縮寫為"$AB//$平面 P"，讀為"AB 平行於平面 P"。

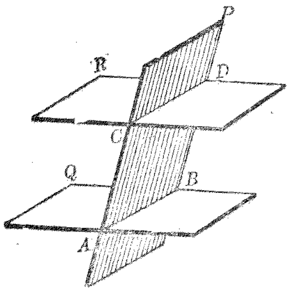
§ 121.　定義　倘若兩個平面 P, P' 無論如何擴張都不相交，我們就說這兩個平面平行，縮寫為平面 $P//$平面 P'。

命題 4.　定理

§ 122.　一平面與兩個平行平面相交，他們的交線是平行線。

假設　平面 $Q//$平面 R，平面 P 與 Q，R 相交於 AB，CD。

求證　$AB//CD$。



證明

因爲 AB 與 CD 各在平行平面 Q, R 內，所以 AB 與 CD 無論如何延長總不相交，并且同在平面 P 內，所以 $AB//CD$。

系 1.　兩個平行平面中間的平行線都是相等的。

習　題

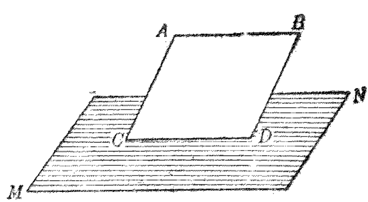
1.　以教室的牆壁爲例，(a) 指出兩個平行平面，(b) 一直線與一平面平行，(c) 互相平行的直線。

2.　在命題 2 的圖中，若 $AC//BD$，則 $AB=CD$。

3.　在命題 2 的圖中，若 $AB=CD$，則 $AC//BD$。

命題 5.　定理

§ 123.　通過兩平行線之一線的平面，平行於其他一線。



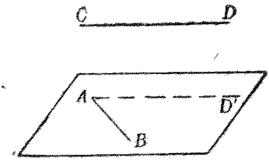
假設 $AB//CD$, MN 是通過 CD 的平面。

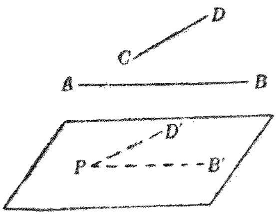
求證　$AB//MN$。

(證明)　通過 AB, CD 可作一平面。　　(何故?)

假設這平面與 MN 相交於 CD，因 AB 不與 CD 相交，所以 AB 也不與 MN 相交，即 $AB//MN$。

系 1.　通過已知直線 AB 可作一平面平行於任意一直線 CD，若 AB 不平行於 CD，則所作的平面祇有一個。



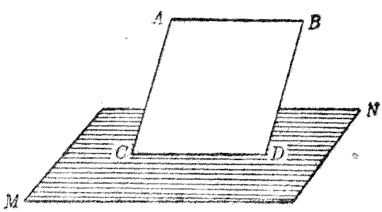


系 2.　通過已知一點 P 可作一平面平行於已知的兩直線 AB，CD，若 AB 不與 CD 平行，則所作的平面祇有一個。

命題 6.　定理

§ 124.　已知直線若與已知平面平行，則通過已知直線的平面與已知平面的交線將平行於已知直線。

假設　AB 是已知直線，MN 是已知平面，$AB//MN$，通過 AB 所作的平面與 MN 相交於 CD。



求證　$AB//CD$。

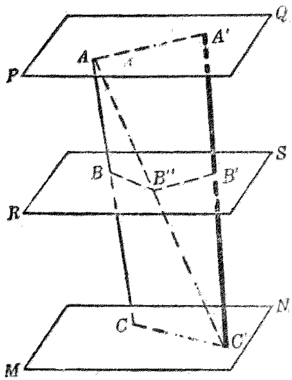
（證明）　AB 與 CD 同在一平面內，并且不相交，倘若相交，AB 也與 MN 相交，這與假設不合，所以 $AB//CD$。

系 1. 兩條相交的直線倘若各與已知平面平行，這兩條相交直線所在的平面就平行於該已知平面。

系 2. 一角的兩邊倘若各平行於他角的兩邊，這兩角所在的平面也平行。

命題 7. 定理

§125. 兩條直線若被截於諸平行平面，則被截的相當線段成比例。



假設 ABC 及 $A'B'C'$ 是兩條已知直線，各被平行平面 PQ，RS，MN 截於 A, B, C, A', B', C'。

求證 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$。

（證明） 連結 AC'，通過 AC' 及 AC 作一平面與 RS, MN 相交於 BB'', CC' 於是 $BB''//CC'$。(何故?)同理通過 $C'A$, 及 $C'A'$ 作平面得 $AA'//B''B'$。由是得

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AB''}{B''C'}=\frac{A'B'}{B'C'} \qquad \text{(何故?)}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'} \quad 或 \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}。$$

系 交於一點的諸直線若被兩平行平面所截，則被截諸相當線段成比例。

習　題

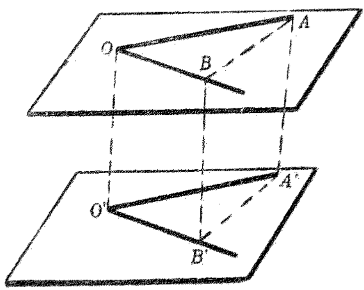
1. 作一平面，通過已知兩點，并且平行於已知一直線。

2. 三個平行平面，截分一直線所得的兩線段，如若相等，則截分其他直線所得的線段也都相等。

3. 在本命題的圖中，若 $AB=6$，$BC=9$，$B'C'=7$，問 $A'B'$ 有多少長？

命題 8. 定理

§126. 不同在一平面內的兩角，若各邊互相平行並且方向相同，則兩角相等。



假設 AOB 及 $A'O'B'$ 是已知的兩角，$OA//O'A'$，

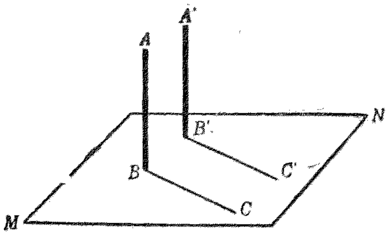
$OB//O'B'$。

求證 $\angle AOB=\angle A'O'B'$

(證明) 取 $OA=O'A'$，$OB=O'B'$，連結 BB'，AA'，AB，$A'B'$。於是 $AOO'A'$ 及 $BOO'B'$ 都是平行四邊形，(何故?)所以 AA' 等於 OO' 并且平行於 OO'；又 $BB'=OO'$，并且平行於 OO'，因此 $AA'=BB'$，并且 $AA'//BB'$，所以 $ABB'A'$ 是平行四邊形。 $\therefore AB=A'B'$，但 $OA=O'A'$，$OB=O'B'$，$\therefore\triangle AOB\equiv\triangle A'O'B'$。 $\therefore\angle AOB=\angle A'O'B'$。

