И. С. Громека, О влiянiи неравномѣрнаго распредѣленiя температуры на распространенiе звука, *Матем. сб.*, 1889, том 14, номер 2, 283–302

О ВЛІЯНІИ НЕРАВНОМѢРНАГО РАСПРЕДѢЛЕНІЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА РАСПРОСТРАНЕНІЕ ЗВУКА.

И. С. Громеки.

Распредѣленіе температуры въ воздухѣ оказываетъ, какъ извѣстно, значительное вліяніе на различныя обстоятельства, сопровождающія распространеніе звуковыхъ волнъ. Пытаясь представить теоретическое объясненіе этого вліянія, я изложилъ въ статьѣ, помѣщенной въ Ученыхъ Запискахъ Казанскаго Университета [1]) выводъ дифференціальныхъ уравненій малыхъ колебаній неравномѣрно нагрѣтой воздушной массы, пренебрегая въ этихъ уравненіяхъ не только членами, пропорціональными квадратамъ скоростей, но и тѣми, которые пропорціональны квадрату времени колебаній. Въ настоящее время я убѣдился, что предположеніе весьма малой продолжительности колебаній вопервыхъ не представляется необходимымъ для вывода упомянутыхъ дифференціальныхъ уравненій, а вовторыхъ находится въ противорѣчіи съ нѣкоторыми другими предположеніями, которыя при этомъ выводѣ были приняты [2]). Исправивъ эту ошибку и отбросивъ допущеніе

[1]) „О вліяніи температуры на малыя колебанія воздушныхъ массъ“. Ученыя Записки Казанскаго Университета. 1888.

[2]) Въ § 1 цитированной статьи функціи u, v, w, s и ихъ производныя по координатамъ предполагаются безконечно малыми. Между тѣмъ, основываясь на уравненіи неразрывности легко убѣдиться, что въ предположеніи безконечно малой продолжительности колебаній u, v, w должны быть безконечно велики въ сравненіи съ функціею s.

весьма малой продолжительности колебаній, я рѣшаюсь въ настоящей статьѣ представить новый опытъ составленія дифференціальныхъ уравненій весьма малыхъ колебаній неравномѣрно нагрѣтой воздушной массы.

§ 1. **Предположенія о свойствахъ и состояніи колеблющагося газа.**

Представимъ себѣ массу воздуха, находящагося въ опредѣленный моментъ t_0 въ покоѣ и въ равновѣсіи и положимъ, что для этого момента распредѣленіе температуры, давленія и плотности въ газѣ извѣстны. Опредѣляя положеніе каждой точки содержащаго воздухъ пространства ея прямоугольными координатами x, y, z и обозначая для рассматриваемаго момента t_0 черезъ p_0, ρ_0 и T давленіе, плотность и абсолютную температуру газа въ какомъ либо элементѣ его въ извѣстной точкѣ A (x, y, z), мы будемъ разсматривать p_0, ρ_0 и T какъ данныя функціи координатъ. Если при томъ X, Y, Z суть проэкціи по осямъ внѣшнихъ силъ, то по извѣстнымъ уравненіямъ гидростатики будемъ имѣть соотношенія

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{dp_0}{dx} = X,\ \frac{1}{\rho_0}\frac{dp_0}{dy} = Y,\ \frac{1}{\rho_0}\frac{dp_0}{dz} = Z. \tag{1}$$

Мы предположимъ, что ни одна изъ величинъ

$$\frac{d\rho_0}{dx},\ \frac{d\rho_0}{dy},\ \frac{d\rho_0}{dz},\ \ \frac{dp_0}{dx},\ \frac{dp_0}{dy},\ \frac{dp_0}{dz},$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dx},\ \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dy},\ \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz},\ \ \frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{dx},\ \frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{dy},\ \frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{dz}$$

не имѣетъ безконечно большаго значенія въ какомъ бы то ни было мѣстѣ газа.

Представимъ себѣ теперь, что вслѣдствіе нѣкотораго сотрясенія масса газа пришла въ движеніе, и что частицы ея совершаютъ весьма малыя колебанія вокругъ прежнихъ положеній своего равновѣсія. Обозначимъ черезъ u, v, w проэкцiи по осямъ координатъ скорости частицы, проходящей въ извѣстный моментъ времени t черезъ какую либо точку A (x, y, z). Давленiе и плотность въ той же точкѣ A для момента t обозначимъ черезъ p и ρ.

