始

倉敷福太郎
天野一之丞 合著

新式復習用

# 平面幾何

（第一分册）

復習及補習

有朋堂書店發行

# 第一分册のはしがき

今度普及ト便利ノ爲ニ，曩ニ著ハシタ新式復習用平面幾何ヲ二冊ニ分ケテ發行スルコトニシタ．此第一分冊ハ其中ノ初ノ二篇デ，平面幾何ヲ普通教科書デハ横斷的ニ排列シテアルノヲ縱斷的ニ排列シテ復習スルコトトシ，ソレニ若干ノ補習ヲ加ヘタ部分デアル．コンナ風ニ排列シタ參考書ハ未ダ他ニナイ様テアルガ，一通リ平面幾何ヲヤッタ者ガソノ智識ヲ纒メル爲ニ復習スルニハ(特ニ受驗ナドノ爲ニ)，此方法ガ最モ適切ナヤリ方デアルト思フ。

昭和四年一月

# 第一分册目次

## 第一篇　復習



---

* コレハ, §3 ニ示シタ線分ノ性質(卽チ定理)ノ數デアル. 以後モ之ニ倣フ.

## 第三　特別ナル三角形



## 第四　作圖題



# 第五章　多角形

## 第一　一般ノ多角形



## 第二　平行四邊形







## 第三　作圖題



# 第六章　圓



## 第一　圓及ビ其半徑



## 第二　弧ト中心角及ビ扇形



## 第三　圓ト直線

### (甲)　其位置的關係

# 第二篇 補習

## 畫引校名略號解

### 三畫



### 四畫



### 五畫



### 六畫



### 七畫



### 八畫



### 九畫



### 十畫

新式復習用

# 平面幾何

## 第一篇　復習

### 1. 復習はかういふ風にやるのが一番可い

幾何ヲ一通リヤッテカラ，之ヲ復習スルニハ，教科書デ學ンダ順序ニヤッテモ可イケレドモ，入學試驗ヤ檢定試驗ナドデ問題ヲ出サレル場合ニハ，幾何ヲ學ブ時ニ出サレル問題ノ樣ニ，コレハ教科書ノドコカラ，ドコマデノ定理ヲ使ッテヤル問題トイフ樣ニ，使フ定理ノ範圍ガ定マッテ居ナイカラ，一通リ幾何ヲヤッテ終ッタ者ガ，之ヲ復習スル場合ニハ，例ヘバ，二ツノ三角形ノ合同ニ關スル定理ハコレコレデアルシ，面積ニ關スル定理ハコレコレデアルシ，相似ニ關スル定理ハコレコレデアルトイフ樣ニ，三角形ノ比較ニ關スル重要ナ定理ヲ殘ラズ集メ，之ヲ一括シテ示ストイフ樣ニシテ置ク方ガ可イ．ツマリ，初メテ幾何ヲヤル時ノ樣ニ(教科書デ)，ソレヲ横斷シテヤラズニ，縱斷シテヤルノデアル，其方ガ使フ範圍ニ制限ノナイ場合ニハ，實際便利デアルシ，復習ノ眞精神ニモ適フト思フ．併シ，縱斷シテヤルト，或定理ヲ證明スルノニ，ソレヨリモ後ノ方ニアル定理ヲ使フコトモアルシ，(併シ，一節ノ中ニ一纒メニシテ列記シテアル定理ニ付テハ，ソンナコトハナイ) 事柄ニヨッテハ，重複シテ示スコトモアルカラ，

如何ニモ不自然ノ樣ニ見エル（敎科書ヲ見タ頭デ見ルト）ケレドモ，ヤリ方ガヤリ方ダカラソレハ仕方ガナイ．ガ今迄ソンナヤリ方ヲシタコトノナイ讀者ニハ，コレハ豫メ承知シテ置イテ貰ハナケレバナラナイ．兎モ角，是カラサウイフ順序デ一通リ全體ニ亙ッテ復習シ，併セテ適宜若干ノ補習モシヤウト思フ．

# 第一章　直線及ビ線分

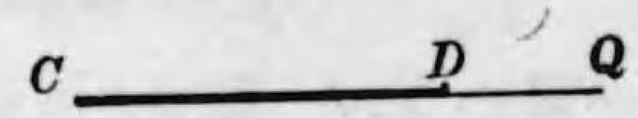
## 第一　一直線上ニ在ル線分

### 2. 一線分の內分點と外分點

**定義**　線分上ノ一點ハ，其線分ヲ**內分ス**トイヒ，其延長上ノ一點ハ，其線分ヲ**外分ス**トイフ．

何レノ場合ニ於テモ，其線分ノ兩端ト分點トノ距離ヲ其分（ブン）トイフ．

右ノ圖ニ於テ，$P$ ハ $AB$ ノ**內分點**，$AP, BP$ ハ其分（ブン）；$Q$ ハ $CD$ ノ**外分點**，$CQ, DQ$ ハ其分デアル．（$Q$ ハ $DC$ ノ延長上ニ在ッテモヨイ）



### 3. 一直線上にある線分の性質

$P$ ヲ長サ $a$ ナル線分 $AB$ ノ內分點，$Q$ ヲ其外分點，$M$ ヲ $AB$ ノ中點トスレバ，次ノ如キ量的關係アリ〔(1)－(4)〕.

(1)　$AP + PB = a$

(2)　$AQ \sim BQ = a$



(3)　$AP \sim PB = 2.MP$

(4)　$AQ + BQ = 2.MQ$

**(3) 及ビ (4) ノ略證**　$AP = AM + MP$ ......(1)

$PB = MB - MP$　∴　$PB = AM - MP$ ............(2)

(1) ヨリ (2) ヲ引ケバ，(3) ヲ得．(4) ノ證モ之ニ倣ヘ．

(5)　定線分ヲ一定ノ比ニ內分及ビ外分スル點ハ必ズ唯一ツアリ．

**注意**　角ニ付テモ，(1) カラ (4) マデニ準ジタ定理ガ成立ツ．

## 第二　一端ヲ共有スル線分

### 4. 一端を共有する線分に關する定理[1]

直線外ノ一點ヨリ之ニ引ケル線分中．

(1)　垂線ハ最小ナリ．

(2)　垂線ノ足ヨリ等距離ニ足ヲ有スル斜線ハ相等シ．此逆モ眞ナリ．

(3)　垂線ト相等シキ角ヲナス斜線ハ相等シ．此逆モ眞ナリ．

(4)　垂線ノ足ヨリ不等ノ距離ニ足ヲ有スル斜線ノ大小ト，其距離ノ大小トハ，互ニ相伴フ.[2]

---

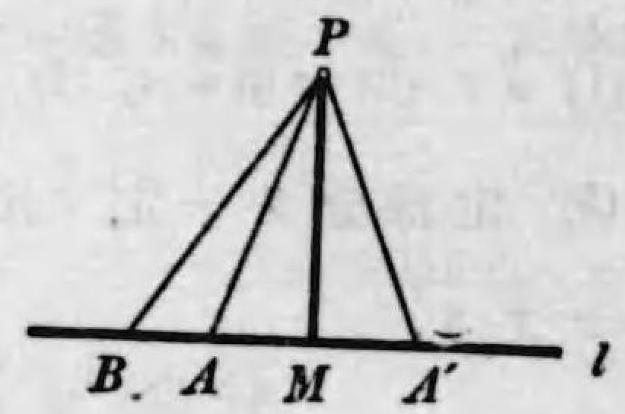
[1] 證明ノ書イテナイ定理ヤ，今後示ス所ノ解ノ書イテナイ作圖ハ，讀者ガ出來ルモノト，豫想シテ居（タ）ルノデル．若シ出來ナイノガアッタラ，敎科書デ其證明ヲ復習シ，二三週間經ッタラ，更ニヒトリデヤッテ見テ，本當ニ自分ノモノニスル樣ニシナケレバナラナイ．

[2] 此定理ノ意味ハ，次ノ頁ニ示シタ圖デ言フト，(*d*) ナルトキハ (*e*) デア

(5) 垂線ト不等ノ角ヲナス斜線ノ大小ト,其角ノ大小トハ,互ニ相伴フ.

例ヘバ右ノ圖ニ於テ,

$PM \perp l$ トスルト,




(a) $PM < PA$

又 (b) $MA = MA'$ ナルトキハ,

(c) $PA = PA'$

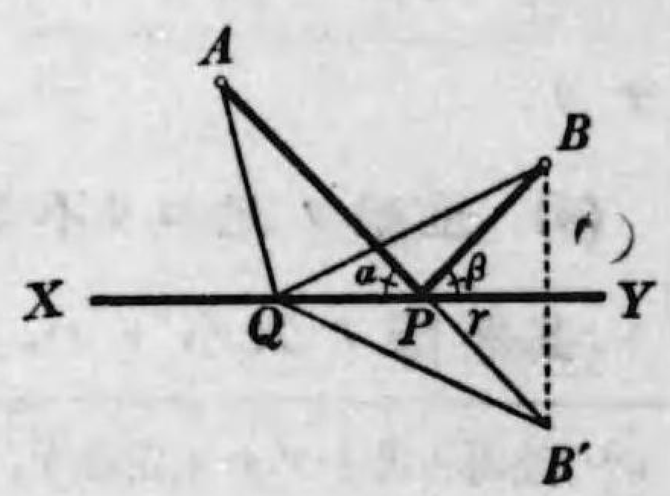
(d) $MA < MB$ ナルトキハ,

(e) $PA < PB$ 等ナリ.

**注意** 斜線ト垂線トノナス角ガ2倍ニナッテモ,斜線ハ一般ニハ2倍ニナラナイ.

## 5. 注意すべき問題

**1.** $A, B$ ハ定直線 $XY$ ノ同ジ側ニ在ル二定點, $P$ ハ $XY$ 上ノ $X$ ト $Y$ トノ間ニ在ル點ナルトキ, $AP+BP$ ハ $\angle APX = \angle BPY$ ナルトキニ最小ナリ.




**證** $XY$ 上ニ在ル, $P$ 以外ノ任意ノ一點ヲ $Q$ トシ, $AQ, BQ$ ヲ引ケ.

又 $XY$ ニ付キテノ $B$ ノ對稱點ヲ $B'$ トシ, $B'P, B'Q$ ヲ引ケ.

ルトイフコト (卽チ, 不等斜線ノ大小ハ, 其足ノ垂足カラノ距離ノ大小ニ伴フトイフコト) ト, (e) ナルトキハ (d) デアルトイフコトヲ一括シテ言ッタノデアル. 以後モ之ニ倣フ.



$XY$ ハ $BB'$ ノ垂直二等分線ナルヲ以テ,

$$BP = B'P, \quad BQ = B'Q$$

從テ, $\beta = \gamma$

然ルニ, $\alpha = \beta$ [假設]

$\therefore \alpha = \gamma$ 故ニ, $APB'$ ハ一直線ヲナス.

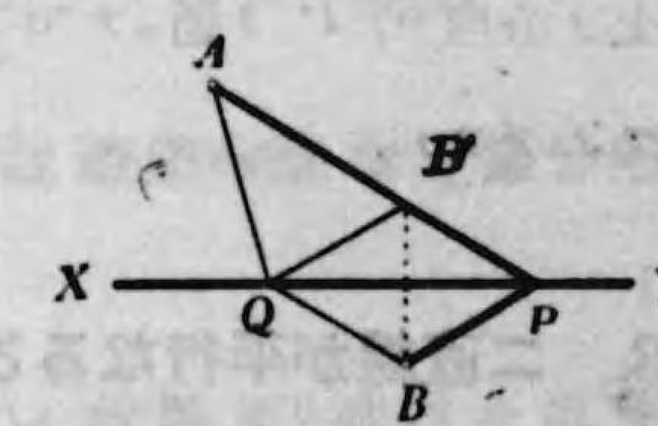
サテ $\triangle AQB'$ ニ於テ,

$$AB' < AQ + B'Q$$

$\therefore AP + BP < AQ + BQ$ 故ニ, $AP + BP$ ガ最小ナリ.

**2.** $A, B$ ハ定直線 $XY$ ノ反對ノ側ニ在ル二定點, $P$ ハ $XY$ 上ノ點ナルトキ, $AP \sim BP$ ハ $\angle APX = \angle BPX$ ナルトキニ最大ナリ.

前問ニ倣ヒ,




$$AB' > AQ \sim B'Q$$

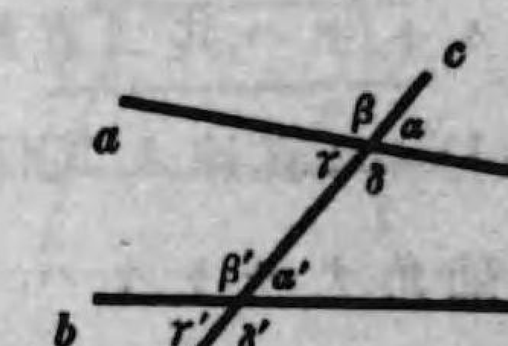
ヲ證スルヲ得, (ヤッテ見ヨ)

$$\therefore AP \sim BP > AQ \sim BQ$$

# 第三 平行直線

## 6. 二直線と其一截線との爲す諸角の關係

**注意** 右ノ圖デ, $c$ ヲ $a, b$ ノ截線トスルト, $\gamma$ ト $\alpha'$, $\delta$ ト $\beta'$ ノ各組ヲ錯角; $\alpha$ ト $\alpha'$, $\beta$ ト $\beta'$, $\gamma$ ト $\gamma'$, $\delta$ ト $\delta'$ ノ各組ヲ同位角; $\delta$ ト $\alpha'$, $\gamma$ ト $\beta'$ ノ各組ヲ同傍內角トイフ.



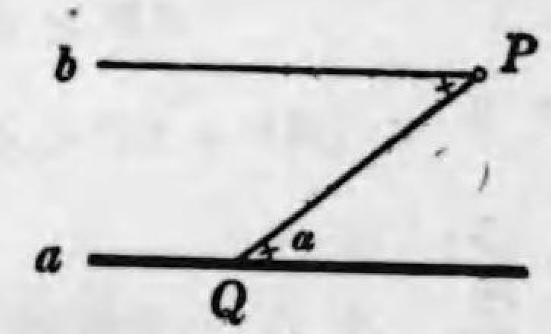

**定理** 二直線ガ其一ツノ截線トナス一組ノ錯角相等シ

キトキハ,他ノ一組ノ錯角モ相等シク,四組ノ同位角ハ各組毎ニ相等シク,二組ノ同傍内角ハ各組毎ニ補角ナリ.

### 7. 平行直線の公理

一定點ヲ通リ,一定直線ニ平行ナル直線ハ一ツニ限ル.

**注意**　$a$ 上ノ任意ノ點 $Q$ ト $a$ 上ニナイ點 $P$ トヲ結ビ付ケ, $P$ ヲ通ッテ $\alpha$ ニ等シイ錯角ヲナス直線 $b$ ヲ引クト, $b$ ハ $a$ ニ平行ダカラ, $P$ ヲ通ッテ, $a$ ニ平行ナ直線ノ在ルコトハ明カデアル.




上ノ公理ハ, $P$ ヲ通ッテ $a$ ニ平行ナ直線ハコノ $b$ ノ外ニハ無イトイフノデアル.

### 8. 二直線が平行なることを斷定するに用ひる定理

(1)　二直線ト其任意ノ截線トナス一組ノ錯角ガ相等シキトキハ,其二直線ハ互ニ平行ナリ.

(2)　二直線ト其任意ノ截線トナス一組ノ同位角ガ相等シキトキハ,其二直線ハ互ニ平行ナリ.

(3)　二直線ト其任意ノ截線トナス一組ノ同傍内角ガ互ニ補角ナルトキハ,其二直線ハ互ニ平行ナリ.

(4)　同ジ直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ.

(5)　同ジ直線ニ平行ナル直線ハ互ニ平行ナリ.



### 9. 平行直線の性質

(1)　平行二直線ガ其一ツノ截線トナス錯角ハ相等シ.

(2)　平行二直線ガ其一ツノ截線トナス同位角ハ相等シ.

(3)　平行二直線ガ其一ツノ截線トナス同傍内角ハ互ニ補角ナリ.

(4)　平行直線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ今一ツニモ垂直ナリ.

(5)　平行直線ノ一ツニ交ル直線ハ今一ツニモ交ル.

## 第四　平行直線ト其截線トデ生ズル線分

### 10. 數多の平行線が其二つの截線から截取る線分の量的性質

(1)　數多ノ平行直線ガ其一ツノ截線ヨリ截取ル線分相等シキ時ハ,他ノ任意ノ截線ヨリ截取ル線分モ亦相等シ.

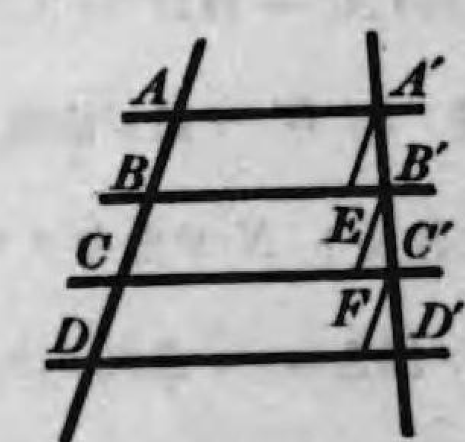
右ノ圖ニ於テ,

$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$

且ツ　$AB = BC = CD$

ナルトキハ

$A'B' = B'C' = C'D'$ ナリ.




(2)　數多ノ平行直線ガ其一ツノ截線ヨリ截取ル諸線分ハ,他ノ任意ノ截線ヨリ截取ル其對應諸線分ニ比例ス

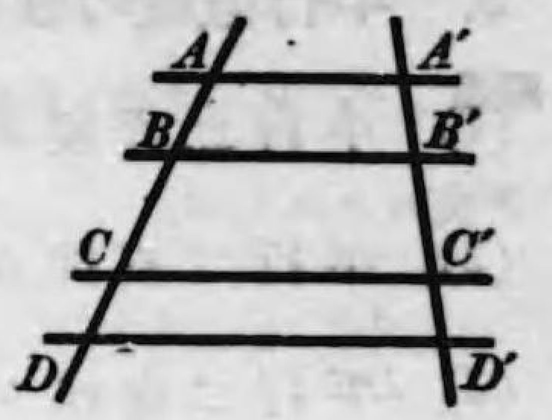
右ノ圖ニ於テ,

$$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$$

ナルトキハ,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \cdots$$

ナリ.

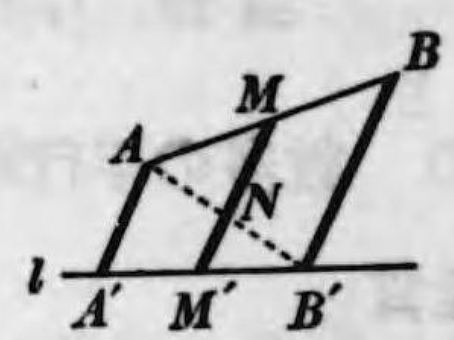



## 11. 二定直線上に兩端を有する平行線分

(1) 線分 $AB$ ノ兩端 $A, B$ ト其中點 $M$ ヨリ引ケル平行直線ガ任意ノ一直線 $l$ ト夫々 $A', B', M'$ デ出會フトキ,平行線分 $AA', BB', MM'$ ノ間ニハ次ノ關係アリ.

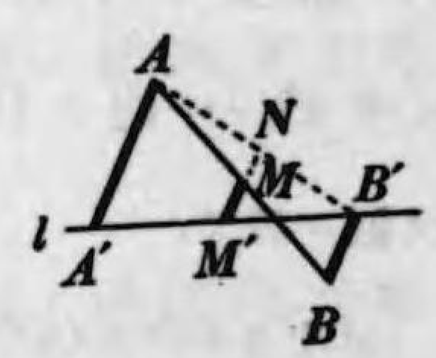
(a) $A, B$ ガ $l$ ノ一方ニ在ルトキハ,

$$AA' + BB' = 2.MM'$$




(b) $A, B$ ガ $l$ ノ兩側ニ在ルトキハ,

$$AA' \sim BB' = 2.MM'$$



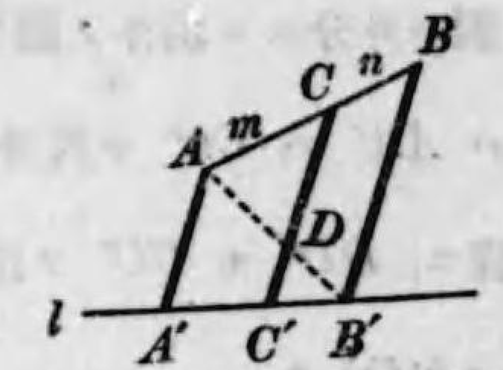

略證 $A, B'$ ヲ通ル直線ガ $MM'$ 又ハ其延長ト $N$ デ出會フトスレバ, $AA' = 2.NM'$, $BB' = 2.MN$

(a) ノ場合ニハ,此二ツヲ加ヘ合ハセ, (b) ノ場合ニハ,一方ヨリ他ヲ引ケ.

(2) 線分 $AB$ ノ兩端 $A, B$ ト之ヲ $m:n$ ニ內分スル點 $C$ ヨリ引ケル平行直線ガ線分 $AB$ ニ交ラザル任意ノ一直線 $l$ ト夫々 $A', B', C'$ ニ於テ交ルトキハ,



$$n.AA' + m.BB' = (m + n\ CC'$$




略證 $A, B'$ ヲ通ル直線ガ $CC'$ ト $D$ デ交ルトスレバ,

$$\frac{AA'}{DC'} = \frac{m+n}{n} \text{(何故カ)} \qquad \therefore\ n.AA' = (m+n)DC'$$

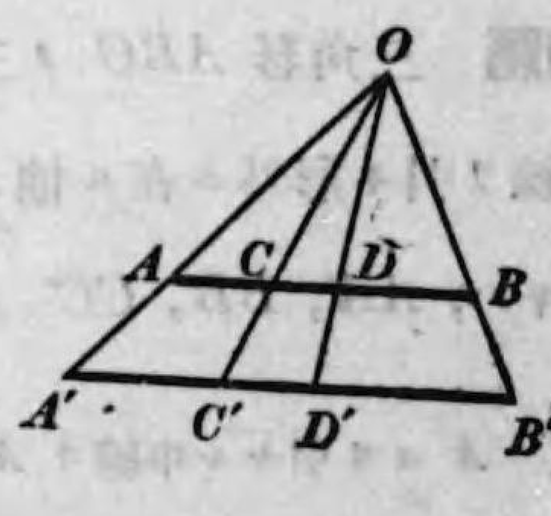
$$\frac{BB'}{CD} = \frac{m+n}{m} \qquad \therefore\ m.BB' = (m+n)CD$$

$$\therefore\ n.AA' + m.BB' = (m+n)CC'$$

(3) 二ツノ平行線分 $AB, A'B'$ アリテ, $C, D,$ ハ $AB$ 上ノ點; $C', D'$ ハ $A'B'$ 上ノ點ニシテ,

(1) $$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DB}{D'B'}$$

ナルトキハ, $AA', CC', DD', BB'$ ハ互ニ平行ナルカ,又ハ同一ノ點ヲ通ル.




證 $AA' \parallel CC'$ トスレバ, $AA'C'C$ ハ平行四邊形ナリ,

$$\therefore\ AC = A'C'$$

故ニ (1) ニヨリ,

$$CD = C'D', \qquad DB = D'B'$$

從テ, $CC'D'D$, $DD'B'B$ ハ何レモ平行四邊形ナリ,

$$\therefore\ AA' \parallel CC' \parallel DD' \parallel BB'$$

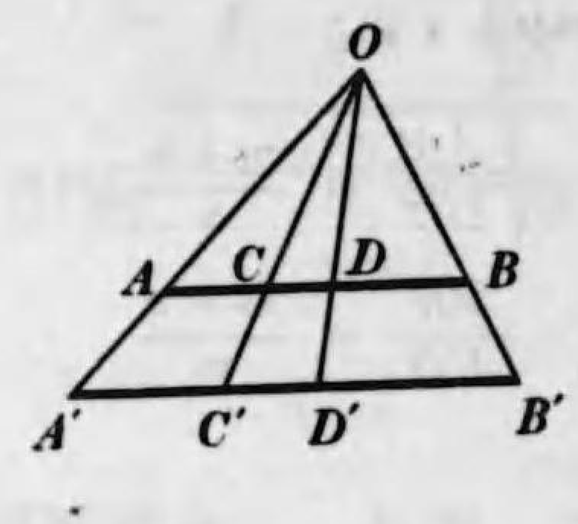
又 $AA', CC'$ 若クハ其延長ガ $O$ ニ於テ交ルトスレバ,

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{AC}{A'C'}$$

ナルヲ以テ, $AA'$ ハ $CC'$ ヲ比 $\frac{AC}{A'C'}$ ニ外分(若クハ內分)ス.

(爰ノ圖ハ外分スル場合ノ圖デアル. $AB$ ト $A'B'$ ガ正反對ノ方向ヲ有スルトキハ $AA'$ ハ $CC'$ ヲ内分スル)

同樣ニ, $DD'$ モ $CC'$ ヲ比 $\dfrac{CD}{C'D'}$ ニ外分(若クハ内分)ス.



然ルニ, $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{CD}{C'D'}$

故ニ, $DD'$ モ $O$ ヲ通ル.

同樣ニ, $BB'$ モ $O$ ヲ通ル.

即チ, $AA'$, $CC'$, $DD'$, $BB'$ ハ同一ノ點ヲ通ル.

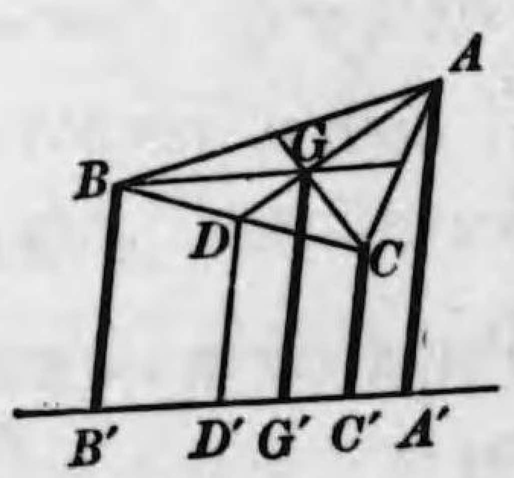
**注意** $C$, $D$ ノ如キ點ハ二ツニ限ラズ幾ツアッテモ可イシ,又其點ハ線分 $AB$ ノ延長上ニ在ッテモ可イ.

### 應用の例

**問題** 三角形 $ABC$ ノ三ツノ角頂 $A$, $B$, $C$ ト重心 $G$ トヨリ平行直線ヲ引キ形外ニ在ル他ノ一直線ト, $A'$, $B'$, $C'$, $G'$ ニ交ラシムルトキハ, $AA'$, $BB'$, $CC'$ ノ和ハ $GG'$ ノ三倍ニ等シ. 其證ヲ問フ. (5, 商船)*

**證** $A$ ヨリ引ケル中線ヲ $AD$ トスレバ,

$$AG : GD = 2 : 1$$



故ニ $D$ ヨリ $AA'$ ニ平行ニ直線 $A'B'$ マデ引ケル線分ヲ $DD'$ トスレバ,

$$AA' + 2.DD' = (1+2)\,GG' \ldots\ldots(1)$$

* コレハ大正五年度ノ商船學校ノ入學試驗問題デアルコトヲ示ス. 以後モ之ニ倣フ.



然ルニ, $D$ ハ $BC$ ノ中點ナルヲ以テ,

$$2.DD' = BB' + CC' \ldots\ldots\ldots(2)$$

此 $2.DD'$ ノ値ヲ (1) ニ代入スレバ,

$$AA' + BB' + CC' = 3.GG'$$

## 第五 線分ノ積

**12. 定義** 線分 $a$ ト線分 $b$ トヲ相隣レル二邊トスル矩形ノ面積ハ $a.b$ 又ハ $ab$ ニテ表ハシ, 之ヲ二線分 $a$, $b$ **ノ積** トイフ.

$a$ ヲ一邊トスル正方形ノ面積, 即チ $aa$ ハ $a^2$ ニテ表ハシ, 之ヲ $a$ **ノ平方**トイフ.

### 13. 線分の積に關する定理

(1) $(a+b-c)m = am + bm - cm$

(2) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

(3) $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

(4) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(5) $a : b = c : d$ ナルトキハ $ad = bc$

(6) $xy = pq$ ナルトキハ $x : p = q : y$

(7) $a : b = b : c$ ナルトキハ $b^2 = ac$

[此ノ場合ニ $c$ ヲ $a, b$ ノ第三比例項トイヒ, 又 $a, b, c$ ハ比例ヲナストイフ]

(8) $x^2 = pq$ ナルトキハ $p : x = x : q$

[此ノ場合ニ $x$ ヲ $p$, $q$ ノ比例中項トイフ]

$P$ ヲ線分 $AB$ ノ内分點, $Q$ ヲ其外分點, $M$ ヲ中點トスルトキハ, 次ノ諸定理ガ成立ツ [(9) − (12)].


(9) $AP.BP = AM^2 - MP^2$

(10) $AQ.BQ = MQ^2 - AM^2$

(11) $AP^2 + BP^2 = 2.AM^2 + 2.MP^2$

(12) $AQ^2 + BQ^2 = 2.AM^2 + 2.MQ^2$

**(9)—(12) ノ略證**

$$AP = AM + MP \text{..............}(1)$$

$$BP = AM - MP \text{..............}(2)$$

此 (1), (2) ノ積ヲ求ムレバ, (9) トナリ, (1), (2) ノ各〻ノ平方ヲ加ヘ合ハスレバ (11) トナル. (10), (12) ノ證モ之ニ倣ヘ.

**注意** 特殊ノ圖形ニ關係ノナイ線分 (例ヘバ, 三角形ノ三邊ノ如キハ特殊ノ圖形ニ關係ノアル線分デアル) ノ積ノミニ關スル問題ハ本節ノ諸定理ヲ適宜ニ使ヘバ, 必ズ出來ル.

**例** $A, B, C, D$ ヲ同一ノ直線上ニ此順ニ在ル四點トスレバ

$AB.CD + BC.AD = AC.BD$ ナリ. (「オイレル」ノ定理)

**證** $AB = a,\ BC = b,\ CD = c$


トスレバ,

$$AB.CD + BC.AD = ac + b(a + b + c)$$
$$= ac + ab + b^2 + bc$$



又 $AC.BD = (a + b)(b + c)$

$$= ab + b^2 + ac + bc$$

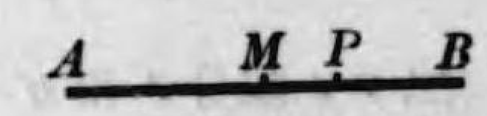
$$\therefore\ AB.CD + BC.AD = AC.BD$$

## 14. 定理は, はっきり理解し, しっかり記憶する事が大切である.

定理ハ只之ヲ暗記シタトテ何ノ役ニモ立タナイガ, 之ヲ徹底的ニ理解シ, 確實ニ記憶スルト, 只ソレダケデ解ケル問題ガ可ナリアル. 次ニ前節ニ示シタ定理ニ付テ其例ヲ示サウ.

**例一** 或線分ヲ内分シ, 其二ツノ分ノ包ム矩形ヲ最大ナラシメントス. 其分チ方如何.

**解** 線分 $AB$ (長サ $= 2a$ トス) ヲ任意ノ點 $P$ ニ於テ内分シ, 中點 $M$ ト分點 $P$ トノ距離ヲ $x$ トスレバ,




$$AP.PB = AM^2 - MP^2 = a^2 - x^2 \quad \text{[前節 (9)]}$$

之ヲ最大ナラシムルニハ, 引クベキ $x^2$ ヲ最小ナラシムレバ可ナリ. 卽チ $MP$ ヲ出來ルダケ小サクスレバ可ナリ. ソレハ $P$ ガ $M$ ニ合シタ時ナリ. 故ニ其線分ヲ二等分スルトキ, 其二ツノ分ノ包ム矩形ガ最大ナリ.

**例二** 一ツノ線分ヲ内分シ, 其二ツノ分ノ平方ノ和ヲ最小ナラシメントス, 其分チ方如何.

**解** 線分 $AB$ (長サ $= 2a$) ノ中點ヲ $M$, 其任意ノ内分點ヲ $P$ トスレバ,

$$AP^2 + BP^2 = 2.AM^2 + 2.MP^2 = 2(a^2 + x^2) \quad [前節 (11)]$$

コレハ, $x$ ガ最小ナルトキ, 最小ナリ. 故ニ

其線分ヲ二等分スルトキ, 其二ツノ分ノ平方ノ和ガ最小ナリ.

## 問　題[1]

**1.** 四線分ガ比例ヲナセバ, 其各ノ平方モ亦比例ヲナス.

[註　四線分 $a, b, c, d$ ノ間ニ, $a : b = c : d$ ナル關係アルトキ, 其四線分ハ比例ヲナストイフ]

**2.** 三線分ガ比例ヲナセバ, 第一ト第三トノ比ハ, 第一ノ平方ト第二ノ平方トノ比ニ等シ.

***3.** 二ツノ線分ノ和ガ一定ナルトキ, 其積ハ二ツノ線分ガ相等シキトキ最大ナリ.[2]

**4.** 二ツノ線分ノ和ガ一定ナルトキ, 其平方ノ和ハ, 二ツノ線分ガ相等シキトキ最小ナリ.

**5.** 線分 $AB$ ヲ $C$ ニテ $AC^2 = 2.CB^2$ ナル樣ニ分ツトキハ,

$$AB^2 + BC^2 = 2.AB.AC \quad ナリ.$$

---

1) コレハ直グ前ニヤッタ線分ノ積ニ關スル問題デアル. 本篇中處々ニ掲ゲタ此種ノ問題ハ, 大抵ハ易イ問題ダケレドモ比較的注意シ置クベキモノガ多イ. 其中デモ, 3 ノ樣ニ, 印 * ノ付ケテアルノハ, 特ニ大切ナモノデアル.

2) 3 ハ上ノ例一, 4 ハ上ノ例二ト其内容ガ同ジデアル. ソレニ氣ガ付ケバ更(アラタ)メテヤルニハ及バナイ. 以後モ時折カウイフ問題ガ載セテアル.



**問題略解**　2. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$ ナルトキハ $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{c} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$

5. $AC = a,\ CB = b$ 從テ $a^2 = 2b^2$ ト置イテ, 等式ノ兩邊ヲ變化セヨ.

# 第二章　角

## 第一　頂點ヲ共有スル角

### 15. 角に關する定理

(1) 一直線上ノ一點ヨリ半直線ヲ引キタルトキニ生ズルニツノ接角ハ互ニ補角ナリ.

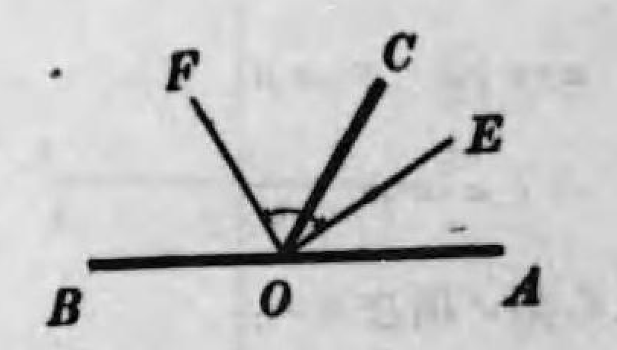
(2) 互ニ補角ナルニツノ接角ノ共有ナラザルニ邊ハ一直線ヲナス. [(1) ノ逆]

(3) 互ニ補角ナルニツノ接角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ.

**略證**　$\angle EOC = \dfrac{1}{2} \angle AOC$

$\angle FOC = \dfrac{1}{2} \angle BOC$

トシ, 此二ツヲ加ヘ合ハセヨ.

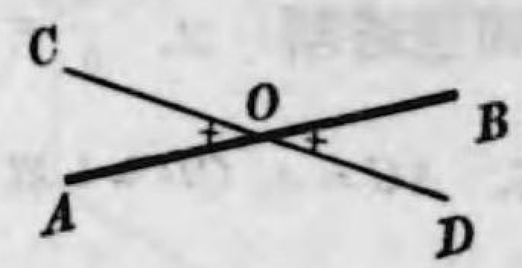



(4) 對頂角ハ相等シ.

(5) 直線 $AB$ 上ノ一點 $O$ ヨリ, 其反對ノ側ニ, 二ツノ半直線 $OC, OD$ ヲ $\angle AOC = \angle BOD$ ナル樣ニ引ケバ, $OC, OD$ ハ一直線ヲナス.

略證 $\angle AOC = \angle BOD$ ノ兩邊ニ $\angle BOC$ ヲ加フレバ,

$2\angle R = \angle COD$ トナル.




(6) 角ハ其二等分線ニ付テ對稱ナリ.

(7) 角ノ二等分線上ノ點ハ其角ノ二邊ヨリ等距離ニ在リ. 此逆モ眞ナリ.

## 第二 特殊關係アル角

### 16. 角に關する定理 (續き)

(1) 同ジ角又ハ相等シキ角ノ餘角ハ相等シ.

(2) 同ジ角又ハ相等シキ角ノ補角ハ相等シ.

(3) 一ツノ角ノ二邊ガ,夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ニ平行ナルトキハ,其二ツノ角ハ相等シキカ,若クハ互ニ補角ナリ.

略證 甲圖ノ場合ニハ,

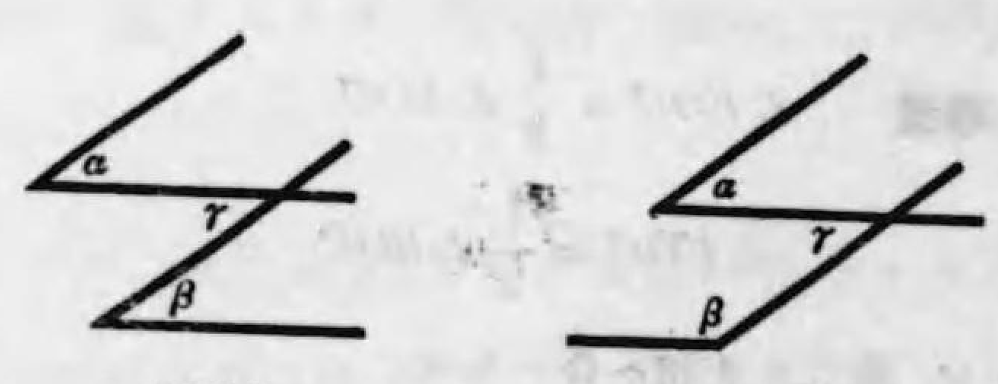
$\alpha = \gamma,\quad \gamma = \beta$

$\therefore\ \alpha = \beta$

又乙圖ノ場合ニハ,

$\alpha = \gamma,\quad \gamma + \beta = 2\angle R$

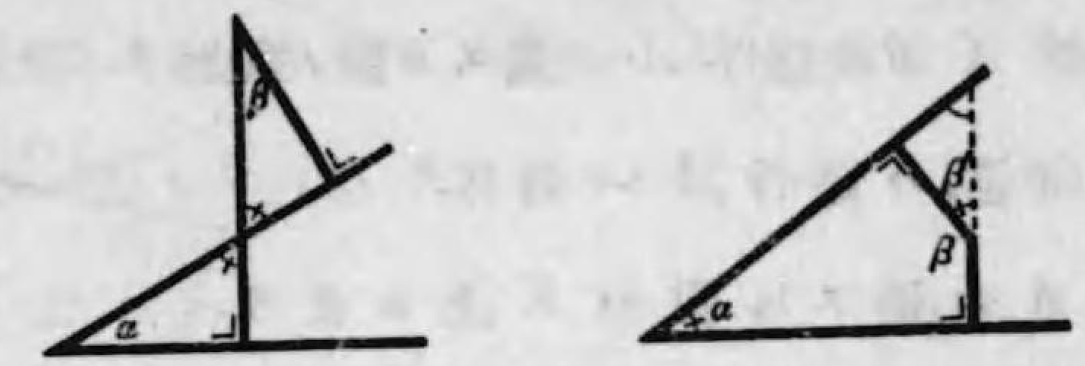
$\therefore\ \alpha + \beta = 2\angle R$




(甲圖) (乙圖)

(4) 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ニ垂直ナルトキハ,其二ツノ角ハ相等シキカ,若クハ互ニ補角ナリ.






(甲圖) (乙圖)

略證 甲圖ノ場合ニハ, $\alpha, \beta$ ハ一鋭角相等シキ,二ツノ直角三角形ノ第二鋭角ナルユヱ $\alpha = \beta$ ナリ.

乙圖ノ場合ニハ, $\alpha, \beta'$ ハ一鋭角ヲ共有スル二ツノ直角三角形ノ第二鋭角ナルユヱ $\alpha = \beta'$ ナリ.

然ルニ $\beta + \beta' = 2\angle R$ $\therefore\ \alpha + \beta = 2\angle R$

# 第三章 軌跡及ビ作圖題

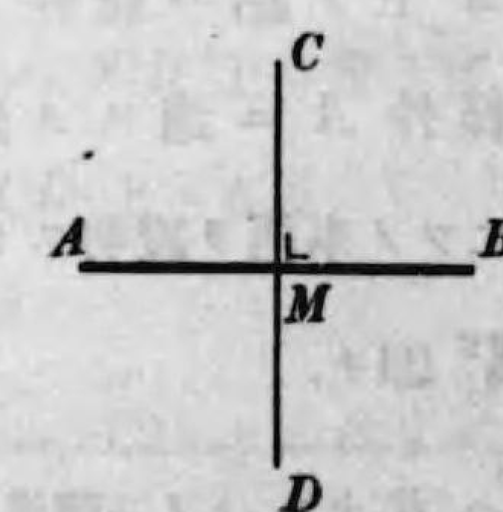
(前二章ノ定理ト密接ノ關係アルモノ)

### 17. 軌跡の意味

例ヘバ, 線分 $AB$ ノ垂直二等分線ヲ $CD$ トスルト,

(1) $CD$ 上ノ點ハ, 悉ク $A, B$ ヨリ等距離ニ在リ.

(2) $A, B$ ヨリ等距離ニ在ル點ハ,悉ク $CD$ 上ニ在リ.




, トイフコトガ成立ツ. サウスルト, $CD$ ヲバ, $A, B$ カラ等距離ニ在ル點ノ軌跡デアルトイフ. 即チ,

**定義**　或線 $X$ ガ或條件 $A$ ニ適スル點ノ軌跡ナリトハ,

(1)　$X$ 上ノ點ハ條件 $A$ ニ適ス.

(2)　條件 $A$ ニ適スル點ハ $X$ 上ニ在リ.

トイフ二ツガ成立ツコトナリ.

**注意**　此定義デ $X$ ト言ッタ線ハ一ツノ線デアルコトモアルシ,二ツ以上ノ線デアルコトモアル.

サテ,平面幾何デ考ヘル線ハ直線ト圓トダケダカラ,此本デハ, $X$ ハ直線,半直線,線分,圓周,圓弧又ハ其二ツ以上カラナルモノダケデアル.

## 18. 軌跡問題の證明法

前節デ述ベタ定義ニヨルト,或線 $X$ ガ或條件 $A$ ニ適スル點ノ軌跡デアルトイフコトヲ證明スルニハ,

(1)　$X$ 上ノ點ハ條件 $A$ ニ適ス.

(2)　條件 $A$ ニ適スル點ハ $X$ 上ニ在リ.

トイフ二ツノ事柄ヲ證明スレバ可イ.　然ルニ(1)ヲ證明スル代リニ,其**對偶***即チ,

*「$A$ ハ $B$ ナリ」トイフ陳述ト「$B$ ナラザレバ $A$ ナラズ」トイフ陳述トハ互ニ**對偶**デアルトイフ.　ソシテ,此二ツノ陳述ノ中,一方ガ成立テバ,他モ亦必ズ成立ツシ(何故カ),一方ガ成立タナケレバ,他モ決シテ成立タナイ.　ソレダカラ,一ツノ定理ヲ證明スル代リニ,其對偶即チ其定理ノ終結ヲ否定シタモノ(詳シク言ヘバ,肯定ナラバ否定ニ,否定ナラバ肯定ニシタモノ)ヲ假設トシ,其定理ノ假設ヲ否定シタモノヲ終結トスル定理ヲ證明シテモ可イ.



(1′)　條件 $A$ ニ適セザル點ハ $X$ 上ニ在ラズ.

ヲ證明スレバ可イシ,(2)ヲ證明スル代リニ,其對偶即チ,

(2′)　$X$ 上ニ在ラザル點ハ,條件 $A$ ニ適セズ.

ヲ證明スレバ可イカラ, $X$ ガ條件 $A$ ニ適スル點ノ軌跡デアルトイフコトヲ證明スルニハ,次ノ四組ノ中ノ一組ヲ證明スレバ可イノデアル.

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}\qquad\begin{cases}(1)\\(2')\end{cases}\qquad\begin{cases}(1')\\(2)\end{cases}\qquad\begin{cases}(1')\\(2')\end{cases}$$

例ヘバ,前節ニ示シタ例ニ付テ言フト, $CD$ ガ $A, B$ カラ等距離ニ在ル點ノ軌跡デアルトイフコトヲ證明スルニハ,前節デ言ッタ(1),(2)ヲ證明シテモ可イシ;

(1)　$CD$ 上ノ點ハ, $A, B$ ヨリ等距離ニ在リ.

(2′)　$CD$ 上ニ在ラザル點ハ, $A, B$ ヨリ等距離ニ在ラズ.

ヲ證明シテモ可イシ;

(1′)　$A, B$ ヨリ等距離ニアラザル點ハ, $CD$ 上ニ在ラズ.

(2)　$A, B$ ヨリ等距離ニ在ル點ハ, $CD$ 上ニ在リ.

ヲ證明シテモ可イシ;

(1′)　$A, B$ ヨリ等距離ニアラザル點ハ, $CD$ 上ニ在ラズ.

(2′)　$CD$ 上ニ在ラザル點ハ, $A, B$ ヨリ等距離ニ在ラズ.

ヲ證明シテモ可イ.

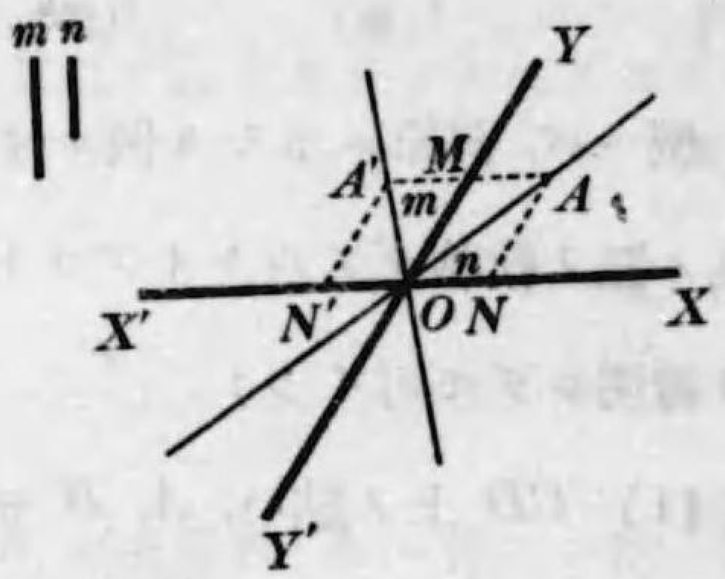
**注意**　實際デハ,(1)ト(2)ノ組ヲ證明スルコトガ多ク,(1)ト(2′)又ハ(1′)ト(2′)ノ組ヲ證スルコトハ極メテ少ナイ.

## 19. 心得置くべき軌跡の定理

(1) 二定點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ,其二點ヲ結ビ付クル線分ノ垂直二等分線ナリ.

(2) 相交ル二直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ,其二直線ノナス角ヲ二等分スル一組ノ直線ナリ.

(3) 相交ル二直線ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ハ,其二直線ノ交點ヲ通ル一組ノ直線ナリ.




右ノ圖ニ於テ, $XX'$, $YY'$ ヲ $O$ ニ於テ交ル二定直線,

$OM = m$, $ON = ON' = n$

$AMA' \parallel XX'$, $AN \parallel A'N' \parallel YY'$

トスレバ, $OA$, $OA'$ ハ $XX'$, $YY'$ ヨリノ距離ノ比ガ $m:n$ ナル點ノ軌跡ナリ. (何故カ)

## 20. 作圖題. 作圖の公法

平面幾何ノ作圖ハ,作圖ノ公法,即チ次ノ (1), (2), (3) ヲ可能トシテヤルノデ,嚴密ニイフト,解析,作圖,證明,吟味ヲシナケレバナラナイノダガ,普通ハ作圖ト證明ヲヤッテ,簡單ナ吟味ヲスレバ可イ.

(1) 二定點ヲ結ビ付クル直線ヲ引クコト.

(2) 線分ヲ延長スルコト.

(3) 定點ヲ中心トシ,與ヘラレタル長サノ半徑ヲ有スル圓ヲ畫クコト.



## 21. 心得置くべき作圖題

(1) 線分ヲ二等分スルコト.

(2) 角ヲ二等分スルコト.

(3) 一定點ヲ通リ,定直線ニ垂線ヲ引クコト.

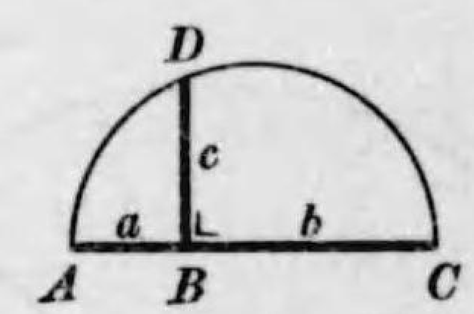
(4) 角ノ位置ヲ移スコト.

(5) 定點ヲ通リ定直線ニ平行ナル直線ヲ引クコト.

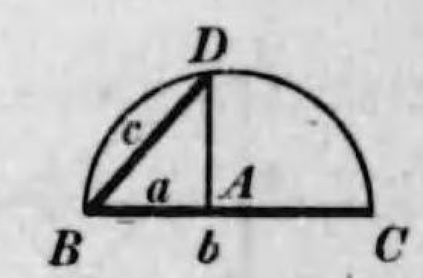
(6) 線分ヲ與ヘラレタル線分ニ相似ニ分ツコト.

(7) 三ツノ線分ノ第四比例項ヲ求ムルコト. (6, 龍工)

(8) 二ツノ線分ノ比例中項ヲ求ムルコト.




(甲圖)



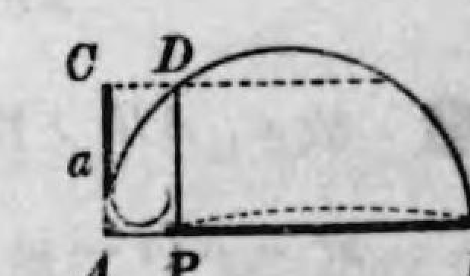

(乙圖)

右ノ圖ノ半圓ニ於テ, $a$, $b$ ヲ二ツノ線分

(甲圖デハ $BD \perp AC$, 乙圖デハ $AD \perp BC$)

トスレバ, $c$ ガ求ムル比例中項ナリ. (何故カ)

(9) 二線分ノ和若クハ差ト,其二線分ノ積* ヲ知ッテ,其二ツノ線分ヲ求ムルコト.

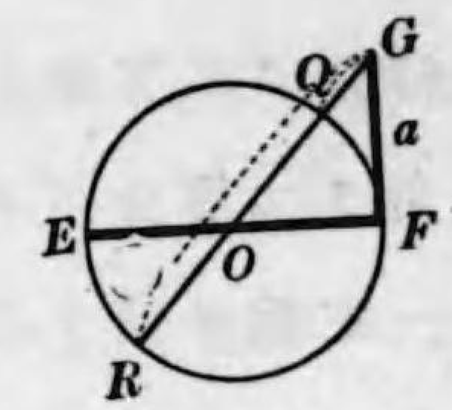



**和ト積 ($a^2$) ヲ知ル場合** 右ノ圖ノ半圓ニ於テ, $AB$ ヲ和, $AC = a$, $AC \perp AB$, $CD \parallel AB$, $DP \perp AB$ トスレバ, $AP$, $PB$ ガ求ムル二線分ナリ.

* 作圖題デ,積ガ知レテ居ルトイフト,ソレダケノ面積ヲ有スル正方形ガ知レテ居ルトスルノデアル. (63 頁, § 49 ノ注意ヲ見ヨ)

**差ト積** ($a^2$) **ヲ知ル場合** (10, 陸士)

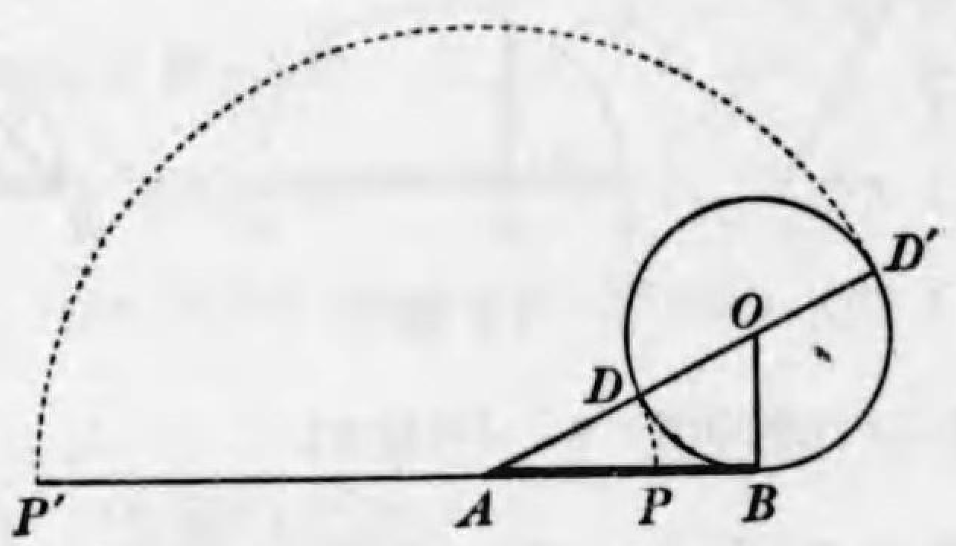
差 $EF$ ヲ直徑トスル圓 $O$ ヲ畫キ, $F$ ニ於ケル切線 $FG$ ヲ $a$ ニ等シク取リ, $G$, $O$ ヲ結ビ付ケ, 更ニソレヲ延長シテ, 圓周トノ交點ヲ $Q$, $R$ トスレバ, $GQ$, $GR$ ガ求ムル二線分ナリ. (何故カ)




**(10)** 線分ヲ中末比ニ内分及ビ外分スルコト.

(15, 東船; 7, 盛農; 5, 東北工專)

下ノ圖ニ於テ, $BO \perp AB$, $BO = \frac{1}{2} AB$, $AP = AD$, $AP' = AD'$ トスレバ, $P$ ガ求ムル内分點, $Q$ ガ求ムル外分點ナリ. (何故カ)




即チ

$$AP^2 = AB.PB$$

$$AP'^2 = AB.P'B$$

**注意** 故ニ, $AB$ ノ長サヲ $a$ トスルト, $AP$ ノ長サハ,

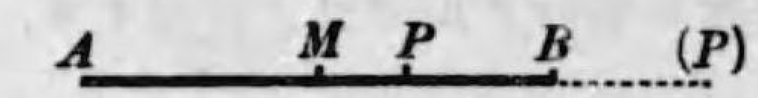
$x^2 = a(a-x)$ 即チ $x^2 + ax - a^2 = 0$ ノ正根 等シ.

$$\therefore \quad AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

**(11)** 一ツノ線分ヲ二分シ,其二ツノ分ノ平方ノ差ヲ與ヘラレタ面積ニ等シカラシムルコト.



**略解** $AB$ ヲ與ヘラレタル線分, $M$ ヲ其中點トシ, $P$ ヲ求ムル分點, 與ヘラレタル面積ヲ $k^2$ トセヨ.




$$AM = a, \quad MP = x \quad \text{トスレバ,}$$

$$AP.PB = (a+x)(a \sim x) = a^2 \sim x^2 = k^2$$

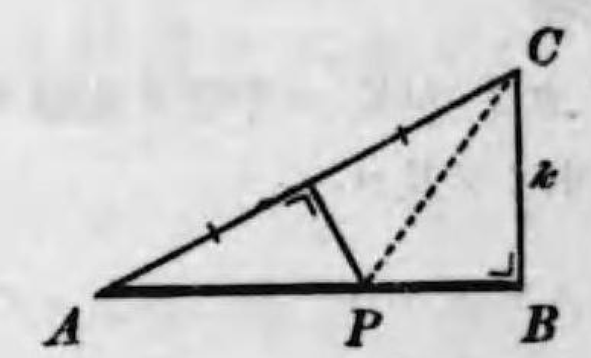
故ニ, 若シ $k^2 < a^2$ ナルトキハ, $x^2 = a^2 - k^2$

又若シ $k^2 > a^2$ ナルトキハ, $x^2 = a^2 + k^2$

即チ何レノ場合ニ於テモ, $x$ ヲ求ムルヲ得 [71 頁ノ問 6, 7 ヲ見ヨ], 從テ $P$ 點ヲ定ムルヲ得.

**別法** 或ハ次ノ如クシテ點 $P$ ヲ定メテモ可イ.

**作圖** $B$ ヨリ $AB$ ニ垂線 $BC$ ヲ引キ, 其長サヲ $k$ ニ等シク取リ, $A$, $C$ ヲ結ビ付ケヨ.




$AC$ ノ垂直二等分線ヲ引キ, $AB$ 又ハ其延長トノ交點ヲ $P$ トスレバ, $P$ ガ求ムル點ナリ.

**略證** $AP^2 - BP^2 = CP^2 - BP^2 = k^2$

## 問題[1]

*1. 平行二直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ, ソレニ平行ナル一ツノ直線ナリ.

2. 定直線外ノ一定點ヨリ,其直線ニ引ケル線分ノ中點ノ軌跡ハ,

[1] 爰ニ揭ゲタ軌跡ノ問題ハ, 定理ト同様ニ, 心得テ居ッテ可イモノデアル.

其直線ニ平行ナル一ツノ直線ナリ.

**3.** 定直線外ノ一定點ヨリ，其直線ニ引ケル線分ヲ一定ノ比ニ分ツ(内分又ハ外分)點ノ軌跡ハ，其直線ニ平行ナル直線ナリ.

**4.** $\angle XOY$ 内ノ一點 $P$ ヲ通リ一直線ヲ引キ，$OX$, $OY$ トノ交點ヲ夫々 $A$, $B$ トシ，$PA=PB$ ナラシムルコト.

又 $P$ ガ角外ニ在ルトキ，$PA=AB$ 若クハ $PB=AB$ ナラシムルコト.