命題 9. 定理

§127. 兩條平行線若有一條與平面垂直，則其他一條也與平面垂直。



假設 $AB//A'B'$，並且 $AB\perp$平面 MN。

求證 $A'B'\perp$平面 MN。

(證明) 在平面 MN 內，由 B 點引一直線 BC。於是$\angle ABC$ 是直角。(何故?) 由 B' 點引一直線 $B'C'//BC$。於是$\angle A'B'C'=\angle ABC$。(何故?)所以$\angle A'B'C'$ 也是直角。依同理可以證明 MN 平面內，通過 B 點的直線都與 $A'B'$ 垂直。

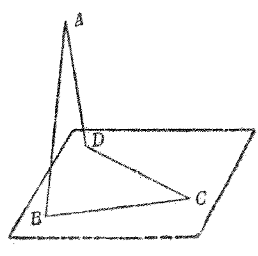
$\therefore$ $A'B'\perp MN$。

習 題

1. 設 $ABCD$ 是不在一平面內的四邊形，求證：

(1)連結 AB, AD 兩邊中點的直線平行於 BC, CD 兩邊中點的直線。

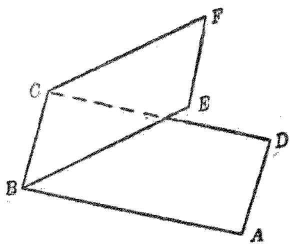
(2)依次連結各邊中點所形成的四邊形爲平行四邊形。

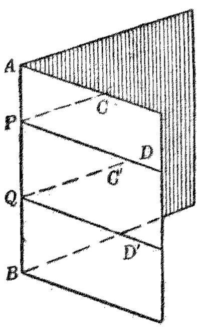


2.　當兩角各邊互相平行時候，在什麼情形兩角是互爲補角。

3.　連結空間四邊形兩對邊的中點的線段互相平分。

§ 128.　二面角　假設平面 $ABCD$ 繞 BC 旋轉到 $BCEF$ 位置，於是他所轉出來的空間叫做二面角，$ABCD$ 及 $BCEF$ 叫做面，BC 叫做稜，二面角的記號爲"A-BC-E"，或縮寫『二面角 BC』。





§ 129.　平面角的定義　設 AB 是已知的二面角，由稜上任意一點向他的兩面內各引一直線與稜垂直，於是所引兩直線所夾的角叫做二面角的平面角，如圖中 CPD 及 $C'QD'$ 都是平面角。

§ 130.　二面角的相等　兩個二面角，如若能疊合在一處，就說他們相等。由疊合證明法得兩命題如下。

命題 10.　定理

§ 131.　兩個相等的二面角，他的平面角也相等。

命題 11.　逆定理

§ 132.　兩個二面角，若是平面角相等，他們也相等。

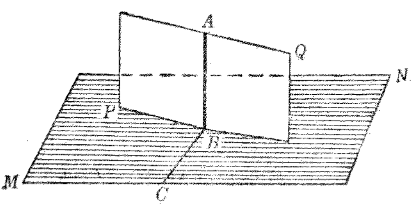
§ 133.　**二面角的分類**　二面角的平面角若是銳角，就叫做銳二面角；若是直角，就叫做直二面角；若是鈍角，就叫做鈍二面角；若是平角，就叫做平二面角。

兩個二面角，因其平面角爲對頂的，相鄰的，互餘的或互補的，分爲對頂二面角，相鄰二面角，互餘二面角，互補二面角。

§ 134.　**兩平面垂直**　兩平面相交，如若是直二面角，我們就說這兩平面互相垂直。

命題 12.　定理

§ 135.　**一直線若與已知平面垂直，則通過該直線的平面都與已知平面垂直。**



假設 $AB \perp$ 平面 MN，通過 AB 作平面 PQ。

求證　$PQ \perp MN$。

（在 MN 內，由 B 點引 $BC \perp BP$，卽證明。）

（注意）應用這個命題，可以作一個平面垂直於已知平面，卽先作 AB 垂直於已知平面 MN，然後通過 AB 作垂直於 MN 的平面 PQ。

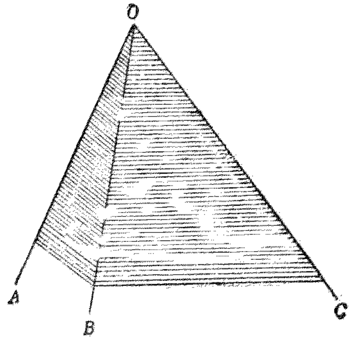
習　題

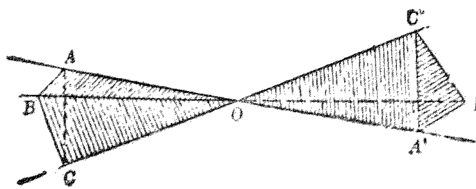
1. 通過一點，作一平面垂直於兩已知平面。

2. 通過一點作一平面垂直於已知平面 MN 并且平行於已知直線 AB。

3. 通過已知直線，作一平面垂直於已知平面。

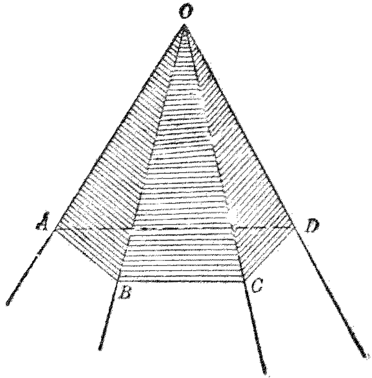
§136. 三面角的定義　由三個平面相交於一點所形成的圖形叫做三面角，每一個三面角有三個面三個稜，O 點叫做頂，寫為 O-ABC。由頂延長各稜又得一個三面角 O-$A'B'C'$，這兩個三面角，雖然每一個