Мы предположимъ еще, что происходящiя во время колебанiй въ каждомъ отдѣльномъ мѣстѣ пространства измѣненiя плотности газа весьма малы по отношенiю къ единицѣ плотности. Подобное этому допущенiе мы примемъ также относительно давленiя. Вслѣдствiе этого, положивъ

$$s=\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\,,\quad q=\frac{p-p_0}{p_0}\,,$$

или иначе

$$\rho=\rho_0(1+s),\ p=p_0(1+q), \tag{2}$$

будемъ считать s и q весьма малыми величинами перваго порядка, наравнѣ съ величинами проэкцiй u, v, w и условимся отбрасывать въ нашихъ уравненiяхъ каждый членъ, содержащiй произведенiе которой нибудь пары изъ числа этихъ пяти величинъ.

Кромѣ того мы примемъ, какъ это обыкновенно дѣлается при выводѣ основныхъ уравненiй теорiи звука, что колеблющiйся газъ подчиненъ законамъ Марiотта и Гэй-Люссака, и что каждая частица газа сохраняетъ при колебанiи всю свою теплоту. Законъ Марiотта и Гэй-Люссака для момента t_0 будетъ выраженъ уравненiемъ

$$p_0=k\rho_0 T, \tag{3}$$

въ которомъ k означаетъ извѣстное постоянное; адiабатный же характеръ процесса, сопровождающаго колебанiя частицъ, мы выразимъ извѣстнымъ уравненiемъ

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=h, \tag{4}$$

въ которомъ γ означаетъ постоянное отношенiе двухъ удѣльныхъ теплотъ, а h есть количество, постоянное для каждой отдѣльной частицы. Понимая подъ h_0 значеніе функціи h для момента t_0 и пренебрегая весьма малыми величинами втораго порядка, имѣемъ изъ уравненій (2) и (4)

$$h = h_0(1 + q - \gamma s).$$

Условимся обозначать символомъ D полное дифференцированіе по времени какой либо функціи, характеризующей состояніе каждой частицы газа, т. е. положимъ

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} + u\frac{d}{dx} + v\frac{d}{dy} + w\frac{d}{dz}.$$

Адіабатный характеръ колебаній можетъ быть при этомъ выраженъ уравненіемъ

$$h_0\left(\frac{Dq}{Dt} - \gamma\frac{Ds}{Dt}\right) + (1 + q - \gamma s)\frac{Dh_0}{Dt} = 0.$$

Отсюда, полагая

$$lg h_0 = f,$$

и пренебрегая безконечно малыми членами высшихъ порядковъ, находимъ

$$\frac{dq}{dt} - \gamma\frac{ds}{dt} + u\frac{df}{dx} + v\frac{df}{dy} + w\frac{df}{dz} = 0. \tag{5}$$

§ 2. **Дифференціальныя уравненія малыхъ колебаній неравномѣрно нагрѣтой воздушной массы.**

Примѣняя къ малымъ колебаніямъ воздушной массы основныя формулы гидродинамики и отбрасывая весьма малые члены втораго порядка, имѣемъ уравненія

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}, \quad \frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}, \quad \frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}.$$

Подставивъ сюда выраженія ρ и p изъ (2) и опять отбросивъ члены втораго порядка, составимъ уравненія

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho_0}\frac{dp_0}{dx} + X(s-q) - kT\frac{dq}{dx},$$

$$\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho_0}\frac{dp_0}{dy} + Y(s-q) - h\,T\frac{dq}{dy},$$

$$\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho_0}\frac{dp_0}{dz} + Z(s-q) - k\,T\frac{dq}{dz},$$

которыя вслѣдствіе соотношеній (1) принимаютъ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X(s-q) - k\,T\frac{dq}{dx}, \\ \frac{dv}{dt} &= Y(s-q) - k\,T\frac{dq}{dy} \\ \frac{dw}{dt} &= Z(s-q) - k\,T\frac{dq}{dz}. \end{aligned} \tag{6}$$

Сюда должно быть присоединено условіе неразрывности, которое, съ принятою степенью приближенія можетъ быть представлено уравненіемъ

$$u\frac{dlg\rho_0}{dx} + v\frac{dlg\rho_0}{dy} + w\frac{dlg\rho_0}{dz} + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + \frac{ds}{dt} = 0. \tag{7}$$

Уравненія (5), (6) и (7) служатъ для опредѣленія малыхъ колебаній газа при дѣйствіи какихъ либо внѣшнихъ силъ и подъ вліяніемъ какого либо распредѣленія температуры.