**5.** 直角ヲ三等分スルコト．(14, 欄)

---

**問題略解**

**4.** $P$ カラ $OX$ ニ平行ナ直線ヲ $OY$ マデ引イテ見ヨ.

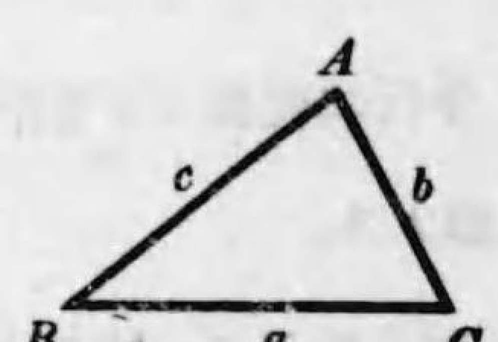
**5.** 直角ヲ $AlC$ トシ，$BC$ 上ニ任意ノ點 $C$ ヲ取リ，$BC$ ヲ一邊トスル正三角形ヲ其角内ニ畫イテ見ヨ.

# 第四章　三角形

## 第一　一般ノ三角形

**22.** 三角形ノ三ツノ邊ト三ツノ角ノ各〻ヲ其三角形ノ**原素**又ハ**要素**トイフ.

三角形ヲ $ABC$ トスルト，其三ツノ角ヲバ，夫々 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ デ表ハシ，其對邊ヲ一ツノ文字デ表ハス場合ニハ，通例夫々 $a$, $b$, $c$ デ表ハス.





### (甲)　一ツノ三角形

### 23. 一つの三角形の要素間に成立つ定理

(1) $\triangle ABC$ ニ於テ，$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$

(2) 三角形ノ外角ハ,其二ツノ内對角ノ和ニ等シ.

(3) 三角形ノ外角ト其一ツノ内對角トノ差ハ,殘ル一ツノ内對角ニ等シ.

(4) 三角形ノ三ツノ外角ノ和ハ,四直角ニ等シ.

(5) 三角形ノ二邊ノ和ハ,第三邊ヨリ大ナリ.

(6) 三角形ノ二邊ノ差ハ,第三邊ヨリ小ナリ.

(7) 三角形ノ二角ノ大小ト,其對邊ノ大小トハ，互ニ相件フ.

**注意**　(1) カラ (4) 迄ハ角ダケニ關スル定理，(5), (6) ハ邊ダケニ關スル定理，(7) ハ邊ト角トニ關スル定理デアル.

(8) $\triangle ABC$ ニ於テ，$AB$ ト $AC$ トガ相等シカラザルトキ，$AB$ 若クハ其延長上ニ $AC$ ニ等シク $AD$ ヲ取リ，$C$, $D$ ヲ結ビ付クレバ,

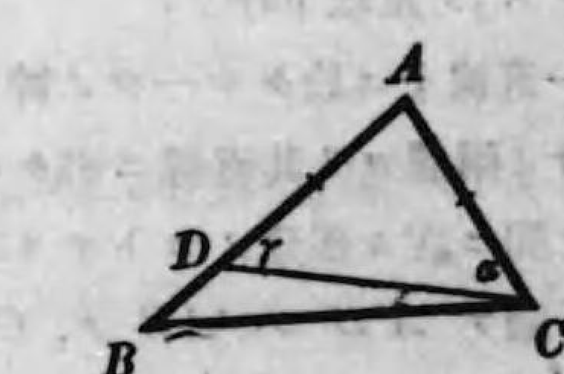
$$\angle BCD=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C),\qquad \angle ACD=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$$

**略證**　右ノ圖ニ於テハ,

(1) $\angle C=\alpha+\beta$

(2) $\angle B=\gamma-\beta=\alpha-\beta$

コレヲ加減スレバ出ル.

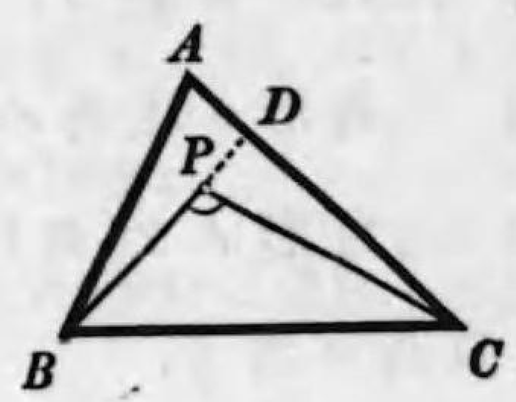


(9) $\triangle ABC$ 内ノ一點ヲ $P$ トスレバ,

$$PB + PC < AB + AC$$

$$\angle P > \angle A$$

**略證** 右ノ圖ニ於テ,




$$PC < DP + DC$$

$$\therefore \quad PB + PC < DB + DC$$

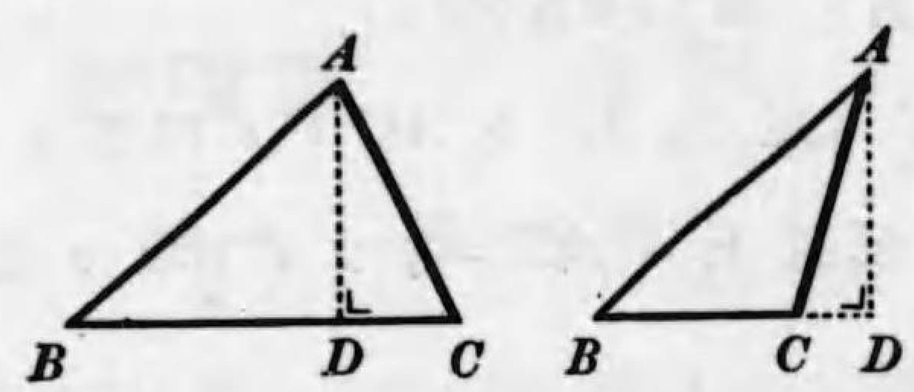
同様ニ, $DB + DC < AB + AC$

初ノ不等式ハ此二ツヨリ出ヒ.

又 $\qquad \angle P > \angle D > \angle A \qquad$ (何故カ)

(10) 直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ各〻ノ平方ノ和ニ等シ.[1] (14, 宮崎農; 10, 熊醫; 8, 東農實)

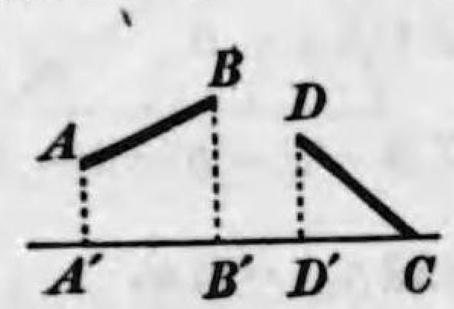
(11) 三角形ノ鋭角ニ對スル邊ノ平方ハ,他ノ二邊ノ各〻ノ平方ノ和ヨリ小ナルコト,其一邊ト其邊ノ上ニ於ケル他ノ邊ノ正射影[2]トノ積ノ二倍ナリ.




1) 此定理ハ「ピタゴラス」トイフ數學者ノ發見シタ有名ノ定理デ, 通例「ピタゴラス」ノ定理ト呼ブ.

2) 一直線上ニ於ケル一ツノ線分ノ**正射影**(**直射影**又ハ略シテ單ニ**射影**)トハ, 其線分ノ兩端ヨリ其直線ニ引ケル垂線ノ足ノ間ニ在ル部分ノコトナリ.

右ノ圖デ $A'B'$ ハ $AB$ ノ, $CD'$ ハ $CD$ ノ $l$ 上ニ於ケル正射影デアル.






即チ, $\triangle ABC$ ノ $\angle B$ ヲ鋭角トシ, $BC$ 上ニ於ケル $AB$ ノ射影ヲ $BD$ トスレバ,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.BC.BD$$

**證** $\qquad AC^2 = AD^2 + DC^2$

然ルニ, $\qquad AD^2 = AB^2 - BD^2$

又 $\qquad DC^2 = (BC \sim BD)^2 = BC^2 + BD^2 - 2.BC.BD$

$$\therefore \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.BC.BD$$

(12) 鈍角三角形ノ鈍角ニ對スル邊ノ平方ハ,他ノ二邊ノ各〻ノ平方ノ和ヨリ大ナルコト,其一邊ト其邊ノ上ニ於ケル他ノ邊ノ正射影トノ積ノ二倍ナリ. (11, 鳥農)

即チ,前ノ右ノ圖ニ於テ, $\angle C$ ヲ鈍角トスレバ,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2.BC.CD$$

**略證** $AB^2 = AD^2 + BD^2$, $\quad BD = BC + CD$ トシテ (11) ノ證ニ倣ヘ.

(13) 三角形ノ一邊ノ平方ガ他ノ二邊ノ各〻ノ平方ノ和ヨリ大ナルカ,之ニ等シキカ,之ヨリ小ナルカニ從テ,其邊ニ對スル角ハ,或ハ鈍角ナリ,或ハ直角ナリ,或ハ鋭角ナリ.

(14) 三角形ノ底邊(ノ長サ)ヲ $a$, 其底邊ニ對スル高サ(ノ長サ)ヲ $h$, 其面積ヲ $S$ トスレバ,

$$S = \frac{1}{2}ah$$

(15) 三角形ノ三邊ノ長サヲ $a$, $b$, $c$, 其面積ヲ $S$ トシ, $2s = a + b + c$ トスレバ,

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ (15, 高校; 5, 東農實)

## 問　　題

**1.** $\triangle ABC$ ノ $B$ 及ビ $C$ ニ於ケル外角ノ二等分線ノナス銳角ハ $A$ ニ於ケル外角ノ $\frac{1}{2}$ ニ等シ.　(5, 麑農)

**2.** $\triangle ABC$ ノ $C$ ニ於ケル外角ノ二等分線ト $\angle B$ ノ二等分線トノナス銳角ハ $\frac{1}{2}\angle A$ ニ等シ.

**3.** $\triangle ABC$ 內ノ任意ノ點ヲ $O$ トスレバ,

$$\frac{1}{2}(AB+AC+BC)<OA+OB+OC<AB+AC+BC$$

(15, 福島商; 6, 長崎商)

**4.** $\triangle ABC$ ニ於テ, 二邊 $AB$, $AC$ ノ長サ一定ニシテ, $\angle A$ ガ $0°$ ヨリ $180°$ マデ變ズルトキ, $AB^2+AC^2$ ト $BC^2$ トノ大サヲ比較セヨ.　(12, 仙工)

---

**問題略解**

**1.** 三角形ノ各外角ノ半分ノ和ガ2直角ニ等シイコトカラ出セ.

**2.** 其角ハ $\triangle ABC$ ノ $C$ ニ於ケル外角ノ半分ト $\frac{1}{2}\angle B$ トノ差ニ等シイ.

**3.** 前半ハ $BC<OB+OC$......カラ, 後半ハ 26 頁ノ (i) ノ初ノ不等式ノ應用カラ出ル.

**4.** § 23 ノ (10), (11) [26 頁], (12) [27 頁] ヲ見ヨ.

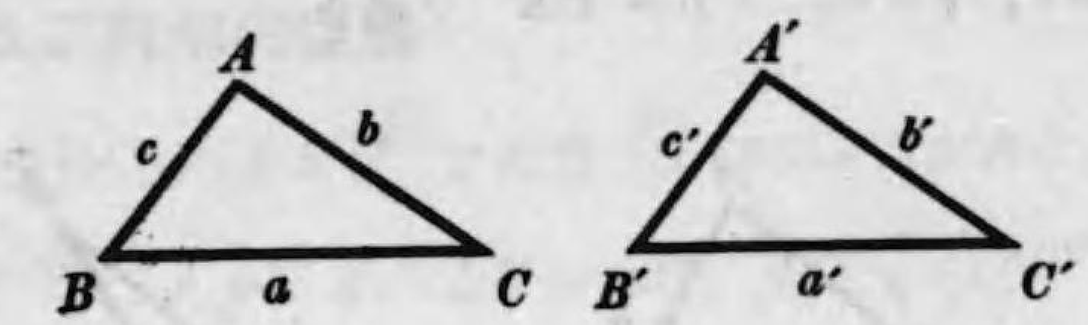
### (乙)　二ツノ三角形ノ比較

### 24.　一般三角形の合同に關する定理

[記述ヲ簡單ニスルタメニ, 記號デ書キ表ハスコトニスル]

$\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トハ次ノ各々ノ場合ニハ合同ナリ.





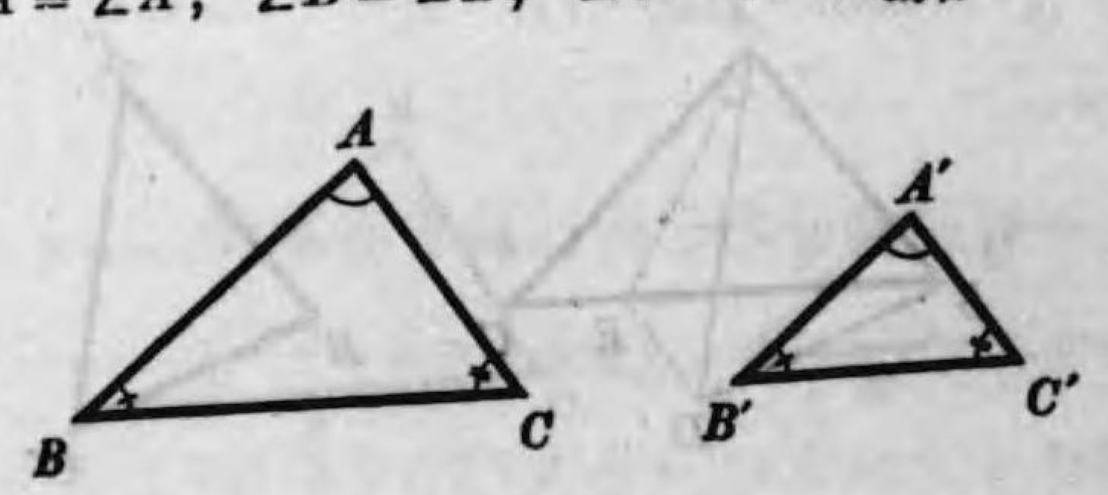

(1) $\begin{cases} c=c' \\ b=b' \\ \angle A=\angle A' \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \angle B=\angle B' \\ \angle C=\angle C' \\ a=a' \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \angle B=\angle B' \\ \angle C=\angle C' \\ b=b' \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} a=a' \\ b=b' \\ c=c' \end{cases}$

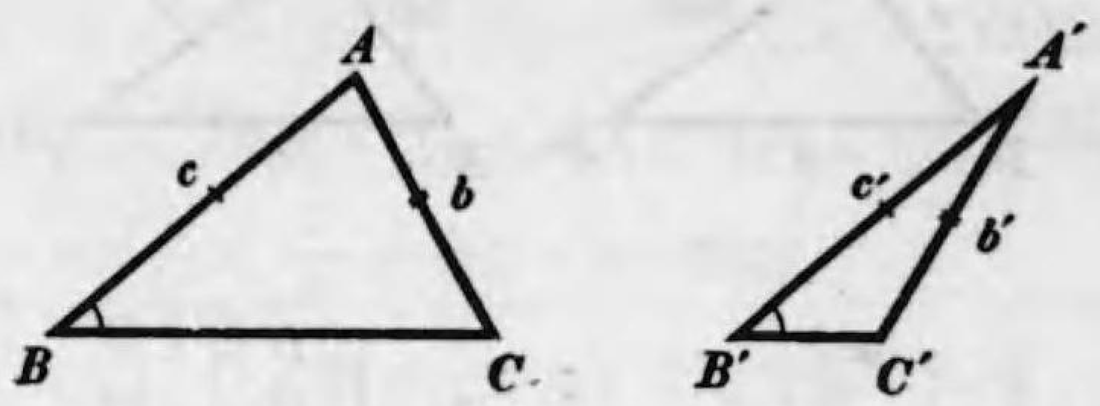
**注意一**　二ツノ三角形ノ合同ニ關スル條件ノ主ナルモノデ, 直角三角形ニ關スルモノガ一ツアルガ, ソレハ 52 頁, § 35 ノ (1) ニ示シテアル.

**注意二**　上ニ示シタ四ツノ場合ニ於テハ, 何レモ一ツノ三角形ノ三要素ガ, 夫々他ノ一ツノ三角形ノ三要素ニ等シイト, 二ツノ三角形ハ合同ダッタケレドモ, サウデナイコトモアル. 其中デ, 次ノ二ツノ場合 (卽チ, 合同デアルコトモアルガ, 合同デナイコトモアル二ツノ場合) ハ, 特ニ注意シテ置ク値打ガアル.

(甲)　$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=C'$ ノ場合.



(乙)　$c=c'$, $b=b'$, $\angle B=\angle B'$　ノ場合.

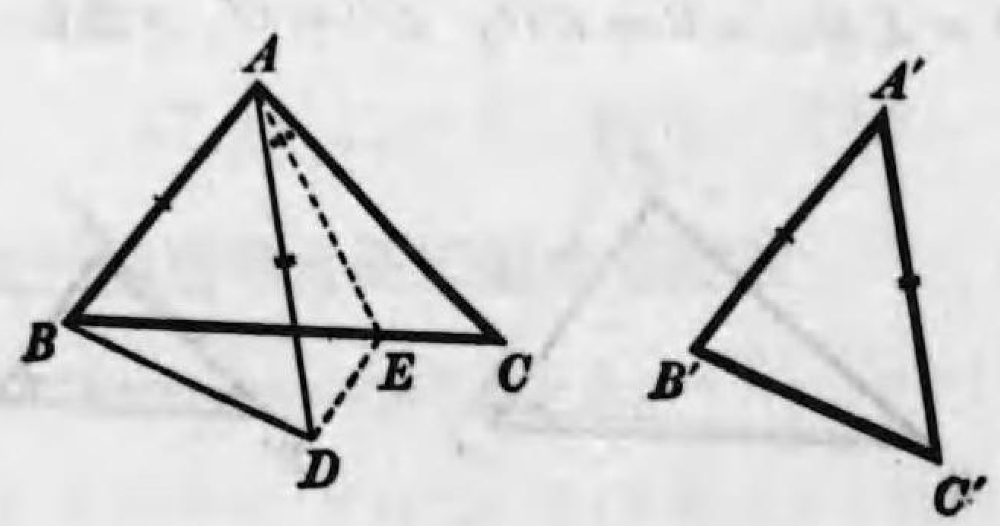



(乙) ノ場合ニ, 二ツノ三角形ガ合同デナイトスルト, $c$, $c'$ ニ對スル $\angle C$, $\angle C'$ ハ互ニ補角デアル. ナゼナラバ, 假リニ $\angle A > \angle A'$ トシテ, $\angle A$ ノ內ニ $\angle A'$ ニ等シク $\angle BAE$ ヲ取ツテ, $AE$ ト $BC$ トノ交點ヲ $E$ トスルト (圖ヲ畫イテ見ヨ), $\triangle ABE \equiv \triangle A'B'C'$　$\therefore AE=AC$　$\therefore \angle C=\angle AEC$
$\therefore \angle C+\angle C'=\angle AEC+\angle AEB=2\angle R$　ダカラデアル.

又 (乙) ノ場合ニ, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ ナラバ, 無論 $\angle C=\angle C'$ デアル. 故ニ (乙) ノ場合ニ於テハ, $c$, $c'$ ニ對スル角ハ等シイカ補角カデアル.

## 25.　心得置くべき不等三角形の性質

**定理**　一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二邊ニ等シキトキハ, 其夾角ノ大小ト, 第三邊ノ大小トハ, 互ニ相伴フ. (15, 北大豫, 北大實, 北大專)



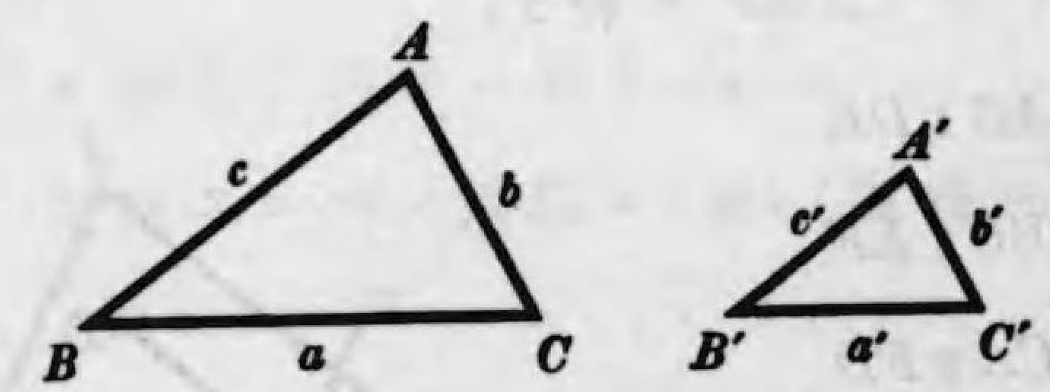



## 26.　相似三角形の定義

**定義**　$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ガ相似 ($\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$) ナリトハ,

(1)　$\angle A=\angle A'$,　$\angle B=\angle B'$,　$\angle C=\angle C'$

且ツ　(2)　$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$　ナルコトナリ.




此 (2) ノ各比ヲ其二ツノ三角形ノ**相似比**トイフ.

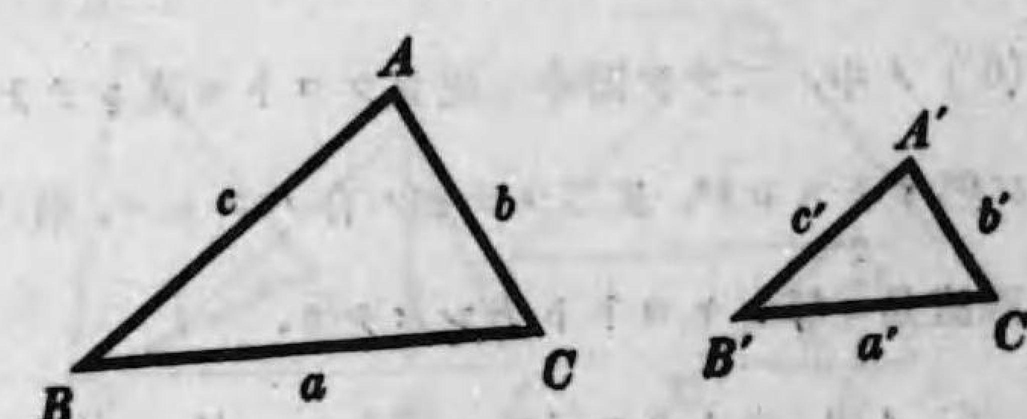
又兩三角形ノ相等シキ角ヲ**對應角**トイヒ, (2) ノ各比ノ兩項ヲナス二邊ヲ**對應邊**トイフ.

**注意**　(2) ハ　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a'}{b'}$,　$\dfrac{b}{c}=\dfrac{b'}{c'}$,　$\dfrac{c}{a}=\dfrac{c'}{a'}$

ガ成立ツトイフノト同ジコトデアル. [尤モ, 此中二ツガ成立テバ, 殘ル一ツハ無論成立ツ]

## 27.　相似三角形に關する定理

$\triangle ABC$ ト $\triangle A'B'C'$ トハ次ノ各々ノ場合ニ相似ナリ.



(1) $\begin{cases} \angle B = \angle B' \\ \angle C = \angle C' \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \angle A = \angle A' \\ \dfrac{b}{c} = \dfrac{b'}{c'} \end{cases}$

[從テ $\angle A = \angle A'$]

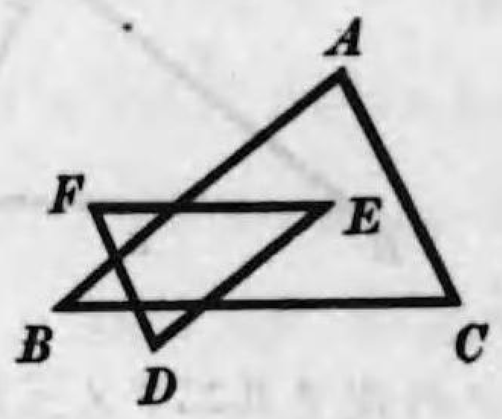
(3) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

(4) $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ ニ於テ,

(1) $AB \parallel DE$

(2) $BC \parallel EF$

(3) $CA \parallel FD$




ナルトキハ,

$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$

證 (1), (2) ニヨリテ,

(4) $\angle B = \angle E$ 若クハ (4′) $\angle B + \angle E = 2\angle R$ [16頁, § 16 ノ (3)]

同樣ニ,

(5) $\angle C = \angle F$ 若クハ (5′) $\angle C + \angle F = 2\angle R$

(6) $\angle A = \angle D$ 若クハ (6′) $\angle A + \angle D = 2\angle R$

然ルニ (4′), (5′), (6′) ガ三ツトモ同時ニ成立ツコトハ決シテナシ. 如何トナレバ, 若シ然リトスレバ, 二ツノ三角形ノ六ツノ角ノ和ガ六直角ニ等シキコトトナレバナリ.

又 (4′), (5′), (6′) ノ中, 二ツガ同時ニ成立ツコトモ決シテナシ. 何トナレバ, 若シ然リトスレバ, 其二ツヲ加ヘ合ハスレバ, 兩三角形ノ四ツノ角ノ和ダケニテ四直角ニ等シキコトトナレバナリ.

故ニ, (4), (5), (6) ノ中, 少ナクモ二ツハ成立ツ. 故ニ (1) ニヨツテ,



$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ ナリ.

(5) $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ ニ於テ,

$AB \perp DE$, $BC \perp EF$, $AC \perp DF$ ナルトキハ,

$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$

證ハ (4) ノ證ニ倣ヘ.

(6) 二ツノ相似三角形ニ於テハ,

($a$) 對應スル角ノ頂點ヨリ各々ノ對邊ニ引ケル垂線ノ比;

($b$) 對應スル角ノ二等分線ノ比;

($c$) 對應スル角ノ頂點ヨリ引ケル中線ノ比;

($d$) 外接圓ノ半徑ノ比;

($e$) 內接圓ノ半徑ノ比;

($f$) 對應邊ニ切スル傍接圓ノ半徑ノ比;

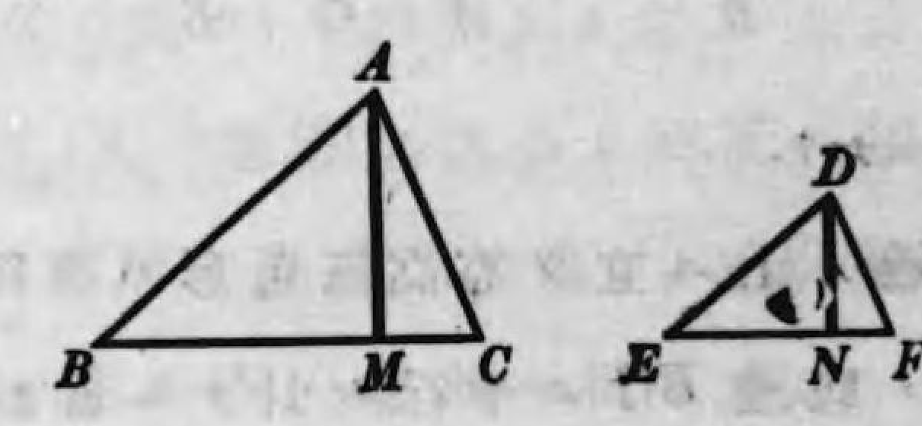
等ハ, 何レモ兩三角形ノ相似比ニ等シ.

略證 是等ノ證ハ何レモ, (1), (2), (3) ノ何レカニ歸ス.

例ヘバ, $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ トシ, $A$, $D$ ヨリ其對邊ニ引ケル垂線ヲ夫々 $AM$, $DN$ トスレバ, $\triangle ABM \backsim \triangle DEN$ [(1) ニヨル]

$\therefore\ AM : DN = AB : DE$

コレ ($a$) ノ證ナリ.



又 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ノ外心ヲ夫々 $O$, $O'$ トシ, $O$, $O'$ ヨリ一組ノ相等シキ鋭角ノ對邊 $BC$, $EF$ ニ垂線 $OM$, $O'N$ ヲ引ケバ,

$$\angle BOM = \angle A \quad [\because \ \angle BOC = 2\angle A], \qquad \angle EO'N = \angle D$$

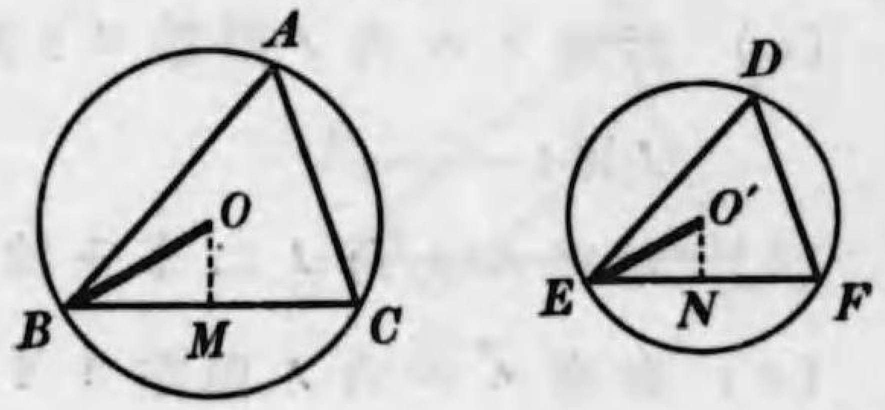
$$\therefore \ \angle BOM = \angle EO'N \ \text{且ツ} \ \angle M = \angle N$$

$$\therefore \ \triangle OBM \backsim \triangle O'EN \quad [(1) \text{ニヨル}]$$

$$\therefore \ OB : O'E = BM : EN = BC : EF$$

コレ (d) ノ證ナリ.

(他モ之ニ倣ヘ)




## 28. 面積の比較に關する定理

(1) 一ツノ三角形ノ底邊トソレニ對スル高サトガ,夫々他ノ一ツノ三角形ノ底邊トソレニ對スル高サトニ等シケレバ,其二ツノ三角形ハ等積ナリ.

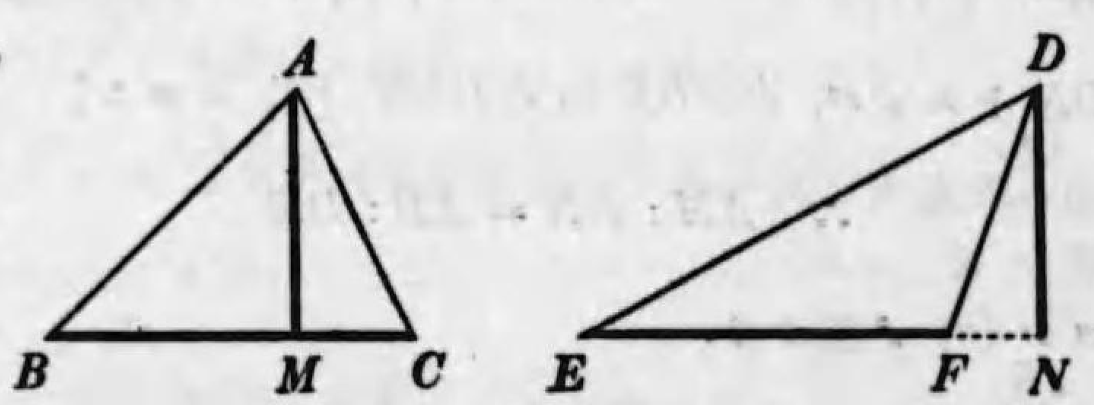
例ヘバ, 右ノ圖ニ於テ,

$AM \perp BC$, $DN \perp EF$

$BC = EF$, $AM = DN$

ナルトキハ,

$\triangle ABC = \triangle DEF$ ナリ.

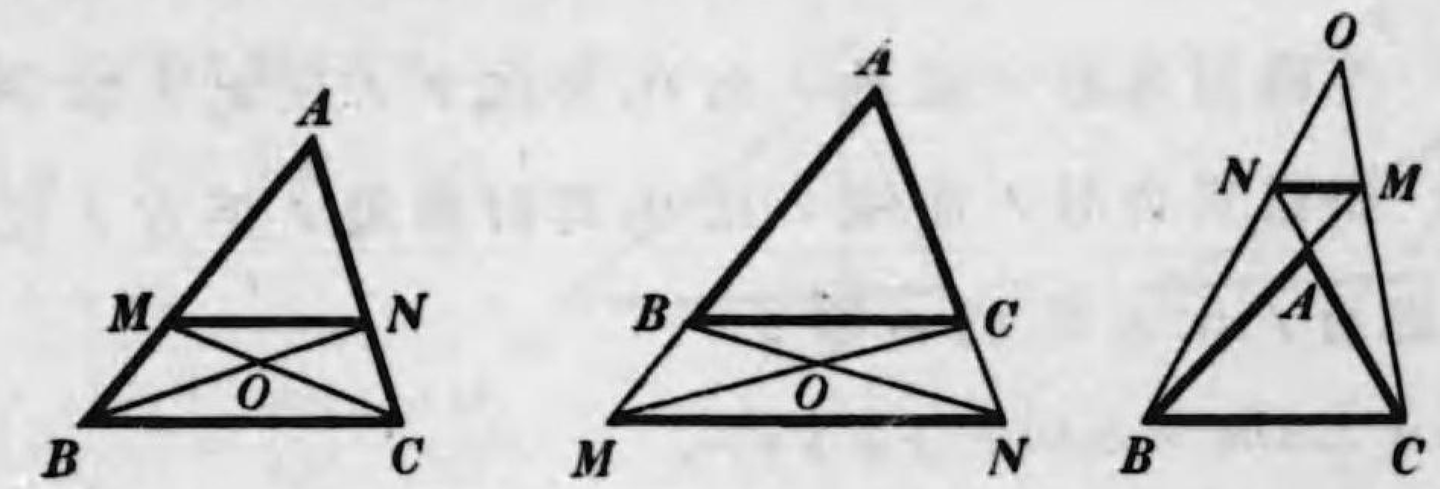



(2) 同ジ底邊ノ上ニ立ツ等高三角形ハ等積ナリ.

(3) $\triangle ABC$ ノ底邊 $BC$ ニ平行ニ引ケル直線ガ $AB$, $AC$



又ハ其延長ト夫々 $M$, $N$ ニ於テ交ルトシ, $B$, $N$ 及ビ $C$, $M$ ヲ結ビ付ケ, 其交點ヲ $O$ トスレバ,




(甲圖) (乙圖) (丙圖)

(a) $\triangle BMN = \triangle CMN$

(b) $\triangle MBC = \triangle NBC$

(c) $\triangle ABN = \triangle ACM$

(d) $\triangle OBM = \triangle OCN$

**略證** (a), (b) ハ (2) ニヨレ.

(c) 甲圖ノ場合ニ於テハ, 等式(a)ノ各邊ト $\triangle AMN$ トノ和ヲ考ヘ, 乙圖及ビ丙圖ノ場合ニ於テハ, 其差ヲ考ヘヨ.

(d) 甲圖及ビ乙圖ノ場合ニ於テハ, 等式 (a) ノ各邊ト $\triangle OMN$ ノ差ヲ考ヘ, 丙圖ノ場合ニ於テハ, 其和ヲ考ヘヨ.

(4) 三角形ノ面積ハ,之ト等底,等高ノ平行四邊形ノ面積ノ半ニ等シ.

(5) 底邊(又ハ高サ)ガ相等シキ二ツノ三角形ノ面積ノ大小ト,其高サ(又ハ底邊)ノ大小トハ,互ニ相伴フ.

(6) 等積三角形ノ底邊(又ハ高サ)ガ相等シキトキハ,其等ノ三角形ノ高サ(又ハ底邊)モ相等シ.

(7) 底邊(又ハ高サ)ガ相等シキ三角形ノ面積ハ,其高サ(又ハ底邊)ニ比例ス.

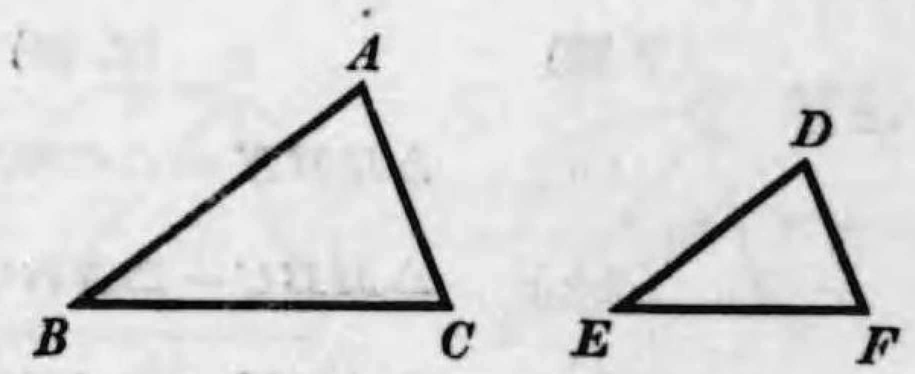
(8) 等積三角形ノ底邊ノ比ハ,其高サノ反比ニ等シ.

(9) 相似三角形ノ面積ノ比ハ,其對應邊ノ平方ノ比(又ハ對應邊ノ比ノ平方)ニ等シ.

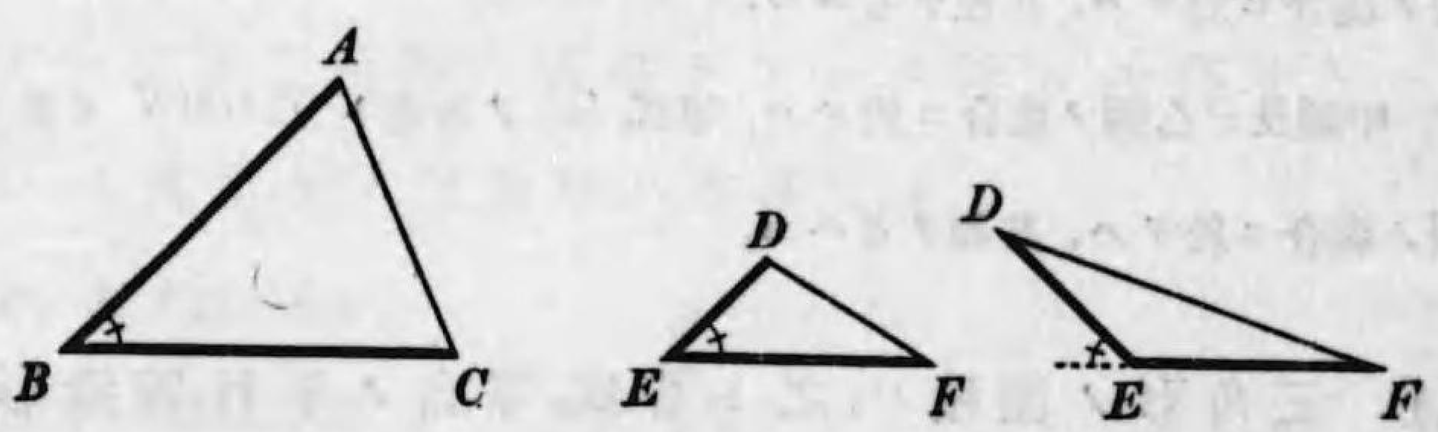
例ヘバ $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ ナルトキハ,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AB^2}{DE^2}$$

$$\left[\text{又ハ} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2\right]$$




(10) 一ツノ三角形ノ一角ガ,他ノ一ツノ三角形ノ一角ニ等シキカ,若クハ互ニ補角ナルトキハ,其二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ各〻ノ三角形ニ於ケルソレ等ノ角ヲ夾ム二邊ノ積ノ比ニ等シ. (14, 北大豫, 北大實, 北大專; 東船)




例ヘバ, $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ ニ於テ,

$\angle B = \angle E$ 若クハ $\angle B + \angle E = 2R$ ナルトキハ,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AB.BC}{DE.EF} \left[\text{又ハ} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{BC}{EF}\right]$$

[$\angle B + \angle E = 2R$ ノ場合ニハ, $FE$ ヲ延長シ, $EF$ ニ等シク $EF'$ ヲ取リ, $D, F'$ ヲ結ビ付ケテ見ヨ]

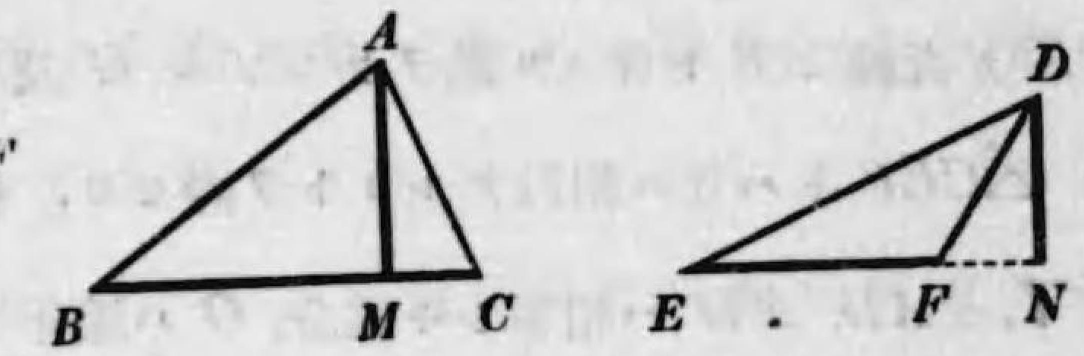


(11) 任意ノ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,兩三角形ノ底邊ノ比ト,ソレ等ノ底邊ニ對スル高サノ比トノ積ニ等シ.

例ヘバ,右ノ圖ニ於テ,

$AM \perp BC$, $DN \perp EF$

ナルトキハ,




$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AM}{DM}$$

**注意** (9), (10), (11) ハ別々ニ證明シテモ可イシ, 先ヅ (11) ヲ證明シテ, ソレカラ (10) ヲ出シ, 更ニ (10) カラ (9) ヲ出シテモ可イ.

## 問　題

**1.** 二ツノ三角形ノ合同(全等)ニ關スル定理ヲ列記セヨ.[1)]

(14, 岐農; 10, 熊醫)

**2.** 同ジ底邊ヲ有スル二ツノ等積三角形ガ其底邊ノ兩側ニ在ルトキ,頂點ヲ結ビ付クル直線ハ底邊又ハ其延長ニテ二等分セラル.

***3.** 同一底邊上ニ立ツ等積三角形ノ頂點ノ軌跡ハ,底邊ニ平行ナル一組ノ直線ナリ.

***4.** 一組ノ鋭角相等シキ二ツノ直角三角形ハ相似ナリ. 又頂角(或ハ底角)ノ相等シキ二ツノ二等邊三角形ハ相似ナリ.

**5.** 圓外ノ一點 $A$ ヨリ割線 $ABC$, $ADE$ ヲ引キ, 圓周ト夫々 $B, C$; $D, E$ ニ於テ交ラシムレバ, $\triangle ABD$, $\triangle AEC$ ハ相似ナリ.

---

1) 此問題ハ, 只カウイフ問題モ入學試驗問題ノ中ニアルトイフコト示スタメニ掲ゲタノデアル.

**6.** 圓 $ADBC$ ニ於テ $AB$, $CD$ ヲ互ニ垂直ナル二ツノ直徑トス. 今任意ノ弦 $EF$ ヲ引キ, $C$ ト $E$ 及ビ $F$ トヲ結ビ付クル二直線 $CE$, $CF$ ガ直線 $AB$ ト會スル點ヲソレゾレ $G$ 及ビ $H$ トセバ, $\triangle CGH$ ト $\triangle CEF$ トハ互ニ相似ナルコトヲ證セヨ. (7, 海諸校)

**7.** $AB$, $A'B'$ ハ相等シキ線分, $O$ ハ線分 $AA'$, $BB'$ ノ垂直二等分線ノ交點ナリ. 然ルトキハ $\triangle OAA' \backsim \triangle OBB'$.

**8.** 一ツノ三角形ノ二邊ノ比ハ其邊ニ對スル高サノ反比ニ等シ. (12, 甕農)

**9.** $D$, $E$ ハ夫々 $\triangle ABC$ ノ邊 $AB$, $AC$ 上ノ點ニシテ, $3.AD = AB$, $2.AE = AC$ ナルトキ, $\triangle ADE : \triangle ABC = 1:6$ ナリ.

---

**問題略解**

**2.** 二ツノ頂點カラ底邊ニ垂線ヲ引イテ, 35 頁, §28 ノ (6) ヲ使ヘ.

**4.** §27 ノ (1) ノ特別ノ場合.

**5.** 32 頁, §27 ノ (1) ニ依レ, [112 頁, §74 ノ(2) ヲ見ヨ].

**6.** $\angle CHG = \angle CEF$ ヲ 86 頁, §63ノ (9) 又ハ (10) ヲ使ッテ證セヨ.

**7.** 先ヅ $\triangle OAB \equiv \triangle OA'B'$ カラ $\angle AOB = \angle A'OB'$ ヲ出シ, (精確ナ圖ヲカケ) 問 4 ノ後ノ方ニヨレ.

**8.** $\triangle ABC$ ノ $BC$, $CA$ ニ對スル高サヲ $AM$, $BN$ トスルト

$$BC.AM = CA.BN$$

ソコデ 11 頁, §13 ノ (6) ニ依レ.

**9.** 36 頁, §28 ノ (10) ニヨレ.

## 第二　三角形ト直線

### 29. 三角形の一邊に平行な直線

(1) 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通リ, 他ノ一邊ニ平行ニ引ケル直線ハ第三邊ノ中點ヲ通ル.



而シテ, 其直線ノ三角形內ニ在ル部分ハ平行邊ノ半ニ等シ.

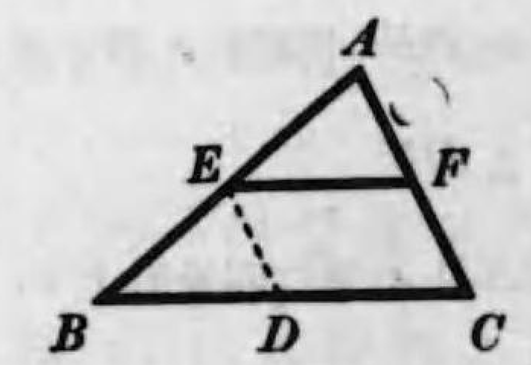
(2) 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ビ付クル線分ハ, 第三邊ニ平行ニシテ, 且ツ其半ニ等シ.

(3) 三角形ノ底邊ニ平行ナル直線ノ三角形內ニ在ル部分ガ, 底邊ノ半分ニ等シキトキハ, 其直線ハ他ノ二邊ノ中點ヲ通ル.

**略證** 右ノ圖ニ於テ,

$$EF \parallel BC, \quad EF = \frac{1}{2} BC$$

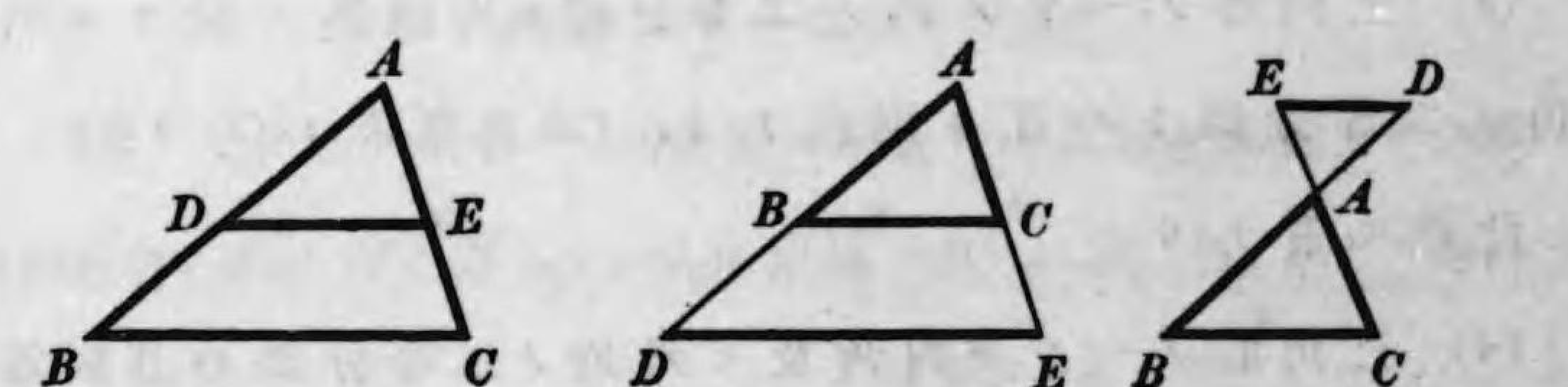
トシ, $E$ ヨリ $AC$ ニ平行ナル直線 $ED$ ヲ引キ, 先ヅ $E$ ガ $AB$ ノ中點ナルコトヲ證セヨ.




(4) 三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ハ, 他ノ二邊ヲ相等シキ比(其二邊ノ共有頂點ヲ端トスル分ガ對應スル樣ニ)ニ內分若クハ外分ス.

(5) $\triangle ABC$ ノ一邊 $BC$ ニ平行ニ引ケル直線ガ, 二邊 $AB$, $AC$ 又ハ其延長ト夫々 $D$, $E$ ニ於テ交ルトキハ,

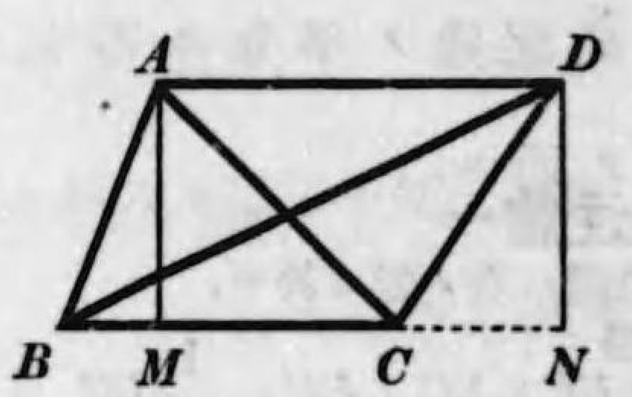
$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$



(6) 三角形ノ二邊ヲ相等シキ比ニ內分若クハ外分スルトキハ(二邊ノ共有頂點ヲ端トスル分ガ對應スル樣ニ),其分點ヲ結ビ付クル直線ハ第三邊ニ平行ナリ. [(5) ノ逆]

(7) 同一ノ底邊上ニ,其同ジ側ニ在ル等積三角形ノ頂點ヲ結ビ付クル直線ハ底邊ニ平行ナリ. 此逆モ眞ナリ.

**略證**　右ノ圖ニ於テ,




$\triangle ABC = \triangle DBC$ トシ

$AM \perp BC$, $DN \perp BC$ トスレバ,

$AM = DN$ [35頁 ノ (6)]

$\therefore$ $AM \mathrel{\underline{\parallel}} DN$

故ニ, $AMND$ ハ平行四邊形ナリ. $\therefore$ $AD \parallel BC$

## 30. 三角形の內角及び外角の二等分線に關する定理

(1) 三角形ノ三ツノ角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル.

(5, 海機)

其點ガ其三角形ノ**內心**ナリ.

(2) 三角形ノ二ツノ外角ノ二等分線ト殘ル一ツノ內角ノ二等分線トハ同一ノ點ヲ通ル.

其點ガ其角內ニ在ル其三角形ノ**傍心**ナリ.

(3) 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ト其頂點ニ於ケル外角ノ二等分線トハ互ニ垂直ナリ. [15頁, §15 ノ (3) ヲ見ヨ]

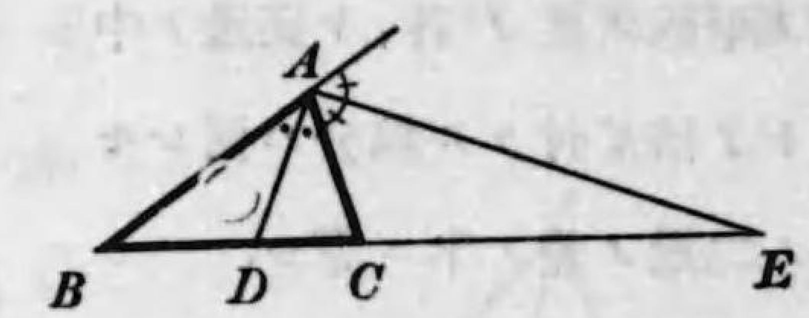
此逆モ眞ナリ.

(4) 三角形ノ一ツノ內角及ビ外角ノ二等分線ハ其對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ,夫々內分及ビ外分ス.

(15, 宮崎農; 14, 高校; 10, 專檢; 8, 鹿農)



右ノ圖ニ於テ,




$AD$ ガ $\angle A$ ノ二等分線,

$AE$ ガ其外角ノ二等分線ナルトキハ,

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}, \qquad \frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

**注意一**　二等邊三角形ノ頂角ノ外角ノ二等分線ニ付テハ,其二等分線ガ底邊ニ平行ダカラ,此定理ノ外角ノ二等分線ニ關スル部分ハ成立タナイ.

(5) 三角形ノ底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分及ビ外分スル點(其分ニ接スル邊ガ對應スル樣ニ)ト,其對角ノ頂點トヲ結ビ付クル直線ハ,夫々其角及ビ其外角ヲ二等分ス.

[(4) ノ逆]

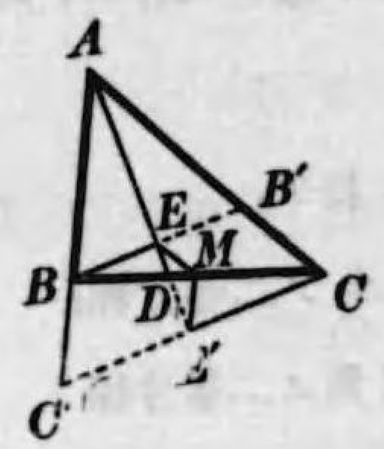
**注意二**　三角形ノ三邊ノ長サガ分ルト,其各角ノ二等分ノ長サヲ求メルコトガ出來ル. [98頁, §69 ノ第一ヲ見ヨ]

## 問　題

**1.** 三角形ノ二ツノ傍心ヲ結ビ付クル直線ハ一ツノ頂點ヲ通リ,內心ト第三ノ傍心トヲ結ビ付クル直線ニ垂直ナリ.

**2.** 三角形ノ頂角ノ二等分線ニ垂直ナル直線ガ底邊トナス角ハ兩底角ノ差ノ半ニ等シク,又其直線ガ他ノ二邊ノ各々トナス角ハ何レモ兩底角ノ和ノ半ニ等シキコトヲ證明セヨ.

**3.** 三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ頂角ノ二等分線ニ引キタル二ツノ垂線ノ足ノ各々ト底邊ノ中點トヲ結ビ付クル線分ハ何レモ他ノ二邊ノ差ノ半ニ等シ.



**4.** $\triangle ABC$ ノ三邊ヲ夫々 3米, 5米, 6米トシ, 最大角及ビ其外角ノ二等分線ガ對邊ヲ分ツ其各部分ノ長サヲ求メヨ.

**5.** 三角形 $ABC$ ノ邊 $BC$ ノ中點ヲ $D$ トシ, 角 $ADB$, 及ビ $ADC$ ノ二等分線ガ $AB$, $AC$ ト交ル點ヲ夫々 $E$, $F$ トスレバ, $EF$ ハ $BC$ ニ平行ナルコトヲ證明セヨ. (8, 上鑑)

---

**問題略解**

**1.** 對頂角ノ二等分線ハ一直線ヲナスコトト, 15 頁ノ (3) ニ依レ.

**2.** 頂角ノ二等分線ニ垂直ナ直線ガ底邊ノ一端ヲ通ル樣ニスルト 25頁, §23 ノ (8) ニナル.

**3.** 圖ニ於テ, $AD$ ハ $\angle A$ ノ二等分線, $BE \perp AD$ トシ, $BE$ ノ延長ガ $AC$ ト $B'$ デ交ルトスルト,

$$AB' = AB, \quad BE = EB'$$

ソコデ 39 頁 §29 ノ (2) ニ依レ.

**4.** 答 $3\frac{3}{4}$ 米, $2\frac{1}{4}$米; 15 米, 9 米.

最大角ヲ $A$, $\angle A$ ノ二等分線ヲ $AD$, 其外角ノ二等分線 ($BC$ ノ延長デ出會フトス) ヲ $AE$ トスルト,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{BD + DC} = \frac{5}{5+3}$$

$$\therefore \quad BD = 6 \times \frac{5}{8} = 3\frac{3}{4}$$

又 $CD = 6 \times \frac{3}{8} = 2\frac{1}{4}$

同樣ニ, $\dfrac{BE}{BE - CE} = \dfrac{5}{5-3}$

$$\therefore \quad BE = 6 \times \frac{5}{2} = 15$$

又 $CE = 6 \times \frac{3}{2} = 9$

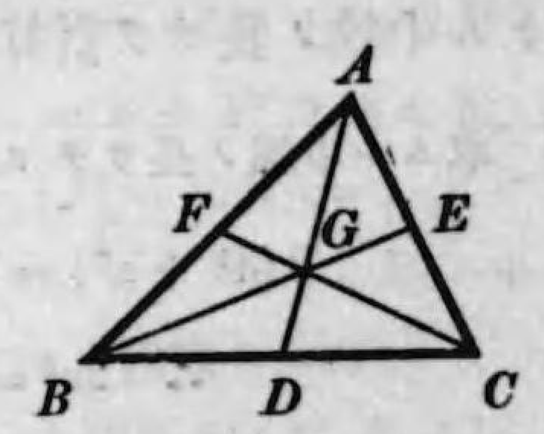
**5.** $\triangle DAB$. $\triangle DAC$ ノ各々ニ付テ, 40 頁. §30 ノ (4) ヲ適用シ, 後 40 頁, §29 ノ (6) ニ依レ.



## 31. 三角形の中線に關する定理

(1) 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點ヲ通ル. (12, 鳥農; 10, 專檢; 6, 廣師)
其點ガ其三角形ノ**重心**ナリ.

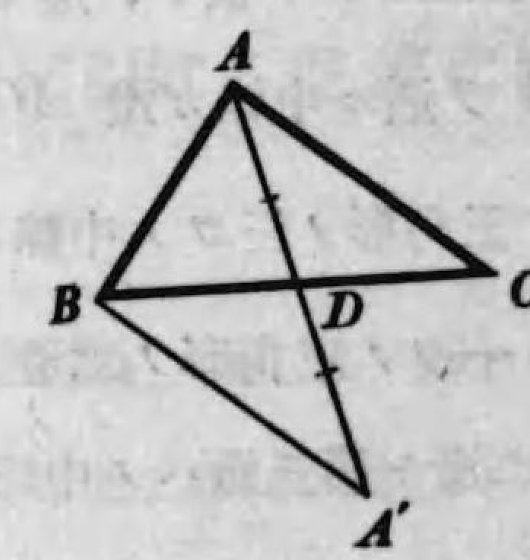
(2) 三角形ノ重心ハ各中線ヲ 2:1 ニ分ツ(頂點ヲ一端トスル分ガ 2 ニ對應ス).