二面彼此相等，但是因為次序不同，他們不能疊合在一處。像這樣的兩個二面角，我們說他們是對稱。

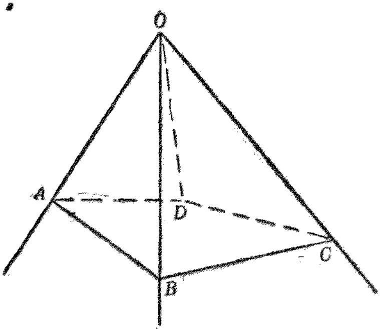
§137. 多面角的定義　多過三個平面相交於一點所形成



的圖形叫做多面角，$\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle COD$，$\angle DOA$各角叫做多面角的面角，寫爲O-$ABCD$。多面角因面數的多少分爲四面角，五面角，…等。

命題 13.　定理

§138.　在三面角中，任意兩個面角的和大於第三面角。



假設　O-ABC 是三面角，$\angle AOC$ 是面角中最大的一個。

求證　$\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC$。

證明　在平面 AOC 內作$\angle DOA=\angle BOA$，截取 $OD=OB$，連結 AB，AD，延長 AD 與 OC 相交於 C 點，連結 BC。於是

$\triangle AOB\equiv\triangle AOD$　　(何故?)

$\therefore\quad AB=AD$　　(何故?)

但是　$AB+BC>AC$　　(何故?)

$\therefore$　$BC>DC$　現在，在 $\triangle BOC$ 及 $\triangle DOC$ 內，因 $OB=OD$, $OC=OC$,　$\therefore$ $\angle BOC>\angle DOC$,　　　　（何故?）

即　$\angle BOC+\angle AOB>\angle DOC+\angle AOB$,（何故?）

即　$\angle BOC+\angle AOB>\angle DOC+\angle DOA$,

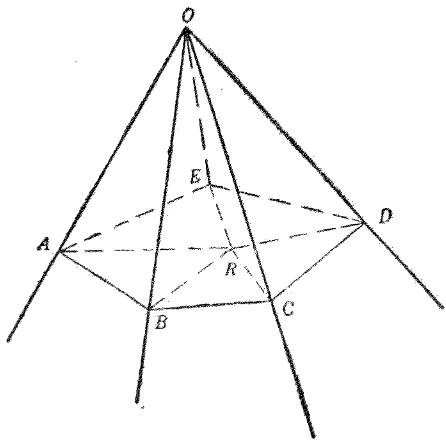
即　$\angle AOB+\angle BOC>\angle COA$。

命題 14.　定理

§139.　多角形的面角和小於四直角。

假設 O-$ABCDE$ 是多面角。

求證 $\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+$………小於四直角。



證明　作一平面與多面角的稜截於 A, B, C, D, E, 與各面截於 AB, BC, CD,………。在這個平面內，任意取一點 R, 連結

RA, RB,⋯⋯。於是三角形 RAB, RBC,⋯⋯等個數,與多角形面角的個數相等。

因爲 $\angle ABO+\angle OBC>\angle ABC$　　　　(何故?)

$\angle BCO+\angle OCD>\angle BCD$

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯

所以凡以 O 爲頂的諸三角形的底角和大於以 R 爲頂的諸三角形的底角和,但是以 O 爲頂的諸三角形的內角和等於以 R 爲頂的諸三角形內角和,因此以 O 爲頂的諸角和小於以 R 爲頂的諸角和,但是以 R 爲頂的諸角和等於四直角,所以以爲頂的諸角小於四直角,即

$\angle AOB+\angle BOC+\cdots\cdots<$四直角。

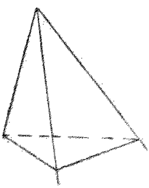
習　題

1. 在多角形中,任意一個面角小於其他面角之和。
2. 不在一個平面內的四邊形,他的內角和小於四直角。
3. 三個平面在空間,不相交於一點,即相交於一直線,問相交於一點及相交於一直線的特別情形?

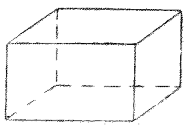
第十五章　多面體 迴轉體

§ 140.　多面體　由許多平面多邊形圍繞成的閉圖叫做多面體。這些平面多邊形叫做多面體的面，面與面相接的線段叫做多面體的稜，稜與稜相接的點叫做頂點，不同在一平面上兩頂點