§ 3. **О вліяніи тяжести на вертикальное распространеніе плоской звуковой волны.**

Разсмотримъ вертикальное распространеніе плоской звуковой волны въ равномѣрно нагрѣтомъ воздухѣ, принимая въ расчетъ дѣйствіе тяжести. Направивъ ось x вертикально вверхъ и обозначивъ напряженіе тяжести черезъ g, будемъ для разсматриваемаго случая имѣть

$$v=0,\ w=0,\ X=-g,\ Y=0,\ Z=0,\ f=Const.-(\gamma-1)\,lg\,p_0.$$

Уравненія (5), (6) и (7) принимаютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dq}{dt}-\gamma\frac{ds}{dt}+\frac{g(\gamma-1)}{kT}u=0,$$

$$\frac{du}{dt}=-g(s-q)-kT\frac{dq}{dx},$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{ds}{dt}-\frac{gu}{kT}=0.$$

Исключивъ отсюда s и q, найдемъ уравненіе

$$\frac{d^2u}{dt^2}=k\gamma T\frac{d^2u}{d^2x}-g\gamma\frac{du}{dx}.$$

Ему можно удовлетворить интеграломъ

$$u=A\varepsilon^{\varepsilon x}\cos(mx-nt-\delta), \tag{8}$$

въ которомъ A, ε m, n и δ суть нѣкоторыя постоянныя; подставивъ этотъ интегралъ въ уравненіе (8) и положивъ $k\gamma T=a^2$, найдемъ соотношенія

$$m^2=\frac{n^2}{a^2}-\frac{g^2\gamma^2}{4a^4},\ \varepsilon=\frac{g\gamma}{2a^2}.$$

Выраженіе (8) представляетъ волну, распространяющуюся вертикально съ постоянною скоростью

$$V=\frac{a}{\sqrt{1-\frac{g^2\gamma^2}{4a^2n^2}}}$$

но при измѣняющейся амплитудѣ. Скорость распространенія звука при этихъ обстоятельствахъ подъ вліяніемъ тяжести увеличена, но легко убѣдиться, что это увеличеніе ничтожно. Такъ напримѣръ, принявъ за единицу длины метръ, за единицу времени секунду, считая число колебаній въ секунду $N=200$, и положивъ приблизительно $\gamma=1{,}4$, $g=9{,}8$, $a=330$, $\pi=3{,}14$, найдемъ

$$V=a(1+\omega),$$

гдѣ

$$\omega<\frac{1}{10^8}.$$

Немногимъ значительнѣе и вліяніе множителя $e^{\varepsilon x}$, такъ какъ при взятыхъ нами числовыхъ данныхъ имѣемъ приблизительно

$$\varepsilon=\frac{1}{15875}.$$

По мѣрѣ распространенія звуковой волны кверху сила звука нѣсколько увеличивается. Но это заключеніе очевидно относится лишь къ тому предположенію, что на всемъ пути волны напряженіе тяжести не измѣняется, температура вездѣ одинакова, и частицы газа кромѣ упругости и тяжести не испытываютъ никакихъ другихъ вліяній.

§ 4. **Вліяніе температуры на распространеніе звука при отсутствіи внѣшнихъ силъ.**

Убѣдившись такимъ образомъ въ весьма слабомъ дѣйствіи тяжести на распространеніе звука, возвратимся къ общимъ уравненіямъ (6) и, отбросивъ въ нихъ члены, зависящіе отъ внѣшнихъ силъ, сохранимъ сдѣланное раньше предположеніе, что температура есть опредѣленная, произвольно данная функція координатъ. Тогда вмѣсто уравненій (6) будемъ имѣть слѣдующія

$$\frac{du}{dt}=-kT\frac{dq}{dx},\ \frac{dv}{dt}=-kT\frac{dq}{dy},\ \frac{dw}{dt}=-kT\frac{dq}{dz}. \qquad (9)$$

Что же касается уравненія (5), то слѣдуетъ замѣтить, что при отсутствіи внѣшнихъ силъ давленіе p_0 имѣетъ одинаковое во всѣхъ мѣстахъ газа значеніе и поэтому

$$f = Const. - \gamma\, lg\, \rho_0 = Const + \gamma\, lg\, T.$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (5) принимаетъ для разсматриваемаго случая слѣдующій видъ:

$$\frac{dq}{dt} - \gamma \frac{ds}{dt} + \frac{\gamma}{T}\left(u\frac{dT}{dx} + v\frac{dT}{dy} + w\frac{dT}{dz}\right) = 0. \tag{10}$$

Уравненіе же (7) въ этомъ случаѣ будетъ

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + \frac{ds}{dt} - \frac{1}{T}\left(u\frac{dT}{dx} + v\frac{dT}{dy} + w\frac{dT}{dz}\right) = 0$$