右ノ圖ニ於テ, $G$ ヲ $\triangle ABC$ ノ重心トスレバ, $AG = 2.GD$, $BG = 2.GE$, $CG = 2.GF$

(3) 三角形ノ中線ハ,ソレガ通ル頂點ニ於テ出會フ二邊ノ和ノ半ヨリ小ナリ. (15, 海機; 9, 東農實; 6, 神商)

**略證** 中線 $AD$ ヲ延長シテ $AD$ ニ等シク $DA'$ ヲ取リ $A'$, $B$ ヲ結ビ付クレバ $A'B = AC$ (何故カ),



$$\therefore \quad AB + AC = AB + A'B > AA'$$

**注意一** 中線ニ關係ノアル問題ハ,ココノ證明デヤッタ樣ニ, ソレヲ二倍ニ延長シテヤルト都合ノ可イコトガ多イ.

(4) 各中線ハ其三角形ノ面積ヲ二等分ス.

[∵ 上ノ圖ニ於テ, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ ハ底邊等シク高サ同ジケレバナリ]

(5) 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ハ, 第三邊ヘノ中線ノ平方ト第三邊ノ半分ノ平方トノ和ノ二倍ニ等シ. (9, 上鑑)

即チ (3) ノ圖ニ於テ, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ (15, 陸士豫)

**注意二** 三角形ノ三邊ノ長サノ數値ガ分ルト,此定理デ其三角形ノ中線ノ長サヲ求メルコトガ出來ル.

**例** 三邊ノ長サガ 5 尺, 7 尺, 8 尺ナル三角形ニ於テ, 8尺ノ邊ニ引ケル中線ノ長サヲ計算スルコト.

**解** 求ムル中線ノ長サヲ $x$ 尺トスレバ,

$$2(4^2+x^2)=7^2+5^2$$

$$\therefore\ 2x^2=49+25-32=42$$

$$\therefore\ x^2=21 \qquad \therefore\ x=\sqrt{21} \qquad 答\ \sqrt{21}\ 尺$$

## 問 題

**1.** $\triangle ABC$ ニ於テ, 邊 $AC$ ハ邊 $AB$ ヨリ大ナリ. 然ルトキハ頂點 $A$ ヲ通ル中線ガ邊 $AC$ トナス角ハ $AB$ トナス角ヨリ小ナリ.

**2.** 三角形ノ三ツノ中線ノ和ハ周ヨリ小ナリ.

**3.** 一ツノ三角形ノ二邊ト第三邊ヘノ中線ガ, 夫々他ノ一ツノ三角形ノ二邊ト第三邊ヘノ中線ニ等シキトキハ, 二ツノ三角形ハ合同ナリ.

***4.** 三角形ノ小ナル邊ヘ引ケル中線ハ, 大ナル邊ヘ引ケル中線ヨリ大ナリ. (14, 海經; 10, 北大豫, 北大專)

***5.** $\triangle ABC$ ノ重心ヲ $G$ トスレバ

$$\triangle AGB=\triangle BGC=\triangle AGC=\frac{1}{3}\triangle ABC$$

***6.** 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ. (15, 樺商)



### 問題略解

**1.** 43 頁ノ(3)ノ圖ノ $\triangle BAA'$ ニ於テ $\angle BA'D<\angle BAD$, コレカラ出セ.

**2.** 43 頁, §31 ノ (3) ニ依レ.

**3.** 二ツノ三角形ノ各〻ニ, 43 頁ノ (3) ノ圖ト同樣ナ作圖ヲセヨ.

**4.** 43 頁, §31 ノ (2) ノ圖ニ於テ, $AB>AC$ トシ, $\angle ADB>\angle ADC$ ヲ證シ, 次ニ $\triangle GBD$, $\triangle GCD$ ヲ比較シテ $GB>GC$ ヲ證セヨ.

**5.** §31 ノ (2) ノ圖ニ於テ, $\triangle ABD=\triangle ACD$, $\triangle GBD=\triangle GCD$ [34 頁, §28 ノ (1)], 此差ヲ取ルト, $\triangle ABG=\triangle ACG$

**6.** 二定點ヲ $A$, $B$, 線分 $AB$ ノ中點ヲ $M$, 條件ニ適スル一點ヲ $P$ トスルト,

$PA^2+PB^2=2(PM^2+AM^2)$

＝一定, コレヲ $k^2$ トスルト,

$PM^2=\frac{1}{2}k^2-AM^2=$ 一定ダカラ, 更ニ之ヲ $r^2$ トスルト, $P$ ハ中心 $M$, 半徑 $r$ ナル圓周上ニ在ル.

又逆ニ, 其圓周上ノ點 $P$ ノ $A$, $B$ カラノ距離ノ平方ノ和ハ $k^2$ ニ等シイ(ヤッテ見ヨ). 故ニ中心 $M$, 半徑 $r$ ナル圓ノ周ガ, 其軌跡デアル.

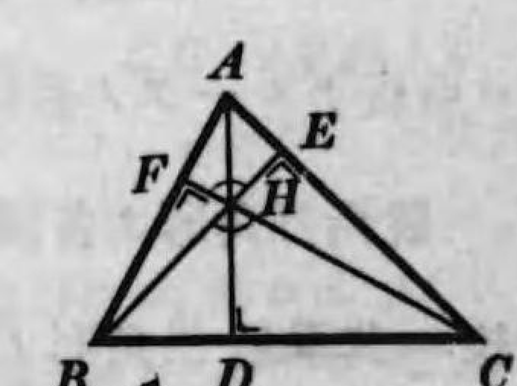
## 32. 三角形の頂點より其對邊に引ける垂線に關する

### 定理

(1) 三角形ノ三ツノ頂點ヨリ, 其各〻ノ對邊ニ引ケル三ツノ垂線ハ同一ノ點ヲ通ル. (10, 東北工專; 5, 熊工)

其點ヲ其三角形ノ**垂心**トイヒ, 三ツノ垂足ヲ頂點トスル三角形ヲ其三角形ノ**垂足三角形**トイフ.

(2) 三角形ノ垂心ヨリ底邊ヲ見込ム角ト其頂角トハ互ニ補角ナリ.



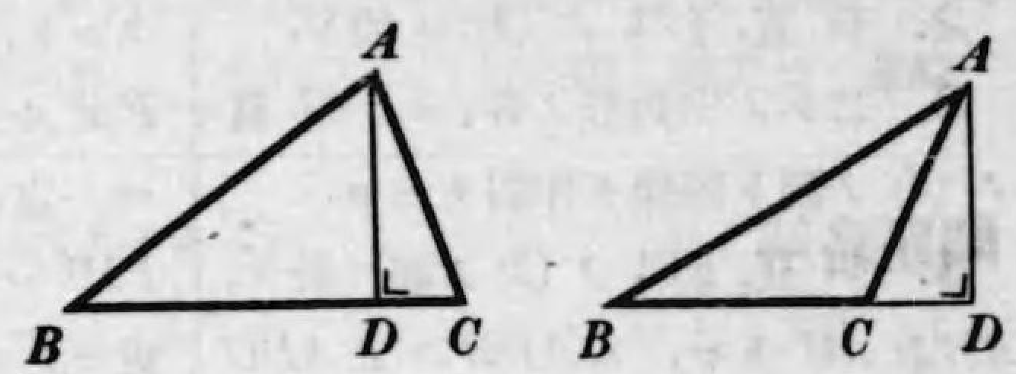

右ノ圖ニ於テハ, $\angle BHC$ ノ對頂角ヲ考ヘルト直ニ明カデアル.

(3) 三角形ノ二邊ノ平方ノ差ハ,其二邊ノ共有頂點ヨリ第三邊ニ引ケル垂線ガ之ヲ分ツ二ツノ分ノ平方ノ差ニ等シ.

例ヘバ,右ノ圖ニ於テ,

$AD \perp BC$ ナルトキハ

$BD^2 \sim CD^2 = AB^2 \sim AC^2$




**略證** $AB^2 \sim AC^2 = (BD^2 + AD^2) \sim (CD^2 + AD^2) = BD^2 \sim CD^2$

## 問　題

*1. $H$ ガ $\triangle ABC$ ノ垂心ナレバ,四ツノ點 $A, B, C, H$ ノ中,何レノ點モ殘ル三ツノ點ヲ頂點トスル三角形ノ垂心ナリ. (10, 東北工專)

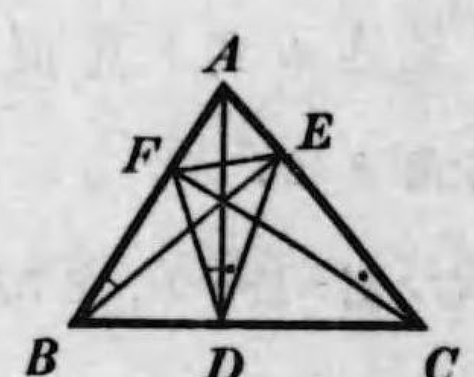
2. 三角形ノ二邊ノ大小ト,其二邊ニ對スル高サノ大小トハ,互ニ相反ス.

*3. 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ト其頂點ヨリ對邊ニ引ケル垂線トノナス角ハ,他ノ二角ノ差ノ半ニ等シ.

4. 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ハ,其頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ト中線トノ間ニ在リ. (9, 樺商; 5, 廣師)

*5. $A, B$ ハ二定點ナリ, $AP^2 - BP^2$ ガ一定ナル點 $P$ ノ軌跡ハ $AB$ ニ垂直ナル一ツノ直線ナリ. (15, 京城商)

*6. 鋭角三角形ノ各頂點ヨリ對邊ニ引ケル垂線ハ,其垂足三角形ノ三ツノ角ヲ二等分ス.






7. 三角形ノ頂點 $A, B, C$ ヨリ對邊ニ下セル垂線ノ足ヲ夫々 $D, E, F$ トスレバ直線 $AD$ ハ角 $EDF$ 又ハ其隣接角ヲ二等分スルコトヲ證セヨ. (13, 阪外)

**注意** 此問題ノ隣接角ハ,「其補角ナル隣接角」トイハナケレバヨクナイ.

---

## 問題略解

1. $BA \perp CH$, $CA \perp BH$ ダカラ $A$ ハ $\triangle HBC$ ノ垂心デアル.

2. $\triangle ABC$ ニ於テ, $AB > AC$ トシ, $AB$ ニ付テノ $C$ ノ對稱點ヲ $C'$, $AC$ ニ付テノ $B$ ノ對稱點ヲ $B'$ トシ, 30 頁, § 25 ニヨリ $BB' > CC'$ ヲ證セヨ. 又ハ 36 頁ノ(8) ニヨレ.

3. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ヲ $AD$, $A$ カラ $BC$ ヘノ垂線ヲ $AH$ トスルト, $\angle BAH = 90° - \angle B$, $\angle CAH = 90° - \angle C$. 此差ヲ取ルト, $2\angle DAH = \angle B \sim \angle C$ トナル [3 頁, § 3 ノ注意及ビ同節 (3)] (此證ハ $\angle B$, $\angle C$ ヲ何レモ鋭角トシテヤッテアル, 其一ツガ鈍角ノ場合モヤッテ見ヨ).

4. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB < AC$ トシ, 又 $\angle A$ ノ二等分線ヲ $AD$, $A$ カラ $BC$ ニ引イタ垂線ヲ $AH$, 中線ヲ $AM$ トスルト, $AM$ ハ $AC$ ト $AD$ ノ間ニ在ルシ [44 頁ノ問 1], 又 $\angle B < 90°$ ダト, $\angle BAH < \angle CAH$ ダカラ, (何故カ) $AH$ ハ $AB$ ト $AD$ トノ間ニ在ル. 故ニ $AD$ ハ $AH$ ト $AM$ トノ間ニ在ル. ($\angle B \geqq 90°$ ノ場合モヤレ).

5. $P$ ヲ條件ニ適スル點トシ, $P$ ヲ通ッテ $AB$ ニ垂直ナ直線 $y$ ヲ引イテ $AB$ 又ハ其延長トノ交點ヲ $D$ トスルト, $AD^2 - BD^2 = AP^2 - BP^2$ = 一定ダカラ, $D$ ハ定點 [22 頁ノ (11)], 從テ $y$ ハ定直線デアル. 又 $y$ 上ノ任意ノ點ハ條件ニ適ス [前頁ノ (3)]. 故ニ, $y$ ガ其軌跡デアル.

6. 鋭角三角形ダカラ, 圖ノ $D, E, F$ ハ皆邊ノ上ニ在ル. 今垂心ヲ $H$ トスルト (圖ニハ $H$ ハ書イテナイ) 四邊形 $FBDH$ ニ於テ, $\angle FBH = \angle FDH$ [$\because \angle HFB = \angle R = \angle HDB$ (112頁ノ (1) ヲ見ヨ)]. 又四邊形 $HDCE$ ニ於テ $\angle ECH = \angle EDH$, 然ルニ $\angle FBH = \angle ECH$ (何レモ $\angle A$ ノ餘角), $\therefore \angle FDH = \angle EDH$

7. $\angle B$, $\angle C$ ガ鋭角ノ場合ハ, 前問デ分ル ($\angle A$ ガ鈍角ノ場合モヤッテ見ヨ). $\angle B$ ヲ鈍角トシ $H$ ヲ垂心トスルト, $\triangle AHC$ ハ鋭角三角形ダカラ, 前問ニヨッテ $DC$ ハ $\angle EDF$ ヲ二等分スル, 然ルニ $AD \perp CD$. 故ニ此場合ニハ $AD$ ハ $\angle EDF$ ノ補角ナル隣接角ヲ二等分スル.

## 第三　特別ナル三角形

### 33. 二等邊三角形に關する定理

(1) 二等邊三角形ノ二ツノ底角ハ相等シ. 此逆モ眞ナリ.

(2) 二等邊三角形ノ頂角ノ外角ハ, 一ツノ底角ノ二倍ニ等シ.

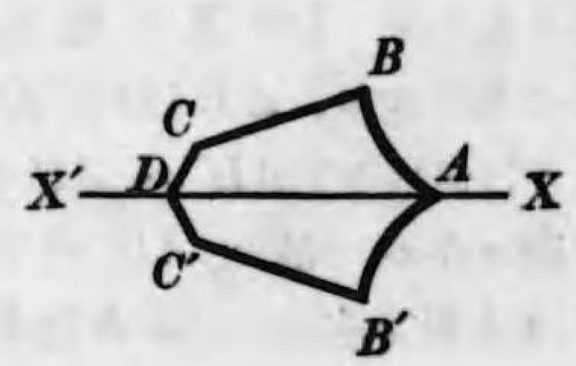
(3) 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ, 底邊ヲ垂直ニ二等分ス.

(4) 二等邊三角形ノ頂點ト底邊ノ中點トヲ結ビ付クル直線ハ, 頂角ヲ二等分シ, 且ツ底邊ニ垂直ナリ.

(5) 一ツノ角ノ二等分線ガ其對邊ニ垂直ナル三角形ハ, 其角ヲ頂角トスル二等邊三角形ナリ.

(6) 二等邊三角形ハ其頂角ノ二等分線ニ付テ對稱* ナリ.

* 例ヘバ, 右ノ圖ニ於テ, $XX'$ ヲ折目トシテ一方ヲ折返シタトキニ, $ABCD$ ガ $AB'C'D$ ニ一致スルト, $ABCDC'B'A$ ハ $XX'$ ニ付テ對稱 (卽チ, 線對稱) デアルトイフ.






(7) 二等邊三角形ノ頂角ノ外角ノ二等分線ハ底邊ニ平行ナリ. 此逆モ眞ナリ.

## 問　題

**1.** 二等邊三角形ノ底角ハ鋭角ナリ.

**2.** 三角形ノ底ノ兩端ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ガ相等シキトキハ, 其三角形ハ等脚三角形ナリ.

**3.** 二等邊三角形ノ底邊上ノ任意ノ點ヨリ他ノ二邊ニ平行ナル直線ヲ引ケバ, 其二ツノ直線ノ形內ニ在ル部分ノ和ハ一定ナリ.

其點ガ底邊ノ延長上ニ在ル場合ハ如何.

**4.** 二等邊三角形 $ABC$ ノ底邊 $BC$ 上ノ任意ノ點 $P$ ヨリ之ニ垂直ナル直線ヲ引キ, $AB$, $AC$ ト夫々 $E$, $F$ ニ於テ交ラシムレバ, $PE+PF$ ハ一定ナリ. (14, 海兵; 13, 福島商; 12, 東農實; 8, 樽商)

$P$ ガ底邊ノ延長上ニ在ル場合ハ如何.

***5.** 二等邊三角形ノ底邊上ノ任意ノ點ヨリ他ノ二邊又ハ其延長ニ引ケル垂線ノ和ハ一定ナリ.

(13, 分商; 12 字農)


點ガ底邊ノ延長上ニ在ル場合ハ如何.

## 問題略解

1. 鈍角若クハ直角トスルト不合理トナルコトヲ證セヨ.

2. 頂角ヲ共通ノ一鋭角トスル二ツノ直角三角形ノ合同ヲ證セヨ.

3. 其和ガ,相等シキ一邊ニ等シイコトヲ證セヨ. 點ガ底邊ノ延長上ニ在ルトキハ,等シイ邊ノ延長迄引イタ線分ノ差ガ相等シキ一邊ニ等シイ.

4. 頂點 $A$ カラ底邊ニ平行ナ直線ヲ引イテ, $\triangle AEF$ ガ二等邊ナルコトカラ, $PE+PF$ ガ $A$ カラ引イタ高サノ二倍ニ等シイコトヲ證セヨ.

$P$ ガ底邊ノ延長ノ上ニアルトキハ $PE \sim PF$ ガ $A$ カラ引イタ高サノ二倍ニ等シイ.

5. 示シテアル圖ニ於テハ,

$PF' \parallel CA,\ BD \perp AC$ デアル.

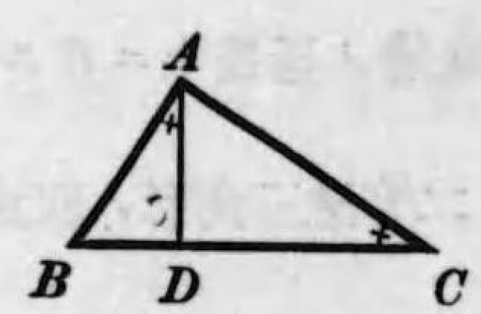
ソコデ $\triangle FBP \equiv \triangle F'PB$ ヲ證シテ, $PE+PF=BD$ ヲ證セヨ. $P$ ガ $BC$ ノ延長上ニ在ルトキハ, $PE \sim PF = BD$ デアル. (同様ニ出來ル)

## 34. 一つの直角三角形に關する定理

(1) 直角三角形ノ二ツノ鋭角ハ互ニ餘角ナリ.

(2) 一角ガ殘ル二角ノ和ニ等シキ三角形ハ直角三角形ナリ.

(3) 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ垂線ヲ引キテ直角ヲ二ツニ分チタルトキ,其二ツノ角ハ一ツヅツ原三角形ノ二ツノ鋭角ニ等シ.




右ノ圖ニ於テ, $\angle BAC$ ハ直角, $AD \perp BC$ ナルトキハ,

$$\angle B = \angle DAC, \qquad \angle C = \angle BAD$$

(4) 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ,三ツノ頂點ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

[斜邊ノ中點カラ一邊ニ平行ナ直線ヲ引イテ證セヨ]



(5) 直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ各〻ノ平方ノ和ニ等シ. (14, 宮崎農; 10, 熊醫; 8, 東農實)

(6) 直角三角形ノ各邊ノ上ニ,其各〻ヲ對應邊トスル相似多角形ヲ畫ケバ,斜邊ノ上ニ畫キタルモノハ他ノ二ツノ和ニ等シ. [(5) ノ擴張]

此逆モ眞ナリ.

(7) 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ垂線ヲ引キテ,之ヲ二ツノ直角三角形ニ分ツトキ,其各三角形ハ何レモ原形ニ相似ナリ.

(3) ノ圖ニ於テハ, $\triangle ABD$ モ, $\triangle CAD$ モ, $\triangle CBA$ ニ相似デアル.

(8) 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ引ケル垂線ハ,其垂線ガ分ツ斜邊ノ二ツノ分ノ比例中項ナリ.

(3) ノ圖ニ於テハ, $BD : AD = AD : DC$

或ハ $AD^2 = BD.DC$ デアル.

(9) 直角三角形ノ直角ヲ夾ム一邊ハ,斜邊ノ上ニ於ケル其邊ノ正射影ト斜邊トノ比例中項ナリ.

(3) ノ圖ニ於テハ, $BD$ ハ $BC$ 上ニ於ケル $AB$ ノ正射影, $CD$ ハ $BC$ 上ニ於ケル $CA$ ノ正射影デアル. ソコデ,

$BD : AB = AB : BC$ 或ハ $AB^2 = BD.BC$

及ビ, $CD : CA = CA : BC$ 或ハ $CA^2 = CD.BC$ (7, 鹿農)

(10) 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ各〻ノ平方ノ比ハ,斜邊上ニ於ケル其各邊ノ正射影ノ比ニ等シ.

(3) ノ圖ニ於テハ, $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{BD}{CD}$

## 35. 直角三角形の比較に關する定理

(1) 一ツノ直角三角形ノ斜邊ト他ノ一邊トガ, 夫々他ノ一ツノ直角三角形ノ斜邊ト他ノ一邊ニ等シキトキハ, 其二ツノ直角三角形ハ合同ナリ.

(2) 一ツノ直角三角形ノ斜邊ト他ノ一邊トノ比ガ, 他ノ一ツノ直角三角形ノ斜邊ト他ノ一邊トノ比ニ等シキトキハ, 其二ツノ直角三角形ハ相似ナリ.

## 36. 特別なる直角三角形に關する定理

(1) 鋭角ガ $30°$ 及ビ $60°$ ナル直角三角形ニ於テハ, 斜邊ハ最小邊ノ 2 倍ニ等シ.

$60°$ ニ對スル邊ハ最小邊ノ $\sqrt{3}$ 倍ニ等シ.

卽チ, 三邊ノ比ハ $1:\sqrt{3}:2$ ナリ.

(2) 直角二等邊三角形ニ於テハ,

二ツノ鋭角ハ何レモ $45°$ ニ等シ.

斜邊ノ長サハ相等シキ邊ノ長サノ $\sqrt{2}$ 倍ニ等シ.

## 37. 正三角形に關する定理

(1) 等邊三角形ハ正三角形ナリ.

(2) 等角三角形ハ正三角形ナリ.

(3) 正三角形ノ各角ノ大サハ $60°$ ナリ.



(4) 一ツノ角ガ $60°$ ナル二等邊三角形ハ正三角形ナリ.

(5) 正三角形ノ高サハ, 其一邊ノ長サノ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ナリ.

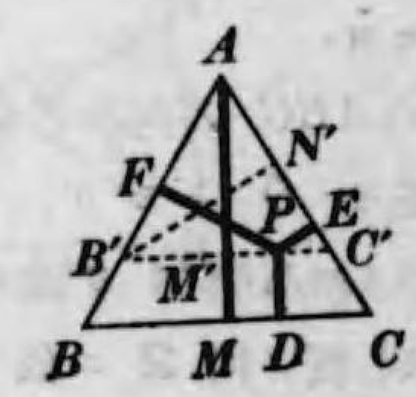
(6) 一邊ガ $a$ ナル正三角形ノ面積ハ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ナリ.

### 問題

**1.** 正三角形ノ兩底角ノ二等分線ノ交點ヲ過ギ, 二邊ニ平行ナル二直線ハ第三邊ヲ三等分スルコトヲ證明セヨ. (12, 金工; 7, 東女)

**2.** 三角形ノ內心ト外心トガ合スレバ其三角形ハ正三角形ナリ. (12, 廣師)

**3.** 三角形ノ三ツノ高サガ相等シキトキハ, 其三角形ハ正三角形ナリ.

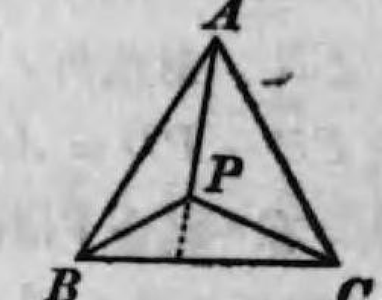



***4.** 正三角形內ノ任意ノ一點ヨリ各邊ヘ引ケル垂線ノ和ハ一定ナリ. (14, 宇農; 9, 鹿農)

又點ガ正三角形ノ外ニ在ルトキハ如何. (14, 宇農)

**5.** 二等邊三角形ノ邊上ノ任意ノ點ヨリ他ノ二邊ニ引ケル垂線ノ和ガ其高サニ等シキトキハ, 此三角形ハ正三角形ナリ. (14, 陸士豫)

**6.** 正三角形內ノ一點ヲ三頂點ニ結ビ付クル三線分ノ中何レノ二ツノ和モ殘リノ一ヨリ大ナリ.




(13, 長岡工)

**7.** 周圍相等シキ正三角形ト正方形トノ面積ノ大小如何.

又其周圍ガ何レモ 12 尺ナルトキハ, 面積ノ差ハ幾平方尺ナルカ.

(小數第二位迄計算セヨ). (10, 京城醫)

**8.** 直角三角形 $ABC$ ノ斜邊 $BC$ ニ平行ナル直線 $DE$ ヲ二邊ノ間ニ引クトキハ $CD^2 + BE^2 = DE^2 + BC^2$ ナリ. (15, 宇農)

[注意 $D$ ガ直線 $AB$ 上ニアルトシナケレバ出來ナイ]

---

### 問題略解

**1.** 正三角形 $ABC$ ノ $\angle B, \angle C$ ノ二等分線ノ交點 $O$ カラ $AB, AC$ ニ平行ニ引イタ直線ト $BC$ トノ交點ヲ夫々 $E, F$ トシ, $\triangle EBO, \triangle FCO$ ハ二等邊, $\triangle OEF$ ハ正三角形ナルコトヲ證セヨ.

**2.** $\triangle ABC$ ノ内心デ同時ニ外心デアル點ヲ $O$ トシテ, $\triangle OBC \equiv$ $\equiv \triangle OBA \equiv \triangle OCA$ ヲ證セヨ.

**3.** 49 頁ノ問 2 ニ依レ.

**4.** 示シタ圖ニ於テ, $B'C' \parallel BC$, $B'N' \perp AC$ デアル. $\therefore PE + PF = B'N'$ [49 頁, 問 5]$= AM'$(何故カ), ソコデ $PD + PE + PF = AM$ ヲ證セヨ. 又 $P$ ガ $\angle A$ 内ノ $BC$ ニ對シテ $A$ ト反對ノ側ニ在ルト,

$PE + PF - PD = AM$ ダシ,

$P$ ガ $\angle B$ ノ對頂角ノ内ニ在ルト,

$PE - PF - PD = AM$ デアル ($P$ ガ形内ニ在ル場合ト同様ニ出來ル).

**5** 49頁問5ト53頁問3ニヨレ.

**6.** 示シテアル圖ノ $AP$ ヲ延長シテ $BC$ ト $D$ デ出會ハセルト,

$AP < AD < AB$

[$\because \triangle ABD$ デ $\angle ADB > \angle ABC$],

$BC < PB + PC$, コノ二ツカラ出セ.

**7.** 正方形ノ一邊ヲ $a$ トスルト, 等周ノ正三角形ノ一邊ハ $\frac{4}{3}a$ ダカラ,

面積ハ $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{3}a\right)^2 = \frac{4\sqrt{3}}{9}a^2$ デアル [前頁ノ (6)], 然ルニ $\frac{4\sqrt{3}}{9} < 1$

$\left[\because \left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)^2 = \frac{16}{27} < 1\right]$ ダカラ,

正方形ノ面積ノ方ガ大キイ.

又周圍ヲ 12 尺トスルト, $a = 3$ 尺ダカラ, 面積ノ差ノ平方尺ノ數ハ

$$9 - \frac{4\sqrt{3}}{9} \times 9 = 9 - 4\sqrt{3}$$

$$= 9 - 4 \times 1.7320 = 2.072$$

故ニ答ハ 2.07 平方尺デアル.

**8.** 「ピタゴラス」ノ定理ヲ應用シテ, 等式ノ兩邊ヲ $\angle A$ ヲ夾ム二邊ノ平方デ表ハセ.



## 第四 作圖題

### 38. 三要素の分つた三角形の作圖題

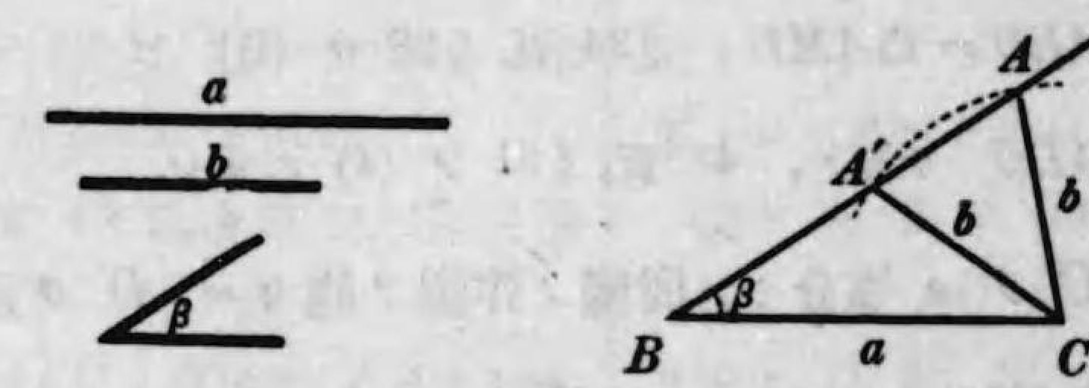
(1) 三邊ノ長サヲ知ッテ三角形ヲ作ルコト.

(2) 二邊ト其夾角トヲ知ッテ三角形ヲ作ルコト.

(3) 一邊ト其兩端ノ二角トヲ知ッテ三角形ヲ作ルコト.

(4) 二角ト其中ノ一角ニ對スル邊トヲ知ッテ三角形ヲ作ルコト.

(5) 二邊ト其中ノ一邊ニ對スル角ヲ知ッテ三角形ヲ作ルコト. (一般ニ二ツノ解アリ)




### 問題

**1.** 二邊ト第三邊ヘノ中線トヲ知ッテ三角形ヲ作ルコト.

**2.** 一邊ト他ノ二邊ヘノ中線トヲ知ッテ三角形ヲ作ルコト.

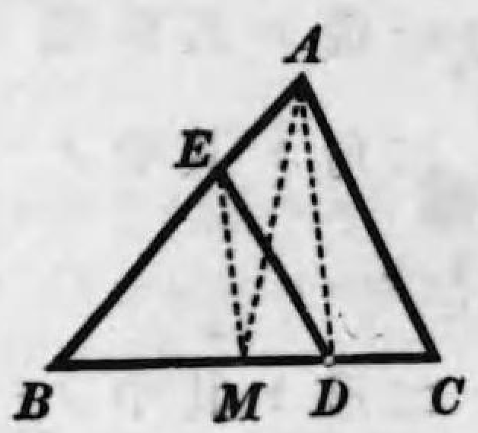
**3.** 底邊, 底邊ニ隣ル一角及ビ高サヲ知ッテ三角形ヲ作ル方法及ビ理由ヲ證明セヨ. (6, 東女)

**4.** 與ヘラレタル三角形ト等シキ頂角及ビ面積ヲ有スル二等邊三角形ヲ作レ. (6, 盛農)

**5.**　三角形 $ABC$ ヲ邊 $BC$ ノ中點 $M$ ヲ過グル二直線ニヨリテ三等分セヨ．(6, 神商)

***6.**　$\triangle ABC$ ノ邊 $BC$ 上ノ定點 $D$ ヲ通ル直線ヲ引キ，其三角形ヲ二等分スルコト．

(15, 鳥農；14, 海經；10, 7, 專檢及甕農；5, 陸士及東北農)




**作圖**　$A, D$ ヲ結ビ付ケヨ．

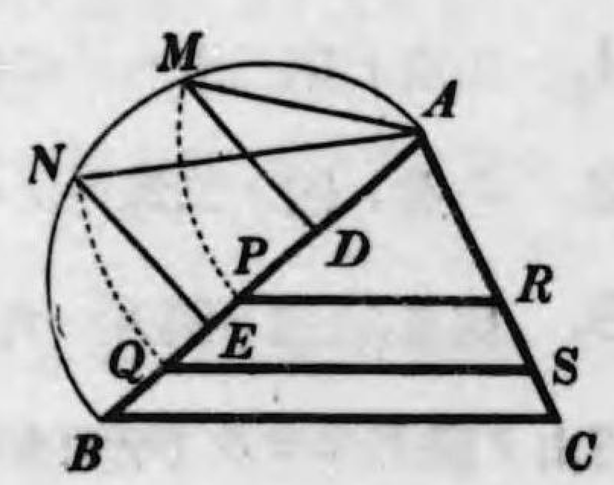
$BC$ ノ中點 $M$ ヲ求メ，$M$ ヨリ $AD$ ニ平行ナル直線ヲ引キ，$AB$ (若クハ $AC$) ト $E$ ニ於テ出會ハシメ，$D, E$ ヲ結ビ付クレバ，$DE$ ガ求ムル直線ナリ．

**略證**　$\triangle AED = \triangle AMD$　[34 頁, §28 ノ (1)]

此兩邊ニ　$\triangle ADC$　ヲ加ヘ，43 頁, §31 ノ (4) ニヨレ．

**注意**　$BC$ ヲ $n$ 等分シ，同樣ノ作圖ヲ施セバ，$D$ ヲ通ル直線デ，$\triangle ABC$ ヲ $n$ 等分スルコトガ出來ル．

***7.**　$\triangle ABC$ ノ邊 $BC$ ニ平行ナル直線ヲ引キ，之ヲ三等分スルコト．




**作圖**　$AB$ ヲ $D, E$ ニテ三等分セヨ．

$AB$ ヲ直徑トスル半圓ヲ畫キ，$D, E$ ヲ通リ $AB$ ニ垂直ナル直線ヲ引キ，半圓周トノ交點ヲ夫々 $M, N$ トシ，$A, M$；$A, N$ ヲ結ベ，$AB$ 上ニ $AM, AN$ ニ等シク，$AP, AQ$ ヲ取レ，



$P, Q$ ヲ通リ $BC$ ニ平行ナル直線ヲ引キ，$AC$ トノ交點ヲ夫々 $R, S$ トスレバ，$PR, QS$ ガ求ムル直線ナリ．

**略證**　$\dfrac{\triangle APR}{\triangle ABC} = \dfrac{AP^2}{AB^2} = \dfrac{AM^2}{AB^2} = \dfrac{AD.AB}{AB^2}$　[51 頁ノ (9)]

$$= \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$$

同樣ニ，　$\dfrac{\triangle AQS}{\triangle ABC} = \dfrac{2}{3}$　(ヤッテ見ヨ)．

**注意**　$AB$ ヲ $n$ 等分シ，同樣ノ作圖デ，$BC$ ニ平行ナ直線ヲ引キ $\triangle ABC$ ヲ $n$ 等分 [二等分ノ場合 (14, 樺商)] スルコトガ出來ル．

**問題略解**

1. 先ヅ 43 頁, §31 ノ (3) ニ示シタ圖ノ $\triangle AA'B$ ヲ作レ．

2. 先ヅ 43 頁, §31 ノ (2) ニ示シタ圖ノ $\triangle GBC$ ヲ作レ．

4. $\triangle ABC$ ノ頂角ヲ $\angle A$ トセヨ．邊 $AB, AC$ ノ比例中項 [21 頁ノ (8)] ヲ求メ，$AB, AC$ 又ハ其延長上ニ，求メタ比例中項ニ等シク $AB', AC'$ ヲ取リ，$B', C'$ ヲ結ブト $\triangle AB'C'$ ガ求メル三角形デアル．

證ハ 36 頁ノ (10) ニヨレ．

5. $AB, AC$ ヲ三等分シ，其分點ヲ夫々 $D, E$；$D', E'$ トシ (但 $AD = DE = EB$，$AD' = D'E' = E'C$，$M, D$；$M, D'$ ヲ結ベ．(何故カ)

# 第五章　多角形

## 第一　一般ノ多角形

### 39.　角に關する定理

(1)　$n$ 邊形ノ總テノ内角ノ和ハ $2nR - 4R$ ニ等シ．

(2)　任意ノ多角形ノ總テノ外角ノ和ハ $4R$ ニ等シ．

## 40. 定義

**正多角形** 總テノ角ガ等シク，且ツ總テノ邊ガ等シキ多角形ヲ正多角形トイフ．

**相似多角形** 一ツノ多角形ノ角ヲ順ニ取リタルトキ，其大サガ夫々他ノ一ツノ多角形ノ角ヲ順ニ取リタルモノニ等シク，兩多角形ノ對應スル角ノ頂點ノ間ニアル邊(**對應邊**)ガ比例ヲナストキ，二ツノ多角形ハ互ニ**相似**ナリトイヒ，對應邊ノ比ヲ其**相似比**トイフ．

## 41. 相似多角形に關する定理

(1) 同ジ直線形ニ相似ナル直線形ハ互ニ相似ナリ．

(2) 一ツノ點ヲ多角形ノ總テノ頂點ニ結ビ付クル線分ヲ一定ノ比ニ分ツ(總テヲ内分若クハ總テヲ外分)點ヲ順次ニ結ビ付ケテ得ル多角形ハ，原形ニ相似ナリ．

(3) 二ツノ相似多角形ハ，其對應邊ガ互ニ平行ナル樣ニ置クコトヲ得．斯樣ニ置クトキ，其對應スル頂點ヲ結ビ付クル直線ハ，同一ノ點ヲ通ルカ，若クハ平行ナリ．

(4) 二ツノ相似多角形ハ之ヲ同數ノ相似三角形ニ分ツコトヲ得．

(5) 相似多角形ノ周ノ比ハ，其相似比ニ等シ．

(6) 相似多角形ノ面積ノ比ハ，其對應邊ノ平方ノ比(或ハ相似比ノ平方)ニ等シ．



### 問　　題

**1.** 一ツノ四邊形ノ相隣レル邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付クル四邊形ハ平行四邊形ニシテ，其面積ハ原形ノ面積ノ $\frac{1}{2}$ ニ等シ．

(11, 鳥農；10, 東女；8, 熊工)

**2.** 一ツノ四邊形ノ四ツノ角ヲ二等分スル直線ノナス四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ナリ．

**3.** 四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナレバ，其包ム矩形ハ四邊形ノ二倍ナリ．

**4.** 四邊形 $ABCD$ ニ於テ，$AD$ ヲ最大邊，$BC$ ヲ最小邊トスレバ，$\angle C > \angle A$, $\angle B > \angle D$ ナリ．

**5.** 四邊形 $ABCD$ ノ對角線 $AC$ ガ $BD$ ヲ二等分スルトキハ，$AC$ ハ本形ヲ二等分ス．

**6.** $n$ 邊形ノ對角線ノ數ハ $\frac{1}{2}n(n-3)$ ナリ．(15, 濱工)

**7.** 對角線ノ數ガ 20 ナル多角形ハ何邊形ナルカ．

**8.** 正十一邊形ノ一角ノ大サハ何度何分何秒ナルカ．但シ秒以下四捨五入トス．(6, 甕農)

---

**問題略解**

1. 四邊形 $ABCD$ ノ邊 $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ ノ中點ヲ夫々 $E$, $F$, $G$, $H$ トシ，此四點ヲ順次ニ結ビ付ケ，又 $A$, $C$ ヲ結ビ付ケルト，$EF \parallel AC$, $HG \parallel AC$, 且ツ $EF = \frac{1}{2}AC = HG$ ダカラ，$EFGH$ ハ平行四邊形デアル．今 $EH$, $FG$ ガ $AC$ ニ交ル點ヲ夫々 $K$, $L$ トスルト，$\square EFLK$ ノ底邊 $KL$ ハ $\frac{1}{2}AC$, 高サハ $\triangle BAC$ ノ高

サノ半分ダカラ, $\square EL = \frac{1}{2}\triangle BAC$

同樣ニ, $\square HL = \frac{1}{2}\triangle DAC$

$\therefore\ \square EG = \frac{1}{2} ABCD$

**2.** 四邊形 $ABCD$ ノ $\angle A, \angle B$ ノ二等分線ノ交點ヲ $P$, $\angle C, \angle D$ ノ二等分線ノ交點ヲ $Q$ トスルト,

$\angle P + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 2\angle R$

又ハ $\angle P = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

$\angle Q$ ニ付テモ同樣ダカラ,

$\angle P + \angle Q = 2\angle R$ ガ出テ來ル.

從テ殘ル二角ノ和モ $2\angle R$ ニ等シイ.

**3.** 各頂點ヲ通ッテ對角線ニ平行ナ直線ヲ引イテ矩形ヲ作レ.

**4.** $\angle C > \angle A$ ヲ證スルニハ對角線 $AC$ ヲ引キ,

$\angle BCA > \angle BAC$

$\angle DCA > \angle DAC$ ヲ證シテヤレ.

**5.** $\triangle ABC, \triangle ADC$ ノ $AC$ ニ對スル高サノ等シイコトヲ證セヨ.

**6.** $n$ 邊形ノ一頂點カラ對角線ガ $(n-3)$ 箇引ケルシ, 各對角線ハ其兩端ノ頂點カラ引ケルコトヲ考ヘヨ.

**7.** 答　八邊形.

$\frac{1}{2}n(n-3) = 20$ ヲ解ケ.

**8.** 答　$147^\circ 16' 22''$ 弱.

$180^\circ - 360^\circ \times \frac{1}{11}$ ヲ計算セヨ (§39ノ(2)ト§40ヲ見ヨ). [秒以下トイフト, 通例秒ノ一ノ位トソレカラ下ノ位ノコトダカラ, 答ハ $147^\circ 16' 20''$ 強トナルガ, 答トシテハドウカト思ッテ秒未滿ヲ四捨五入シテ置イタ]

## 第二　平行四邊形

### 42.　定義

**平行四邊形**トハ, 二組ノ相對スル邊ガ, 何レモ平行ナル四邊形ナリ.

**菱形**トハ, 四ツノ邊ガ皆相等シキ四邊形ナリ.

**矩形**トハ, 四ツノ角ガ皆相等シキ四邊形ナリ.

**注意**　平行四邊形ノ定義ノ問ヒニ對シテ, 平行四邊形トハ相對スル邊ノ等シイ四邊形ト答ヘル者ガヨクアルガ, コレハ定義デハナイ. 尤モ, 相對スル邊ノ等シイ四邊形ハ平行四邊形ダケレドモ, コレハ定理デ [次節ノ (6) ヲ見ヨ], 證明スベキコトデアル. 誤解シナイ樣ニスルガ可イ.

ソレカラ, 菱形ヤ矩形ハ平行四邊形ダケレドモ, ソレモ定理デ, 定義ノ中ニ言フベキコトデハナイ.



### 43.　平行四邊形に關する基本的定理

(1)　平行四邊形ノ相對スル角ハ相等シ.

(2)　平行四邊形ノ相對スル邊ハ相等シ.

(3)　平行四邊形ノ對角線ハ互ニ他ヲ二等分ス.

(4)　平行四邊形ハ其對角線ノ交點ニ付テ對稱ナリ.

(5)　二組ノ相對スル角ガ各〻相等シキ四邊形ハ平行四邊形ナリ. (9, 商大豫)

(6)　二組ノ相對スル邊ガ各〻相等シキ四邊形ハ平行四邊形ナリ.

(7)　一組ノ相對スル邊ガ相等シクシテ平行ナル四邊形ハ平行四邊形ナリ.

(8)　對角線ガ互ニ二等分スル四邊形ハ平行四邊形ナリ.

### 44.　平行四邊形の面積に關する定理

(1)　等底, 等高ノ平行四邊形ハ等積ナリ.

(2)　平行四邊形ハ, ソレト等シキ底邊及ビ等シキ高サノ矩形ト等積ナリ.

(3) 高サ(又ハ底邊)ノ相等シキ平行四邊形ノ面積ノ大小ト,其底邊(又ハ高サ)ノ大小トハ,互ニ相伴フ.

(4) 高サ(又ハ底邊)ノ相等シキ平行四邊形ノ面積ノ比ハ,其底邊(又ハ高サ)ノ比ニ等シ.

(5) 等積ナル平行四邊形ノ底邊ノ比ハ,其高サノ反比ニ等シ.

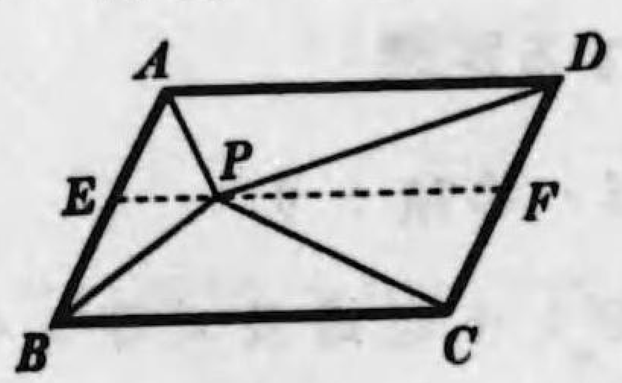
(6) 一ツノ平行四邊形ノ一ツノ角ガ,他ノ平行四邊形ノ一ツノ角ニ等シキカ,又ハ其二角ガ補角ナルトキ,其二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハ,各丶ノ平行四邊形ニ於ケル,相隣レル二邊ノ積ノ比ニ等シ.

(7) 二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハ,其底邊ノ比ト高サノ比トノ積ニ等シ.

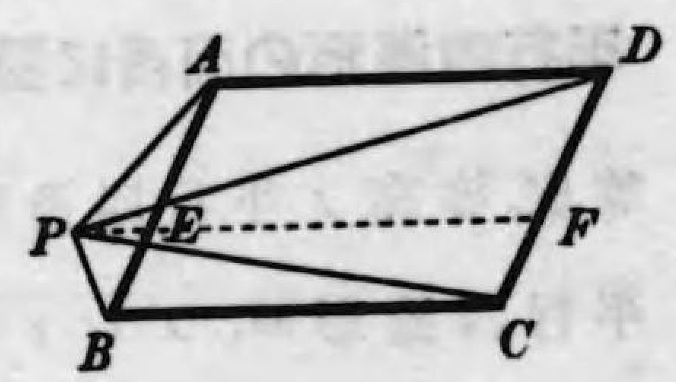
(8) 平行四邊形ノ面積ハ,其底邊ト高サトノ積ニ等シ.

卽チ,底邊ガ $a$, 高サガ $h$ ナル平行四邊形ノ面積ハ $ah$ ニ等シ.

(9) 平行四邊形ノ一組ノ相對スル邊ヲ底邊トシ,其二邊竝ニ其双方ヘノ延長ヨリナル平行二直線間ニ在ル,同一ノ點ヲ頂點トスル二ツノ三角形ノ面積ノ和ハ,其平行四邊形ノ面積ノ半分ニ等シ.



(甲圖)



(乙圖)



例ヘバ, $P$ ガ $\square ABCD$ ノ邊 $AD$, $BC$ ノ間ニ在ルトキハ,

$$\triangle PAD + \triangle PBC = \frac{1}{2}\square ABCD$$

證　$P$ ヲ通リ $AD$ ニ平行ナル直線ガ $AB$, $DC$ ニ交ル點ヲ夫々 $E$, $F$ トスレバ,

$$\triangle PAD = \frac{1}{2}\square AEFD$$

$$\triangle PBC = \frac{1}{2}\square BEFC$$

$$\therefore\ \triangle PAD + \triangle PBC = \frac{1}{2}\square ABCD$$

(10) 平行四邊形ノ一組ノ相對スル邊ヲ底邊トシ,其二邊竝ニ其双方ヘノ延長ヨリナル平行二直線外ニ在ル,同一ノ點ヲ頂點トスル二ツノ三角形ノ面積ノ差ハ,其平行四邊形ノ面積ノ半分ニ等シ.

例ヘバ, 前ノ乙圖ニ於テハ,

$$\triangle PCD - \triangle PAB = \frac{1}{2}\square ABCD$$

略證　$P$ ヲ通リ $AB$ ニ平行ナル直線ガ $DA$, $CB$ ノ延長ト夫々 $G$, $H$ ニ於テ出會フトシ, (圖ニハ畫イテナイ) (9) ノ證ニ倣ヘ.

## 45. 菱形

(1) 菱形ハ平行四邊形ナリ. [61 頁, § 43 ノ (6)]

(2) 菱形ノ對角線ハ互ニ他ヲ垂直ニ二等分ス.

(3) 菱形ハ對角線ガ互ニ垂直ナル平行四邊形ナリ

(4) 菱形ハ其各丶ノ對角線ニ付テ對稱ナリ.

## 46. 矩形及び正方形

(1) 矩形ハ平行四邊形ナリ.

(2) 矩形ノ兩對角線ハ相等シ.

(3) 正方形ノ對角線ハ,其兩端ナル頂點ニ於ケル角ヲ二等分ス.

(4) 正方形ノ對角線ガ各邊トナス角ハ $45°$ ナリ.

(5) 正方形ノ對角線ノ長サハ一邊ノ長サノ $\sqrt{2}$ 倍ナリ.

(6) 二ツノ正方形ノ面積ノ比ハ,各〻ノ邊ノ比ノ平方ニ等シ.

(7) 正方形ノ一邊ハ之ト等積ナル矩形ノ二邊ノ比例中項ナリ.

(8) 相隣レル二邊ノ長サガ $a, b$ ナル矩形ノ面積ハ $ab$ ナリ.

(9) 一邊ガ $a$ ナル正方形ノ面積ハ $a^2$ ナリ.

## 47. 梯形*

**定義** 一組ノ相對スル邊ダケガ平行ナル四邊形ヲ**梯形**トイフ.

梯形ノ平行ナル邊ノ各〻ヲ其梯形ノ**底邊**(又ハ**底**)トイヒ,二ツノ底邊ノ距離ヲ其梯形ノ**高サ**トイフ.

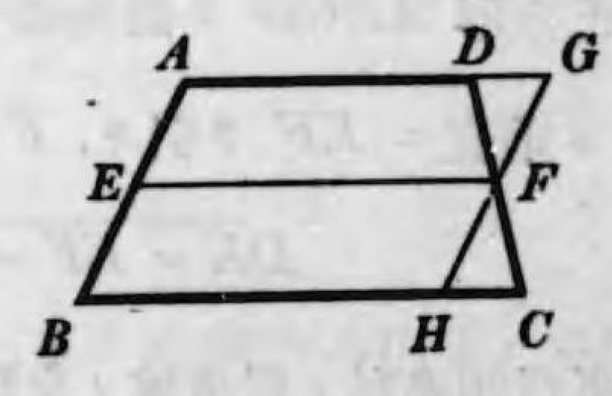
平行ナラザル二邊ガ相等シキ梯形ヲ**二等邊梯形**トイフ.

* 梯形ハ平行四邊形デハナイケレドモ,平行四邊形ト密接ナ關係ガアルカラ,便宜上茲デ說明スルコトニシタノデアル.



## 48. 梯形に關する定理

(1) 梯形ノ平行ナラザル二邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ底邊ニ平行ニシテ,其長サハ二ツノ底邊ノ和ノ半分ニ等シ.



例ヘバ, $AD, BC$ ヲ底邊トスル梯形ノ邊 $AB, DC$ ノ中點ヲ夫々 $E, F$ トスレバ,

$$EF \parallel AD, \quad EF \parallel BC$$

及ビ $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$

**證** $F$ ヲ通リ $AB$ ニ平行ナル直線ガ $AD, BC$ 又ハ其延長ト夫々 $G, H$ デ出會フトスレバ,

$$\triangle FDG \equiv \triangle FCH \quad \therefore FG = FH \quad \therefore AE \mathrel{\underline{\parallel}} GF$$

$$\therefore AD \parallel EF \quad 及ビ \quad BC \parallel EF$$

又 $AD = EF - DG,\ BC = EF + HC \quad \therefore AD + BC = 2.EF$

(2) 梯形ノ面積ハ其兩底邊ノ和ト高サトノ積ノ半分ニ等シ.

卽チ,兩底邊ヲ $a, b$ 高サヲ $h$ トスル,梯形ノ面積ハ $\frac{1}{2}h(a+b)$ ナリ.

(3) 二等邊梯形ニ於テハ,同一ノ底邊ノ兩端ノ角ハ相等シク,相對スル角ハ互ニ補角ナリ.

(4) 二等邊梯形ハ一ツノ對稱軸ヲ有ス.

## 問　題

**1.** 平行四邊形ノ四ツノ角ヲ二等分スル四ツノ直線ノナス四邊形ハ矩形ナリ．(6, 海諸校)

**2.** 正方形 $ABCD$ ノ對角線 $BD$ 上ニ $BC$ ニ等シク $BE$ ヲ取リ，$BD$ ニ垂直ニ $EF$ ヲ引キ，$F$ ニ於テ $CD$ ニ交ラシムレバ，

$$DE = EF = FC$$

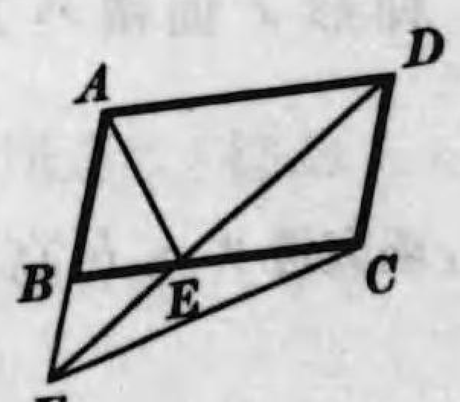
**3.** 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通ル直線ノ其平行四邊形内ニ在ル部分ハ，對角線ノ交點ニテ二等分セラル．

又其直線ハ平行四邊形ヲ二等分ス．

**4.** ▱$ABCD$ ノ對角線 $AC$ ヘ $B, D$ ヨリ引ケル垂線ハ相等シ．

**5.** ▱$ABCD$ ノ對角線 $AC$ 又ハ其延長上ノ任意ノ一點ヲ $P$ トセバ，$\triangle PCB = \triangle PCD$ ナリ．

**6.** 平行四邊形 $ABCD$ ノ頂點 $D$ ヨリ任意ノ直線ヲ引キ $BC$, $AB$ 若クハ其延長ト夫々 $E, F$ ニ於テ交ラシムルトキハ，$\triangle AED$ ト $\triangle CDF$ トハ等積ナリ．




**7.** 平行四邊形 $ABCD$ ノ $D$ 點ヲ通リ直線ヲ引キ邊 $BC$ ト $E$ ニ於テ又 $AB$ ノ延長ト $F$ ニ於テ交ラシムレバ，$\triangle ABE$ ト $\triangle CEF$ トハ等積ナリ．之ヲ證明セヨ．(14, 福井工)



**8.** 平行四邊形 $ABCD$ ノ邊 $AD$ 上ニ一點 $P$ ヲ取リ，$PC$, $PB$ ヲ引ケバ，$\triangle PBC - \triangle PAB = \triangle PDB.$ (5, 海兵)

**9.** 梯形ノ面積ハ其平行セザル一邊ト，之ニ其對邊ノ中點ヨリ引ケル垂線トノナス矩形ニ等シ．(15, 鹿農)

**10.** 平行四邊形ノ二ツノ對角線ノ上ノ正方形ノ和ハ，其四邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ．

---

### 問題略解

**1.** 平行四邊形ノ相隣レル二角ノ二等分線ノナス角ハ何レモ直角ナルコトヲ證セヨ．

**2.** $\triangle EDF$ ハ二等邊直角三角形，及ビ $\triangle BCF \equiv \triangle BEF$ [52 頁, § 35 ノ (1)] ヲ證セヨ．

**3.** ▱$ABCD$ ノ對角線ノ交點 $O$ ヲ通リ $AD$, $BC$ ト夫々 $E, F$ デ交ル直線ヲ引キ，$\triangle AOE \equiv \triangle COF$ ヲ證セヨ．又 $EF$ ガ ▱$ABCD$ ヲ二等分スルコトハ，$\triangle AOE \equiv \triangle COF$, $\triangle BOF \equiv \triangle DOE$, $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$ ヲ證シテ出シテモヨシ．又ハ $O$ ヲ中心トシテ四邊形 $EFCD$ ヲ二直角ダケ廻轉シテ四邊形 $FEAB$ ニ合セシメテ證シテモ可イ．

**4.** 三角形ノ合同ノ定理，又ハ 35 頁, § 28 ノ (6) ニ依レ．

**5.** $\triangle BCP$, $\triangle DCP$ ノ $CP$ ニ對スル高サノ等シイコトヲ證セヨ [前問]．

**6.** 示シタ圖デ，$\triangle AED = \frac{1}{2}$ ▱$AC$ [35 頁ノ (4)]，又 $CD$ ヲ底邊ト見ルト，$\triangle FCD = \frac{1}{2}$ ▱$AC$.

**7.** $\triangle ABE$, $\triangle CEF$ ノ各々ニ $\triangle CED$ ヲ加ヘテ見ヨ [62 頁, § 44 ノ (9) 參照]

**8.** $\triangle PBC = \triangle PAB + \triangle PDB$ [何レモ $\frac{1}{2}$ ▱$AC$] カラ出セ．

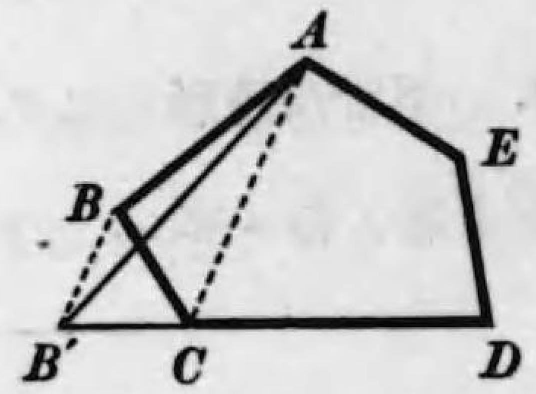
**9.** 65 頁ノ (1) ノ圖デ $F, A$; $F, B$ ヲ結ブト，$\triangle FAB$ ハ邊 $AB$ ト $F$ カラ $AB$ ニ引イタ垂線トノナス矩形ノ半分ニ等シイシ，同時ニ ▱$GB$ 卽チ原形ノ半分ニモ等シイ．

**10.** ▱$ABCD$ ノ對角線ノ交點ヲ $O$ トシ，$\triangle ABD$, $\triangle CBD$ ニ付テ，43 頁, § 31 ノ (5) ヲ適用シテ，加ヘ合ハセテ出セ．

## 第三 作圖題

### 49. 心得置くべき作圖題

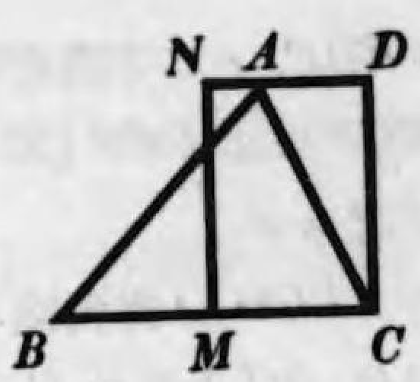
(1) 多角形ノ面積ヲ變ヘズニ,邊數ヲ一ツ少ナクスルコト.