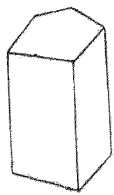
四面體



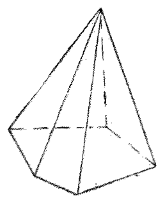
六面體



角柱



角錐

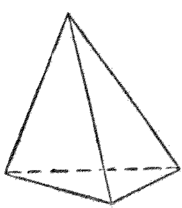


所聯的直線叫做對角線。

§ 141.　五種正多面體　多面體，若各面是正多邊形并且相等，就叫做正多面體。正多面體因受 § 139 命題 14 的限制，祇有五種如下圖：

I.　正四面體

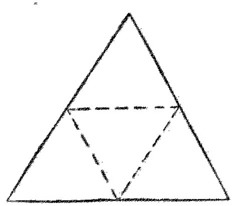
各角頂都由三個等邊三角形湊成



4　個面

4　頂

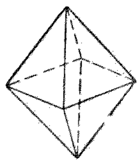
6　稜



依本圖虛線摺疊即得正四面體

II. 正八面體

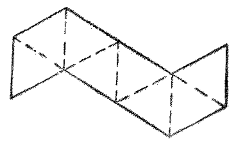
各角頂都由四個等邊三角形湊成



8 面

6 頂

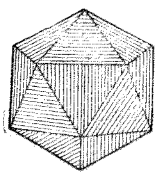
12 稜



依本圖虛線摺疊即得正八面體

III. 正二十面體

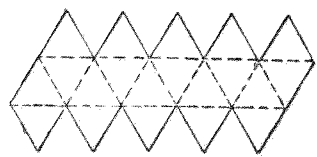
各角頂都由五個等邊三角形湊成



20 面

12 頂

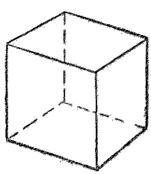
30 稜



依虛線摺疊即得正二十面體

IV. 正六面體(立方體)

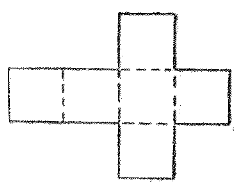
各角由三個正方形湊成



6 面

8 頂

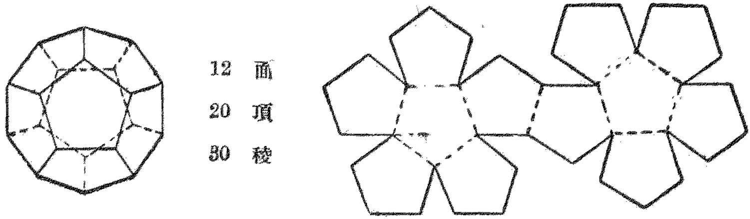
12 稜



依虛線摺疊即得立方體

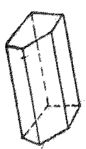
V. 正十二面體

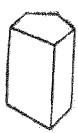
各角頂都由三個正五邊形湊成

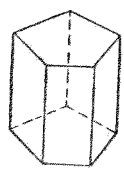


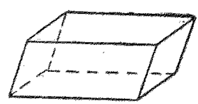
§ 142.　多面體的種類　多面體，除正多面體外，常見的還有角柱，斷角柱，角錐及斷角錐四種。

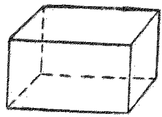
I.　角柱　多面體，若有兩面平行并且相等，其他各面都是平行四邊形，就叫做角柱，平行的兩面叫做上底，下底，其他各面叫做側面，側面與側面相接的線叫做側稜，兩底的距離叫做角柱的高。

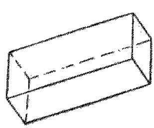

斜角柱

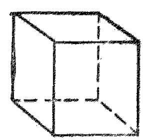

直角柱


正角柱


平行六面體


直平行六面體
（底爲平行四邊形）


長方體
（底爲矩形）


立方體

側稜與底不垂直的角柱叫做斜角柱，側稜與底垂直的角柱叫做直角柱。

上下底都是正多邊形的直角柱叫做正角柱。

上下底是平行四邊形的角柱叫做平行六面體。

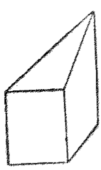
平行六面體，若側稜與底垂直就叫做直平行六面體。

上下底都是矩形的直平行六面體叫做長方體，所以長方體的面都是矩形。

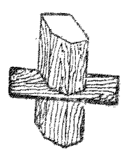
各面都是正方形的平行六面體叫做立方體。

角柱也因上下底是三角形，四邊形，五邊形，……分爲三角柱，四角柱，五角柱，……。

各側面的面積和叫做側面積，側面積加上下底面積叫做全面積。

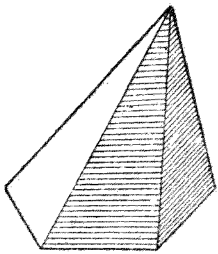

斷角柱

II. 斷角柱　以不與底平行的平面截角柱的各側稜所得截面與底所含的部分叫做斷角柱。

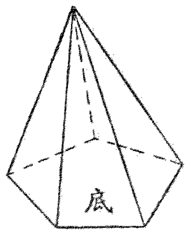


III. 直截面　與側稜垂直的截面叫做直截面。

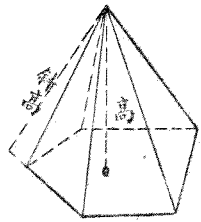
IV. 角錐　一平面截多面角的各面，即得一多邊形，由該多邊形與多面角的面所圍成的多面體叫做角錐。多邊形叫做角柱的底，多面角的頂，面，稜，叫做角錐的頂，



角　錐



正角錐



側面，側稜，從頂點到底的距離叫做高，側面三角形的高叫做斜高，各側面的面積和叫做側面積，側面積加底面積，叫做全面積。

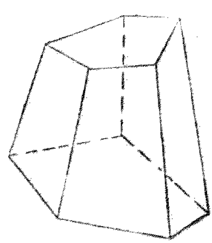
角錐因底爲三角形，四邊形，五邊形，………分爲三角錐，四角錐，五角錐………等。

以正多邊形爲底的角錐叫做正角錐，正角錐的高經過底的心。正角錐有下列各項特性：

1. 各側稜的長相等。

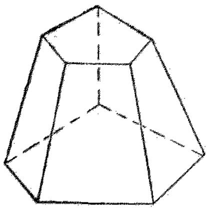
2. 各側面是等腰三角形，并且這些等腰三角形彼此相等。

3. 各側面的斜高相等。



V. 斷角錐　以不平行於底的平面截角錐，所得截面與底中間的部分叫做斷角錐。

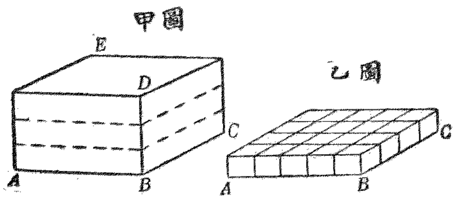
VI. 角錐台　以平行於底的平面



截角錐，所得截面與底中間的部分叫做角錐台，角錐台的側面都是梯形。

§143. 側面積 角柱的側面積等於直截面的周乘側稜，角錐的側面積可用平面幾何求多邊形面積的方法求得。

§144. 求長方體的體積



假設有一個長方體如甲圖，他的長 $AB=5$ 寸，寬 $BC=4$ 寸，高 $BD=3$ 寸，現在因爲 $BD=3$，所以把 BD 可以分爲三等分，同時分長方體爲三個相等的薄片，每片如乙圖所示，每片的體積 $=5$ 寸 $\times 4$ 寸 $\times 1$ 寸，所以長方體的體積 $=5$寸 $\times 4$寸 $\times 3$寸 $=$ 60 立方寸。