или иначе, на основаніи уравненія (10),

$$\frac{dq}{dt} + \gamma\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0. \tag{11}$$

Система уравненій (9), (10) и (11) должна служить для опредѣленія малыхъ колебаній воздушной массы при отсутствіи внѣшнихъ силъ. Замѣчательно однако, что при всякомъ распредѣленіи температуры функціи u, v, w, s могутъ быть предварительно изъ уравненій (9), (10) и (11) исключены. Въ самомъ дѣлѣ, продифференцировавъ первое изъ уравненій (9) по x, второе по y, третье по z, сложивъ и принявъ во вниманіе уравненіе (11), найдемъ

$$\frac{dq^2}{dt^2} = k\gamma\left[\frac{d}{dx}\left(T\frac{dq}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(T\frac{dq}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(T\frac{dq}{dz}\right)\right]. \tag{12}$$

Коль скоро функція q найдена какъ интегралъ этого уравненія, легко могутъ быть опредѣлены и функціи u, v, w изъ уравненій (9).

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ разсматривать только тѣ движенія, которыя состоятъ изъ простыхъ колебаній, имѣющихъ одинаковый періодъ во всѣхъ мѣстахъ пространства, занятаго газомъ. Для такихъ движеній, обозначая черетъ n нѣкоторое постоянное, а черезъ q_0, u_0, v_0, w_0, δ, δ', δ'', δ''' нѣкоторыя функціи координатъ, будемъ имѣть

$$u = u_0 \cos(nt + \delta'),\quad v = v_0 \cos(nt + \delta''),\quad w = w_0 \cos(nt + \delta''')$$

$$q = q_0 \sin(nt + \delta).$$

При этомъ уравненія (12) и (9) замѣнятся слѣдующими:

$$\frac{d}{dx}\left(T\frac{dq}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(T\frac{dq}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(T\frac{dq}{dz}\right) + \frac{n^2 q}{k\gamma} = 0, \tag{13}$$

$$u = \frac{kT}{n^2}\cdot\frac{d^2q}{dxdt},\quad v = \frac{kT}{n^2}\cdot\frac{d^2q}{dydt},\quad w = \frac{kT}{n^2}\cdot\frac{d^2q}{dzdt}. \tag{14}$$

§ 5. **Изслѣдованіе нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ распространенія звука въ неравномѣрно нагрѣтой средѣ.**

1. Предположимъ сначала, что температура среды равномѣрно уменьшается по направленію опредѣленной прямой, и что колебанія воздушной массы происходятъ въ томъ же направленіи. Разсмотримъ въ этихъ предположеніяхъ распространеніе плоской волны, соотвѣтствующей звуку опредѣленнаго тона.

Такъ какъ въ покоющейся атмосферѣ температура обыкновенно убываетъ съ возвышеніемъ надъ земною поверхностью, и такъ какъ для высотъ не слишкомъ значительныхъ эту убыль можно принимать пропорціональною высотамъ, то очевидно, что разсматриваемый частный случай представлвеотъ особенный интересъ, позволяя указать нѣкоторыя обстоятельства, которыми можетъ сопровождаться въ природѣ вертикальное распространеніе звуковыхъ волнъ.

Принявъ направленіе упомянутой прямой за ось x и обозначивъ черезъ ε извѣстное постоянное, а черезъ T_0 значеніе температуры среды въ плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, будемъ имѣть

$$T = T_0 - \varepsilon x.$$

Уравненіе (13) принимаетъ для разсматриваемаго случая, послѣ введенія новаго перемѣннаго T, слѣдующій видъ

$$\frac{d q}{dT^2}+\frac{1}{T}\frac{dq}{dT}+\frac{n^2}{\varepsilon^2 k\gamma}\cdot\frac{q}{T}=0.$$

Его интегралъ выражается черезъ Бесселевы функціи.

Обозначая черезъ A, B, A', B', нѣкоторыя постоянныя и полагая для сокращенія

$$z=\frac{2n}{\varepsilon}\sqrt{\frac{T}{k\gamma}},$$

находимъ именно

$$q=[AJ_0(z)+BY_0(z)]\cos nt+[A'J_0(z)+B'Y_0(z)]\sin nt.$$

Отсюда, съ помощью уравненій (9), обозначая черезъ C, D, C', D' другія постоянныя, и основываясь на извѣстномъ соотношеніи

$$\frac{dJ_0}{dz}=-J_1(z),$$

найдемъ для опредѣленія скорости колебаній слѣдующее выраженіе

$$u=[CJ_1(z)+DY_1(z)]\sqrt{T}\cos nt+[C'J_1(z)+D'Y_1(z)]\sqrt{T}\sin nt.$$

Воспользуемся теперь извѣстнымъ разложеніемъ Бесселевыхъ функцій въ ряды, расположенные по убывающимъ степенямъ перемѣннаго. Заимствуя для этого результаты статьи *Hankel'a* [1]) и отбрасывая для сокращенія формулъ нѣкоторые постоянные коэффиціенты, имѣемъ

$$J_1(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}\left[M\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+N\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$Y_1(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}\left[M\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-N\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

---

[1]) Mathematische Annalen. Bd. I, S. 494, 495.