**略解** 右ノ圖ニ於テ, $ABCDE$ ヲ原形トシ, $BB' \parallel AC$ トスレバ, 四邊形 $AB'DE$ ハ原形ト等積ナリ.

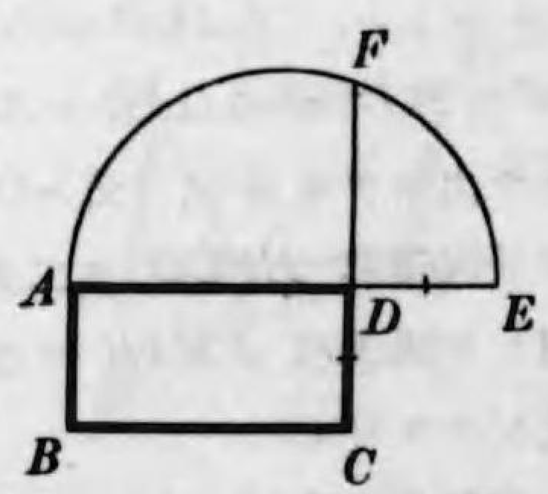
(2) 多角形ト等積ナル三角形ヲ作ルコト.

(3) 三角形ト等積ナル矩形ヲ作ルコト.




**略解** 右ノ圖ニ於テ, $M$ ヲ $BC$ ノ中點, $ND$ ハ $A$ ヲ通リ $BC$ ニ平行トスレバ, 矩形 $NMCD = \triangle ABC$ ナリ.

(4) 矩形ト等積ナル正方形ヲ作ルコト.




**略解** 矩形 $ABCD$ ノ一邊 $AD$ ヲ延長シ, 其上ニ $DC$ ニ等シク $DE$ ヲ取リ, $AE$ ヲ直徑トスル半圓周ト $CD$ ノ延長トノ交點ヲ $F$ トスレバ, $DF$ 上ノ正方形ガ矩形 $ABCD$ ニ等シキ正方形ナリ.

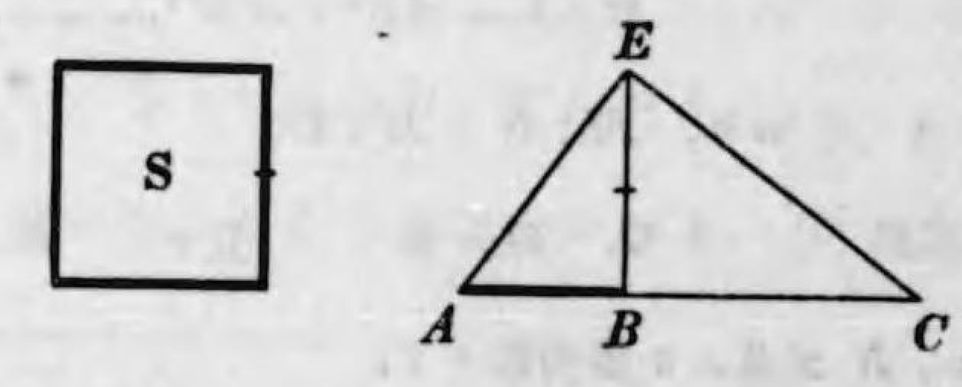
**注意** (1) カラ (4) マデニ依ルト,ドンナ多角形デモ,之ヲソレト



等積ナ正方形ニ直スコトガ出來ル. ソレダカラ,面積ガ知レテ居ルトイフト,ソレハ正方形デ與ヘラレテ居ルトスルノデアル.

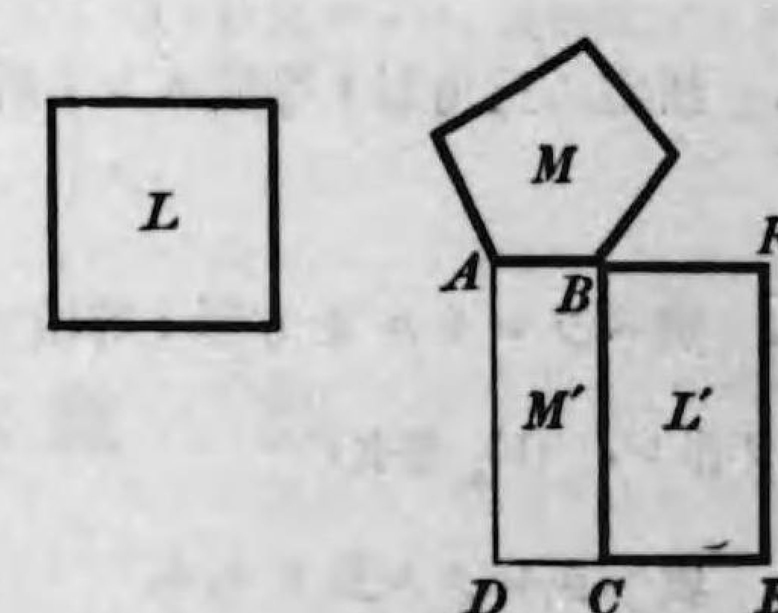
(5) 面積ト一邊トヲ知ッテ矩形ヲ作ルコト.

**略解** 面積ガ正方形 $S$ ニ等シク, 一邊ガ $AB$ ニ等シキ矩形ヲ作ルニハ, $B$ ヨリ $AB$ ニ垂直ニシテ長サガ $S$ ノ一邊ニ等シキ線分 $BE$ ヲ引キ, $A$, $E$ ヲ結ビ付ケ, $E$ ヨリ $AE$ ニ垂直ナル直線ヲ引キ, $AB$ ノ延長ト $C$ ニ於テ出會ハシムレバ, $AB$, $BC$ ノ包ム矩形ガ $S$ ニ等シキ矩形ナリ. (何故カ)




(6) 與ヘラレタル多角形ノ一邊ト定線分トヲ對應邊トシテ,其線分上ニ,其多角形ニ相似ナル多角形ヲ畫クコト.

(7) 一ツノ多角形ニ等シク,他ノ多角形ニ相似ナル多角形ヲ作ルコト.




例ヘバ $L$ ニ等シク $M$ ニ相似ナル多角形ヲ作ルコト.

**作圖** $M$ ノ一邊 $AB$ 上ニ $M$ ニ等シキ矩形 $M' = ABCD$ ヲ作リ, 次ニ $BC$ ヲ一邊トシ $L$ ニ等シキ矩形 $L' = BCEF$ ヲ作レ.

$AB$, $BF$ ノ比例中項 $A'B'$ ヲ求メ, $AB$ ト $A'B'$ ヲ對應邊トシ $M$ ニ相似ナル多角形 $N$ ヲ作レバ, $N$ ガ求ムル多角形ナリ.

證明 $M:N=AB^2:A'B'^2$............(1) (作圖)

$AB:A'B'=A'B':BF$ (作圖)

$\therefore\ AB:BF=AB^2:A'B'^2$............(2)

又 $M:L=AB:BF$............(3)

故ニ (2) ト (3) ヨリ,

$M:L=AB^2:A'B'^2$............(4)

(1) ト (4) ヨリ, $M:N=M:L$

$\therefore\ N=L$ 且ツ $M\backsim N$

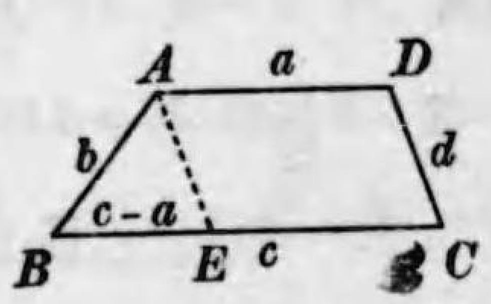
故ニ, $N$ ガ求ムル多角形ナリ.

## 問題

**1.** 與ヘラレタル五角形ニ等シキ面積ヲ有スル正方形ヲ作レ. (11, 高校)

**2.** 所定ノ三角形ト等積ニシテ所定ノ一邊ヲ有スル矩形ヲ作レ. (8, 樺商)

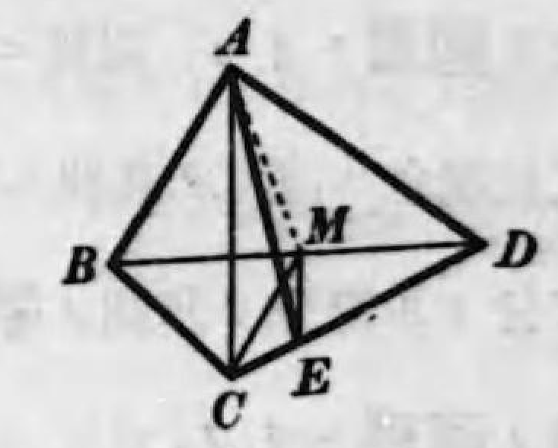
**3.** 與ヘラレタル正方形ト等積ニシテ與ヘラレタル周ヲ有スル矩形ヲ作レ. (15, 學習)




**4.** 與ヘラレタル長サ $a, b, c, d$ ヲ以テ梯形ヲ作レ.

***5.** 凸四角形ヲ其一ツノ頂點ヲ過グル一直線ニヨリテ,二等分スルコト. (11, 東師; 9, 長崎商)






**略解** 右ノ圖ニ於テ, $A$ ヲ通ル直線ニテ四邊形 $ABCD$ ヲ二等分スルニハ, 對角線 $BD$ ノ中點 $M$ ヲ求メ, $M$ ヲ通リ對角線 $AC$ ニ平行ナル直線ヲ引キ, $CD$ (又ハ $BC$) トノ交點ヲ $E$ トスレバ, $AE$ ガ求ムル直線ナリ (何故カ).

***6.** 二ツノ正方形ノ和ニ等シキ正方形ヲ作ルコト.

***7.** 二ツノ正方形ノ差ニ等シキ正方形ヲ作ルコト. (6, 鹿農)

### 問題略解

**1.** §49 ノ (1), (2), (3), (4) ニ依レ.

**2.** §49 ノ (3), (4), (5) ニ依レ.

**3.** §49 ノ (4) ノ圖ニ於テ, $AE$ 及ビ $DF$ ノ長サヲ既知トシテ $D$ 點ヲ求メヨ.

**4.** 示シテアル圖ニ於テ $AE \parallel DC$ 故ニ先ヅ $\triangle ABE$ ヲ作ッテ, ソレカラ梯形 $ABCD$ ヲ作レ.

**吟味** 圖ニ示シタ樣ニ線分ヲ取ルトキ, 出來ルタメノ條件ハ

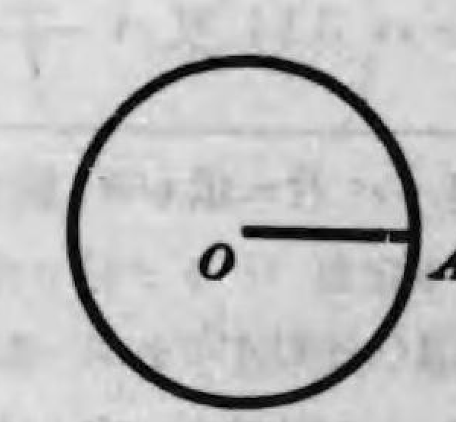
$b\sim d<c-a<b+d$

デアル. 最大線分ヲ一ツノ底トスルトシテモ, 他ノ三線分ノ何レデモ今一ツノ底トスルコトガ出來ルカラ四線分ガ皆異ナレバ, 通例解ガ三ツアル.

**6, 7.** 「ピタゴラス」ノ定理ニ依レ.

# 第六章 圓

## 50. 定義




有限直線 $(OA)$ ガ其一端 $(O)$ ヲ中心トシテ, 一ツノ平面上ニ於テ一周廻轉スルトキ, 他端 $(A)$ ノ畫ク所

ノ線ヲ**圓周**トイヒ，圓周ニテ包マルヽ平面ノ部分ヲ**圓**トイフ．

又此場合ニ，$O$ ヲ其圓ノ**中心**トイヒ，$O$ ト圓周上ノ任意ノ點トヲ結ビ付クル線分ヲ其圓ノ**半徑**，中心ヲ通リ兩端ガ周上ニ在ル線分ヲ其圓ノ**直徑**トイフ．

## 第一　圓及ビ其半經

### 51.　心得置くべき定理

(1)　半徑ノ等シキ圓ハ合同ナリ．

(2)　圓ハ中心ニ付テ對稱*(點對稱)ナリ．

(3)　一直線上ニ在ラザル三ツノ點ハ一ツノ圓ヲ定ム．

(4)　圓周ノ長サト其半徑ノ長サトハ互ニ比例ス．

即チ半徑 $r, r'$ ナル圓周ノ長サヲ夫々 $c, c'$ トスレバ

$$\frac{c}{c'}=\frac{r}{r'}$$

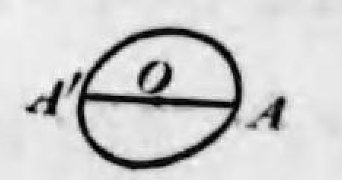
(5)　半徑 $r$ ナル圓ノ周ハ $2\pi r$ ナリ．

$\pi$ ハ**圓周率**トイフ**常數**（一定不變ノ數）ヲ表ハス記號デ，其値ハ 3.141592653589793……(限リナク續ク) デアル．

通例ハ 3.1416 又ハ $\frac{355}{113}$ (=3.1415929……) トス．極ク大略ノ値トシテハ 3.14 又ハ $\frac{22}{7}$ (= 3.142……) ヲ用ヒル．

---

* 例ヘバ，右ニ示シタ，圖形上ノ任意ノ點 $A$ ト定點 $O$ トヲ結ビ付ケ，之ヲ延長シテ $AO=OA'$ ナル一點 $A'$ ヲ取ルト，$A'$ モ其圖形上ニ在ルトキ，此ノ圖形ハ $O$ ニ付テ**對稱**デアルトイフ．






**註**　**圓周ノ長サ**トイフノハ，ソレニ內接又ハ外接スル正多角形ノ邊數ガ無限大ニナッタトキノ，其多角形ノ周(詳シクイフト其周ノ極限)ノコトデアル．

**注意**　半徑ガ $r$ ナル圓周ノ長サヲ $c$ トスルト，$c=2\pi r$ デ，$2\pi$ ハ常數ダカラ，代數ノ比例ニヨッテ $c$ ト $r$ ノ互ニ比例スルコトガ直ニ分ル．

(6)　圓ノ面積ト其半徑ノ平方トハ互ニ比例ス．

即チ，半徑 $r, r'$ ナル圓ノ面積ヲ夫々 $S, S'$ トスレバ，

$$\frac{S}{S'}=\frac{r^2}{r'^2}$$

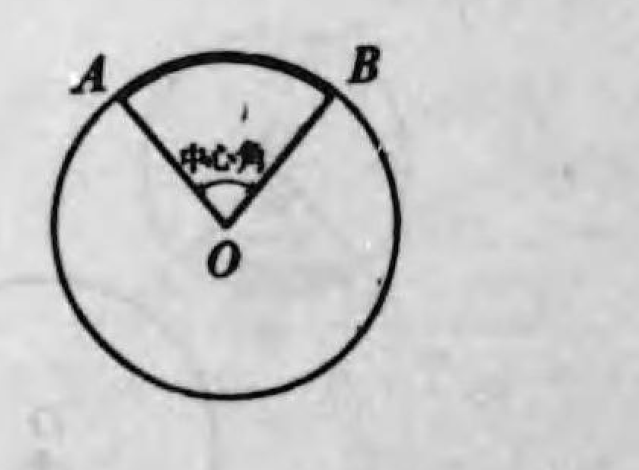
(7)　半徑 $r$ ナル圓ノ面積ハ $\pi r^2$ ナリ．

**註**　(5) ノ註ト同樣ニ，圓ノ面積トハ，ソレニ內接又ハ外接スル正多角形ノ邊數ガ無限大ニナッタトキノ，其多角形ノ面積ノコトデアル．

## 第二　弧ト中心角及ビ扇形

### 52.　定義

圓周ノ一部分ヲ**弧**トイヒ，弧ノ兩端ニ引ケル其圓ノ二ツノ半徑ノナス角ヲ其弧ノ上ニ立ツ**中心角**トイフ．




此場合ニ，其弧ト中心角トハ，互ニ**相對ス**トイフ．

弧ト其兩端ニ引ケル其圓ノ二ツノ半徑トノナス平面形ヲ**扇形**トイヒ，扇形ノ弧ノ上ニ立ツ中心角ヲ其**扇形ノ角**トイフ．

圓周ノ $\frac{1}{2}$ ニ等シキ弧ヲ**半圓周**トイヒ, 圓周ノ $\frac{1}{4}$ ニ等シキ弧ヲ**四分圓周**トイフ.

**注意**　圓ハ其角ガ四直角ナル扇形ト考ヘテモヨイ.

## 53. 弧と中心角との關係

(1)　同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ, 弧ノ相等大小ト, 其上ニ立ツ中心角ノ相等大小トハ, 互ニ相伴フ.

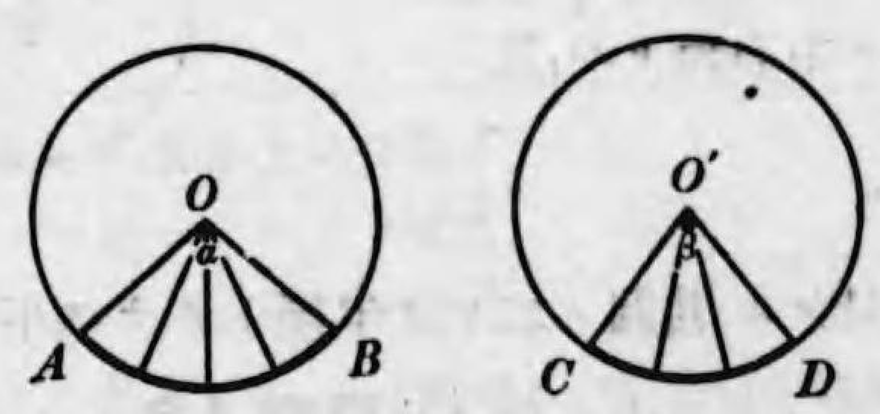
(2)　同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ, 二ツノ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ和(又ハ差)ハ, 其二ツノ弧ノ和(又ハ差)ノ上ニ立ツ中心角ニ等シ.

(3)　四分圓周ノ上ニ立ツ中心角ハ直角ナリ. 此逆モ眞ナリ.

(4)　同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ, 弧ノ長サト, ソノ上ニ立ツ中心角ノ大サトハ, 互ニ比例ス. (14, 橫工)

即チ, 次ノ圖ニ於テ, $OA = O'C$ トスレバ,

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{CD}} = \frac{\alpha}{\beta}$$






(5)　同ジ圓又ハ相等シキ圓ノ扇形ノ面積ハ其弧(又ハ中心角)ニ比例ス.

コレハ (4) ニヨリテ明カナリ. 例ヘバ, (4) ノ圖ニ於テ,

$$\frac{扇形\ OAB}{扇形\ O'CD} = \frac{4}{3} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{CD}}$$

(6)　半徑 $r$, 弧ノ長サガ $l$ ナル扇形ノ面積ヲ $S$ トスレバ,

$$S = \frac{1}{2}rl$$

證　$\widehat{AB} = l$ トスレバ, 圓ハ弧ガ圓周 $(2\pi r)$ ニ等シキ扇形ト見做シ得ルヲ以テ,

$$\frac{扇形\ OAB}{圓\ O} = \frac{\widehat{AB}}{圓周}.$$

$$\therefore\ \frac{S}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r}$$

$$\therefore\ S = \pi r^2 \times \frac{l}{2\pi r} = \frac{1}{2}rl$$

## 問　題

**1.**　弦 $AC$ 及ビ弧 $ABC$ ヨリ成ル弓形アリ, 弦 $AC$ ノ長サハ 20 間ニシテ, 弓形ノ角 $ABC$ ハ 135° ナリトイフ. 其面積幾坪ナルカ. 但シ圓周率 = 3.1416 トシ, 答ニ小數アラバ小數第二位迄計算スベシ.

(15, 金工; 6, 神商)


**2.**　半徑 $r$ ノ圓ヲ內接正三角形ノ一邊ニヨリ二分スルトキ, 各部分ノ面積ヲ求メヨ.

**3.** 各邊ノ長サ $a$ ナル正三角形ノ頂點ヲ $A, B, C$ トシ之ヲ中心トシテ畫ケル圓弧ヲ夫々 $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{AB}$ トス. 此圓弧ヨリナレル弧三角形ノ面積ヲ求ム.


---

**問題略解**

**1.** 答 57.08 坪. 弧 $ABC$ ノ上ニ立ツ圓周角ハ $180° - 135° = 45°$ [112 頁ノ(1)] 故ニ, 中心角 $AOC = 90°$ 故ニ $OA = r$ トスルト, $20^2 = 2r^2$ $\therefore r^2 = 200$. ソコデ, 弓形 $ABC$ = 扇形 $AOC - \triangle AOC$ トシテ計算セヨ.

**2.** 答
$$\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}r^2, \quad \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{12}r^2$$
圓ノ中心ヲ $O$, 內接正三角形ヲ $ABC$ トスルト, $BC = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}r = \sqrt{3}\,r$ [53 頁, §37 ノ (5) 參照]. ソコデ,
$BC$ ヲ弦トスル劣弓形
= 扇形 $OBC - \triangle OBC$
$= \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{1}{3}\triangle ABC$ トシテ計算セヨ. [53 頁, §37 ノ (6) 參照]

**3.** 答 $\frac{a^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$ 求メル面積 $= 3 \times$ 扇形 $ABC - 2\triangle ABC$ トシテ計算セヨ.

## 第三　圓ト直線

### (甲)　其位置的關係

### 54. 圓と點との位置の關係

**定理**　一ツノ點ガ一ツノ圓ノ內ニ在ルカ, 其圓周上ニ在ルカ, 其圓ノ外ニ在ルカニ從テ, 其點ト中心トノ距離ハ, 或ハ其圓ノ半徑ヨリ小ナリ, 或ハ之ニ等シ, 或ハ之ヨリ大ナリ. 此逆モ眞ナリ.



### 55. 圓と直線との位置の關係

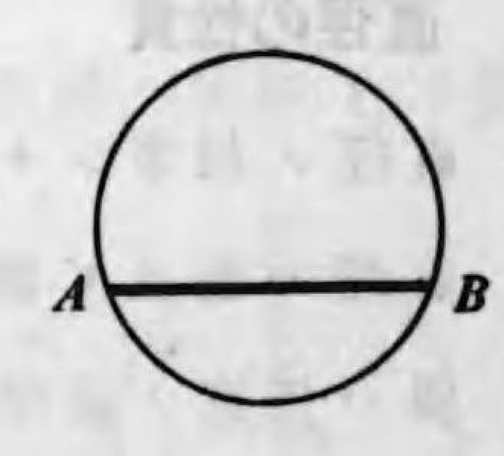
(1) 一ツノ直線ト一ツノ圓ノ中心トノ距離ガ, 其圓ノ半徑ヨリ大ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ, 其直線ハ其圓ニ出會ハズ, 或ハ之ト唯一ツノ點ニ於テ出會フ (卽チ**相切ス**), 或ハ之ト二ツノ點ニ於テ出會フ (卽チ**相交ル**). 此逆モ眞ナリ.

**註**　圓ト唯一ツノ點ニ於テ出會フ直線ヲ其圓ノ**切線**トイヒ, 圓ニ交ル直線ヲ其圓ノ**割線**トイフ.

(2) 圓周上ノ點ヲ通リ, 其點ヘノ半徑ノ斜線ハ其圓ノ割線ニシテ, 其點ヘノ半徑ノ垂線ハ其圓ノ切線ナリ.

### (乙)　弦

### 56. 定義




圓周上ノ二點ヲ結ビ付クル線分ヲ其圓ノ**弦**トイフ.

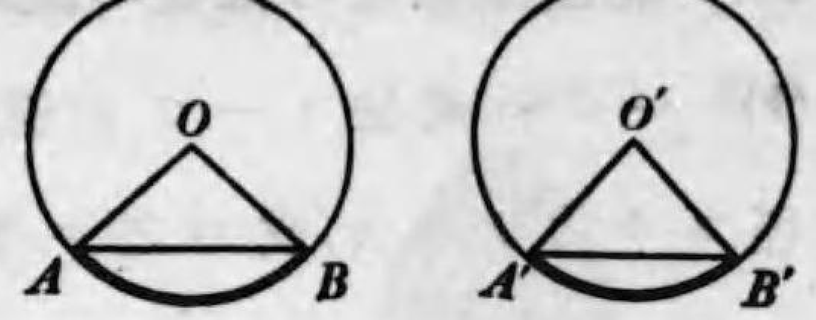
弦ガ分ツ二ツノ弧ガ相等シカラザルトキ, 小ナル方ヲ**劣弧**トイヒ, 大ナル方ヲ**優弧**トイフ.

弦ハ, 其弦ガ分ツ二ツノ弧ヲ**張ル**トモ, 又ハ之ニ**對ス**トモイフ.

### 57. 比較に關する定理

(1) 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於ケル, 弦ノ相等大小ト, 其弦ガ張ル**劣弧**ノ相等大小トハ, 互ニ相伴フ.

即チ，相等シキ圓 $O, O'$ ニ於テ，




$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ ナルトキハ，

$AB = A'B'$

劣弧 $AB >$ 劣弧 $A'B'$ ナルトキハ　$AB > A'B'$

**注意** 弦ノ相等大小ト，其弦ガ張ル優弧ノ相等大小トノ關係モ考ヘテ見ルト可イ.

(2) 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ，相等シキ弦ノ中心ヨリノ距離ハ相等シ. 此逆モ眞ナリ.

(3) 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於ケル，弦ノ大小ト，其中心ヨリノ距離ノ大小トハ，互ニ相反ス.

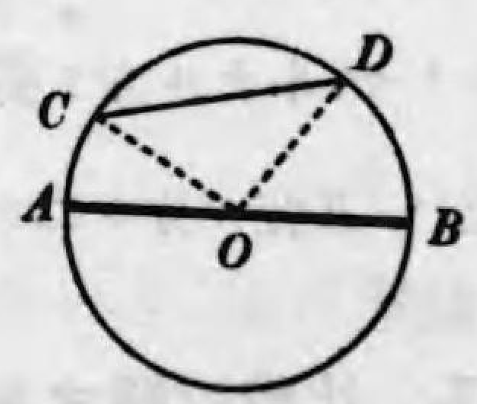
## 58. 直徑の性質

(1) 直徑ノ相等シキ圓ハ合同ナリ.

(2) 直徑ハ圓及ビ圓周ヲ二等分ス.

(3) 圓ハ任意ノ直徑ニ付テ對稱(線對稱)ナリ.

(4) 直徑ハ其圓ノ最大弦ナリ.




**略證** 右ノ圖ニ於テ，

$CD < OC + OD$

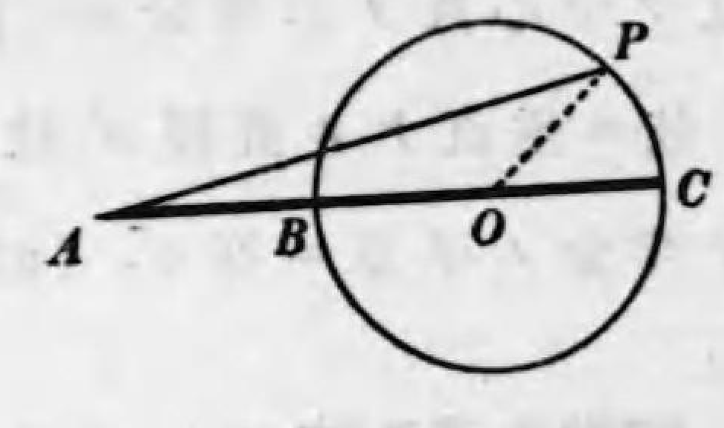
$< OA + OB = AB$

(5) 一定點ヨリ其點ヲ中心トセザル圓周ニ至ル最大及ビ最小ナル線分ハ，其定點ヲ通ル中心線上ニ在リ.



**註** 圓ノ中心ヲ通ル直線ヲ其圓ノ**中心線**トイフ.

**略證** 右ノ圖ニ於テ




$AP < AO + OP$

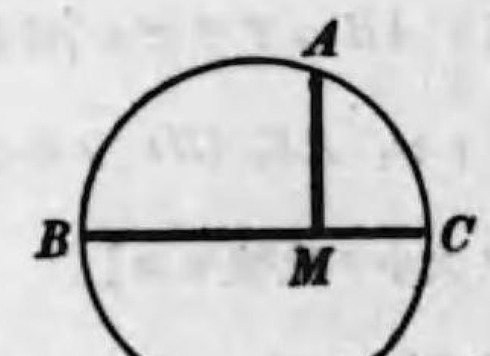
$< AO + OC$

$< AC$

又　$AP > AO - OP = AO - OB = AB$

(6) 圓周上ノ一點ヨリ其圓ノ直徑ニ引キタル垂線ノ平方ハ，其垂線ガ分ツ直徑ノ二ツノ分ノ積ニ等シ.

右ノ圖ニ於テ，$BC$ ハ直徑，



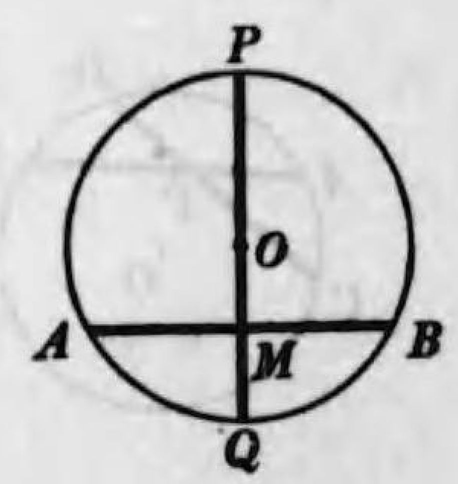

$AM \perp BC$ トスレバ，

$AM^2 = BM . MC$

## 59. 弦とそれに垂直な直徑

(1) 圓ノ中心ヨリ弦ニ引ケル垂線ハ其弦ヲ二等分ス.

(2) 圓ノ中心ト弦ノ中點トヲ結ビ付ケル直線ハ，其弦ニ垂直ナリ.




(3) 弦ノ垂直二等分線ハ圓ノ中心ヲ通ル.

**注意** 以上三ツノ定理ノ中，二ツハ殘ル一ツノ逆デアル.

(4) 弦ニ垂直ナル直徑ノ端ハ，其弦ガ張ル劣弧及ビ優弧ノ中點ナリ.

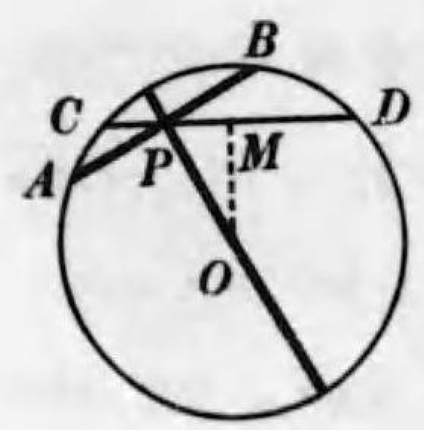
[其直徑ヲ折目トシテ，一方ヲ折返セ]

(5) 弦ニ垂直ナル直徑ハ,其弦ガ張ル劣弧及ビ優弧ノ上ニ立ツ中心角ヲ二等分ス. [證ハ (4) ニ倣ヘ]

(6) 弦ニ垂直ナル直徑ガ,弦ニテ分タレル二ツノ分ノ積ハ弦ノ半分ノ平方ニ等シ. [前頁ノ (6)]

## 60. 定點を通る弦

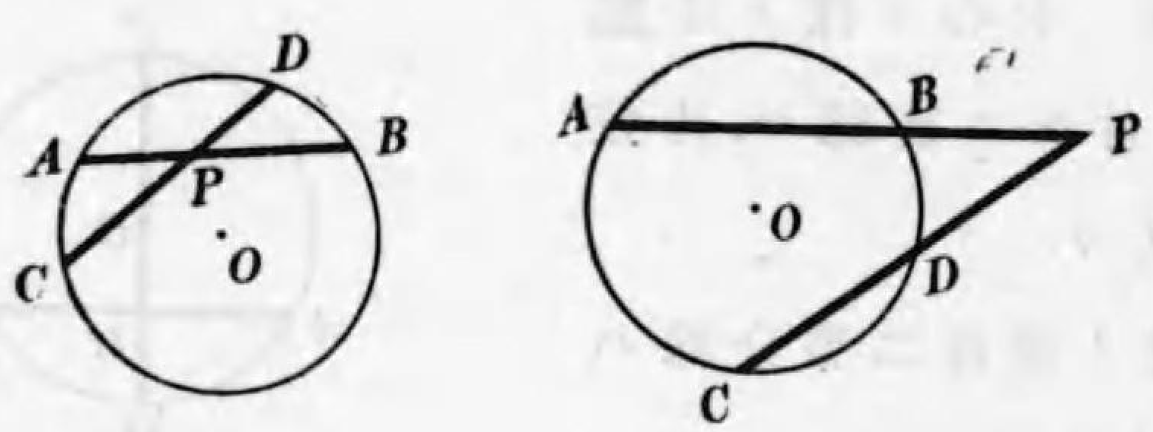
(1) 圓內ノ定點 $P$ ヲ通ル最小弦 $(AB)$ ハ,其點ヲ通ル直徑ニ垂直ナリ.




[$P$ ヲ通リ $(AB$ ニアラザル$)$ 任意ノ弦ヲ $CD$ トシ, $AB$, $CD$ ノ中心ヨリノ距離ノ大小ヲ比較セヨ]

(2) 定點ヲ通ル弦ノ,其點デ分タレタル二ツノ分(內分又ハ外分)ノ積ハ一定ナリ.

卽チ,次ノ圖ニ於テ, $AP.PB = CP.PD$




(3) 弦ヲ內分シタルトキノ二ツノ分ノ積ハ,其點ニテ二等分セラルル弦ノ半分ノ平方ニ等シ.

(4) 弦ヲ外分シタルトキノ二ツノ分ノ積ハ,其點ヨリ其圓ニ引ケル切線ノ平方ニ等シ.

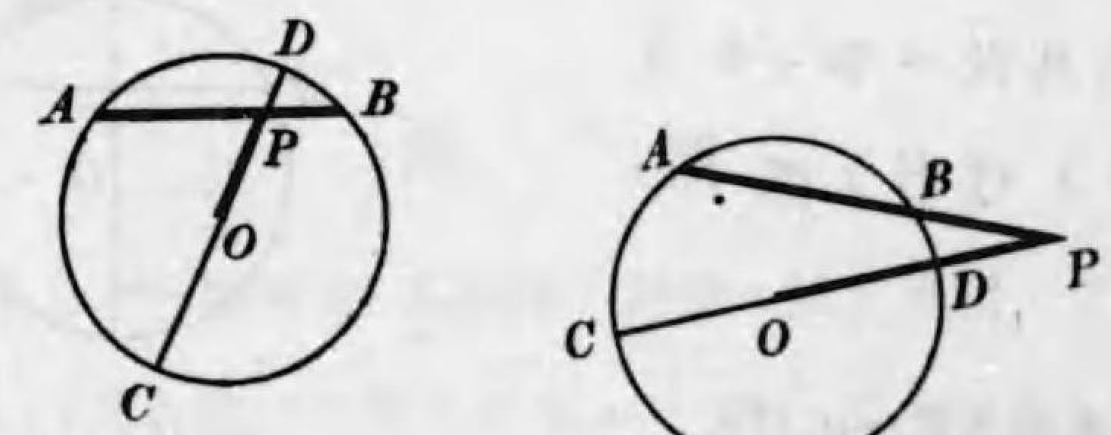


(5) 定點ヲ通ル弦ガ其點デ分タレル二ツノ分ノ積ハ,其點ト圓ノ中心トヲ結ビ付ケル線分ノ平方ト,半徑ノ平方トノ差ニ等シ.

例ヘバ,圓 $O$ ノ半徑ヲ $r$ トスレバ,

$P$ ガ圓內ニ在ルトキハ, $AP.PB = r^2 - PO^2$

$P$ ガ圓外ニ在ルトキハ, $AP.PB = PO^2 - r^2$




略證 $P$ ヲ通ル直徑ヲ $CD$ トスレバ,

$$AP.PB = CP.PD$$
$$= (CO + OP)(OD \sim OP)$$
$$= r^2 \sim OP^2$$

(6) 二ツノ線分 $AB$, $CD$ 又ハ其双方ノ延長ガ $P$ ニ於テ交リ, $AP.PB = CP.PD$ ナルトキハ, $AB$, $CD$ ハ同ジ圓ノ弦ナリ. (卽チ,四點 $A, B, C, D$ ハ同一ノ圓周上ニ在リ)

### (丙) 切線

## 61. 切線に關する定理

(1) 半徑ノ端(中心ニアラザル)ニ於テ,之ニ垂直ナル直線ハ其圓ノ切線ナリ.

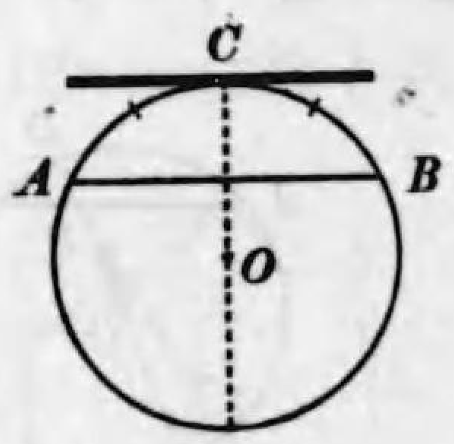
(2) 圓ノ中心ヨリノ距離ガ其圓ノ半徑ニ等シキ直線ハ其圓ノ切線ナリ.

(3) 圓ノ中心ヨリ切線ニ引ケル垂線ハ切點ヲ通ル.

(4) 切線ハ切點ヘノ半徑並ニ直徑ニ垂直ナリ.

(5) 圓ノ中心ハ,切點ヨリ引ケル,切線ノ垂線上ニ在リ.

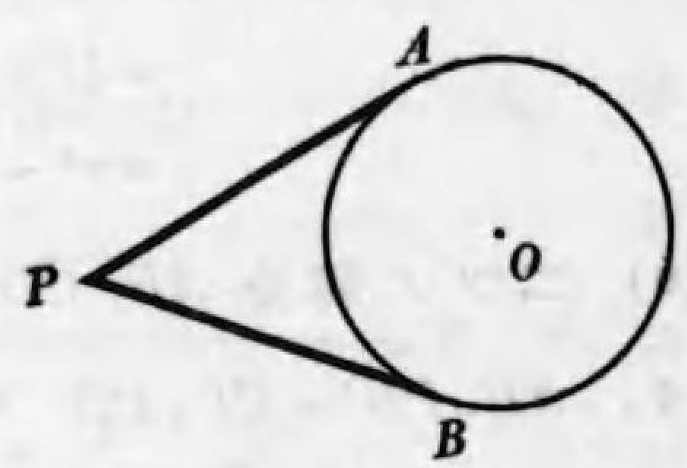
(6) 弦ニ平行ナル切線ノ切點ハ,其弦ニ依ッテ生ズル一ツノ弓形ノ弧ノ中點ナリ.




[C ヲ通ル直徑ヲ考ヘヨ (5)]

(7) 圓外ノ一點ヨリ,其圓ニ唯二ツノ切線ヲ引クコトヲ得.

(8) 圓外ノ一點ヨリ其圓ニ引ケル二ツノ切線ノ長サハ相等シ.




[註 圓外ノ一點カラ其圓ニ引イタ切線ノ長サトハ,其點ト切點トノ間ノ距離ノコトデアル]

(9) 圓外ノ一點ヨリ其圓ニ二ツノ切線ヲ引クトキハ,其點ト中心トヲ結ビ付クル直線ハ,切線ノナス角,及ビ切點ヲ結ビ付クル弦ヲ二等分ス.

(10) 圓外ノ一點ヨリ引ケル切線ノ平方ハ,其點ヨリ引



ケル任意ノ割線ヨリ切リ取ル弦ヲ,其點ニテ外分スル二ツノ分ノ積ニ等シ.

(11) 弦ヲ任意ノ點ニテ外分シタルトキノ二ツノ分ノ積ガ,其點ト其圓周上ノ一點トヲ結ビ付クル線分ノ平方ニ等シキトキハ,其線分ハ其圓ノ切線ナリ.

**注意** 切線ニ關スル大切ナ定理ガ今一ツ 87 頁ノ (13) ニアル.

## 問題

1. 直徑上ノ一點ヨリ,其直徑ノ兩側ニ於テ圓周マデ引ケル二線分ノナス角ガ,其直徑デ二等分セラルヽトキ,其二線分ハ相等シ.

2. 圓外ノ一點ヨリ其圓周マデ引ケル,二ツノ相等シキ線分ノナス角ノ二等分線ハ,中心ヲ通ル.

*3. 圓周ノ六分ノ一ニ等シキ弧ヲ張ル弦ハ,其圓ノ半徑ニ等シ.

*4. 一ツノ圓ノ二ツノ平行弦ノ間ニ在ル弧ハ相等シ.

5. 一ツノ圓ノ二ツノ相等シキ弦ガ交ルトキハ,其交點ニテ分タレタル分ハ,二ツヅツ相等シ.

6. 一ツノ圓ノ弦 $AB$ 又ハ其延長ガ,同心ナル他ノ一ツノ圓周ト $C, D$ ニ於テ交ルトキハ, $AC=BD$ ナリ.

7. 一ツノ圓ノ相等シキ弦ハ皆之ト同心ナル一ツノ圓ニ切ス.

8. 相交ル二直線ニ切スル圓ノ中心ハ,其二直線ノナス角ノ二等分線上ニ在リ.

9. 相交ル二ツノ圓ノ共通弦ノ延長上ノ一點ヨリ, 二ツノ圓ニ引ケル切線ハ相等シ. (10, 鳥農; 7, 上蠶)

---

## 問題略解

1. 其直徑ヲ折目トシテ, 一方ヲ折返シテ證セヨ.

2. 其點ト圓ノ中心トヲ結ビ付ケル線分ガ, 等シイ線分ノナス角ヲ二等分スルコトヲ證セヨ.

3. 其弧ノ上ニ立ツ中心角ノ大サヲ考ヘヨ.

4. 79 頁, §59 ノ (4) ニ依レ.

5. 圓 $O$ ノ等シイ弦 $AB$, $CD$ ガ $P$ デ交ルトシ, $O$ カラ $AB$, $CD$ ニ垂線 $OM$, $ON$ ヲ引イテ, 先ヅ $\triangle OMP \equiv \triangle ONP$ ヲ證セヨ.

6. 79 頁, §59 ノ (1) ニヨレ.

7. 等シイ弦ノ, 中心カラノ距離ハ等シイカラ, 皆其距離ヲ半徑トスル同心圓ニ切スル. [82 頁, §61 ノ (2)]

8. 二直線ノ交點ト, ソレニ切スル圓ノ中心トヲ結ビ付ケヨ.

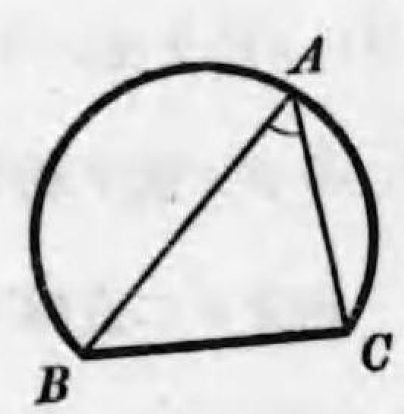
9. 80 頁, §60 ノ (4) ニ依レ.

## 第四 圓ト角

### 62. 定義


圓周上ノ一點ヨリ引ケル二ツノ弦ノナス角ヲバ, 其角ノ内ニ在ル弧ノ上ニ立ツ**圓周角**ナリトイフ.

圓周角ハ其圓ニ内接ストイフコトアリ.




又頂點ガ弓形ノ弧ノ上ニ在リテ, 二邊ガ其弓形ノ弦ノ端ヲ通ル所ノ角ヲバ, 其**弓形ノ角**又ハ其**弓形ノ含ム角**トイフ.



### 63. 二弦のなす角に關する定理


(1) 圓周角ハ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ.


(2) 同ジ弧又ハ相等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シ.

(3) 同ジ弓形ノ含ム角ハ相等シ.

(4) 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ, 相等シキ圓周角ガ立ツ所ノ弧ハ相等シ. [(2) ノ逆]

(5) 劣弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ鋭角, 半圓周ノ上ニ立ツ圓周角ハ直角, 優弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ鈍角ナリ.

此逆モ眞ナリ.

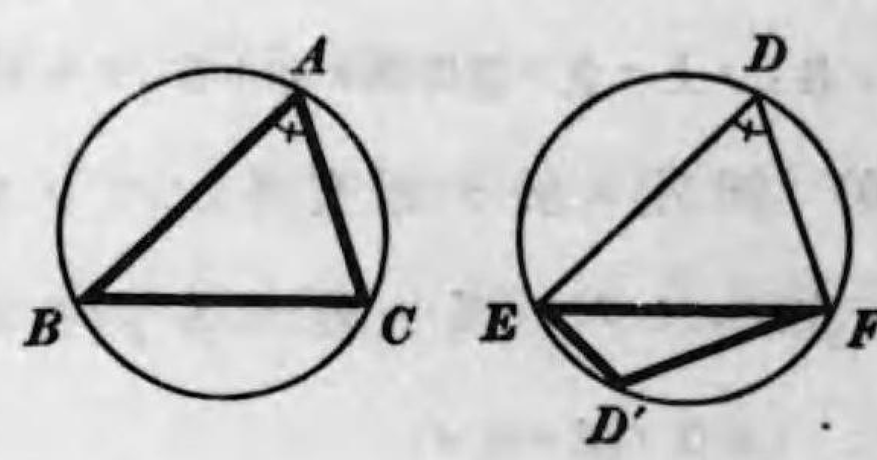
(6) 圓周角ノ二等分線ハ其角内ノ弧ノ中點ヲ通ル.

(7) 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ, 相等シキ弦ノ張ル弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ, 相等シキカ若クハ互ニ補角ナリ.

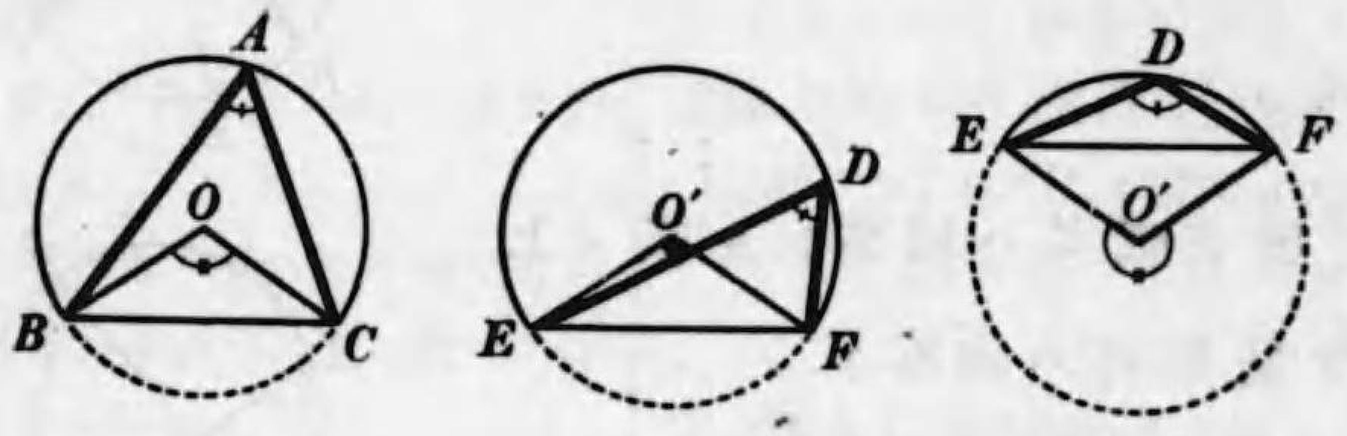
右ノ圖ニ於テ, 圓ガ等シク, 且ツ $BC = EF$ トスレバ, $\angle A = \angle D$

若クハ,

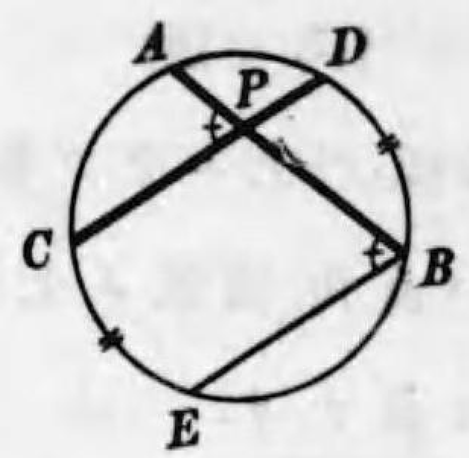
$\angle A + \angle D' = 2\angle R$ ナリ.



(8)　一ツノ弓形ノ弦ガ他ノ弓形ノ弦ニ等シク,初ノ弓形ノ含ム角ガ後ノ弓形ノ含ム角ニ等シキカ或ハソノ補角ナルトキハ,其二ツノ弓形ノ屬スル圓ハ相等シ.




(9)　圓内ニ於テ相交ル二ツノ弦ノナス角ハ,其角及ビ其對頂角ノ内ニ在ル弧ノ和ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ.




即チ,右ノ圖ノ $\angle P$ ハ $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}$ ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ.

證　$B$ ヨリ $CD$ ニ平行ナル弦 $BE$ ヲ引ケバ　$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{EC}$ 且ツ　$\angle P=\angle B$

故ニ　$\angle P$ ハ　$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}$ ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ.

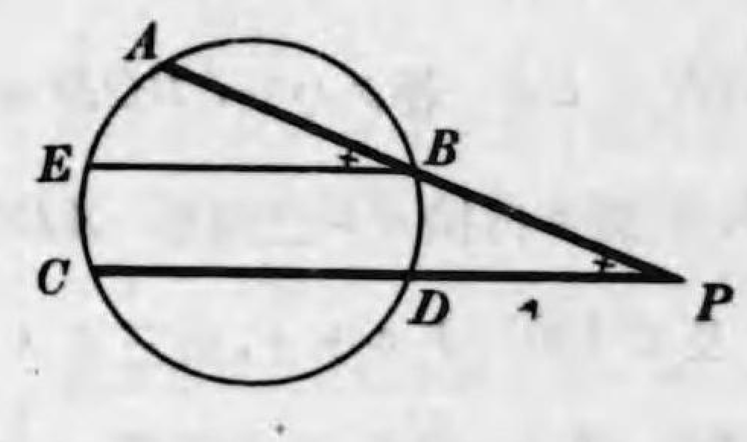
**注意**　$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}$ ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角トイフ代リニ,$\overset{\frown}{AC}$ ト $\overset{\frown}{BD}$ ノ各〻ノ上ニ立ツ圓周角ノ和ト言ッテモ可イ.

(10)　圓外ニ於テ相交ル二ツノ割線ノナス角ハ,其角ノ内ニ在ル二ツノ弧ノ差ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ.（次頁ノ圖ヲ見ヨ）



[證ハ (9) ノニ倣ヘ]

**注意**　(9),(10) ハ問題ノ證明ニヨク使フ定理デアル.




(11)　弓形内ノ一點ヨリ其弦ヲ見込ム角ハ,其弓形ノ含ム角ヨリ大ナリ.弦ニ對シテ弓形ト同ジ側ニ在ル弓形外ノ一點ヨリ其弦ヲ見込ム角ハ,其弓形ノ含ム角ヨリ小ナリ.此逆モ眞ナリ.

(12)　圓ノ切線ト其切點ヨリ引ケル弦トノナス角ハ,其角ノ内ニ在ル弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ.

(13)　弦ト其一端ヲ通ル直線トノナス角ガ,其弦ニ對シテ,角ト同ジ側ニアル弧（其弦ノ張ル所ノ）ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シキトキ,其直線ハ其圓ノ切線ナリ.

## 問　題

**1.**　$P$ ニ於テ交ル二直線ガ一ツノ定圓ト夫々 $A, A'$; $B, B'$ ニ於テ交ルトキ,$\angle APB$ ト弧 $AB$, $A'B'$ ノ上ニ立ツ圓周角トノ關係ヲ點 $P$ ノ種々ノ位置ニツキテ研究セヨ.（12, 廣師）

**2.**　$AB$ ハ圓 $O$ ノ定弦,$P$ ハ其圓周上ノ任意ノ點ナリ.然ルトキハ,$AP$ ト $BP$ トノナス角ノ二等分線ハ,皆二ツノ定點ノ中ノ何レカ一ツヲ通ル.

**3.** 三角形 $ABC$ ノ外心 $O$ ヨリ邊 $BC$ ニ垂線 $OD$ ヲ引ケバ, $\angle BOD = \angle A$ 若クハ $\angle BOD + \angle A = 2\angle R$ ナリ.

**4.** 圓ニ內接スル三角形 $ABC$ ノ $\angle A, \angle B, \angle C$ ガ夫々 $30°$, $50°$ 及ビ $100°$ ナルトキ, 此三ツノ角ノ二等分線ガ圓周ニ交ハル點ヲ $A', B', C'$ トセバ, $\triangle A'B'C'$ ノ各角ノ大サ如何.

**5.** 一ツノ圓ノ二ツノ弦 $AB, CD$ ガ此ノ圓內ノ一點 $E$ ニ於テ交ルトキ, 弧 $AD$ ノ中點 $M$ ト弧 $BC$ ノ中點 $N$ トヲ過グル直線ハ弦 $AB, CD$ ト等角ヲナスコトヲ證明セヨ. (6, 陸士)

***6.** $\triangle ABC$ ノ頂角 $A$ 及ビ其外角ノ二等分線ガ外接圓ト交ル點ヲ $M, N$ トスレバ, $MN$ ハ底邊 $BC$ ヲ垂直ニ二等分スルコトヲ證明セヨ. (14, 海經)

***7.** 中心 $O$ ナル圓ニ內接スル三角形 $ABC$ ニ於テ邊 $BC$ ニ對シ頂點 $A$ ト反對ノ側ニ在ル弧 $BC$ ノ中點ヲ $D$ トスレバ $\angle ADO$ ハ $\angle B, \angle C$ ノ差ノ半ニ等シ. (12, 彥商)

**8.** 二等邊三角形 $ABC$ ノ頂點 $A$ ヲ過ギ底邊 $BC$ ニ平行ニ直線 $AD$ ヲ引ケバ, $AD$ ハ $\triangle ABC$ ノ外接圓ニ切スルコトヲ證明セヨ.

---

**問題略解**

**2.** 85 頁, §63 ノ (6) ヲ見ヨ.

**3.** $\angle BOC = 2\angle BOD$, ソシテ $\angle A$ ガ鋭角ダト, $\angle BOC = 2\angle A$ 又 $\angle A$ ガ鈍角ダト, $\widehat{BAC}$ ノ上ニ立ツ圓周角ヲ $\angle A'$ トスルト, $2\angle A' = \angle BOC$ 且ツ $\angle A + \angle A' = 2\angle R$ [參照] [112 頁ノ (1)

**4.** 答 $\angle A' = 75°$, $\angle B' = 65°$, $\angle C' = 40°$



$\angle A' = \angle B'A'A + \angle C'A'A$
$= \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C$ デアル.

**5.** $MN$ ガ $AB$ ト $F$ デ, $CD$ ト $G$ デ交ルトシ, 86 頁, §63 ノ (9) 又ハ (10) ニヨッテ, $\angle F = \angle G$ ヲ證セヨ.

**6.** 85 頁, §63 ノ (6) ト, 15 頁, §15 ノ (3) ニ依レ.

**7.** $D$ ヲ一端トスル直徑ヲ $DD'$ トシ, $\widehat{BA} < \widehat{CA}$ トスルト, $\angle B$ ハ $\widehat{CD'} + \widehat{D'A}$ ノ上ニ立ツ圓周角, $\angle C$ ハ $\widehat{BD'} - \widehat{AD'}$ ノ上ニ立ツ圓周角デアル. ソコデ $\angle B - \angle C$ ニ等シイ圓周角ガ立ツ弧ニ付テ考ヘヨ.

**8.** 87 頁, §63 ノ (13) ニ依レ.

## 第五 二ツノ圓

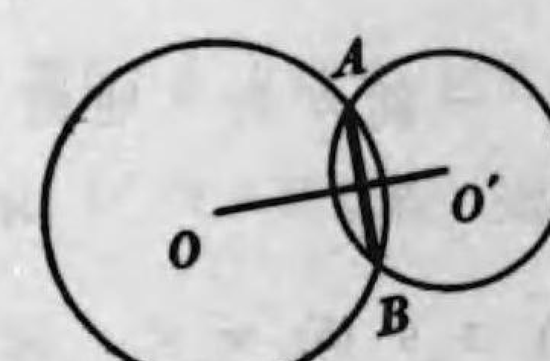
### 64. 二つの圓に關する定理

**定義** 二ツノ圓ノ中心ヲ通ル直線ヲ, 其二ツノ圓ノ**中心線**トイヒ, 中心間ノ距離ヲ其中心線ノ**長サ**トイフ.

(1) 中心線上ニ在ラザル點ニ於テ出會フ二ツノ圓ハ相交ル.

(2) 二ツノ圓ノ交點ハ中心線上ニ在ラズ.

(3) 相交ル二ツノ圓ノ共通弦ハ,其中心線ニテ垂直ニ二等分セラル.




即チ,二圓ノ交點ハ其中心線ニ付テ對稱ナリ.

(4) 二ツノ圓ガ切スルトキ,其中心線ハ切點ヲ通ル.

[(1) ヲ用ヒテ歸謬法デヤレ]

(5) 中心線上ニ於テ出會フ圓ハ相切ス.

(6) 相切スル二ツノ圓ハ,其切點ニ於テ共通ナル切線ヲ有ス.

## 65. 前節の續き

(二ツノ圓ノ位置ト其中心間ノ距離ニ關スル定理)

半徑 $r$ ナル圓 $O$ ト,半徑 $r'$ ナル圓 $O'$ トノ中心間ノ距離 $OO'$ ヲ $d$ トスレバ,

(1) 二圓ガ互ニ全ク他ノ外ニ在ルトキハ,

$$d>r+r'$$

(2) 二圓ガ外切スルトキハ,

$$d=r+r'$$

(3) 二圓ガ相交ルトキハ,

$$r\sim r'<d<r+r'$$

(4) 二圓ガ内切スルトキハ,

$$d=r\sim r'$$

(5) 一圓ガ全ク他圓ノ内ニ在ルトキハ,

$$d<r\sim r'$$

此 (1) ヨリ (5) マデノ逆モ眞ナリ. (轉換法)

### 問題

1. 二定圓ノ中心ト,其二圓ニ切スル任意ノ圓ノ中心トノ距離ノ和若クハ差ハ一定ナリ.