做此推想，倘若長方體的長 $=a$ 單位長

寬 $=b$ 單位長

高 $=c$ 單位長

於是長方體的體積$=abc$(單位長)^3

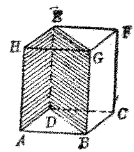
$=abc$ 單位體積。

由是得:

i.　長方體的體積＝長×寬×高

ii.　　　　＝底面積×高

iii.　立方體的體積＝(積)^3。



系　如圖對角面 $BDEG$ 分長方體的底爲兩個相等三角形,分長方體爲兩個三角柱。

習　題

1.　假設長方體的長寬高各爲 a, b, c,求證該長方體的側面積爲 $2c(a+b)$。

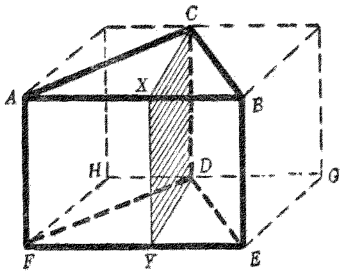
2.　有一長方體,滿盛溫度 4°C 的蒸餾水,已知長方體的長寬高各爲 12 $cm.$, 8 $cm.$, 7.5 $cm.$,問長方體中有多少克的水?

3.　有一塊木質的長方體,他的長,寬,高各爲 14.3 $cm.$, 9.5 $cm.$, 7 $cm.$,每立方公分重 0.3 克,問這塊木質長方體有多少重?

§ 145.　求直角柱的體積

i.　先假設有一個直三角柱 $ABC-DEF$,他的高 $BE=h$。

通過 CD 作一平面 $CDYX$ 垂直於平面 $ABEF$，於是原角柱就被分為兩個直三角柱，各以 FDY，YED 為底。



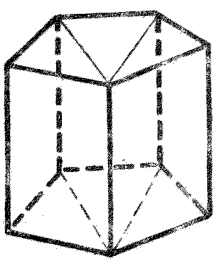
通過 D 點作 $HG//FE$，在 F，E 各點，作垂線 FH，EG，形成矩形 $FEGH$。以 $FEGH$ 為底，h 為高作長方體，於是：

以 FYD 為底的角柱 $=\frac{1}{2}$（以 $FYDH$ 為底的長方體）

以 EYD 為底的角柱 $=\frac{1}{2}$（以 $EYDG$ 為底的長方體）

$\therefore$ 以 DEF 為底的已知角柱 $=\frac{1}{2}$（矩形 $FEGH$）$\times$ 高

$=$ 底面積 FED $\times$ 高。



ii. 以多邊形為底的角柱，可以分為若干個三角柱，所以

直角柱的體積 $=$ 諸三角柱的底面積 $\times$ 高

$=$ 底面積 $\times$ 高。

習　題

1. 設有一水池，其形為長方體，計長 21.52 公尺，寬 16.3 公尺，深 18.4 公尺，問該水池能容多少公斤的水？（一立方公寸的水計重一公斤）

2. 設有一鋼棒,其形爲長方體,計長 1.35 公尺,寬 1.5 公寸,厚 0.7 公寸,鋼的比重爲 7.8,問鋼棒的重是多少公斤?

3. 某處有一水槽,其形爲長方體,計長 12.4 公尺,寬 8.1 公尺,深 64 公寸,現在要把槽的四壁及底都舖以鉛皮,若每平方公尺的鉛皮價 1.8 元,問需要多少錢?

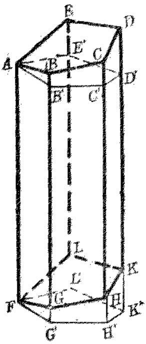
4. 假設直三角柱的底 ABC 是直角三角形,C 角爲直角,AC 的長爲 15 $cm.$,CB 的長爲 8 $cm.$,角柱的高爲 12 $cm.$,問這個角柱的體積及側面積是多少?

5. 設有直角柱,其底爲梯形,梯形的上下底各長 17 $cm.$ 13 $cm.$,兩底的距離爲 9.4 $cm.$,若角柱的高爲 21 $cm.$,問角柱的體積是多少立方公分?

6. 有一水溝,橫截面是梯形,上底長 15 公尺,下底長 9 公尺,溝深 8 公尺,溝長 74.5 公尺。問此溝能容多少公升的水及多少公斤的水?

§146. 求斜角柱的體積

假設 $ABCDE\text{-}FGHKL$ 是斜角柱,$AB'C'D'E'$ 是角柱的直截面,現在把上底 $ABCDE$ 與直截面 $AB'C'D'E'$ 中間的部分移到角柱的下端使 AB 與 FG 相合,BC 與 GH 相合,……於是已知的斜角柱就變爲直角柱 $AB'C'D'E'\text{-}FG'H'K'L'$。



因爲直角柱的體積$=AB'C'D'E'\times AF$，

所以斜角柱的體積$=AB'C'D'E'\times AF$。

斜角柱＝直截面的面積×側稜

假設高與側稜所夾的角爲 θ，於是直截面與底所夾的角也是 θ，

直截面的面積＝底面積$\times\cos\theta$。

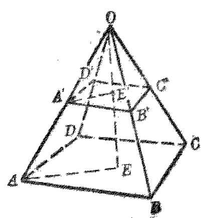
高＝側稜$\times\cos\theta$。

∴　斜角柱＝直截面的面積×側稜……………………(1)

＝底面積$\times\cos\theta\times$側稜……………………(2)

＝底面積×高……………………………………(3)

§147.　求證以平面截角錐的側稜，若該平面與底平行，則(一)各側及高都被截爲成比側，(二)截面是一個與底相似的多邊形。



假設 O-$ABCD$ 是角錐，$A'B'C'D'$ 是與底 $ABCD$ 平行的截面，OE 是角錐的高，與截面相交於 E' 點。求證

(1)　$\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{OB}{OB'}=\dfrac{OC}{OC'}=\dfrac{OD}{OD'}=\dfrac{OE}{OE'}$；

(2)　$A'B'C'D'\backsim ABCD$。

(款一)　因　$A'B'C'D'//ABCD$　　　　(題設)