гдѣ

$$N = 1 - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} \cdot \frac{1}{(2z)^2} + \ldots,$$

$$M = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1.2z} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 . 1-\left(\frac{3}{2}\right)^2 . 1-\left(\frac{5}{2}\right)^2}{1.2.3.(2z)^3} + \ldots$$

Положивъ далѣе

$$\psi = z - \frac{\pi}{4} = \frac{2n}{\varepsilon}\sqrt{\frac{T}{k\gamma}} - \frac{\pi}{4}$$

и перемѣнивъ въ одномъ и томъ же отношеніи значенія постоянныхъ C, D, C', D', получимъ

$$u = [(CM - DN)\cos\psi\cos nt + (D'M + C'N)\sin\psi\sin nt +$$
$$+ (DM + CN)\sin\psi\cos nt + (C'M - D'N)\cos\psi\sin nt]\sqrt[4]{T}.$$

Отсюда, принимая между коэффиціентами соотношенія

$$C' = D,\ D' = -C,$$

найдемъ выраженіе

$$u = [(CM - DN)\cos(\psi + nt) + (DM + CN)\sin(\psi + nt)]\sqrt[4]{T}, \tag{15}$$

соотвѣтствующее прямой волнѣ, распространяющейся въ сторону къ положительному концу оси x.

Если же примемъ

$$C' = -D,\ D' = C,$$

то получимъ выраженіе

$$u = [(CM - DN)\cos(\psi - nt) + (DM + CN)\sin(\psi - nt)]\sqrt[4]{T}, \tag{16}$$

соотвѣтствующее обратной волнѣ. Наконецъ общее выраженіе интеграла соотвѣтствуетъ одновременному существованію обѣихъ волнъ, прямой и обратной.

Такимъ образомъ движенiе воздушной массы при сдѣланныхъ нами предположенiяхъ представляетъ двѣ плоскихъ волны, которыя вмѣстѣ или порознь распространяются въ противоположныя стороны съ измѣняющеюся скоростью и при измѣняющейся амплитудѣ.

Скорость V распространенiя каждой изъ этихъ волнъ мы опредѣлимъ изъ уравненiй (15) и (16). Для этого слѣдуетъ приравнять фазу

$$n\left(\frac{2}{\varepsilon}\sqrt{\frac{T}{k\gamma}} \pm t\right) - \frac{\pi}{4}$$

постоянному, т.-е. составить уравненiе

$$\frac{2}{\varepsilon}\sqrt{\frac{T}{k\gamma}} \pm t = const,$$

продифференцировать его по t и положить

$$\frac{dx}{dt} = \pm V.$$

Въ результатѣ этихъ дѣйствiй получимъ выраженiе

$$V = \sqrt{k\gamma\, T} = \sqrt{k\gamma\,(T_0 - \varepsilon x)},$$

и замѣчательно, что въ этомъ случаѣ скорость распространенiя волнъ выражается въ зависимости отъ температуры такъ же, какъ и въ случаѣ равномѣрнаго распредѣленiя послѣдней.

Что же касается закона, по которому измѣняется амплитуда колебанiй, то онъ вполнѣ опредѣляется вышеприведенными уравненiями.

Остановимся теперь на томъ предположенiи, что коэффицiентъ ε имѣетъ весьма малую величину (обстоятельство это въ дѣйствительности имѣетъ мѣсто при распредѣленiи температуры въ покоющейся атмосферѣ). Въ этомъ предположенія z будетъ весьма велико, и поэтому можно будетъ въ предъидущихъ уравненіяхъ приближенно принять

$$M = 0, \quad N = 1.$$

Поэтому для весьма малой величины ε и для разстоянія x не слишкомъ большихъ имѣемъ вмѣсто уравненій (15) и (16) слѣдующее упрощенное

$$u = [C \cos(\psi \pm nt) + D \sin(\psi \pm nt)] \sqrt[4]{T}.$$

Амплитуда колебаній въ этомъ случаѣ уменьшается въ томъ направленіи, въ которомъ температура убываетъ.