2. 相切スル二ツノ圓ノ切點ヲ通ル二ツノ直線ガ其二ツノ圓周ヨリ截取ル所ノ弧ノ弦ハ平行ナリ.

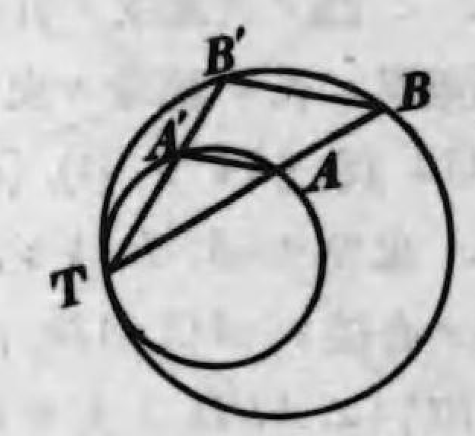
3. 相交ル二ツノ圓ノ二ツノ交點ノ各々ヲ通リ任意ノ二直線ヲ引ケバ,其二直線ガ各圓ニ交ル點ヲ結ビ付クル弦ハ互ニ平行ナリ.

4. 相交ル二ツノ圓ノ交點ノ一ツヲ通ル二ツノ圓ノ直徑ノ他ノ端ト,今一ツノ交點トハ一直線上ニ在リ.

*5. 二ツノ圓ガ切スルトキ,切點ヲ通リ兩圓周ニ交ル直線ヲ引クトキ,其交點ヘ引ケル二ツノ圓ノ半徑ハ互ニ平行ナリ.

6. 相切スル兩圓ノ平行ナル直徑ノ端ト切點トハ三點ヅツ同一ノ直線上ニ在リ. (10, 紳船)

7. 二ツノ圓ガ内切スルトキハ切點ヲ過ギル外圓ノ總テノ弦ガ内圓ノ周ニヨリ分タレタル二ツノ部分ハ比例ヲナスコトヲ證明セヨ.




*8. 相交ル二ツノ圓 $O$, $O'$ ノ一ツノ交點 $A$ ヲ通リ,兩圓周ト更ニ夫々 $B$, $C$ ニ於テ交ル直線ヲ引キ, $O$, $O'$ ヨリ其直線ニ垂線 $OM$, $O'M'$ ヲ引ケバ $BC=2.MM'$ ナリ.

9. $A$, $B$ ニ於テ相交ル二ツノ圓アリ. $A$, $B$ ヲ通リ互ニ平行ナル直線ヲ引ケバ,兩直線ノ兩圓周間ニ夾マルル部分ハ相等シ.

10. 二ツノ圓ノ一ツノ交點ヲ通リ,兩端ガ兩圓周上ニ在ル線分ノ中,中心線ニ平行ナルモノガ最大ナリ.

**11.** 相交ル二ツノ圓ノ一ツノ交點ヲ通リ，兩端ガ兩圓周上ニ在ル，與ヘラレタル長サノ線分ヲ引クコト．

**12.** 相交ル二圓アリ，其交點ノ一ツヲ過ギテ一ツノ直線ヲ引キ，各圓ガソレヨリ截取ル弦ヲ相等シカラシメヨ．(5, 山商)

又其比ヲ 1:2 ナラシメヨ．(8, 東農實)

---

**問題略解**

**1.** 先ヅ，二定圓ニ切スル任意ノ圓ノ中心ト各定圓ノ中心トノ距離ヲソレ等ノ圓ノ半徑デ表ハセ．[90 頁，§65 ノ (2) 又ハ (4)]

**2.** 二圓ノ切點ニ於テ，共通切線ヲ引キ，87 頁，§63 ノ (12) ニ依レ．

**3.** 二圓ノ共通弦ヲ引キ，二直線ノ兩圓周間ニ在ル線分ガ交ラナイトキハ，112 頁，§74 ノ (1), (2) ニ依レ．

**4.** 交點ヲ $A$, $B$ トシ，$A$ ヲ通ル二圓ノ直徑ヲ $AC$, $AD$ トシテ，$\angle ABC$, $\angle ABD$ ノ大サヲ考ヘヨ．

**5.** 兩中心ヲ結ビ付ケ，必要アラバ延長シテ切點ヲ通ラセテ，出來ル二ツノ二等邊三角形ヲ考ヘヨ

**6.** 兩中心ヲ結ビ付ケ，必要アラバ延長シテ切點ヲ通ラセ，二圓ガ外切スルトキハ中心線ノ兩側ニ在ル，二圓ノ直徑ノ端ト切點トヲ結ビ付ケ，内切スルトキハ中心線ノ一方ニ在ル，二圓ノ直徑ノ端ト切點トヲ結ビ付ケ，生ズル二ツノ二等邊三角形ノ兩底角ガ等シイコトヲ證セヨ．

**7.** 示シテアル圖ニ於テ，$T$ カラ兩圓ノ共通切線ヲ引イテ，$AA' \parallel BB'$ ヲ證セヨ．

**8.** $AB = 2.AM$,　$AC = 2.AM'$，此二ツヲ加ヘルカ，若クハ一方カラ他ヲ引ケ．

**9.** 上ノ 3 又ハ前問ニ依レ．

**10.** 上ノ 8 ト同ジ記號ヲ使フトシ，$O$, $O'$ ヲ結ビ付ケルト，$MM' \leqq OO'$ (コレハ $O$ カラ $MM'$ ニ平行ナ直線ヲ $O'M'$ 又ハ其延長マデ引クト直グ分ル)．故ニ $BC \leqq 2.OO'$

**11.** 解析 (記號同上) $BC$ ヲ與ヘラレタ長サ $l$ ニ等シイトシ，又 $O$ カラ $MM'$ ニ平行ニ引イタ直線ト $O'M'$ 又ハ其延長トノ交點ヲ $N$ トスルト，直角三角形 $OO'N$ ニ於テ，$ON = \frac{l}{2}$ ダカラ，此三角形ヲ作ル事ガ出來ル．作圖證明ハ讀者ニ任カス．

**12.** 解析 (記號同上) $A$ カラ $MO$ ニ平行ナ直線ヲ引イテ，$OO'$ ト $P$ デ出會ハセルト，$OP : PO'$ ハ $MA : AM' = AB : BC$ デアル．作圖，證明ハ讀者ニ任カス．



## 第六　作圖題及ビ軌跡

(本章第一ヨリ第五迄ト密接ノ關係アルモノ)

### 66. 圓に關する作圖題

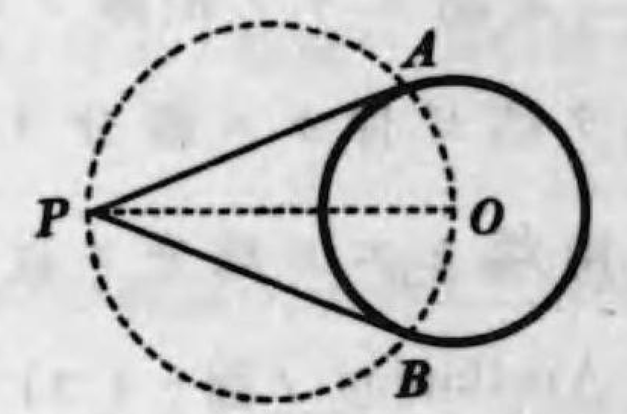
(1) 圓弧ヲ二等分スルコト．

(2) 圓ノ中心ヲ求ムルコト．

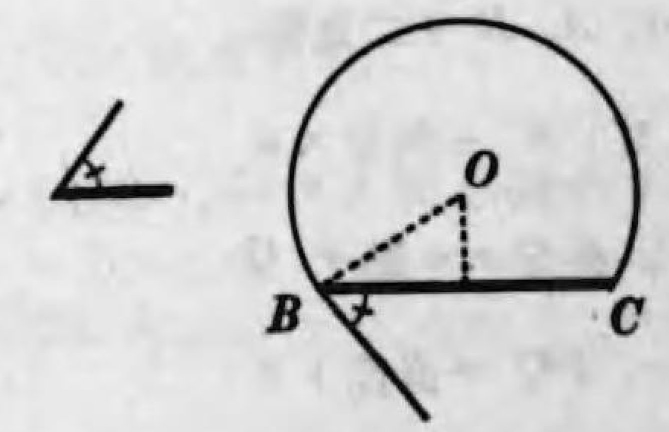
(3) 一直線上ニ在ラザル三定點ヲ通ル圓周ヲ畫クコト．

(4) 圓周上ノ定點ニ於テ，之ニ切線ヲ引クコト．

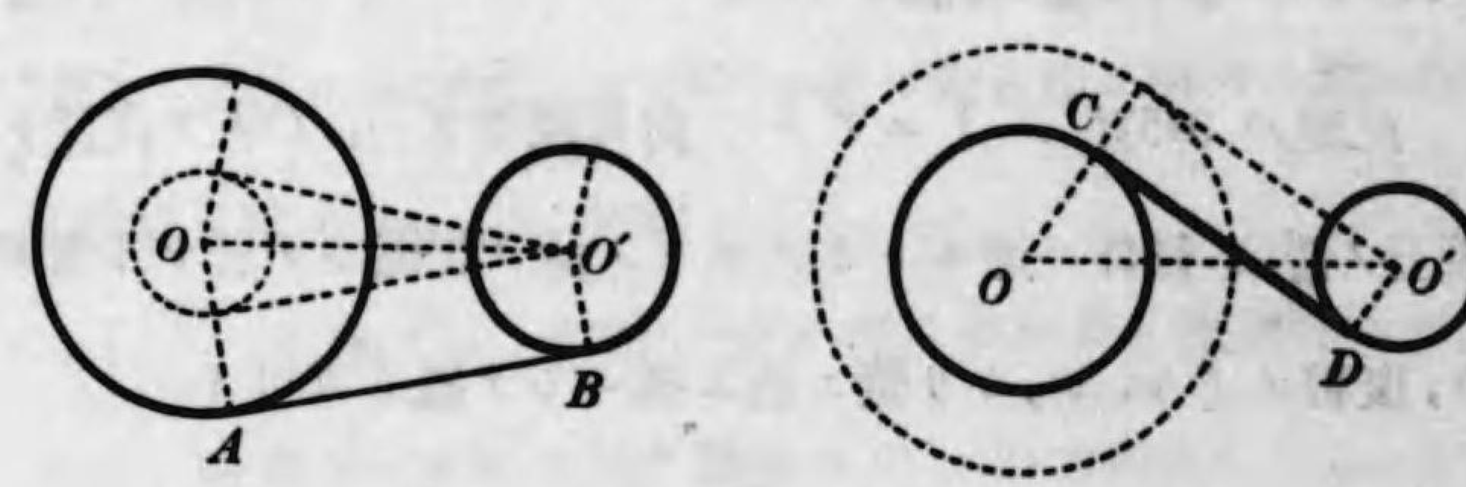
(5) 圓外ノ定點ヨリ之ニ切線ヲ引クコト．




(6) 定線分ヲ弦トシ，與ヘラレタル角ヲ含ム弓形ヲ畫クコト．




(7) 二定圓ノ共通切線ヲ引クコト．



## 67. 軌跡

(1) 一定點ヨリ一定ノ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ,其定點ヲ中心トシ,一定ノ距離ニ等シキ長サヲ半徑トスル圓周ナリ.

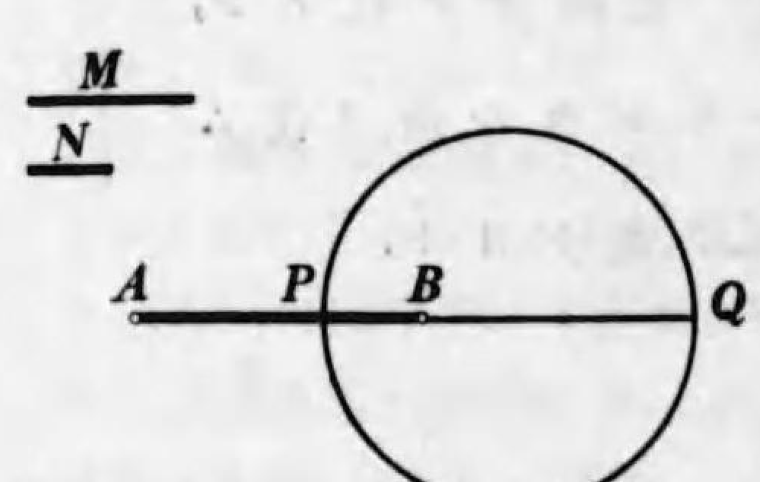
(2) 定線分ヲ底邊トシ,一定ノ頂角ヲ有スル三角形ノ頂點ノ軌跡ハ,其底邊ヲ弦トシ,ソレニ付テ對稱ナル二ツノ弓形ノ弧ナリ. (11, 金工)

(3) 二定點ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ハ,其二定點ヲ結ビ付クル線分ヲ,一定ノ比ニ内分及ビ外分スル點ヲ兩端トスル線分ヲ直徑トスル圓周ナリ.

(12, 横工; 9, 盛農)

(其圓ヲ Apollonius ノ圓トイフ)

例ヘバ, $A$, $B$ チ二定點, $AB$ チ $M:N$ ニ内分スル點チ $P$, 外分スル點チ $Q$ トスレバ, $PQ$ チ直徑トスル圓周ハ $A$, $B$ ヨリノ距離ノ比ガ $M:N$ ニ等シキ點ノ軌跡ナリ.




**注意** 此證ハ345頁ノ1ニアル. 尚其證明デハ, $PQ$ ヲ直徑トスル圓周上ノ點ガ條件ニ適ストイフコトノ證ヲ記憶シテ居ナイ者ガ多イカラ,復習ノトキ,シッカリ覺エ込ム樣ニシテ置クガ可イ.



### 問題

*1. 二定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ハ,其二點ヲ結ビ付クル線分ノ垂直二等分線ナリ.

2. 定點ヲ通リ,與ヘラレタル長サヲ半徑トスル圓ノ中心ノ軌跡ハ,一ツノ圓周ナリ.

*3. 定直線又ハ定圓周上ノ定點ニ於テ之ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ,定點ヲ通ル直線ナリ.

4. 定直線ニ切シテ廻轉スル圓ノ中心ノ軌跡ハ,其直線ニ平行ナル一組ノ直線ナリ.

*5. 定角ノ二邊ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ,其角ノ二等分線ナリ.

*6. 定圓ニ切シ且ツ與ヘラレタル長サヲ半徑トスル圓ノ中心ノ軌跡ハ,一般ニハコレト同心ナル二ツノ圓周ナリ.

*7. 定圓ノ相等シキ弦ノ中點ノ軌跡ハ,一ツノ同心圓ナリ.

8. 定圓ノ任意ノ切線上ニ其切點 $A$ ヨリ一定ノ長サ $AB$ ヲ取ルトキ, $B$ 點ノ軌跡ヲ求ム.

*9. 定圓ノ平行弦ノ中點ノ軌跡ハ,其弦ニ垂直ナル直徑ナリ.

10. $O$, $A$ ハ定點ナリ, $O$ ヲ通ル動直線ニ關スル點 $A$ ノ對稱點ノ軌跡ヲ求メヨ. (14, 廣師)

11. 二定點ヨリノ距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點ハ何レモ同一圓周上ニ在ルコトヲ證明セヨ. (9, 海諸校)

**12.** 定點ヲ中心トシ,定直線ニ切スル圓ヲ畫クコト.

**13.** 平行二直線ト其一ツノ截線トニ切スル圓ヲ畫クコト.

**14.** 底邊,高サ及ビ外接圓ノ半徑ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

**15.** 與ヘラレタル圓弧 $AB$ 上ニ一點 $C$ ヲトリ,弦 $AC$, $BC$ ノ比ヲシテ與ヘラレタル比 $m:n$ ニ等カラシメヨ. (10, 高校)

---

### 問題略解

**2.** 定點ヲ中心トシ,與ヘラレタ長サヲ半徑トスル圓周.

**3.** 定直線ノ場合ニハ,ソレニ垂直ナ直線. 定圓ノ場合ニハ, 其中心ヲ通ル直線.

**6.** 軌跡ノ圓ノ半徑ハ,定圓ノ半徑ト與ヘラレタ長サトノ和及ビ差ニ等シイ. [90 頁, §65 ノ (2), (4)]

**7.** 證ノ前半ハ 83 頁, 問 7 ノ二同ジ. 次ニ其圓周上ノ任意ノ點ガ, ソノ點ニ於テ, ソレニ切スル原圓ノ弦ノ中點ナルコト,及ビ其弦ガ初ノ等シイ諸弦ト等長ナルコトヲ證セヨ.

**8.** 定圓ノ中心ト $B$ トヲ結ビ, 先ヅ其線分ガ定長ナルコトヲ證セヨ.

**10.** $A$ ノ對稱點ハ, 中心 $O$, 半徑 $OA$ ナル圓周上ニ在ル.

**11.** 94 頁, §67 ノ (3) ノ一部.

[345 ノ 1 ノ證ノ前半ヲ見ヨ]

**13.** 解析 $a \parallel b$ トシ,直線 $c$ ガ $a$, $b$ ト夫々 $A$, $B$ ニ於テ交ルトセヨ. $a$, $b$, $c$ ニ切スル圓ノ中心ヲ $O$ トシ, $O$, $A$; $O$, $B$ ヲ結ビ付ケルト, $OA$ ハ $a$, $c$ ノナス一ツノ內角ノ二等分線, $OB$ ハ $b$, $c$ ノナス一ツノ內角ノ二等分線デアル. 作圖,證明ハ讀者ニ任カス.

**14.** 先ヅ,與ヘラレタ外接圓ノ半徑ヲ半徑トシテ, 任意ノ圓ヲ畫イテ, ソレニ與ヘラレタ底邊ニ等シイ弦ヲ入レヨ.

**15.** 「アポロニユース」圓ヲ應用セヨ. 別法 弦 $AB$ ヲ $m:n$ ニ內分スル點 $D$, 及ビ $\widehat{AB}$ ノ共軛弧ノ中點 $E$ ヲ求メ, $E$, $D$ ヲ結ビ付ケ,ソレヲ延長スルト, ソレガ $\widehat{AB}$ ニ交ル點ガ $C$ デアル. 證ハ讀者ニ任カセル.



## 第七　圓ト三角形

### 68. 三角形と其外接圓に關する定理

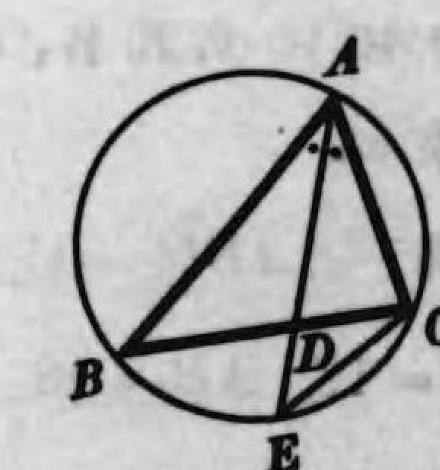
(1) 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル. 其點ガ其三角形ノ**外心**ナリ.

(2) 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ハ,其角ノ內ニ在ル外接圓ノ弧ヲ二等分シ,其角ノ外角ノ二等分線ハ其共軛弧ヲ二等分ス.


**略證** 右ノ圖ニ於テ, $AP$ ヲ $\angle A$ ノ二等分線. $AP'$ ヲ其外角ノ二等分線トシ, $P$, $P'$ ヲ其外接圓周上ニ在リトスレバ, $\angle PAP' = \angle R$ ナルヲ以テ $PP'$ ハ直徑ナリ. 然ルニ, $\widehat{BP} = \widehat{CP}$ 故ニ $PP'$ ヲ折目トシ, 一方ヲ折返セバ $B$ ハ $C$ ニ合ス. 故ニ $\widehat{BP'} = \widehat{CP'}$

(3) $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線ガ $BC$ ニ交ル點ヲ $D$, 其外接圓ノ周ニ交ル點ヲ $E$ トスレバ,

$$AB.AC = AD.AE$$




**證** $E$, $C$ ヲ結ビ付クレバ,

$\triangle ABD \infty \triangle AEC$

[∵ $\angle BAD = \angle EAC$, $\angle B = \angle E$]

$\therefore\ AB : AD = AE : AC$

$\therefore\ AB.AC = AD.AE$

(4) 三角形ノ二邊ノ積ハ第三邊ニ對スル高サト外接圓ノ直徑トノ積ニ等シ. (5, 商船)

右ノ圖ニ於テ, $AD \perp BC$

$AE$ ガ直徑ナルトキハ,

$$AB.AC = AD.AE$$

**證** $\triangle ADC \backsim \triangle ABE$

[$\because \angle C = \angle E$ ナル直角三角形]

$\therefore\ AD : AC = AB : AE$

$\therefore\ AB.AC = AD.AE$

(5) 一邊 $a$ ナル正三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ $R$ トスレバ,

$$a = R\sqrt{3}$$

**略證** $AB^2 = AE.AD$

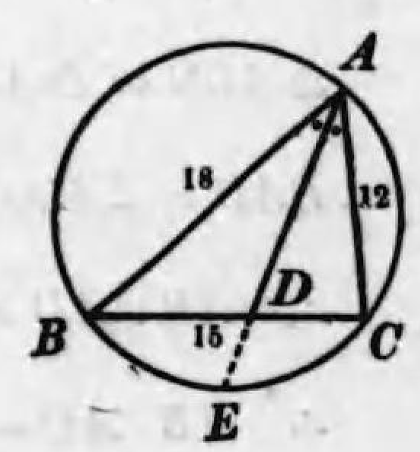
卽チ $a^2 = 2R\left(R + \frac{R}{2}\right) = 2R \times \frac{3}{2}R$

## 69. 前節の定理の應用

**第一** 前節ノ定理(3)ヲ應用スルト, 三角形ノ三邊ノ長サヲ知レバ, 其各々ノ角ノ二等分線ノ長サヲ求メルコトガ出來ル.

**例** $\triangle ABC$ ニ於テ, $BC = 15$, $CA = 12$, $AB = 18$ ナルトキ $\angle A$ ノ二等分線 $AD$ ノ長サヲ求メヨ.

(10, 明專)





**解** $\triangle ABC$ ノ外接圓ヲ畫キ, $AD$ ノ延長トノ交點ヲ $E$ トスレバ,

$$AB.AC = AD.AE$$
$$= AD(AD + DE)$$
$$= AD^2 + AD.DE$$
$$= AD^2 + BD.DC \quad [80\text{ 頁}, §60\text{ ノ }(2)]$$
$$\therefore\ AD^2 = AB.AC - BD.DC$$
$$= 18 \times 12 - BD.DC \qquad (1)$$

然ルニ, $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BC}{AB + AC}$ [40 頁, (4)]

$$\therefore\ \frac{BD}{18} = \frac{DC}{12} = \frac{15}{18 + 12} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ BD = \frac{18}{2} = 9,\quad DC = \frac{12}{2} = 6$$

故ニ (1) ヨリ, $AD^2 = 18 \times 12 - 9 \times 6$

$$= 9 \times 6(4 - 1) = 9 \times 6 \times 3$$

$\therefore\ AD = 9\sqrt{2}$ 答

**第二** 前節ノ定理(4)ヲ應用スルト, 三角形ノ三邊ノ長サデ其外接圓ノ直徑ノ長サヲ計算スルコトガ出來ル.

**例** 一ツノ三角形ノ三邊ノ長サガ夫々 5 尺, 7 尺及ビ 8 尺ナリ. 此三角形ニ外接スル圓ノ半徑ヲ求ム. (8, 水產)

**解** $5 + 7 + 8 = 20,\quad 20 \div 2 = 10$

$10 - 5 = 5,\quad 10 - 7 = 3,\quad 10 - 8 = 2$

$\therefore$ 此三角形ノ面積ヲ $S$ 平方尺トスレバ,

$$S = \sqrt{10 \times 5 \times 3 \times 2} = 10\sqrt{3}$$

故ニ，最大邊ニ對スル高サハ，$\dfrac{10\sqrt{3}\times 2}{8}$ 尺 $=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$ 尺

故ニ，求メル半徑ノ長サヲ $r$ 尺トスレバ，

$$2r\times\frac{5}{2}\sqrt{3}=5\times 7$$

$$\therefore\ r=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7}{3}\sqrt{3}\qquad 答\ \frac{7}{3}\sqrt{3}\ 尺$$

## 70. 注意すべき問題と其答案の例

**1.** $\triangle ABC$ ノ內心 $O$ ト頂點 $A$ トヲ過グル直線ト此三角形ノ外接圓ノ周トノ交點ヲ $P$ トスレバ

$PB=PC=PO$ ナリ。 (9, 東農實)

**證** $B, O$; $B, P$ ヲ結ビ付クレバ，

$AO$, $BO$ ハ夫々 $\triangle ABC$ ノ $\angle A$, $\angle B$ ヲ二等分ス，

$$\therefore\ \angle BOP=\angle BAO+\angle ABO$$
$$=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B$$

又 $\angle OBP=\angle OBC+\angle CBP$
$$=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle A\quad [\because\ \angle CBP=\angle PAC]$$

$\therefore\ \angle BOP=\angle OBP$ 故ニ $\triangle PBO$ ハ二等邊ナリ，

$$\therefore\ PB=PO$$

次ニ $C, P$ ヲ結ベバ， $PB=PC$ $[\because\ \overset{\frown}{BP}=\overset{\frown}{CP}]$

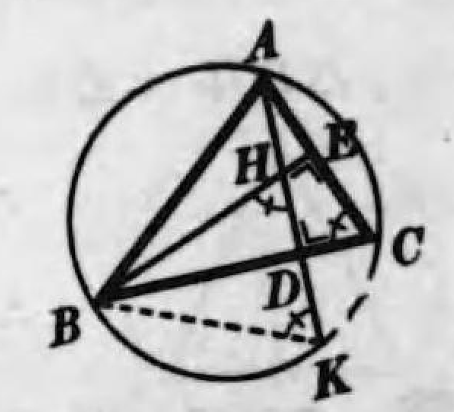
$$\therefore\ PB=PC=PO$$



**2.** 三角形ノ頂點ヨリ對邊ニ引ケル垂線ノ足ハ，其垂線又ハ其延長ガ，外接圓ノ周ニ出會フ點ト垂心トノ半途ニ在リ．

(12, 宇農; 7, 醫專)

**證** $\triangle ABC$ ノ $A$ ヨリ $BC$ ニ引ケル垂線ノ足ヲ $D$ トシ，直線 $AD$ ガ外接圓ノ周ニ出會フ點ヲ $K$ トシ，$B, K$ ヲ結ビ付クレバ，



$\angle K=\angle C$ $[\overset{\frown}{AB}$ 上ノ圓周角$]$

$\angle BHD=\angle C$ $[\because\ \angle D=\angle E=\angle R]$

$\therefore\ \angle K=\angle BHD$ 而シテ， $BD\perp HK$, $\therefore\ HD=DK$

他ノ場合モ，之ニ倣ッテ證明スルヲ得．

**注意** $\angle B$ 又ハ $\angle C$ ガ鈍角ノ場合ハ，線分 $AD$ ガ外接圓ノ周ニ交ルシ證明モ少シハ變ルケレド，上ノ證明ヲ辿ルト直ニ出來ルカラ，證ノ最後ニ「他ノ場合モ云々」ト云ッテソレヲ略シテ置イタノデアル．平常詳シクヤッテ居ケバ，答案トシテハ大概ノ場合之レデ可イ．

**3.** 三角形ノ任意ノ頂點ト垂心トノ距離ハ外心ヨリ對邊ニ至ル距離ノ二倍ニ等シ． (15, 高松商; 6, 盛農)

$H$ ヲ $\triangle ABC$ ノ垂心，$O$ ヲ其外心，$M$ ヲ $O$ ヨリ $BC$ ニ引ケル垂線ノ足トスレバ，$AH=2.OM$

**證** $A, C$ ヨリ各々ノ對邊ニ垂線 $AD$, $CF$ ヲ引ケバ，何レモ $H$ ヲ通ル．

$B$ ヲ通ル外接圓ノ直徑ヲ $BL$ トシ, $L, C$ ヲ結ベバ,

$\angle LCB = \angle R \quad \therefore \ LC \parallel AD$

同樣ニ, $A, L$ ヲ結ビ付クレバ, $LA \parallel CF$

故ニ $AHCL$ ハ平行四邊形ナリ. $\therefore \ AH = LC$

然ルニ, $\triangle BCL$ ニ於テ, $O$ ハ $BL$ ノ中點, $OM \parallel LC$

$\therefore \ LC = 2.OM$

$\therefore \ AH = 2.OM$

**注意** 第三篇 (196 頁) ニ別解ガアル.

**4.** 正三角形 $ABC$ ノ外接圓ノ弧 $BC$ ノ上ノ任意ノ一點ヲ $P$ トスレバ, $PA = PB + PC$ ナルコトヲ證明セヨ.

(15, 阪商; 12, 阪外; 10, 桐工; 6, 上蠶; 5, 海經)

**證** $PA$ 上ニ $PB$ ニ等シク $PQ$ ヲ取リ, $B, Q$ ヲ結ビ付クレバ, $\triangle PBQ$ ハ二等邊ナリ.


然ルニ, $\angle BPQ = \angle C = 60°$

故ニ, $\triangle PBQ$ ハ正三角形ナリ. $\therefore \ BQ = BP$

$\therefore \ \angle QBP = 60° = \angle ABC$

$\therefore \ \angle ABQ = \angle CBP$

$\therefore \ \triangle ABQ \equiv \triangle CBP$

[$\because \ AB = CB, \ BQ = BP, \ \angle ABQ = \angle CBP$]

$\therefore \ AQ = CP$

$\therefore \ PA = PQ + QA = PB + PC$

**注意** 第三篇 (190 頁) ニ別解ガアル.



**5.** 二等邊三角形 $OAB$ ノ頂點 $O$ ヨリ直線ヲ引キ底邊 $AB$ 又ハ其延長ト $P$ ニ於テ, 外接圓周ト $Q$ ニ於テ交ラシムルトキハ, $OP.OQ$ ハ一定ナルコトヲ證スベシ.

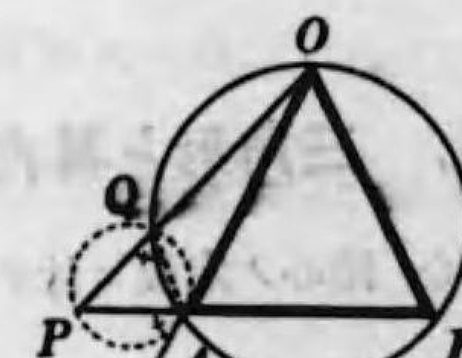
(14, 廣師; 廣工; 高松商; 13, 三重農)

**證** $A, Q$ ヲ結べ.


$P$ ガ邊 $AB$ 上ニアルトキハ,

$\angle Q = \angle B = \angle OAB$

故ニ, $\triangle AQP$ ノ外接圓ヲ畫ケバ, $OA$ ハ其圓ノ切線ナリ. [87 頁ノ (13)]



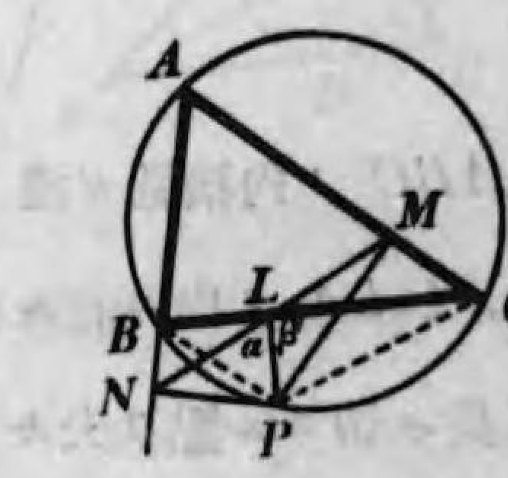

$\therefore \ OP.OQ = OA^2 = $ 一定

[$\because \ OA = $ 一定]

$P$ ガ $AB$ ノ延長上ニ在ル場合モ, 同樣ニ證スルコトヲ得.

**6.** $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ周上ノ一點 $P$ ヨリ三邊 $BC, CA, AB$ (或ハ其延長) ヘ引ケル垂線ノ足ヲ夫々 $L, M, N$ トスレバ, $L, M, N$ ハ同一直線上ニ在リ. (7, 盛農)

**證** $L, M; L, N$ ヲ結ビ付ケヨ.




$\angle PLB = \angle R = \angle PNB$

故ニ, $PB$ ヲ直徑トスル圓ハ $L, N$ ヲ通ル.

故ニ, $P, B$ ヲ結ビ付クレバ,

$\alpha = \angle PBN$

又 $P, C$ ヲ結ビ付クレバ,

$\angle PBN = \angle PCA$ [$\because$ $ABPC$ ハ圓ノ內接四邊形]

然ルニ,　$\angle PLC = \angle R = \angle PMC$

$\therefore$　$\angle PCM + \beta = 2\angle R$ [$\because$ $P, C, M, L$ ハ共圓點]

$\therefore$　$\alpha + \beta = 2\angle R$

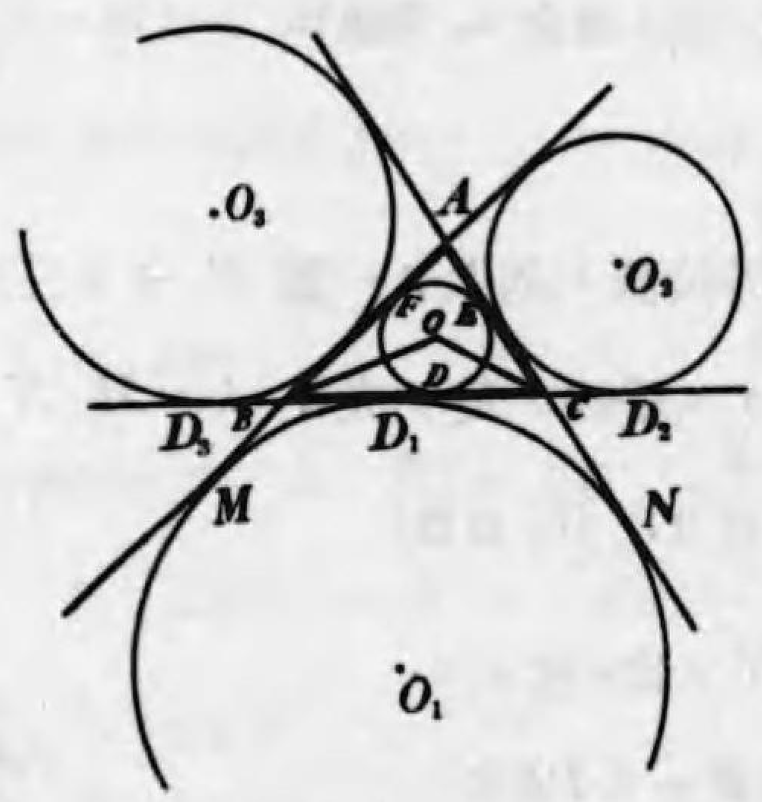
故ニ, $L, M, N$ ハ一直線上ニ在リ.

**注意一**　第三篇 (288 頁) ニ別解ガアル.

**注意二**　本問題ヲ「シムソン」ノ定理トイヒ, 直線 $LMN$ ヲ $P$ ニ關スル $\triangle ABC$ ノ「シムソン線」又ハ「垂足線」トイフ.

## 71. 三角形ト其內接圓及ビ傍接圓

[內心, 傍心ノ定義ニ付テハ 40 頁, §30 ノ (1), (2) ヲ見ヨ]




$\triangle ABC$ ノ內接圓ガ邊 $BC, CA, AB$ ニ切スル點ヲ夫々 $D, E, F$ トシ, 又 $\angle A$ ノ內ニ在ル傍接圓ガ邊 $BC$ ニ切スル點ヲ $D_1$, $AB, AC$ ノ延長ニ切スル點ヲ夫々 $M, N$; $\angle B$, $\angle C$ ノ內ニ在ル傍接圓ガ邊 $BC$ ノ延長ニ切スル點ヲ夫々 $D_2, D_3$ トシ,



且ツ　$BC = a,\ CA = b,\ AB = c$

$a + b + c = 2s$ トスレバ,

(1)　$AE = AF = s - a$

$\because$ $AE = AF,\ BF = BD,\ CD = CE$ ナレバ,

$AE + BD + CD = s$ 卽チ $AE + a = s$ ナレバナリ.

(2)　$AM = AN = s$　　(12, 三重農)

$\because$ $BD_1 = BM,\ CD_1 = CN$　$\therefore$ $AB + BM + AC + CN = 2s$

卽チ $AM + AN = 2s$ ナレバナリ.

(3)　$BD_1 = BM = s - c,\qquad CD_1 = CN = s - b$

$\because$ $BM = AM - AB,\ CN = AN - AC$ ナレバナリ.

(4)　$BD_3 = CD_2 = s - a$

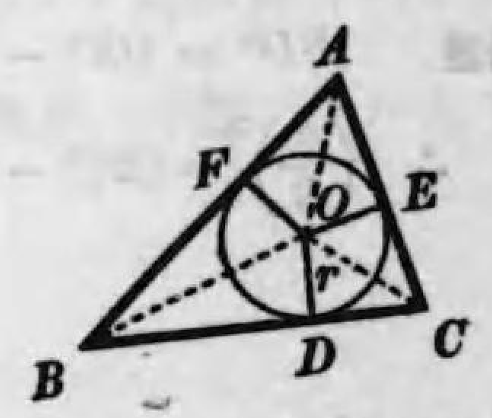
$\because$ $BD_3 = CD_3 - CB,\ CD_2 = BD_2 - BC$ ナレバナリ.

(5)　$\triangle ABC$ ノ面積ヲ $S$, 內接圓ノ半徑ヲ $r$ トスレバ,

$$r = \frac{S}{s}$$

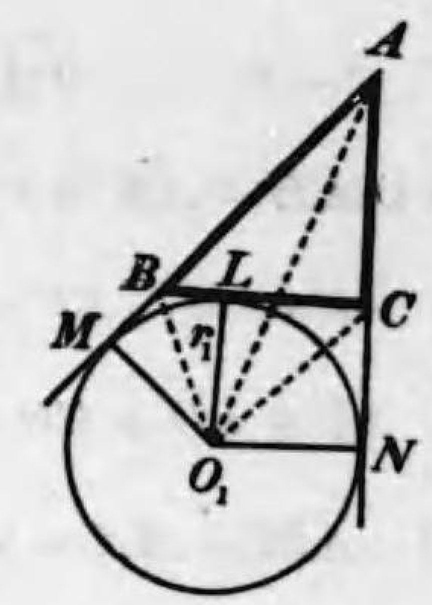
**略證**

$$\triangle OBC = \frac{1}{2}ar$$
$$\triangle OCA = \frac{1}{2}br$$
$$\triangle OAB = \frac{1}{2}cr$$
$$\therefore\ S = \frac{1}{2}(a + b + c)r = sr$$
$$\therefore\ r = \frac{S}{s}$$




(6)　$\triangle ABC$ ノ面積ヲ $S$, $\angle A$ 內ノ傍接圓ノ半徑ヲ $r_1$ トスレバ,

$$r_1 = \frac{S}{s - a}$$




**略證**　$\triangle O_1AC = \frac{1}{2}br_1$　(1)

$\triangle O_1AB = \frac{1}{2}cr_1$　(2)

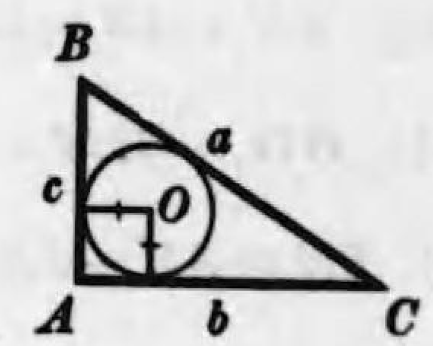
$\triangle O_1BC = \frac{1}{2}ar_1$　(3)

(1) + (2) − (3) ヨリ,

$$S = \frac{1}{2}(b + c - a)r_1 = (s - a)r_1$$

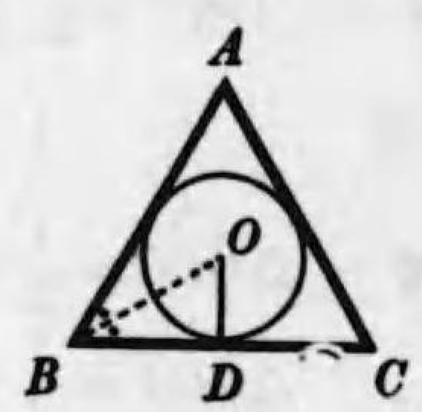
$$\therefore \quad r_1 = \frac{S}{s - a}$$

(7) 斜邊ガ $a$, 他ノ二邊ガ $b$, $c$ ナル直角三角形ノ內接圓ノ半徑ヲ $r$ トスレバ,




$$r = \frac{1}{2}(b + c - a)$$　(15, 岐農)

(8) 一邊 $a$ ナル正三角形ノ內接圓ノ半徑ヲ $r$ トスレバ,




$$a = 2\sqrt{3}r$$

**略證**　$BD^2 = OB^2 - OD^2$

$$\therefore \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$$

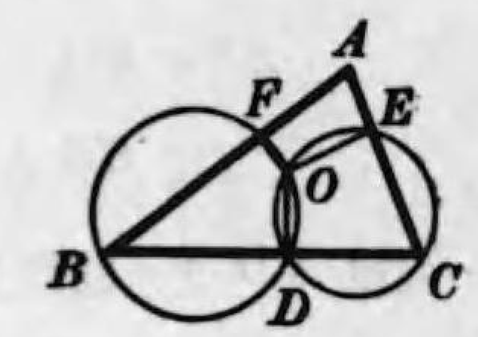
## 72. 他の注意すべき問題

(三角形ト其外接圓, 內接圓, 傍接圓以外ノ圓トニ關スル問題)

**1.** $\triangle ABC$ ノ邊 $BC$, $CA$, $AB$ 上ニ夫々任意ノ點 $D$, $E$, $F$ ヲ取レバ, 圓 $AEF$, 圓 $BFD$, 圓 $CDE$ ハ同一ノ點ヲ通ル.



**證**　圓 $BFD$, 圓 $CDE$ ガ $D$ ノ外, 更ニ $\triangle ABC$ 內ノ一點 $O$ ニ於テ出會フトシ, $O$ ト $D$, $E$, $F$ ノ各〻ヲ結ビ付クレバ,




(1)　$\angle B + \angle FOD = 2\angle R$

(2)　$\angle C + \angle DOE = 2\angle R$

然ルニ,

(3)　$\angle A + \angle B + \angle C = 2\angle R$

(4)　$\angle EOF + \angle FOD + \angle DOE = 4\angle R$

此 (3), (4) ヲ加ヘ合ハセ, (1), (2) ヲ加ヘ合ハセタモノヲ引ケバ,

$$\angle A + \angle EOF = 2\angle R$$

故ニ, 四邊形 $AEOF$ ニ外接圓ヲ畫クコトヲ得,

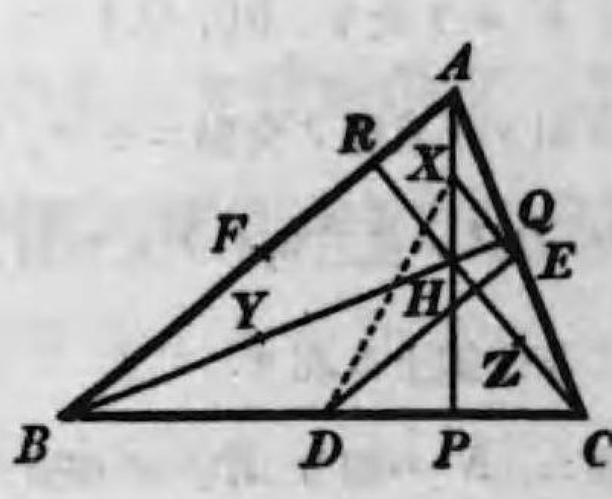
卽チ $\triangle AEF$ ノ外接圓モ亦 $O$ ヲ通ル.

**注意**　$D$, $E$, $F$ ハ之ヲ邊ノ延長上ニ取ルモ, 本問ハ成立ツ.

**2.** 一ツノ三角形ノ各邊ノ中點ト, 各頂點ヨリ其對邊ニ引ケル垂線ノ足ト, 各〻ノ頂點ト垂心トヲ兩端トスル線分ノ中點, ナル九ツノ點ハ同一ノ圓周上ニ在リ.

(其圓ヲ其三角形ノ九點圓トイフ)

**證**　$\triangle ABC$ ノ邊 $BC$, $CA$, $AB$ ノ中點ヲ夫々 $D$, $E$, $F$; $A$, $B$, $C$ ヨリ其對邊ニ引ケル垂線ノ足ヲ夫々 $P$, $Q$, $R$ トシ, 又垂心ヲ $H$ トシ,



$AH$, $BH$, $CH$ ノ中點ヲ夫々 $X$, $Y$, $Z$ トセヨ.

サテ, $AX=XH$, $AE=EC$ $\therefore$ $EX \parallel CR$

又 $AE=EC$, $BD=DC$ $\therefore$ $ED \parallel AB$

然ルニ, $CR \perp AB$ $\therefore$ $EX \perp ED$

卽チ, $E$ ハ直徑 $XD$ ナル圓周上ニ在リ.

同樣ニ, $F$ モ直徑 $XD$ ナル圓周上ニ在リ,

卽チ, $X$ ハ圓 $DEF$ ノ周上ニ在リ.

同樣ニ, $Y$, $Z$ モ亦圓 $DEF$ ノ周上ニ在リ.

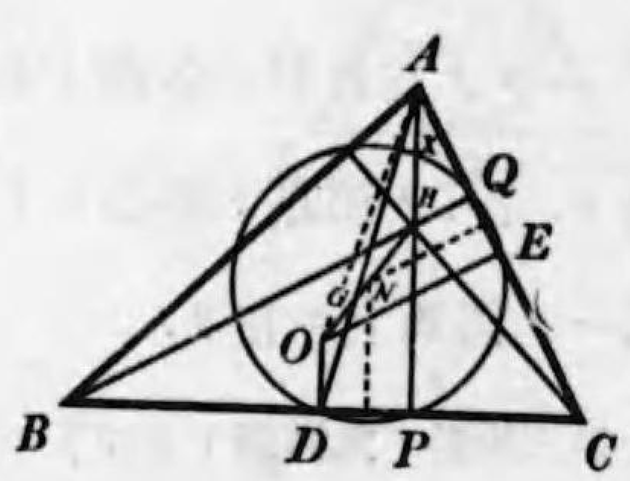
次ニ, $\angle XPD=\angle R$ ナルヲ以テ, $P$ ハ直徑 $XD$ ナル圓, 卽チ圓 $DEF$ ノ周上ニ在リ.

同樣ニ, $Q$, $R$ モ亦圓 $DEF$ ノ周上ニ在リ.

卽チ, 九ツノ點 $D$, $E$, $F$; $P$, $Q$, $R$; $X$, $Y$, $Z$ ハ同一ノ圓周上ニ在リ.

**3.** 一ツノ三角形ノ外心, 垂心, 重心及ビ九點圓ノ中心ハ同一直線上ニ在リ.

**證** $\triangle ABC$ ノ邊 $BC$, $CA$ ノ中點ヲ夫々 $D$, $E$ トシ, 又 $A$, $B$ ヨリ其對邊ニ引ケル垂線ノ足ヲ夫々 $P$, $Q$ トスレバ, 外心 $O$ ハ $D$, $E$ ヨリ夫々 $BC$, $CA$ ニ




垂直ニ引ケル直線ノ交點ニシテ, 垂心 $H$ ハ $AP$, $BQ$ ノ交點ナリ.

サテ $DP$ ハ此三角形ノ九點圓ノ弦ナルヲ以テ, 其中心 $N$ ハ線分 $DP$ ノ垂直二等分線上ニ在リ.

同樣ニ, $N$ ハ線分 $EQ$ ノ垂直二等分線上ニ在リ.



然ルニ, $DP$, $EQ$ ノ垂直二等分線ハ何レモ $OH$ ノ中點ヲ通ルヲ以テ, $N$ ハ卽チ $OH$ ノ中點ナリ.

卽チ, 外心, 垂心, 九點圓ノ中心ハ一直線上ニ在リ.

次ニ, $A$, $D$ ヲ結ビ付ケ, 其中線 $AD$ ト $OH$ トノ交點ヲ $G$ トスレバ,

$$\triangle ODG \backsim \triangle HAG$$

然ルニ, $\dfrac{OD}{AH}=\dfrac{1}{2}$ [101 頁ノ 3] $\therefore$ $\dfrac{DG}{AG}=\dfrac{1}{2}$

卽チ $G$ ハ $\triangle ABC$ ノ重心ナリ.

故ニ, 一ツノ三角形ノ外心, 垂心, 九點圓ノ中心及ビ重心ハ一直線上ニ在リ.

**4.** 一ツノ三角形ノ外接圓ノ半徑ハ, 其三角形ノ九點圓ノ半徑ノ2倍ニ等シ.

**證** 前問ノ證ニ於テ, $AH$ ト九點圓トノ交點 $X$ ト $N$ トヲ結ビ付ケ, (畫キ入レテ見ヨ) 又 $A$, $O$ ヲ結ビ付クレバ,

$$HX=XA, \quad HN=NO, \quad \therefore 2.NX=OA$$

然ルニ, $NX$ ハ九點圓ノ半徑, $OA$ ハ外接圓ノ半徑ナルヲ以テ, $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ半徑ハ $\triangle ABC$ ノ九點圓ノ半徑ノ二倍ニ等シ.

## 73. 作圖題

(1) 三角形ノ外接圓ヲ畫クコト.

(2) 三角形ノ内接圓及ビ傍接圓ヲ畫クコト.

(3) 圓ノ内接正三角形ヲ畫クコト.

(4) 圓ノ外接正三角形ヲ畫クコト.

## 問　　題

**1.** 直角三角形ノ直角ヲ二等分スル直線ガ外接圓ト交ル點ヨリ斜邊ヘノ垂線ハ斜邊ノ半ニ等シキコトヲ證明セヨ．(12, 熊工)

**2.** 三角形 $ABC$ ノ任意ノ二頂點ト垂心 $H$ トヲ通過スル圓ト $ABC$ ノ外接圓トノ大小ノ關係如何．

**3.** 直角三角形ノ內接圓ノ直徑ト斜邊トノ和ハ他ノ二邊ノ和ニ等シキコトヲ證明セヨ．(13, 岐農)

**4.** 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ガ $a$, $b$ ナルトキ內接圓ノ半徑ヲ $a$, $b$ ニテ表ハセ．(10, 早高；鹿農；9, 商大豫)

**5.** $\triangle ABC$ ノ二頂點 $B$, $C$ 及ビ外心 $O$ ヲ通ル圓周ガ $AB$ 又ハ其延長ト交ル點ヲ $Q$ トシ，$Q$, $C$ ヲ結ブトキ $QA=QC$ ナルコトヲ證明セヨ．(14, 商大豫)

**6.** 半徑 $R$ ナル圓ニ內接スル正三角形 $ABC$ ノ一邊ノ長サ如何．(5, 海經)

**7.** 半徑 $r$ ナル圓ニ內接スル三角形 $ABC$ アリ，二邊 $AB$, $AC$ ノ長サガ夫々 $m$, $n$ ナルトキ，$A$ ヨリ對邊ニ引ケル垂線ノ長サヲ計算セヨ．(10, 長崎商)

**8.** $\triangle ABC$ ノ邊 $BC$ 或ハ其延長上ニ一點 $D$ ヲ取ルトキ，$\triangle ABD$, $\triangle ACD$ ノ外接圓ノ直徑ノ比ハ $AB:AC$ ニ等シ．

**9.** $AE$ ハ $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ內ニ在ル，其外接圓ノ弦，$D$ ハ $BC$ 上ノ一點ニシテ，$\angle BAD=\angle CAE$ ナルトキハ，$AB.AC=AD.AE$ ナリ．$AD$, $AE$ ガ双方トモ $\angle A$ 外ニ在ルトキモ成立ツ．



**10.** 三角形 $ABC$ ノ頂角 $A$ ノ二等分線ト底邊 $BC$ トノ交點ヲ $D$ トスレバ，$AD$ 上ノ正方形ハ $AB$, $AC$ ノ包ム矩形ト $BD$, $DC$ ノ包ム矩形トノ差ニ等シキコトヲ證セヨ．(13, 廣工；盛農)

**11.** 三角形ノ三邊ガソレゾレ 84, 65, 55 ナルトキ最大角ノ二等分線ノ長サヲ求ム．(14, 海機)

**12.** 定角 $AOB$ ト定點 $P$ トアリ，$P$ ヲ過ギリ定角ノ二邊ト夫夫 $A$ 及ビ $B$ ニ於テ交ル直線ヲ引キ，三角形 $OAB$ ノ周ヲ與ヘラレタル長サ $2l$ ニ等シカラシメヨ．(15, 高校；10, 明專)

**13.** 頂角 $a$, 其二等分線 $m$ 及ビ周 $p$ ヲ與ヘテ其三角形ヲ作レ．

(14, 明專)

---

### 問題略解

**1.** 二等分線ト外接圓トノ交點ハ斜邊ガ直徑ナル半圓周ノ中點デアル．

**2.** $\angle A$ ト $\angle BHC$ トハ互ニ補角ダカラ，$\triangle HBC$ ノ外接圓ト $\triangle ABC$ ノ外接圓トハ等シイ．[86 頁, §63 ノ (8) ヲ見ヨ]

**3.** 16 頁, §71 ノ (7) ヲ見ヨ．

**4.** 答 $\frac{1}{2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2})$

**5.** $\angle A$ ヲ鋭角トスルト，$\angle O=2\angle A$ ソシテ $Q$ ガ邊 $AB$ 上ニ在ルト，$\angle O=\angle BQC$, $\therefore \angle BQC=2\angle A$ $\therefore \angle A=\angle QCA$ 他ノ場合ノ證モ之ニ倣ヘ．[191 頁, §103 ノ問一參照]．

**6.** 98 頁, §68 ノ (5) ヲ見ヨ．

**7.** 答 $\frac{mn}{2r}$ [同ヒノ (4) ヲ見ヨ]

**8.** $A$ カラ $BC$ ニ垂線 $AM$ ヲ引イテ，98 頁ノ (4) ニ依レ．又ハ圓 $ABD$, $ACD$ ノ直徑 $AE$, $AF$ ヲ引キ，$\triangle ABE \backsim \triangle ACF$ ヲ證シテモ可イ．

**9.** $B$, $E$ ヲ結ビ付ケ，97 頁, §68 ノ (3) ノ證ニ倣ヘ．

10. 97 頁, §68 ノ (3) カラ,
$AB.AC = AD(AD + DE) =$
$AD^2 + AD.DE = AD^2 + BD.DC$
ソコデ移項スルト出テ來ル.

11. 答 $\frac{1}{2}\sqrt{7293}$ 98 頁, §69 ノ第一ノ例ニ倣ヘ.

12. **作圖** $OA, OB$ 上ニ $l$ ニ等シク $OM, ON$ ヲ取リ, $M, N$ カラ夫々 $OM, ON$ ニ垂線ヲ引イテ, $C$ デ交ラセ, 中心 $C$, 半徑 $CM$ ノ圓ヲ畫イテ, ソシテ $P$ カラ線分 $OM, ON$ ニ交ル所ノ其圓ノ切線ヲ引クト,ソレト $OM$, $ON$ トノ交リガ夫々 $A, B$ デアル. 證, 吟味ハ讀者ニ任セル. [105 頁, §71 ノ (2) ヲ見ヨ]

13. **作圖** $\angle AOB$ ヲ $\alpha$ ニ等シク作リ, 前問ト同様ニ圓 $C$ ヲ畫キ, 次ニ $\angle AOB$ ノ二等分線ヲ引キ其上ニ $AD = m$ ナル様ニ $D$ ヲ取リ $D$ カラ圓 $C$ ニ切線ヲ引イテ $AM, AN$ トノ交點ヲ $B, C$ トスルト, $\triangle OAB$ ガ求メル三角形デアル. 證, 吟味(解ハ一般ニ一ツ)ハ讀者ニ任セル.

## 第八　圓ト多角形

### 74. 圓と四邊形

(1) 圓ノ內接四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ナリ.

(10, 金工; 5, 陸士)

此逆モ眞ナリ. (9, 東女)

(2) 圓ノ內接四邊形ノ外角ハ其內對角ニ等シ.

此逆モ眞ナリ.

(3) 圓ニ內接シ得ル平行四邊形ハ矩形ナリ.

(4) 圓ノ內接四邊形ノ相對スル邊ノ各ヽト,二ツノ對角線トノナス,二ツノ三角形ハ相似ナリ.

例ヘバ, 次ノ圖ニ於テ $AC, BD$ ノ交點ヲ $O$ トスレバ(圖ニハ書イテナイ),

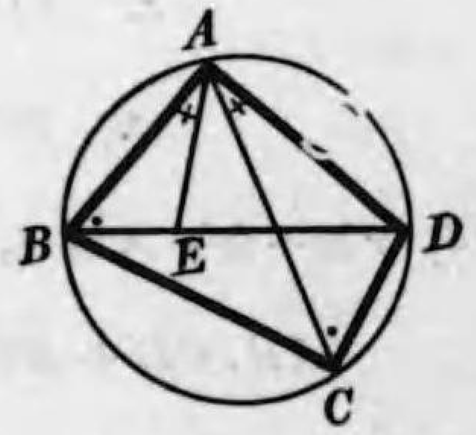
$\triangle OAB \backsim \triangle OCD$,　$\triangle OBC \backsim \triangle OAD$ (何故カ)



(5) 圓ノ內接四邊形ノ二組ノ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ハ,二ツノ對角線ノ包ム矩形ニ等シ.