$\therefore$　$A'B'//AB$,　$B'C'//B'C'$,　$C'D'//CD$,　$D'A'//DA$,

$AE//A'E'$ (§ 112)。

$\therefore$　$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}=\frac{OD}{OD'}=\frac{OE}{OE'}$ (§ 91 命題 54 系)

（款二）　根據款一的證明得：

$\angle A'B'C'=\angle ABC$, $\angle B'C'D'=\angle BCD$, ⋯(§ 126 命題 8)

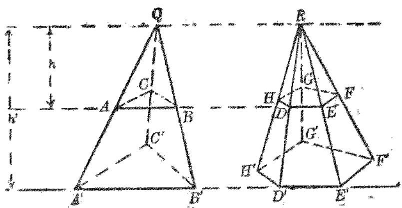
$\therefore$　$A'B'C'D' \backsim ABCD$　　　（相似多邊形定義）

系 1.　若角錐被平行於底的平面所截，則截面面積與底面積的比等於自頂至截面的高與角錐高的平方比。

系 2.　等底等高的兩個角錐，若以離頂點等遠而與底平行的平面相截，則兩截面相等。

因　$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{h^2}{h'^2}$

$=\frac{DEFGH}{D'E'F'G'H'}$。



但　$A'B'C=D'E'F'G'H'$

$\therefore$ $ABC=DEFGH$。

習　題

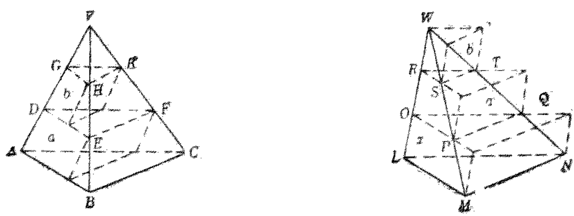
1.　有一角錐，被平行於底的平面截於高的中點，問所得截面的面積是底面積幾分之幾？

2.　有一個高 16 cm. 的角錐，他的底是邊長 12 cm. 的正

方形，現在以平行於底的平面截角錐，若截面離頂的遠是12 $cm.$，問該截面的面積是多少？

3.　已知角錐的底面積是10平方公寸，以離頂9公寸且平行於底的平面截角錐，所得截面的面積爲36平方公寸，問這個角錐的高是多少？

§ 148.　求證兩個等底等高的角錐，其體積相等。



假設 $V\text{-}ABC$, $W\text{-}LMN$ 是兩個等底等高的角錐。求證他們的體積相等。

（證明）　把他們的高，分爲 n 等份，每份的長爲 h，經過分點各作平面平行於底，即得截面 $\triangle DEF$, $\triangle GHK$,……及 $\triangle OPQ$, $\triangle RST$,……以 $\triangle DEF$, $\triangle GHK$……爲上底，AD, DG,……爲側稜，作角柱 a, b,……。又以 $\triangle LMN$, $\triangle OPQ$, $\triangle RST$……爲下底，LO, OR,……爲側稜作角柱 x, a', b',……。

$\because\quad \triangle DEF=\triangle OPQ,\ \triangle GHK=\triangle RST,$……………

（§ 147 系 2）

$a=h\times DEF,\ a'=h\times OPQ,\ \therefore\ a=a'$

同理，　$b=b'$，………

但是　$V\text{-}ABC>a+b+\cdots\cdots\cdots$

$W\text{-}LMN<x+a'+b'+\cdots\cdots\cdots$

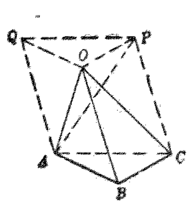
$W\text{-}LMN$ 與 $V\text{-}ABC$ 的差$<x+a'+b'+\cdots\cdots$

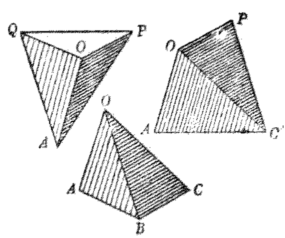
$-(a+b+\cdots\cdots)$

$<x$

現在若把 n 增至無窮大，h 就可以小到比任何說得出或寫得出的小數還要小，即 x 可以小到比任何說得出或寫得出的數還要小，　$\therefore\ V\text{-}ABC=W\text{-}LMN$。

§149.　求角錐的體積　這個問題須分為 i, ii 兩步來講，即





i.　三角錐的體積。

假設 $O\text{-}ABC$ 是三角錐，他的高是 h。

通過 A, C 作 $AQ//BO$，$CP//BO$，又通過 O 作平面 $OPQ//$

ABC, 於是得角柱 OPQ-ABC,

$$角柱的體積=\triangle ABC\times h。$$

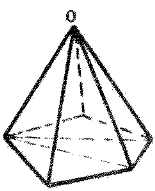
連結平行四邊形 $ACPQ$ 的對角線 AP, 於是這個角柱就分爲三個三角錐, O-ABC, O-ACP, O-APQ。

但 O-ACP 與 O-APQ 是等底同系的三角錐, 所以他們的體積相等,又 O-APQ 可以看作 A-OPQ,

但是 $\triangle OPQ=\triangle ABC$, 并且 $\triangle OPQ//\triangle ABC$, 所以 O-APQ, 的體積與 O-ABC 的體積相等。

由是,這個角柱分爲三個等積的角錐。

$$\therefore\quad 角錐的體積=\frac{1}{3}角柱的體積$$
$$=\frac{1}{3}底面積\times高。$$



ii. 任意角錐的體積　因爲角錐的底多邊形,可以分爲若干個三角,卽一般的角錐可以分爲同頂的三角錐, 所以他的體積$=\frac{1}{3}$底面積×高。

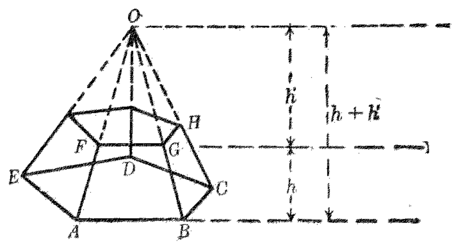
習　題

1. 兩個等高的角錐,他們體積的比等於底面積的比。
2. 兩個等底的角錐,他們體積的比等於高的比。
3. 設有高 6 尺的角錐, 他的底是長 5 尺寬 4 尺的長方