2. Теперь мы сдѣлаемъ относительно температуры другое частное предположеніе, замѣчательное какъ примѣръ того рода случаевъ, въ которыхъ распространеніе колебаній не удовлетворяетъ закону Лапласа. Положимъ именно, что въ пространствѣ между двумя плоскостями, перпендикулярными къ оси x, температура выражается формулою

$$T = \lambda x^2,$$

въ которой λ означаетъ извѣстное постоянное, и допустимъ, что частицы воздуха колеблются параллельно оси x. Уравненіе (13) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dq}{dx} + \frac{n^2}{k\gamma\lambda} \cdot \frac{q}{x^2} = 0.$$

При составленіи интеграловъ этого уравненія будемъ различать два случая: вопервыхъ, когда

$$\frac{n}{\sqrt{k\gamma\lambda}} > \frac{1}{2}$$

и вовторыхъ, когда

$$\frac{n}{\sqrt{k\gamma\lambda}} < \frac{1}{2}.$$

a) Въ первомъ предположеніи, обозначивъ черезъ A, B, A', B', нѣкоторыя постоянныя и положивъ

$$m^2 = \frac{n^2}{k\gamma\lambda} - \frac{1}{4},$$

найдемъ для функціи q слѣдующее выраженіе

$$q = \frac{A\cos(mlgx - nt) + B\sin(mlgx - nt)}{\sqrt{x}} +$$

$$+ \frac{A'\cos(mlgx + nt) + B'\sin(mlgx + nt)}{\sqrt{x}}.$$

Отсюда, пользуясь уравненіями (9) и обозначивъ черезъ C, D, C' D' другія постоянныя, найдемъ

$$u = [C\cos(mlgx - nt) + D\sin(mlgx - nt)]\sqrt{x} +$$

$$+ [C'\cos(mlgx + nt) + D'\sin(mlgx + nt)]\sqrt{x}.$$

Здѣсь мы получаемъ опять двѣ волны, которыя, распространяясь по направленію оси x въ противоположныя стороны, могутъ существовать или одновременно, или отдѣльно одна отъ другой. Чтобы опредѣлить законъ движенія обѣихъ волнъ, мы обозначимъ черезъ x_0 координату, соотвѣтствующую положенію одной изъ волнъ въ моментъ $t=0$ и приравняемъ $mlgx - nt$ и $mlgx + nt$ постояннымъ, что приведетъ насъ къ уравненію

$$x = x_0 e^{\frac{nt}{m}}$$

для прямой и къ уравненію

$$x = x_0 e^{-\frac{nt}{m}}$$

для обратной волны. Дифференцируя эти уравненія по t, найдемъ скорость распространенія волнъ

$$V = \frac{nx}{m},$$

или иначе

$$V = \frac{\sqrt{k\gamma T}}{\sqrt{1 - \frac{k\gamma\lambda}{4n^2}}}.$$

Скорость распространенія зависитъ въ этомъ случаѣ не только отъ температуры, но и отъ высоты звука, а самое движеніе волнъ имѣетъ характеръ т. н. равномѣрнаго расширенія по направленію, къ волнѣ перпендикулярному. При этомъ амплитуды колебаній увеличиваются къ положительному концу оси x.

б) Переходя къ случаю, когда $\frac{n}{\sqrt{k\gamma\lambda}} < \frac{1}{2}$, положимъ

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{n^2}{k\lambda\gamma}},\ \beta = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{n^2}{k\gamma\lambda}}$$

и составимъ для функцій q и u слѣдующія выраженія

$$q = (Ax^{\alpha} + Bx^{\beta})\,(C\cos nt + D\sin nt),$$

$$u = x\,(A'x^{\alpha} + B'x^{\beta})\,(C'\cos nt + D'\sin nt).$$

Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ при условіи постоянной высоты звука колебанія не могутъ быть обусловлены распространеніемъ одной, двухъ или вообще какого либо конечнаго числа волнъ. Мы встрѣчаемся здѣсь съ случаемъ стоячихъ волнъ.

Сравнивая этотъ результатъ съ формулами, приведенными выше относительно случая (a), мы замѣтимъ, что до тѣхъ поръ, пока $n > \frac{1}{2}\sqrt{k\gamma\lambda}$, скорость распространенія колебаній увеличивается вмѣстѣ съ уменьшеніемъ числа n, т.-е. вмѣстѣ съ пониженіемъ звука.