(13, 廣師; 10, 上蠶; 8, 桐工)

**略證** 右ノ圖ノ $\angle BAE$ ハ $\angle CAD$ ニ等シク取リタル角ナリ. 然ルトキハ,




$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$ (何故カ)

$\therefore\ AB : BE = AC : CD$

$\therefore\ AB.CD = AC.BE$　(1)

又　$\triangle ABC \backsim \triangle AED$ (何故カ)

$\therefore\ BC.AD = AC.ED$　(2)

(1), (2) ヲ加ヘ合ハスレバ,

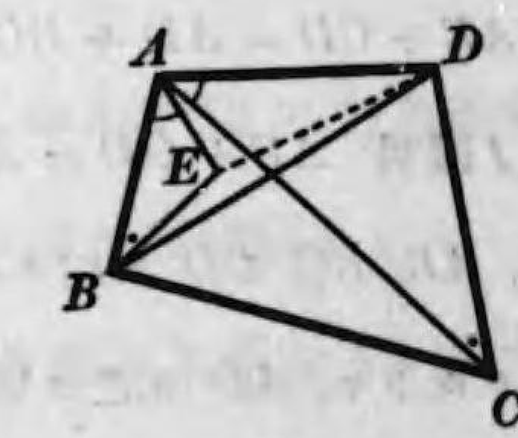
$AB.CD + BC.AD = AC.BD$　ヲ得

(6) 圓ニ內接シ得ザル四邊形ノ二ツノ對角線ノ包ム矩形ハ,二組ノ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ヨリ小ナリ. (8, 秋鑛)

例ヘバ, $ABCD$ ヲ圓ニ內接シ得ザル四邊形トスレバ,

$AB.CD + BC.AD > AC.BD$

**證** $ABCD$ ハ圓ニ內接シ得ザルユエ, $\angle ABD \neq \angle ACD$ ナリ.




ソコデ, $\angle ABD > \angle ACD$ トシテ $\angle ACD$ ニ等シキ $\angle ABE$ ヲ $\angle ABC$ ノ內ニ作レバ, $BE$ ハ $BD$ ニ重ナラズ

更ニ $\angle CAD$ ニ等シキ $\angle BAE$ ヲ $\angle BAD$ ノ內ニ作レバ,

$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$　(1)

$$\therefore\ AB : BE = AC : CD$$

$$\therefore\ AB.CD = AC.BE \qquad (2)$$

又 $\angle EAD = \angle BAC$, 且ツ $AB : AC = AE : AD$ [(1) ニヨル]

$$\therefore\ \triangle AED \backsim \triangle ABC$$

$$\therefore\ AD : ED = AC : BC$$

$$\therefore\ BC.AD = AC.ED \qquad (3)$$

(2), (3) ヲ加ヘ合ハスレバ,

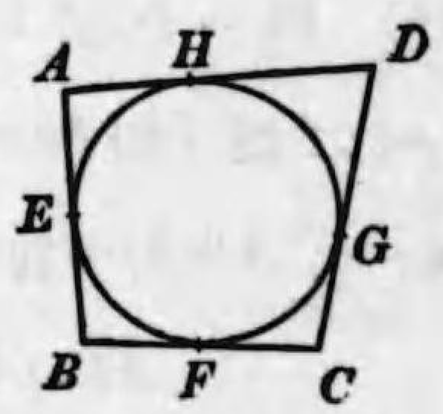
$$AB.CD + BC.AD = AC(BE + ED)$$

$$\therefore\ AB.CD + BC.AD > AC.BD \qquad (\because\ BD < BE + ED)$$

(7) 圓ノ外接四邊形ノ相對スル邊ノ和ハ相等シ.

此逆モ眞ナリ. (14, 海機; 6, 高校)

**略證** 右ノ圖ニ於テ,




$$AE = AH$$

$$BE = BF$$

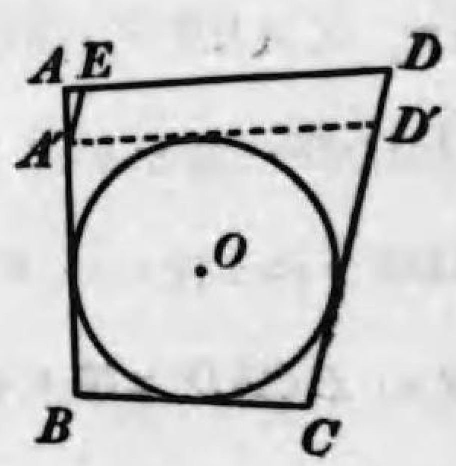
$$\therefore\ AB = AH + BF$$

同樣ニ, $CD = DH + CF$

$$\therefore\ AB + CD = AD + BC$$

**逆ノ證明** $AB + CD = AD + BC \qquad (1)$

トシ, $AB$, $BC$, $CD$ ニ切スル圓 $O$ ヲ畫キタルトキ, $AD$ ガ之ニ切セザレバ, $AD$ ニ平行ニシテ, 之ニ切シ四邊形 $A'BCD'$ ヲナス直線ヲ引キ, $AB$, $DC$ ト夫々 $A'$, $D'$ ニ於テ出會ハシムレバ,






$$A'B + CD' = BC + A'D' \qquad (2)$$

(1) ヨリ (2) ヲ引ケバ,

$$AA' + DD' = AD - A'D' \qquad (3)$$

更ニ $A'$ ヨリ $DD'$ ニ平行ナル直線ヲ引キ, $AD$ ト $E$ ニ於テ出會ハシムレバ, $DD' = EA'$, $A'D' = ED$ ナルユエ (3) ハ,

$$AA' + A'E = AE \qquad (4)$$

トナル. コレ明カニ不合理ナリ. 故ニ (2) ハ成立タズ.

卽チ, $AD$ ハ圓 $O$ ニ切ス.

(8) 圓ニ外接シ得ル平行四邊形ハ菱形ナリ.

## 問題

**1.** $\triangle ABC$ ノ頂點 $B$, $C$ 及ビ內心 $O$ ト邊 $BC$ ニ切スル傍接圓ノ中心ヲ通リ一ツノ圓ヲ畫クヲ得.

**2.** 平行四邊形 $ABCD$ ノ二頂點 $A$, $B$ ヲ通ル任意ノ圓ガ $BC$, $AD$ 若クハソレ等ノ延長ト夫々 $E$, $F$ ニ於テ交ルトキハ, $C$, $D$, $E$, $F$ ハ同一ノ圓周上ニ在リ.

**3.** 四邊形ノ二双ノ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ガ, 對角線ノ包ム矩形ニ等シケレバ, 其四邊形ハ圓ニ內接シ得ル四邊形ナリ.

**4.** 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ノ交點ヨリ相對スル邊ヘ引ケル垂線ノ比ハ其二邊ノ比ニ等シ. (11, 東師)

**5.** 多角形ノ各角ノ二等分線ガ皆同一ノ點ヲ通レバ, 其多角形ニ內接圓ヲ畫クコトヲ得.

**問題略解**

1. 邊 $BC$ ニ切スル傍接圓ノ中心ヲ $O_1$ トスルト, $\angle OBO_1$, $\angle OCO_1$ ハ何レモ直角デアル. (何故カ)

2. $E$, $F$ ヲ結べ, $E$ ガ邊 $BC$ 上ニ, $F$ ガ邊 $AD$ ノ上ニ在ル場合ニハ, $\angle FEB = \angle D$ (何レモ $\angle A$ ノ補角)

3. 113 頁, §74 ノ (6) カラ出セ [本問ハ同節 (5) ノ逆]

4. 112 頁, §74 ノ (4) ト 33 頁, §27, (6) ノ ($a$) ニ依レ.

5. 總テノ角ノ二等分線ノ交點カラ相隣レル二邊ニ引イタ垂線ガ等長ナルコトヲ證セヨ.

## 75. 圓と正多角形

(1) 圓周ヲ若干等分シ,其分點ヲ順次ニ結ビ付クレバ,其成ス所ノ多角形ハ其圓ノ内接正多角形ナリ.

(2) 圓周ヲ若干等分シ,各分點ニ引ケル次々ノ切線ガ交ッテ成ス所ノ多角形ハ,其圓ノ外接正多角形ナリ.

(3) 正多角形ニハ.内接圓及ビ外接圓ヲ畫クコトヲ得.

**注意** 正多角形ノ内接圓及ビ外接圓ノ中心ハ一致ス. 其點ヲ**正多角形ノ中心**トイフ.

(4) 正多角形ノ面積ハ,其周ト内接圓ノ半徑トノ積ノ半ニ等シ.

即チ一邊 $a$ ナル正多角形ノ内接圓ノ半徑ヲ $r$, 其面積ヲ $S$ トスレバ,

$$S = \frac{n}{2} ar$$

(5) 邊數ノ同ジ正多角形ノ周ノ比ハ,其内接圓(又ハ外接圓)ノ半徑ノ比ニ等シ.



(6) 邊數ノ同ジ正多角形ノ面積ノ比ハ,其内接圓(又ハ外接圓)ノ半徑ノ平方ノ比ニ等シ.

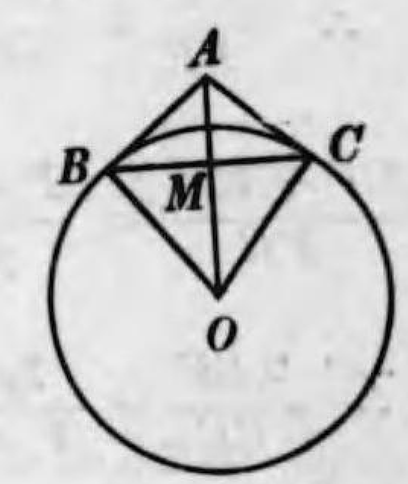
(7) 正方形ノ一邊ハ,其外接圓ノ半徑ノ $\sqrt{2}$ 倍ニ等シ.

(8) 正六邊形ノ一邊ハ,其外接圓ノ半徑ニ等シ.

(9) 半徑 $r$ ナル圓ニ内接スル正 $n$ 邊形ノ一邊ノ長サヲ $a$, 外接スル正 $n$ 邊形ノ一邊ノ長サヲ $a'$ トスレバ,

$$a' = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}, \qquad a = \frac{a'r}{\sqrt{r^2 + \frac{a'^2}{4}}}$$

**略證** $OB = OC = r$




$$AB = \frac{a'}{2}, \quad BM = CM = \frac{a}{2}$$

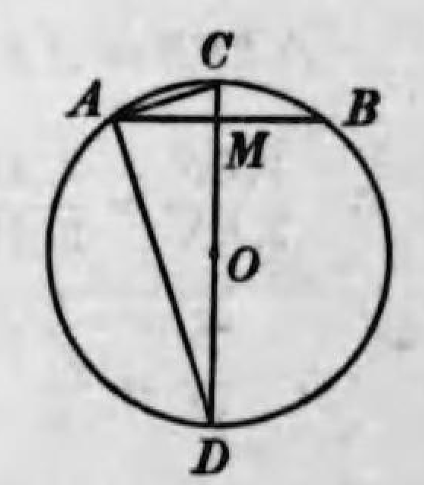
トスレバ,

$\triangle ABO \backsim \triangle BMO$ ヨリ出ヅ.

(10) 半徑 $r$ ナル圓ノ内接正 $n$ 邊形ノ一邊ノ長サヲ $a_n$ トシ,同ジ圓ノ内接正 $2n$ 邊形ノ一邊ノ長サヲ $a_{2n}$ トスレバ,

$a_{2n} = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - a_n^2})}$ ナリ. (15, 京藝)

**略證** 右ノ圖ニ於テ,




$AB = a_n$, $AC = a_{2n}$ トシ,

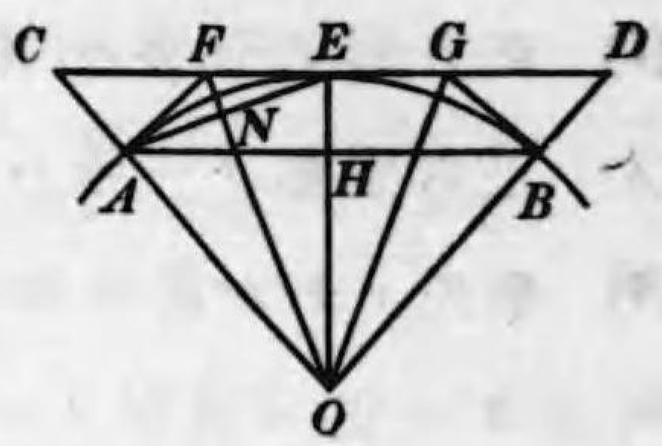
$CD$ ヲ $AB$ ニ垂直ナル直徑トスレバ,

$AC^2 = CM.CD$ ヨリ出ヅ.

(11) 一ツノ圓ノ内接正 $n$ 邊形ノ周ヲ $p$, 外接正 $n$ 邊形ノ周ヲ $P$ トシ,又同ジ圓ノ内接正 $2n$ 邊形ノ周ヲ $p'$, 外接正 $2n$ 邊形ノ周ヲ $P'$ トスレバ,

$$P' = \frac{2pP}{P+p}, \qquad p'^2 = pP'$$

**略證** 右ノ圖デ, $AB$, $CD$ ハ平行ニシテ, 夫々圓 $O$ ノ内接及ビ外接正 $n$ 邊形ノ一邊トシ, $AF$, $BG$ ヲ $A$, $B$ ニ於ケル切線トスレバ, $FG$ ハ外接正 $2n$ 邊形ノ一邊ナリ.




$O$, $F$ ヲ結ビ付クレバ, $OF$ ハ $\angle COE$ ヲ二等分ス.

$$\therefore \quad \frac{CF}{FE} = \frac{OC}{OE} = \frac{P}{p} \quad \text{(何故カ)}$$

$$\therefore \quad \frac{CF+FE}{FE} = \frac{P+p}{p} \qquad \therefore \quad \frac{CE}{EF} = \frac{P+p}{p}$$

$$\therefore \quad \frac{2.EF}{CE} = \frac{2p}{P+p} \qquad \therefore \quad \frac{2n.FG}{2n.\frac{CD}{2}} = \frac{2p}{P+p}$$

$$\therefore \quad \frac{P'}{P} = \frac{2p}{P+p} \qquad \therefore \quad P' = \frac{2Pp}{P+p}$$

更ニ, $A$, $E$ ヲ結ビ付ケ, $OF$ トノ交點ヲ $N$ トスレバ,

$$\triangle EFN \backsim \triangle AEH$$

$$\therefore \quad \frac{2.EF}{2.EN} = \frac{2.AE}{2.AH} \qquad \therefore \quad \frac{2n.FG}{2n.AE} = \frac{n.2.AE}{n.AB}$$

$$\therefore \quad \frac{P'}{p'} = \frac{p'}{p} \qquad \therefore \quad p'^2 = pP'$$

**注意** 例ヘバ圓ノ内接正方形ト外接正方形ノ一邊(又ハ周)ヲ知ッテ, 同ジ圓ノ内接正八邊形ト外接正八邊形ノ一邊(又ハ周)ヲ計算スルニハ, (9), (10) 又ハ (11) ノ公式ヲ記憶シテヤルヨリモ, 其ヤリ

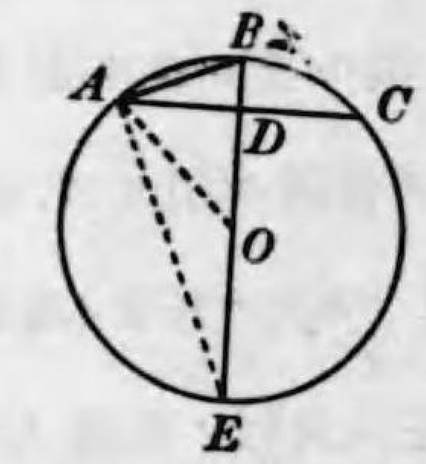


方ニ倣フカ, 又ハ適宜ノ方法デ, 次ノ例ノ樣ニ直接ニヤル方ガ可イ.

此 (9), (10), (11) ハ主トシテ圓周率ノ計算ニ用ヒル定理デアル.

**例** 直徑 1 尺ナル圓ニ内接スル正八邊形ノ周圍ノ長サ及面積ヲ求メヨ. (15, 京藝)

**解** 圓 $O$ ノ直徑ヲ 1 尺, 其内接正方形ノ一邊ヲ $AC$, $\overset{\frown}{AC}$ ノ中點ヲ $B$ トセバ, 弦 $AB$ ハ内接正八邊形ノ一邊ナリ.




サテ, $B$ ヲ通ル直徑 $BE$ ヲ引キ, $AC$ トノ交點ヲ $D$ トシ, $A$, $E$ ヲ結ビ付クレバ,

(1) $$AB^2 = BD.BE \quad [\because \angle D = 90^\circ = \angle BAE]$$

又 $$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}} \qquad \left[\because \ 2.AD = AC = \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \quad BD = OB - OD$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

故ニ (1) ヨリ,

$$AB^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \times 1 \qquad \therefore \quad AB = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

故ニ求ムル周 $= 8.AB = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (尺)

求ムル面積 $= 8.\triangle OAB = 4.OB.AD$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(平方尺)}$$

## 問題

**1.** 半徑 $r$ ナル圓ニ內接スル正六邊形ノ面積ヲ求メヨ。

(11, 三重農; 10, 早高)

**2.** 與ヘラレタル正五邊形內ノ一點ヨリ各邊ニ下セル垂線ノ和ハ其點ノ位置ニ關セズ,一定ナルコトヲ證明セヨ。 (11, 阪醫)

**注意** 本問ハ任意ノ等邊凸多角形ニ付テ成立ツ。 (14, 阪工)

**3.** 正六角形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結付ケテ生ズル正六角形ト原ノ正六角形トノ面積ノ比ヲ求メヨ。 (13, 東師)

**4.** 等圓ニ內接スル正方形ト正八角形トノ周ノ比ヲ求メヨ。

(11, 明專)

**5.** 相等シキ周圍ヲ有スル正三角形ト正六邊形トノ外接圓ノ面積ノ比ヲ求メヨ。 (13, 明專)

**6.** 正方形ノ外接圓ノ半徑ト內接圓ノ半徑トノ差 2寸5分ナルコトヲ知リテ,一邊ノ長サヲ求メヨ。 但シ一分未滿四捨五入セヨ。

(10, 海諸校)

---

### 問題略解

**1.** 答 $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$. 求メル面積ハ一邊 $r$ ナル正三角形ノ面積 [53 頁, §37 ノ (6)] ノ 6 倍ニ等シイ.

**2.** 其點ヲ頂點トシ各邊ヲ底邊トスル五ツノ三角形ノ面積ノ和ヲバ其正五邊形ノ面積 [116 頁, §75 ノ (4)] ニ等シト置イテ出セ.

**3.** 答 4:3 初ノ正六邊形ノ一邊ヲ $a$, 後ノ正六邊形ノ一邊ヲ $b$ トシ, 二ツノ六邊形ノ頂點ヲ,共通ナ中心ニ結ビ付ケテ見ルト, $b$ ハ中心カラ初ノ



六邊形ノ一邊ニ引イタ垂線ニ等シイカラ, $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ニ等シイ. 故ニ, 二ツノ六邊形ノ面積ノ比ハ $a^2 : \frac{3}{4}a^2$ デアル.

**4.** 答 $1 : \sqrt{4-2\sqrt{2}}$ 圓ノ半徑ヲ $r$ トスルト, 內接正方形ノ一邊ハ $r\sqrt{2}$ ダシ, 正八邊形ノ一邊 $r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ デアル [119 頁, §75 ノ例ニ傚ヘ], 故ニ求メル比ハ $4\sqrt{2} : 8\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

**5.** 答 4:3 正六邊形ノ一邊ヲ $a$ トスルト, 其外接圓ノ半徑ハ $a$ デアル. 又ソレト等周ノ正三角形ノ一邊ハ $2a$ ダカラ, 其外接圓ノ半徑ハ $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ デアル [98 頁, §68 ノ (5)]. ソコデ 73 頁, §51 ノ (6) ニ依レ.

**6.** 答 1尺 2寸 1分弱. 正方形ノ一邊ノ長サヲ $a$ 分トスルト, 外接圓ノ半徑ハ $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 分, 內接圓ノ半徑ハ $\frac{a}{2}$ 分ダカラ, $\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2} = 25$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{2}-1}{2}a = 25$$

$$\therefore \quad a = 50(\sqrt{2}+1)$$

### 76. 作圖題

(1) 圓ノ內接正方形, 內接正八邊形,……內接正 $2^n$ 邊形ヲ畫クコト.

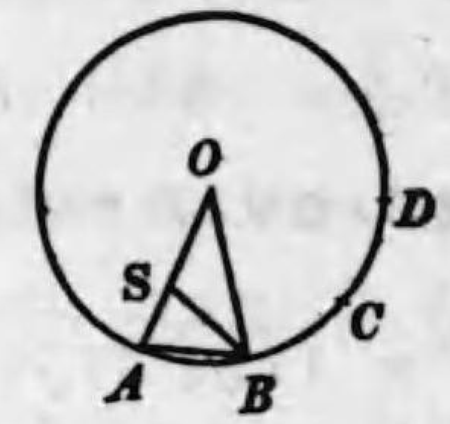
(2) 圓ノ外接正方形, 外接正八邊形,……外接正 $2^n$ 邊形ヲ畫クコト.

(3) 圓ノ內接正六邊形,內接正十二邊形,……內接正 $3\times2^n$ 邊形ヲ畫クコト.

(4) 圓ノ外接正六邊形,外接正十二邊形,……外接正 $3\times2^n$ 邊形ヲ畫クコト.

(5) 圓ノ內接正十邊形ヲ畫クコト.

**作圖** 圓 $O$ ノ半徑 $OA$ ヲ $S$ ニ於テ $OS^2 = OA.SA$ ナル樣ニ 卽チ中末比ニ內分シ, $OS$ ニ等シキ弦 $AB$ ヲ引キ, 劣弧 $AB$ ニ等シキ $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$,……ヲ圓周上ニ取リ, $B$, $C$, $D$,……ヲ順次ニ結ビ付クレバ $ABCD$……ハ圓 $O$ ノ內接正十邊形ナリ.




**證** $OS^2 = AB^2 = OA.SA$

$$\therefore \quad \frac{OA}{AB} = \frac{BA}{AS}$$

$$\therefore \quad \triangle OAB \backsim \triangle BAS$$

$\therefore$ $BA = BS$ $[\because\ OA = OB]$

$\therefore$ $SB = SO$ (何故カ)

$\therefore$ $\angle SBO = \angle O$

$\therefore$ $\angle A = \angle ASB = 2\angle O$

$\therefore$ $\angle O + 2\angle O + 2\angle O = 180^\circ$ $\therefore$ $\angle O = 36^\circ$

卽チ, $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$,……ノ上ニ立ツ中心角ハ四直角ノ $\frac{1}{10}$ ニ等シ,
故ニ $ABCD$…… ハ圓 $O$ ノ內接正十邊形ナリ.

**注意** 半徑 $r$ ナル圓ノ內接正十邊形ノ一邊ノ長サハ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$ ナリ. [22 頁, §21, (10) ノ注意ヲ見ヨ] (12, 神商)

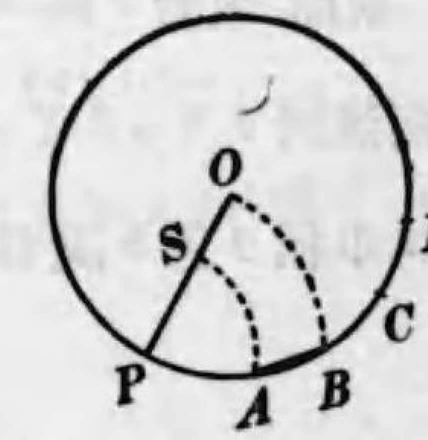
(6) 圓ノ內接正五邊形, 內接正二十邊形,……內接正 $5\times2^n$ 邊形ヲ畫クコト.

(7) 圓ノ外接正五邊形, 外接正十邊形, 外接正二十邊形,……外接正 $5\times2^n$ 邊形ヲ畫クコト.



(8) 圓ノ內接正十五邊形ヲ畫クコト.

**作圖** 圓 $O$ ノ一ツノ半徑ヲ $OP$ トシ, $PO$ ヲ $S$ ニ於テ $PS^2 = PO.SO$ ナル樣ニ內分シ, $P$ ヲ中心トシ, 半徑ガ夫々 $PS$, $PO$ ナル圓ヲ畫キ, $PO$ ノ同ジ側ニ於ケル, 其等ノ圓ト圓 $O$ トノ交點ヲ夫々 $A$, $B$ トシ, 劣弧 $AB$ ニ等シキ $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$,……ヲ圓周上ニ取リ, $A$, $B$, $C$, $D$,……ヲ順次ニ結ビ付クレバ, $ABCD$…… ハ圓 $O$ ノ內接正十五邊形ナリ.




**證** $\widehat{PB} =$ 圓周ノ $\frac{1}{6}$

$\widehat{PA} =$ 圓周ノ $\frac{1}{10}$

$$\therefore \quad \widehat{AB} = \text{圓周ノ} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) = \text{圓周ノ} \frac{1}{15}$$

卽チ, $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$,…… ハ何レモ圓周ノ $\frac{1}{15}$ ニ等シ,
故ニ, $ABCD$…… ハ圓 $O$ ノ內接正十五邊形ナリ.

# 第二篇　補習

**77.** 前篇,復習ノ時ニモ幾ラカノ補習ヲシタケレドモ,本篇デ,一通リ平面幾何ヲヤッテ了(シマ)ッタ者ガ知ッテ居ルト種々ナ場合ニ都合ガ可イト思フ事柄ヲ色々説明シヤウ.

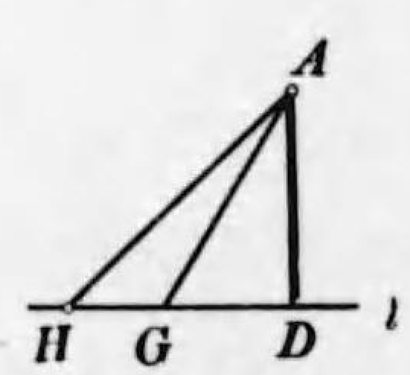
## 第一章　最大値及ビ最小値

### 78. 既知の諸定理

次ニ掲ゲル所ノ幾何學的ノ量ノ最大値及ビ最小値ニ關スル諸定理ハ復習ノ時,處々デ示シタモノヲ(文句ハ多少變ッテ居ルガ),集メタノデアル.

(1) 定直線 $l$ 外ノ定點 $A$ ヨリ其直線上ノ一點ニ至ル線分中,$A$ ヨリ $l$ ニ引ケル垂線 $AD$ ガ最小ナリ. [3頁,§4ノ(1)]

**注意** 此ノ場合ニ,$A$ ヨリ $l$ 上ノ一點ニ至ル最大ノ線分トイフモノハナイ.




ナゼナラバ,假リニ $A$ ヨリ $l$ ニ至ル最大ノ線分ガアルトシテ,ソレヲ $AG$ トスルト,$A$ カラ $DG$ ノ延長上ノ一點 $H$ ニ至ル線分 $AH$ ハ $AG$ ヨリモ大キイカラ [§4ノ(4)],最大ノ線分ヨリモ大キイ線分ガアルトイフコトニナルカラデアル.



(2) 直線 $XY$ ノ同ジ側ニ在ル二點 $A$, $B$ ヨリ,$XY$ 上ノ一點ニ至ル距離ノ和ハ,其二ツノ線分ガ $XY$ ト相等シキ角ヲナストキ,最小ナリ. [4頁,§5ノ1]

(3) 直線 $XY$ ノ反對ノ側ニ在ル二點 $A$, $B$ ヨリ,$XY$ 上ノ一點ニ至ル距離ノ差ハ,其二ツノ線分ノナス角ガ $XY$ デ二等分セラレルトキ,最大ナリ. [5頁,§5ノ2]

(4) 一ツノ線分ヲ一ツノ點ニテ内分シタルトキ,其二ツノ分ノ包ム矩形ハ,二ツノ分ガ相等シキトキ最大ナリ.
[13頁,§14ノ例一]

**系** 周ガ一定ナル矩形ノ面積ハ,其矩形ガ正方形ノトキ最大ナリ.

此系ハ68頁,§49ノ(4)ノ圖ニ依ッテ證明スルモ可ナリ. 卽チ周ガ一定ナル正方形ニアラザル任意ノ矩形ヲ $ABCD$ トスレバ,ソレト等周ノ正方形ハ $\frac{AE}{2}$ ヲ一邊トスル正方形ナリ. 然ルニ $\left(\frac{AE}{2}\right)^2 > DF^2 =$ 矩形 $ABCD$

故ニ,等周ナル矩形ノ面積ハ,其矩形ガ正方形ノトキ最大ナリ.

(5) 一ツノ線分ヲ一ツノ點ニテ内分シタルトキ,其二ツノ分ノ平方ノ和ハ,二ツノ分ガ相等シキトキ,最小ナリ.
[13頁,§14ノ例二]

(6) 直徑ハ圓ノ最大弦ナリ. [78頁,§58ノ(4)]

(7) 一定點ヨリ,其點ヲ中心トセザル一ツノ圓周上ノ一點ニ至ル線分中,中心ヲ通ルモノガ最大ニシテ,其延長ガ中心ヲ通ルモノガ最小ナリ. [78頁,§58ノ(5)]

(8) 圓内ノ定點ヲ通ル弦ハ,其點ヲ通ル直徑ニ垂直ナルトキ最小ナリ. [80頁,§60ノ(1)]

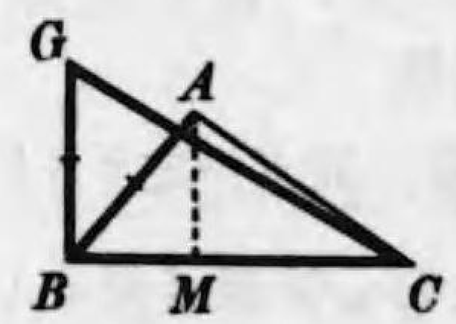
(9) 二ツノ圓ノ一ツノ交點ヲ通リ,兩端ガ兩圓周上ニアル線分中,中心線ニ平行ナルモノガ最大ナリ.

[91 頁ノ問 10]

## 79. 最大値及び最小値に關する定理の補習

**第一**　二邊ノ長サガ與ヘラレタル三角形ノ面積ハ,其夾角ガ直角ノトキ最大ナリ.

**證明**　$\triangle ABC$ チ二邊 $AB$, $BC$ ノ長サガ與ヘラレタル任意ノ三角形(但シ, $\angle ABC \neq \angle R$ トス), $\triangle GBC$ チ,




$$GB = AB, \qquad \angle GBC = \angle R$$

ナル三角形トセヨ.

$A$ ヨリ $BC$ ニ垂線 $AM$ チ引ケバ,

$$AM < AB, \quad \therefore \quad AM < GB$$

$$\therefore \ \triangle ABC < \triangle GBC$$

卽チ,其二邊ニテ直角チ夾ムモノガ最大ナリ.

**第二**　等積ナル矩形ノ周ハ,其矩形ガ正方形ノトキ最小ナリ.

例ヘバ, $A$ ハ正方形, $B$ ハ正方形ニアラザル矩形ニシテ, $A = B$ ナルトキハ, $A$ ノ周ハ $B$ ノ周ヨリ小ナリ.



**證明**　$B$ ト等周ノ正方形チ $C$ トスレバ,

$$C > B \qquad \text{[前節 (4) ノ系]}$$

$$\therefore \quad C > A$$

故ニ,　$C$ ノ周 $>$ $A$ ノ周

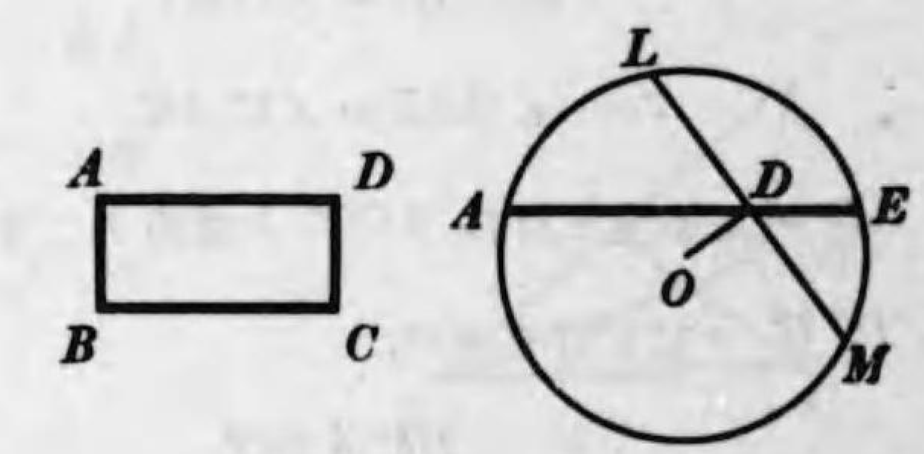
$\therefore$ $B$ ノ周 $>$ $A$ ノ周

卽チ面積ガ一定ナル矩形ノ周ハ,其矩形ガ正方形ノトキ最小ナリ.


**別法**　次ノ樣ニ證明シテモ可イ.

一定ノ面積チ有シ且ツ正方形ニアラザル一ツノ矩形チ $ABCD$ トセヨ.

$AD$ ノ延長上ニ $DC$ ニ等シク $DE$ チ取リ,(右ノ方ノ圖チ見ヨ) $A$, $E$ チ通ル任意ノ圓 $O$ チ畫キ, $O$, $D$ チ結ビ付ケ, $D$ チ通リ $OD$ ニ垂直ナル弦 $LM$ チ引ケバ,




$$LD.DM = AD.DE$$

$$\therefore \quad LD^2 = \text{矩形 } ABCD$$

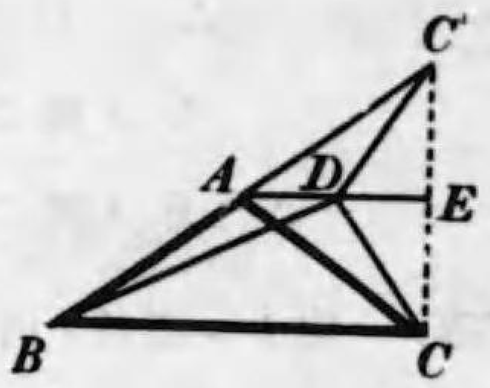
然ルニ,　$LM < AE$　[前節 (8)]

$$\therefore \quad 4.LD < \text{矩形 } ABCD \text{ ノ周}$$

**第三**　同ジ底邊ノ上ニ在ル等積三角形ノ周ハ,其三角形ガ二等邊ノトキ最小ナリ.

**證明**　$\triangle ABC$, $\triangle DBC$ ヲ $BC$ ヲ底邊トスル等積三角形トシ, $\triangle ABC$ ヲ二等邊, $\triangle DBC$ ヲ二等邊ニアラズトセヨ.

二ツノ三角形ヲ底邊 $BC$ ノ一方ニ在ラシメ, $A$, $D$ ヲ結ビ付クレバ,




$$\triangle ABC = \triangle DBC$$

ナルヲ以テ　$AD \parallel BC$

$BA$ ヲ延長シテ $AC$ ニ等シク $AC'$ ヲ取リ, $C$, $C'$ ヲ結ビ付クレバ, $\triangle ACC'$ ハ二等邊ナリ.

$CC'$ ト直線 $AD$ トノ交點ヲ $E$ トスレバ,

$$\angle CAE = \angle ACB \qquad (何故カ)$$

$$\angle C'AE = \angle ABC \qquad (何故カ)$$

$$\therefore \quad \angle CAE = \angle C'AE$$

即チ $AD$ ハ二等邊三角形 $ACC'$ ノ頂角ヲ二等分ス.

故ニ, $D$, $C'$ ヲ結ビ付クレバ,

$$DC = DC'$$

サテ, $\triangle DBC'$ ニ於テ,

$$BC' < DB + DC'$$

$$\therefore \quad AB + AC < DB + DC$$

$$\therefore \quad AB + AC + BC < DB + DC + BC$$

**注意**　$BA$ ヲ延長シテ, 之ニ等シク $AC'$ ヲ取ル代リニ, $AD$ ニ付テノ $C$ ノ對稱點 $C'$ ヲ取ッテ證明シテモ可イ. [4 頁, §5 ノ 1 ノ證參照]

**系一**　同ジ底邊ノ上ニ立ツ等積三角形ノ中, 周ノ最小ナルモノハ二等邊三角形ナリ. (本定理ノ逆)



何トナレバ, 二等邊ニアラザル三角形ノ周ハ同ジ底邊ノ上ニ在ル, ソレト等積ナル二等邊三角形ノ周ヨリ大ナレバナリ.

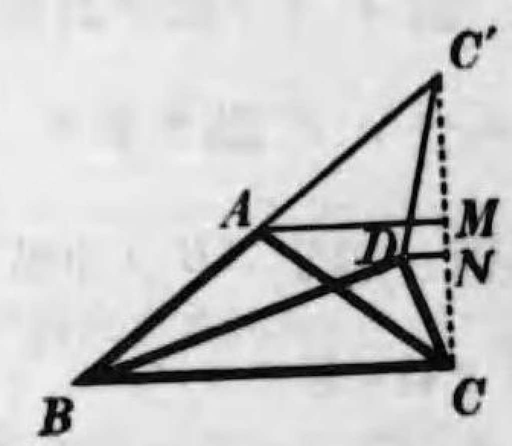
**系二**　同ジ底邊ノ上ニ在ル等積三角形ノ頂角ハ, 其三角形ガ二等邊ノトキ最大ナリ.

上ノ圖ニ於テ, $\triangle ABC$ ノ外接圓ヲ畫ケバ直ニ明カナリ.

**第四**　同ジ底邊ノ上ニ立ツ等周三角形ノ面積ハ, 其三角形ガ二等邊ノトキ最大ナリ.

**證明**　同ジ底邊 $BC$ ノ上ニ在ル, 二ツノ等周三角形ヲ $ABC$, $DBC$ トシ, $\triangle ABC$ ヲ二等邊, $\triangle DBC$ ヲ二等邊ニアラズトセヨ.

二ツノ三角形ヲ底邊 $BC$ ノ一方ニ在ラシメ, $BA$ ヲ延長シテ $AC$ ニ等シク $AC'$ ヲ取リ, $C$, $C'$; $D$, $C'$ ヲ結ビ付クレバ,




$$DB + DC' > BC'$$

然ルニ,　$$BC' = BA + AC = DB + DC$$

$$\therefore \quad DB + DC' > DB + DC$$

$$\therefore \quad DC' > DC$$

故ニ $D$ ヨリ $CC'$ ニ垂線 $DN$ ヲ引ケバ,

$$NC' > NC \qquad [3\ 頁, §4\ ノ\ (4)]$$

又 $A$ ヨリ $CC'$ ニ垂線 $AM$ ヲ引ケバ,

$$MC' = MC$$

$$\therefore \quad MC > NC$$

サテ, $MC$ ハ $\triangle ABC$ ノ $BC$ ニ對スル高サニ等シク, $NO$ ハ $\triangle DBC$ ノ $BC$ ニ對スル高サニ等シキヲ以テ,

$$\triangle ABC > \triangle DBC$$

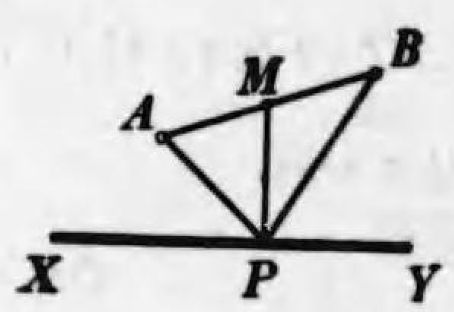
**系**　同ジ底邊ノ上ニ立ツ等周三角形ノ中, 面積ノ最大ナルモノハ, 二等邊ナリ. (上ノ第四ノ逆)

**注意**　上ノ定理第三ト第四トハ, 其中ノ一方ヲ直接ニ證明スレバ, 他ハ定理第二ノ本證ト同ジ論法デ證明スルコトガ出來ル.

## 80. 問題解法の例

**1.** 與ヘラレタル直線 $XY$ ノ同ジ傍ニアル二點 $A$, $B$ ト $XY$ 上ノ一點 $P$ トヲ結ブ直線 $AP$, $BP$ ノ上ノ正方形ノ和ヲシテ最小ナラシムベキ $P$ 點ヲ求ム. (14, 甕農)

**解析**　線分 $AB$ ノ中點ヲ $M$ トシ, $P$, $M$ ヲ結ビ付クレバ,




$$AP^2 + BP^2 = 2(AM^2 + PM^2)$$

然ルニ, $AM$ ハ一定ナルヲ以テ,

$AP^2 + BP^2$ ハ $PM$ ガ最小ナルトキ, 最小ナリ.

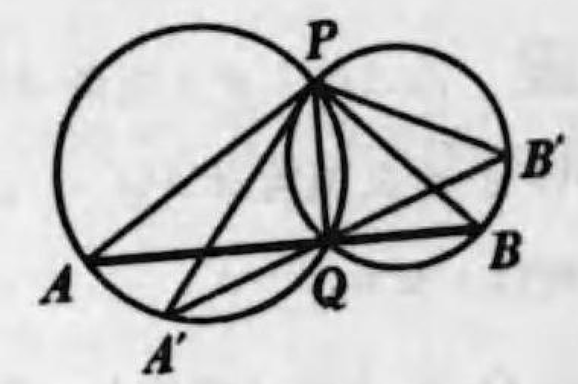
故ニ求ムル點ハ $M$ ヨリ $XY$ ニ引ケル垂線ノ足ナリ. [124 頁ノ (1)]

**作圖, 證明**ハ讀者ニ任カス.

**2.** 二圓ノ交點 $P$, $Q$ ノ $Q$ ヲ過リ二圓周ニ終ル直線 $AB$ ヲ引ケバ, 三角形 $PAB$ ハ $PQ$ ガ $AB$ ニ垂直ナル時ニ最大ナルコトヲ證セヨ. (7, 東農實)



**證**　$AB$ ヲ $PQ$ ニ垂直ナル線分, $A'B'$ ヲ $PQ$ ニ垂直ナラザル任意ノ線分トシ, (但シ, $A$, $A'$ ハ一ツノ圓周上ニ, $B$, $B'$ ハ他ノ圓周上ニ在ルモノトス), $P$ ト $A$, $A'$, $B$, $B'$ ノ各々ヲ結ビ付ケヨ.




$\triangle PAB$, $\triangle PA'B'$ ニ於テ,

$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B'$$

$$\therefore \triangle PAB \backsim \triangle PA'B' \qquad (1)$$

$$\therefore \frac{\triangle PAB}{\triangle PA'B'} = \frac{PA^2}{PA'^2}$$

然ルニ, $\angle PQA = \angle R$ ナルヲ以テ, $AP$ ハ圓 $PAQ$ ノ直徑ナリ.

$$\therefore PA > PA'$$

$$\therefore \triangle PAB > \triangle PA'B'$$

即チ, $AB$ ガ $PQ$ ニ垂直ナルトキ, $\triangle PAB$ ガ最大ナリ.

**別證**　上ノ證ノ (1)カラ後ノ部分ヲ, 次ノ樣ニヤッテモ可イ.

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle PA'B'} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \qquad (2)$$

サテ, 二ツノ圓ノ中心ヲ夫々 $O$, $O'$ トスレバ

$$OO' \perp PQ$$

又　$AB \perp PQ$　[假設]

$$\therefore OO' \parallel AB$$

$\therefore AB > A'B'$　[91 頁, 問 10]

故ニ, (2) ヨリ

$$\triangle PAB > \triangle PA'B'$$

即チ, $AB$ ガ $PQ$ ニ垂直ナルトキ, $\triangle PAB$ ガ最大ナリ.

**3.** 頂角ト高サトガ與ヘラレタル三角形ノ中，頂角ノ二邊相等シキモノガ最小ナル面積ヲ有ス．(7, 陸士)

**證**　$\triangle ABC$ ヲ其頂角 $BAC$ ト高サ $AD$ ガ一定ナル二等邊三角形トシ，$\triangle APQ$ ヲ其頂角 $PAQ$ ハ $\angle BAC$ ニ等シク，高サハ $AD$ ナル他ノ任意ノ三角形トセヨ．

今 $Q$ ガ $BC$ ノ延長上ニ在リトスレバ，$P$ ハ $BC$ 若クハ $BC$ ノ延長上ニ在リ，而シテ，


$$\angle QAP = \angle CAB$$

$$\therefore \angle QAC = \angle PAB$$

$$\therefore \frac{\triangle ABP}{\triangle ACQ} = \frac{AB.AP}{AC.AQ} = \frac{AP}{AQ}$$ [36 頁, §28 ノ (10)]

然ルニ，　$AP < AQ$　[3 頁, §4 ノ (4)]

$$\therefore \triangle ABP < \triangle ACQ$$

此兩邊ニ $\triangle APC$ ヲ加フルカ ($P$ ガ線分 $BC$ 上ニ在ル場合)，若クハ兩邊ヨリ $\triangle APC$ ヲ減ズレバ ($P$ ガ $BC$ ノ延長上ニ在ル場合)，

$$\triangle ABC < \triangle APQ$$

即チ　$\triangle ABC$ ガ最小ナリ．

## 問　題

**1.** 互ニ他ノ外ニアル二ツノ圓周上ニ兩端ヲ有スル最大線分及ビ最小線分ヲ引クコト．

**2.** 二ツノ對角線ノ長サガ一定ナル平行四邊形ノ面積ハ其四邊形ガ菱形ノトキ最大ナリ．



**3.** 定直線 $x$ 上ノ一點ヨリ，$x$ ト出合ハザル定圓 $O$ ヘ引ケル切線中，最モ大ナル角ヲ夾ムモノヲ求メヨ．

**4.** 底邊ト頂角トガ一定ナル三角形ノ面積ハ，其三角形ガ二等邊ナルトキ，最大ナリ．

**5.** 底邊ト頂角トガ一定ナル三角形ノ他ノ二邊ノ和ハ，其三角形ガ二等邊ナルトキ，最大ナリ．

**6.** 圓ニ內接スル矩形ノ中，最大面積ヲ有スルモノハ正方形ナリ．

(13, 宇農)

**7.** 與ヘラレタル圓周上ノ與ヘラレタル二點 $P$, $Q$ ヨリ此圓周上ノ一點ニ至ル二直線上ノ正方形ノ和ガ最大トナル點ヲ求メヨ．

(6, 高校)

**8.** 定マレル銳角 $XOY$ ノ內ニ在ル定點 $A$ ヲ一ツノ頂點トシ他ノ二ツノ頂點ハ一ツヅツ $OX$, $OY$ ノ上ニ在ル，周ノ最小ナル三角形ヲ求ムルコト．

**9.** $O$ ハ定圓，$A$ ハ $O$ ト異ナル定點ナリ，$A$ ヲ通ル直線ヲ引キ，圓 $O$ ノ周ト $B$, $C$ ニ於テ交ラシメ，$\triangle OBC$ ノ面積ヲ最大ナラシムルコト．

---

### 問題略解

**1.** **作圖**　二圓ノ中心 $O$, $O'$ ヲ結ビ付ケ兩圓ト夫々 $B$, $C$ デ交ルトシ，又 $OO'$ ヲ双方ニ延長シ兩圓ト夫々 $A$, $D$ デ交ルトスルト，$AD$ ガ最大線分，$BC$ ガ最小線分デアル．

**證** 圓 $O$, $O'$ ノ周上ノ任意ノ點ヲ夫々 $P$, $Q$ トシ, $P$, $O$; $Q$, $O'$ ヲ結ブト,

$PQ \leqq PO + OO' + O'Q$

又 $PQ + (OP + O'Q) \geqq OO'$

此二ツヲ變化スルト, $PQ \leqq AD$ 及ビ $PQ \geqq BC$ ガ出テ來ル.

2. $\square ABCD$ ノ對角線ノ交點ヲ $O$ トスルト, $\square ABCD = 4\triangle AOB$ デ, 此三角形ノ邊 $OA$, $OB$ ハ一定デアル, ソコデ, 126 頁, §79 ノ第一ニヨレ.

3. $x$ 上ノ任意ノ點 $P$ カラ圓 $O$ ニ引イタ切線ノ切點ヲ $A$, $B$ トスルト, $\angle APB = 2\angle OPA$ デ, $\angle OPA$ ハ $OP$ ガ小サクナル程大キクナル. [4 頁, §4 ノ (5) 參照]

4. 底邊ヲ弦トシ, 頂角ニ等シイ角ヲ含ム弓形ヲ畫ケ.

5. 二等邊三角形ト二等邊デナイ三角形ノ各〻ニ付テ, 其頂點ヲ越エテ一邊ヲ他邊ニ等シク延長シ, 125 頁, §78 ノ (6) ヲ應用セヨ.

6. 圓ニ内接スル矩形ノ對角線ハ何レモ直徑ダカラ, 一ツノ對角線ヲ固定シ, 其一方ニ在ル直角三角形ガ最大ナル場合ヲ考ヘヨ.

7. 弦 $PQ$ ノ中點ヲ $M$, 圓周上ノ任意ノ點ヲ $X$ トスルト,

$XP^2 + XQ^2 = 2.XM^2 + 2.PM^2$ デ, $PM$ ハ一定ダカラ, 此左邊ガ最大トナルハ $XM$ ガ最大トナルトキデアル [125 頁, §78 ノ (7) ニ依レ]

8. **作圖** $OX$, $OY$ ニ付テノ $A$ ノ對稱點ヲ夫々 $P$, $Q$ トシ $P$, $Q$ ヲ結ビ付ケ, $OX$, $OY$ トノ交點ヲ夫々 $B$, $C$ トスルト, $\triangle ABC$ ガ周ノ最小ナ三角形デアル.

**略證** $OX$, $OY$ 上ニ $B$, $C$ ト異ナル任意ノ點 $B'$, $C'$ ヲ取リ, 先ヅ $PB' + B'C' + C'Q > PB + BC + CQ$ ヲ證セヨ.

9. **解析** $OB$, $OC$ ハ一定ダカラ, $\triangle OBC$ ハ $\angle BOC = \angle R$ ノトキ最大トナル [126 頁, §79 ノ第一], 從テ其場合ノ弦 $BC$ ノ長サハ定マル.

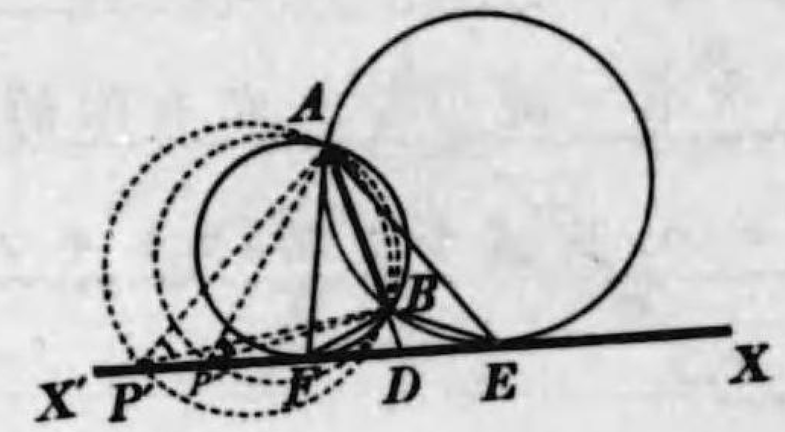
作圖, 證明ハ讀者ニ任カス. [83 頁, 問 7 及ビ 93 頁ノ (5) 參照]

## 81. 極大値, 極小値

例ヘバ, 定直線 $XX'$ ノ同ジ側ニ在ル二定點 $A$, $B$ ヲ通ッテ, 其直線ニ切スル圓ハ, $AB \parallel XX'$ デナイトスルト, 二ツアル. [169 頁, §98]

今其二ツノ圓ガ $XX'$ ニ切スル點ヲ夫々 $E$, $F$ トシ, $AB$ ノ延長ガ $XX'$ ニ交ル點ヲ $D$ トショウ.






サテ, 右ノ圖ニ於テ, 一ツノ點 $P$ ガ $X'$ ノ方カラ $X$ ノ方ヘ運動スルモノトシテ, $P$ カラ $AB$ ヲ見込ム角ノ大サガ, ドウイフ風ニ變ルカトイフコトヲ考ヘテ見ルニ, $P$ ガ $F$ ニ近付ケバ近付ク程, 其角ハ次第ニ大キクナリ, $P$ ガ $F$ ニ重ナルト, 其時迄ニ $P$ ガ占メタ, ドノ點カラ $AB$ ヲ見込ンダ角ヨリモ大キクナル (卽チ $\angle F$ ハ $\angle P'$, $\angle P''$ 等ノ何レヨリモ大キイ). 併シ, $P$ ガ $F$ ヲ通過スルト, 今度ハ $P$ ガ $F$ ヲ遠カレバ遠カル程, 其角ハ次第ニ小サクナッテ, $P$ ガ $D$ ニ重ナルト, 0 ニナル.

更ニ, $P$ ガ $D$ カラ $E$ ニ近付ケバ近付ク程, 再ビ其角ハ次第ニ大キクナリ, $P$ ガ $E$ ニ重ナルト, $D$ ヲ通過シタ後, $P$ ガ占メタ, ドノ點カラ見込ンダ角ヨリモ大キクナリ, $E$ ヲ通過スルト, 矢張リ前ト同ジク $P$ ガ $E$ ヲ遠カレバ遠カル程, 其角ハ次第ニ小サクナッテ, 限リガナイ.

此場合ニハ, 二點 $E$, $F$ ヲ, 何レモ $XX'$ 上ノ點カラ $AB$ ヲ見込ム角ガ**極大**(キョクダイ)ナル點デアルトイヒ, $\angle E$, $\angle F$ ヲ其**極大値**トイフ. 卽チ

一定ノ法則ニ從テ變化スル所ノ幾何學的ノ量ガ, 次第ニ增大シテ或(有限)値ニ達シテ後減少シ始ムル場合ニハ, 其增大シ切ッタトキノ有限値ヲ其量ノ**極大値**トイフ.

同樣ニ, 一定ノ法則ニ從テ變化スル所ノ幾何學的ノ量ガ, 次第ニ減少シテ或有限値ニ達シテ後增大シ始ムル場合ニハ, 其減少シ切ッタトキノ有限値ヲ其量ノ**極小値**トイフ.

最大値, 最小値ハ, ツマリ極大値, 極小値ノ特別ノ場合デアル. 即チ一般ニ, 變化スル量ノ增大シ切ル場合ガ一度シカナイ場合ニハ極大値ガ最大値デアルシ, 減少シ切ル場合ガ一度シカナイ場合ニハ極小値ガ最小値デアル.

平面幾何デ考ヘル極大値, 極小値ハ大抵最大値, 最小値ダケレドモ, 偶(タマ)ニハ上ニ説明シタ例ノ樣ニ, サウデナイコトモアル.

## 82. 解き方に注意を要する問題

**1.** 鋭角三角形ノ各邊上ニ一ツヅツ頂點ヲ有スル三角形ノ周ハ, 其三角形ガ垂足三角形ナルトキ最小ナリ.

例ヘバ, 鋭角三角形 $ABC$ ノ頂點 $A, B, C$ ヨリ其對邊ニ引ケル垂線ノ足ヲ夫々 $D, E, F$ トシ, 更ニ邊 $BC, CA, AB$ 上ニ夫々任意ノ點 $P, Q, R$ ヲ取レバ, $\triangle DEF$ ノ周ハ $\triangle PQR$ ノ周ヨリ小ナリ. 但シ $D$ ト $P$, $E$ ト $Q$, $F$ ト $R$ ノ三組ノ中, 少ナクモ一組ハ相異ナル點トス.

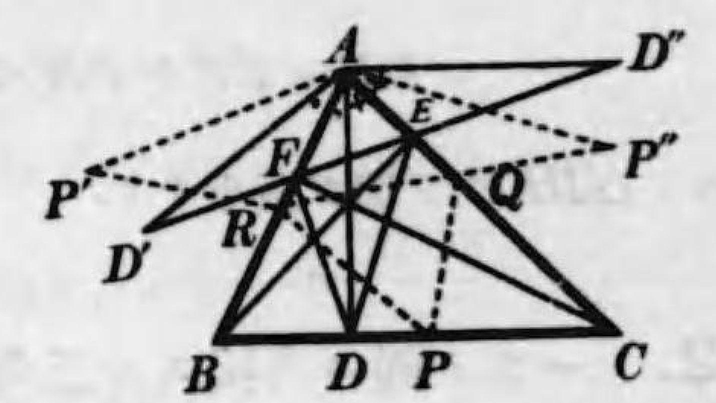
**證**　$\triangle ABC$ ハ鋭角三角形ナルヲ以テ, $D, E, F$ ハ夫々邊 $BC, CA, AB$ ノ上ニ在リ.

今 $P$ ト $D$ トハ相異ナル點トシ, $AB$ ニ付テノ $D$ ノ對稱點ヲ $D'$, $AC$ ニ付テノ $D$ ノ對稱點ヲ $D''$ トシ, $A, D'$; $A, D''$ ヲ結ビ付クレバ,



$$\angle BAD' = \angle BAD$$

$$\angle CAD'' = \angle CAD$$




$$\therefore \angle D'AD'' = 2\angle BAC$$

又 $F, D'$ ヲ結ビ付クレバ,

$$\angle BFD' = \angle BFD = \angle AFE$$

[46 頁ノ問 6 參照]

故ニ, $D'FE$ ハ一直線ナリ.

同樣ニ, $E, D''$ ヲ結ビ付クレバ, $FED''$ モ一直線ナリ.

故ニ, $\triangle AD'D''$ ニ於テ,

$$AD' = AD = AD'', \qquad \angle D'AD'' = 2\angle BAC$$

$$D''D' = DE + EF + FD \qquad (1)$$

次ニ, $AB$ ニ付テノ $P$ ノ對稱點ヲ $P'$, $AC$ ニ付テノ $P$ ノ對稱點ヲ $P''$ トシ, $A, P'$; $A, P''$ ヲ結ビ付クレバ, 前ト同ジク,

$$AP' = AP = AP'', \qquad \angle P'AP'' = 2\angle BAC$$

故ニ, $P', P''$ ヲ結ビ付クレバ, $\triangle AD'D''$ ト $\triangle AP'P''$ トハ頂角ノ相等シキ二等邊三角形ナルヲ以テ, 相似ナリ.

然ルニ, $A, P$ ヲ結ベバ,　$AD < AP$

$$\therefore AD' < AP'$$

$$\therefore D'D'' < P'P'' \qquad (2)$$

而シテ, $P', R$; $P'', Q$ ヲ結ビ付クレバ,

$$PR = P'R, \qquad PQ = P''Q$$

$$P''P' \leqq P''Q + QR + RP'$$

$$\therefore P''P' \leqq PQ + QR + RP \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ニヨリテ,

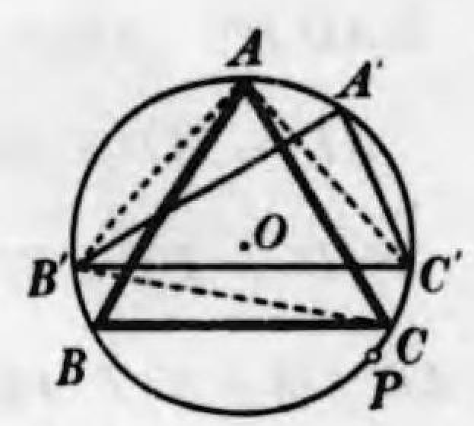
$$DE+EF+FD<PQ+QR+RP$$

故ニ $\triangle DEF$ ノ周ガ最小ナリ.

**2.** 一ツノ圓ニ内接スル三角形ノ面積ハ, 其三角形ガ正三角形ノトキ最大ナリ.

**證** 圓 $O$ ニ内接スル正三角形ヲ $ABC$ トシ, 正三角形ニアラザル任意ノ三角形ヲ $A'B'C'$ トセヨ.

$O$ ヲ中心トシテ $\triangle A'B'C'$ ヲ廻轉シ $B'C'$ ガ $BC$ ニ平行ニシテ, $A$ ト $A'$ ガ其同ジ側ニ在ル樣ニシ, $A, B'$; $A, C'$ ヲ結ビ付ケヨ.