形，問這個角錐的體積是多少？

4. 設有高 18 尺的角錐，他的底是梯形，梯形的上下底的長各爲 6 尺，14 尺。上下底的距離爲 12 尺，問這個角錐的體積是多少？

§ 150. 角錐台的體積　假設 $ABCDE\text{-}FGH\cdots\cdots$ 是角錐台，大底 $ABCDE$ 的面積爲 B，小底 $FGH\cdots\cdots$ 的面積爲 b，高爲 h，又設 $O\text{-}ABCDE$ 是這個角錐台的角錐，他的高爲 $h+h'$，於是



$$O\text{-}ABCDE \text{ 的體積} = \frac{1}{3}B\times(h'+h)$$

$$O\text{-}FGH\cdots \text{ 的體積} = \frac{1}{3}b\times h'$$

$$\therefore \quad \text{角錐台 } AH \text{ 的體積} = \frac{1}{3}B(h'+h) - \frac{1}{3}bh'$$

$$= \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3}(B-b)h'.$$

$$\text{但是}\frac{B}{b} = \frac{(h'+h)^2}{h'^2} \quad \therefore \quad \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} = \frac{h'+h}{h'}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{B}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{h'+h-h'}{h'} = \frac{h}{h'}$$

$$\frac{B-b}{\sqrt{b}\,(\sqrt{B}+\sqrt{b})}=\frac{h}{h'}，\text{即}\ (B-b)h'=(\sqrt{Bb}+b)\,h。$$

$$\therefore\quad \text{角錐台}\,AH\,\text{的體積}=\frac{1}{3}Bh+\frac{1}{3}(\sqrt{Bb}+b)h$$

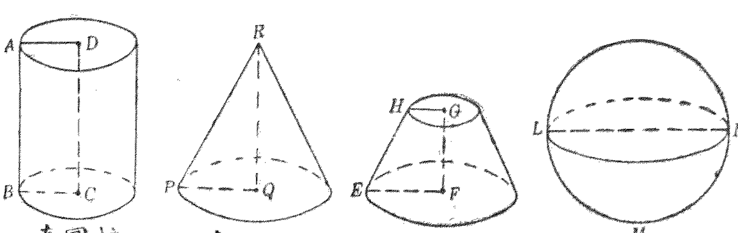
$$=\frac{1}{3}h\,(B+b+\sqrt{Bb})。$$

習　　題

1. 角錐台的側面都是梯形，試證明之。

2. 某工廠的煙囱，其形爲角錐台，高 50 公尺，上底爲正方形各邊的長爲 4 公尺，下底也是正方形各邊的長爲 6 公尺，煙囱內部通煙部分的橫截面自底至頂都是 6 平方公尺，現在用長 20 cm. 寬 15 cm. 厚 10 cm. 的磚造這個煙囱，除去 10% 的空間爲石灰所佔外，問造這個煙囱要多少磚？

§151.　迴轉面及迴轉體　平面形依一定直線旋轉，他所轉

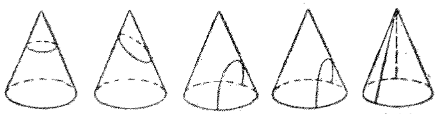


直圓柱　直圓錐　圓錐台　球

出來的空間叫做迴轉體,他的周界所轉出來的空間叫做迴轉面。

I.　矩形 $ABCD$,以其一邊 CD 爲軸所轉得的立體叫做迴轉柱,或直圓柱,對邊 AB 所轉出的面叫做迴轉面,CD 叫做軸,AB 叫做母線,AD 與 BC 所轉出的圓叫做上底,下底。軸 CD 就是直圓柱的高。與軸垂直的截面都是圓。并且這些圓的大小相等,與軸平行的截面都是矩形。

II.　直角三角形 PQR,以其一腰爲軸所轉出的立體叫做迴轉錐或直圓錐,斜邊 RP 所轉出的面叫做迴轉面,RP 叫做母線,PQ 所轉出的圓叫做底



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

(1)若截面與軸垂直,則截線是圓周。

(2)若截面與所有母線相截但不與軸垂直,則截線是橢圓。

(3)若截面與母線平行,則截線是拋物線。

(4)若截面與軸平行,則截線爲雙曲線。

(5)若截面通過頂點,則截線是兩條直線。

這五種線總稱圓錐曲線,或圓錐截線。

III.　設有梯形 $EFGH$,其腰 FG 與上下底垂直,依該腰 FG 所轉出來的立體叫做圓錐台,上下底所轉出來的圓叫做底。

兩底的公垂線叫做高，HE 叫做母線或側高。

IV. 以半圓 LMN 繞直徑 LN 所轉出的立體叫做球，半圓周所轉出來的面叫做球面，圓周的心叫做球心，圓周的半徑，直徑叫做球的半徑，直徑，由球的產生可知：

(1) 球面上各點都離球心等距離，卽同球的半徑都相等。

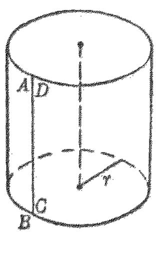
(2) 同球的直徑都相等，直徑等於半徑的兩倍。

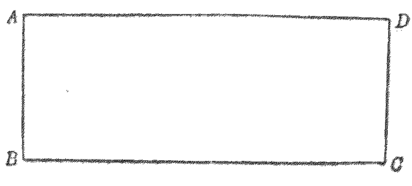
(3) 球祇有一個心。

(4) 凡半徑相等的球叫做等球，等球的半徑相等，直徑也相等。

(5) 平面與球相截的截面都是圓。

§ 152. 求直圓柱的面積及體積。





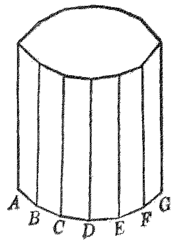
i. 面積

用剪沿着母線 AB 把直圓柱剪開成為矩形 $ABCD$，

於是直圓柱的側面積 $= \square ABCD = 2\pi r \times h$ 單位面積。

直圓柱的全面積 $= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$ 單位面積。

ii. 體積



假設有一個正角柱 $ABCDEFG$..........，他的邊數爲 n，現在使 n 漸漸增加爲無窮大，於是這個正角柱就逼近於直圓柱，正角柱的體積等於底乘高，所以

$$直圓柱的體積=底\times高$$
$$=\pi r^2 h \text{ 單位體積}$$

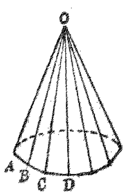
習　　題

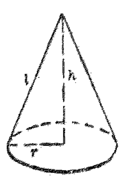
1. 已知 $r=3.2\,cm.$，$h=8.4\,cm.$，求直圓柱的側面積，全面積及體積。