При $n = \frac{1}{2}\sqrt{k\gamma\lambda}$ скорость эта становится безконечною; для такого звука, а также для всякаго, еще болѣе низкаго, волнообразное распространеніе при допущенномъ здѣсь распредѣленіи температуры становится уже невозможнымъ.

3. Обращаемся далѣе къ изслѣдованію колебаній въ томъ случаѣ, когда температура измѣняется обратно пропорціонально разстоянію r отъ нѣкотораго центра O, т.-е. выражается формулою

$$T = \frac{\lambda}{r},$$

въ которой λ означаетъ постоянное. Таково было бы распредѣленіе температуры, еслибы оно зависѣло только отъ теплопроводности воздуха, еслибы при этомъ коэффиціентъ теплопроводности имѣлъ постоянное значеніе, и абсолютная температура на безконечномъ удаленіи отъ центра равнялась нулю.

Предполагая колебанія направленными по радіусамъ, проходящимъ черезъ центръ, и обозначая черезъ ω скорость колебанія, получимъ изъ (13) и (9) послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, слѣдующія уравненія для опредѣленія функцій q и ω:

$$\frac{d^2q}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dq}{dr} + \frac{n^2}{k\gamma\lambda}qr = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -kT\frac{dq}{dr}.$$

Исключивъ изъ нихъ q, найдемъ уравненіе для опредѣленія одной лишь функціи ω:

$$\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\omega}{dr} + \left(\frac{n^2r}{k\gamma\lambda} - \frac{2}{r^2}\right)\omega = 0. \qquad (17)$$

Чтобы проинтегрировать это уравненіе, положимъ

$$z = \frac{2}{3} \cdot \frac{nr^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k\gamma\lambda}}$$

и, обозначивъ черезъ A, B, A', B' нѣкоторыя постоянныя, найдемъ выраженіе

$$\omega = [AJ_1(z) + BY_1(z)]\frac{cosnt}{\sqrt{r}} + [A'J_1(z) + B'Y_1(z)]\frac{sinnt}{\sqrt{r}}, \quad (18)$$

которое затѣмъ преобразуемъ съ помощью цитированныхъ выше формулъ Hankel'я. Основываясь на этихъ формулахъ, принимая между коэффиціентами соотношенія

$$A' = \mp B,\ B' = \pm A,$$

обозначивъ черезъ C и D новыя постоянныя и положивъ для сокращенія $\psi = z - \frac{\pi}{4}$, преобразуемъ выраженіе скорости колебанія къ слѣдующему виду

$$\omega = \frac{(CM - DN)\cos(\psi \mp nt) + (CN + DM)\sin(\psi \mp nt)}{r^{\frac{5}{4}}}. \quad (19)$$

Отсюда видно, что колебанія въ этомъ случаѣ представляютъ двѣ системы сферическихъ волнъ, которыя вмѣстѣ или порознь распространяются въ противоположныя стороны, одна расширяясь, а другая стягиваясь къ центру.

Для опредѣленія скорости, съ которою распространяются эти волны, приравняемъ постоянной величинѣ фазу $\psi \mp nt$, т.-е. составимъ уравненіе

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{nr^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k\gamma\lambda}} \mp nt = const.,$$

продифференцируемъ его по t и положимъ $\frac{dr}{dt} = \pm V$. Такимъ способомъ найдемъ

$$V = \sqrt{k\gamma T} = \sqrt{\frac{k\gamma\lambda}{r}}\ .$$

Лапласово выраженіе скорости звука въ зависимости отъ температуры сохраняетъ и въ этомъ случаѣ свое значеніе.

Что же касается амплитудъ колебаній, то изъ уравненія (19), имѣя въ виду вышеприведенныя выраженія M, N, замѣтимъ, что, начиная съ нѣкотораго конечнаго разстоянія, амплитуды эти уменьшаются. Законъ ихъ измѣненія становится особенно простымъ для разстояній весьма большихъ. Дѣйствительно, полагая тогда $N=1$, $M=0$, увидимъ, что амплитуда измѣняется обратно пропорціонально степени $r^{\frac{5}{4}}$.

§ 6. Нѣсколько замѣчаній объ акустической рефракціи.

Разсмотрѣнные выше примѣры даютъ лишь поверхностное понятіе о тѣхъ разнообразныхъ измѣненіяхъ, которымъ можетъ подвергаться звукъ, распространяясь въ неравномѣрно нагрѣтой средѣ.