若シ $B'C'$ ガ $BC$ ニ重ナリ, 從テ之ニ合スルモ, $A'$ ハ $A$ ニ合セズ, 而シテ $A$ ハ弧 $BAC$ ノ中點ナルヲ以テ,

$$\triangle ABC>\triangle A'B'C'$$

ナルコト明カナリ. [133 頁, 問 4 ニヨル]

又若シ $B'C'$ ガ $BC$ ニ重ナラザレバ,

$$(1)\qquad \triangle AB'C' \geqq \triangle A'B'C'$$

今假リニ $B'C'$ ガ $BC$ ニ對シテ $A$ ト同ジ側ニ在リトスレバ,

$$\widehat{AC}=\widehat{BC}$$

$$\therefore\quad \widehat{AC'C}<\widehat{B'BC}$$

故ニ弧 $ACB'$ ノ中點 $P$ ハ, 圓周上 $C$ ニ對シテ $C'$ ト反對ノ側ニ在リ.

即チ, $C$ ハ $C'$ ヨリモ $P$ ニ近シ.



故ニ, $C$ ヨリ $AB'$ ニ引ケル垂線ハ, $C'$ ヨリ $AB'$ ニ引ケル垂線ヨリ大ナリ.*

故ニ, $A, B'$; $A, C'$; $B', C$ ヲ結ビ付クレバ,

$$(2)\qquad \triangle CAB'>\triangle C'AB' \qquad [35\ 頁, (5)]$$

然ルニ, $B$ ハ弧 $ABC$ ノ中點ナルヲ以テ,

$$(3)\qquad \triangle ABC>\triangle AB'C$$

(1), (2), (3) ニヨリテ, $\triangle ABC>\triangle A'B'C'$

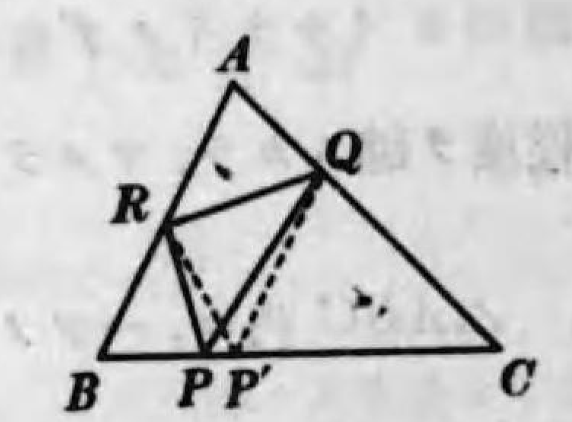
$B'C'$ ガ $BC$ ニ對シテ $A$ ト反對ノ側ニ在ル場合モ, 同樣ニ證スルコトヲ得.

上ノ證明中ノ (1), (2), (3) ハ, 三角形ノ面積ノ代リニ, 夫々其三角形ノ周ヲ取ッテモ成立ツカラ,

**系** 一ツノ圓ニ内接スル三角形ノ周ハ, 其三角形ガ正三角形ノトキ最大ナリ.

**注意** 前問及ビ本問ノ證ヲ次ノ樣ナ風ニヤル人モアル.

例ヘバ, 前問ニ於テ, 若シ $\angle RPB$ ト $\angle QPC$ トガ等シクナイナラバ $BC$ 上ニ一點 $P'$ ヲ $\angle RP'B=\angle QP'C$ ナル樣ニ取レバ,




* 何トナレバ, $C, C'$ ヨリ $AB'$ ニ引ケル垂線ヲ夫々 $CM$, $C'M'$ トシ, $O$ ヲ通リ $AB'$ ニ平行ナル直徑ヲ引キ, $CM$, $C'M'$ トノ交點ヲ夫々 $N, N'$ トスレバ

$$ON<ON'$$

$$\therefore\quad CN>C'N' \qquad [78\ 頁, \S 57\ ノ\ (3)]$$

然ルニ, $NM=N'M'$

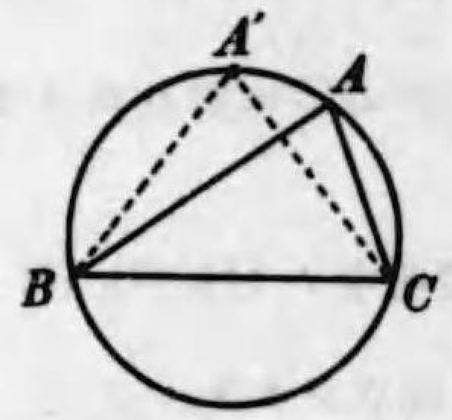
$$\therefore\quad CM>C'M$$

$$P'R+P'Q<PR+PQ \quad [4\text{頁}, §5 ノ 1]$$

ダカラ, $\triangle P'QR$ ノ周ハ $\triangle PQR$ ノ周ヨリモ小サイ.

ソレダカラ, $\triangle PQR$ ノ何レノ二邊モ, 其共有頂點ヲ通ル $\triangle ABC$ ノ邊ト等角ヲナストキ, 卽チ $\triangle PQR$ ガ $\triangle ABC$ ノ垂足三角形デアルトキ*, 其周ガ最小デアル.

又本問ニ於テ, $AB$ ト $AC$ トガ等シクナケレバ, 弧 $ABC$ ノ中點ヲ $A'$ トシ, $A'$, $B$; $A'$, $C$ ヲ結ビ付ケレバ,



$$\triangle A'BC>\triangle ABC \ [133\text{頁, 問}\ 4]$$

ソレダカラ, 上ト同ジ論法デ $\triangle ABC$ ノ三邊ガ等シイトキ, 其面積ガ最大デアル.

併シ, カウイフ證明ハ正シクナイトイフコトガ, 數學者ノ研究デ明カニナッタカラ, サウイフ證明ハヤラナイ方ガ可イ. 尤モ, ナゼサウイフ證明ガイケナイノデ有ルカトイフコトヲ爰デ說明スルノハ, 本書ノ程度ヲ越スカラ, ヤメテ置カウ.

†3. $\triangle ABC$ 內ニ, 一ツノ點 $P$ ヲ求メ, $AP+BP+CP$ ヲ最小ナラシムルコト.

**作圖** $BC$ ニ對シテ $A$ ト反對ノ側ニ正三角形 $DBC$ ヲ畫キ, 更ニ, 其三角形ノ外接圓ヲ畫ク.

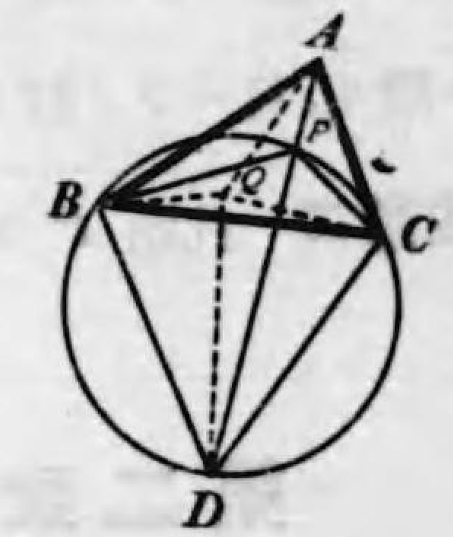
* $\triangle PQR$ ノ何レノ二邊モ, 其共有頂點ヲ通ル $\triangle ABC$ ノ邊ト等角ヲナセバ, $\triangle PQR$ ハ $\triangle ABC$ ノ垂足三角形デアル, トイフコトハ證明ヲ要スルコトダケレトモ, 其證明ハ六ツカシクナイカラ, 讀者ニ任カセテ置カウ.

† 本問ハ後廻シニシテ置イテモ可イ.



又 $A$, $D$ ヲ結ビ付ケヨ.

サスレバ, 圓 $DBC$ ト $AD$ トノ交點 $P$ ガ求ムル點ナリ.



**證明** $\triangle ABC$ 內ニ $P$ ト異ナル任意ノ點 $Q$ ヲ取リ, $Q$ ト $A$, $B$, $C$ ノ各々トヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ,

(1) $BQ.CD+CQ.BD\geqq BC.DQ$ [113 頁, §74 ノ (5), (6)]

然ルニ, $BD=CD=BC$ [作圖]

$\therefore\ BQ+CQ\geqq DQ$

(2) $\therefore\ AQ+BQ+CQ\geqq AQ+DQ$

サテ, $Q$ ガ $AD$ 上ニ在ラザルトキハ,

(3) $AQ+DQ>AD=AP+PD$

然ルニ, $P$, $B$; $P$, $C$ ヲ結ビ付クレバ,

$PD=PB+PC$ [102 頁, 4]

故ニ, $Q$ ガ $AD$ 上ニ在ラザルトキハ,

(4) $AQ+BQ+CQ>AP+BP+CP$

又 $Q$ ガ $AD$ 上ニ在ッテ, $P$ ニ合セザレバ, (1) ノ左邊ハ其右邊ヨリ大ナルヲ以テ, (2) ノ左邊モ, 亦其右邊ヨリ大リ, 故ニ, 其場合ニハ, (3) ハ

$AQ+DQ=AD$

トナレドモ, (4) ハ依然成立ツ.

卽チ $P$ ガ求ムル點ナリ.

**注意一** $\triangle ABC$ ノ一ツノ角ガ $120°$ ニ等シキトキハ, 上ノ作圖ニ於ケル $P$ ハ, 其頂點ニ合シ, 一ツノ角ガ $120°$ ヨリ大ナレバ, $P$

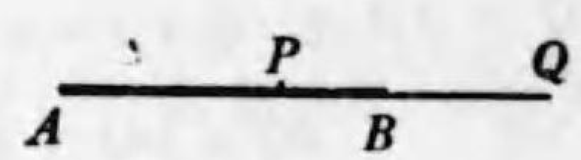
ヲ求ムル能ハズ. 故ニ本問ハ原三角形ノ各角ガ 120° ヨリ小ナルトキニ限リ, 只一ツノ解アリ.

**注意二**　此點 $P$ ヲ, 此三角形ノ「**フェルマ**」點トイフ.

# 第二章　調和列點, 調和束線

### 83. 調和列點

**定義**　線分 $AB$ ヲ $P$ ニ於テ或比ニ内分シ, $Q$ ニ於テ同ジ比ニ外分スルトキ, $P, Q$ ハ $AB$ ヲ **調和ニ分ツ**トイヒ, $A, P, B, Q$ ヲ**調和列點**トイフ.



又 $P, Q$ ノ各ヽヲ $A, B$ ニ付テ互ニ**調和共軛點**トイフ.

**例**　41 頁, § 30 ノ (4) ノ圖ニ於ケル $B, D, C, E$ ハ調和列點ナリ.

**注意**　$A, P, B, Q$ ガ調和列點ヲナストイフ代リニ $A, B; P, Q$ ガ調和列點ヲナストイフコトアリ.

### 84. 調和列點に關する定理

**第一**　$A, P, B, Q$ ガ調和列點ナルトキハ, $AP, AB, AQ$ ハ調和級數ヲナス.

**證**
$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{BQ}$$
$$\therefore\ \frac{PB}{AP}=\frac{BQ}{AQ}$$



$$\therefore\ \frac{AB-AP}{AP.AB}=\frac{AQ-AB}{AQ.AB}\ *$$
$$\therefore\ \frac{1}{AP}-\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}-\frac{1}{AQ}$$

即チ
$$\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2}{AB}$$

即チ $AP, AB, AQ$ ハ調和級數ヲナス.

**注意**　$P, Q$ ガ線分 $AB$ ヲ調和ニ分ツトイフノハ, 此性質ガアルカラデアル.

**第二**　$P, Q$ ガ $A, B$ ニ付テ互ニ調和共軛點ナルトキハ, $A, B$ ハ $P, Q$ ニ付テ互ニ調和共軛點ナリ.

**證明**
$$AP:PB=AQ:BQ$$
$$\therefore\ AP:AQ=PB:BQ \quad \text{［内項交換］}$$
$$\therefore\ PA:AQ=PB:QB$$
$$(\text{又ハ}\ PB:BQ=PA:QA)$$

即チ, $A, B$ 若クハ $B, A$ ハ線分 $PQ$ ヲ同ジ比ニ内分及ビ外分ス.

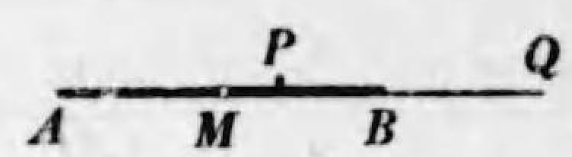
故ニ, $A, B$ ハ $P, Q$ ニ付テ互ニ調和共軛點ナリ.

**系**　$A, P, B, Q$ ガ調和列點ナルトキハ, 線分 $QB, QP, QA$ ハ調和級數ヲナス.

* 此變化ハ, 線分 $AB$, $AP$ 等ハ, 或線分ヲ單位トシテ測ッタトキノ數値ヲ表ハスモノトシテヤッタノデアル.

**第三**　P, Q ガ線分 AB ヲ調和ニ分チ, M ガ AB ノ中點ナルトキハ, AM ハ MP, MQ ノ比例中項ナリ。

**證明**　$\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{BQ}$




$\therefore\ \dfrac{AP-PB}{AP+PB} = \dfrac{AQ-BQ}{AQ+BQ}$

$\therefore\ \dfrac{2MP}{2AM} = \dfrac{2AM}{2MQ}$　[2, 3 頁, §3 ノ (1)−(4)]

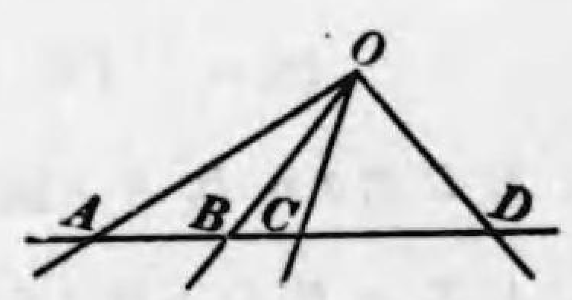
卽チ MA ハ MP, MQ ノ比例中項ナリ.

## 85. 束線, 其截線. 調和束線

**定義**　一點 O ヨリ引ケル二ツ以上ノ半直線ヲバ, O ヲ頂點トスル**束線**トイヒ, 其半直線ノ各々ヲ其束線ノ**射線**トイフ.

束線ニ交ル任意ノ直線ヲ其束線ノ**截線**トイフ.

四ツノ半直線ト其一ツノ截線トノ交點ガ調和列點ヲナストキハ,其束線ヲ**調和束線**トイフ.



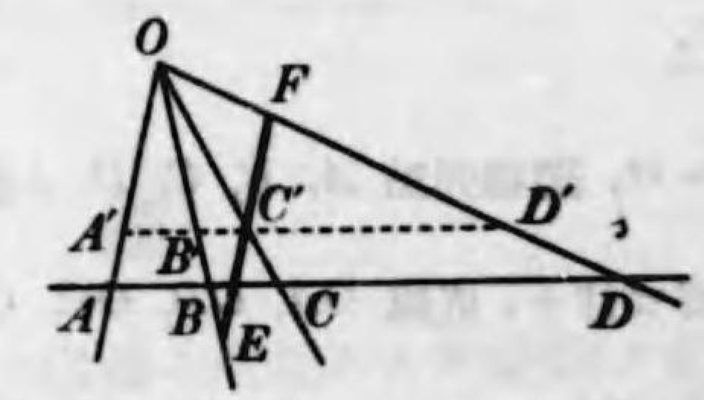

例ヘバ, 右ノ圖ニ於テ, A, B, C, D ガ調和列點ナルトキ, OA, OB, OC, OD ハ O ヲ頂點トスル調和束線ナリ.

**系**　△ABC ノ ∠A 及ビ其外角ノ二等分線ヲ夫々 AP, AQ トスレバ, AB, AP, AC, AQ ハ A ヲ頂點トスル調和束線ナリ. [41 頁ノ圖參照]



## 86. 調和束線に關する定理

**第一**　調和束線ノ一ツノ射線ニ平行ニ引ケル截線ガ,他ノ三ツノ射線(又ハ其延長)ニテ截取ラルル二ツノ線分ハ相等シ.




例ヘバ, 調和列點 A, B, C, D ノ各々ト直線 AD 上ニ在ラザル任意ノ點 O トヲ結ビ付ケ, OC 上ノ任意ノ點 C' ヲ通リ, OA ニ平行ニ引ケル直線ガ, OB, OD (又ハ其延長)ト夫々 E, F ニ於テ交ルトスレバ,

$C'E = C'F$ ナリ.

**證明**　C' ヲ通リ AD ニ平行ニ引ケル直線ガ OA, OB, OD ト夫々 A', B', D' ニ於テ交ルトスレバ, A', B', C', D' ハ調和列點ナリ (何故カ).

$\therefore\ \dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{A'D'}{C'D'}$　(1)

サテ　$\triangle B'C'E \backsim \triangle B'A'O$　[$\because\ OA' \parallel EC'$]

$\therefore\ \dfrac{C'E}{A'O} = \dfrac{B'C'}{B'A'}$　(2)

又　$\triangle D'C'F \backsim \triangle D'A'O$

$\therefore\ \dfrac{C'F}{A'O} = \dfrac{C'D'}{A'D'}$　(3)

(1), (2), (3) ニヨリ,

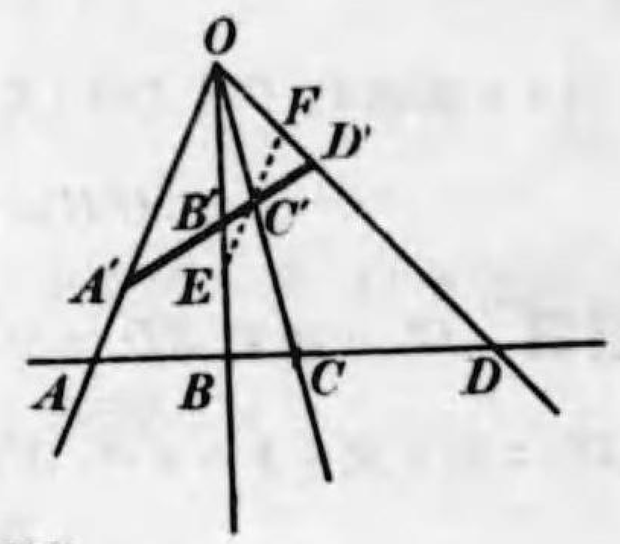
$\dfrac{C'E}{A'O} = \dfrac{C'F}{A'O}$

$\therefore\ C'E = C'F$

$C'$ ヲ通リ他ノ射線ニ平行ナル截線ヲ引キタル場合,及ビ其他ノ場合モ同様ニ證明スルコトヲ得.

**第二** 調和束線ト其任意ノ截線トノ交リハ調和列點ヲナス.

例ヘバ,調和列點 $A, B, C, D$ ノ各〻ト直線 $AD$ 上ニ在ラザル任意ノ點 $O$ トヲ結ビ付ケ,直線 $OA, OB, OC, OD$ ト其任意ノ截線トノ交點ヲ夫々 $A', B', C', D'$ トスレバ,$A', B', C', D'$ ハ調和列點ナリ.




**證明** $C'$ ヲ通リ $OA$ ニ平行ナル直線ヲ引キ,$OB, OD$ ト夫々 $E, F$ ニ於テ交ラシムレバ,第一ニヨリテ,

$$C'E = C'F \quad (1)$$

サテ

$$\triangle B'OA' \backsim \triangle B'EC'$$

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{OA'}{EC'} \quad (2)$$

又

$$\triangle D'OA' \backsim \triangle D'FC'$$

$$\therefore \quad \frac{A'D'}{C'D'} = \frac{OA'}{FC'} \quad (3)$$

(1), (2), (3) ニヨリ,

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{A'D'}{C'D'}$$

即チ $B', D'$ ハ $A'C'$ ヲ同ジ比ニ内分及ビ外分ス.

故ニ,$A', B', C', D'$ ハ調和列點ナリ.



**系** $O$ ヲ頂點トスル四ツノ射線 $OA, OB, OC, OD$ ヨリナル束線ニ於テ,例ヘバ,$OC$ 上ノ任意ノ點 $C$ ヲ通リ,$OA$ ニ平行ニ引ケル直線ガ $OB, OD$ ト夫々 $E, F$ ニ於テ交リ,$CE = CF$ ナルトキハ,其束線ハ調和束線ナリ.

## 問題

**1.** 二等邊ニアラザル三角形ノ底邊ニ垂直ナル外接圓ノ直徑ハ,他ノ一邊ト第三邊ノ延長トニテ調和ニ分タル.

**2.** 直角三角形 $ABC$ ノ直角ノ頂點 $C$ ヨリ邊 $CB$ ト相等シキ角ヲナス二直線 $CD, CE$ ヲ引キ $AB$ (又ハソノ延長) ト夫々 $D$ 及ビ $E$ ニ於テ交ラシム.今 $M$ ヲ $AB$ ノ中點トスレバ,$MB$ ハ $MD$ 及ビ $ME$ ノ比例中項ナリ.(10, 長崎商)

**3.** $\triangle ABC$ ノ邊 $BC$ ノ中點 $D$ ヲ通ル直線ガ,$AB, AC$ 若クハ其延長ニ交ル點ヲ夫々 $E, F$ トシ,$A$ ヲ通リ $BC$ ニ平行ナル直線ニ交ル點ヲ $G$ トスレバ,$E, F$ ハ $DG$ ヲ調和ニ分ツ.

**4.** 三角形ノ底邊ノ一端ト其對邊ノ上ノ任意ノ點トヲ結ビ付クル線分ハ,底邊ヘノ中線及ビ頂點ヲ通リ底邊ニ平行ナル直線ニテ調和ニ分タル.

**5.** 圓 $O$ ノ直徑 $AB$ ノ延長上ノ一點 $Q$ ヨリ切線 $QC, QD$ ヲ引キ,切點 $C, D$ ヲ結ビ付クル弦ト $AB$ トノ交點ヲ $P$ トスレバ,$A, P, B, Q$ ハ調和列點ナリ.

**6.** $M$ ハ線分 $AB$ ノ中點, $P$, $Q$ ハ $AB$ 上ニ在リテ夫々 $AB$ ヲ内分及ビ外分スル點ニシテ, $M$ ニ對シテ同ジ側ニ在リ, 且ツ $AM^2=MP.MQ$ ナリトス. 然ルトキハ, $P$, $Q$ ハ $AB$ ヲ調和ニ分ツ.

**7.** $A, B, C, D$ ト $A', B', C', D'$ トガ各〻調和列點ニシテ, $AA'$, $BB'$, $CC'$ ガ同一ノ點 $O$ ヲ通ルトキハ, $DD'$ モ亦 $O$ ヲ通ル.

**8.** $A, B, C, D$ ト $A, B', C', D'$ ガ何レモ調和列點ニシテ $BB'$, $CC'$, $DD'$ ガ平行ナラザルトキハ, 其三直線ハ同一ノ點ヲ通ル.

**9.** $\triangle ABC$ ノ底邊 $BC$ ニ平行ナル直線ガ $AB$, $AC$ 又ハ其延長ト夫々 $D$, $E$ ニ於テ交リ, $BE$, $CD$ ガ $O$ ニ於テ交ルトスレバ, $BC$, $DE$ ト直線 $AO$ トノ交點ハ線分 $AO$ ヲ調和ニ分ツ.

**10.** 圓 $O$ 外ノ一點 $P$ ヨリ切線 $PA$, $PB$ 及ビ割線 $PRS$ ヲ引キ, 切點ヲ結ビ付クル弦ト割線ヨリ截取ル弦 $RS$ トノ交點ヲ $Q$ トスレバ, $P$, $R$, $Q$, $S$ ハ調和列點ナリ.

---

**問題略解**

1. 97頁, §68 ノ(2)ノ圖ニ於テ $AB$ ト $CA$ ノ延長ト直線 $PP'$ ノナス三角形ヲ考ヘ, 143頁, §84 ノ第二ニヨレ.

2. $CB$ ハ $\angle ECD$ ヲ二等分シ, $CA$ ハ其外角ヲ二等分スルカラ, $B$, $A$ ハ $ED$ ヲ調和ニ分ツ, ソコデ, 143頁, §84 ノ第二, 第三ニ依レ.

3. $GE:ED=GA:DB$ (何故カ), 又 $GF:DF=AG:CD$
$\therefore\ GE:ED=GF:DF$ (何故カ).

4. 原三角形ヲ $ABC$ トシ, $C$ カラ $AB$ ニ引イタ線分 $CE$ ト中線 $AD$ トノ交點 $D'$ ヲ通ッテ, $BC$ ニ平行ナ直線ヲ引イテ $AB$, $AC$ トノ交點ヲ夫々 $B'$, $C'$ トシ, $\triangle AB'C'$ ニ付テ考ヘルト, 前問ニ歸スル.

**別證** $D$ ヲ通ッテ $CE$ ニ平行ナ直線ヲ引イテ, 前問ト 146頁, §86 ノ第二ニ依ッテモ可イ.

5. $C, B$; $C, A$ ヲ結ビ付ケ, $CB$, ガ $\triangle CPQ$ ノ $\angle C$ ヲ, $CA$ ガ其外角ヲ二等分スルコトヲ證シ, 後, 143頁, §84 ノ第二ニ依レ.



6. 144頁, §84 ノ第三ノ證ヲ遡レ. (本問ハ其定理ノ逆デアル)

7. $O$, $D$ ヲ通ル直線ヲ引イテ直線 $A'B'$ トノ交點ヲ $E$ トスルト, 146頁, §86 ノ第二ニヨッテ, $A'$, $B'$, $C'$, $E$ ハ調和列點デアル.

故ニ $\dfrac{A'E}{C'E}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$

然ルニ, $\dfrac{A'D'}{C'D'}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$

卽チ $D'$ 及ビ $E$ ハ線分 $A'C'$ ヲ同ジ比ニ外分スルカラ, 同一ノ點デアル.

8. $BB'$, $CC'$ ノ交點 $O$ ト $A$ トヲ結ンデ, 前問ニヨレ.

9. $AO$ 又ハ其延長ト $BC$, $DE$ トノ交點ヲ夫々 $M$, $N$ トスルト, $M$, $N$ ハ夫々 $BC$, $DE$ ノ中點デアル [198頁, §111 ノ例二ヲ見ヨ]. サテ

$AN:AM=DN:BM$

$NO:MO=NE:MB$ (何故カ)

$\therefore\ AN:AM=NO:MO$

$\therefore\ AN:ON=AM:MO$

10. $PO$ ト $AB$ トノ交點ヲ $C$ トスルト, $AC\perp PO$ ソシテ $OA\perp AP$

$\therefore\ PA^2=PC.PO$ [51頁, §34 ノ(9)]

又 $PA^2=PR.PS$ [82頁, §61 ノ(10)]

$\therefore\ PC.PO=PR.PS$

故ニ四邊形 $OCRS$ ニハ, 外接圓ガ畫ケル, $\therefore\ \angle PCR=\angle OSR$

$\angle OCS=\angle ORS$

然ルニ, $\angle OSR=\angle ORS$

故ニ $\angle PCR=\angle OCS$

卽チ $CP$ ハ $\triangle CRS$ ノ外角ヲ二等分スル. ソシテ $AB\perp CP$ ダカラ, $AB$ ハ $\angle RCS$ ヲ二等分スル. 故ニ $P$, $R$, $Q$, $S$ ハ調和列點デアル. [40頁, §30 ノ(4) 及ビ 143頁, §84 ノ第二]

# 第三章　相似中心

## 87. 二つの圓の相似中心

**定義** 二ツノ圓ノ中心ヲ結ビ付クル線分ヲ其二圓ノ半徑ノ比ニ外分スル點ヲ, 其二圓ノ**相似外心**トイヒ, 同ジ比ニ内分スル點ヲ, 其二圓ノ **相似内心**トイヒ, 通ジテ之ヲ其二圓ノ**相似ノ中心**トイフ.

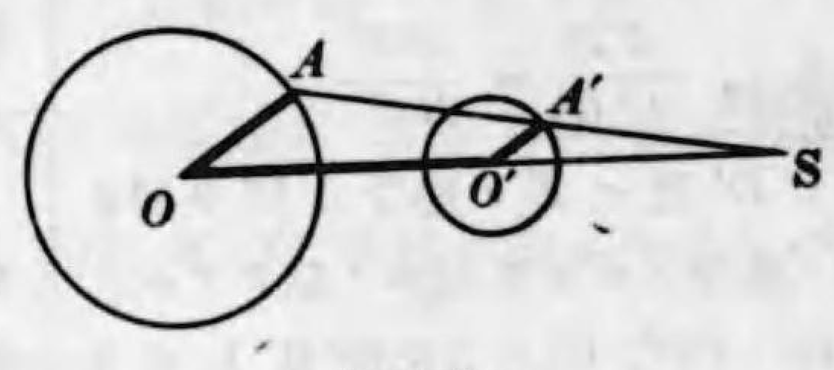
**注意** 相等シキ二ツノ圓ニハ, 其相似外心ハナシ. (何故カ)

## 88. 二圓の相似中心に關する定理

**第一** 二ツノ圓ノ各〻ニ於ケル一組ノ平行半徑ノ端ヲ通ル直線ハ,其二ツノ圓ノ相似中心ヲ通ル.

例ヘバ, $O$, $O'$ ヲ二ツノ定圓, $OA$, $O'A'$ ヲ一組ノ平行半徑トスレバ, $OA$, $O'A'$ ガ同方向ヲ有スルトキハ, 直線 $AA'$ ハ二ツノ圓ノ相似外心ヲ通リ (甲圖); $OA$, $O'A'$ ガ正反對ノ方向ヲ有スルトキハ, 直線 $AA'$ ハ二ツノ圓ノ相似內心ヲ通ル (乙圖).

**證** $OA$ ト $O'A'$ トガ同方向ヲ有スルトシ, $AA'$ ト $OO'$ ノ延長トノ交點ヲ $S$ トスレバ,



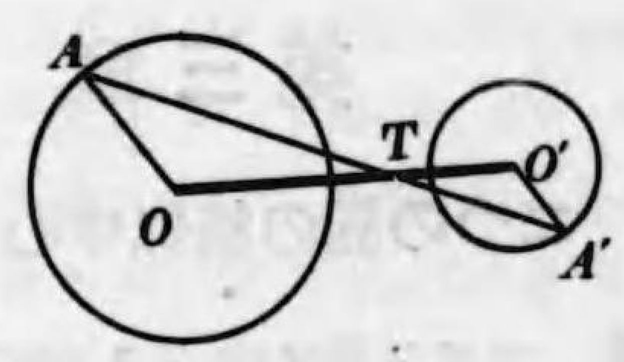
(甲圖)

$$\triangle OAS \backsim \triangle O'A'S$$

$$\therefore \quad \frac{OS}{O'S} = \frac{OA}{O'A'}$$

卽チ, $S$ ハ圓 $O$, $O'$ ノ相似外心ナリ.

又 $OA$ ト $O'A'$ トガ正反對ノ方向ヲ有スルトシ, $AA'$ ト $OO'$ トガ $T$ ニ於テ交ルトスレバ, 上ト同樣ニ,



(乙圖)

$\dfrac{OT}{O'T} = \dfrac{OA}{O'A'}$ ヲ證スルヲ得.

卽チ, $T$ ハ圓 $O$, $O'$ ノ相似內心ナリ.

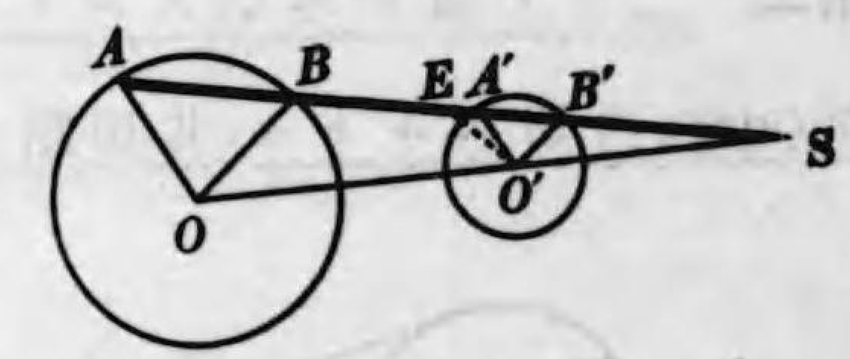
**系** 二ツノ圓ノ共通切線ハ其相似中心ヲ通ル.



**第二** 二ツノ圓ノ相似中心ヨリ引ケル一ツノ直線ガ,二ツノ圓周ニ交ル點ヲ端トスル兩圓ノ半徑ハ,二ツヅツ互ニ平行ナリ.

例ヘバ, 半徑ガ夫々 $r$, $r'$ ナル二ツノ圓 $O$, $O'$ ノ相似ノ中心ヨリ引ケル直線ガ圓 $O$ ノ周ニ交ル點ヲ $A$, $B$ トシ, 圓 $O'$ ノ周ニ交ル點ヲ $A'$, $B'$ トシ, $A$, $A'$ ノ相似中心ヨリノ距離ガ, 夫々 $B$, $B'$ ノ同ジ相似中心ヨリノ距離ヨリ大ナリトスレバ, $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$ ナリ.

**證明** 相似外心ヲ $S$ トシ, $O'$ ヨリ $OA$ ニ平行ニ引ケル直線ト $SA$ トノ交點ヲ $E$ トスレバ,




$$\triangle SOA \backsim \triangle SO'E \qquad \therefore \quad \frac{OA}{O'E} = \frac{OS}{O'S}$$

$$\therefore \quad \frac{r}{O'E} = \frac{r}{r'}$$

$$\therefore \quad O'E = r'$$

卽チ $E$ ハ圓 $O'$ ノ周ノ上ニ在リ.

同樣ニ, $O'$ ヨリ $OB$ ニ平行ニ引ケル直線ト $SA$ トノ交點ヲ $F$ トスレバ, $F$ モ亦圓 $O'$ ノ周ノ上ニ在リ.

然ルニ, $SA$ ト圓 $O'$ トハ二ツヨリ多クノ點ニ於テ相會フ能ハズ.

故ニ, $E$, $F$ ハ夫々 $A'$, $B'$ ニ一致ス.

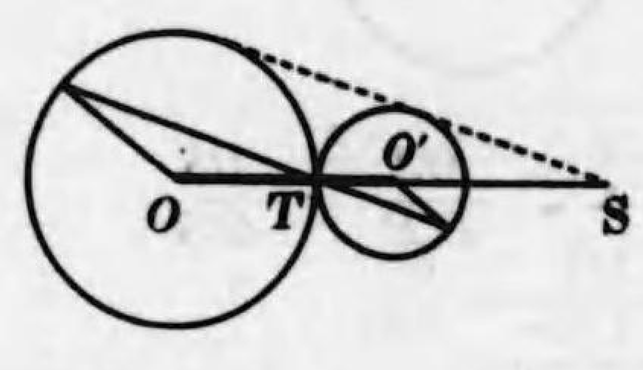
$$\therefore \quad OA \parallel O'A', \qquad OB \parallel O'B'$$

相似內心ヨリ引ケル直線ト, 二ツノ圓トノ交點ニ付テモ, 同樣ニ證明スルコトヲ得.

**定義** 四點 $A, B, A', B'$ ノ中, $A$ ト $A'$, $B$ ト $B'$ ノ如ク, 二ツノ圓ノ平行半徑ノ端ナル二點ヲ**相應點**トイヒ, $A$ ト $B'$, $A'$ ト $B$ ノ如ク, 二ツノ圓ノ平行ナラザル方ノ半徑ノ端ナル二點ヲ**非相應點**トイフ.

**系一** 二ツノ圓ノ相似中心ヨリ其一ツノ圓ニ引ケル切線ハ今一ツノ圓ノ切線ナリ (甲圖).

**系二** 二ツノ圓ガ外切スルトキ, 其切點ハ相似內心ニシテ (甲圖), 內切スルトキ, 其切點ハ相似外心ナリ (乙圖).



(甲圖)

(乙圖)

**注意** 一ツノ圓ガ全ク他ノ圓ノ內ニ在ルトキ, 其相似中心ハ二ツトモ兩圓ノ內ニ在リ (何故カ). (丙圖)

(丙圖)

**系三** 一ツノ相似中心ト一組ノ相應點トノ距離ノ比ハ, 二ツノ圓ノ半徑ノ比ニ等シ.



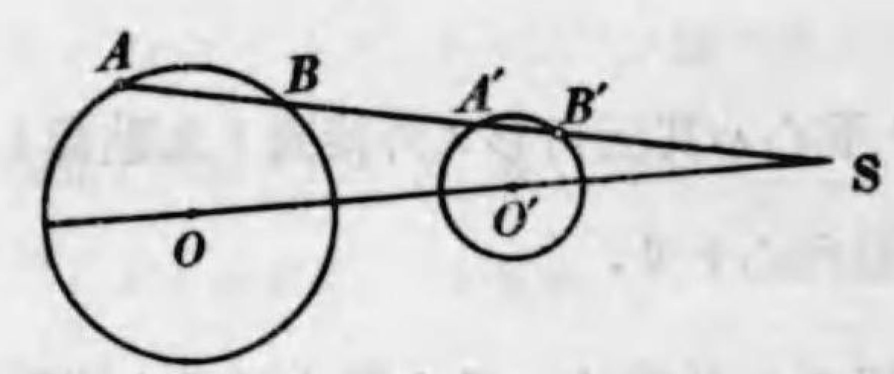
**系四** 二ツノ圓ノ中心ト其二ツノ相似中心トハ, 調和列點ヲナス.

**第三** 二ツノ圓ノ一ツノ相似中心ヨリ, 非相應點マデノ距離ノ積ハ一定ナリ.

例ヘバ, 二ツノ圓 $O, O'$ ノ相似外心ヲ $S$ トシ, $S$ ヨリ引ケル一ツノ直線ガ圓 $O$ ト $A, B$ ニ於テ, 圓 $O'$ ト $A', B'$ ニ於テ交リ, $A, B$ ヲ夫々 $A', B'$ ノ相應點トスレバ,

$$SA.SB' = SA'.SB$$

ニシテ, 此各々ハ其直線ノ位置ニ拘ラズ一定ナリ.




**證明** 圓 $O, O'$ ノ半徑ヲ夫々 $r, r'$ トスレバ,

$$\frac{SA.SB'}{SA'.SB'} = \frac{SA}{SA'} = \frac{r}{r'}$$

$$\therefore\ SA.SB' = \frac{r}{r'} \times SA'.SB' \qquad (1)$$

然ルニ, $\frac{r}{r'}$ ハ一定, 又 $SA'.SB'$ ハ定點 $S$ ニ於テ分タレタル (爰ニ示シタ圖ニ於テハ外分) 圓 $O'$ ノ弦 $A'B'$ ノ二ツノ分ノ積ナルヲ以テ一定ナリ.

故ニ (1) ノ右邊ハ割線ノ位置ニ拘ラズ一定ナリ.

卽チ, $SA.SB'$ ハ一定ナリ.

同樣ニ, 相似內心ヨリ非相應點マデノ距離ノ積モ一定ナリ.

**系** 相似中心ヨリ二ツノ圓ニ共通切線ヲ引キ得ル場合ニハ,其相似中心ヨリ一組ノ非相應點マデノ距離ノ積ハ同ジ相似中心ヨリ二ツノ圓ニ引ケル切線ノ積ニ等シ.

## 問　題

**1.** $\triangle ABC$ ノ内心ヲ $O$, $\angle A$ ノ内ニ在ル傍心ヲ $O_1$ トシ, $AO_1$ ト $BC$ トノ交點ヲ $P$ トスレバ, $A, O, P, O_1$ ハ調和列點ナリ.

**2.** 三角形ノ一ツノ傍切圓ノ半徑ガ内切圓ノ半徑ノ三倍ニシテ,ソノ兩圓ガ互ニ切セザルトキ,三角形ノ三邊ノ長サハ等差級數ヲナス. (14, 盛農)

**3.** $\triangle ABC$ ノ垂心ハ其三角形ノ外接圓ト九點圓トノ相似外心ニシテ,重心ハ其相似内心ナリ.

***4.** 二定圓ニ切スル任意ノ一ツノ圓ノ二ツノ切點ヲ結ビ付クル直線ハ其二定圓ノ相似中心ヲ過ギルコトヲ證明セヨ.

---

**問題略解**

**1.** $A, P$ ハ圓 $O, O'$ 相似中心デアル. ソコデ,前頁, §88 ノ第二ノ系四ニ依レ.

**別證** $\triangle BAP$ ヲ考ヘ, 40 頁, §30 ノ (4) ニ依ッテモ可イ.

**2.** 105 頁, §71 ノ(5),(6) ヲ使フト, $\dfrac{1}{s-a}=\dfrac{3}{s}$ ガ出テ來ルシ,コレヲ變化スルト, $b+c=2a$ トナル. $O$ ト $O_1$ ガ切スルト, 104 頁, §71 ノ初ノ圖デ $D, D_1$ ガ合スルカラ, $BD=BD_1$ 卽チ $s-b=s-c$ トナルカラ, $a=b=c$ 故ニ等差級數ヲナサイ.

**3.** $\triangle ABC$ ノ外心ヲ $O$, 垂心ヲ $H$, 重心ヲ $G$, 九點圓ノ中心ヲ $N$ トスルト, $N$ ハ $OH$ ノ中點ダカラ [108 頁ノ 3], $OH:NH=2:1$ 卽チ $H$ ハ相似外心デアル [109 頁ノ 4].

又 $OG:GH=OG:2.GN+OG=1:2$ [108 頁ノ 3 ノ證參照]

$\therefore OG:GN=2:1$

故ニ $G$ ハ相似内心デアル.

**4.** §129 ノ原則適用ノ例,問題一參照. 任意ノ圓ガ二定圓ノ双方ニ外切,又ハ双方ニ内切スルト相似外心ヲ通ルシ,一ツニ内切シ他ニ外切スルト相似内心ヲ通ル.



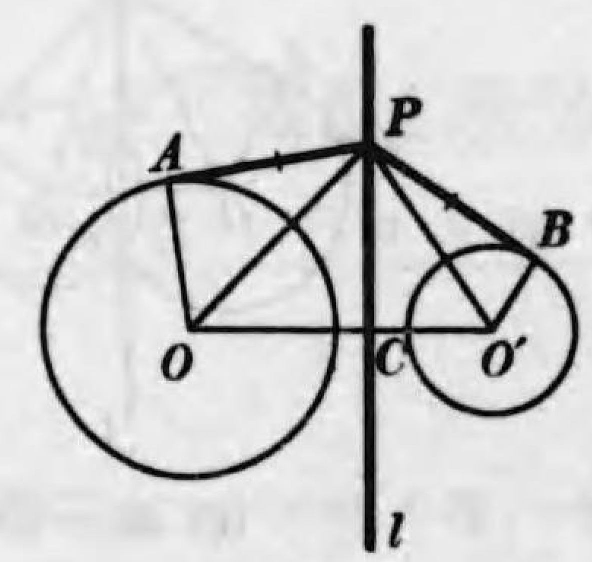
# 第四章 根軸

## 89. 二圓に引ける切線が等長なる點の軌跡

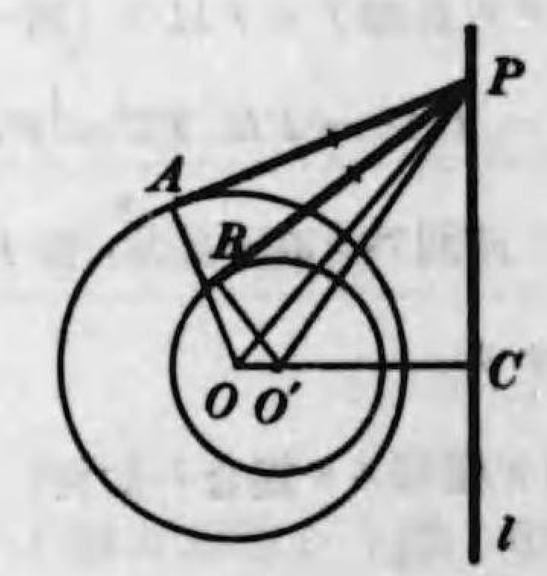
一ツノ點ヨリ二ツノ圓ニ引ケル切線ノ長サガ,相等シキ點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

**解** 半徑ガ $r, r'$ $(r>r'$ トス$)$ ナル二ツノ圓ヲ夫々 $O, O'$ トシ, $P$ ヨリ $O, O'$ ニ引ケル切線ノ切點ヲ夫々 $A, B$ トシ,

$$PA=PB \quad トセヨ.$$



(甲圖)



(乙圖)

$O, A$; $O, P$ 及ビ $O', B$; $O', P$ ヲ結ビ付クレバ,

$$PA^2=PO^2-OA^2$$

$$PB^2=PO'^2-O'B^2$$

$$\therefore \quad PO^2 - OA^2 = PO'^2 - O'B^2$$

$$\therefore \quad PO^2 - PO'^2 = OA^2 - O'B^2 = r^2 - r'^2$$

卽チ, $P$ ハ線分 $OO'$ ヲ其二ツノ分ノ平方ノ差ガ $r^2 - r'^2$ ニ等シキ樣ニ分ツ點ヲ通リ, $OO'$ ニ垂直ナル直線 $l$ ノ上ニ在リ. [22 頁, §21 ノ (11)]

次ニ, $l$ 上ノ任意ノ點ヲ $P$ トシ, $P$ ヨリ圓 $O$, $O'$ ニ夫々切線 $PA$, $PB$ ヲ引キ, $O$, $A$; $O'$, $B$ ヲ結ベバ,

$$PO^2 - PO'^2 = r^2 - r'^2$$

$$\therefore \quad PO^2 - r^2 = PO'^2 - r'^2$$

$$\therefore \quad PO^2 - OA^2 = PO'^2 - O'B^2$$

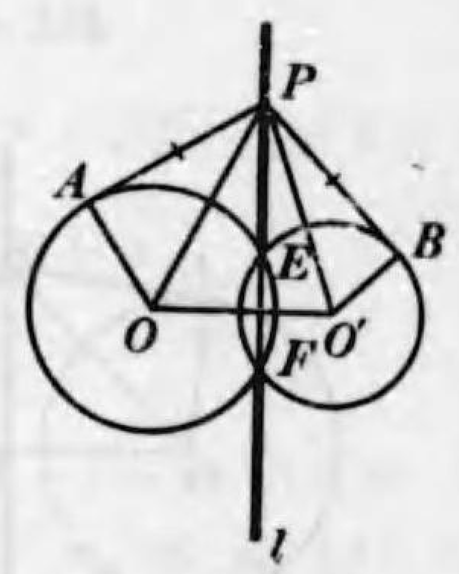
$$\therefore \quad PA^2 = PB^2$$

$$\therefore \quad PA = PB$$

故ニ $l$ ガ二ツノ圓ノ外ニ在ルトキハ, $l$ ガ求ムル軌跡ナリ. (甲圖及ビ乙圖)

二ツノ圓ガ相交ルトキハ, $l$ ハ二圓ノ共通弦ニ重ナル直線ナルヲ以テ (例ヘバ丙圖ニ於テ　$PA^2 = PE.PF = PB^2$) 軌跡ハ, $l$ ノ 兩圓外ニ在ル部分, 卽チ二ツノ半直線ナリ.

(二ツノ圓ガ相切スル場合ハ如何)

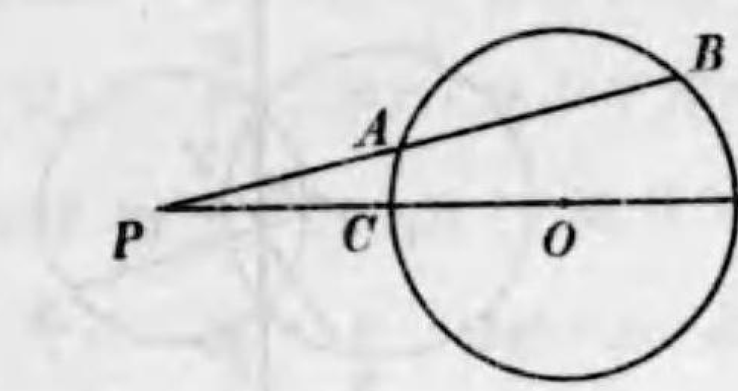


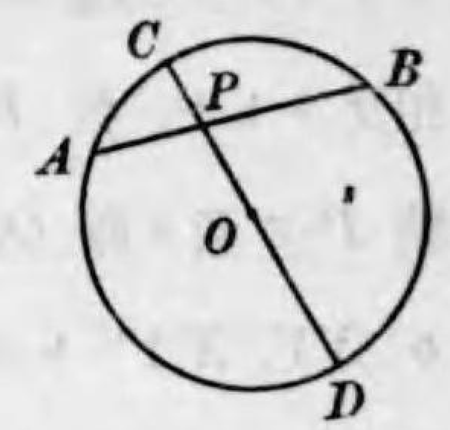

(丙 圖)

## 90. 一つの圓に付ての點の羃. 根軸

**定義一** 一點 $P$ ヲ通リ, 圓 $O$ ト二ツノ點 $A$, $B$ ニ於テ交ル直線ヲ引キタルトキ, 積 $PA.PB$ ヲ **圓 $O$ ニ付テノ $P$ ノ羃**トイフ.






サテ, $P$ ト $O$ トヲ通ル直線ト, 圓 $O$ ノ周トノ交點ヲ $C$, $D$ トスレバ,

$$PA.PB = PC.PD = PO^2 - OC^2$$

又ハ　　$= OC^2 - PO^2$　[81 頁, § 60ノ (5)]

ナルヲ以テ,

**系一** 圓 $O$ ニ付テノ一定點 $P$ ノ羃ハ一定ニシテ, 其點ト圓ノ中心 $O$ トヲ兩端トスル線分ノ平方ト其圓ノ半徑ノ平方トノ差ニ等シ.

**系二** 又其點 $P$ ガ圓 $O$ ノ外ニ在ル場合ニハ, 圓 $O$ ニ付テノ $P$ ノ羃ハ $P$ ヨリ圓 $O$ ニ引ケル切線ノ平方ニ等シ.

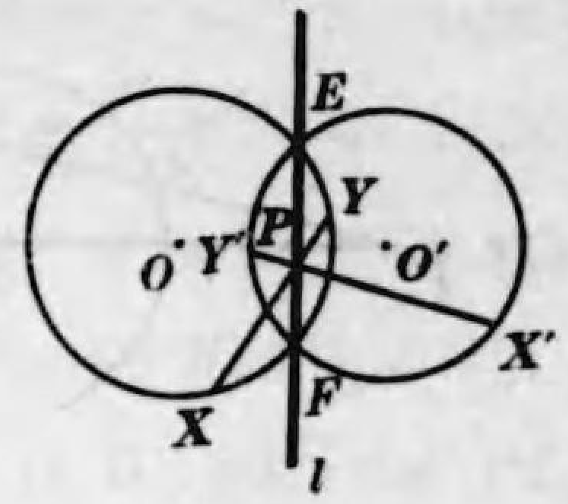
[80 頁, § 60 ノ (4)]

**定義二** 二ツノ圓ノ各々ニ付テノ羃ガ相等シキ點ノ軌跡ヲ其二圓ノ**根軸**トイフ.

卽チ, 前節ノ圖ニ付テ言ヘバ, 直線 $l$ ガ二ツノ圓 $O$, $O'$ ノ根軸ナリ.

**注意** 二圓ガ相交ルモ, 根軸ハ共通弦ヲ含ムーツノ直線ニシテ, 二ツノ半直線ニアラズ.

何トナレバ，二圓ガ $E$, $F$ ニ於テ相交ルトキ，弦 $EF$ 上ノ任意ノ點 $P$ ヲ通ル圓 $O$, $O'$ ノ弦ヲ夫々 $XY$, $X'Y'$ トスレバ，




$$PX.PY = PE.PF = PX'.PY'$$

即チ，圓 $O$, $O'$ ニ付テノ，弦 $EF$ 上ノ點 $P$ ノ冪モ亦相等シケレバナリ．

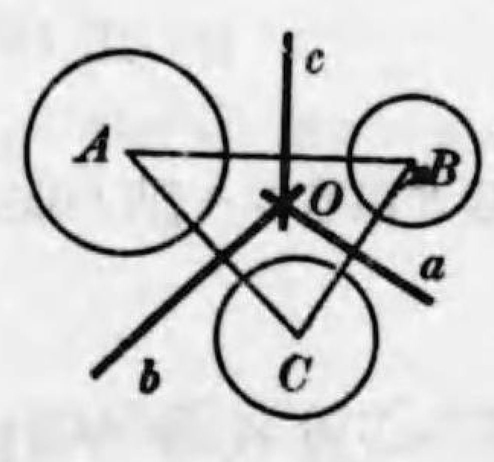
**系** 二ツノ圓ノ根軸ハ其二圓ノ共通切線ヲ二等分ス．

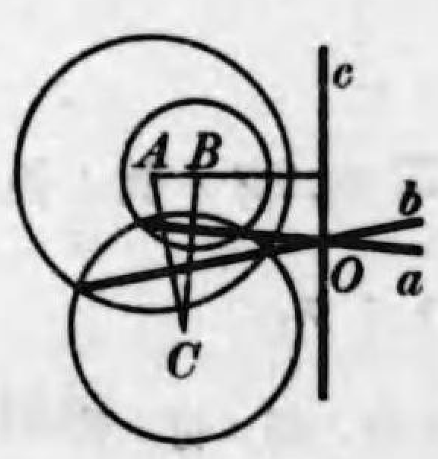
(何故カ)

## 91. 等冪心 (又は根軸の中心)

**定理** 三ツノ圓ヲ二ツヅツ取リタルトキノ三ツノ根軸ハ，同一ノ點ヲ通ルカ，若クハ互ニ平行ナリ．

**證明** 三ツノ圓ヲ $A$, $B$, $C$ トシ，圓 $B$, $C$ ノ根軸ヲ $a$, 圓 $C$, $A$ ノ根軸ヲ $b$, 圓 $A$, $B$ ノ根軸ヲ $c$ トセヨ．




$A$, $B$, $C$ ガ同一直線上ニ在ラザルトキハ，相交ル直線 $BC$, $CA$ ニ夫々垂直ナル直線 $a$, $b$ ハ必ズ交ル．其交點ヲ $O$ トスレバ，



圓 $B$, $C$ ノ各々ニ付テノ點 $O$ ノ冪ハ相等シク，

圓 $C$, $A$ ノ各々ニ付テノ點 $O$ ノ冪モ亦相等シ，

故ニ，圓 $A$, $B$ ノ各々ニ付テノ點 $O$ ノ冪ハ相等シ．

故ニ，$O$ ハ圓 $A$, $B$ ノ根軸ノ上ニ在リ．

即チ，$c$ ハ $O$ ヲ通ル．

故ニ，$a$, $b$, $c$ ハ同一ノ點ヲ通ル．

若シ，三點 $A$, $B$, $C$ ガ一直線 $l$ 上ニ在ルトキハ，$a$, $b$, $c$ ハ何レモ $l$ ニ垂直ナルヲ以テ，互ニ平行ナリ．

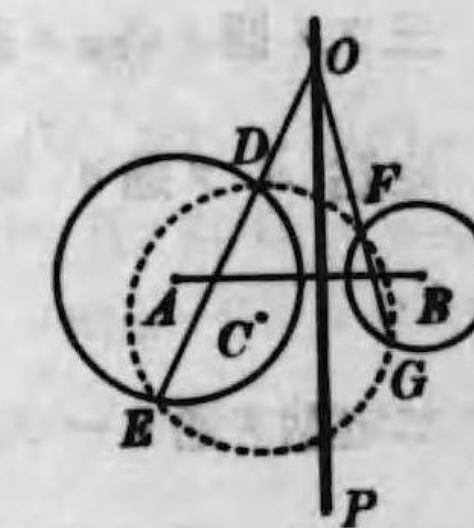
**系** 互ニ相交ル三ツノ圓ノ二ツヅツノ共通弦ハ同一ノ點ヲ通ルカ若クハ平行ナリ．

**定義** 三ツノ圓ヲ二ツヅツ取リタルトキノ，三ツノ根軸ガ交ル點ヲ，其三ツノ圓ノ**根軸ノ中心**又ハ**等冪心**トイフ．

## 92. 根軸の作圖

**作圖題** 二ツノ圓ノ根軸ヲ引クコト．

**作圖** $A$, $B$ ヲ二定圓トシ，圓 $A$ ノ周上ニ任意ノ二點 $D$, $E$ ヲ取リ，又圓 $B$ ノ周上ニ任意ノ點 $F$ ヲ取リ，$D$, $E$, $F$ ヲ通ル圓 $C$ ヲ畫キ，圓 $C$ ト圓 $B$ トノ今一ツノ交點ヲ $G$ トセヨ．




$D$, $E$; $F$, $G$ ヲ結ビ付ケ，延長シテ

$O$ ニ於テ出會ハシメ, $O$ ヲ通リ $AB$ ニ垂線 $OP$ ヲ引ケバ, $OP$ ガ求ムル根軸ナリ.

**證明** 圓 $A, C$ ノ根軸ハ直線 $DE$, 圓 $B, C$ ノ根軸ハ直線 $FG$ ナルヲ以テ, 其交點 $O$ ハ三ツノ圓 $A, B, C$ ノ等羃心ナリ.

故ニ, $O$ ヲ通リ $AB$ ニ垂直ナル直線ハ圓 $A, B$ ノ根軸ナリ.

## 問 題

**1.** 互ニ外切スル三ツノ圓ノ三ツノ內共通切線ハ, 同一ノ點ヲ通ル.

**2.** 三角形ノ各邊ヲ直徑トスル三ツノ圓ノ等羃心ハ, 其三角形ノ垂心ナリ.

**3.** 二圓ノ根軸上ノ一點ヲ中心トシ, 其點ヨリ其一ツノ圓ニ引ケル切線ノ長サヲ半徑トスル圓ハ, 初ノ二ツノ圓ノ各〻ニ直交ス.

[註 二ツノ圓ガ直交ストハ, 其交點ニ於ケル各〻ノ切線ガ互ニ垂直ナコトデアル]

**4.** 二圓ノ各〻ニ直交スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ムルコト.

**5.** 三ツノ圓ノ各〻ニ直交スル圓ヲ畫クコト.

**6.** 定點 $A$ ヲ通リ, 定圓 $O$ ニ直交スル圓ノ中心 $P$ ノ軌跡ヲ求ムルコト.

**7.** 二定點ヲ通リ一ツノ圓ニ直交スル圓ヲ畫クコト.

**8.** 一定點ヲ通リ, 二定圓ノ各〻ニ直交スル圓ヲ畫クコト.



**9.** 出會ハザル二ツノ圓 $O, O'$ ノ各〻ニ直交スル任意ノ圓ガ, 中心線 $OO'$ ニ交ル點ヲ $P, Q$ トシ, 直線 $OO'$ ガ圓 $O$ ニ交ル點ヲ $A, B$ ; 圓 $O'$ ニ交ル點ヲ $A', B'$ トスレバ, $P, Q$ ハ $AB$ 及ビ $A'B'$ ヲ調和ニ分ツ.