2. 3.1416 立方公分的銅拉成 100 公尺長的銅絲，問該銅線的直徑有多少長？

3. 已知直圓柱的側面積爲 1000 平方公分，底的直徑 20 公分的長，問直圓柱的體積是多少？

§153. 求直圓錐的面積及體積





假設有一個正角錐 O-$ABCD$....。他的邊數無窮的增加，於是這個正角錐就可以逼似直圓錐，由這樣推論得：

$$\text{直圓錐的側面積} = \frac{1}{2}\text{底周界} \times \text{側高}$$

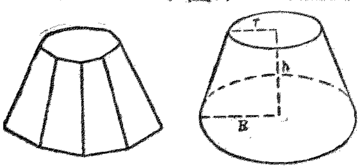
$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l = \pi r l \text{ 單位面積。}$$

$$\text{直圓錐的體積} = \frac{1}{3}\text{底} \times \text{高}$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ 單位體積。}$$

§ 154.　求圓錐台的體積　假設有一個以正多邊形爲底的角錐台,他的邊數無窮的增加,於是這個角錐台就可以逼似圓錐台,由這樣推想可得:



I.　$\text{圓錐台的體積} = \frac{1}{3} h\,(B + b + \sqrt{Bb})$。

但　　$B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$, $\sqrt{Bb} = \pi R r$.

$\therefore$　$\text{圓錐台的體積} = \frac{\pi}{3} h (R^2 + r^2 + Rr)$ 單位體積。

II.　側面積

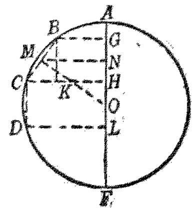
$$\text{角錐台的側面積} = \text{各梯形的和}$$

$$= \frac{1}{2}\text{側高} \times (\text{上底周界} + \text{下底周界})$$

倣上面道理推得:

圓錐台的側面積 $=\frac{1}{2}$ 側高 $\times$ (上圓周＋下圓周)。

§155. 球的面積　假設這個球是由半圓 $ABCDF$ 旋轉出來的，他的半徑為 R，球心為 O。



在半圓 $ABCDF$ 內作內接正多邊形 $ABCD$……，其邊數為偶數，由 O 作 OM 垂直於任意一邊，譬如 $OM\perp BC$，由 B, M, C 各作垂線 $BG, MN,$……垂直於 AF，$BK\perp CH$。

梯形 $BCHG$ 繞一腰 GH 旋轉一周，即得圓錐台，其側面積 $=\frac{1}{2}BC\times(2\pi\overline{CH}+2\pi\overline{BG})=\pi\overline{BC}(\overline{CH}+\overline{BG})$。但 M 是 BC 的中點，$BG//MN//CH$，$\therefore\ MN=\frac{1}{2}(CH+BG)$，於是 BC 所轉出的圓錐側面積 $=2\pi\overline{MN}\cdot\overline{BC}$。

現在 $\because\quad \triangle CKB\backsim\triangle MNO$

$$\therefore\quad \frac{OM}{BC}=\frac{MN}{BK},\quad \text{但}\ BK=GH$$

$$\therefore\quad \frac{OM}{BC}=\frac{MN}{GH}$$

$$\therefore\quad OM\times GH=BC\times MN。$$

$\therefore$ BC 所轉出的迴轉面 $=2\pi\times OM\times GH$。

依同樣道理

AB 所轉出的迴轉面 $=2\pi\times OM\times AG$。

CD 所轉出的迴轉面 $=2\pi\times OM\times HL$。

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

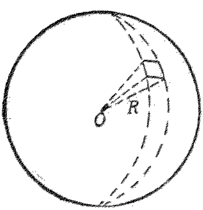
所以 $ABCD\cdots$ 所轉出的迴轉面 $=2\pi\times OM\times(AG+GH+\cdots)$

$$=2\pi\times OM\times 2R$$

$$=4\pi R\times OM。$$

現在假設內接正多邊形的邊數增到無窮的多，OM 就逼近於 R，多邊形 $ABCD\cdots\cdots$ 的迴轉面也就是半圓的迴轉面，所以球面積 $=4\pi R^2$。

§156.　球體積　　球面可以如圖所示的分爲許多小部分，



這種小部分與球心相聯結就成爲以球面的小部分爲底 R 爲高的角錐。現在假設球面的小部分是非常的小，小到逼近於平面，於是這個角錐的體積 $=\dfrac{1}{3}R\times$(球面小部分)；

但球面小部分的和 = 球面 $=4\pi R^2$。

$$\therefore\qquad 球的體積=\frac{4}{3}\pi R^3。$$

習　題

1.　假設 S 是正圓錐的側面積，V 是體積，h 是高，r 是底的半徑，α 是軸與母線所夾的角，求證下列各式：

i.　$S=\dfrac{\pi h^2 \mathrm{tg}\alpha}{\cos\alpha}$　　　ii.　$V=\dfrac{1}{3}\pi h^3 \mathrm{tg}^2\alpha$

2.　假設圓錐的半徑爲 6 $cm.$, 側高爲 10 $cm.$, 求圓錐的側面積及體積。

3.　假設圓錐的高爲 40 $cm.$, 底的直徑爲 18 $cm.$, 求圓錐的側面積,全面積及體積。

4.　問以 2.5 $cm.$ 爲半徑的球的面積及體積是多少?

5.　已知球的面積等於以 2.8 $cm.$ 爲直徑的圓的面積,試求球的面積及體積。

6.　以直徑 6 $cm.$ 長的金屬球做成 4 $cm.$ 長的圓筒, 筒的外直徑爲 10 $cm.$, 問筒的厚是多少?