Во всѣхъ этихъ примѣрахъ предполагалось именно, что направленіе распространяющихся волнъ, а также и направленіе колебаній, совпадаетъ съ тѣмъ направленіемъ, въ которомъ измѣняется температура. Конечно въ природѣ такое совпаденіе осуществляется въ случаяхъ сравнительно рѣдкихъ; вообще же оно не имѣетъ мѣста, и къ разсмотрѣннымъ нами измѣненіямъ звука присоединяются еще многія другія. Къ числу такихъ измѣненій принадлежитъ и преломленіе звуковыхъ лучей въ атмосферѣ, или акустическая рефракція.

Въ случаѣ преломленія звуковыхъ волнъ движеніе распространяется по кривымъ линіямъ; линіи, нормальныя къ поверхностямъ звуковой волны суть въ этомъ случаѣ линіи кривыя.

Чтобы дать примѣръ такого рода движеній, разсмотримъ слѣдующій идеальный случай.

Положимъ, что газъ окружаетъ собою твердый круглый цилиндръ, и что температура газа распредѣлена согласно формулѣ

$$T = \lambda r^2,$$

въ которой λ означаетъ постоянное, а r разстояніе какой либо частицы газа отъ оси цилиндра. Положимъ далѣе, что частицы газа колеблются въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ оси цилиндра, и перпендикулярно къ линіямъ, соединяющимъ частицы съ осью.

Въ такихъ предположеніяхъ, обозначая черезъ ω скорость колебанія и пользуясь въ плоскостяхъ препендикулярныхъ къ оси цилиндра полярными координатами r (радіусомъ векторомъ т.-е. длиною перпендикуляра, опущеннаго на ось), и φ (полярнымъ угломъ), получимъ изъ общихъ уравненій (9) и (13) слѣдующія

$$\frac{d\omega}{dt} = - k\lambda r \frac{dq}{d\varphi}, \quad \frac{d^2 q}{d\varphi^2} + \frac{n^2}{k\gamma\lambda} q = 0.$$

Отсюда находимъ

$$\omega = r \left[A \cos n \left(\frac{\varphi}{\sqrt{k\gamma\lambda}} - t \right) + B \sin n \left(\frac{\varphi}{\sqrt{k\gamma\lambda}} - t \right) + A' \cos n \left(\frac{\varphi}{\sqrt{k\gamma\lambda}} + t \right) + B' \sin n \left(\frac{\varphi}{\sqrt{k\gamma\lambda}} + t \right) \right].$$

Въ этомъ случаѣ мы встрѣчаемся опять съ двумя плоскими волнами, распространяющимися въ противоположныя стороны, но на этотъ разъ плоскости обѣихъ волнъ равномѣрно вращаются вокругъ оси цилиндра.

Чтобы опредѣлить въ какомъ нибудь мѣстѣ газа скорость V распространенія волны, слѣдуетъ приравнять выраженіе

$$n \left(\frac{\varphi}{\sqrt{k\gamma\lambda}} \mp t \right)$$

постоянному, продифференцировать полученное уравненіе по t и положить $r \frac{d\varphi}{dt} = \pm V$. Выполнивъ такія дѣйствія, найдемъ

$$V = r\sqrt{k\gamma\lambda} = \sqrt{k\gamma T}.$$

Слѣдовательно Лапласово выраженіе скорости распространенія звука и въ этомъ случаѣ сохраняетъ свою силу.

Угловая скорость вращенія обѣихъ плоскихъ волнъ равна $\sqrt{k\gamma\lambda}$. Звуковое колебаніе, возникшее при такихъ обстоятельствахъ въ извѣстномъ мѣстѣ пространства, распространяется по окружности и возвращается въ это мѣсто по прошествіи времени, равнаго

$$\frac{2\pi}{\sqrt{k\gamma\lambda}}.$$

Замѣчу въ заключеніе, что предлагаемыя мною уравненія (9) и (12) опредѣляютъ только зависимость звуковыхъ волнъ въ воздухѣ отъ неравномѣрнаго распредѣленія температуры. Было бы однако не трудно присоединеніемъ нѣкоторыхъ дополнительныхъ членовъ представить въ этихъ уравненіяхъ также и вліяніе внутренняго тренія воздуха и его теплопроводности по способу, предложенному Кирхгофомъ [1]. Но эти два фактора никогда не могутъ производить на звуковыя волны такого значительнаго дѣйствія, какое способна оказывать неравномѣрно распредѣленная температура, такъ какъ вслѣдствіе многихъ причинъ различія температуры въ воздухѣ могутъ быть очень велики, между тѣмъ, какъ коэффиціенты членовъ, зависящихъ отъ тренія и теплопроводности, имѣютъ весьма малыя числовыя значенія.

---

[1]) „Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung". Poggendorffs Annal. Bd. CXXXIV.