---

## 問題略解

**1.** 158 頁, §91 ノ定理ヲ見ヨ.

**2.** $\triangle ABC$ ノ邊 $AB, AC$ ヲ直徑トスル圓ハ, 何レモ $A$ カラ $BC$ ニ引イタ垂線ノ足ヲ通ルカラ, 其垂線ハ其二ツノ圓ノ根軸デアル. $B, C$ カラ夫々其對邊ニ引イタ垂線ニ付テモ同樣デアルコトカラ出テ來ル.

**3.** 切點ト定圓ノ中心トヲ結ビ付ケタ直線ガ, 切線ヲ半徑トスル圓ニ切スルコトヲ證セヨ.

**4.** 二定圓ヲ $O, O'$, 其二圓ニ直交スル任意ノ圓ヲ $P$ トシ, 圓 $O$ ト圓 $P$ トノ交點ノ一ツ $A$ ニ於テ圓 $O$, 圓 $P$ ニ引イタ切線ヲ夫々 $AT, AT'$ トスルト, $AT \perp AT'$ ダカラ $AT$ ハ $P$ ヲ通ルシ, $AT'$ ハ $O$ ヲ通ル

$\therefore \quad PO^2 = OA^2 + PA^2$

同樣ニ, 圓 $O'$, 圓 $P$ ノ一ツノ交點ヲ $B$ トスルト, $PO'^2 = O'B^2 + PB^2$

今 $OA > O'B$ トスルト,

$$PO^2 - PO'^2 = OA^2 - O'B^2$$

[$\because$ $PA = PB =$ 圓 $P$ ノ半徑]

故ニ, $P$ ハ圓 $O, O'$ ノ根軸ノ上ニ在ル. コレト前問カラ出テ來ル.

**5.** 求メル圓ノ中心ハ, 三ツノ圓ノ等羃心デアル [前問應用].

**6.** 問 4 ニ於ケル中心 $O'$ ヲ $A$ トシ, 圓 $O'$ ノ半徑ガ 0 ナル極限ノ場合.

**7.** 前問ヲ應用セヨ. [433 頁, 例五ノ解析第一ヲ見ヨ]

**8.** 求メル圓ノ中心ヲ二ツノ軌跡ノ交リトシテ定メヨ. [問 6 ニ依レ]

**9.** 圓 $O, O'$ ニ直交スル圓ノ中心ヲ $C$ トシ, 圓 $C$ ト圓 $O$ トノ交點ノ一ツ $D$ ト $O$ トヲ結ビ付ケルト, $OD$ ハ圓 $C$ ノ切線ダカラ,

$OD^2 = OP.OQ \quad \therefore OA^2 = OP.OQ$

故ニ 148 頁ノ問 6 ニヨッテ $P, Q$ ハ $AB$ ヲ調和ニ分ツコトガ分ル.

# 第五章 截線

## 93. 共點線，共線點

**定義一** 同一ノ點ヲ通ル三ツ以上ノ直線ヲ**共點線**トイフ.

例ヘバ，三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ共點線ナリ，又各角ノ二等分線モ共點線ナリ.

**定義二** 同一ノ直線上ニ在ル三ツ以上ノ點ヲ**共線點**トイフ.

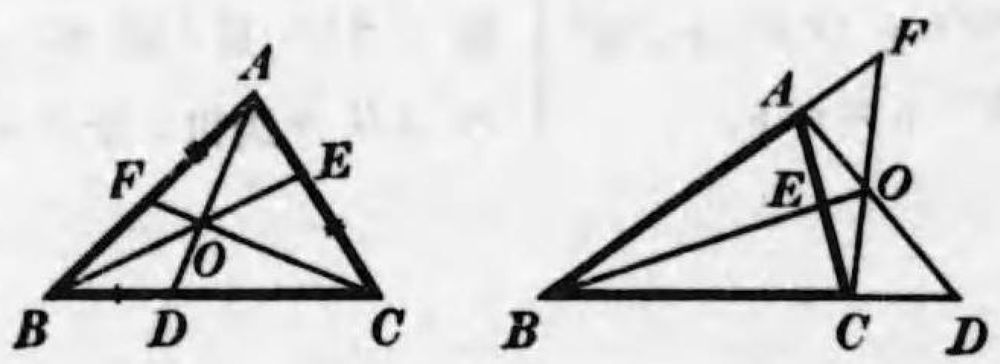
例ヘバ，圓周上ノ一點ヨリ其圓ノ內接三角形ノ三邊ニ引ケル垂線ノ足ハ共線點ナリ. [103 頁, 6 參照]

## 94. チェバ (Ceva) の定理

**定理** 三角形ノ各頂點ヨリ引ケル三ツノ共點線ガ各々ノ對邊ヲ內分若クハ外分シタルトキ，各邊ノ二ツノ分ノ比(相隣ラザルモノヲ前項トス)ノ連乘積ハ1ニ等シ.

例ヘバ，$\triangle ABC$ ト同一平面上ノ一點ヲ $O$ トシ，直線 $AO$, $BO$, $CO$ ガ其對邊若クハ其延長ト夫々 $D$, $E$, $F$ ニ於テ交ルトキハ，

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1 \quad ナリ.$$






**證明** $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ ハ同高，又 $\triangle OBD$, $\triangle OCD$ モ同高ナルヲ以テ，

$$\frac{BD}{DC}=\frac{\triangle ABD}{\triangle ACD}=\frac{\triangle OBD}{\triangle OCD}$$

$$=\frac{\triangle ABD-\triangle OBD}{\triangle ACD-\triangle OCD}=\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO}$$

卽チ，
$$\frac{BD}{DC}=\frac{\triangle OAB}{\triangle OAC} \qquad (1)$$

同樣ニ，
$$\frac{CE}{EA}=\frac{\triangle OBC}{\triangle OBA} \qquad (2)$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{\triangle OCA}{\triangle OCB} \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ヨリ，
$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1 \qquad (4)$$

**注意** 此 (4) ハ各線分ノ數値ヲ考ヘテ，

$$BD.CE.AF=DC.EA.FB$$

ト書クコトモアル. ソコデ，本節ノ定理ヲ次ノ樣ニ述ベルコトガアル.

**定理** 三角形ノ各頂點ヲ通ル三ツノ共點線ガ各々ノ對邊若クハ其延長ト交ルトキ，一ツ置キニ取リタル三ツノ線分ノ積ハ，殘ル三ツノ線分ノ積ニ等シ.

## 95. 前節の定理の逆

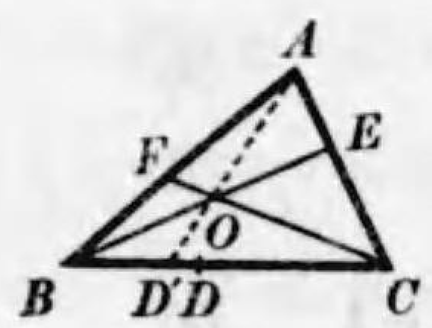
**定理** 三角形ノ各邊ヲ內分スルカ，又ハ一邊ヲ內分シ，他ノ二邊ヲ外分シタルトキ，各邊ノ二ツノ分ノ比(相隣ラザルモノヲ前項トス)ノ連乘積ガ1ニ等シキトキハ，各頂

點ト其對邊ノ上ニ在ル分點トヲ結ビ付クル三ツノ直線ハ共點線ナリ.

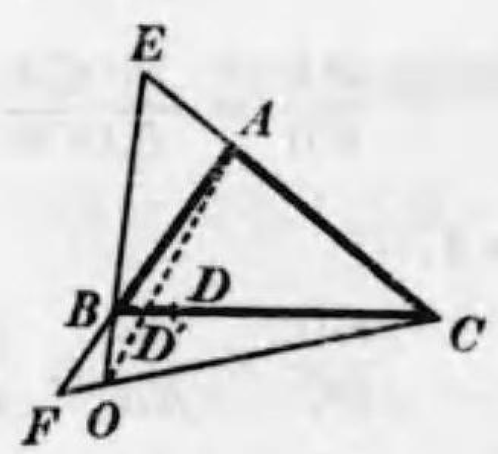
例ヘバ, $\triangle ABC$ ノ邊 $BC$, $CA$, $AB$ ノ內分點ガ夫々 $D$, $E$, $F$ (甲圖), 又ハ例ヘバ $BC$ ノ內分點ガ $D$, $CA$, $AB$ ノ外分點ガ夫々 $E$, $F$ (乙圖) ニシテ,

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1 \qquad (1)$$

ナルトキハ, $AD$, $BE$, $CF$ ハ共點線ナリ.




(甲圖)




(乙圖)

**證明** $BE$, $CF$ ノ交點ヲ $O$ トシ, $A$, $O$ ヲ結ビ付ケ, 直線 $AO$ ト $BC$ トノ交點ヲ $D'$ トスレバ, 前節ニヨリテ,

$$\frac{BD'}{D'C}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1 \qquad (2)$$

(1), (2) ニヨリテ,

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BD'}{D'C}$$

而シテ, $D$, $D'$ ハ何レモ $BC$ ノ內分點ナリ.

故ニ, $D'$ ハ $D$ ニ重ナル.

卽チ, $AD$, $BE$, $CF$ ハ共點線ナリ.

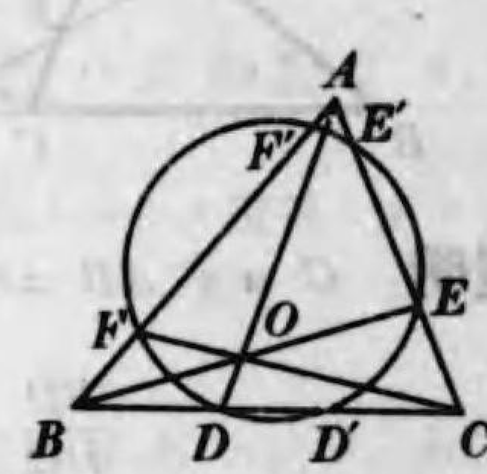
**注意一** (1) ヲ $BD.CE.AF=DC.EA.FB$ ト書イテ, 本節ノ定理ヲ次ノ樣ニ述ベルコトガアル.



**定理** 三角形ノ各頂點ヲ通ル直線ガ對邊ヲ分ツ分(三ツトモ內分スルカ,若クハ一ツヲ內分シ他ノ二ツヲ外分シタル)ヲ一ツオキニ取リタル分ノ積ガ相等シキトキハ, 三ツノ直線ハ共點線ナリ.

**注意二** 本定理ハ,三直線ガ同一ノ點ヲ通ルコトノ證明ニ使フコトガヨクアル.

**例** 一ツノ圓ガ $\triangle ABC$ ノ邊 $BC$ ト $D$, $D'$ ニ於テ, 邊 $CA$ ト $E$, $E'$ ニ於テ, 邊 $AB$ ト $F$, $F'$ ニ於テ交リ, $AD$, $BE$, $CF$ ガ共點線ナルトキハ, $AD'$, $BE'$, $CF'$ モ亦共點線ナリ.




**證** $BD.BD'=BF.BF'$ (1)

$CE.CE'=CD.CD'$ (2)

$AF.AF'=AE.AE'$ (3)

(1), (2), (3) ヲ掛ケ合ハセ, 因數ノ順ヲ變ヘレバ,

$$BD.CE.AF.BD'.CE'.AF'=DC.EA.FB.D'C.E'A.F'B \qquad (4)$$

然ルニ, $BD.CE.AF=DC.EA.FB$ (5)

(4) ヲ (5) デ割レバ,

$$BD'.CE'.AF'=D'C.E'A.F'B$$

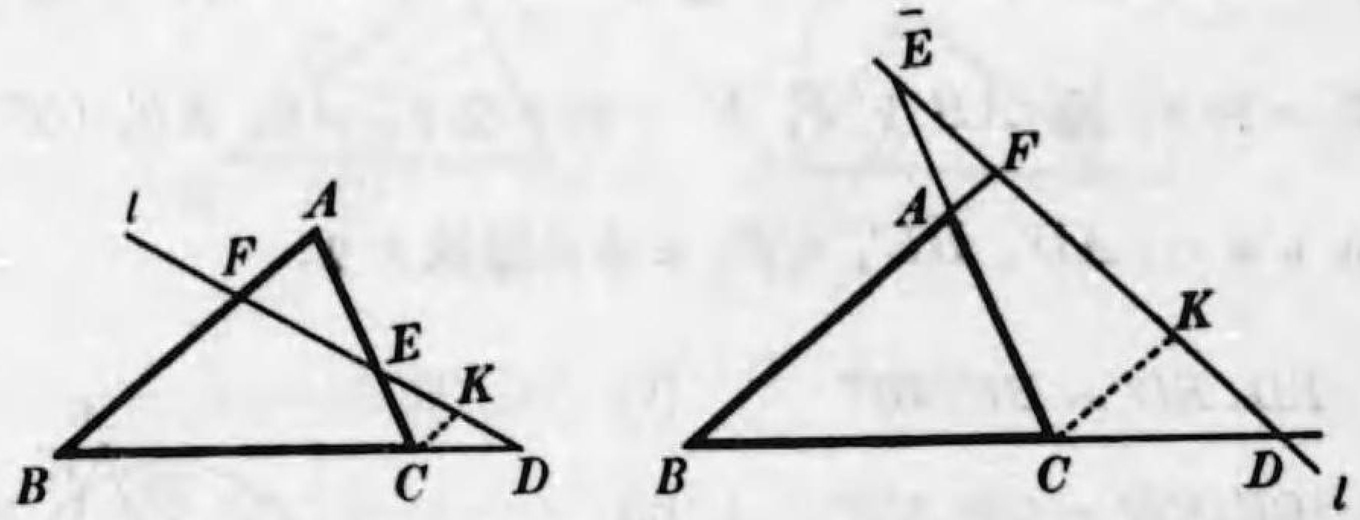
故ニ, $AD'$, $BE'$, $CF'$ ハ共點線ナリ.

## 96. メネラウス (Menelaus) の定理

**定理** 一ツノ直線ガ三角形ノ邊若クハ延長ニ交ルトキハ,各邊ノ二ツノ分ノ比(相隣ラザルモノヲ前項トス)ノ連乘積ハ1ニ等シ.

例ヘバ,直線 $l$ ガ $\triangle ABC$ ノ邊 $BC$ ノ延長ト $D$ ニ於テ, $CA$, $AB$ 若クハ其兩方ノ延長ト夫々 $E$, $F$ ニ於テ交ルトキハ,

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$$ ナリ. (5, 警察)




**證明** $C$ ヨリ $AB$ ニ平行ナル直線ヲ引キ $l$ ト $K$ ニ於テ交ラシムレバ,

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BF}{CK},\qquad \frac{CE}{EA}=\frac{CK}{FA}$$

$$\therefore\ \frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=\frac{BF}{CK}\times\frac{CK}{FA}\times\frac{AF}{FB}=1$$

**注意** 此定理モ 163 頁, §94 ノ注意デ言ッタノト同様ニ, 次ノ様ニ述ベルコトガアル.

**定理** 三角形ノ三邊若クハ其延長ガ,其一ツノ截線ニテ分タレタル分ヲ一ツ置キニ取リタル三ツノ線分ノ積ハ,殘ル三ツノ線分ノ積ニ等シ.



## 97. 前節の定理の逆

三角形ノ三邊ヲ何レモ外分スルカ又ハ一邊ヲ外分シ他ノ二邊ヲ内分シタルトキ,各邊ノ二ツノ分ノ比(相隣ラザルモノヲ前項トス)ノ連乘積ガ1ニ等シキトキハ,三ツノ分點ハ共線點ナリ.

**證**ハ 163 頁, §95 ノト同様ナレバ讀者ニ任カス.

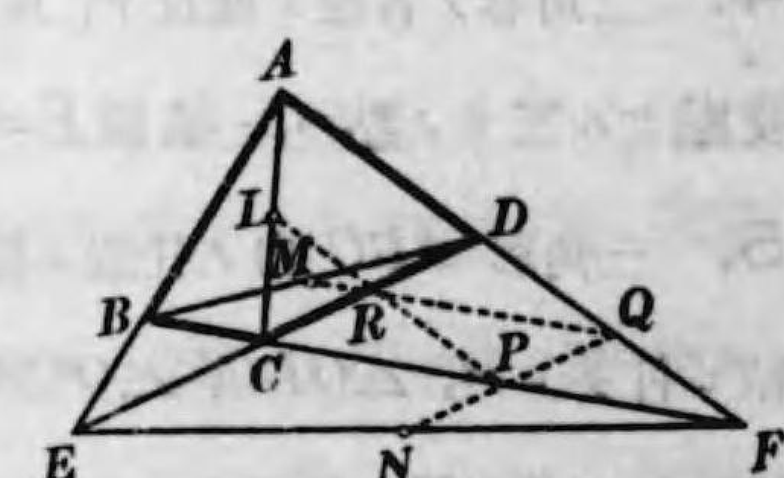
**注意一** 此定理モ 164 頁, §95 ノ注意一デ言ッタノト同様ニ, 次ノ様ニ述ベルコトガアル.

**定理** 三角形ノ三邊ヲ何レモ外分スルカ,又ハ一邊ヲ外分シ他ノ二邊ヲ内分シタルトキ,一ツ置キニ取リタル分ノ積ガ相等シキトキハ,三ツノ分點ハ共線點ナリ.

**注意二** 本節ノ定理ハ,三點ガ一直線上ニ在ルコトノ證明ニ使フコトガアル.

**例** 四邊形 $ABCD$ ノ邊 $AB$, $DC$ ノ延長ガ $E$ ニ於テ, $BC$, $AD$ ノ延長ガ $F$ ニ於テ交ルトキ,兩對角線 $AC$, $BD$ ノ各々ノ中點ト線分 $EF$ ノ中點トハ一直線上ニ在リ.

**證明** $AC$, $BD$, $EF$ ノ中點ヲ夫々 $L$, $M$, $N$ トシ, $\triangle DCF$ ノ邊 $CF$, $FD$, $DC$ ノ中點ヲ夫々 $P$, $Q$, $R$ トセヨ.



サテ, 直線 $ABE$ ヲ $\triangle DCF$ ノ三邊ノ截線ト考フレバ,

$$DA.FB.CE = AF.BC.ED \qquad (1)$$

コノ等式ノ兩邊ノ各因數ニ $\frac{1}{2}$ ヲ掛ケ, 且ツ

$$\frac{1}{2}DA = RL, \quad \frac{1}{2}AF = LP, \ldots\ldots$$

ナルコトニ注意シ, 適當ニ因數ノ順ヲ變ヘレバ, (1) ヨリ,

$$RL.PN.QM = LP.NQ.MR \quad \text{ヲ得,}$$

而シテ, $M, L, N$ ハ夫々 $\triangle PQR$ ノ邊 $PR, QR, QP$ ノ延長上ニ在リ,

故ニ $L, M, N$ ハ一直線上ニ在リ.

## 問題

**1.** 三角形ノ三ツノ中線, 三ツノ角ノ二等分線ハ何レモ共點線ナルコトヲ, 163 頁, §95 ノ定理ヲ用ヒテ證明セヨ.

**2.** 三角形ノ各頂點ト其對邊ノ內接圓ノ切點トヲ結ビ付クル三ツノ直線ハ共點線ナリ.

**3.** $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ內ニ在ル傍接圓ガ邊 $BC$ 及ビ邊 $AB, AC$ ノ延長ニ切スル點ヲ夫々 $D, F, E$ トスレバ $AD, BE, CF$ ハ共點線ナリ.

**4.** 三角形ノ各邊ノ延長ト, 其邊ニ對スル角ノ外角ノ二等分線トノ交點ナル三ツノ點ハ, 一直線上ニ在リ.

**5.** 三角形 $ABC$ 內ノ任意ノ點ヲ $O$ トシ, $O, A$; $O, B$; $O, C$ ヲ結ビ付クレバ, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$, $\triangle OAB$ ノ $O$ ニ於ケル外角ノ二等分線ト其對邊ノ延長トノ交點ハ共線點ナリ.



**6.** 三ツノ圓ヲ二ツヅツ取リタル三組ノ圓ヲ考フルトキハ,

(1) 各々ノ組ノ相似內心ト殘リノ圓ノ中心トヲ結ビ付クル三ツノ直線ハ共點線ナリ.

(2) 各々ノ組ノ三ツノ相似外心ハ共線點ナリ.

(3) 二組ノ圓ノ二ツノ相似內心ト, 殘ル一組ノ圓ノ相似外心トハ, 何レモ共線點ナリ.

---

**問題略解**

**3.** $BD = BF$, $CD = CE$, $AE = AF$ ニ注意シ, §95 ニヨレ.

**4.** 40 頁, §30, (4) ト §97 ニ依レ.

**5.** $\triangle OBC$ ノ $O$ ニ於ケル外角ノ二等分線ハ $BC$ ヲ $OB : OC$ ニ外分スルコト等ニ注意シ, §97 ニ依レ.

**6.** 三ツノ圓ヲ $O, O', O''$ 其半徑ヲ夫々 $r, r', r''$ トシ, ソコデ

(1) $\triangle OO'O''$ ノ各邊ヲ相似內心ガ分ツ分ノ比ヲ半徑ノ比デ表ハシ, 163 頁. §95 ニ依レ.

(2) $\triangle OO'O''$ ノ各邊ヲ相似外心ガ分ツ分ノ比ヲ半徑ノ比デ表ハシ, 167 頁, §97 ニ依レ.

(3) (2) ノ證ニ倣ヘ.

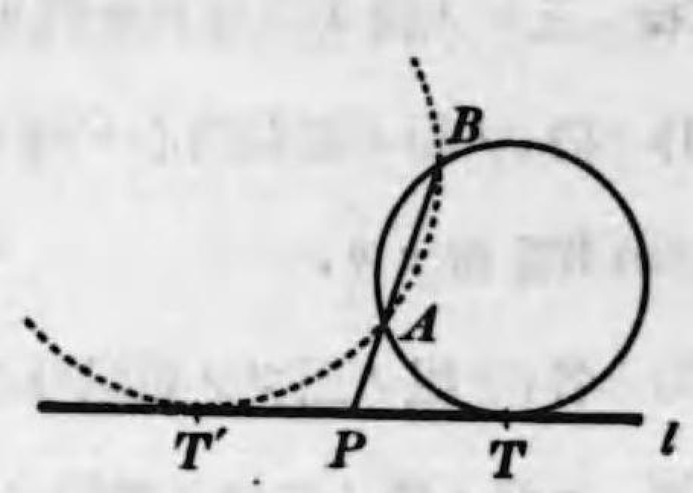
# 第六章 切圓ノ作圖題

## 98. 二定點を通り定直線に切する圓

**作圖題** 定直線ニ切シ, 且ツ其直線上ニ在ラザル二定點ヲ通ル圓ヲ畫クコト.

例ヘバ, 定直線 $l$ ニ切シ, $l$ 上ニ在ラザル二定點 $A, B$ ヲ通ル圓ヲ畫クコト.

**解析** 求メル圓ガ畫ケタリトシ, 其切點ヲ $T$ トセヨ.




$A, B$ ヲ通ル直線ガ $l$ ト $P$ ニ於テ交ルトスレバ,

$$PT^2 = PA.PB$$

此右邊ノ $PA, PB$ ハ一定ニシテ, $PT$ ハ其比例中項ナリ. ソコデ,

**作圖** $A, B$ ヲ通ル直線ヲ引キ, $l$ ト $P$ ニ於テ交ルトセヨ.

$PA, PB$ ノ比例中項ヲ求メ, 其長サヲ $a$ トセヨ. ($AB$ ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ, $P$ ヨリ其圓ニ切線ヲ引ケバ, 其長サハ $a$ ニ等シ)

中心 $P$, 半徑 $a$ ナル圓ヲ畫キ, $l$ ト $T, T'$ ニ於テ交ラシメ, $A, B, T$ ヲ通ル圓, 及ビ $A, B, T'$ ヲ通ル圓ヲ畫ケ.

然ルトキハ, 其二ツノ圓ガ求ムル圓ナリ.

**證** 圓 $ABT$ ニ於テ

$$PA.PB = a^2 = PT^2$$

故ニ, $PT$ 卽チ $l$ ハ圓 $ABT$ ニ切ス. [83 頁, (II)]

同樣ニ, 圓 $ABT'$ モ求ムル圓ナリ.

**注意** $AB \parallel l$ ナルトキハ, $P$ ヲ求ムル能ハズ, 其場合ニハ, $AB$ ノ垂直二等分線ト $l$ トノ交點ヲ $C$ トスレバ, $A, B, C$ ヲ通ル圓ガ求ムル圓ナリ. 從テ, 此場合ニハ, 求ムル圓ハ唯一ツアルノミナリ.

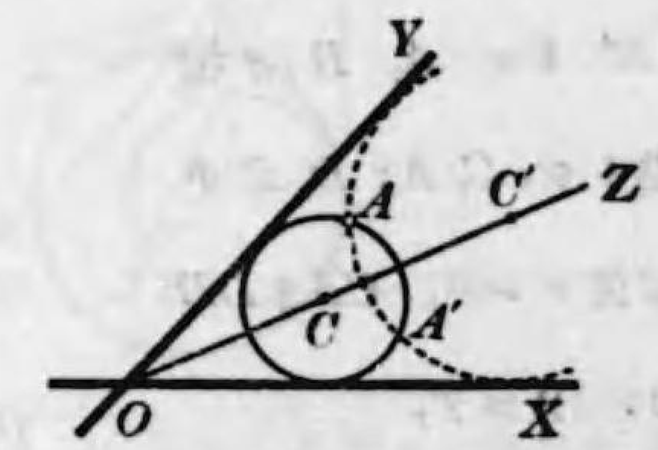
## 99. 定點を通り，二定直線に切する圓

**作圖題** 相交ル二定直線ニ切シ, 其直線上ニ在ラザル定點ヲ通ル圓ヲ畫クコト.



例ヘバ, 二定直線 $OX, OY$ ニ切シ, $OX, OY$ ノ上ニ在ラザル定點 $A$ ヲ通ル圓ヲ畫クコト.

**解析** 求ムル圓ガ畫ケタリトシ, 其中心ヲ $C$ トセヨ.




又 $A$ ガ $\angle XOY$ ノ内ニ在リトシ, $O$ ヨリ $C$ ヲ通ル半直線ヲ引ケバ, $OC$ ハ $\angle XOY$ ヲ二等分ス.

サテ, 圓 $C$ ハ直線 $OC$ ニ付テ對稱ナルヲ以テ, $OC$ ニ付テ $A$ ニ對稱ナル點 $A'$ モ亦圓 $C$ ノ周ノ上ニ在リ.

卽チ圓 $C$ ハ二定點 $A, A'$ ヲ通リ $OX$ (又ハ $OY$) ニ切スル圓ナリ, ソコデ

**作圖** $\angle XOY$ ノ二等分線 $OZ$ ヲ引ケ.

$OZ$ ニ付テ $A$ ニ對稱ナル點 $A'$ ヲ求メヨ.

$A, A'$ ヲ通リ $OX$ ニ切スル圓 $C, C'$ ヲ畫ケ [前節].

然ルトキハ, 圓 $C, C'$ ガ求ムル圓ナリ.

**證明** 圓 $C, C'$ ハ直線 $OX$ ニ切ス,

然ルニ, 圓 $C, C'$ ノ中心 $C, C'$ ハ $AA'$ ノ垂直二等分線 $OZ$ 上ニ在ルヲ以テ, 圓 $C, C'$ ハ直線 $OY$ ニモ切ス.

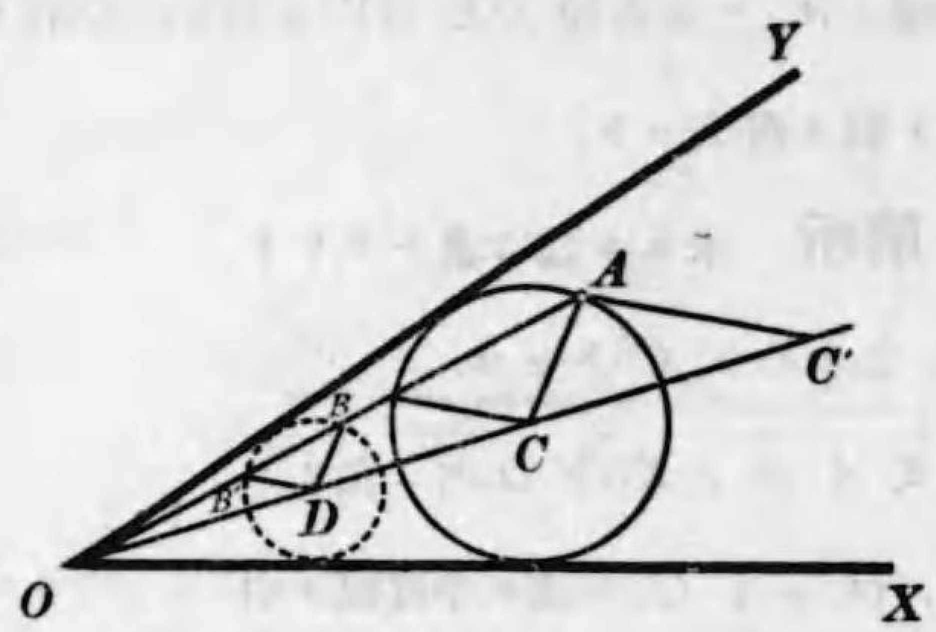
卽チ, 圓 $C, C'$ ガ求ムル圓ナリ.

**注意** $A$ ガ $OZ$ 上ニ在ル場合ニハ, $A$ ヲ通リ $OZ$ ニ垂直ナル直線ヲ引キ, 其直線ト半直線 $OX, OY$ ニ切スル圓ガ求ムル圓ナリ.

**別法** 本題ハ次ノ樣ニヤッテモ可イ.

**解析** 假リニ求ムル圓ガ畫ケタリトシ, 更ニ $OX, OY$ ニ切スル任意ノ圓 $D$ ヲ畫ケバ, $O$ ハ圓 $C, D$ ノ相似外心ナリ.

$OA$ ヲ結ビ付ケ，直線 $OA$ ガ圓 $D$ ニ交ル點ヲ $B, B'$ トシ $A, B$ ヲ相應點トシ，$C, A$；$D, B$ ヲ結ビ付クレバ，$CA \parallel DB$ ナリ．ソコデ，




**作圖**　$OX, OY$ ニ切スル任意ノ圓 $D$ ヲ畫キ，又 $O, A$ ヲ結ビ付ケヨ．直線 $OA$ ト圓 $D$ トノ交點ヲ $B, B'$ トシ $D, B$；$D, B'$ ヲ結ビ付ケヨ．

$A$ ヨリ $DB, DB'$ ニ平行ナル直線ヲ引キ，$O, D$ ヲ結ビ付クル直線ト夫々 $C, C'$ ニ於テ出會ハシメヨ．

中心 $C$，半徑 $CA$ ナル圓，及ビ中心 $C'$，半徑 $C'A$ ナル圓ヲ畫ケバ，其二ツノ圓ガ求ムル圓ナリ．

**證**ハ讀者ニ任カス [152 頁，§88 ノ第二ノ系一ヲ見ヨ]

## 100.　二定點を通り，定圓に切する圓

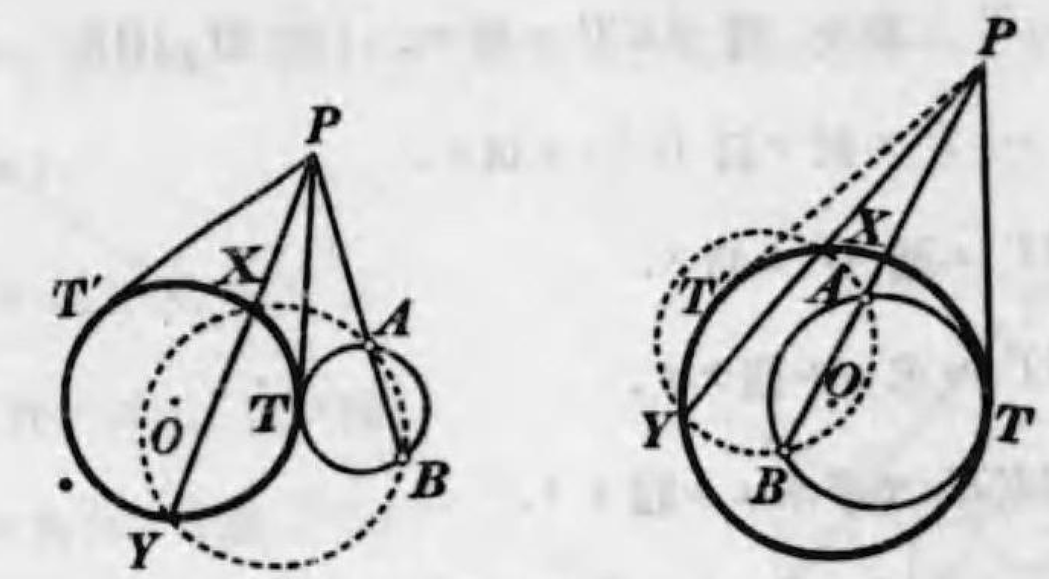
**作圖題**　定圓ニ切シ，其圓周上ニ在ラザル二定點ヲ通ル圓ヲ畫クコト．

例ヘバ，定圓 $O$ ニ切シ，圓 $O$ ノ周上ニ在ラザル二定點 $A, B$ ヲ通ル圓ヲ畫クコト.*　(14, 高岡商；7, 醫專；5, 陸士)

**解析**　求ムル圓ガ畫ケタリトシ，其切點ヲ $T$ トセヨ．

* $A, B$ ノ中，一ツガ圓 $O$ ノ內ニ在ッテ，他ガ圓 $O$ ノ外ニ在ル場合ニハ，求メル圓ヲ畫クコトハ出來ナイカラ，$A, B$ ハ二ツトモ圓內，又ハ二ツトモ圓外ニ在ルトスル．






$T$ ニ於テ，二ツノ圓ノ共通切線ヲ引キ，$A, B$ ヲ通ル直線トノ交點ヲ $P$ トセヨ．(此 $P$ ノ位置ヲ決定スルコトヲ得レバ，$T$ ガ定マリ，從テ求ムル圓ヲ畫クコトヲ得)

サテ，$P$ ヨリ圓 $O$ ニ交ル任意ノ直線ヲ引キ，圓 $O$ トノ交點ヲ $X, Y$ トスレバ，

$$PA.PB = PT^2$$

$$PX.PY = PT^2$$

$$\therefore\quad PA.PB = PX.PY$$

故ニ，$A, B, X, Y$ ハ一ツノ圓周上ニ在リ，而シテ $X$ ハ圓 $O$ ノ周上ノ任意ノ點，$P$ ハ $XY$ ト $AB$ トノ交點ナリ．ソコデ，

**作圖**　圓 $O$ ノ周上ニ任意ノ點 $X$ ヲ取リ，$A, B, X$ ヲ通ル圓ヲ畫ケ．

其圓ト定圓 $O$ トノ共通弦（若シ，其二圓ガ切スレバ，切點ヲ通ル共通切線）ヲ引ケ．又 $A, B$ ヲ通ル直線ヲ引キ，共通弦（若クハ共通切線）ノ延長トノ交點ヲ $P$ トセヨ．

$P$ ヨリ圓 $O$ ニ切線ヲ引キ，其切點ヲ $T, T'$ トセヨ．

$A, B, T$ ヲ通ル圓及ビ $A, B, T'$ ヲ通ル圓ヲ畫ケバ，ソレガ求ムル圓ナリ．

**證明**　圓 $O$ ニ於テ，　$PX.PY = PT^2$

又圓 $ABX$ ニ於テ，　$PA.PB = PX.PY$

$$\therefore\quad PA.PB = PT^2$$

故ニ，$PT$ ハ $T$ ニ於テ，圓 $ABT$ ニ切ス．[53 頁，(II)]

然ルニ，$PT$ ハ $T$ ニ於テ圓 $O$ ニモ切ス．

故ニ，圓 $ABT$ ハ圓 $O$ ニ切ス．

即チ，圓 $ABT$ ハ求ムル圓ナリ．

同様ニ，圓 $ABT'$ モ亦求ムル圓ナリ．

**注意一**　上ノ作圖ニ於ケル點 $P$ ハ $X$ ヲ圓 $O$ ノ周上ノドコニ取ッテモ變ラナイ．

ナゼナラバ，圓 $O$ ノ周上ニ $X$ ト異ナル任意ノ點 $X'$ ヲ取リ，$A$, $B$, $X'$ ヲ通ル圓ヲ畫クト，圓 $ABX$ ト圓 $O$ トノ共通弦ト直線 $AB$ (即チ圓 $ABX$ ト圓 $ABX'$ トノ共通弦) トノ交點ハ三ツノ圓ノ等羃心ダカラ，圓 $ABX'$ ト圓 $O$ トノ交點モ矢張リ其點ヲ通ルカラデアル．

**注意二**　上ノ作圖ハ $AB \parallel XY$ ノ場合ニハ，當嵌ラナイ．其場合ニハ，$AB$ ノ垂直二等分線ト圓 $O$ トノ交點ヲ $T$, $T'$ トスルト $A$, $B$, $T$ ヲ通ル圓ト $A$, $B$, $T'$ ヲ通ル圓ガ求メル圓デアル．

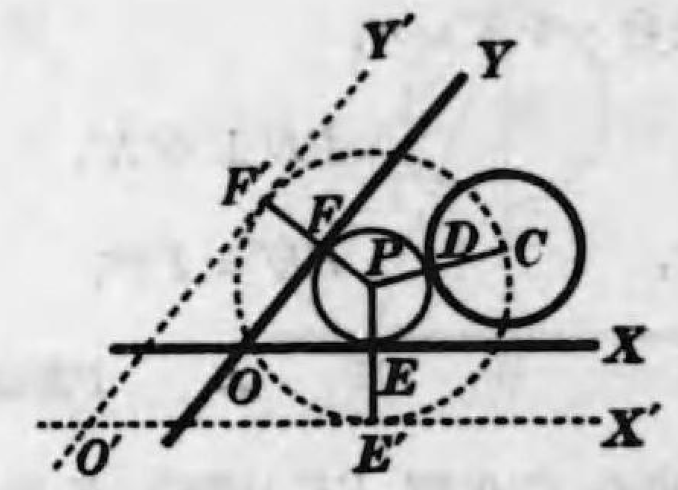
又直線 $AB$ ガ圓 $O$ ニ切スル場合ニハ，求ムル圓ハ一ツ畫ケルダケダガ，其他ノ場合ニハ常ニ二ツ畫ケル．

### 101.　二定直線と定圓とに切する圓

**作圖題**　相交ル二定直線ト，其二直線ニ出會ハザル定圓トニ切スル圓ヲ畫クコト．



例ヘバ相交ル二定直線 $OX$, $OY$ 及ビ其二直線ニ出會ハザル定圓 $C$ ニ切スル圓ヲ畫クコト．




**解析**　假リニ，$OX$, $OY$ ニ夫々 $E$, $F$ ニ於テ切シ，且ツ圓 $C$ ニ $D$ ニ於テ外切スル圓 $P$ ガ畫ケタリトセヨ．

中心 $P$, 半徑 $PC$ ナル圓ヲ畫キ，$OX$, $OY$ ニ平行ナル其圓ノ切線 $O'X'$, $O'Y'$ ヲ，$OX$, $OY$ ニ對シテ，夫々中心 $P$ ト反對ノ側ニ引キ，其切點ヲ夫々 $E'$, $F'$ トスレバ，$PE$, $PE'$ ハ夫々 $OX$, $O'X'$ ニ垂直ナルヲ以テ，$PEE'$ ハ一直線ナリ．

同様ニ，$PFF'$ モ亦一直線ナリ．

而シテ，
$$PE' = PF' = PC$$
$$PE = PF' = PD$$
$$\therefore\ EE' = FF' = DC$$

且ツ $EE'$ ハ $OX$, $O'X'$ ニ垂直，$FF'$ ハ $OY$, $O'Y'$ ニ垂直ナリ．

即チ，$O'X'$, $O'Y'$ ハ夫々 $OX$, $OY$ ニ對シ $P$ ト反對ノ側ニ在リテ，其各々ヨリ何レモ圓 $C$ ノ半徑ダケノ距離ニ在リテ，夫々 $OX$, $OY$ ニ平行ナル直線ナリ．ソコデ，

**作圖**　$OX$, $OY$ ニ對シ，$P$ ト反對ノ側ニ，之ニ平行ニシテ，且ツ圓 $C$ ノ半徑ダケノ距離ニ在ル直線 $O'X'$, $O'Y'$ ヲ引ケ．

$C$ ヲ通リ，$O'X'$, $O'Y'$ ニ切スル圓 $P$, $P'$ ヲ畫ケ [170 頁 §99]

$P$, $P'$ ヲ中心トシ，其各々ヨリ $OX$ (又ハ $OY$) ニ引ケル垂線ノ長サヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバ，ソレガ求ムル圓ナリ．

**證明** $P$ ヨリ $OX$ ニ垂線 $PE$ ヲ引キ, 延長シテ $O'X'$ ト $E'$ ニ於テ出會ハシメ, 又 $P$ ヨリ $OY$ ニ垂線 $PF$ ヲ引キ, 延長シテ $O'Y'$ ト $F'$ ニ於テ出會ハシムレバ,

$$PE' \perp O'X', \qquad PF' \perp O'Y'$$

而シテ, $$PE' = PF', \qquad EE' = FF'$$

$$\therefore \quad PE = PF$$

故ニ, 中心 $P$ 半徑 $PE$ ノ圓ハ $F$ ニ於テ $OY$ ニ切ス.

又 $$PC = PE' = PE + EE'$$

卽チ, $PC$ ハ圓 $P$ 及ビ圓 $C$ ノ半徑ノ和ニ等シ,

故ニ, 二ツノ圓ハ外切ス.

卽チ, 中心 $P$, 半徑 $PE$ ナル圓ハ求ムル圓ナリ.

同樣ニ, $P'$ ヲ中心トシ, $OX$ ニ切スル圓モ亦求ムル圓ナリ.

更ニ $O'X'$, $O'Y'$ ヲ $OX$, $OY$ ニ對シテ, 夫々 $C$ ト同ジ側ニ取レバ, $OX$, $OY$ ニ切シ, 定圓 $C$ ニ內切スル二ツノ圓ヲ畫クヲ得.

## 102. 定直線と定圓とに切し, 定點を通る圓

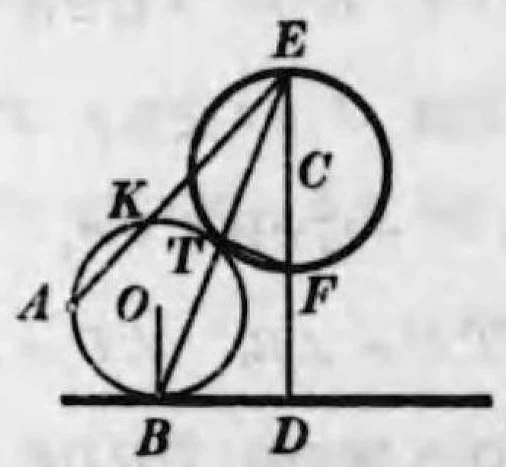
**作圖題** 定直線トソレニ交ラザル定圓トニ切シ, 且ツ其何レノ上ニモ在ラザル定點ヲ通ル圓ヲ畫クコト.

例ヘバ, 定直線 $l$ ト $l$ ニ交ラザル定圓 $C$ トニ切シ, 且ツ直線 $l$ ノ上ニモ, 圓 $C$ ノ上ニモ在ラザル定點 $A$ ヲ通ル圓ヲ畫クコト.

**解析** 求ムル圓 $O$ ガ畫ケタリトシ, $l$ ニ切スル點ヲ $B$, 圓 $C$ ニ外切スル點ヲ $T$ トセヨ.



$B$, $T$ ヲ結ビ付ケ, 延長シテ圓 $C$ ノ周ト再ビ $E$ ニ於テ交ラシメ, $O$, $B$; $C$, $E$ ヲ結ビ付クレバ,




$$OB \parallel CE \quad [91\text{頁ノ問 }5]$$

然ルニ, $$OB \perp l$$

$$\therefore \quad CE \perp l$$

卽チ, $E$ ハ定點 $C$ ヨリ $l$ ニ引ケル垂線 $CD$ ノ $C$ ヲ越エテノ延長ト圓 $C$ ノ周トノ交點ナリ.

サテ, $CD$ ト圓 $C$ トノ交點ヲ $F$ トシ, $T$, $F$ ヲ結ビ付クレバ,

$$\angle ETF = \angle R$$

又 $$\angle D = \angle R$$

故ニ, 四邊形 $TBDF$ ニハ外接圓ヲ畫クコトヲ得.

$$\therefore \quad ET.EB = EF.ED \qquad (1)$$

更ニ, $E$, $A$ ヲ結ビ付ケ, 圓 $O$ ノ周ト $K$ ニ於テ出會フトスレバ,

$$EK.EA = ET.EB \qquad (2)$$

故ニ, (1), (2) ヨリ $$EK.EA = EF.ED$$

故ニ, $A$, $K$, $F$, $D$ ヲ通ッテ一ツノ圓ヲ畫クヲ得.

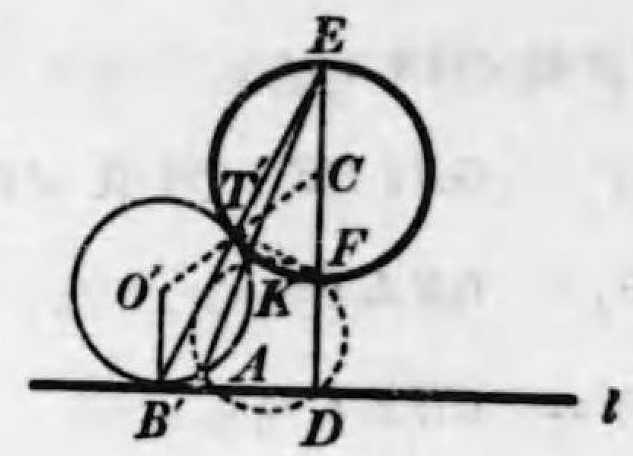
故ニ, 點 $K$ ノ位置ハ定マル.

而シテ, 求ムル圓ハ, 點 $K$ ト定點 $A$ トヲ通リ $l$ ニ切スル圓ナリ. ソコデ

**作圖** 定圓ノ中心 $C$ ヲ求メ, $C$ ヨリ $l$ ニ垂線 $CD$ ヲ引キ, $CD$ ガ圓 $C$ ニ交ル點ヲ $F$ トシ, $A$, $D$, $F$ ヲ通ル圓ヲ畫ケ. (次頁ノ圖ヲ見ヨ)

$DC$ ヲ延長シテ, 圓 $C$ ノ周ト $E$ ニ於テ交ラシメ, $E$, $A$ ヲ結ビ付ケ, 圓 $ADF$ ノ周ト $EA$ トノ交點ヲ $K$ トシ, $A$, $K$ ヲ通ッテ $l$ ニ切スル圓 $O$, $O'$ ヲ畫ケバ [169 頁, §98], 圓 $O$, $O'$ ガ求ムル圓ナリ.

**證明** 圓 $O'$ ガ $l$ ニ切スル點ヲ $B'$ トシ, $E, B'$ ヲ結ビ付クル直線ト定圓 $C$ トノ交點ヲ $T''$ トシ, $T'', F$ ヲ結ビ付クレバ,




$$\angle ET''F = \angle R, \quad \angle D = \angle R$$

ナルヲ以テ, 四邊形 $T''B'DF$ ニ外接圓ヲ畫クヲ得.

$$\therefore \quad EF.ED = ET''.EB'$$

然ルニ, $EF.ED = EK.EA$ [作圖]

$$\therefore \quad ET''.EB' = EK.EA$$

故ニ, 四邊形 $AKT''B'$ ニ外接圓ヲ畫クヲ得.

即チ, $T''$ ハ圓 $AKB'$ (即チ圓 $O'$) ノ周ノ上ニ在リ.

次ニ, $O', B'$; $O', T''$; $C, T''$ ヲ結ビ付クレバ,

$\triangle O'B'T''$, $\triangle CET''$ ハ何レモ二等邊ナリ, 而シテ,

$$\angle B' = \angle E$$

$$\therefore \quad \angle O'T''B' = \angle CT''E$$

故ニ $O'T''C$ ハ一直線ナリ.

即チ, $T''$ ハ中心線 $O'C$ ノ上ニ在リ.

故ニ, 圓 $O'$ ト圓 $C$ トハ外切ス.

同樣ニ, 圓 $O$ ト圓 $C$ トモ, 亦外切スルコトヲ證明スルヲ得.

***注意一** $A$ ガ直線 $CD$ 上ニ在ル場合ニハ, 圓 $ADF$ ハ畫ケナイ. サレド, 此場合ニハ, $EA$ 又ハ其延長上ニ一點 $K$ ヲ, $EF.ED = EA.EK$ ニ適スル樣ニ求メ (其求メ方如何), 前ト同樣ニ作圖スレバ可イ.

* 本節以下 §105 マデノ注意 (即チ印 * ノ付ケアル注意) ハ, 十分ニ餘裕アル讀者ノ爲ニ説明シタモノデアル.



又 $EA$ ガ圓 $ADF$ ニ切スル場合ニハ, $K$ ハ $A$ ニ合シ, 上ノ作圖ハ施セナイ. 併シ, 其場合ニハ, $A$ ニ於テ $EA$ ニ切シ, 且ツ $l$ ニ切スル圓ガ求メル圓デアル.

又 $EA \parallel l$ ナル場合ニハ, $A, K$ ヲ通リ $l$ ニ切スル圓ハ唯一ツダカラ, 求メル圓ハ唯一ツデアル.

***注意二** $A, D, F$ ヲ通ル圓ヲ畫ク代リニ, $A, D, E$ ヲ通ル圓ヲ畫キ, 前ノ作圖ニ倣ッテ作圖スルト, $A$ ヲ通リ $l$ ニ切シ, 且ツ圓 $O$ ニ内切スル圓ヲ畫クコトガ出來ル.

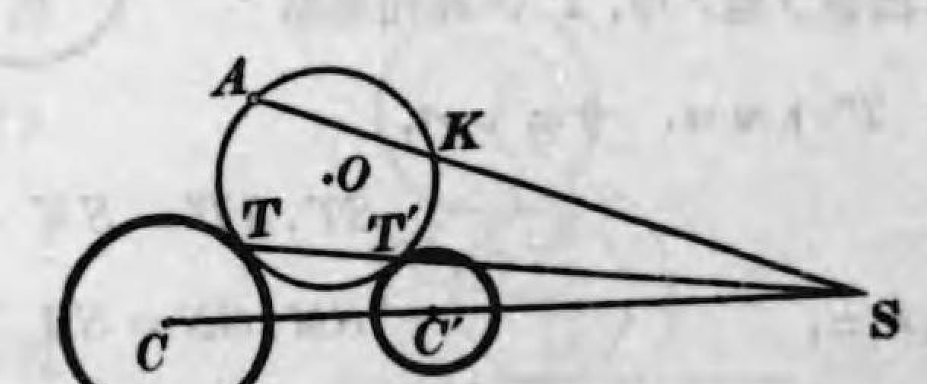
即チ, 本問題ニハ, 一般ニ四ツノ解ガアル.

## *103. 定點を通り二定圓に切する圓

**作圖題** 出會ハザル二定圓ニ切シ, 且ツ其定圓外ノ定點ヲ通ル圓ヲ畫クコト.

例ヘバ, 出會ハザル二定圓 $C, C'$ ニ切シ, 且ツ圓 $C, C'$ 外ノ定點 $A$ ヲ通ル圓ヲ畫クコト. 但シ圓 $C, C'$ ハ相等シカラズトス.

**解析** 求ムル圓 $O$ ガ畫ケタリトシ, 圓 $C, C'$ ト夫々 $T, T'$ ニ於テ外切シ, 定點 $A$ ヲ通ルトセヨ.




$T, T'$ ヲ結ビ付クル直線ノ延長ト中心線 $CC'$ トノ交點ヲ $S$ トスレバ, $S$ ハ圓 $C, C'$ ノ相似外心ナリ. [154 頁ノ問 4]

* 本節カラ §105 迄ハ後廻シニシテ置イテモ可イ.

$A, S$ ヲ結ビ付クル直線ガ圓 $O$ ノ周ト $K$ ニ於テ交ルトスレバ,

$$SA.SK = ST.ST''$$

然ルニ, 此右邊ハ一定ナルヲ以テ [153 頁, §88 ノ第三], 左邊モ一定ナリ.

故ニ, 點 $K$ ノ位置ハ定マル.

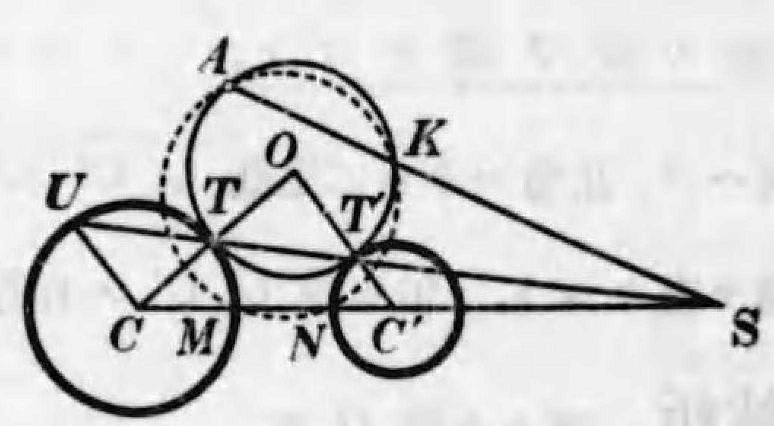
而シテ, 求ムル圓ハ其 $K$ ト定點 $A$ トヲ通リ, 圓 $C$ (又ハ圓 $C'$) ニ切スル圓ナリ. ソコデ,

**作圖**　圓 $C, C'$ ノ相似外心 $S$ ヲ求メ, $A, S$ ヲ結ビ付ケヨ.

$S$ ヨリ二ツノ圓ニ交ル, $SA$ ト異ナル任意ノ直線ヲ引キ, 一組ノ非相應點ヲ $M, N$ トシ (下ノ圖ニ於テハ中心線ガ $C, C'$ ニ交ル場合ノ非相應點ヲ取レリ), $M, N, A$ ヲ通ル圓ヲ畫キ, 其圓ト $SA$ トノ交點ヲ $K$ トセヨ.

$A, K$ ヲ通リ圓 $C$ ニ切スル圓 $O, O'$ ヲ畫ケバ [172 頁, §100], $O, O'$ ガ圓 $C, C'$ ノ兩方ニ外切スルカ, 又ハ兩方ニ內切スル圓ナリ.

**證明**　圓 $O$ ガ $T$ ニ於テ圓 $C$ ニ外切スルトシ, $T, S$ ヲ結ビ付ケ, 其直線ガ圓 $C'$ ノ周ニ出會フ點ノ中, $T$ ノ非相應點ヲ $T''$ トセヨ. サスレバ,




$$ST.ST'' = SM.SN \qquad [153\text{ 頁}, §88\text{ ノ第三}]$$

然ルニ,

$$SM.SN = SA.SK$$

$$\therefore\quad ST.ST'' = SA.SK$$

故ニ, $T, T'', A, K$ ハ一ツノ圓周上ニ在リ,

卽チ, 圓 $AKT$ (卽チ圓 $O$) ハ $T''$ ヲ通ル.

次ニ, $O, C$ ヲ結ビ付クレバ, $OC$ ハ $T$ ヲ通ル.



更ニ, $O, T''$; $T', C'$ ヲ結ビ付ケ, 又 $ST$ 若クハ其延長ガ圓 $C$ ノ周ニ交ル點ヲ $U$ トシ, $U, C$ ヲ結ビ付クレバ, $U, T''$ ハ一組ノ相應點ナルヲ以テ,

$$C'T'' \parallel CU$$

$$\therefore\quad \angle C'T''S = \angle U = \angle CTU = \angle OTT'' = \angle OT''T$$

故ニ $T'C'$, $T'O$ ハ一直線ヲナス.

卽チ, 圓 $O$ ト圓 $C'$ トハ $T'$ ニ於テ外切ス.

同様ニ, 圓 $O'$ ハ圓 $C, C'$ ノ兩方ニ內切ス.

***注意**　相似外心ノ代リニ, 相似內心ヲ取リ, 上ノ作圖ニ倣ッテ作圖スルト, 一般ニ $A$ ヲ通リ圓 $C, C'$ ノ一ツニ外切シ, 他ニ內切スル圓ガ畫ケル.

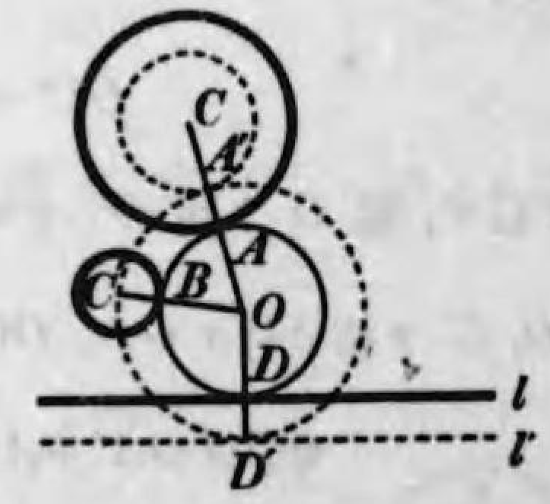
卽チ, 本問題ニハ一般ニ四ツノ解ガアル.

## *104. 定直線と二定圓とに切する圓

**作圖題**　出會ハザル二定圓ト, ソレニ出會ハザル定直線トニ切スル圓ヲ畫クコト.

例ヘバ, 出會ハザル二定圓 $C, C'$ トソレニ出會ハザル定直線 $l$ ニ切スル圓ヲ畫クコト.† 但シ, 圓 $C$ ノ半徑 $r$ ハ, 圓 $C'$ ノ半徑 $r'$ ヨリ大ナリトス.

**解析**　$l$ ニ $D$ ニ於テ切シ, 圓 $C, C'$ ト夫々 $A, B$ ニ於テ外切スル圓 $O$ ガ畫ケタリトセヨ.




サテ, 中心 $O$, 半徑 $OC'$ ナル圓ヲ畫キ, 其圓ト $OD$ ノ延長トノ交點ヲ $D'$ トシ, $OC$ トノ交點ヲ $A'$ トスレバ,

† 圓 $C, C'$ ガ直線 $l$ ノ兩側ニ在ル場合ニハ, 此作圖ノ不可能ナコトハ明カダカラ, 以下ノ說明ニ於テハ, 圓 $C, C'$ ハ $l$ ノ一方ニ在ルトスル.